HYPERLOGARITHMES ET HYPERZETAS.

(fonctions)		(nombres)		(nombres)
Hyperlogarithmes	$\Longrightarrow$	Hyperzêtas	$\subset$	Périnomaux
"monômes"		"moniques"		"moniques"

Plan.

Définition et propriétés de stabilité.

* Deux produits distincts.
* Deux familles de dérivations exotiques
* Trois codages distincts apportant chacun ses symétries.

Trimorphie des hyperzêtas

* irréductibles
* dimensions

Dimorphie des multizêtas

* décomposition canonique en irréductibles
* décomposition canonique en périnomaux
* élimination des "1".

Rôle crucial ici des <u>moules</u> et <u>bimoules</u>.

Sans eux, la plupart des calculs seraient inabordables.

Pis encore, la plupart des objets ‖ notions ‖ resteraient inexprimables.

Définition – Stabilité.

HH2

Hyperlogs élémentaires H_s de poids $\underline{s}$.

Définis par la récursion :

$$H_s(\zeta) = \int_{a_s}^{\zeta} \frac{H_{s-1}(\zeta_1)\, d\zeta_1}{\zeta_1 - b_s} \quad \left(\text{et bien sûr } H_0 := 1\right)$$

H_s dépend donc de deux séquences $\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_s \\ b_1 \ldots b_s \end{pmatrix}$ une seule séquence suffit.

Définition très redondante. Une seule séquence suffit.

Stabilité pour la postcomposition.

hyperlog $\circ$ homographie $=$ hyperlog . .

En particulier : postcomposition par $1/z$. Sphère de Riemann.

Stabilité pour la convolution $\bar{*}$

$$\begin{cases} A \,\bar{*}\, B(\zeta) = \int_0^{\zeta} A(\zeta - \zeta_1)\, dB(\zeta_1) \\ 1 \,\bar{*}\, B^{\cdot} = \dot{B} \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} \zeta \text{ proche de } 0 \\ A(0) = B(0) = 0 \end{array}$$

Stabilité pour la multiplication ponctuelle $\times$

Stabilité pour les dérivations exotiques Δ_ω et ∇_ω (définies ci-après).

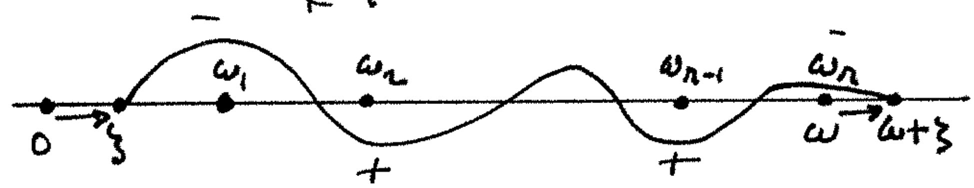
Autres propriétés de stabilité.

Dérivations exotiques Δ_ω et ∇_ω.

Dérivations relatives à la convolution : $\{\Delta_\omega\,;\ \omega \in \mathbb{C}_\bullet\}$

$$\Delta_\omega H(\zeta) := \sum_{\varepsilon_r = \pm} \varepsilon_r \, \lambda^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r-1}} \, H^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}(\zeta+\omega)$$

avec $\lambda^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r-1}} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$ $\quad\left\{ \text{pour } \dfrac{\zeta}{\omega} \ll 1 \text{ (et ailleurs par prolongement analytique)} \right.$



Dérivations relatives à la multiplication : $\{\nabla_\omega\,;\ \omega \in \{0\} \cup \mathbb{C}_\bullet\}$

Remarque : localement en tout point ζ_0, tout hyperlog est un polynôme en $\log(\zeta-\zeta_0)$, à coefficients holomorphes en ζ_0.

