La décomposition de Birkhoff des difféomorphismes formels tangents à l'identité et le calcul moulien.

Frédéric Menous

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative, on note $G_{\mathcal{A}}$ le groupe des difféomorphismes tangents à l'identité à coefficients dans $\mathcal{A}$: si $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$,

$$\varphi(x) = x + \sum_{n \geq 1} \varphi_n x^{n+1} \quad (\varphi_n \in \mathcal{A})$$

Maintenant, si

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[[\varepsilon]][\varepsilon^{-1}] = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$$

avec

$$\mathcal{A}_+ = \mathbb{C}[[\varepsilon]],\ \mathcal{A}_- = \varepsilon^{-1}\mathbb{C}[\varepsilon^{-1}]$$

alors

Théorème 1. *(A. Connes, D. Kreimer) Pour tout $\varphi \in G = G_{\mathcal{A}}$, il existe une unique paire (φ_-, φ_+) dans $G_{\mathcal{A}_-} \times G_{\mathcal{A}_+}$ telle que*

$$\varphi \circ \varphi_- = \varphi_+ \quad \text{(BD)}$$

Objectifs :

1. Faire du calcul moulien pour obtenir (φ_-, φ_+) : Caractères sur une algèbre de quasi-shuffle.
2. Obtenir des estimations sur les coefficients à l'aide de l'arborification : Caractères sur l'algèbre de Connes-Kreimer des arbres décorés.

Un (tout petit) mot sur la renormalisation en théorie quantique des champs (A. Connes, D. Kreimer)

En théorie perturbative, on cherche à calculer des intégrales de Feynman $I_{d_0}(\Gamma)$ en dimension d_0.

Problème : Certaines de ces intégrales divergent.

Solution :

1. Régularisation dimensionnelle :
$$I_{d_0}(\Gamma) \to I_{d_0+\varepsilon}(\Gamma) \in \mathcal{A}$$
2. Structure d'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ sur les graphes
   i. $\mathcal{H}$ est une algèbre avec $\pi : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
   ii. $\mathcal{H}$ est une cogèbre avec $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$
3. On a le groupe des caractères $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$:
$$\chi_1 * \chi_2 = \pi_{\mathcal{A}} \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta$$
4. $I_{d_0+\varepsilon} = I \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ et la renormalisation est
$$I * I_- = I_+ \quad I_\pm \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{A}_\pm)$$
5. $I_+(\Gamma)$ à $\varepsilon = 0$ donne la valeur renormalisée.

En théorie φ^3_6 à masse nulle $(d_0 = 6)$ on a

1. Un constante de couplage $g(=x)$
2. On calcule $g_{\text{eff}} = \varphi(x) = x + \sum_{n \geq 1} \varphi_n(I_6) x^{n+1}$
3. Renormalisation $I_6 \to I_{6+\varepsilon}$, $\varphi \circ \varphi_- = \varphi_+$, $\varepsilon = 0$

La décomposition de Birkhoff et l'algèbre de Faà di Bruno $\mathcal{H}_{\mathrm{FdB}}$.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[[\varepsilon]][\varepsilon^{-1}] = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ et $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$:

$$\varphi(x) = x + \sum_{n \geq 1} \varphi_n x^{n+1} \quad (\varphi_n \in \mathcal{A})$$

On pose

$$a_n(\varphi) = \varphi_n$$

et $\mathcal{H}_{\mathrm{FdB}} = \mathbb{C}[a_1, ..., a_n, ...]$. De plus, on a les formules de Faà di Bruno

$$a_n(\varphi \circ \psi) = a_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\varphi) P_{k,n}(a_1(\psi), \dots) + a_n(\psi)$$

Avec le coproduit

$$\Delta a_n = a_n \otimes 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \otimes P_{k,n}(a_1, \dots) + 1 \otimes a_n$$

1. $\mathcal{H}_{\mathrm{FdB}}$ est une algèbre de Hopf graduée,
2. $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathrm{FdB}}, \mathcal{A}) \approx G_{\mathcal{A}}$ $(\chi(a_n) = \varphi_n)$,
3. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ algèbre de Rota-Baxter,
4. $\varphi \circ \varphi_- = \varphi_+ \Longleftrightarrow \chi * \chi_- = \chi_+$ (Cf. Exposé de D. Manchon).

