PSL UNIVERSITÉ PARIS

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Observatoire de Paris

LES CALCULS DE LE VERRIER POUR LA DÉCOUVERTE DE NEPTUNE À TRAVERS SES MANUSCRITS

Soutenue par

Guy Bertrand

Le 20 décembre 2023

École doctorale n°127

École doctorale Astronomie et Astrophysique d'Ile de France

Spécialité

Astronomie et Astrophysique

Préparée à l'

IMCCE

Composition du jury :

Christian BIZOUARD Observatoire de Paris	*Président du jury*
Anne LEMAITRE Université de Namur	*Rapporteur*
Philippe NABONNAND Université de Lorraine	*Rapporteur*
Colette LE LAY Université de Nantes	*Examinateur*
Alain ALBOUY Observatoire de Paris	*Examinateur*
William SHEEHAN Independant scholar	*Examinateur*
Jacques LASKAR Observatoire de Paris	*Directeur de thèse*
David AUBIN Sorbonne Université	*Co-Directeur*
James LEQUEUX Observatoire de Paris	*Invité*

IMCCE l'Observatoire de Paris | PSL

Remerciements

En tant qu'étudiant 'normal', j'avais commencé en 1968 des études d'astronomie à l'université Pierre et Marie Curie, études complétées par de nombreux stages à l'observatoire du Pic du Midi afin de devenir astronome. Juste après l'agrégation, on m'a proposé un poste de professeur de mathématiques en Math Sup au lycée Condorcet, une proposition qui ne pouvait pas se refuser. J'ai donc enseigné avec beaucoup de plaisir pendant 43 ans dans ce lycée avant de prendre ma retraite en 2015, tout en restant pendant toute cette période aussi informé que possible sur les développements de l'astronomie.
À la retraite, j'ai essayé de m'inscrire en master 2 d'astronomie à l'observatoire de Paris ; Marie Christine Angonin et Christophe Sauty ont accepté de m'inscrire en tant qu'auditeur libre. Ce fut une année très enrichissante que je poursuivis l'année suivante en faisant une année de master 2 'normale'. C'est à l'issue de cette deuxième année de master que Jacques Laskar me proposa ce magnifique sujet de thèse : refaire les calculs de Le Verrier pour la découverte de Neptune, sujet qui impliquait beaucoup de programmation, mais aussi beaucoup de recherches en bibliothèque sur les manuscrits de Le Verrier.
Je remercie donc Marie Christine Angonin et Chrisophe Sauty de m'avoir fait confiance à l'orée d'un parcours atypique.
Merci à tous les enseignants de ce master d'avoir partagé leurs connaissances, en particulier merci à Gwenaël Boué, Abed Bounemoura, Frédéric Daigne, Jacques Fejoz, Jacques Laskar, Alexandre Le Tiec, Isabelle Panet, Jérôme Perez, Philippe Robutel et Bruno Sicardy pour leurs cours rigoureux et passionnants.
Je remercie en tout premier lieu Jacques Laskar, qui après m'avoir proposé un sujet de thèse aussi riche, a piloté les recherches et rectifié à plusieurs reprises mes nombreuses erreurs d'orientation en recentrant les recherches sur les manuscrits de Le Verrier : en particulier Jacques a souvent répété qu'un mémoire de thèse n'était pas un cours de maths et devait être lisible par un large public, ce qui m'a amené à multiplier explications et encadrés pour rendre le mémoire plus accessible ; la version finale aurait été bien moins documentée sans ses corrections et ses réorientations toujours justifiées.
Je remercie aussi David Aubin, qui a bien voulu superviser mes premiers pas dans des recherches historiques et qui m'a fourni une ligne directrice très claire pour l'organisation du mémoire de thèse. David m'a donné aussi l'occasion de présenter la démarche de Le Verrier à un parterre d'historiens, ce qui m'a obligé à dégager les critères historiques, au delà des calculs faits par Le Verrier. Sur ses conseils, j'ai suivi le master *Histoire des sciences, des techniques et des savoirs* au centre Alexandre Koyré en 2018−2019, qui m'a permis de mieux comprendre la démarche historique en sciences.
Merci à toute l'équipe de l'IMCCE, qui a accueilli avec bienveillance un 'dinosaure', égaré au XIXe siècle, au milieu d'un univers moderne et dynamique ; merci tout particulièrement à Amélie, Lusiné et Névada, qui ont fluidifié beaucoup de démarches.
Merci à mon comité de thèse, Michela Malpangotto et Alain Albouy pour leur soutien pendant cette recherche.
Merci à Gwenaël Boué pour sa disponibilité, sa bonne humeur et son efficacité dans les moments difficiles.

