Les moules : un survol.

Préambule : trois niveaux d'explicitation.

bjets de lus en plus omplexes	① Nombres ② Séries (de Taylor, etc.) ③ Moules	démonstrations de plus en plus délicates

- Imaginons **2** absent de la paire {**1**, **2**}.
- Déplacement de l'attention.

Plan du survol.

- Notion de moule
- Divers types de dualité.
- Types de symétrie.
- Opérations binaires.
- Opérations unaires.
- Qqs applications du calcul moulien
- Qqs moules spéciaux.
- Qqs remarques générales. Du bon usage des moules.

Dualités :

moules / comoules — { dualité / contraction }

bimoules / bimoules — { swap / contraction }

Richesses des structures autoduales :
- algèbres de Boole
- algèbres de Hopf noncom. noncocom.
- structure de flexion

Types de symétrie :

	vivent dans des algèbres	vivent dans des groupes.	
moules	alternal	symétral	
moules	alternel	symétrel	⇒ exige l'addition des indices.
bimoules	alternil	symétril	corrections "polaires"
bimoules	alternul	symétrul	corrections "polaires"
bimoules	alterniil	symétriil	corrections "trigonométriques"
bimoules	alternuul	symétruul	corrections "trigonométriques"

Déplacements d'indices pour une symétrie donnée :

Préposition // postposition de ω_0 :

$M^{\dots,\omega_0,\dots}$ { en fonction des $M^{\omega_0,\dots}$ / en fonction des $M^{\dots,\omega_0}$ } (au choix)

Expulsion du début // de la fin des indices égaux à ω_0

- $M^{\omega_0,\dots}$ en fonction des $M^{\omega_i,\dots}$ avec $\omega_i \neq \omega_0$
- $M^{\dots,\omega_0}$ en fonction des $M^{\dots,\omega_i}$ avec $\omega_i \neq \omega_0$

M_3 Opérations binaires. M_3

Opérations sur les moules:

addition $+$
multiplication $\times$ (mu)
composition $\circ$ (co) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \bullet \text{ suppose l'addition des indices} \\ \bullet \text{ accompagne les algèbres graduées} \end{cases}$

Lois de stabilité.
Autres règles: ex. si $\{(D_1 A) \times A + A \times D_2 A = B\}$ alors $\{A \text{ alternal}\} \Updownarrow \{B \text{ symétral}\}$ ss qq. réserves.

Respectent la "bonne croissance" $(|A^\bullet| \leq \text{const}^{r(\bullet)})$ sauf pour l'inverse de la composition

Opérations sur les bimoules:

ari//gari etc... A isomorphisme près, il y a exactement sept structures de flexion algèbre//groupe distinctes.

$\Rightarrow$ Lois de stabilité.

Le mixage des moules: $(A^\bullet, B^\bullet) \mapsto C^\bullet = A^\bullet \text{ mix } B^\bullet$

avec

$$C^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \sum_{\eta \in \text{perm}(\omega)} \sum_{1 \leq m \leq r} \text{Mix}\binom{\omega}{\eta} \tilde{B}^{\eta_1,\dots,\eta_m} A^{\eta_{m+1},\dots,\eta_r}$$

avec $$\begin{cases} \tilde{B}^{\omega_1,\dots,\omega_r} := (-1)^r \, B^{\omega_r,\dots,\omega_1} \\ \text{Mix}\binom{\omega}{\eta} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r \, \sigma_{\varepsilon_1}(\hat{\omega}_1) \, \sigma_{\varepsilon_2}(\hat{\omega}_2) \dots \sigma_{\varepsilon_r}(\hat{\omega}_r) \quad \in \{1,-1\} \\ \hat{\omega}_i := \omega_i + \dots + \omega_r \; ; \; \sigma_\varepsilon(\omega) = \text{signe}(\omega\varepsilon) \; ; \; \varepsilon_i = \text{fct de } (\omega, \eta, i) \\ \qquad \text{(coeff. de compatibilité)}. \end{cases}$$

Objet: séparation des signes. Ne reste que des A^α et B^β avec $\|\alpha\| \geq 0$ et $\|\beta\| \leq 0$
Respect des symétries: $A^\bullet, B^\bullet$ symétrals $\Rightarrow$ $A^\bullet \text{ mix } B^\bullet$ symétral
Application: linéarisation ramifiée d'objets locaux etc..

Opérations unaires.

1 - Prise de l'inverse relativement à mu, co, gari etc...
2 - Amplification
3 - Arborification.

1 - Inversion.

invmu respecte la "bonne croissance"
invco ne respecte pas la "bonne croissance".
Existence de formules très simples pour invmu $A^\bullet$ si $A^\bullet$ est symétral // symétrel

2 - Amplification : $M^\bullet \to M^\bullet_{amp}$ avec

$$\begin{cases} M^{\binom{a_1, \ldots, a_r}{\omega_1, \ldots, \omega_r}} := \sum_{0 \le n_i} M^{\omega_1, 0^{(n_1)}, \ldots, \omega_r, 0^{(n_r)}} \, a_1^{n_1} \, a_{12}^{n_2} \cdots a_{1\ldots r}^{n_r} \\ \text{avec } \omega_i \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{12\ldots j} := a_1 + a_2 + \cdots + a_j \end{cases}$$

But : isoler (pour mieux l'étudier) l'influence d'un indice ω_0 particulier (ici $\omega_0 = 0$) qui crée des "difficultés" (par ex. des pôles etc.)