Définition de ∇_0 : $\quad \nabla_0 H(\zeta) := \dfrac{\partial}{\partial \Lambda} H(\zeta)$ $\quad\left\{ \text{où } \Lambda = \log\zeta \text{ est envisagé comme variable indépendante} \right\}$

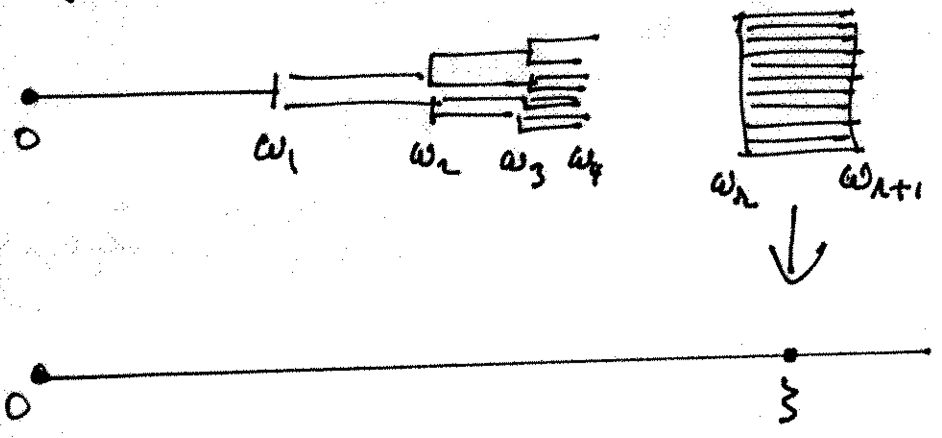
Définition de ∇_ω, $\omega \neq 0$. $\quad \nabla_\omega := T_\omega^{-1}\, \nabla_0\, T_\omega$
avec les translations uniformisantes standard (infra).

Analogies // différences entre les Δ_ω et les ∇_ω.

- * ~~toutes~~ chaque famille engendre une algèbre de Lie libre.
- * coïncident dans les cas « génériques »
- * loi de conversion sur ~~[illegible]~~ l'espace des hyperlogs.
- * les Δ_ω agissent sur toutes les fonctions ramifiées.
- * les ∇_ω n'agissent que sur des espaces bien plus restreints.
- * les Δ_ω translatent les singularités ; les ∇_ω les laissent en place.

HH4 Projections et translations uniformisantes. HH4

Projection sur $\mathbb{R}^+$ compatible avec la convolution.



$$(\mathrm{proj}\, H)(\xi) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \mu^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}\, H^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(\xi)$$

avec $\mu^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = \dfrac{(2p)!\,(2q)!}{4^{p+q}\,(p+q)!\,p!\,q!}$ $\quad\Big\|\quad$ $p :=$ nb de $+$; $q :=$ nb de $-$

Projection sur $\mathbb{R}^+$ compatible avec la multiplication.

Construite par translations uniformisantes à partir de 0.

Translations uniformisantes compatibles avec la multiplication

Tout se ramène à la traversée d'une singularité logarithmique.

$$\begin{cases} H : \quad \xi_0 & H(\xi) =: \sum |\log^k(\xi-\xi_0)|\, \overset{\text{régulier}}{R_k(\xi-\xi_0)} \text{ à gauche de } \xi_0 \\ & \quad\downarrow \\ H : \quad \xi_0 & H(\xi) := \sum [\log^k(\xi-\xi_0)]\, R_k(\xi-\xi_0) \text{ à droite de } \xi_0 \end{cases}$$

Propriétés : $\begin{cases} T_{\omega_1} T_{\omega_2} = T_{\omega_1+\omega_2} & \text{si } \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R} \\ T_{\omega_1} T_{\omega_2} \neq T_{\omega_1+\omega_2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Analogies/différences entre les deux uniformisations.

H_5 Les trois codages et leurs symétries. HH_5

Le codage alternal $\{\omega_i\}$ $(\omega_i \in \mathbb{C})$

$$Va^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \int_{0<\xi_1<\dots<\xi_r<\|\omega\|} \frac{d\xi_1\dots d\xi_r}{(\check{\omega}_1-\xi_1)\dots(\check{\omega}_r-\xi_r)}$$

avec $\check{\omega}_i := \omega_1+\dots+\omega_i$

Hyp. de généricité : $\omega_1 \neq 0$; les $\check{\omega}_i$ non-alignés.