Merci à James Lequeux d'avoir écrit un livre aussi précis, complet et détaillé sur Le Verrier, livre qui m'a permis d'en savoir beaucoup plus sur Le Verrier et qui a ainsi énormément facilité mes recherches.
Merci à William Sheehan, avec qui j'ai longuement échangé pendant l'écriture de la thèse, et qui m'a grandement aidé pour les parcours de Le Verrier et d'Adams.
Merci à Philippe Robutel, Florent Deleflie, Nicolas Rambaux, Laurent Niederman, Kevin Baille, Mirel Birlan et Alain Chenciner, que je rencontrais toujours avec plaisir près de la machine à café et qui s'informaient régulièrement de l'avancée de mes calculs.
Merci à Alain Albouy de m'avoir accueilli dans son bureau et merci pour les échanges variés que nous avons pu avoir.
Un grand merci à toute l'équipe de la bibliothèque de l'Observatoire, que j'ai beaucoup sollicitée et qui m'a grandement facilité la recherche de documents rares ; merci donc à Aleth, Anna, Antonin, Émilie, Rhéa-Claire, Robert, Sandrine, Véronique, Virginie, pour leur aide précieuse et leurs conseils avisés.
Un remerciement spécial à Maïder Bugnon Olano pour avoir fait aboutir de nombreuses recherches bibliographiques et en particulier pour avoir déniché, dans les sous-sols de la bibliothèque, des recueils (poussiéreux, mais o combien importants) d'observations faites à Greenwich vers 1845.
Merci à Mickaël Gastineau et Stéphane Vaillant pour avoir résolu de nombreux problèmes informatiques et pour leur assistance pendant la soutenance.
Merci aux nombreux (et jeunes !) doctorants que j'ai pu rencontrer au cours de ces années de préparation et qui m'ont insufflé une partie de leur énergie. Merci donc à Anne-Charlotte, Ariane, Daniel, Esther, Etienne, Frederico, Hugo, Ibnu, Julie, Lisa, Melaine, Mohammad, Pierre-Louis, Santiago...
Un grand merci à Christian Bizouard pour avoir bien voulu assurer la présidence du jury de thèse.
Merci aux membres du jury, Anne Lemaitre, Philippe Nabonnand, Colette Le Lay, William Sheehan, Alain Albouy qui ont bien voulu lire mon trop long mémoire et qui m'ont fait part de leurs observations, ce qui a grandement contribué à gommer de nombreux défauts résiduels (toujours les résidus !).
Et surtout merci à Hervé Manche, qui a été mon patient tuteur pour les programmes informatiques, et qui a bien voulu me faire bénéficier des puissants outils de calcul qu'il avait développés et sans lesquels, aucun calcul n'aurait abouti, aucune figure n'aurait vu le jour.
Merci à mes parents, pour leur attachement constant, leur générosité, leurs soins attentifs et qui ont su transmettre à leurs enfants le goût pour l'effort et le travail bien fait.
Merci aussi à mes frères et à ma sœur ainsi qu'à mes enfants pour leur soutien constant pendant cette période passionnante, mais exigeante.

