EXEMPLES NON ANALYTIQUES DE DIFFUSION D'ARNOLD

David Sauzin

Journées scientifiques de l'IMCCE, mai 2003

Le texte [Sau01] écrit à l'occasion des précédentes *Jounées scientifiques* évoquait un résultat de stabilité effective pour les hamiltoniens de classe Gevrey obtenu en collaboration avec Jean-Pierre Marco. Ce résultat, qui est une généralisation du théorème de Nekhoroshev, fait l'objet d'une moitié de l'article [MS03a]. Je me propose de revenir sur ce travail et de rendre compte brièvement des exemples d'instabilité construits dans l'autre moitié de [MS03a], ainsi que des nouveaux exemples récemment obtenus dans [MS03b]. (On trouvera dans [Sau03] un résumé plus détaillé de [MS03a].)

Je tiens à rendre ici hommage à Michael Herman, qui est à l'origine de ces travaux.

1. Hamiltoniens presque intégrables. Nous travaillerons avec des sytèmes hamiltoniens d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r_i}(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n), \quad \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n),$$

où les variables sont des angles $\theta_1, \dots, \theta_n$ et des actions $r_1, \dots, r_n$, et le hamiltonien H est une fonction supposée proche d'une fonction h indépendante des angles :

$$H(\theta, r) = h(r) + f(\theta, r), \qquad \varepsilon = \|f\| \ll 1. \tag{1}$$

On considère donc f comme une petite perturbation, dont on mesure la taille à l'aide d'une norme $\|\,.\,\|$ d'une façon qui sera précisée plus loin et qui dépendra de la classe de régularité considérée ; classiquement, on utilise des fonctions analytiques.

Comme le système hamiltonien associé à h est parfaitement bien compris (il s'agit d'un système complètement intégrable écrit en variables actions-angles), on peut espérer en déduire des informations sur la dynamique du système complet lorsque ε est assez petit. Il s'agit du "problème général de la dynamique," selon l'expression de Poincaré dans les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, puisqu'en effet un certain nombre de systèmes hamiltoniens rencontrés en physique admettent une approximation intégrable.

Nous aurons besoin dans la suite d'une certaine hypothèse de non-dégénérescence sur la partie intégrable : la fonction $h(r)$ sera supposée "quasi-convexe," c'est-à-dire que les hypersurfaces $\{\, h(r) = \text{const}\,\}$ sont strictement convexes. C'est par exemple le cas si h est une fonction strictement convexe, ou si h est la fonction

$$h_0(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n. \tag{2}$$

(Malheureusement, les systèmes hamiltoniens rencontrés en mécanique céleste souffrent souvent d'une dégénérescence importante et on ne peut appliquer directement des résultats du genre de ceux dont il sera question plus bas — *cf.* l'exposé de Jacques Féjoz dans ces *Journées scientifiques.*)

Notre propos est donc d'explorer la diversité des comportements dynamiques possibles sous les hypothèses précédentes, en particulier du point de vue de la stabilité. Les systèmes complètement intégrables sont en effet le modèle même de la stabilité :

les variables r_i sont constantes le long de chaque solution du système associé à h, et toutes les solutions sont quasi-périodiques (elles s'écrivent $\theta(t) = \theta(0) + t\nabla h(r(0)$, $r(t) = r(0))$. Il se trouve que le système associé à H hérite de h des propriétés assez fortes de stabilité des variables d'action, que nous rappellerons, mais notre objectif sera de donner des exemples de perturbations de la fonction h_0 définie par (2) qui conduisent aux instabilités les plus grandes possibles.

2. Diffusion d'Arnold. À quel point les actions peuvent-elles varier le long des solutions d'un système presque intégrable ? La réponse dépend en premier lieu du nombre n de degrés de liberté.

Le cas $n = 1$ offre peu d'intérêt : l'énergie totale H étant conservée le long de chaque solution, la quantité $h(r)$ ne peut pas varier de plus de ε et cela entraîne que la variation de l'action r_1 le long d'une solution quelconque n'excède jamais $\sqrt{\varepsilon}$ (à une constante multiplicative près).

Si $n = 2$, il y a encore une obstruction à la variation des actions r_1 et r_2, mais le mécanisme en est plus subtil : l'énergie H est encore conservée, mais cela signifie seulement que chaque solution est contrainte de rester dans un niveau d'énergie $\Sigma_c = \{ (\theta, r) \mid H(\theta, r) = c \}$, et ces niveaux d'énergie sont de dimension 3. Mais il se trouve que, dans chaque niveau d'énergie, la "théorie KAM" (du nom des mathématiciens Kolmogorov, Arnold et Moser) garantit l'existence de nombreux tores invariants préservés par le flot du système dynamique ; ils sont de la forme $\{ r = r^* + A_{r^*}(\theta) \}$, où r^* peut prendre presque n'importe quelle valeur et A_{r^*} désigne une petite fonction périodique dépendant de r^*, et ils portent des solutions toutes quasi-périodiques. Comme ce sont des sous-variétés de dimension 2 d'une variété Σ_c de dimension 3, on en déduit que si une solution n'appartient pas à l'un de ces tores, elle doit restée éternellement "coincée" entre deux d'entre eux ; dans les deux cas, la variation des actions reste faible (au plus de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, en raison d'estimations de la petitesse de la distance séparant deux tores consécutifs que l'on peut tirer de la théorie KAM).