Le codage symétral $\{\alpha_i\}$ $(\alpha_i \in \mathbb{C})$

$$Wa^{\alpha_1,\dots,\alpha_r} := (-1)^{l_0} \int_{0<\xi_1<\dots<\xi_r<1} \frac{d\xi_1\dots d\xi_r}{(\alpha_1-\xi_1)\dots(\alpha_r-\xi_r)}$$

avec $l_0 =$ nb de α_i nuls.

Hyp. de généricité : $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_r \neq 1$; $0, 1, \alpha_i$ non-alignés.

Le codage symétrel $\left\{\begin{matrix}\beta_i\\ s_i\end{matrix}\right\}$ $(\beta_i \in \mathbb{C}\ ;\ s_i \in \mathbb{N}^*)$

$$Ze^{\binom{\beta_1\ \dots\ \beta_r}{s_1\ \dots\ s_r}} := \sum_{n_1>n_2>\dots n_r>1} n_1^{-s_1}\dots n_r^{-s_r}\, b_1^{n_1}\dots b_r^{n_r}$$

avec $b_i = e^{\beta_i}$. Hyp. pour assurer la convergence : $\begin{cases} |b_i| \leq 1 & \forall i \\ (b_1, s_1) \neq (1,1) \end{cases}$

"Homogénéité"!

Extensions respectueuses des symétries.

$\Longrightarrow$ $Va^\bullet$ alternal

$\Longrightarrow$ $Wa^\bullet$ symétral

$\Longrightarrow$ $Ze^\bullet$ symétrel

sans aucune restriction

Trimorphie // Dimorphie.

HH_6

Formules de conversion ("ess" = "essentiellement")

$$Va^{\omega_1,\dots,\omega_{l+1}} \overset{\text{"ess"}}{=} (-1)^{l_0}\, Wa^{\alpha_1,\dots,\alpha_l} \overset{\text{"ess"}}{=} Ze^{\binom{\beta_1\ \dots\ \beta_r}{s_1\ \dots\ s_r}}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_i = (\omega_1+\dots+\omega_i)/(\omega_1+\dots+\omega_{l+1}) = \check{\omega}_i / \check{\omega}_{l+1} \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_l) = (\alpha_1^*, 0^{(s_1-1)},\dots,\alpha_r^*, 0^{(s_r-1)}) \quad (\text{avec } \alpha_i^* \neq 0) \\ (\beta_1,\dots,\beta_r) = (\dots, \alpha_3^*\alpha_2^*\alpha_1^*, \alpha_2^*\alpha_1^*, \alpha_1^*) \end{cases}$$

Domaine discret de trimorphie : les holozêtas.

$\omega_i, \alpha_i, b_i\ (=e^{\beta_i}) \in \mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Z}$, par "homogénéité").

Problèmes : irréductibles ? dimensions ? La trimorphie est-elle effective ?

Tout reste à faire.

Domaine discret de dimorphie : les multizêtas $\begin{cases}\text{incolores}\\ \text{colorés}\end{cases}$

$\alpha_i, b_i \in$ Racines de l'unité

Théorie très avancée.

Méthode : {scalaires $\Rightarrow$ séries génératrices} + {structure de flexion}

$$\begin{cases} Zag^{\binom{u_1\ \dots\ u_r}{\varepsilon_1\ \dots\ \varepsilon_r}} := \sum_{1\le s_i} Wa^{\varepsilon_1, 0^{(s_1-1)},\dots,\varepsilon_r, 0^{(s_r-1)}}\, u_1^{s_1-1} u_{12}^{s_2-1} \dots u_{12\dots r}^{s_r-1} \\ Zig^{\binom{\varepsilon_1\ \dots\ \varepsilon_r}{v_1\ \dots\ v_r}} := \sum_{1\le s_i} Ze^{\binom{\varepsilon_1\ \dots\ \varepsilon_r}{s_1\ \dots\ s_r}}\, v_1^{s_1-1} \dots v_r^{s_r-1} \end{cases}$$

avec $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (= Racines de l'unité en notations multiplicatives).