Résumé

On commence par décrire de quelle manière Le Verrier a entamé une carrière d'astronome après avoir amorcé une prometteuse carrière de chimiste. Il a notamment passé l'essentiel de l'année 1837 à prendre des notes bibliographiques à la bibliothèque de l'Institut afin d'accélérer sa formation d'astronome. Il se lance, dès ses premières recherches, dans des travaux ambitieux, comme la stabilité du système solaire ou la théorie de Mercure. Il se fait rapidement remarquer par ses collègues géomètres et durant l'été 1845, Arago lui demande de trouver une explication pour les irrégularités du mouvement d'Uranus. Une explication simple pourrait provenir de l'inexactitude des tables en vigueur, celles réalisées par Alexis Bouvard en 1821 et construites à partir de ses calculs de perturbation.
Le Verrier va, dans un premier temps, refaire l'intégralité du calcul des perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus. À partir de ces résultats, il peut évaluer l'écart en longitude entre la théorie de Bouvard et la sienne ; il montre qu'il est impossible de corriger la théorie de Bouvard en corrigeant seulement les éléments elliptiques d'Uranus. Il forme alors des éphémérides d'Uranus en se fondant sur ses propres calculs de perturbations, ce qui lui permet d'évaluer les écarts entre les 279 observations O retenues par lui pour Uranus et les prédictions de position correspondantes C à partir de ses tables. Il constate des écarts $O - C$ importants, qu'il essaie de réduire en corrigeant les paramètres d'Uranus. Il montre qu'il est impossible de réduire complètement ces écarts $O - C$ en corrigeant seulement les paramètres d'Uranus.
Il cherche alors à expliquer les irrégularités des mouvements d'Uranus par l'action d'une planète extérieure à Uranus. Il forme 18 équations de condition qui lui permettent de localiser une zone du ciel où pourrait se trouver une telle planète perturbatrice. Puis, dans un deuxième temps, en s'appuyant sur un système de 33 équations, il affine cette première localisation. Il envoie la position trouvée à Galle, qui, aidé de d'Arrest, localise à l'observatoire de Berlin le 23 septembre 1846 la nouvelle planète à environ 1° de la position indiquée par Le Verrier.
Ce succès soulève un enthousiasme général et Le Verrier est comblé d'honneurs. Mais une controverse sur la priorité de la découverte est rapidement soulevée, car un astronome anglais, J. C. Adams, a prédit, pour la planète perturbant Uranus, un an avant Le Verrier, une position voisine de celle annoncée par Le Verrier, mais Adams n'avait pas publié ses résultats. Par ailleurs, en s'appuyant sur une observation fortuite faite par Lalande en 1795, un astronome américain, Walker, établit pour Neptune une orbite très différente de celle prédite par Le Verrier. Le Verrier subit plusieurs attaques, dont la principale vint du physicien Babinet. Il se défendit en montrant lors de trois interventions successives à l'Académie des sciences que son orbite, même si elle différait notablement de l'orbite réelle, permettait de rendre compte des positions de Neptune pendant une période de 65 ans avec une erreur inférieure à 18°.
Assez rapidement, la polémique s'éteignit et l'on ne retint que les prouesses calculatoires d'Adams et de Le Verrier.

Mots clés : Perturbations, découverte, Adams, controverse, Uranus, Bouvard, Adams

