

Groupe de travail
Algèbres de Hopf et calcul moulien

Polylogarithmes

Hoang Ngoc Minh,
Université Lille 2.

Paris, 15 Janvier 2008

Polylogarithmes et sommes harmoniques multiples

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$$

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \quad \text{et} \quad H_{\mathbf{s}}(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

$$P_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{n \geq 0} H_{\mathbf{s}}(n) z^n = \frac{\text{Li}_{\mathbf{s}}(z)}{1-z}.$$

Si $s_1 > 1$ alors

$$\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} H_{\mathbf{s}}(N) = \zeta(\mathbf{s}) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$$

sinon ?

Sommaire

1. Codage symbolique des polylogarithmes et des sommes harmoniques par des mots.
2. Algèbres de Hopf des séries formelles en variables non commutatives.
3. Polylogarithmes et sommes harmoniques.
4. Résultats à l'Abel par des séries génératrices non commutatives.

CODAGE SYMBOLIQUE
DES POLYLOGARITHMES
ET DES SOMMES HARMONIQUES
PAR DES MOTS

Codage des multi-indices par des mots

$$X = \{x_0, x_1\} \text{ et } Y = \{y_k | k \in \mathbb{N}_+\}.$$

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \leftrightarrow u = x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1 \leftrightarrow v = y_{s_1} \dots y_{s_r}.$$

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \text{Li}_u(z) = \text{Li}_v(z),$$

$$P_{\mathbf{s}}(z) = P_u(z) = P_v(z),$$

$$H_{\mathbf{s}}(N) = H_u(N) = H_v(N),$$

$$\text{pour } s_1 > 1, \quad \zeta(\mathbf{s}) = \zeta(u) = \zeta(v).$$

u et v sont **convergen**ts si $s_1 > 1$. Un mot **divergent** est de la forme

$$(\{1\}^k, s_{k+1}, \dots, s_r) \leftrightarrow x_1^k x_0^{s_{k+1}-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1 \leftrightarrow y_1^k y_{s_{k+1}} \dots y_{s_r}.$$

COMBINATOIRE ALGEBRIQUE
DES SERIES FORMELLES
EN VARIABLES NON COMMUTATIVES

Séries formelles à variables non commutatives

- ▶ Une s.f. sur X (resp. Y) à coefficients dans k ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est une application à valeur dans k de X^* (resp. Y^*), le monoïde libre, pour la concaténation $.$, engendré par X (resp. Y) admettant le mot vide, noté ε , comme l'élément neutre :

$$S : X^* \longrightarrow k, \quad u \mapsto \langle S|u \rangle, \quad S = \sum_{u \in X^*} \langle S|u \rangle u \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$$

$$\left(\text{resp. } S : Y^* \longrightarrow k, \quad u \mapsto \langle S|v \rangle, \quad S = \sum_{v \in Y^*} \langle S|v \rangle v \in \mathbb{C}\langle\langle Y \rangle\rangle \right).$$

- ▶ Pour $S, T \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ (ou $\mathbb{C}\langle\langle Y \rangle\rangle$),

$$\forall w \in X^* (\text{ou } Y^*), \quad \langle S + T|w \rangle = \langle S|w \rangle + \langle T|w \rangle,$$

$$\forall w \in X^* (\text{ou } Y^*), \quad \langle S.T|w \rangle = \sum_{u,v \in X^* (\text{ou } Y^*), uv=w} \langle S|v \rangle \langle T|u \rangle.$$

- ▶ X^* (resp. Y^*) constitue une base pour l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}\langle X \rangle \subset \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle Y \rangle \subset \mathbb{C}\langle\langle Y \rangle\rangle$).

Opérations sur les séries formelles

- ▶ $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle$ est la \mathbb{C} -algèbre des polynômes munie $[\cdot, \cdot]$ défini par

$$\forall P, Q \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle, \quad [P, Q] = PQ - QP$$

vérifiant $[P, P]=0$ et $[P, [Q, R]] + [Q, [R, P]] + [R, [P, Q]]=0$.

- ▶ Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$, S est appelé une série de Lie si $S = \sum_{l \geq 1} P_l$,

où P_l est un polynôme de Lie homogène de degré l .

- ▶ $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$ est l'ensemble des séries de Lie.

- ▶ Pour $S, T \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$, $S \sqcup T = \sum_{u, v \in X^*} \langle S|u \rangle \langle T|v \rangle u \sqcup v$,

où, pour $a, b \in X, u, v \in X^*$, $u \sqcup \varepsilon = \varepsilon \sqcup u = u$ et
 $au \sqcup bv = a(u \sqcup bv) + b(au \sqcup v)$.

