Le $q$-analogue du groupe fondamental

Sauvage

(cas local)

J.P. Ramis

(† J. Sauloy, C. Zhang)

Paris, le 20 mai 2008
- INTRODUCTION -

Le problème de départ est celui de la classification des équations linéaires aux q-différences (posé et partiellement résolu par G.D. Birkhoff).

On peut voir les choses en termes :
- d'équations d'ordre n ;
- de systèmes d'ordre 1 et de rang n ;
- de modules [aux q-différences].

Nous commençons par le point de vue des systèmes :

\[ |q| > 1 \quad ; \quad \sigma_q f(z) = f(qz) \]

\[ \sigma_q X = A X \]

\[ A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) ; \]

\[ \mathbb{R} \text{ is a "field of functions";} \]

\[ \mathbb{R} = \mathbb{C}(z) \quad (\text{global case}) \]

\[ (K =) \quad \mathbb{R} = \mathbb{C}[[z^\pm 1]] = \mathbb{C}(\mathbb{E}(z^\pm 1)) \quad (\text{local}) \]

\[ (\hat{K} =) \quad \mathbb{R} = \mathbb{C}[[z]] [z^\pm 1] = \mathbb{C}((z)) \quad (\text{formal}) \]
Relation d'équivalence (transformation de jauge):

\[ X = PY ; \quad P \in \text{GL}_n(k) \]

\[ (k, \sigma_\theta): \text{corp aux } \sigma_\theta \text{-différences} \]

\[ g_X = g_P g_Y = AX = APY \]

\[ g_Y = (g_P)^{-1} APY = BY \]

\[ B = (g_P)^{-1} AP \]

Opération de \( \text{GL}_n(k) \) sur \( \text{GL}_n(k) \).

Orbites:

\[ k = \mathbb{C}(z) ; \quad \text{singularités: } \{0, \infty\} \]

Pour \( f(z) = \frac{z}{z-3} \):

\[ k^* = \mathbb{C}^* \]

\[ L = M(\mathbb{C}^*)' \]

\[ L^6 = \text{corps des fonctions elliptiques} \]

Sur \( \text{Eq} = \mathbb{C}^*/\mathbb{Q}^2 \) (condensée)

Courbe elliptique
Catégorie des équations aux q-différences (systèmes) :

Cas local : $K = K = C(\mathbb{F}_q)$.

Catégorie $\mathcal{E}_q^{(0)}$ (systèmes aux q-différences) :

**Objets** :

systèmes aux q-différences :

$g_q X = AX, \quad (A \in \text{GL}_n(K))$.

**Morphismes** :

de $A$ vers $B, \quad A \in \text{GL}_n(K), \quad B \in \text{GL}_p(K), \quad F \in M_{p,n}(K)$ telle que

$(g_q F)A = BF$

$F(\text{nl de } A) = \text{nl de } B$

$X \mapsto FX$

$\mathcal{E}_q^{(0)}$ est une catégorie abélienne

Catégorie des modules de longueur finie

sur l'anneau euclidien non-commutatif

$D_q, K = K[\sigma_q, \sigma_q^{-1}]$ (algèbre d'œie)

$(K^n, \Phi_A)$, avec $\Phi_A(X) = A^{-1}g_q X$. 

$\mathcal{E}$ est une catégorie tensorielle

$(A_1 \otimes A_2, F_1 \otimes F_2, C \otimes C^\vee \cong C^{\vee} \otimes C)$

Unité :

$1 = (1) \in \text{GL}_1(K) = K^*$

$g \cdot x = x$

$\text{Hom}(1, A) = \text{Espace des solutions de } A \text{ dans } K$

$\text{Espace des poids fixes de } \mathcal{E}_A \text{ dans } K^n$

$\Gamma(A)$

F morphisme de A vers B

$\Gamma \left( (\text{Hom}(A, B)) \right) = \text{Hom}(1, \text{Hom}(A, B))$

$\Gamma \left( \text{Hom}(A, B) \right) = \text{Hom} \left( \Gamma(A), B \right)$

$\text{Hom}(A, 1) \leftrightarrow A^\vee \cong A^{-1}$

Dual

$\text{Hom}(CA, B) = A^\vee \otimes B$
\( E^{(0)} \) est une catégorie Tannakienne

Étape suivante : foncteur fibre

À partir de maintenant on se limite aux objets de pente entière

( à ce général reste à crier, en utilisation un travail de van der Put-Reuten
clésification des fibres sur les courbes elliptiques d'Atiyah.