Abstract

We begin by describing how, after a brief and promising career as a chemist, Le Verrier turned his full attention to astronomy. To prepare for this change of career, he spent most of 1837 compiling an extensive bibliography in the Institute's library. With this preparation, he began to devote himself to challenging research projects, such as proving the stability of the solar system and re-examining the troublesome theory of Mercury's motions. These efforts brought him to the attention of his fellow mathematicians and, in the summer of 1845, led Arago to pose to him the problem of the irregularities in the motion of Uranus. Since 1821, when Alexis Bouvard had published his tables of the motion of Uranus, these irregularities had begun to increase to an unacceptable extent. Le Verrier redid the entire calculation of the perturbations exerted on Uranus by Saturn and Jupiter. He was then able to evaluate the difference in longitude between the calculations made by using Bouvard's theory and his own. He showed that it was impossible to correct Bouvard's theory by correcting only the elliptical elements of Uranus, and then proceeded to produce ephemerides of Uranus based on his own perturbation calculations. This involved evaluating discrepancies between the 279 observations O he had retained for Uranus and the corresponding position predictions C from his tables. He found large $O - C$ discrepancies; he showed that it was impossible to reduce these $O - C$ discrepancies completely by simply correcting the Uranus parameters alone. He then introduced the hypothesis of a planet outside Uranus to explain the irregularities in its motion. He formed 18 equations of motion which enabled him to locate an area of the sky where such a disturbing planet could be found. He then used a system of 33 equations to refine his initial position. He sent the position he had found to Galle, who, assisted by d'Arrest, observed the new planet at the Berlin Observatory on 23 September 1846, about 1° from the position indicated by Le Verrier.
This success aroused widespread enthusiasm and Le Verrier was showered with honours. But a controversy soon arose over the priority of the discovery, as an English astronomer, J. C. Adams, had predicted a position for the planet disturbing Uranus close to that announced by Le Verrier, a year before Le Verrier. Adams had communicated his research privately to G.B. Airy, the Astronomer Royal, but had not otherwise published his results. Further controversy arose when an American astronomer, Sears Cook Walker, based on the identification of a chance observation made by Lalande in 1795, determined a very different orbit for Neptune from that predicted by Le Verrier. Le Verrier suffered several attacks, the most important of which came from the physicist Babinet and the American mathematician Peirce, who claimed that the discovery of the planet was merely a "happy accident". Le Verrier defended himself by demonstrating in three successive speeches to the Académie des Sciences that his calculated orbit, even if it differed significantly from the actual orbit of the planet, nevertheless accounted for Neptune's positions over a period of 65 years with an error of less than 18°. These controversies died down fairly quickly, and Adams and Le Verrier shared the credit for their computational skills.

Keywords : Perturbation, discovery, Adams, controversy, Uranus, Bouvard, Adams

Table des matières

Remerciements i

Résumé iii

Abstract iv

Table des matières iv

I Quelques aspects de l'astronomie et de l'homme Le Verrier 1

0 Introduction 2
- 0.1 Position du problème et objectifs . . . 3
  - 0.1.1 Bref historique . . . 3
  - 0.1.2 Reprise des calculs de Le Verrier et prolongements . . . 5
  - 0.1.3 Éléments nouveaux mis en évidence dans la thèse . . . 5
- 0.2 Plan de la thèse . . . 6
- 0.3 Manuscrits . . . 9
- 0.4 Outils de calcul utilisés . . . 9
  - 0.4.1 Techniques calculatoires utilisées par Le Verrier . . . 9
  - 0.4.2 IMCCE . . . 10
  - 0.4.3 TRIP . . . 11
  - 0.4.4 INPOP . . . 12
  - 0.4.5 Miriade . . . 12
  - 0.4.6 SOFA . . . 12
  - 0.4.7 ICRF . . . 12
- 0.5 Observations . . . 13
- 0.6 Indications sur la structuration du texte de la thèse . . . 14
  - 0.6.1 Notations pour le découpage . . . 14
  - 0.6.2 Citations . . . 14
  - 0.6.3 Notations pour les divers paramètres et variables . . . 14
  - 0.6.4 Biographies . . . 14
  - 0.6.5 Commentateurs privilégiés . . . 14

1 Les premiers pas de Le Verrier en astronomie 18
- 1.1 Premiers pas de Le Verrier en astronomie . . . 19
  - 1.1.1 De la chimie à l'astronomie . . . 19
  - 1.1.2 Notes bibliographiques . . . 20