- ▶ Pour $S, T \in \mathbb{C}\langle\langle Y \rangle\rangle$, $S \boxplus T = \sum_{u, v \in Y^*} \langle S|u \rangle \langle T|v \rangle u \boxplus v$,

où, pour $y_i, y_j \in Y, u, v \in Y^*$, $u \boxplus \varepsilon = \varepsilon \boxplus u = u$ et
 $y_i u \boxplus y_j v = y_i(u \boxplus y_j v) + y_j(y_i u \boxplus v) + y_{i+j}(u \boxplus v)$.

Algèbres en dualité

- ▶ $(\mathbb{C}\langle Y \rangle, \sqcup)$ est duale à la co-gèbre $(\mathbb{C}\langle Y \rangle, \Delta_{\sqcup})$, où Δ_{\sqcup} est le co-produit co-associatif co-commutatif défini par

$$\Delta_{\sqcup}(y_k) = \sum_{i+j=k} y_i \otimes y_j.$$

Elle isomorphe à l'algèbre associative commutative **QSym** qui est duale à **Sym** et qui admet les fonctions quasi-monomiales

$\sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} t_{n_1}^{s_1} \dots t_{n_r}^{s_r}$ comme base pour l'espace vectoriel.

- ▶ On définit également sur $\mathbb{C}\langle X \rangle$ 2 co-produits co-associatifs $\langle \Delta w | u \otimes v \rangle = \langle w | u \sqcup v \rangle$ et $\langle \Delta' w | u \otimes v \rangle = \langle w | uv \rangle$.
 $(\mathbb{C}\langle X \rangle, \cdot, 1, \Delta, e, a)$ et $(\mathbb{C}\langle X \rangle, \sqcup, \varepsilon, \Delta', e, a)$ sont des algèbres de Hopf duales l'une de l'autre,
 - ▶ la co-unité $e : \mathbb{C}\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle X \rangle$ est définie par $e(P) = \langle P | \varepsilon \rangle$,
 - ▶ l'antipode est défini par $a(x_{i_1} \dots x_{i_r}) = (-1)^{|r|} x_{i_r} \dots x_{i_1}$.

$\mathbb{C}\langle X \rangle$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf co-commutative graduée, à $\mathcal{U}(\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle)$ (**Cartier-Milnor-Moore**).

Mots de Lyndon

- ▶ Un mot est de **Lyndon** ssi il est strictement plus petit que ses facteurs droits stricts (pour l'ordre lexicographique).

Exemple

$\{x_0, x_1\}$, $x_0 < x_1$. Les mots de Lyndon de longueur ≤ 5 sont $x_0, x_0^4 x_1, x_0^3 x_1, x_0^3 x_1^2, x_0^2 x_1, x_0^2 x_1 x_0 x_1, x_0^2 x_1^2, x_0^2 x_1^3, x_0 x_1, x_0 x_1 x_0 x_1^2, x_0 x_1^2, x_0 x_1^3, x_0 x_1^4, x_1$.

- ▶ $\mathcal{Lyn}(X)$ (resp. $\mathcal{Lyn}(Y)$) : ens des mots de Lyndon formant 1 base de transcendance pour l'algèbre de mélange (**Radford**).

Exemple

$x_0 x_1 x_0^2 x_1 = x_0 x_1 \sqcup x_0^2 x_1 - 3 x_0^2 x_1 x_0 x_1 - 6 x_0^3 x_1^2,$
 $x_0^3 x_1 x_0^4 x_1 = x_0^3 x_1 \sqcup x_0^4 x_1 - 5 x_0^4 x_1 x_0^3 x_1 - 15 x_0^5 x_1 x_0^2 x_1 - 35 x_0^6 x_1 x_0 x_1 - 70 x_0^7 x_1^2.$

- ▶ Pour tout $w \in X^*$, $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$, $i_1 > \dots > i_k$ (**Širšov**).

Exemple

$x_1 x_0 x_1^2 x_0 x_1^2 x_0^2 x_1 = x_1 \cdot x_0 x_1^2 \cdot x_0 x_1^2 \cdot x_0^2 x_1 = x_1 (x_0 x_1^2)^2 x_0^2 x_1.$

- ▶ $l \in \mathcal{Lyn}(X) \setminus \{x_0\} \iff \pi_Y l \in \mathcal{Lyn}(Y)$ (**Périm**)
où $\pi_Y l$ est la projection de l sur Y .

Factorisation standard et base PBW

- ▶ La **factorisation standard** de $l \in \mathcal{Lyn}(X) \setminus X$, notée $st(l)$, est le couple (u, v) , où $u, v \in \mathcal{Lyn}(X)$ tels que $l = uv$ et v est le plus long facteur droit propre de l vérifiant $u < uv < v$.