\( A \rightarrow N(A) \) polygone de Newton

Pente : \( \mu_1 < \cdots < \mu_k ; \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{Q} \)

Rang : \( (n_1, \ldots, n_k) ; n_k \in \mathbb{N}^* \)

(multiples)

Module par inclinaison = une seule pente

Module torsion = somme directe d'inclinaisons

Module fraction = pure inclinaison de pente 0

\( A(\mathcal{O}) \) inversible

Sur catégorie \( E^{(0)} \subset \mathcal{E}^{(0)} \) : pur

\( E^{(0)} \subset \mathcal{E}^{(0)} \) : modules à pente ordonnées
Forme standard polynômale : compatible à Ø

Filtration par les pentes des Dq, k-modèles
(qui d'équivalent différentiel dans la catégorie
meromorphe, équivalent dans la catégorie
formelle) : fondantelle ⇒ F : A → B

Sans forme triangulaire supérieure.

Filtration → Graduation (objets, modules)

\[ g_2 A = A_0, \quad g_2 M = M_0 = M A_0 \]
\[ M = M A \]

\[ A_0 = \begin{pmatrix}
  A_1 & \cdots & 0 \\
  \vdots & \ddots & \vdots \\
  0 & \cdots & A_n
\end{pmatrix} \]

\[ M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n; P_i \quad \text{qui de rang} \cdot \]

\[ P_i : g_2 A \]

Fonctor : \[ M \to g_2 M, \quad F \to g_2 F \]

\[ M_0 \]

Il existe un isomorphisme unique

formel \[ \hat{F} : A_0 \to A \quad (\hat{F} \in M_n(K)) \]
But : description de $\Xi^{(0)}$
catégorie locale ($k = K = C(\mathbb{C}^3)$) des
equations aux $q$-différences à pentes
entières.
C'est une catégorie Tannakiennne.

**Forme Standard (Birkhoff - Gunther 1981)**

$$A = \begin{pmatrix}
    z^{|\Lambda|} A_1 & V_{ij} \\
    0 & 0 \\
    0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{g}_k A_k \\
\end{pmatrix}
$$

$\mu_1 < \cdots < \mu_k$ : pentes, $A_i \in \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$
(i = 1, \ldots, k)

$1 \leq i < j \leq k$ : $V_{ij} \in \text{Mat}_{\mu_i \mu_j} (K)$

Tout élément de $\Xi^{(0)}$ est méromorphe
équivalent à un élément sous forme
standard (Birkhoff - Gunther, Zhang, Sturmf, Sundby).

Mieux : forme standard polygémienne

$\text{coefficient de } V_{ij} \in \Xi^{(0)} = C \otimes \mathfrak{g}_k$

$\mu \in \mathbb{C}^k$
\[ F = \left( \begin{array}{c} \hat{F}_{ij} \\ \hat{F}_{ij} \end{array} \right) , \hat{F}_{ij} \in M_{n \times n}(\hat{K}) \]

\[ \hat{K} = C((\mathbb{C})) \]

Notation : \[ \hat{F} \in G_{A_0}(\hat{K}) \]

\[ G_{A_0} : \text{groupe algébrique unipotent} \]

\[ A : \text{algèbre de Lie} \]

\[ \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{ij} \\ \hat{F}_{ij} & 0 \end{pmatrix} \]