1.1.3 Liste des références bibliographiques des ouvrages repérés par Le Verrier . 23
1.1.4 Notes prises par Le Verrier pendant ses recherches bibliographiques 24
1.2 Moyens d'existence de Le Verrier 25
1.3 Premiers travaux astronomiques 26
1.4 Cours d'astronomie 28
1.4.1 Enseignement au Collège de France 28
1.4.2 Enseignement à la Sorbonne 31

2 Comment se sont déroulés les calculs de Le Verrier pour Neptune ? 33
2.1 Bref historique des calculs de Le Verrier 36
2.1.1 Découverte et comportement inexplicable d'Uranus 36
2.1.2 Description sommaire des manuscrits 38
2.1.2.1 Des manuscrits expliqués et commentés 38
2.1.2.2 Organisation des manuscrits 39
2.1.2.3 Prévision des calculs à effectuer 39
2.1.2.4 Aspect des manuscrits 40
2.1.3 Plan de travail de Le Verrier 44
2.1.4 Publication des résultats successifs 44
2.1.5 Description des calculs de Le Verrier par Biot et Tisserand 45
2.1.6 *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)* . . . 46
2.2 Indications sur la méthode utilisée par Le Verrier pour Neptune 47
2.2.1 Façons d'effectuer les calculs 47
2.2.2 Précautions et vérifications 48
2.2.3 Principe de la démarche de Le Verrier et épilogue 48
2.2.4 Épuisement de Le Verrier à la fin des calculs 49
2.2.5 Vérification des calculs de Le Verrier 49
2.3 Collaboration avec Émile Gautier pour le calcul des perturbations d'Uranus . . . 50
2.3.1 Un collaborateur peu connu de Le Verrier : Émile Gautier 50
2.3.2 Lettres de Gautier à ses parents pendant son premier séjour à Paris . . . 51
2.3.3 Comment fonctionnait le tandem Le Verrier - Gautier ? 56
2.3.4 Confirmations du rôle de collaborateur joué par Gautier 60
2.3.5 Vers la découverte 60
2.3.6 Quelques jugements portés par Gautier sur Le Verrier 61
2.3.7 Correspondances après la découverte de Neptune 62
2.3.8 Commentaires et conclusions 67

II Calculs de Le Verrier pour Neptune 69

3 Détermination des perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus 69
3.1 Organisation de la thèse en vue de refaire les calculs de Le Verrier 71
3.1.1 Reprise des calculs de Le Verrier 71
3.1.2 Notations 71
3.2 Présentation des calculs de perturbations planétaires 72
3.3 Paramètres orbitaux d'une planète 73
3.3.1 Notations pour les éléments orbitaux d'une planète 73
3.3.2 Relations entre les différents paramètres orbitaux, équation du centre . . 75
3.4 Perturbations planétaires 76
3.4.1 Perturbations des éléments orbitaux d'Uranus 76
3.4.2 Équations de Lagrange 78