Exemple

$$st(x_0^2 x_1 x_0 x_1) = (x_0^2 x_1, x_0 x_1).$$

- ▶ $\{S_l; l \in \mathcal{Lyn}(X)\}$ est une base de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle$, où la forme crochetée S_l du mot de Lyndon l est définie par $S_x = x$ si $x \in X$ et $S_l = [S_u, S_v]$ si $(u, v) = st(l)$.
- ▶ La base PBW $\mathcal{B} = \{S_w; w \in X^*\}$ est obtenue en posant

$$S_w = S_{l_1}^{i_1} S_{l_2}^{i_2} \dots S_{l_k}^{i_k} \quad \text{pour} \quad w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 > \dots > l_k,$$

- ▶ La base duale $\check{\mathcal{B}} = \{\check{S}_w; w \in X^*\}$ est obtenue en posant $\check{S}_\varepsilon = \varepsilon$, $\check{S}_l = x\check{S}_u$ pour $l = xu \in \mathcal{Lyn}(X)$ et

$$\check{S}_w = \frac{\check{S}_{l_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup \check{S}_{l_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} \quad \text{pour} \quad w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 > \dots > l_k.$$

| I | $\pi_Y(I)$ | ξ_I | S_I | $\pi_Y(S_I)$ |
|-----------------------|---------------|---|---|---|
| x_0 | | x_0 | x_0 | |
| x_1 | y_1 | x_1 | x_1 | y_1 |
| $x_0 x_1$ | y_2 | $[x_0, x_1]$ | $x_0 x_1$ | y_2 |
| $x_0^2 x_1$ | y_3 | $[x_0, [x_0, x_1]]$ | $x_0^2 x_1$ | y_3 |
| $x_0 x_1^2$ | $y_2 y_1$ | $[[x_0, x_1], x_1]$ | $x_0 x_1^2$ | $y_2 y_1$ |
| $x_0^3 x_1$ | y_4 | $[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]$ | $x_0^3 x_1$ | y_4 |
| $x_0^2 x_1^2$ | $y_3 y_1$ | $[x_0, [[x_0, x_1], x_1]]$ | $x_0^2 x_1^2$ | $y_3 y_1$ |
| $x_0 x_1^3$ | $y_2 y_1^2$ | $[[[x_0, x_1], x_1], x_1]$ | $x_0 x_1^3$ | $y_2 y_1^2$ |
| $x_0^4 x_1$ | y_5 | $[x_0, [x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]]$ | $x_0^4 x_1$ | y_5 |
| $x_0^3 x_1^2$ | $y_4 y_1$ | $[x_0, [x_0, [[x_0, x_1], x_1]]]$ | $x_0^3 x_1^2$ | $y_4 y_1$ |
| $x_0^2 x_1 x_0 x_1$ | $y_3 y_2$ | $[[x_0, [x_0, x_1]], [x_0, x_1]]$ | $2x_0^3 x_1^2 + x_0^2 x_1 x_0 x_1$ | $2y_4 y_1^2 + y_3 y_2$ |
| $x_0^2 x_1^3$ | $y_3 y_1^2$ | $[x_0, [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]$ | $x_0^2 x_1^3$ | $y_3 y_1^2$ |
| $x_0 x_1 x_0 x_1^2$ | $y_2^2 y_1$ | $[[x_0, x_1], [[x_0, x_1], x_1]]$ | $3x_0^2 x_1^3 + x_0 x_1 x_0 x_1^2$ | $3y_3 y_1^2 + y_2^2 y_1$ |
| $x_0 x_1^4$ | $y_2 y_1^3$ | $[[[[x_0, x_1], x_1], x_1], x_1]$ | $x_0 x_1^4$ | $y_2 y_1^3$ |
| $x_0^5 x_1$ | y_6 | $[x_0, [x_0, [x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]]]$ | $x_0^5 x_1$ | y_6 |
| $x_0^4 x_1^2$ | $y_5 y_1$ | $[x_0, [x_0, [x_0, [[x_0, x_1], x_1]]]]$ | $x_0^4 x_1^2$ | $y_5 y_1$ |
| $x_0^3 x_1 x_0 x_1$ | $y_4 y_2$ | $[x_0, [[x_0, [x_0, x_1]], [x_0, x_1]]]$ | $2x_0^4 x_1^2 + x_0^3 x_1 x_0 x_1$ | $2y_5 y_1 + y_4 y_2$ |
| $x_0^3 x_1^3$ | $y_4 y_1^2$ | $[x_0, [x_0, [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]]$ | $x_0^3 x_1^3$ | $y_4 y_1^2$ |
| $x_0^2 x_1 x_0 x_1^2$ | $y_3 y_2 y_1$ | $[x_0, [[x_0, x_1], [[x_0, x_1], x_1]]]$ | $3x_0^3 x_1^3 + x_0^2 x_1 x_0 x_1^2$ | $3y_4 y_1^2 + y_3 y_2 y_1$ |
| $x_0^2 x_1^2 x_0 x_1$ | $y_3 y_1 y_2$ | $[[x_0, [[x_0, x_1], x_1], [x_0, x_1]]]$ | $6x_0^3 x_1^3 + 3x_0^2 x_1 x_0 x_1^2 + x_0^2 x_1^2 x_0 x_1$ | $6y_4 y_1^2 + 3y_3 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2$ |
| $x_0^2 x_1^4$ | $y_3 y_1^3$ | $[x_0, [[[[x_0, x_1], x_1], x_1], x_1]]]$ | $x_0^2 x_1^4$ | $y_3 y_1^3$ |
| $x_0 x_1 x_0 x_1^3$ | $y_2^2 y_1^2$ | $[[x_0, x_1], [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]]$ | $4x_0^2 x_1^4 + x_0 x_1 x_0 x_1^3$ | $4y_3 y_1^3 + y_2^2 y_1^2$ |
| $x_0 x_1^5$ | $y_2 y_1^4$ | $[[[[[[x_0, x_1], x_1], x_1], x_1], x_1]]]$ | $x_0 x_1^5$ | $y_2 y_1^4$ |