Equations récursives : 

\[ \hat{F} = \hat{F}_A \]

\[ \text{par } t \in \mathbb{R} ; 1 \leq i, j \leq k , \]

\[ 6 q F_{ij} z q F_{ij} z F_{ij} - \frac{p}{q} A : F_{ij} \]

\[ \sum_{i < l < j} U_{ij} F_{lj} , \quad \forall U_{ij} \in C((\mathbb{C})) \]

Pour des solutions convergentes (i.e. \( \in K \)) en général. Il y a des solutions 

mérormphes, \( i.e. \in M(\mathbb{C}^*) \)

= RESONNATIONS des \( \hat{K} \) formelles.
Remarque : $F_0 = \text{gr } F$ ; déf. polygones de Laurant.

Foncteur fibré $c$ équir $\mathbf{E}_1^\bullet$.

$a \in \mathbb{C}^*$, $\hat{\mathbf{w}}_a : \mathbf{E}_1^\bullet \rightarrow$ catégorie des

C-E.V. de

dimension finie

Action sur les objets $(A, MA)$ :

$$\hat{\mathbf{w}}_a (A) = \mathbb{C}^n$$

$A \in \text{GL}_n (K)$

Action sur les morphismes $(F : A \rightarrow B)$

$\hat{\mathbf{w}}_a (A) = \mathbb{C}^n$ $\rightarrow$ $\mathbb{C}^p$

$F \rightarrow F_0 (a) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$

$F_0 (a)$ est bien défini (cf. Remarque)

$\hat{\mathbf{w}}_a (A)$ est nucléaire, fidèle, $\otimes$ engendré

$\hat{\mathbf{w}}_a (A) \otimes \hat{\mathbf{w}}_a (B) \leq \hat{\mathbf{w}}_a (A \otimes B)$

Groupe de Galois de $\mathbf{E}_1^\bullet$ en $a$ :

$G_1^0 = \text{Aut} (\hat{\mathbf{w}}_a)$

Déf. $G_1^{(0)}$.

Problème : Décrire $G_1^{(0)}$. 
- \textbf{Structure du groupe de Galois de } \xi_1^{(0)} = G_3^{(0)} \text{ semi-direct}\]
\[
G_1^{(0)} = \mathcal{G}_k \ltimes G_{p_4}^{(0)} \text{ torê theta}
\]
\[
G_{p_4}^{(0)} = T_1^{(0)} \times G_{f_4}^{(0)} \text{ : semi-simple}
\]
\[
G_f^{(0)} = G_{f_0}^{(0)} \times G_{f_0,\infty}^{(0)} \text{ uni-jeton}
\]
\[
G_{\mathcal{U}} \text{ : partie "sauvage" } q \text{-Stokes}
\]
\[
\text{Galois} = \text{Galois sauv.} \times \text{Galois fuchsien}
\]
\[
\text{Calculs : } G_f^{(0)} = \text{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{E}_q, \mathbb{C}^*) \ltimes \mathbb{C}^*
\]
\[
T_1^{(0)} \cong \mathbb{C}^*
\]
\[
\mathcal{G}_k \text{ : calcul à l'aide d'une algèbre de Lie libre}
\]
\[
+ \text{action de } G_f^{(0)} \text{ et } T_1^{(0)}
\]
- **CALCULS**
- **Groupe de Galois fonctionnel.**

Cas différentiel : catégories des germes d'équations différentielles monomorphes fonctionnelles (à près-singuliers réguliers).

On fixe le groupe fondamental

\[ \pi_1(\mathbb{C}^*, l) \]

\[ \cong \mathbb{Z} \]

Enveloppe proalgébrique de \( \pi_1(\mathbb{C}^*, l) \)

Groupe de Galois Tannakien

\[ \text{Hom}^g(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \otimes \mathbb{C} \]

Image de \( \pi_1 \): homomorphismes continues

\[ \gamma \mapsto (\gamma \mapsto \gamma^n, 1) \]

\[ n \in \mathbb{Z}, \quad \gamma^n \mapsto (\gamma \mapsto \gamma^n, n) \]

9-analogique : \( \text{Hom}^g(E_{9}, \mathbb{C}^*) \otimes \mathbb{C} \)

\( E_{9} = \mathbb{C}^*/q\mathbb{Z} \) (Courbe elliptique)

\( \mathbb{C}^*(\text{repr. } E_{9}) = \lim \) vers \( \mathbb{D} \)-modules de type fini.
Duel: groupe pialgèbrique.