3.4.3 Stratégie utilisée par Le Verrier . . . 79
3.5 Détermination numérique de la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus . . 80
3.5.1 Principe du développement en série de la fonction perturbatrice . . . 80
3.5.1.1 Présentation : but du calcul . . . 80
3.5.1.2 Étape 1 : Échantillonnage de la fonction perturbatrice . . . 81
3.5.1.3 Étape 2 : Première interpolation . . . 84
3.5.1.4 Deuxième interpolation . . . 86
3.5.1.5 Conclusion . . . 88
3.5.2 Calcul explicite du développement de la fonction perturbatrice à l'aide de TRIP . . . 89
3.5.2.1 Échantillonnage de la fonction perturbatrice . . . 89
3.5.2.2 Première interpolation . . . 90
3.5.2.3 Deuxième interpolation . . . 92
3.5.2.4 Fonction perturbatrice obtenue par TRIP et par Le Verrier . . . 94
3.5.2.5 Développements à des ordres plus élevés . . . 96
3.6 Développements en série des perturbations des éléments elliptiques d'Uranus . . 97
3.6.1 Formulation utilisée par Le Verrier pour les équations de Lagrange . . . 97
3.6.2 Développement de $\sin\phi_1\,\delta\theta_1$ (longitude du nœud) . . . 99
3.6.3 Développement de δa (demi-grand axe) . . . 100
3.6.4 Développement de $\delta\rho$ (moyen mouvement) . . . 101
3.6.5 Développement de $e\delta\varpi$ (longitude du périhélie) . . . 102
3.6.6 Développement de $\delta_2 e$ (perturbation partielle de l'excentricité) . . . 103
3.6.7 Développement de δe (excentricité) . . . 104
3.6.8 Développement de $\delta\varepsilon$ (longitude de l'époque) . . . 105
3.6.9 Développement de $\delta\phi_1$ (inclinaison de l'orbite sur celle de Saturne) . . . 106
3.7 Utilisation de la fonction perturbatrice sous forme algébrique . . . 107
3.7.1 Expression littérale de la fonction perturbatrice utilisée par Le Verrier . . . 107
3.7.2 Fonction perturbatrice trouvée par Le Verrier . . . 107
3.7.3 Fonction perturbatrice obtenue avec TRIP . . . 109
3.7.4 Équations de Lagrange . . . 110
3.7.5 Perturbations des éléments elliptiques . . . 110
3.8 Perturbations exercées par Jupiter sur Uranus . . . 114
3.9 Perturbations à l'ordre 2 des masses . . . 115
3.9.1 Inégalités séculaires . . . 115
3.9.2 Perturbations exercées par Jupiter sur Saturne . . . 115
3.9.3 Modification de la fonction perturbatrice . . . 116
3.9.4 Résultats . . . 121
3.10 Résumé de la théorie . . . 121

4 Comparaison de la théorie d'Uranus avec les observations 123
4.1 Comparaison des théories de Bouvard et de Le Verrier . . . 124
4.1.1 Comparaison de l'expression de la perturbation de la longitude obtenue par Le Verrier avec celle obtenue par Bouvard . . . 124
4.1.2 Écarts numériques entre les deux théories . . . 125
4.1.3 Analyse détaillée de la façon dont Le Verrier a calculé les valeurs numériques des perturbations de la longitude aux dates d'observation . . . 127
4.1.4 Critiques des tables de Bouvard . . . 130
4.2 Éphémérides successives calculées par Le Verrier . . . 130
4.2.1 Calculs envisagés par Le Verrier . . . 130