Résultats sur la décomposition de Birkhoff.

Dans la suite, on se restreint au sous-groupe G_N $(N \geq 1)$ de $G_{\mathcal{A}}$: Si $\varphi \in G_N$, alors

$$\varphi(x) = x + \sum_{n \geq 1} \varphi_n x^{n+1}, \quad v(\varphi_n) \geq -Nn$$

i.e.

$$\varphi(x) = x + \sum_{\eta \in H} \varphi_\eta \varepsilon^\sigma x^{n+1}$$

avec

$$H = H_N = \left\{ \eta = \begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix}, n \geq 1, \sigma \geq -Nn \right\}$$

alors

1. Le calcul moulien permet d'obtenir de "jolies" formules pour φ_- et φ_+.

2. En remarquant que

   $$P_N(\varphi)(x) = \varepsilon^{-N} \varphi(\varepsilon^N x) \in \mathbb{C}[[\varepsilon, x]]$$

   et en utilisant l'arborification, alors, si $P_N(\varphi)$ est analytique (Gevrey, ...), $P_N(\varphi_-)$ et $P_N(\varphi_+)$ aussi.

Quelques "clefs" pour le calcul moulien.

On part de $\varphi \in G_N$

$$\varphi(x) = x + \sum_{\eta\in H} \varphi_\eta \varepsilon^\sigma x^{n+1}$$

avec

$$H = \left\{ \eta = \begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix}, n \geq 1, \sigma \geq -Nn \right\}$$

1. φ définit un automorphisme de substitution :

$$\begin{array}{rcccl} F_\varphi & : & \mathcal{A}[[x]] & \longrightarrow & \mathcal{A}[[x]] \\ & & f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

   et réciproquement, si F est un endomorphisme d'algèbre sur $\mathcal{A}[[x]]$ et $\psi(x) = F(x)$, alors $F = F_\psi$.

2. La série de Taylor de

$$f \circ \varphi(x) = f(x + (\varphi(x) - x))$$

   donne

$$F_\varphi = \mathrm{Id} + \sum_{\eta\in H} \varepsilon^\sigma \mathbb{D}_\eta$$

   avec

$$\mathbb{D}_\eta = \sum_{s\geq 1} \sum_{\eta_1+\ldots+\eta_s=\eta} \frac{1}{s!} \varphi_{\eta_1} \ldots \varphi_{\eta_s} x^{n+s} \partial_x^s$$

3. On cherche alors les automorphismes associés à φ_- et φ_+ sous la forme

$$F_{\varphi_\pm} = \mathrm{Id} + \sum_{\eta_i\in H} C_\pm^{\eta_1,\ldots,\eta_s} \mathbb{D}_{\eta_s} \ldots \mathbb{D}_{\eta_1}$$

Calcul Moulien "à la Hopf"

Soit

$$\boldsymbol{H} = \{\emptyset\} \bigcup_{s\geq 1} \left\{ \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = (\eta_1, \ldots, \eta_s),\ \ \eta_i \in H \right\}$$

l'ensemble des mots contruits avec l'alphabet H muni de la graduation $\mathrm{gr}(\boldsymbol{\eta}) = (N+1)\|\boldsymbol{n}\| + \|\boldsymbol{\sigma}\|$. On note

$$B^+_{\eta_0}(\boldsymbol{\eta}) = \eta_0 \boldsymbol{\eta} \text{ (concatenation)}$$

L'espace vectoriel engendré par $\boldsymbol{H}$, muni de l'unité $\emptyset$, du produit de concaténation π_{nc} et du coproduit défini par $\Delta_{\mathrm{nc}}\emptyset = \emptyset \otimes \emptyset$ et, pour les lettres,

$$\Delta_{\mathrm{nc}}(\eta) = \eta \otimes \emptyset + \sum_{\eta_1+\eta_2=\eta} \eta_1 \otimes \eta_2 + \emptyset \otimes \eta$$

est une algèbre de Hopf graduée notée $\mathcal{H}_{\mathrm{nc}}$.