Reformulation d'ensemble :

$$\boxed{Zag^\bullet \text{ symétral} \; ; \; Zig^\bullet \text{ symétril} \; ; \; Zag^\bullet \underset{\text{swap}}{\overset{\text{"ess"}}{\longleftrightarrow}} Zig^\bullet}$$

Involution de base : "swap"

$$\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_r, & \dots, & v_2 - v_3, & v_1 - v_2 \\ u_1 + \dots + u_r, & \dots, & u_1 + u_2, & u_1 \end{pmatrix}$$

Contractions de base : $\{\ulcorner, \urcorner, \llcorner, \lrcorner\}$

$$w^1 \; w^2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & \underline{\underline{v_3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\overline{u_4 \quad u_5 \quad u_6}} \\ v_4 \quad v_5 \quad v_6 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{w^1}\urcorner \, \underline{\llcorner w^2} = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4' & u_5' & u_6' \\ v_4' & v_5' & v_6' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1, u_2, u_{3456} \\ v_1, v_2, v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4, & u_5, & u_6 \\ v_4 - v_3, & v_5 - v_3, & v_6 - v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} u_i v_i = \sum_{i=1}^{6} u_i' v_i'$$

Mêmes définitions pour $\ulcorner$ et $\lrcorner$

<u>Remarque</u> : pour contracter une séquence w il faut connaître ses voisins.

Structure de flexion. ARI//GARI

Algèbre ARI : $\quad C^{\bullet} = \mathrm{ari}(A^{\bullet}, B^{\bullet}) \Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
C^{w} = &+ \sum_{w=bc} \left(A^{b} B^{c} - B^{b} A^{c}\right) \\
&+ \sum_{w=bcd} \left(A^{\lfloor c} B^{b\rceil d} - B^{\lfloor c} A^{b\rceil d}\right) \\
&+ \sum_{w=abc} \left(A^{a\lceil c} B^{b\rfloor} - B^{a\lceil c} A^{b\rfloor}\right)
\end{aligned}
$$

Groupe GARI : $\quad C = \mathrm{gari}(A^{\bullet}, B^{\bullet}) \Longleftrightarrow$

$$
C^{w} = \sum_{w = a^1 b^1 c^1 \dots a^s b^s c^s a^{s+1}} A^{\lceil b^1 \rceil \dots \lceil b^s \rceil} \times \dots
$$

$$
\dots \times B^{a^1 \rfloor} \dots B^{a^s \rfloor} B^{a^{s+1}} \; B_{*}^{\lfloor c^1} \dots B_{*}^{\lfloor c^s}
$$

avec $B_{*}^{\bullet} := \mathrm{invmu}(B^{\bullet})$

---

ari respecte
- la push-invariance et la pus-variance.
- les symétries simples al, il, ul etc
- les symétries doubles al/al, al/il, al/ul etc.

---

gari respecte
- ″ ″
- les symétries simples as, is, us etc..
- les symétries doubles as/as, as/is, as/us etc..

Trifactorisation

$$\mathrm{Zag}^\bullet = \mathrm{gari}\Big(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{porte } \pi^2}}{\mathrm{Zag}^\bullet_{I}}\ ,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{porte les irréductibles} \\ \text{pairs}}}{\mathrm{Zag}^\bullet_{II}}\ ,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{porte les irréductibles} \\ \text{impairs}}}{\mathrm{Zag}^\bullet_{III}}\Big)$$

Décomposition canonique en irréductibles.