4.2.2 Observations et éphémérides d'Uranus . . . 137
4.2.2.1 Observations retenues . . . 137
4.2.2.2 Calcul des coordonnées héliocentriques . . . 138
4.2.2.3 Première éphéméride d'Uranus : positions héliocentriques . . . 138
4.2.2.4 Deuxième éphéméride d'Uranus : positions géocentriques . . . 139
4.2.2.5 Troisième éphéméride : coordonnées équatoriales . . . 141
4.2.2.6 Détail des calculs faits par Le Verrier pour les 3 éphémérides . . . 141
4.2.2.7 Écarts $O - C$ en longitude et latitude géocentriques . . . 144
4.3 Équations de condition . . . 145
4.3.1 Expression des équations de condition pour la longitude géocentrique . . . 145
4.3.1.1 Formulaire . . . 145
4.3.1.2 Équations de condition pour la longitude géocentrique . . . 146
4.3.1.3 Résolution des équations de condition pour les longitudes géocentriques par Le Verrier (Méthode 1) . . . 147
4.3.2 Expression des équations de condition pour la longitude héliocentrique . . . 149
4.3.2.1 Forme de l'équation de condition héliocentrique . . . 149
4.3.2.2 Méthode 2 . . . 150
4.3.2.3 Méthode 3 . . . 151
4.3.2.4 Déroulement des calculs pour les méthodes 2 et 3 . . . 154
4.3.2.5 Conclusion pour cette recherche de correction de la théorie de Bouvard . . . 155
4.4 Compléments . . . 156
4.4.1 Utilisation concrète des tables de Bouvard . . . 156
4.4.1.1 Objectif visé : calcul de la longitude d'Uranus au 24/9/1845 à l'aide des tables de Bouvard . . . 156
4.4.1.2 Calcul de la longitude héliocentrique . . . 156
4.4.1.3 Calcul de la longitude géocentrique . . . 157
4.4.1.4 Calcul du rayon vecteur et de la distance polaire . . . 157
4.4.1.5 Justifications . . . 157
4.4.1.6 Feuille de calcul pour le calcul des longitudes à partir des tables de Bouvard . . . 158
4.4.1.7 Les tables d'éphémérides selon Le Verrier . . . 158
4.4.2 Autres exploitations possibles des équations de condition de Le Verrier . . . 160
4.4.2.1 Utilisation seulement des équations anciennes . . . 160
4.4.2.2 Utilisation seulement des équations modernes . . . 160
4.4.2.3 Utilisation de toutes les équations de condition, anciennes et modernes . . . 160
4.4.2.4 Utilisation seulement des 18 équations (4.16) de Le Verrier . . . 160
4.4.3 Comment interpoler les O–C à des dates régulières ? . . . 162
4.4.3.1 Commentaires de J. B. Biot . . . 162
4.4.3.2 Interpolation graphique . . . 162
4.4.3.3 Calcul de l'écart pour 1831.7 par Le Verrier . . . 163
4.4.3.4 Calcul pour 1747.7, 1754.7 et 1761.7 par Le Verrier . . . 163
4.4.3.5 Comparaison des valeurs trouvées par Le Verrier et les interpolations graphiques . . . 163
4.4.4 Algorithme pour former les équations de condition de Le Verrier de la page 149 de *Herschel* . . . 164

5 À la recherche de la planète perturbatrice 166

5.1 Quelle peut être la cause des irrégularités dans le mouvement d'Uranus ? 168
5.1.1 Énumération de causes possibles 168
5.1.2 Hypothèse d'une planète perturbatrice 170
5.2 Détermination de la planète inconnue 173
5.2.1 Forme de l'équation de condition en longitude héliocentrique 173
5.2.2 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Première méthode. 174
5.2.3 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Deuxième méthode. 176
5.2.3.1 Principe de la deuxième méthode 176
5.2.3.2 Détermination d'une longitude de l'époque ε' acceptable 179
5.2.3.3 Confirmation des valeurs de ε' comprises entre 234° et 270° . . . 181
5.2.4 Essai de détermination de la longitude de l'époque à partir de la masse de la planète perturbatrice 183
5.2.4.1 Objectif 183
5.2.4.2 Calculs effectués par Le Verrier 184
5.2.4.3 Calculs effectués avec TRIP 185
5.2.4.4 Utilité du calcul effectué par Le Verrier pour essayer de déterminer la masse 186
5.2.4.5 Conclusions hâtives de calculs numériques. Importance de petits coefficients 187
5.3 Aboutissement de cette première recherche : formule pour la longitude vraie . . . 189
5.4 Prolongements : résultats pour d'autres valeurs de α 191
5.4.1 Bilan des calculs précédents 191
5.4.2 Stratégies possibles 192
5.4.3 Comparaison des solutions optimales pour des valeurs de α qui donnent des solutions acceptables par au moins deux méthodes 193
5.4.4 Solutions optimales avec un balayage pour α 194
5.5 Recherche d'orbites circulaires en adaptant les calculs de Le Verrier 195
5.5.1 Utilisation de conditions portant sur la longitude héliocentrique 195
5.5.2 Utilisation de conditions portant sur la longitude géocentrique 197

