RESOMMATION RÉELLE

(d'après Ecalle)

Introduction

Le problème :

Comment sommer une série formelle à coefficients réels, à priori divergente, en une fonction à valeurs réelles?

$$\tilde{f}(x) = \sum a_n x^n \longmapsto f\colon \left]0, \alpha\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

“La” solution :

$$f = \mathcal{L} \sum \operatorname{remon}^{(\omega_1, \ldots, \omega_r)^{\prec\!\!\prec}} \operatorname{mul}\,(\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r} \ldots \dot{\Delta}^{-}_{\omega_1})_{\prec\!\!\prec}\, \mathcal{B}\, \tilde{f}$$

(avec la moyenne organique (Ecalle), pour une fonction résurgente $\tilde{f}$ à un temps critique $z = \frac{1}{x}$)

Bon, le problème est résolu, mais il faut expliquer 2 ou 3 trucs...

Borel–Laplace, phénomène de Stokes

Les coefficients d'une série divergente apparaissant dans la solution d'un problème naturel (système dynamique à temps discret ou continu, pQFT, ...) ont un ordre de croissance qui dépend du type d'équation fonctionnelle dont est issue la série.

Les solutions en un point singulier d'une équa diff à coef analytiques ont une croissance au pire Gevrey d'un certain ordre:

$$\left|a_n\right| \leqslant C^n (n!)^s$$

La "procédure standard" pour (re)sommer une série divergente Gevrey–1 consiste à effectuer la transformation de Borel formelle, définie par

$$\mathcal{B}(x^{n+1}) = \frac{\zeta^n}{n!}$$

On obtient alors un germe $\varphi(\zeta)$, à l'origine du "plan des ζ", dit plan de Borel. Souvent, ce germe se prolonge dans "presque toutes" les directions de ce plan, avec une croissance exponentielle à l'infini (dans le cas d'une série admettant un seul "temps critique", égal ici à $z = \frac{1}{x}$; dans le cas général il faut alors utiliser le formalisme décrit ci-dessous dans le contexte de "l'accélérosommabilité").

On peut alors procéder à une transformation de Laplace dans une telle direction licite d_θ :

$$\mathcal{L}_\theta(f)(x) = \int_{d_\theta} \varphi(\zeta) e^{-\frac{\zeta}{x}} d\zeta$$

La fonction ainsi obtenue est définie, holomorphe, et asymptote à la série $\tilde{f}$ dont on est parti, dans tout **un secteur V d'ouverture $\boldsymbol{\pi}$**, bissecté par d_θ.
De plus, les transformations de Borel et de Laplace sont des morphismes d'algèbres différentielles (dans le plan de Borel, le produit est une convolution et la dérivation est la multiplication par $-\zeta$), ce qui garantit que la fonction obtenue est dans ce secteur une solution de l'équa diff. considérée.

On a ainsi sommé, ou resommé, la série divergente, dans le secteur **V**. Lorsqu'on compare des sommes sectorielles obtenues de part et d'autre d'une direction critique, on observe des "discontinuités" : c'est le **phénomène de Stokes**. De façon plus précise, lorsqu'on prolonge une telle solution sectorielle au delà de son secteur initial de validité, la fonction n'est plus nécessairement asymptote à la série formelle dont on est parti, mais à une autre solution formelle; on passe de l'une à l'autre par l'action d'un diffeo agissant sur l'espace des paramètres de la solution formelle générale : c'est le diffeo de Stokes.
Si la direction réelle positive (à ce stade on a vu qu'il y aura lieu de polariser, et en particulier les directions réelle positive et négative vont être traitées

indépendamment) et si l'on prend une telle somme dans une direction voisine de $\mathbb{R}^+$, on obtient certes une somme de $\tilde{f}$ sur un secteur contenant un germe de $\mathbb{R}^+$, mais la restriction de cette somme à ce germe d'intervalle réel est à valeurs complexes. Pour récupérer une somme réelle il va falloir combiner des sommes de part et d'autre de la direction critique, autrement dit prendre en compte le phénomène de Stokes dans cette direction.