$\varphi \in G_N$ étant fixé et $F_\varphi = \mathrm{Id} + \sum_{\eta \in H} \varepsilon^\sigma \mathbb{D}_\eta$, l'application

$$\rho \ :\ \mathcal{H}_{\mathrm{nc}} \ \to\ \mathbb{C}[x, \partial_x] \text{ (Op. Diff sur } \mathbb{C}[[x]])$$

définie par $\rho(\emptyset) = \mathrm{Id} = \mathbb{D}_\emptyset$

$$\rho(\boldsymbol{\eta}) = \rho(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \mathbb{D}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbb{D}_{\eta_s} \ldots \mathbb{D}_{\eta_1}$$

est un antimorphisme d'algèbres et un morphisme de cogèbre : Si $f, g \in \mathbb{C}[[x]]$,

$$\rho(\boldsymbol{\eta})(\pi(f \otimes g)) = \pi \circ ((\rho \otimes \rho) \circ \Delta_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{\eta}))(f \otimes g)$$

Calcul Moulien "à la Hopf" (suite)

Soit $\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}$ le dual gradué de $\mathcal{H}_{\mathrm{nc}}$. C'est une algèbre de Hopf de quasishuffle :

$$\Delta_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{\boldsymbol{\eta}^1\boldsymbol{\eta}^2=\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2$$

et

$$\begin{aligned}\pi_{\mathrm{qs}}(B^+_{\eta_0}(\boldsymbol{\eta}) \otimes B^+_{\eta_0'}(\boldsymbol{\eta}')) \quad = \quad & B^+_{\eta_0}(\pi_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta} \otimes B^+_{\eta_0'}(\boldsymbol{\eta}')) \\ & + B^+_{\eta_0'}(\pi_{\mathrm{qs}}(B^+_{\eta_0}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}')) \\ & + B^+_{\eta_0+\eta_0'}(\pi_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}'))\end{aligned}$$

qui reflètent

$$\left\langle \Delta_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2 \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\eta}, \pi_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2) \right\rangle$$

et

$$\left\langle \pi_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2), \boldsymbol{\eta} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2, \Delta_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{\eta}) \right\rangle$$

Par exemple

$$\begin{aligned}\pi_{\mathrm{qs}}(\eta_1 \otimes \eta_2\eta_3) \quad = \quad & \eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3\eta_1 \\ & + (\eta_1 + \eta_2)\eta_3 + \eta_2(\eta_1 + \eta_3)\end{aligned}$$

Définition 2. *Un moule symétrel sur* $\boldsymbol{H}$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}$ $M^\bullet = \{M^{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{A},\ \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}\}$ *est la donnée des valeurs d'un caractère* χ *de* $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A})$ *(*$M^{\boldsymbol{\eta}} = \chi(\boldsymbol{\eta})$*). Il est bien valué si* $v(M^{\boldsymbol{\eta}}) \geq \|\boldsymbol{\sigma}\|$ *(sous-groupe* $\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A})$*). On a le produit de moules*

$$(M_1^\bullet \times M_2^\bullet)^{\boldsymbol{\eta}} = (\chi_1 * \chi_2)(\boldsymbol{\eta}) = \pi_{\mathcal{A}} \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta})$$

Calcul Moulien "à la Hopf" (suite)

Proposition 3. *Soit* $M^\bullet = \chi(\bullet)$ *un moule symétrel bien valué, alors*

$$\mathbb{M} = \sum_{\boldsymbol{\eta}\in \boldsymbol{H}} M^{\boldsymbol{\eta}} \mathbb{D}_{\boldsymbol{\eta}}$$

est un automorphisme de substitution F_m *avec*

$$m(x) = \mathbb{M}(x) = S(\chi) \in G_N$$

On a, pour $f, g \in \mathcal{A}[[x]]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(fg) &= \left(\sum_{\boldsymbol{\eta}} M^{\boldsymbol{\eta}} \mathbb{D}_{\boldsymbol{\eta}}\right)(fg) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\rho(\boldsymbol{\eta})(\pi(f \otimes g)) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta}).\pi \circ ((\rho \otimes \rho) \circ \Delta_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{\eta}))(f \otimes g) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2} \chi(\boldsymbol{\eta}) \langle \boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2, \Delta_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{\eta}) \rangle \rho(\boldsymbol{\eta}^1)(f)\rho(\boldsymbol{\eta}^2)(g) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2} \chi(\boldsymbol{\eta}) \langle \pi_{\mathrm{qs}}(\boldsymbol{\eta}^1 \otimes \boldsymbol{\eta}^2), \boldsymbol{\eta} \rangle \rho(\boldsymbol{\eta}^1)(f)\rho(\boldsymbol{\eta}^2)(g) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2} \chi(\boldsymbol{\eta}^1)\chi(\boldsymbol{\eta}^2)(\rho(\boldsymbol{\eta}^1)(f)\rho(\boldsymbol{\eta}^2)(g)) \\
&= (\mathbb{M}(f))(\mathbb{M}(g))
\end{aligned}$$