Série diagonale & éléments de Lie

- ▶ $\mathcal{D} = \sum_{w \in X^*} w \sqcup \otimes . w = \prod_{l \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{\check{S}_l \sqcup \otimes . S_l}$ (**Schützenberger**) .
- ▶ $\log \mathcal{D} = \sum_{w \in X^*} w \sqcup \otimes . \pi_1(w)$, où $\pi_1(w)$ est le polynôme de Lie :

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{u_1, \dots, u_k \in X^* \setminus \{\varepsilon\}} \langle w | u_1 \sqcup \dots \sqcup u_k \rangle u_1 \cdots u_k .$$
- ▶ Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$, S est dite **group-like** si $\Delta S = S \otimes S$.
- ▶ S est dite **primitive** si $\Delta S = 1 \otimes S + S \otimes 1$.
- ▶ S vérifie le **critère de Friedrichs** si $\langle S | u \sqcup v \rangle = \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle$.

Théorème (Ree, 54)

$$\begin{aligned}
 S \in \mathcal{Lie}_{\mathbb{C}}\langle\langle X \rangle\rangle &\iff e^S \text{ vérifie le critère de Friedrichs} \\
 &\iff S \text{ est primitive} \\
 &\iff e^S \text{ est group-like.}
 \end{aligned}$$

POLYLOGARITHMES ET SOMMES HARMONIQUES

Intégrales itérées et séries de Chen d'un chemin

Soit $\omega_0(z) = \frac{dz}{z}$ et $\omega_1(z) = \frac{dz}{1-z}$. Posons $\mathcal{C} = \mathbb{C} \left[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z} \right]$.

Les **intégrales itérées** sur ω_0, ω_1 sont codées par des mots (**Fliess**) :

$$\alpha_{z_0 \rightsquigarrow z}(\varepsilon) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{z_0 \rightsquigarrow z}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \int_{z_0 \rightsquigarrow z} \omega_{i_1}(t_1) \dots \omega_{i_k}(t_k).$$

Soit $S_{z_0 \rightsquigarrow z} = \sum_{w \in X^*} \alpha_{z_0 \rightsquigarrow z}(w) w$ la **série de Chen** de $z_0 \rightsquigarrow z$ vérifiant

$$(ED) \quad \frac{dS}{dz} = \left[\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z} \right] S \quad \text{avec la condition initiale } S_{z_0 \rightsquigarrow z_0} = 1.$$

Proposition

Si G et H sont solutions de (ED) alors $dH^{-1}G = 0$.

En plus, si G, H sont groupe-like alors $\exists C \in \text{Lie}_{\mathbb{C}} \langle\langle X \rangle\rangle, G = He^C$.

S.G. non-commutative des polylogarithmes

Pour $w \in X^*_{x_1}$, on a $\text{Li}_w(z) = \alpha_{0 \rightsquigarrow z}(w)$. Posons

$$\text{Li}_{x_0^k}(z) = \frac{\log^k z}{k!} = \alpha_{1 \rightsquigarrow z}(x_0^k) \quad \text{et} \quad \text{Li}_{x_1 x_0^k}(z) = \int_{0 \rightsquigarrow z} \omega_1(t) \frac{\log^k t}{k!}.$$

Théorème (HNM, Van der Hoeven & Petitot, 98)

Soit $L = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w w$. Alors L satisfait (ED) et $L(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} e^{x_0 \log \varepsilon}$.

$$\text{D'où, } \Delta L = L \otimes L \text{ et } L(z) = \prod_{l \in \mathcal{L}_{\text{yn}}(X)} e^{\text{Li}_{\xi_l}(z) S_l}.$$