Dans la plupart des cas, une série provenant d'un problème naturel (syst. dyn. analytique, pQFT,...) a une transformée de Borel dont le prolongement analytique n'a que des singularités isolées : ce sont des fonctions résurgentes...
L'analyse de ces singularités, au moyen d'opérateurs appropriés (les dérivations étrangères), permet de décrire le phénomène de Stokes, et donc les ambiguïtés de resommation. Elle est donc cruciale pour la resommation réelle.

• Quelques références pour les singularités dans le plan de Borel de séries "issues" de la pQFT:

– V. Rivasseau, From Perturbative to Constructive Renormalization, Princeton U. Press, 1993.

– D. Broadhurst et D. Kreimer, Combinatoric explosion of renormalization tamed by Hopf algebras: 30 – loop Padé-Borel resummation, Phys. Lett., B 475 (2000) 63.

– M. Bellon et F. Schaposnik, Renormalization group functions for the Wess-Zumino model: up to 200 loops with Hopf algebras, arxiv 2008.

• Dans le domaine des systèmes dynamiques, quelques papiers concernés par la problématique de la resommation réelle :

– J. -P. Rolin, F. Sanz and R. Schaefke , Quasianalytic solutions of differential equations and o-minimal structures Proc. London Math. Soc. 95 (2007), no 2., 413-442

– O. Costin, On Borel summation and Stokes phenomena of nonlinear differential systems, Duke Math. J. vol 93, No2 (1998).

– F. Dumortier et Y. Ilyashenko and C. Rousseau, Normal forms near a saddle-node and applications to finite cyclicity of graphics, Ergodic theory and dynamical systems, 22, (2002), 783-818.

Résurgence dans une situation élémentaire

On étudie l'equa diff suivante près de 0 :

$$(E) \qquad (x^4+2\,x^7\,)\,y''\,(x)+(6x^2\,-\,1\,)y(x)=0$$

Elle admet une base de solutions formelles

$$y_1=e^{(\frac{1}{x})}\tilde{f}\,(x) \quad ; \quad y_2\,=e^{(-\,\frac{1}{x})}\;\tilde{g}\,(x)$$

$\tilde{f}\,(x)=x\,(1+3x\,+\dfrac{13}{2}\,x^2+....)\;\; \tilde{g}\,(x)\,=x\,(1-3\,x\,+\dfrac{11}{2}\,x^2+....)$

f et g sont divergentes Gevrey–1 et la transformée de Borel φ de f est elle–même solution d'une équation différentielle linéaire dans le plan de Borel :

$(E_B) \qquad (\zeta^2\,-\,2\,\zeta)\phi^{(4)}\,(\zeta)\,+\,3\,(2\zeta\,-\,2)\,\phi^{(3)}\,(\zeta)\,+\,12\,\phi^{(2)}\,(\zeta)+(2\zeta^2-4\zeta+2)\phi'\,(\zeta)=0$

Donc φ se prolonge avec comme seule singularité éventuelle le point $\omega=2$. De plus, au voisinage de 2, on a :

$$\varphi_{_{\omega=2}}(\zeta-2)=a(\zeta-2)+\frac{1}{2i\pi}\;\mathrm{b}(\zeta-2)\log\,(\zeta\text{ - }2)$$

où a et b sont des germes analytiques.
Le comportement singulier de φ en le point 2 est caractérisé par b. On définit l'opérateur Δ_2 par:

$$\Delta_2\,(\varphi)\,(\zeta)=b(\zeta)$$

Ainsi, Δ_2 "extrait" la partie singulière, puis translate à l'origine du plan des ζ le résultat obtenu.