Il existe un moule $\mathrm{loma}^\bullet = \sum_{s\in\{3,5,7\dots\}} \mathrm{loma}^\bullet_s$ (composante de poids s)

tel que
- $\mathrm{loma}^\bullet \in \underline{al}/\underline{il}$
- $\mathrm{loma}^\bullet_s \in \underline{al}/\underline{il} \quad \forall s$
- $\mathrm{loma}_s^{w_1,\dots,w_r} =$ polynôme de degré $s-r$ en $(u_1,\dots,u_r)$
- $\mathrm{lom}_s^{w_1} = u_1^{\,s-1}$

et tel que :

$$\begin{cases} \mathrm{Zag}^\bullet_{II} = \displaystyle\sum_{r \text{ pair}} \sum_{s_i\in\{3,5,7\dots\}} \mathrm{Irr}_{II}^{s_1,\dots,s_r}\ \mathrm{preari}(\mathrm{loma}^\bullet_{s_1},\dots,\mathrm{loma}^\bullet_{s_r}) \\ \mathrm{Zag}^\bullet_{III} = \displaystyle\sum_{r \text{ impair}} \sum_{s_i\in\{3,5,7\dots\}} \mathrm{Irr}_{III}^{s_1,\dots,s_r}\ \mathrm{preari}(\mathrm{loma}^\bullet_{s_1},\dots,\mathrm{loma}^\bullet_{s_r}) \end{cases}$$

Les deux moules symétrals $\mathrm{Irr}^\bullet_{II}$, $\mathrm{Irr}^\bullet_{III}$ entièrement déterminés par ces relations peuvent être regroupés en un ~~seul~~ moule symétral unique :

$$\mathrm{Irr}^\bullet = \mathrm{Irr}^\bullet_{II} \times \mathrm{Irr}^\bullet_{III} \quad \text{(multiplication moulienne)}$$

qui fournit un système complet et libre

$$\left\{ \mathrm{Irr}^{s_1,\dots,s_r}\ ;\ r\in\mathbb{N}^*;\ s_i\in\{3,5,7,\dots\} \right\}$$

d'irréductibles canoniques pour les multizêtas incolores.

Remarque : construction de $\mathrm{loma}^\bullet$ à partir de $\mathrm{pal}^\bullet$ et $\mathrm{tal}^\bullet$

Réinterprétation de la décomposition en irréductibles

HH$_{10}$

Le moule loma$^\bullet$ (très légèrement modifié) peut être envisagé sous un autre aspect : comme prenant ses valeurs, non plus dans l'espace des séries formelles, mais des fonctions méromorphes. En effet :

$$\begin{cases} \text{loma}^{w_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u_1} + \frac{1}{1+u_1}\right) \\ \text{loma}^{w_1,\ldots,w_r} \equiv \begin{cases} \text{fonction méromorphe de } (u_1,\ldots,u_r) \\ \text{aux multipoles entiers portant des multirésidus entiers} \end{cases} \end{cases}$$

Ce loma$^\bullet$ peut être soumis à des dilatations entières :

$$\left(\mathcal{S}^n \text{ loma}\right)^{\binom{u_1,\ldots,u_r}{0,\ldots,0}} := n^{-r} \text{ loma}^{\binom{u_1/n,\ldots,u_r/n}{0,\ldots,0}}$$

qui respectent sa double symétrie al/il mais déplacent ses pôles. On a alors un autre type de décomposition :

$$\begin{cases} \text{Zag}^\bullet_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{r \text{ pair}} \sum\limits_{n_i \in \mathbb{N}^*} \text{Urr}_{\mathrm{II}}^{n_1,\ldots,n_r} \text{ preari}\left(\mathcal{S}^{n_1}\text{loma},\ldots,\mathcal{S}^{n_r}\text{loma}\right) \\ \text{Zag}^\bullet_{\mathrm{III}} = \sum\limits_{r \text{ impair}} \sum\limits_{n_i \in \mathbb{N}^*} \text{———} \, // \, \text{———} \end{cases}$$

avec des moules symétrals Urr$^\bullet_{\mathrm{II}}$, Urr$^\bullet_{\mathrm{III}}$ bien déterminés qui sont, pour chaque longueur r, des fonctions périnomales de leurs indices $(n_1,\ldots,n_r)$.