Ce n'est que si $n \geq 3$ qu'il n'y a pas d'obstruction à l'instabilité. En effet, Arnold a pu exhiber un exemple de système presque intégrable à 3 degrés de liberté pour lequel la première action, r_1, de certaines solutions varie beaucoup au cours du temps : ces solutions $(\theta(t), r(t))$ restent bien sûr dans leur niveau d'énergie Σ_c, qui contient toujours de nombreux tores invariants, mais les tores en question sont maintenant des sous-variétés de dimension 3 de Σ_c, qui est de dimension 5, et cela laisse assez de place pour que ces solutions réussissent à se "faufiler" entre eux, si bien que la fonction $r_1(t)$ peut varier, disons de 0 à 1, aussi petit que soit ε (*cf.* [Arn64] ou [AA67]). Ce phénomène, selon lequel les actions d'une solution dérivent sensiblement au cours du temps bien que le système soit arbitrairement proche de l'intégrable, porte maintenant le nom de "diffusion d'Arnold".

3. Stabilité effective. Mais, même si $n \geq 3$, il subsiste quelque chose qui "freine" les actions et les empêche de développer rapidement de grandes variations : la diffusion d'Arnold, quand elle a lieu, est extrêmement lente, en raison du théorème de Nekhoroshev. Ce théorème fournit un résultat de stabilité effective (c'est-à-dire de stabilité en temps fini, par opposition à la stabilité perpétuelle des solutions KAM), qui dépend beaucoup de la classe de régularité considérée et des propriétés de non-dégénérescence de la partie intégrable h. Le cas le plus étudié était celui des hamiltoniens analytiques proches d'un hamiltonien inégrable h quasi-convexe ; nous nous sommes intéressés aux Hamiltoniens dits "de classe Gevrey," toujours sous l'hypothèse de quasi-convexité, et avons étendu à cette situation le résultat de stabilité effective dans notre article [MS03a], auquel nous renvoyons pour les références bibliographiques et des énoncés précis.

Fixons deux nombres réels $\alpha \geq 1$ et $L > 0$ et appelons N le nombre de variables ($N = 2n$ dans notre cas) ; une fonction φ de N variables est dite Gevrey-(α, L) si sa dérivée partielle d'ordre $(k_1, \ldots, k_N)$ est bornée par $CL^{k_1+\cdots+k_N}(k_1! \ldots k_N!)^\alpha$, où le nombre C ne dépend pas du multi-indice de dérivation $(k_1, \ldots, k_N)$. La plus petite constante C possible est appelée "norme Gevrey-(α, L)" de la fonction, et notée $\|\varphi\|_{\alpha,L}$. Avec les notations de (1), $\varepsilon = \|f\|_{\alpha,L}$. Le cas classique des fonctions analytiques est obtenu en choisissant $\alpha = 1$.

Notre résultat de stabilité effective pour les hamiltoniens H Gevrey-(α, L) proches d'une fonction $h(r)$ quasi-convexe affirme que,

> *si $\varepsilon = \|H - h\|_{\alpha,L}$ est assez petit, pour n'importe quelle solution $(\theta(t), r(t))$ du système associé à H, la variation $\|r(t) - r(0)\|$ reste faible (plus petite que $c\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$) pour tout t compris entre 0 et $\exp(c'(\frac{1}{\varepsilon})^a)$, avec $a = \frac{1}{2n\alpha}$ (les nombres c et c' ne dépendent que de n, α, L et h).*

(Ce résultat était connu pour $\alpha = 1$.) Si l'on veut assister à une dérive sensible des actions, disons $\|r(t) - r(0)\| = 1$, il faut donc attendre un temps exponentiellement long par rapport à ε !

La stabilité hamiltonienne est même encore un peu plus forte que cela : l'exposant a est encore plus grand si la condition initiale $(\theta(0), r(0))$ de la solution considérée est voisine d'une surface résonante $S_{\mathcal{M}}$ de h. Ici,

$$S_{\mathcal{M}} = \{\, r \mid k_1 \frac{\partial h}{\partial r_1}(r) + \cdots + k_n \frac{\partial h}{\partial r_n}(r) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathcal{M} \,\}$$

et $\mathcal{M}$ désigne un ensemble de n-uplets $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers relatifs indépendants. S'il y a m éléments indépendants dans $\mathcal{M}$, on dit qu'on a affaire à une résonance de multiplicité m, et

> *on peut prendre $a = \frac{1}{2(n-m)\alpha}$ dans le résultat de stabilité chaque fois que* $\operatorname{dist}(r(0), S_{\mathcal{M}}) \leq \sigma\sqrt{\varepsilon}$

(le nombre σ est arbitraire, mais les constantes c et c' du résultat de stabilité en dépendront, de même qu'elles dépendront de $\mathcal{M}$).