Proposition 4. *Les séries mouliennes définissent un morphisme de groupe :*

$$S : \mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A}) \to G_N \quad (G_{\mathrm{qs}}(\varphi) = S(\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A}))$$

Calcul Moulien "à la Hopf" (suite et fin)

Par exemple, si χ_1 et χ_2 sont dans $\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A})$ et $\psi_i = S(\chi_i)$, alors

$$\begin{array}{rcl}
S(\chi_1) \circ S(\chi_2) & = & \psi_1 \circ \psi_2(x) \\
& = & F_{\psi_2}(F_{\psi_1}(x)) \\
& = & \left(\displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}^2} \chi_2(\boldsymbol{\eta}^2) \rho(\boldsymbol{\eta}^2) \right) \left(\displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}^1} \chi_1(\boldsymbol{\eta}^1) \rho(\boldsymbol{\eta}^1) \right) . x \\
& = & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2} \chi_1(\boldsymbol{\eta}^1) \chi_2(\boldsymbol{\eta}^2) \rho(\boldsymbol{\eta}^2) \rho(\boldsymbol{\eta}^1) . x \\
& = & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2} \chi_1(\boldsymbol{\eta}^1) \chi_2(\boldsymbol{\eta}^2) \rho(\boldsymbol{\eta}^1 \boldsymbol{\eta}^2) . x \\
& = & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \boldsymbol{\eta}^2 = \boldsymbol{\eta}} \chi_1(\boldsymbol{\eta}^1) \chi_2(\boldsymbol{\eta}^2) \rho(\boldsymbol{\eta}) . x \\
& = & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{\eta}} (\chi_1 * \chi_2)(\boldsymbol{\eta}) \rho(\boldsymbol{\eta}) . x \\
& = & S(\chi_1 * \chi_2)
\end{array}$$

Retour sur la décomposition de Birkhoff.

On a

$$\varphi(x) = x + \sum_{\eta \in H} \varphi_\eta \varepsilon^\sigma x^{n+1} \in G_N$$

et

$$F_\varphi = \mathrm{Id} + \sum_{\eta \in H} \varepsilon^\sigma \mathbb{D}_\eta = \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}} I(\boldsymbol{\eta}) \rho(\boldsymbol{\eta})$$

Où I est le caractère bien valué de $\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A})$ donné par $I(\emptyset) = 1$ et

$$I^{\boldsymbol{\eta}} = \begin{cases} \varepsilon^{\sigma_1} & \text{si } l(\boldsymbol{\eta}) = 1 \\ 0 & \text{si } l(\boldsymbol{\eta}) \geq 2 \end{cases}$$

Donc $\varphi \in G_{\mathrm{qs}}(\varphi)$ et si $\varphi_\pm$ sont donnés par des caractères bien valués $I_\pm$, alors la decomposition de Birkhoff $\varphi \circ \varphi_- = \varphi_+$ s'écrit :

$$I * I_- = I_+$$

Théorème 5. *On a pour* $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$ *(*$s \geq 1$*) :*

$$\begin{aligned} I_-(\boldsymbol{\eta}) &= (-1)^s \varepsilon^{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \rho_-(\hat{\sigma}_1) \rho_-(\hat{\sigma}_2) \ldots \rho_-(\hat{\sigma}_s) \\ I_+(\boldsymbol{\eta}) &= (-1)^{s-1} \varepsilon^{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \rho_+(\hat{\sigma}_1) \rho_-(\hat{\sigma}_2) \ldots \rho_-(\hat{\sigma}_s) \end{aligned}$$

avec $\hat{\sigma}_i = \sigma_i + \ldots + \sigma_s$ *et*

$$\rho_-(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma < 0 \\ 0 & \text{si } \sigma \geq 0 \end{cases} \qquad \rho_+ = 1 - \rho_-$$

La decomposition de Birkhoff et les estimations.