Que sont donc les fonctions périnomales ?

$\Rightarrow$

onctions périnomales (ou "périnomes")

Une fonction $\rho : \begin{cases} \mathbb{Z}^r \to \mathbb{C} \\ \underline{n} \to \rho(\underline{n}) \end{cases}$

est dite périnomale (d'arité r et de profondeur δ) ssi :

(i) pour tout $\delta' \leq \delta$ il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_{\delta'} \in Sl_r(\mathbb{Z})$ tels que $\sigma_1\rho, \dots, \sigma_{\delta'}\rho$ soient linéairement indépendants

(ii) pour tout $\delta' > \delta$ et tous $\sigma_1, \dots, \sigma_{\delta'} \in Sl_r(\mathbb{Z})$ les fonctions $\sigma_1\rho, \dots, \sigma_{\delta'}\rho$ sont linéairement dépendants.

* Nombreuses propriétés de stabilité.
* Toute fonction périnomale induit une représentation linéaire de $Sl_r(\mathbb{Z})$ de dim. finie

Nombres périnomaux (ou "périnomaux")

Ce sont des nombres de la forme :

$$\rho^{\#}(s_1, \dots, s_r) = \sum_{n_i \in \mathbb{N}^*} \rho(n_1, \dots, n_r)\, n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r}$$

pour une fonction périnomale ρ.

) Les Urr, Urr_{II}, Urr_{III} sont des fctions périnomales de

*) Les Irr, Irr_{II}, Irr_{III} sont des nombres périnomaux

Algorithme d'élimination des "1".

Th: Tout multizêta $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ "incolore" est somme finie, à coefficient rationnels, de multizêtas "1-free" (i.e $s_i \geq 2$)

Etape 1: identités d'appariement.

$$\underset{\text{bialternal}}{M^\bullet} = \sum_{\begin{cases}(+) v_j \text{ blancs}\\ (-) v_j \text{ noirs}\end{cases}} \varepsilon_{\text{flex}}\ \underset{\text{(internes)}}{\text{flexion}}(M^\bullet)$$

$\varepsilon_{\text{flex}} \in \{0,+,-\}$

Etape 2: identités de redistribution

Faisant $\underline{\underline{u_i = 0}}$ et $\underline{\underline{v_j \text{ noirs} = 0}}$ (ci-dessus) on obtient des identités qui "redistribuent" la multiplicité des $\underset{\text{(noirs)}}{v_j = 0}$ sur les $\underset{\text{(blancs)}}{v_j \neq 0}$

Etape 3: identités de reconstitution.

$$\underset{\begin{cases}\text{bialternal}\\ u_i = 0\end{cases}}{M^\bullet} = \text{induc.}\ \underbrace{\text{ess}(M^\bullet)}$$

"partie essentielle" de $M^\bullet$

i.e. termes divisibles par $v_1 v_2 \dots v_r$

Etape 4: élimination des "1" chez les multizêtas.

Les irréductibles Irr sont associés à des polynômes bialternaux (longueur $\underline{\underline{r}}$; degré $\underline{\underline{d}}$; poids $s = r+d$) dans $\mathcal{Z}ig^\bullet$:

$$\text{Irr}^{\sigma_1,\dots,\sigma_r} \quad M^{\binom{\sigma_1 \dots \sigma_r}{v_1 \dots v_r}} = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_r = s} \zeta(s_1,\dots,s_r)\, v_1^{s_1-1} \dots v_r^{s_r-1}$$

$$\begin{cases}\sigma_i \in \{3,5,7\dots\}\\ \sigma_1 + \dots + \sigma_r = s\end{cases}$$

Montrer l'éliminabilité des "1" revient à montrer que le polynôme $M^\bullet$ tout entier peut être reconstitué à partir de sa "partie essentielle", i.e. divisible par $v_1 \dots v_r$.

Détails dans le texte "Nettoyage des multizêtas"