$q$-analoge de $\Pi_1(C^*, x)$ ?

On cherche les homomorphismes continus de $E$ dans $C^*_r(G)$, éléments d'éléments de $G_f, x$.

$q = e^{-2i\pi y}$ (Im $y > 0$), $C^* = U \times q$

$q^y = e^{-2i\pi y}$ pour $y \in \mathbb{R}$

$\gamma_1 = \left\{ q^y \mapsto u \right\}, \quad \gamma_2 = \left\{ q^y \mapsto e^{i\pi y} \right\}$

**Lemme.** Le sous-groupe des él. continus de $G_f, x$ est engendré par $\gamma_1$ et $\gamma_2$.

$(\gamma_1, \gamma_2)$ est Zariski-dense dans $G_f, x$ (imprimitive avec un seul générateur)
- CALCUL DE LA PARTIE "SAUVAGE" -

Idée: analogie différentiel (Ramis)

Partie fondamentale: $\Pi_2^1(C^\times, d) \xrightarrow{\text{groupe transition}} \text{Hom}_q((C^\times, C^\times))$

$T^{1}_e$: tore exponentiel (part 1)

Partie "pre" : $f \times T^{1}_e$

$T^{1}_e$ dual de $\frac{1}{x} C[x^n]$

limite inductive de $n$

($T^{1}_e$ dual de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x^n} C[x^n]$)

Action de "forme" $T^{1}_e$: triviale (en général non)

Groupe "pre" : $T^{1}_e(C^\times, 1) \times T^{1}_e \rightarrow \times T^{1}_e$

Groupe de Stokes trivial

$R$: "groupe de logarithme"

exp lie$R$ \quad lie$R$: "algèbre de lie de logarithme"

lie$R$ est engendrée par des symboles

lie$R$ est engendrée par des symboles

$\Delta(q, 1)$, $q \in \frac{1}{2} C[x^n]$: points en $T^{1}_e$ de $S^1$
\[ \hat{\Delta}(q,p) \delta^{-1} = \langle q, r \rangle \hat{\Delta}(q,p) \]
\[ \hat{\Delta}(q,p) \delta^{-1} = \hat{\Delta}(q, e^{2\pi i p}) \]

On cherche des q-analogues.

Dans le cas différentiel, on a deux notions de localisation :
- topologique
- algébrique

- localisation topologique sur \( S^1 \times \mathbb{R} \),

- localisation algébrique, groupes unipotents

- Eich : engendrant un "groupe fondamental"

Action adjointe d'un tore \( \to \) développement
en "série de Fourier" du résultat \( \to \) coefficient

\( G \to \text{lie } G \)
Mécanisme : Resomptions → Stokes, puis localisation topologique, puis algébrique.

"deux étrangetés" ELCOME Galois

PROBLÈMES :

1) Trouver "suffisamment" de dérivées étrangetés : \( \{ \} \times \text{action de la partie pure} \rightarrow \text{2 vrilles dense}

2) Trouver une famille libre de dérivées étrangetés :

"suffisamment moins que"

Cas différentiel OK (Th1-annulage).

Cas aux \( q \)-différences

\( q \)-resommation → analytique : \( q \)-Borel-Laplace

Rami et Zhang : plusieurs relations...

"algébrique" : Saalay

Ambiguities de \( q \)-resommation = \( q \)-Stokes

Fonctions elliptiques : \( q \)-contours!
Fonction $\Theta = \Theta_q$ (Jaqué)

$$\Theta_q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} z^n$$

zés en $q$-ypisèle $[-1; q]$.