Plus généralement on définit de même les opérateurs Δ_ω sur l'espace des germes dans le plan des ζ qui se prolongent an ayant des singularités isolées de type logarithmique (la théorie d'Ecalle permet de traiter des singularités isolées arbitraires). Lorsqu'il y a plusieurs singularités dans une direction donnée, il y a lieu de distinguer les contournements (par la gauche ou par la droite) des singularités se trouvant entre l'origine et le point ω auquel on s'interesse. On est alors conduit à définir des opérateurs latéraux droits (Δ^+) et gauches (Δ^-), qui ne sont pas des dérivations, et des moyennes pondérées convenables à partir des prolongement analytiques latéraux, qui seront les dérivations étrangères Δ_ω.
Les Δ_ω mesurent la singularité du prolongement analytique en le point ω; ils agissent trivialement si le point est régulier.
On note par le même symbole l'opérateur agissant sur les séries formelles correspondantes, obtenu par la transformation de Borel formelle inverse.

Proposition 1. *Δ_ω est une dérivation et l'opérateur $\dot{\Delta}_\omega = e^{\frac{-\omega}{x}}\Delta_\omega$ est une dérivation galoisienne (il commute à la dérivation $\frac{d}{dx}$)*

dans notre exemple simple, on peut constater que $\Delta_2(\varphi)(\zeta) = A_2\,\psi(\zeta)$, où A_2 est un nombre.

En quelque sorte, la fonction ψ ressurgit en la singularité $\omega = 2$ de la fonction φ.

Cette équation de résurgence peut s'écrire de la façon suivante en terme d'action de $\dot{\Delta}_2$ sur la solution générale $C_1y_1 + C_2y_2$ (puisque $\Delta_2(y_2) = 0$, car ψ n'a pas de singularité en $\omega = 2$):

$$\dot{\Delta}_2(y) = A_2 \frac{\partial}{\partial C_2}(y)$$

C'est un exemple d'équation du pont : la dérivation étrangère agit comme un opérateur différentiel ordinaire. On a ainsi un pont entre le calcul différentiel étranger et le calcul différentiel ordinaire. Ce fait est général : les séries formelles divergentes figurant dans la solution générale formelle d'un système dynamique à coeff analytiques sont résurgentes et l'action des dérivations étrangères se traduit par l'action d'opérateurs différentiels ordinaires (dont les coeff sont des invariants de la classe analytique de l'équation considérée).

L'opérateur $\dot{\Delta}_2$ est le générateur infinitésimal du difféo de Stokes $S_{\mathbb{R}^+}$ dans la direction $\mathbb{R}^+$. La matrice de $S_{\mathbb{R}^+}$ dans la base considérée est une matrice unipotente :

$$M_{\mathbb{R}^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour le problème de la sommation réelle des séries φ et ψ ou de la la solution formelle y, une idée toute simple consiste à considérer que puisque le difféo de Stokes compare les sommes y_- et y_+ dans des directions de part et d'autre de $\mathbb{R}^+$, en faisant agir sa racine carrée (le difféo est unipotent, $\sqrt{S} =$

$\exp(\frac{1}{2}\log S)$), sur une somme latérale on obtient une somme réelle.

Cette idée marche (dans ce cas linéaire)!!

$$y_r = y_- \sqrt{S}$$

est une somme réelle et le procédé, par construction, respecte les structures d'algèbres différentielles.

Remarque: une idée encore plus simple aurait consisté à prendre $\frac{1}{2}(y_- + y_+)$, mais ça ne respecte pas le produit.