Définition

$$L_{\text{reg}}(z) = \prod_{l \in \mathcal{L}_{\text{yn}}(X), l \neq x_0, x_1} e^{\text{Li}_{\xi_l}(z) S_l} \quad \text{et} \quad Z = L_{\text{reg}}(1).$$

$$P(z) = (1 - z)^{-1} L(z) = e^{-(1+x_1) \log(1-z)} L_{\text{reg}}(z) e^{x_0 \log(z)}.$$

Série de Chen & L & Z

Proposition

$L(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} e^{-x_1 \log \varepsilon} Z e^{x_0 \varepsilon}$ et $P(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} e^{-(1+x_1) \log \varepsilon} Z e^{x_0 \varepsilon}$.

D'où, pour $w \in X^*_{x_1}$,

$$Li_w(1 - \varepsilon) \sim \sum_{i \geq 1} Q_{w,i}(\log \varepsilon) \varepsilon^i \text{ et } P_w(1 - \varepsilon) \sim \sum_{i \geq 1} Q'_{w,i}(\log \varepsilon) \varepsilon^i.$$

Exemple

$Li_{x_1}(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} -\log \varepsilon$ et $P_{x_1}(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} -\varepsilon^{-1} \log \varepsilon$.

Puisque $x_1^2 x_0 = x_0 x_1^2 - x_0 x_1 \sqcup x_1 + \frac{1}{2} x_0 \sqcup x_1 \sqcup^2$, on a

$Li_{x_1^2 x_0}(1 - \varepsilon) \sim \zeta(3) + \zeta(2) \log \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon \log^2 \varepsilon + \dots$

$P_{x_1^2 x_0}(1 - \varepsilon) \sim \zeta(3) \varepsilon^{-1} + \zeta(2) \varepsilon^{-1} \log \varepsilon - \frac{1}{2} \log^2 \varepsilon + \dots$

$S_{z_0 \rightsquigarrow z}$ et $L(z)L(z_0)^{-1}$ satisfont (ED) et égales en z_0 . Alors,

Proposition

$S_{z_0 \rightsquigarrow z} = L(z)L(z_0)^{-1}$. Par conséquent, $\Delta S_\gamma = S_\gamma \otimes S_\gamma$ et

$S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} e^{-x_1 \log \varepsilon} Z e^{-x_0 \log \varepsilon}$.

S.G. non-commutative des polyzêtas

Définition

Soit ζ_{\sqcup} le morphisme $(\mathbb{C}\langle X \rangle, \sqcup) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ vérifiant $\zeta_{\sqcup}(w) = \zeta(w)$, pour $w \in x_0 X^* x_1$, et $\zeta_{\sqcup}(x_0) = \zeta_{\sqcup}(x_1) = 0$.

Proposition

Soit $Z_{\sqcup} = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(w) w$. Alors $Z_{\sqcup} = Z$, est donc groupe-like.

Théorème (HNM, 03)

$$\log Z = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(w) \pi_1(w),$$

$$Z = \sum_{k \geq 0} \sum_{l_1, \dots, l_k \geq 0} \zeta_{\sqcup}(x_1 x_0^{l_1} \circ \dots \circ x_1 x_0^{l_k}) \prod_{i=0}^k \text{ad}_{x_0}^{l_i} x_1,$$

où \circ est défini par $x_1 x_0^l \circ P = x_1 (x_0^l \sqcup P)$, pour $P \in \mathbb{C}\langle X \rangle$.

Example

$$\begin{aligned} Z &= \dots e^{\frac{2}{5}\zeta(2)^2[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]} \dots e^{\zeta(3)[[x_0, x_1], x_1]} \dots \\ &\quad \dots e^{\zeta(2)[x_0, x_1]} \dots e^{\frac{1}{10}\zeta(2)^2[x_0, [[x_0, x_1], x_1]]} \dots \\ &\quad \dots e^{\zeta(3)[x_0, [x_0, x_1]]} \dots e^{\frac{2}{5}\zeta(2)^2[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]} \dots \\ &= 1 + \zeta(2)[x_0, x_1] + \zeta(3)([x_0, [x_0, x_1]] + [[x_0, x_1], x_1]) \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2([x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + [[[x_0, x_1], x_1], x_1]) \\ &\quad + \frac{5}{8}[x_0, x_1]^2 + \frac{1}{4}[x_0, [[x_0, x_1], x_1]] + \dots, \\ \log Z &= \zeta(2)[x_0, x_1] + \zeta(3)([x_0, [x_0, x_1]] + [[x_0, x_1], x_1]) \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2([x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + [[[x_0, x_1], x_1], x_1]) \\ &\quad + \frac{1}{4}[x_0, [[x_0, x_1], x_1]] + \dots \end{aligned}$$

Indépendance linéaire des polylogarithmes

Proposition

$\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt. (puis \mathcal{C} -lin. idpt.). Par conséquent, $\{\text{P}_w\}_{w \in Y^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt. et $\{\text{H}_w\}_{w \in Y^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt.