L'exemple construit par Arnold est une perturbation analytique du hamiltonien intégrable h_0 défini par (2) avec $n = 3$ (la fonction perturbatrice f était en fait un polynôme trigonométrique). La vitesse moyenne de dérive des actions se doit donc d'y être exponentiellement lente, inférieure à $\exp(-\text{const}(\frac{1}{\varepsilon})^a)$ avec $a = 1/6$ au moins, puisque $\alpha = 1$. En fait, on peut prendre $a = 1/2$ dans son cas, parce que les solutions instables qu'il met en évidence passent au voisinage de la surface doublement résonante $S_{\mathcal{M}} = \{\, r_1 = r_2 = 0 \,\}$ (ici, $\mathcal{M} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ et $\nabla h(r) = (r_1, r_2, 1)$).

Le résultat de dérive des actions d'Arnold reposait sur un mécanisme d'instabilité très ingénieux mais relativement difficile à mettre en place. Si l'on s'autorise à considérer des perturbations Gevrey-(α, L) de h_0 avec $\alpha > 1$, il est plus facile de construire des exemples de comportement instable, avec n'importe quel nombre $n \geq 3$ de degrés de liberté.

4. Exemples Gevrey non analytiques d'instabilité. Notre premier souci a été de vérifier l'optimalité de l'exposant de stabilité $a = \frac{1}{2(n-m)\alpha}$. Nous y sommes parvenus chaque fois que $n \geq 3$, $m \geq 2$ et $\alpha > 1$, et c'est l'objet de l'autre moitié de [MS03a]. Nous y construisons des perturbations f arbitrairement petites de h_0 pour lesquelles *au moins une solution* $(\theta(t), r(t))$ *voit sa première action dériver de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *à une vitesse moyenne* $\geq \exp(-const(\frac{1}{\varepsilon})^a)$ *avec* $a = \frac{1}{2(n-2)\alpha}$.

Cet exposant a est le plus grand possible pour les solutions considérées, parce qu'elles passent au voisinage de $S_{\mathcal{M}} = \{ r_1 = r_2 = 0 \}$ (qui est encore une surface doublement résonante pour tout $n \geq 3$). Il est facile d'en déduire des systèmes presque intégrables possédant des solutions presque m-résonantes qui atteignent l'exposant $\frac{1}{2(n-m)\alpha}$.

On peut préciser la façon dont la première action de ces solutions, $r_1(t)$, évolue au cours du temps : nous les fabriquons de telle façon que $r_1(\ell q) = \frac{\ell}{q}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, où q est un grand paramètre de l'ordre de $\exp(\mathrm{const}(\frac{1}{\varepsilon})^a)$. Cela signifie que, si l'on s'en tient aux instants multiples de q, la solution se translate d'une quantité $1/q$ le long de l'axe des r_1 entre deux instants consécutifs. Le temps nécessaire pour lui faire franchir l'espace séparant $r_1 = 0$ de $r_1 = 1$ est donc q^2, qui est une durée exponentiellement grande caractérisée par le même exposant a.

Nous ne donnerons ici aucun détail sur la démonstration, qui — quoique plus élémentaire que celle de [Arn64] — n'en nécessite pas moins un certain nombre d'étapes et de détails techniques. Si notre méthode ne concerne que le cas non analytique ($\alpha > 1$), c'est que nous utilisons de façon essentielle l'existence de fonctions Gevrey non nulles dont toutes les dérivées s'annulent à certains endroits, chose impossible dans le cadre analytique.

Nous avons obtenu dans [MS03b] de nouveaux exemples où l'instabilité se manifeste d'une façon plus spectaculaire, quoiqu'à une vitesse moins grande. En effet l'exposant a caractérisant la vitesse moyenne de dérive des nouvelles solutions ne sera plus que $\frac{1}{2(n-m)(\alpha-1)}$, mais l'intérêt de ces solutions est ailleurs...

Le cadre de travail est le même que précédemment : nous nous intéressons aux hamiltoniens H de classe Gevrey-(α, L) proches de h_0, avec $n \geq 3$ et $\alpha > 1$ quelconques, et nous désignons toujours par ε le petit paramètre $\|H - h_0\|_{\alpha,L}$. Le premier résultat de [MS03b] est l'existence de tels systèmes, avec ε arbitrairement petit, pour lesquels

il existe dans l'espace de phases un ouvert de conditions initiales qui est transporté de $-\infty$ *à* $+\infty$ *le long de l'axe des* r_1 *par le flot du système associé à* H.

Cela signifie que, pour chacun de ces systèmes H, on est assuré de l'existence de non plus une solution seulement qui dérive de $-\infty$ à $+\infty$, mais d'une infinité de telles solutions : dès que la condition initiale $(\theta(0), r(0))$ est choisie dans une certaine boule ouverte $\{ (\theta, r) \mid |\theta| < \rho,\ |r| < \rho \}$, la solution correspondante voit sa première action se dépacer de $-\infty$ à $+\infty$. Naturellement, le rayon ρ est extrêmement (exponentiellement) petit par rapport à ε.

Mais il vaut mieux formuler les choses de manière plus globale, en utilisant le flot Φ^{tH} défini par $(\theta(t), r(t)) = \Phi^{tH}(\theta(0), r(0))$, c'est-à-dire que Φ^{tH} est l'application consistant à laisser évoluer le système à partir d'une condition initiale $(\theta(0), r(0))$ et à observer le point $(\theta(t), r(t))$ qu'il a atteint au bout du temps t. On peut alors affirmer qu'il existe, pour certains hamiltoniens H presque intégrables, en désignant par q un certain paramètre exponentiellement grand par rapport à ε, un domaine ouvert sur lequel l'action du flot aux temps $t_\ell = \ell q$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) équivaut esentiellement à une translation de pas ℓ/q le long de l'axe des r_1.

On remarquera l'analogie entre ce résultat et le précédent ; la vitesse de dérive est, nous l'avons dit, un peu moins grande, mais les conditions initiales concernées forment un ouvert, c'est-à-dire un ensemble beaucoup plus gros qu'un point (même si sa taille est en fait exponentiellement petite).

Enfin, nous avons exhibé dans [MS03b] un autre type de comportement instable susceptible d'être rencontré dans des systèmes pourtant presque intégrables, qui mérite certainement le qualificatif de "chaotique."

> *Il existe des hamiltoniens H arbitrairement proches de h_0 pour lesquels le flot au temp q (où q est un certain paramètre exponentiellement grand par rapport à $\varepsilon = \|H - h_0\|_{\alpha,L}$) contient une marche aléatoire de pas $1/q$ le long de l'axe des r_1.*

Cela signifie qu'à chaque suite bi-infinie $(\dots, \kappa_{-1}, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots)$ de nombres ± 1 on peut associer une solution $(\theta(t), r(t)) = \Phi^{tH}(\theta(0), r(0))$ vérifiant $r_1((\ell+1)q) = r_1(\ell q) + \frac{\kappa_{\ell+1}}{q}$: entre l'instant ℓq et l'instant $(\ell+1)q$, la première action change de $+\frac{1}{q}$ ou de $-\frac{1}{q}$ selon que $\kappa_{\ell+1} = +1$ ou $\kappa_{\ell+1} = -1$.

On peut aussi dire, de façon imagée, que le comportement du système aux instants multiples de q et en restriction à une certaine partie de l'espace de phases peut être simulé par une succession infinie de tirages indépendants à pile ou face, en convenant que la première action doit se décaler de $1/q$ vers la droite si l'on tire pile, vers la gauche si l'on tire face : le système a beau être déterministe et proche de l'intégrable, on trouvera toujours une solution pour suivre la marche tracée par la pièce de monnaie (plus exactement : pour chaque $\ell \geq 0$, on trouvera une infinité de solutions suivant la marche indiquée par les ℓ premiers tirages et, quand on tire à pile ou face une $(\ell+1)$-ième fois, une infinité de solutions parmi les précédentes voient leur première se déplacer de la façon indiquée par ce nouveau tirage, etc.).

Références

[Arn64] V. I. Arnold, "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156** (1964), 9–12 ; *Soviet Math. Dokl.* **5** (1964), 581–585.

[AA67] V. I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[MS03a] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems," *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* vol. **96** (2003), 1–77.

[MS03b] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Wandering domains and random walks in Gevrey near-integrable systems," *soumis à Ergodic Theory and Dynamical Systems* pour un volume spécial à la mémoire de Michael Herman, avril 2003, 46 p.

[Sau01] D. Sauzin, "Séries Gevrey et théorème de Nekhoroshev," *Journées scientifiques 2000 de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides*, Notes scientifiques et techniques de l'Institut de Mécanique Céleste **S076**, p. 145–147, juin 2001.

[Sau03] D. Sauzin, "Nekoroshev estimates and instability for Gevrey class Hamiltonians," *soumis* pour les actes du "Research Trimester on Dynamical Systems" (Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pise, 4 février–26 avril 2002), mars 2003, 15 p.