Soit $\varphi \in G_N$, alors

$$P_N(\varphi)(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x\varepsilon^N) = x + \sum_{\eta \in H_0} a_\eta \varepsilon^\sigma x^{n+1}$$

où

$$H_0 = \left\{ \eta = \begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix}, n \geq 1,\ \sigma \geq 0 \right\}$$

Soit $\boldsymbol{b} = \{b_\eta > 0,\ \ \eta \in H_0\}$ tel que, $b_{\eta_1} b_{\eta_2} \leq b_{\eta_1+\eta_2}$.

Définition 6. *φ est $\boldsymbol{b}$-analytique ($\in G_N(b)$) si*

$$\varphi_{N,\boldsymbol{b}}(t) = t + \sum_{\eta \in H_0} \frac{|a_\eta|}{b_\eta} \varepsilon^\sigma t^{n+1} \in \mathbb{C}\{\varepsilon, t\}$$

Proposition 7. *$G_N(\boldsymbol{b})$ est un groupe. De plus, si ψ dans G_N admet une serie majorante ξ dans $G_N(\boldsymbol{b})$ ($\psi \prec \xi$), i.e.*

$$\forall \eta \in H_N, \quad |\psi_\eta| \leq \xi_\eta$$

alors ψ est dans $G_N(\boldsymbol{b})$.

Théorème 8. *Si $\varphi \in G_N(\boldsymbol{b})$ et $\varphi \circ \varphi_- = \varphi_+$, alors φ_- et φ_+ sont dans $G_N(\boldsymbol{b})$.*

L'arboribification "à la Hopf"

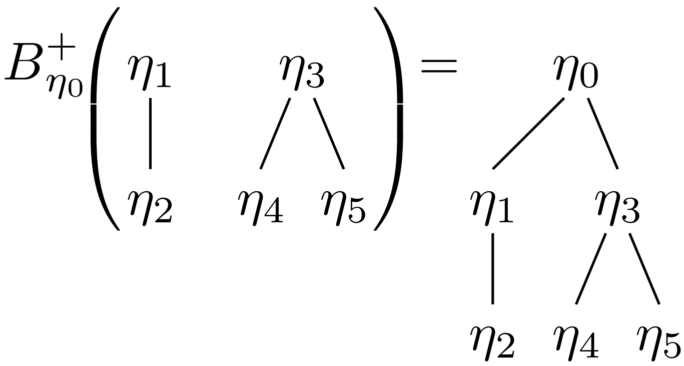
Soit de nouveau

$$H=\left\{\eta=\begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix}, n\geq 1, \sigma\geq -Nn\right\}$$

et $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres (non plans) décorés par H. On définit l'algèbre commutative

$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}=\mathbb{C}[\mathcal{T}]$$

dont une base est donnée par les forêts et qui est naturellement graduée par la graduation de H. Pour une forêt $F=T_1...T_n$, $B^+_{\eta_0}$ est l'arbre obtenu en attachant les arbres à une racine décorée par $\eta_0\in H$



Alors $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ est une algèbre de Hopf graduée pour le coproduit définit par $\Delta(\emptyset)=\emptyset\otimes\emptyset$, $\Delta(T_1...T_k)=\Delta(T_1)...\Delta(T_k)$ et

$$\Delta(B^+_\eta(F))=\emptyset\otimes B^+_\eta(F)+(B^+_\eta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(F)$$

Définition 9. *Un moule arborescent séparatif* $M^{\bullet^<}=\{M^F\in\mathcal{A}\}$ *est la donnée des valeurs d'un caractère* χ *de* $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}},\mathcal{A})$ *(*$M^F=\chi(F)$*). Il est bien valué si* $v(M^F)\geq\|F\|_\sigma$ *(sous-groupe* $\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}},\mathcal{A})$*).*

L'arboribification "à la Hopf" (suite et fin)

Théorème 10. *(L. Foissy) L'application α de $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}$ définie par $\alpha(\emptyset)=\emptyset$ et*

$$\alpha(B_\eta^+(F))=B_\eta^+(\alpha(F)),$$

définit un morphisme d'algèbre de Hopf.