$6q \Theta_q = z \Theta_q$

$\Theta_q, c(z) = \Theta_q(z/c)$ (c e $\mathbb{C}^*$)

zés en $q$-ypisèle $[-c; q]$

$6q \Theta_q, c = z \Theta_q, c$

Rénumération "algébrique". On introduit la matrice diagonale $T_c, A_0 \in \text{Mat}(\mathbb{M}(\mathbb{C}^*))$.

diagonale par blocs, bloc : $\Theta_q, z_i, I_{z_i}$

(coeff de $U_{i,j}$) $\in \sum_{\mu \leq d < \mu_j} \mathbb{C}^{z_i}$

$$\mathbf{A}' U = \text{def.} \ T_c, A_0 [\mathbf{A} U] = (A'_i, U_{i,j})$$

Transformation de jauge "interdite".

Il existe $F' \in \mathcal{G}(\mathbb{O}(\mathbb{C}^*))$ unique tel que

$F'[N] = \mathbf{A}' U$.

avec des conditions sur $c$ :

"On a une loi de $q^k$ : "fuchs""
Pour tout \( i \neq j \),\( q^2 e^{\text{Sp}(A_i)} \cap q^2 e^{\text{Sp}(A_j)} = \emptyset \)

\( \Rightarrow \) Sem-eau-fini de Eq de valeurs interdites pour \( \delta \).

\( q \)-direction de \( q \)-somme interdites

(\( q \)-direction de \( \delta \))-stables) : \( \Sigma A_0 \subset \text{Eq} \).

Si \( \varepsilon \in \text{Eq} \), \( \varepsilon \) : \( q \)-direction de \( q \)-somme

\[ F_{\varepsilon} = \Theta_{\varepsilon} \]

\( F_{\varepsilon} \) a des pôles uniquement sur \([-q, q]\)

avec des multiplicités \( \leq p_{\varepsilon} \).

\( \text{Def. : } F = F_{\hat{A}} \) est la \( q \)-somme de \( F_{\hat{A}} \) dans la direction \( \varepsilon \):

\[ F = \Sigma \varepsilon F_{\hat{A}} \]

Si \( \varepsilon, \delta \in \text{Eq} - \Sigma A_0 \):

\[ \Sigma \varepsilon, \delta F_{\hat{A}} = (\Sigma \varepsilon F_{\hat{A}})^{-1} \Sigma \varepsilon F_{\hat{A}} \]

\( \text{Stokes : automorphisme méromorphe de l'objet } A_0 \) (Stokes Théorème)
Rez. Les Stokes sont galvaniques.

(a mon avis faux pour des resonnations plus g&eacute;n&eacute;rales)

Fonction fibre en $a \in A^*$: $\hat{\omega}^{(0)}_a$.
On pose $T_0 \in \Sigma(A) \cup \{ -\infty \}$

$\Rightarrow \quad S_{T_0}, \; \hat{F}_A^{(1)}(a) \in GL^+(A)$

"The" par le foncteur $\mathcal{G}_2$.

$\Rightarrow$ Famille de "Lie-like" automorphismes

du foncteur fibre $\hat{\omega}^{(0)}_a$:

$L_S^{(a)}(A) = \log S_{T_0}, \; \hat{F}_A^{(1)}(a)$

(les Stokes sont importants)

On considere maintenant les Stokes

comme des fonctions de la $q$-direction

de resonnation: $T_0$ fixe, $T$ variable.

Fonction méromorphe sur $E_a$ p&i.eacute;lu $\subset \Sigma(A)$.

Th. et Ref. $\Delta^{(a)}(A) = \text{Res}_{T = \infty} L_S d\mu(A)$.