Preuve

Le résultat est immédiat pour $K = 0$. Supposons qu'il soit vrai pour tout $k, 0 \leq k \leq K - 1$. Pour $k = K$,

$$\sum_{|w| \leq K} \lambda_w \text{Li}_w = 0 \iff \lambda_\varepsilon + \sum_{x \in X} \sum_{|u| < K} \lambda_{ux} \text{Li}_{ux} = 0.$$

Pour $p \in \mathbb{C}$ et $x \in X$, $\langle \text{L}e^{px} | ux \rangle = \text{Li}_{ux} + p \text{Li}_u + \dots$

Appliquons $\{\langle \text{L}(e^{px} - \text{Id}) | \cdot \rangle\}_{x \in X}$:

$$\forall x \in X, \quad p \sum_{|u|=K-1} \lambda_{ux} \text{Li}_u + \sum_{|u| < K-1} \mu_u \text{Li}_u = 0.$$

Par l'hyp. de récurrence, nous obtenons le résultat attendu.

Corollaire

Le \mathcal{C} -module différentiel $\mathcal{C}\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$ est l'extension Picard-Vessiot universelle des équations différentielles à trois singularités réguliers.

Groupe de Galois différentiel

- ▶ Soit $LI_{\mathcal{C}}$ la plus petite \mathcal{C} -algèbre contenant \mathcal{C} et stable par dérivation et par intégration par rapport à ω_0, ω_1 . Elle s'identifie avec le \mathcal{C} -module engendré par les $\{Li_w\}_{w \in X^*}$.

- ▶ Soit $\sigma \in \text{Gal}(LI_{\mathcal{C}})$. Alors $\sum_{w \in X^*} \sigma Li_w w = \prod_{l \in \mathcal{L}yn} e^{\sigma Li_{\xi_l} S_l}$.

Puisque $d\sigma Li_{x_i} = \sigma d Li_{x_i} = \omega_i$ alors $\sigma Li_{x_i} = Li_{x_i} + c_{x_i}$.

$$\text{De même, } \sigma Li_{\xi_l}(z) = \int \omega_i(t) \frac{\sigma Li_{\xi_{l_1}}^{i_1}(t)}{i_1!} \cdots \frac{\sigma Li_{\xi_{l_k}}^{i_k}(t)}{i_k!} + c_{\xi_l}.$$

$$\text{Par conséquent, } \sum_{w \in X^*} \sigma Li_w w = L \prod_{l \in \mathcal{L}yn} e^{c_{\xi_l} S_l} = L e^{C_{\sigma}}.$$

- ▶ L'action de $\sigma \in \text{Gal}(LI_{\mathcal{C}})$ sur les Li_w est équivalente donc à celle de $e^{C_{\sigma}} \in \text{Gal}(ED)$ sur la solution exponentielle L . D'où,

Théorème (HNM, 03)

$$\text{Gal}(LI_{\mathcal{C}}) \cong \text{Gal}(ED) = \{e^C \mid C \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{C}} \langle\langle X \rangle\rangle\}.$$

Théorèmes de structure

Théorème (HNM, Van der Hoeven & Petitot, 98)

$$(\mathbb{C}\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}, \cdot) \cong (\mathbb{C}\langle X \rangle, \sqcup).$$

$$\Rightarrow \text{Li}_u \text{Li}_v = \text{Li}_{u \sqcup v}, u, v \in X^* \quad \Rightarrow \zeta(u)\zeta(v) = \zeta(u \sqcup v), u, v \in x_0 X^* x_1.$$

Exemple $x_0 x_1 \sqcup x_0^2 x_1 = x_0 x_1 x_0^2 x_1 + 3x_0^2 x_1 x_0 x_1 + 6x_0^3 x_1^2,$

$$\text{Li}_2 \text{Li}_3 = \text{Li}_{2,3} + 3\text{Li}_{3,2} + 6\text{Li}_{4,1},$$

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

Théorème (HNM, 03)

$$(\mathbb{C}\{\text{P}_w\}_{w \in Y^*}, \odot) \cong (\mathbb{C}\{\text{H}_w\}_{w \in Y^*}, \cdot) \cong (\mathbb{C}\langle Y \rangle, \sqcup).$$

$$\Rightarrow \text{H}_u \text{H}_v = \text{H}_{u \sqcup v}, u, v \in Y^* \quad \Rightarrow \zeta(u)\zeta(v) = \zeta(u \sqcup v), u, v \in Y^* \setminus y_1 Y^*$$