En particulier, on a un morphisme de groupe

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Arb} & : \mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}},\mathcal{A}) & \to & \mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}},\mathcal{A}) \\ & \chi & \mapsto & \chi^< = \chi\circ\alpha \end{array}$$

Pour I définit par

$$I(\boldsymbol{\eta})=\begin{cases} \varepsilon^{\sigma_1} & \text{si } l(\boldsymbol{\eta})=1 \\ 0 & \text{si } l(\boldsymbol{\eta})\geq 2 \end{cases}$$

on

$$I^T=\begin{cases} \varepsilon^{\sigma} & \text{si } |T|=1 \\ 0 & \text{si } |T|\geq 2 \end{cases} \quad \text{et } I^{T_1\ldots T_n}=I^{T_1}\ldots I^{T_n}$$

Proposition 11. *on a pour tout arbre T décoré par $(\eta_1,\ldots,\eta_s)$:*

$$\begin{array}{rcl} I_-(T) & = & (-1)^{|T|}\varepsilon^{\|T\|_\sigma}\rho_-(\hat{\sigma}_1)\rho_-(\hat{\sigma}_2)\ldots\rho_-(\hat{\sigma}_s) \\ I_+(\boldsymbol{\eta}) & = & (-1)^{|T|-1}\varepsilon^{\|T\|_\sigma}\rho_+(\hat{\sigma}_1)\rho_-(\hat{\sigma}_2)\ldots\rho_-(\hat{\sigma}_s) \end{array}$$

avec $\hat{\sigma}_i=\sum_{j\geq_T i}\sigma_j$ et

$$\rho_-(\sigma)=\begin{cases} 1 & \text{si } \sigma<0 \\ 0 & \text{si } \sigma\geq 0 \end{cases} \qquad \rho_+=1-\rho_-$$

Coarborification "à la Hopf"

On rappelle que

$$F_\varphi = \mathrm{Id} + \sum_{\eta \in H} \varepsilon^\sigma \mathbb{D}_\eta$$

Soit $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^*$ le dual gradué de $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ alors

Théorème 12. *(F. Fauvet, F.M.) L'application*

$$\begin{array}{rcccc} \rho^* & : & \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^* & \to & \mathbb{C}[x,\partial_x] \\ & & F & \mapsto & \mathbb{D}_F \end{array}$$

définie par

1. $\rho^*(\emptyset) = \mathrm{Id} = \mathbb{D}_\emptyset$,
2. *Si* $T = B_\eta^+(F)$,
$$\rho^*(T) = (\rho^*(F)(\rho^*(\eta).x))\partial_x$$
3. *Si* $F = T_1^{\alpha_1} \ldots T_k^{\alpha_k}$ *avec des* T_i *deux à deux distincts :*
$$\rho^*(F) = \frac{(\mathbb{D}_{T_1}.x)^{\alpha_1} \ldots (\mathbb{D}_{T_k}.x)^{\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \partial_x^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k}$$

est un morphisme de bigèbre et $\rho = \rho^* \circ \alpha^*$ *où*

$$\alpha^*(\boldsymbol{\eta}) = \sum_F \langle \alpha(F), \boldsymbol{\eta} \rangle F$$

Théorème 13. *Les séries mouliennes arborescentes définissent un morphisme de groupe :*

$$S^< : \mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, \mathcal{A}) \to G_N \quad (G_{\mathrm{CK}}(\varphi) = S(\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, \mathcal{A}))$$

où $S^<(\chi) = \sum \chi(F) \rho^*(F).x$

Proposition 14. *Soit* $\chi \in \mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{qs}}, \mathcal{A})$ *et* $\chi^< = \chi \circ \alpha$ *le caractère arborifié de* $\mathcal{C}_v(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, \mathcal{A})$, *alors*

$$\sum_{\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\rho(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{F} \chi^<(F)\rho^*(F)$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{F} \chi^<(F)\rho^*(F) &= \sum_{F} \chi(\alpha(F))\rho^*(F) \\
&= \sum_{F,\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\langle \boldsymbol{\eta}, \alpha(F)\rangle \rho^*(F) \\
&= \sum_{F,\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\langle \alpha^*(\boldsymbol{\eta}), F)\rangle \rho^*(F) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\rho^*(\alpha^*(\boldsymbol{\eta})) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\eta}} \chi(\boldsymbol{\eta})\rho(\boldsymbol{\eta})
\end{aligned}$$

Décomposition de Birkhoff dans $G_N(\boldsymbol{b})$.