Moyennes uniformisantes

Lorsque $\mathbb{R}^+$ est une direction critique, il faut prendre en compte le phénomène de Stokes dans cette direction afin d'uniformiser la fonction considérée, qui est multiforme sur $\mathbb{R}^+$. Dans les cas non-linéaires (ou en pQFT ...), les fonctions seront toujours résurgentes, mais avec génériquement une infinité de singularités isolées sur $\mathbb{R}^+$.
Une moyenne uniformisante (Ecalle) est définie par un système de poids qui satisfait aux relations de compatibilité suivantes:

$$\sum_{\varepsilon_r=\pm} \boldsymbol{m}^{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_r \\ \omega_1,\dots,\omega_i,\dots,\omega_r}} = \boldsymbol{m}^{\substack{\varepsilon_1,\dots,\,\varepsilon_{i+1},\dots,\varepsilon_r \\ \omega_1,\dots,\omega_i+\omega_{i+1},\dots,\omega_r}}$$

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm} \boldsymbol{m}^{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_r \\ \omega_1,\dots,\omega_i,\dots,\omega_r}} = \boldsymbol{m}^{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_{r-1} \\ \omega_1,\dots,\omega_i,\dots,\omega_{r-1}}} \quad \forall i < r$$

(ω_i est l'accroissement entre 2 singul. success. η_i, η_{i+1})

et son action est exprimée par :

$$\boldsymbol{m}\varphi(\zeta) = \sum \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_r}_{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r} \varphi^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_r}_{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r}(\zeta)$$

pour $\zeta \in\,]\eta_r,\ \eta_{r+1}\ [$. $\varphi^{\binom{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\omega}}}$ désigne le prolongement analytique de φ sur cet intervalle, obtenu en ayant contourné les singularités antérieures η_i par la droite (si $\varepsilon_i = +$) ou par la gauche (si $\varepsilon_i = -$). On considère ainsi toutes les branches obtenues en contournant les singularités, par la droite ou par la gauche,

On se place dans le cas où la fonction prolongée est intégrable en toutes ses singularités (cf les sing. logarithmiques dans l'exemple linéaire ci-dessus); la théorie d'Ecalle permet de traiter la situation générale, avec le formalisme des majeurs et des mineurs (ou encore permet de s'y ramener, à l'aide de "pseudodécélérations"...).
On a alors obtenu une fonction qui appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$.

$\boldsymbol{m}$ sera une bonne moyenne si :

1. $\boldsymbol{m}$ envoie un germe réel sur une fonction réelle
2. $\boldsymbol{m}$ respecte la convolution
3. $\boldsymbol{m}$ respecte la croissance latérale

Un exemple de moyenne est la moyenne uniforme mun, définie par:

$$\mathbf{mun}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_r}_{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r} = \frac{(2p)!(2q)!}{4^{p+q}p!q!(p+q)!}$$

Elle correspond à prendre la racine carrée d'itération du difféo de Stokes; elle vérifie P1 et P2, mais pas P3. Elle convient dans les cas linéaires comme ci-dessus, toutefois, mais échoue dans les cas non–linéaires où il y a génériquement une infinité de singularités "indépendantes" sur la direction critique $\mathbb{R}^+$.

Les relations de compatibilité font qu'une moyenne est caractérisée par l'un ou l'autre des moules latéraux définis par :

$$\mathrm{rem}^{\boldsymbol{\omega}} = (-1)^r \boldsymbol{m}^{+,\ldots,+,\ldots,+}_{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r}$$

$$\mathrm{lem}^{\boldsymbol{\omega}} = (-1)^r \boldsymbol{m}^{-,\ldots,-,\ldots,-}_{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r}$$

Deux moyennes sont reliées par un automorphisme de passage :

$$\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}_1\binom{\boldsymbol{m}_1}{\boldsymbol{m}_2}$$

Or, l'automorphisme (de Stokes!) **lur** qui fait passer de mul (tous les $\varepsilon_i = -$) à mur (tous les $\varepsilon_i = +$) se décompose sous la forme

$$\mathrm{lur} = 1 + \sum_{\eta > 0} \dot{\Delta}^-_\eta$$

et de même pour son inverse rul:

$$\mathrm{rul} = 1 + \sum_{\eta > 0} \dot{\Delta}^{+}_{\eta}$$

Les composantes $\dot{\Delta}^{-}_{\eta}$ (ou $\dot{\Delta}^{+}_{\eta}$) vont constituer des éléments de base d'une algèbre graduée complétée et les autres automorphismes de passage vont s'exprimer dans cette base.