Propriétés - Respect des symétries.

* $M^\bullet$ alternal // symétral $\Rightarrow$ $M^\bullet_{amp}$ alternal // symétral
* $(A^\bullet \times B^\bullet)_{amp} = A^\bullet_{amp} \times B^\bullet_{amp}$ si $\begin{cases} A^\bullet, B^\bullet \text{ symétrals} \\ B^\emptyset = 1 \end{cases}$
* Définitions analogues pour alternel // symétrel
* Exemple d'application : // prénormalisation continue d'objets locaux // réseau universel de résurgence.

Arborification:

$$\sum_{\bullet} A^{\bullet} B_{\bullet} \equiv \sum_{\bullet^<} A^{\bullet^<} B_{\bullet^<} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} A^{\omega^<} := \sum_{\omega^< \prec \omega} A^{\omega} & \text{(définition!)} \quad \text{"arborification"} \\ B_{\omega} \equiv \sum_{\omega^< \prec \omega} & \text{(contrainte!)} \quad \text{"coarborification".} \end{cases}$$

---

* La coarborification $\mathbf{B}_{\bullet} \to \mathbf{B}_{\bullet^<}$ diminue toujours les normes, mais "banalement", "par construction":

$\|\mathbb{B}_{\omega}\| \leq r!\, Cst^{r}$ contre $\|\mathbb{B}_{\omega^<}\| \leq Cst^{r}$

* L'arborification $\mathbf{A}^{\bullet} \to \mathbf{A}^{\bullet^<}$ dans les "cas naturels" n'augmente pas les normes, autrement dit:

$\|A^{\omega}\| \leq Cst_0^{r}$ ne devient pas $\|A^{\omega^<}\| \leq r!\, Cst^{r}$ mais reste $\|A^{\omega^<}\| \leq Cst^{r}$

et ceci grâce à des identités spécifiques à chaque cas (algébriques)

[C'est faux "génériquement" mais vrai "chaque fois qu'on en a besoin"]

Exemple: moule $\mathcal{S}a^{\bullet}$

"Armoules" (moules à indices $\omega^<$ arborescents).

Armoules induits // armoules ~~[illegible]~~ primaires.

Arborification des opérations mouliennes.

On peut en général arborifier les définitions mêmes des principaux moules (i.e. le procédé inductif de construction). Ceci explique le surprenant phénomène de la non-augmentation des normes après arborification (ds les cas naturels).

Position privilégiée des ordres arborescents parmi tous les autres.

Effectue des regroupements qui ont "juste la bonne taille".

Manifestations combinatoires/algébriques//analytiques de cette prééminence des ordres arborescents.

16 Qqs applications du calcul moulien. M6

1 - linéarisation des objets locaux (champs, difféos etc.)

2 - Prénormalisation continue d'objets locaux ("réseau universel")

3 - Normalisation d'objets locaux.

4 - Normalisation d'objets quasipériodiques. { Théorie KAM / Théorie de Floquet / "correction".

5 - Construction de || "formes" dérivation déroyées / "formes" moyennes de convolution.

6 - Synthèse "canonique - symplectique" d'objets locaux.

7 - "Formes déployées". Théorème d'indépendance.

8 - q-équations non-linéaires.

9 - Renormalisation.

- - - -

Qqs moules spéciaux.

- Moules du type "constant"
- Moules de type "plat"
- Moules de type "polaire"
- Moules du type "trigonométrique"
- Moules associés à la théorie KAM (e.g. Carr$^\bullet$)
- Moules associés au calcul étranger → Chronologiquement, c'est pour répondre aux besoins du calcul étranger que les moules furent introduits à l'origine.

$\underbrace{\begin{matrix} U^\bullet, V^\bullet \\ U^\bullet, V^\bullet \end{matrix}}_{\text{"standards"}}$ $\quad\|\quad$ $\underbrace{\begin{matrix} U_c^\bullet, V_c^\bullet \\ U_c^\bullet, V_c \end{matrix}}_{\text{"sphériques"}}$ ← "unitaires" ← "uniques"

- Moules associés aux hyperlogarithmes et aux hyperzêtas
- Bimoules spéciaux (structure de flexion).

$\begin{cases} pal^\bullet / pil^\bullet \Rightarrow \text{symétral / symétral + polaire} \\ tal^\bullet / til^\bullet \Rightarrow \text{symétral / symétral + trigonométrique} \end{cases}$ "très complexes"

$\begin{cases} loma^\bullet / lomi^\bullet \\ roma^\bullet / romi^\bullet \end{cases}$ "très très complexes"

Pièces-clef dans l'étude de $zag^\bullet / zig^\bullet$ et la décomposition des multizêtas en irréductibles canoniques.