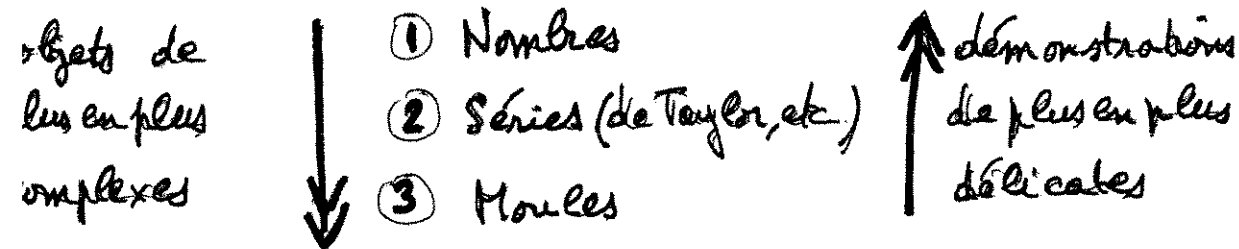


Les moules : un survol.

M₁

Préambule : trois niveaux d'explicitation.



- + Imaginons 2 a esent de la paire $\{\underline{1}, \underline{2}\}$.
- + Déplacement de l'attention.

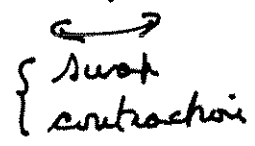
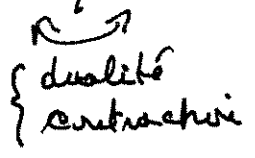
Plan du survol.

- Notion de moule
- Divers types de dualité.
- Types de symétrie.
- Opérations binaires.
- Opérations unaires.
- Qqs applications du calcul moulien
- Qqs moules spéciaux.
- Qqs remarques générales. Du bon usage des moules.

Dualités:

moniales / comoniales

brimoniales / brimoniales



Richesses des structures autoduales

- algèbres de Boole
- algèbres de Hopf non commutatives
- structure de flexion

Types de symétrie:

vivent dans des algèbres

vivent dans des groupes.

moniales	alternat	symétrical	⇒ exige l'addition des indices.
	alternel	symétriel	
brimoniales	alternil	symétril	} correctifs "polaires"
	alternul	symétruel	
	alternil	symétriel	} correctifs "trigonométrique"
	alternul	symétruel	

Déplacements d'indices pour une symétrie donnée:

Préposition // postposition de ω_0 :

$M^{\dots, \omega_0, \dots}$ { en fonction des $M^{\omega_0, \dots}$ } (au choix)
 { en fonction des M^{\dots, ω_0} }

Expulsion du début // de la fin des indices ~~est~~ égaux à ω_0

{ $M^{\omega_0, \dots}$ en fonction des $M^{\omega_i, \dots}$ avec $\omega_i \neq \omega_0$
 { M^{\dots, ω_0} en fonction des M^{\dots, ω_i} avec $\omega_i \neq \omega_0$

M₃ Opérations binaires.

M₃

Opérations sur les moules :

addition +
 multiplication \times (mu)
 composition \circ (co) \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{compose l'addition des indices} \\ \text{accompagne les algèbres quadrées} \end{array} \right.$

Lois de stabilité.

Autres règles: ex: $\{ \mathbb{D}, A \mid xA + Ax \mathbb{D} = B \}$ alors $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ alterné} \\ B \text{ symétrique} \end{array} \right\} \parallel \begin{array}{l} \text{M} \\ \text{M} \\ \text{révers.} \end{array}$

Respectent la "bonne croissance" ($|A^n| \leq \text{const}^{2(n)}$) \Rightarrow pour l'inverse de la composition

Opérations sur les bimoules :

ari/gari etc... A isomorphisme près, il y a exactement sept structures de flexion algèbre/groupe distinctes.

\Rightarrow lois de stabilité.

Le mixage des moules: $(A^\bullet, B^\bullet) \mapsto C^\bullet = A \text{ mix } B$

avec $C^{\omega_1, \dots, \omega_r} = \sum_{\eta \in \text{perm}(\omega)} \sum_{1 \leq m \leq r} \text{Mix}(\eta) B^{\omega_1, \dots, \omega_m} A^{\omega_{m+1}, \dots, \omega_r}$

avec $B^{\omega_1, \dots, \omega_r} := (-1)^r B^{\omega_r, \dots, \omega_1}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mix}(\eta) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r \prod_{i=1}^r \nabla_{\varepsilon_i}(\hat{\omega}_i) \prod_{j=1}^r \nabla_{\varepsilon_j}(\hat{\omega}_j) \in \{1, -1\} \\ \hat{\omega}_i := \omega_i + \dots + \omega_r ; \nabla_{\varepsilon_i}(\omega) = \text{signe}(\omega \varepsilon_i) ; \varepsilon_i = \text{pct de } (\omega, \eta, i) \\ \text{(coeff. de convention).} \end{array} \right.$

Objets: séparation des signes. Ne reste que des A^α et B^β avec $\|\alpha\| \geq 0$ et $\|\beta\| \leq 0$

Respect des symétries: A^\bullet, B^\bullet symétriques $\Rightarrow A^\bullet \text{ mix } B^\bullet$ symétrique

Applications: l'induction naïve des objets locaux etc..

M_4 Opérations unaires.

M_4

- 1 - Prise de l'inverse relativement à μ , ω , g etc...
 - 2 - Amplification
 - 3 - Arborification.
-

1 - Inversion.

inomu respecte la "bonne coïncidence"

inoco ne respecte pas la "bonne coïncidence".