$q$-deux &eacute;quations $\in \mathfrak{sl}(A)$

alg&egrave;bre de lie
La transition algébrique en utilisant l'action adjointe du tore délicat \( \mathbb{T}^1 \) et \( \mathbb{C}^* \):

\[
\begin{pmatrix}
1 \\
0 \\
0 \\
1 + \mu_2
\end{pmatrix}
\]

\[\mathbf{A}_c = \bigoplus \mathbf{A}_c^g \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{8}_1^{\mathbf{8}} \quad \mathbf{S} = \mu_1 - \mu_2 \]

\[\Delta_c \text{ a des \textit{tends} only si } \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{8} \]

\[\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}_0, (\mathbf{A}_c, \mathbf{8}_1^{\mathbf{8}}), \mathbf{2}_c^{\mathbf{2}}) \]

est un \( \mathbf{2} \)-foncteur exact et pleinement fidèle.

\[\text{Théorème (th. de densité)}\]

(i) le sous-groupe "engendré" par les \( \Delta_c \) de \( \mathcal{G}_q \) est Zariski-dense dans le groupe de Galois \( \mathcal{G}_q \).

(ii) La sous-algèbre engendrée par les \( \Delta_c^{\mathbf{8}} \) est Zariski-dense dans \( \mathcal{G}_q \).
LIBÉRATION DES 9-DÉRIVÉES ÉTRANGÈRES

Le problème est de trouver quelles sont les familles $(\Delta^\alpha_\mathbb{A}^i_\mathbb{A})$ effectivement réalisées pour $\mathbb{A}_0$, donné.

Ceci est naturel pour certaines applications, la notion de problème inverse paraissant.

La réponse est simple au premier niveau $\delta_0$:

- $\Delta^\alpha_\mathbb{I}^\mathbb{A}(\mathbb{A})$ est trivial pour les directions $\mathbb{A}_0$, dont réunions: $\mathbb{A}_0$.

- C'est la seule condition $\Rightarrow$ liberté.

- C'est exactement plus dur pour $\mathbb{A}_0$ géodésique.

Action adjointe de $G_{\mathbb{A}_0}$ sur $\mathbb{A}_0$ :

espaces propres: $\mathbb{A}_0^{}$,

$(6,\mathbb{A})^{}(\mathbb{A}_0^{}):

\begin{align*}
\{ & M \text{ normal en dehors de } (p^\mathbb{A}_0, x^\mathbb{A}_0, y^\mathbb{A}_0, z^\mathbb{A}_0) : \\
& \alpha \in \mathbb{A}_0, \beta \in \mathbb{A}_0^{}, \text{ mod. } q \in \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow (y^\mathbb{A}_0 - x^\mathbb{A}_0) = q \beta \}
\end{align*}$

Proposition. On a

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0^{}$ mod. $\mathbb{A}_0^{}(\mathbb{A}) \Rightarrow (S)(S')(\mathbb{A}_0') - \Delta^\alpha_\mathbb{A}_0(\mathbb{A}_0^{})(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}_0^{}(\mathbb{A}_0^{})(\mathbb{A})$.
\[ \tau \in G^{(0)} \wedge \tau \Delta_z \varphi = \sum <(\delta, \varphi), \tau> \Delta_z(\varphi, \tau) \]

"Série de Fourier"

Les \( \Delta_z(\varphi, \tau) \) sont des dérivées galvaniques

On considère les \( \Delta_z(\varphi, \tau) \)

\[ \text{Lemme. Soit } A_0 \text{ donné.} \]

Si \( A \) tel que \( g(A) = A_0 \), la connaissance des \( \Delta_z^n(A) \) est celle des \( \Delta_z^n(\varphi, \tau)(A) \)

\[ \Rightarrow \text{ densité et liberté avec les } q \text{-déformées } \Delta_z(\varphi, \tau) \]

\[ \text{Objet } A \leftrightarrow \text{ représentations de } \]

\[ \text{définie } \]

\[ g(A) = A_0 \quad \text{et } G_f \rightarrow GL_n(C) (A_0) \]

\[ \text{compatibles} \]

\[ \text{Objets d'ambientes simples } \quad \text{et "infinités"} \]