Exemple $y_2 \sqcup y_3 = y_2 y_3 + y_3 y_2 + y_5,$

$$\text{H}_2 \text{H}_3 = \text{H}_{2,3} + \text{H}_{3,2} + \text{H}_5,$$

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5).$$

$$\Rightarrow \zeta(5) = 2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

Relations entre polyzêtas indexés par les mots de Lyndon

$$\begin{aligned}\zeta(2, 1) &= \zeta(3) \\ \zeta(4) &= \frac{2}{5}\zeta(2)^2 \\ \zeta(3, 1) &= \frac{1}{10}\zeta(2)^2 \\ \zeta(2, 1, 1) &= \frac{2}{5}\zeta(2)^2 \\ \zeta(4, 1) &= 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3) \\ \zeta(3, 2) &= -\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3) \\ \zeta(3, 1, 1) &= 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3) \\ \zeta(2, 2, 1) &= -\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3) \\ \zeta(2, 1, 1, 1) &= \zeta(5) \\ \zeta(6) &= \frac{8}{35}\zeta(2)^3 \\ \zeta(5, 1) &= -\frac{1}{2}\zeta(3)^2 + \frac{6}{35}\zeta(2)^3 \\ \zeta(4, 2) &= \zeta(3)^2 - \frac{32}{105}\zeta(2)^3 \\ \zeta(4, 1, 1) &= -\zeta(3)^2 + \frac{23}{70}\zeta(2)^3 \\ \zeta(3, 2, 1) &= 3\zeta(3)^2 - \frac{29}{30}\zeta(2)^3 \\ \zeta(3, 1, 2) &= -\frac{3}{2}\zeta(3)^2 + \frac{53}{105}\zeta(2)^3 \\ \zeta(3, 1, 1, 1) &= -\frac{1}{2}\zeta(3)^2 + \frac{6}{35}\zeta(2)^3 \\ \zeta(2, 2, 1, 1) &= \zeta(3)^2 - \frac{32}{105}\zeta(2)^3 \\ \zeta(2, 1, 1, 1, 1) &= \frac{8}{35}\zeta(2)^3\end{aligned}$$

RESULTATS A L'ABEL
PAR LES SERIES GENERATRICES
NON COMMUTATIVES

S.G. non commutatives des sommes harmoniques

Définition

Soit $H(N) = \sum_{w \in Y^*} H_w(N) w$ et $Z_{\sqcup} = \sum_{w \in Y^*} \zeta_{\sqcup}(w) w$,

où $\zeta_{\sqcup}(w)$ est la constante associée à $H_w(N)$.

Proposition

H est groupe-like et vérifie l'équation aux différences

$$H(N) = \left(1 + \sum_{i>0} \frac{y_i}{N^i} \right) H(N-1) \quad \text{avec} \quad H(0) = 1.$$

Proposition

ζ_{\sqcup} est le morphisme $(\mathbb{C}\langle Y \rangle, \sqcup) \longrightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ vérifiant $\zeta_{\sqcup}(y_1) = \gamma$,

$\zeta_{\sqcup}(w) = \zeta(w)$, pour $w \in Y^* \setminus y_1 Y^*$, et

$\zeta_{\sqcup}(u \sqcup v) = \zeta_{\sqcup}(u) \zeta_{\sqcup}(v)$, pour $u, v \in Y^*$.

Autrement dit, Z_{\sqcup} est groupe-like.

Théorèmes à l'Abel

Théorème (HNM, 05)

Soit $\Lambda = \sum_{w \in Y^*} Li_w$ w et $\pi_Y Z$ est la projection de Z sur Y .

$$\lim_{z \rightarrow 1} e^{y_1 \log \frac{1}{1-z}} \Lambda(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[- \sum_{k \geq 1} H_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k} \right] H(N) = \pi_Y Z.$$

Preuve $L(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\rightsquigarrow} e^{-x_1 \log \varepsilon} Z$ et $P(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\rightsquigarrow} e^{-(1+x_1) \log \varepsilon} Z$
 $\Rightarrow \pi_Y L(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\rightsquigarrow} e^{-y_1 \log \varepsilon} \pi_Y Z$ et $\pi_Y P(1 - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\rightsquigarrow} \text{Mono}(\varepsilon) \pi_Y Z$
 $\Rightarrow H(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \text{Const}(N) \pi_Y Z,$

où $\text{Mono} = \sum_{k \geq 0} P_{y_1^k} (-y_1)^k$ et $\text{Const} = \sum_{k \geq 0} H_{y_1^k} (-y_1)^k.$

Identité de Newton $\Rightarrow \text{Const} = \exp \left[- \sum_{k \geq 1} H_{y_k} \frac{(-y_1)^k}{k} \right].$

Asymptotique des sommes harmoniques

\mathcal{Z} (resp. \mathcal{Z}') la \mathbb{Q} -algèbre (resp. $\mathbb{Q}[\gamma]$ -algèbre) engendrée par les polyzêtas convergents.