Existence de formules très simples pour inomu A^\bullet si A^\bullet est $\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrial} \\ \text{symétrial} \end{array} \right.$

2 - Amplification: $M^\bullet \rightarrow M^{\bullet}_{amp}$ avec

$$\left\{ M \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \right\} := \sum_{0 \leq m_i} M \begin{pmatrix} a_1, 0^{(m_1)}, \dots, a_r, 0^{(m_r)} \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots & m_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{1+m_2} \end{matrix}$$

avec $\omega_i \neq 0$ et $a_{1,2,\dots,j} := a_1 + a_2 + \dots + a_j$

But: isoler (pour mieux l'étudier) l'influence d'un indice ω_0 particulier (ici $\omega_0 = 0$) qui crée des "difficultés" (par ex. ds t-ols etc.)

Propriétés - Respect des symétries.

* M^\bullet altern \underline{al} // symétr \underline{ial} $\Rightarrow M^{\bullet}_{amp}$ altern \underline{al} // symétr \underline{ial}

* $(A^\bullet \times B^\bullet)_{amp} = A^{\bullet}_{amp} \times B^{\bullet}_{amp}$ si $\left\{ \begin{array}{l} A^\bullet, B^\bullet \text{ symétrial} \\ B^\bullet = 1 \end{array} \right.$

* Définitions analogues pour altern \underline{al} // symétr \underline{ial}

* Exemple d'application // prénormales et continues d'objets locaux
réseau universel de résurgences.

Arborification:

$$\sum_{\bullet} A \cdot B_{\bullet} \equiv \sum_{\leftarrow} A^{\leftarrow} B_{\leftarrow} \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{\omega} := \sum_{\omega' \prec \omega} A^{\omega'} \quad (\text{definition!}) \quad \text{"arborification"} \\ B_{\omega} \equiv \sum_{\omega' \prec \omega} B_{\omega'} \quad (\text{contrainte!}) \quad \text{"coarborification"} \end{array} \right.$$

* La coarborification $B_{\bullet} \rightarrow B_{\leftarrow}$ diminue toujours les noms, mais "brutalement", "par construction":

$$\|B_{\omega}\| \leq n! Cst^n \quad \text{contre} \quad \|B_{\omega'}\| \leq Cst^n$$

* L'arborification $A^{\bullet} \rightarrow A^{\leftarrow}$ dans les "cas naturels" n'augmente pas les noms, autrement dit:

$$\|A^{\omega}\| \leq Cst^n \quad \text{redonne} \quad \|A^{\omega'}\| \leq n! Cst^n \quad \text{mais} \quad \|A^{\omega}\| \leq Cst^n$$

et ceci grâce à des identités spécifiques à chaque cas (algébriques)

[C'est faux "généralement" mais vrai "chaque fois qu'on a besoin"]

Exemple: monde Sa^{\bullet}

"Arbomonde" (monde à indices ω^{\leftarrow} arborisés).
 Arbomonde induits // arbomonde ~~primaires~~ primaires.
 Arborification des opérations mondiales.

On peut en général arborifier les définitions mêmes des principaux mondes (i.e. le procédé inductif de construction).
 Ceci explique le surprenant phénomène de la non-augmentation des noms après arborification (de ces cas naturels).

Position privilégiée des ordres arborisés parmi tous les autres.
 Effet des regroupements qui ont "juste la bonne taille".
 Manifestations combinatoires / algébriques / analytiques de cette "préférence" des ordres arborisés.

16 Quelques applications du calcul moulien. M6

- 1 - Linéarisation des objets locaux (Champs, difféos etc.)
- 2 - Prénormalisation continue d'objets locaux ("screau universel")
- 3 - Normalisation d'objets locaux.
- 4 - Normalisation d'objets quasi-périodiques. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Théorie KAM} \\ \text{Théorie de Poincaré} \\ \text{"Corrections"} \end{array} \right.$
- 5 - Construction de \parallel "bonnes" dérivations moyennes
 \parallel "bonnes" moyennes de involutions.
- 6 - Synthèse "canonique - symplectique" d'objets locaux.
- 7 - "Formes déployées". Théorèmes d'indépendance.
- 8 - q -équations non-linéaires.
- 9 - Renormalisation.
- - - -

Qqs moules spéciaux.

- Moules de type "constant"
- Moules de type "plat".
- Moules de type "polaire"
- Moules de type "trigonométrique"
- Moules associés à la théorie KAM (e.g. Carr)

• Moules associés au calcul étrange

$\begin{matrix} U^{\circ}, V^{\circ} \\ U^{\circ}, V^{\circ} \end{matrix}$	$\begin{matrix} U^{\circ}, V^{\circ} \\ U^{\circ}, V^{\circ} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \leftarrow \text{"moniques"} \\ \leftarrow \text{"noniques"} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Downarrow \\ \text{Chronologiquement, c'est} \\ \text{pour répondre aux besoins} \\ \text{du calcul étrange que} \\ \text{les moules furent introduites} \\ \text{à l'origine.} \end{matrix}$
"standards"	"spéculaires"		

• Moules associés aux hyperlogarithmes et aux hyperzêtas

• Bimoules spéciaux (structure de plaxin)

$\begin{matrix} \text{spal/pil}^{\circ} \\ \text{tal/til}^{\circ} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \Rightarrow \text{symétrical / symétrical + polaire} \\ \Rightarrow \text{symétrical / symétrical + trigonométrique} \end{matrix}$ \parallel "trix complexes"

$\begin{matrix} \text{loua/lovi}^{\circ} \\ \text{roua/rovi}^{\circ} \end{matrix}$ \parallel "trix trix complexes"

Pièces-clés dans l'étude de zag/zig° et la décomposition en irréductibles canoniques des multi zêtas.

1000