On a $\varphi(x)=x+\sum_\eta \varphi_\eta \varepsilon^\sigma x^{n+1}\in G_N(\boldsymbol{b})$ et

$$F_\varphi=\mathrm{Id}+\sum_\eta \varepsilon^\sigma \mathbb{D}_\eta$$

alors $\bar\varphi(x)=x+\sum_\eta |\varphi_\eta|\varepsilon^\sigma x^{n+1}\in G_N(\boldsymbol{b})$ est une série majorante de φ ($\varphi\prec\bar\varphi$) et

$$F_{\bar\varphi}=\mathrm{Id}+\sum_\eta \varepsilon^\sigma \bar{\mathbb{D}}_\eta$$

Maintenant

$$\varphi_-(x)=\sum_F I_-^{\leq}(F)\mathbb{D}_F.x$$

mais, en termes de séries majorantes,

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{D}_F.x & \prec & \bar{\mathbb{D}}_F.x\\ I_-^{\leq}(F) & \prec & \varepsilon^{\|F\|_\sigma}\end{array}$$

Donc $\varphi_-\prec\psi$, avec

$$\psi(x)=\sum_F \varepsilon^{\|F\|_\sigma}\bar{\mathbb{D}}_F.x=\bar{\mathbb{D}}.x$$

On a

$$\bar{\mathbb{D}} = \bar{\mathbb{D}}_0 + \bar{\mathbb{D}}_1 + \bar{\mathbb{D}}_2 + \bar{\mathbb{D}}_3$$

avec $\bar{\mathbb{D}}_0 = \mathrm{Id}$ ($\bar{\mathbb{D}}_0.x = x$) et

$$\bar{\mathbb{D}}_1.x \;=\; \sum_{T,|T|=1} \varepsilon^{\|T\|_\sigma} \bar{\mathbb{D}}_T.x \;=\; \sum_{\eta} \varepsilon^{\sigma}(\bar{\mathbb{D}}_{\eta}.x) \;= \bar{\varphi}(x) - x$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{D}}_2.x \;&=\; \sum_{F\neq\emptyset,\eta_0} \varepsilon^{\|B^+_{\eta_0}(F)\|_\sigma} \bar{\mathbb{D}}_{B^+_{\eta_0}(F)}.x \\
&=\; \sum_{F\neq\emptyset} \varepsilon^{\|F\|_\sigma} (\bar{\mathbb{D}}_F.(\varepsilon^{\sigma_0}\bar{\mathbb{D}}_{\eta_0}.x))\partial_x.x \\
&=\; \left(\sum_{F\neq\emptyset} \varepsilon^{\|F\|_\sigma} \bar{\mathbb{D}}_F\right).(\bar{\mathbb{D}}_1.x) \\
&=\; (\bar{\mathbb{D}} - \mathrm{Id}).(\bar{\mathbb{D}}_1.x)
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbb{D}}_3.x \;=\; \sum_{F,r(F)\geq 2} \varepsilon^{\|F\|_\sigma} \bar{\mathbb{D}}_F.x \;=\; 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
\psi(x) \;=\; \bar{\mathbb{D}}.x \;&=\; \bar{\varphi}(x) + F_\psi(\bar{\varphi}(x) - x) - \bar{\varphi}(x) + x \\
&=\; x - \psi(x) + \bar{\varphi}(\psi(x))
\end{aligned}$$

soit

$$2\psi(x) - \bar{\varphi}(\psi(x)) = x$$

Donc ψ est le difféo. réciproque de $\Phi(x) = 2x - \bar{\varphi}(x)$. Comme $\bar{\varphi} \in G_N(\boldsymbol{b})$, $\Phi \in G_N(\boldsymbol{b})$ qui est un groupe donc $\psi \in G_N(\boldsymbol{b})$ et, comme $\varphi_- \prec \psi$, φ_- (et donc φ_+) est dans $G_N(\boldsymbol{b})$.