Théorème (Costermans, Enjalbert & HNM, 05)

Il existe les coefficients $b_i \in \mathcal{Z}'$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$ et $\eta_i \in \mathbb{Z}$ **effectivement**

calculables tels que $\forall w \in Y^*$, $H_w(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{i=0}^{+\infty} b_i N^{\eta_i} \log^{\kappa_i}(N)$.

Preuve $H(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left[\sum_{k \geq 1} H_{y_k}(N) \frac{(-y_1)^k}{k} \right] \pi_Y \mathcal{Z}$.

Exemple

$$H_{4,2}(N) = \zeta(4, 2) - \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{N^3} + \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{N^4} - \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{5} \right) \frac{1}{N^5} + O\left(\frac{1}{N^6}\right),$$

$$\begin{aligned} H_{1,4}(N) &= \frac{\pi^4}{90} \ln(N) + \frac{\pi^4}{90} \gamma - \zeta(4, 1) - \zeta(5) \\ &+ \frac{\pi^4}{180} \frac{1}{N} - \frac{\pi^4}{1080} \frac{1}{N^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{N^3} + \left(\frac{\pi^4}{10800} - \frac{1}{24} \right) \frac{1}{N^4} + O\left(\frac{1}{N^5}\right) \end{aligned}$$

Constantes d'Euler généralisées

$\exp \left[u \sum_{l=0}^{\infty} t_l \frac{v^l}{l!} \right] = \sum_{n,k=0}^{\infty} b_{n,k}(t_1, \dots, t_{n-k+1}) \frac{v^n u^k}{n!}$, où les $b_{n,k}$ sont les polynômes de Bell. Pour $t_m = (-1)^m (m-1)! \zeta_{\perp}(m)$, $m \geq 1$,

Théorème (HNM, 05)

$$Z_{\perp} = \left[1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n b_{n,k}(\gamma, \zeta(2), 2\zeta(3), \dots) \frac{(-y_1)^n}{n!} \right] \pi_Y Z.$$

Corollaire

La constante $\zeta_{\perp}(x_1^k w)$ associée au $\zeta(x_1^k w)$, $k \geq 0$, $w \in x_0 X^* x_1$, est polynomial degré k en γ et à coefficients dans \mathcal{Z} .

En particulier, $\zeta_{\perp}(x_1^k)$ est polynomial degré k en γ et à coefficients dans $\mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(2i+1)]_{0 < i \leq (k-1)/2}$:

$$\zeta_{\perp}(x_1^k) = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k > 0 \\ s_1 + \dots + ks_k = k}} \frac{(-1)^k}{s_1! \dots s_k!} (-\gamma)^{s_1} \left(-\frac{\zeta(2)}{2} \right)^{s_2} \dots \left(-\frac{\zeta(k)}{k} \right)^{s_k}.$$

Exemple

$$\zeta_{\perp}(1, 1) = \frac{\gamma^2 - \zeta(2)}{2},$$

$$\zeta_{\perp}(1, 1, 1) = \frac{\gamma^3 - 3\zeta(2)\gamma + 2\zeta(3)}{6},$$

$$\zeta_{\perp}(1, 1, 1, 1) = \frac{80\zeta(3)\gamma - 60\zeta(2)\gamma^2 + 6\zeta(2)^2 + 10\gamma^4}{240},$$

$$\zeta_{\perp}(1, 7) = \zeta(7)\gamma + \zeta(3)\zeta(5) - \frac{54}{175}\zeta(2)^4,$$

$$\begin{aligned}\zeta_{\perp}(1, 1, 6) &= \frac{4}{35}\zeta(2)^3\gamma^2 + [\zeta(2)\zeta(5) + \frac{2}{5}\zeta(3)\zeta(2)^2 - 4\zeta(7)]\gamma \\ &+ \zeta(6, 2) + \frac{19}{35}\zeta(2)^4 + \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)^2 - 4\zeta(3)\zeta(5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{\perp}(1, 1, 1, 5) &= \frac{3}{4}\zeta(6, 2) - \frac{14}{3}\zeta(3)\zeta(5) + \frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3)^2 + \frac{809}{1400}\zeta(2)^4 \\ &- \left(2\zeta(7) - \frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(5) + \frac{1}{10}\zeta(3)\zeta(2)^2\right)\gamma \\ &+ \left(\frac{1}{4}\zeta(3)^2 - \frac{1}{5}\zeta(2)^3\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\zeta(5)\gamma^3.\end{aligned}$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION