

Exemples de diffusion d'Arnold avec convergence vers un mouvement brownien

David Sauzin

Je me propose ici de rendre compte d'un travail en cours de rédaction [1], qui s'inscrit dans le prolongement de deux articles écrits en collaboration avec Jean-Pierre Marco [2] et [3]. Pour un survol de ces deux articles, on pourra se reporter aux textes [4] et [5] écrits à l'occasion des deux précédentes éditions des *Journées scientifiques de l'IMCCE*.

1. Hamiltoniens presque intégrables de classe Gevrey.

Rappelons brièvement le cadre de travail (on trouvera plus de détails dans [5]). Un système hamiltonien est un champ de vecteurs particulier, de la forme

$$\frac{dI_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}(I_1, \dots, I_N, \theta_1, \dots, \theta_N, t), \quad \frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_j}(I_1, \dots, I_N, \theta_1, \dots, \theta_N, t),$$

avec des variables réelles I_1, \dots, I_N (les "actions") et des variables angulaires $\theta_1, \dots, \theta_N$ (les "angles"), la fonction H étant supposée assez régulière (\mathcal{C}^∞ de classe Gevrey). Nous autorisons la fonction H à dépendre du temps t (le champ de vecteurs est donc non autonome), mais de façon périodique. L'espace de phases est $\mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N$, l'ensemble des états (I, θ) dans lequel le système peut se trouver (\mathbb{R}^N pour les N -uplets d'actions $I = (I_1, \dots, I_N)$, $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N$ pour les N -uplets d'angles $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$). Chaque condition initiale $x_0 = (I(0), \theta(0))$ détermine une unique trajectoire $t \mapsto x(t) = (I(t), \theta(t))$ dans l'espace de phases, comme indiqué sur la partie gauche de la figure 1.

Le système est dit presque intégrable lorsque H est proche d'une fonction h indépendante des angles :

$$H(I, \theta, t) = h(I) + f(I, \theta, t), \quad \varepsilon = \|f\| \ll 1,$$

c'est-à-dire que l'on considère f comme une petite perturbation, dont on mesure la taille à l'aide d'une norme $\|\cdot\|$ adaptée aux espaces de fonctions Gevrey d'indice $\alpha \geq 1$ (voir [5]). Nous choisissons ici

$$h(I) = h_0(I) = \frac{1}{2}(I_1^2 + \dots + I_N^2)$$

et nous voulons explorer la diversité des comportements dynamiques possibles, sachant qu'en l'absence de perturbation (lorsque $f = 0$), le système est parfaitement bien compris, avec en particulier $I(t) = I(0)$ pour toutes les solutions : les actions I_j sont des intégrales premières du système complètement intégrable défini par $h_0(I)$, dont toutes les solutions sont quasi-périodiques ($\theta(t) = \theta(0) + tI(0)$). Nous voudrions savoir à quel point les actions sont susceptibles de varier le long des trajectoires pour le système "perturbé" défini par $H = h_0 + f$: c'est la question de la "diffusion d'Arnold".

Il se trouve que, lorsque $\varepsilon = \|f\|$ est assez petit, le système défini par H hérite de h_0 des propriétés de stabilité assez fortes pour les variables d'action :

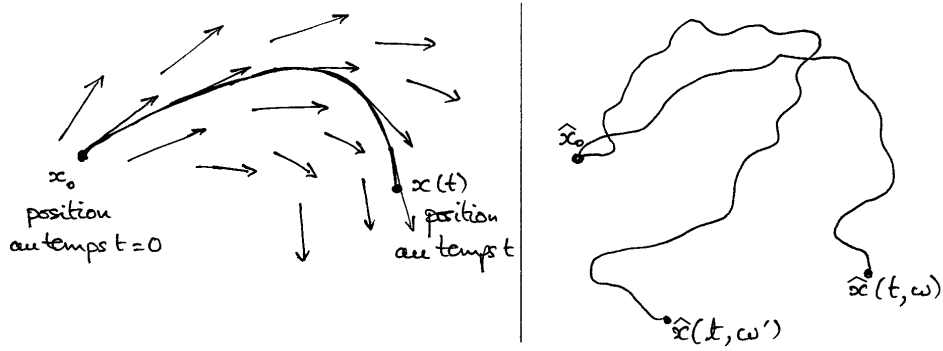


FIG. 1 – Trajectoires déterministes/aléatoires

- D’après le théorème de Nekhoroshev, pour tout intervalle de temps $[t_1, t_2]$, $|I_j(t_2) - I_j(t_1)| \leq \text{const } \varepsilon^b$ si $t_2 - t_1 \leq \exp(\text{const}(\frac{1}{\varepsilon})^a)$: la variation des actions sur un temps exponentiellement long est faible, on parle donc de stabilité exponentielle (voir [4] ; on peut prendre $a = \frac{1}{2(N+1)\alpha}$ et $b = \frac{1}{2(N+1)}$).
- D’après la théorie KAM, beaucoup de conditions initiales donnent lieu à des trajectoires quasi-périodiques, pour lesquelles les actions varient très peu pendant un temps infiniment long ; si $N = 1$, cela entraîne que les actions varient très peu pendant un temps infiniment long pour *toutes* les solutions (voir [5], en prenant garde au décalage d’une unité pour le nombre de degrés de liberté dû au caractère non autonome : nous travaillons ici avec des systèmes à $N + \frac{1}{2}$ degrés de liberté, qui se comportent comme les systèmes à $N + 1$ degrés de liberté pour les questions de stabilité).

Nous supposons donc $N \geq 2$ et notre objectif sera de donner des exemples de perturbations f qui soient arbitrairement petites en classe Gevrey, mais qui conduisent aux instabilités les plus grandes possibles, aux comportements les plus imprévisibles, les plus “chaotiques” possibles, quand bien même ε est arbitrairement proche de 0.

2. Diffusion d’Arnold. Point de vue probabiliste.

L’expression “diffusion d’Arnold” est employée à cause du célèbre article [6], dans lequel V. Arnold montrait dans un exemple simple ($N = 2$, $f = \varepsilon P$ avec P polynôme trigonométrique explicite—en particulier, cette perturbation f était analytique!) qu’il pouvait exister des trajectoires $t \mapsto (I(t), \theta(t))$ vérifiant $I_1(0) < 0$ et $I_1(\tau) > 1$ pour un certain temps τ , aussi petit que fût ε (mais le “temps d’instabilité” τ était nécessairement exponentiellement grand, ce qui est conforme au théorème de Nekhoroshev mentionné plus haut).

Arnold ne parlait que d’instabilité dans cet article ; c’est Chirikov qui a utilisé le premier le vocable “diffusion” dans ce contexte (voir [7]). Sur la base d’arguments heuristiques et de simulations numériques, Chirikov décrivait en effet le mouvement $t \mapsto I(t)$ des variables d’action pour une perturbation typique et pour une condition initiale typique comme un processus de diffusion, au sens probabiliste du terme.

Le plus simple des processus de diffusion est le mouvement brownien, qui a notamment été étudié par Brown et Einstein d’un point de vue physique, et dont la définition et les propriétés mathématiques ont été mises au point par Norbert Wiener et Paul

Lévy notamment. Le résultat principal de [1] est justement *la construction d'exemples de perturbation Gevrey f arbitrairement petite et de mesure de probabilité permettant d'établir, pour presque toute condition initiale, un lien entre le mouvement des $N - 1$ premières variables d'action et le mouvement brownien dans \mathbb{R}^{N-1}* . Il est vrai que les perturbations f construites dans [1] et les mesures de probabilité utilisées ont un caractère quelque peu artificiel, mais il s'agit ici de fournir un énoncé mathématique précis et une démonstration rigoureuse ; cela n'avait été jamais fait dans aucun exemple à ma connaissance.

Avant de détailler davantage le résultat obtenu, disons un mot sur la façon dont on peut concilier la nature a priori *déterministe* des champs de vecteurs hamiltoniens que nous étudions avec un point de vue *probabiliste*, dans lequel les phénomènes sont décrits en termes de processus stochastiques.

Il s'agira simplement pour nous de renoncer à une connaissance complète de l'état dans lequel se trouve le système, à l'instant initial comme aux instants ultérieurs ; nous nous contenterons de spécifier les $N - 1$ premières paires action-angle de la condition initiale,

$$\hat{x}_0 = (I_1(0), \dots, I_{N-1}(0), \theta_1(0), \dots, \theta_{N-1}(0)) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1},$$

la dernière paire action angle $\omega = (I_N(0), \theta_N(0))$ jouant le rôle de variable cachée : on la supposera seulement distribuée selon une certaine mesure de probabilité P et on ne cherchera pas à en suivre l'évolution au cours du temps, on aura plutôt tendance à l'oublier dans la description du système.