Or, les coefficients du moule rem sont précisément les nombres qui expriment l'automorphisme de passage de **mul** à $\boldsymbol{m}$ en fonction de l'automorphisme **rul**.

L'action de $\boldsymbol{m}$ se traduit alors par la formule moulienne suivante:

$$\boldsymbol{m}(\varphi) = \sum \mathrm{rem}^{\boldsymbol{\omega}}\, \mathrm{mul}\ \dot{\Delta}^{-}_{\omega_r} \ldots \dot{\Delta}^{-}_{\omega_1}(\varphi)$$

La moyenne satisfait P1 si rem vérifie une propriété simple et elle respecte la convolution si le moule rem est symétrel. La propriété cruciale P3 s'exprime quant à elle en terme de "normes" (il s'agit en fait de semi–normes définies sur un espace fonctionnel adéquat) des opérateurs $\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r} \ldots \dot{\Delta}^{-}_{\omega_1}$. Or, et c'est en cela qu'il est essentiel de disposer de l'équation du pont, chaque $\dot{\Delta}^{-}_{\omega_i}$ agit sur 'intégrale formelle (penser à la solution générale formelle dans l'exemple linéaire ci–dessus) comme un opérateur différentiel ordinaire, avec des coefficients A_{ω} qui ont une croissance géométrique.

Dans ce cadre, le fait, pour la fonction moyennée $\boldsymbol{m}\varphi$ de conserver une croissance exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ va correspondre à une majoration de type géométrique (en C^r) pour les opérateurs $\dot{\Delta}^-_{\omega_r}...\dot{\Delta}^-_{\omega_1}$. Malheureusement, lorsqu'on majore brutalement la composée de r opérateurs différentiels ayant chacun une "croissance géométrique" , on n'obtient pas mieux qu'une estimée en $r!C^r$. Pour être plus fin il est indispensable de recourir à une combinatoire sur les arbres, de façon plus précise :

pour contrôler le comoule $\dot{\Delta}^-_{\omega_r}...\dot{\Delta}^-_{\omega_1}$ il est indispensable de coarborifier .

Comme toujours, lorsque l'on a recours à l'arborification, le **point crucial** consiste alors à prouver que l'arborifié (arborification contractante ici car il s'agit d'un moule symmétrel) du moule qui est contracté avec le comoule que l'on coarborifie conserve une majoration géométrique : $|M^{\boldsymbol{\omega}^{\prec\!\!\!\prec}}| \leqslant C^r$, et non pas $|M^{\boldsymbol{\omega}^{\prec\!\!\!\prec}}| \leqslant r!C^r$

La moyenne organique mon

Ses poids sont définis par la formule récursive suivante:

$$\textbf{mon}^{\binom{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_r}{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_r}} = \textbf{mon}^{\binom{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_{r-1}}{\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_{r-1}}} P_r$$

avec $P_r = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_r}{\omega_1 + \ldots \omega_r}$ si $\varepsilon_{r-1} = \varepsilon_r$

et $P_r = \frac{1}{2}\frac{\omega_r}{\omega_1 + \ldots \omega_r}$ si $\varepsilon_{r-1} \neq \varepsilon_r$

On a donc une formule close pour le moule latéral droit:

$$\mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}} = \prod_{1}^{r} \left(\frac{\frac{1}{2}\omega_i}{\omega_1 + \ldots + \omega_i} - 1\right)$$

On vérifie de suite que mon respecte P1 (les poids sont réels), puis par récurrence sur r que remon est un moule symétrel (donc mon satisfait P2), et enfin que remon a une croissance géométrique (en fait $|\mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}}| \leqslant 1$).

Ici, l'arborifié du moule qui nous interesse n'a pas de formule close, donc on n'a pas accès directement à une majoration géométrique pour $\mathrm{remon}^{\lessdot}$ et il faut en fait considérer l'antiarborifié (contractant) de remon, défini par :

$$\mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}^{\gtrdot}} = \sum_{\boldsymbol{\omega}^{\gtrdot} \ll \boldsymbol{\omega}} \mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}}$$

On somme cette fois sur toutes les séquences
$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$, avec sur l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$ un ordre antiarborescent (chaque élément a au plus un successeur).
Le résultat technique clef est ici le suivant:

Proposition 2. *L'antiarborifié contractant de remon a une formule close du même type:*

$$\mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}^{\gtrdot}} = \prod_{1}^{r} \left(\frac{\frac{1}{2}\omega_i}{\sum_{j \leqslant i} \omega_j} - 1\right)$$

Conséquence : $|\mathrm{remon}^{\succ\!\!\!\succ}| \leqslant 1$, et cela entraîne que l'arborifié contractant de remon a une croissance géométrique:

$$|\mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}\prec\!\!\!\prec}| \leqslant C^r \ \ (C = 2\,\text{convient})$$

Ainsi, mon est une bonne moyenne!

Il en existe bien d'autres : moyenne de Catalan (J Ecalle – F Menous); induites par diffusion; par pseudodiffusion; ...).

Récapitulation

– On part d'une série divergente réelle issue d'un système dynamique pour lequel on connaît l'équation du pont.

– On considère sa transformée de Borel $\varphi = \mathcal{B}f$ (on se place ici dans le cas d'un système "à un seul niveau, de rang 1" : la série est Gevrey–1 et résurgente en la variable critique $z = \frac{1}{x}$).

– On fait agir la moyenne organique mon pour uniformiser φ sur l'axe réel positif:

$$\varphi \longmapsto \mathrm{mon}\,(\varphi) = \sum \mathrm{mon}^{\binom{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\omega}}}\, \varphi^{\binom{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\omega}}}$$

– On exprime cette action en fonction du moule latéral droit : $\mathrm{mon}(\varphi) = \sum \mathrm{remon}^{\boldsymbol{\omega}}\, \mathrm{mul}\ (\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r} \ldots \dot{\Delta}^{-}_{\omega_1})$

– Pour contrôler l'action du comoule $\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r}...\dot{\Delta}^{-}_{\omega_1}$, dont les composantes sont, grâce à l'équation du pont, des opérateurs différentiels ordinaires, on est conduit à coarborifier. Alors, l'action se réécrit sous la forme :

$$\operatorname{mon}(\varphi) = \sum \operatorname{remon}^{(\omega_1,\ldots,\omega_r)^{\lessdot}} \operatorname{mul}(\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r}...\dot{\Delta}^{-}_{\omega_1})_{\lessdot}$$

– Comme l'arborifié (contractant) de remon a une croissance géométrique, mon(φ) a une croissance exponentielle sur l'axe réel.

– On peut alors appliquer la transformation de Laplace sur l'axe réel :

$$f = \mathcal{L} \sum \operatorname{remon}^{(\omega_1,\ldots,\omega_r)^{\lessdot}} \operatorname{mul}(\dot{\Delta}^{-}_{\omega_r}...\dot{\Delta}^{-}_{\omega_1})_{\lessdot}\, \mathcal{B}\, \tilde{f}$$

Et voila.

Références

– J. Ecalle, Twisted resurgence monomials and the canonical spherical synthesis of local objects, in Analyzable functions and Applications, AMS Contemporary Mathematics, vol 373 (O. Costin, M. Kruskal and A. Macintyre editors.

– J. Ecalle et F. Menous, Well behaved convolution averages and the non accumulation theorem for limit cycles, in The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th problem, World Scientific, 1996.

– F. Fauvet, Real summation with Ecalle's organic average, preprint 2008.