La partie droite de la figure 1 illustre cela : pour une condition initiale partielle $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$, il y a plusieurs trajectoires possibles, correspondant aux différents choix possibles de $\omega = (I_N(0), \theta_N(0))$. Le système sous-jacent est toujours déterministe, mais il faut spécifier ω pour déterminer la trajectoire.

On peut donc considérer, pour chaque temps t ,

$$\hat{x}(t, \omega) = (I_1(t), \dots, I_{N-1}(t), \theta_1(t), \dots, \theta_{N-1}(t))$$

comme une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{T}, P)$, à valeurs dans l'espace d'états $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$ (étant entendu qu'on a fixé une fois pour toute les $N - 1$ premières paires action-angle de la condition initiale). On peut aussi considérer $t \mapsto \hat{x}(t, \omega)$ comme un chemin continu issu de \hat{x}_0 qui dépend aléatoirement de $\omega \in \Omega$: chaque tirage d'un élément élémentaire ω détermine une trajectoire dans $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$.

Nous nous intéresserons particulièrement à la projection sur le facteur \mathbb{R}^{N-1} de la trajectoire :

$$\hat{I}(t, \omega) = (I_1(t), \dots, I_{N-1}(t)).$$

En effet, nous savons bien que les angles sont appelés à évoluer de façon telle que nous en perdrons rapidement le contrôle, mais nous voulons savoir ce qui arrive aux $N - 1$ premières actions (forcées de rester immobiles en l'absence de perturbation, et contraintes d'évoluer exponentiellement lentement pour le système perturbé). Nous nous intéressons aux propriétés statistiques de $\hat{I}(t, \omega)$, sachant que la condition initiale est distribuée selon la loi de probabilité P . Nous verrons que pour certaines perturbations, le chemin aléatoire $t \mapsto \hat{I}(t, \omega)$ converge en loi vers un chemin brownien, moyennant un changement d'échelle approprié.

3. Description de l'exemple obtenu.

Notons $\mathcal{C}_{[0,1]}$ l'ensemble de tous les chemins continus $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}$. On appelle "mouvement brownien réel standard" un chemin continu aléatoire $t \in [0, 1] \mapsto B(t) \in$

\mathbb{R} qui est distribué selon une certaine mesure de probabilité W définie dans $\mathcal{C}_{[0,1]}$, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}_{[0,1]}$ dont la loi est W .

La mesure de probabilité W est appelée mesure de Wiener ; elle est caractérisée par un certain nombre de propriétés qui modélisent bien ce qu'on attend d'un chemin "brownien" issu de l'origine :

- $B(0) = 0$;
- pour tout $t > 0$, $B(t)$ suit une loi gaussienne centrée de variance t , c'est-à-dire que la loi de $B(t)$ (qui est une variable aléatoire réelle) possède une densité, à savoir $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$;
- pour $0 \leq t_1 < t_2$, la variable aléatoire réelle $B(t_2) - B(t_1)$ (la variation de B sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$) est indépendante de la trajectoire jusqu'à l'instant t_1 (caractère imprévisible du mouvement : la connaissance de la trajectoire avant l'instant t_1 n'apporte aucune information de plus que celle que donne la position au temps t_1) ; de plus, $B(t_2) - B(t_1)$ a même loi que $B(t_2 - t_1)$.

On appelle mouvement brownien en dimension d un chemin continu $t \in [0, 1] \mapsto B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ obtenu en considérant d copies indépendantes d'un mouvement brownien réel (c'est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}_{[0,1]}^d$, dont la loi est le produit indépendant de d copies de W).

Le résultat principal de [1] peut être formulé de la façon suivante : *pour tout $N \geq 2$, il existe une fonction Gevrey $f(I, \theta, t)$ arbitrairement petite et une mesure de probabilité P sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ telles que, pour le système hamiltonien défini par $H = h_0(I) + f(I, \theta, t)$ et pour presque tout $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$, la trajectoire déterminée par la condition initiale (\hat{x}_0, ω) (où $\omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ est distribué selon P) vérifie*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{I}(nt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma B(t),$$

où σ est une constante positive, $B(t)$ est un mouvement brownien en dimension $N - 1$ et le symbole $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ représente la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}_{[0,1]}^{N-1}$ (c'est-à-dire que la loi de $t \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \hat{I}(nt)$ converge faiblement vers le produit indépendant de $N - 1$ copies de W quand n tend vers l'infini).

La division par \sqrt{n} peut faire penser au théorème de la limite centrale, qui est d'ailleurs effectivement vérifié par \hat{I} , comme cas particulier de la formule précédente avec $t = 1$: les $N - 1$ premières actions se distribuent asymptotiquement au temps $n \gg 1$ comme des gaussiennes centrées indépendantes de variance $\sigma^2 n$. Mais on a mieux que cela : tout le morceau de trajectoire correspondant à la fenêtre temporelle $[0, n]$ a une projection sur \mathbb{R}^{N-1} qui, après changement d'échelle, se distribue asymptotiquement comme un chemin brownien.

Dans [1] sont aussi discutées les propriétés ergodiques du flot engendré par $H = h_0 + f$. On peut définir sur l'espace de phases une mesure invariante pour le flot au temps q , où q est un entier qui représente une échelle de temps caractéristique pour notre système¹ : il s'agit de la mesure μ obtenue en considérant indépendamment la mesure de Lebesgue² sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$ et la mesure de probabilité P sur le facteur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

¹En fait, q est exponentiellement grand par rapport à ε , et la constante σ qui intervient dans la formule ci-dessus n'est autre que $q^{-3/2}$. Cette constante s'appelle "coefficient de diffusion" ; son exponentielle petitesse est une manifestation du théorème de Nekhoroshev.

²c'est-à-dire le volume usuel — on prendra garde au fait que le volume total est infini, la mesure μ ne peut donc pas être normalisée de façon à devenir une mesure de probabilité.

On trouve que μ est ergodique dans les exemples construits avec $N = 2$ ou 3 , ce qui entraîne que presque toute condition initiale donne lieu à une orbite dense en projection sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1}$. Ce n'est plus le cas si $N \geq 4$, mais les propriétés du mouvement brownien en dimension $d \geq 3$ permettent de montrer que presque toute condition initiale donne lieu à une trajectoire qui tend vers l'infini lorsque le temps tend vers l'infini (il existe encore des conditions initiales donnant lieu à une orbite dense, mais elles sont "moins nombreuses" que lorsque $N = 2$ ou 3).

La méthode pour construire ces exemples consiste à se ramener, par une technique empruntée à [3] (et en utilisant un changement d'échelle en actions et en temps qui fait intervenir le paramètre q susmentionné), à un système dynamique discret pour les $N - 1$ premières paires action-angle. Pour $N = 2$, ce système discret peut être vu comme l'itération aléatoire de trois "applications standards" : la donnée de la variable ω est équivalente à la donnée d'une suite de symboles ω_n pouvant prendre les valeurs 1 ou -1 ou 0 avec la même probabilité et de façon indépendante, et la dynamique entre le temps $n - 1$ et le temps n est décrite par la formule

$$(I_1, \theta_1) \mapsto (I_1 + \omega_n \cos(\theta_1 + 2\pi I_1), \theta_1 + 2\pi I_1)$$

Si par exemple on part de la condition initiale $\hat{x}_0 = (I_1(0), \theta_1(0)) = (0, 0)$, on trouve par récurrence $\theta_1(n) = 0 \pmod{2\pi}$ et $I_1(n) = I_1(n - 1) + \omega_n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire une marche aléatoire standard, d'où

$$I_1(n) = \omega_1 + \dots + \omega_n.$$

Plus généralement, $I_1(n)$ vérifie une propriété dite de "martingale" (une sorte de marche aléatoire généralisée), qui est la clé de la démonstration.

Références

- [1] D. Sauzin, "Examples of Arnold diffusion with convergence to a Brownian motion and infinite ergodic measure," *en préparation*.
- [2] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems," *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. **96**, p. 199–275, 2002.
- [3] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Wandering domains and random walks in Gevrey near-integrable systems," *Ergodic Theory & Dynamical Systems* Vol. **24**, 5 (volume spécial à la mémoire de M. Herman, édité par A. Fathi et J.-C. Yoccoz), p. 1619–1666, 2004.
- [4] D. Sauzin, "Séries Gevrey et théorème de Nekhoroshev," *Journées scientifiques 2000 de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides*, Notes scientifiques et techniques de l'Institut de Mécanique Céleste **S076**, p. 145–147, juin 2001.
- [5] D. Sauzin, "Exemples non analytiques de diffusion d'Arnold," *Journées scientifiques 2003 de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides*, Notes scientifiques et techniques de l'Institut de Mécanique Céleste **S081**.
- [6] V. I. Arnold, "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156** (1964), 9–12; *Soviet Math. Dokl.* **5** (1964), 581–585.
- [7] B. V. Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator systems," *Physics Reports* **52**, no. 5 (1979), 263–379.