6 Approximation finale **199**
6.1 Position du problème 201
6.1.1 Rappel des calculs effectués par Le Verrier 201
6.1.2 Options envisagées pour les calculs ultérieurs 201
6.1.3 Bilan des calculs précédents 202
6.2 Mise en œuvre de l'approximation finale 202
6.2.1 Point de départ des calculs 202
6.2.2 Organisation du calcul 203
6.2.2.1 Calcul des perturbations de la longitude héliocentrique 203
6.2.2.2 Calcul des perturbations de la longitude géocentrique 205
6.2.2.3 Formation des équations de condition 207
6.2.3 Résolution des équations de condition (TAB 6.2) 212
6.2.3.1 Organisation des calculs 212
6.2.3.2 Coefficients utilisés pour éliminer toutes les inconnues autres que m' 214
6.2.3.3 Exemple numérique : $\boldsymbol{\gamma = 0}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C} = -1}$ 217
6.2.3.4 Passage à la représentation quadratique 218

6.2.3.5 Détermination des paramètres de Neptune . . . 220
6.2.3.6 Comparaison de la théorie obtenue avec les observations . . . 222
6.2.4 Découverte . . . 222
6.2.5 Erreur de calcul de Le Verrier . . . 225
6.2.6 Conséquence du passage de C_t à Σ . . . 226
6.2.7 Compléments sur les positions calculées et observées de Neptune . . . 227
6.2.7.1 Positions apparentes le jour de la découverte . . . 227
6.2.7.2 Détail des calculs de positions . . . 227
6.2.8 Illustration graphique . . . 229
6.2.9 Estimation du diamètre apparent de la planète perturbatrice . . . 230
6.2.10 Estimation de l'inclinaison de la planète perturbatrice sur l'orbite d'Uranus 231
6.2.10.1 Calculs de Le Verrier . . . 231
6.2.10.2 Attitude d'Adams concernant l'évaluation de l'inclinaison . . . 233
6.2.11 Importance de la carte de Bremiker pour la découverte visuelle . . . 233
6.2.12 Encadrements déterminés par Le Verrier pour les paramètres elliptiques de Neptune. Formation des enceintes . . . 235
6.3 Réactions américaines qui ont suivi la découverte de Neptune . . . 240
6.3.1 La planète découverte par Galle n'est pas celle calculée par Le Verrier . . . 240
6.3.2 Discussion de l'accusation de Peirce "Happy accident" . . . 242
6.3.3 Déclarations successives de Peirce au sujet de Neptune . . . 244
6.4 Analyse critique du travail fait par Baghdady dans sa thèse . . . 246
6.4.1 Contenu de la thèse . . . 246
6.4.2 Première solution dans la première approximation . . . 246
6.4.3 Deuxième solution dans la première approximation . . . 246
6.4.4 Deuxième approximation . . . 247
6.4.5 Prolongements . . . 247
6.4.5.1 Variantes utilisées par Baghdady . . . 247
6.4.5.2 Vérification des affirmations de Baghdady . . . 248
6.4.5.3 Prédictions pour d'autres époques de découverte . . . 248
6.4.6 Conclusions . . . 249

III Au delà des calculs de Le Verrier 251

7 Rayon vecteur 252
7.1 Interprétation de la réponse de Le Verrier à G. B. Airy . . . 254
7.1.1 Réponse de Le Verrier à Airy . . . 254
7.1.2 Interprétation de la réponse de Le Verrier . . . 254
7.2 Perturbations du rayon vecteur . . . 255
7.2.1 Effet sur le rayon vecteur d'une correction des éléments elliptiques d'Uranus 255
7.2.2 Formule théorique pour la perturbation du rayon vecteur créée par une planète extérieure . . . 256
7.2.3 Correction finale du rayon vecteur . . . 257
7.3 Comment définir la correction du rayon vecteur ? . . . 259
7.3.1 Détermination de l'erreur théorique sur le rayon vecteur . . . 259
7.3.2 Traitement du rayon vecteur par Airy . . . 259
7.3.2.1 Détail du calcul fait par Airy . . . 259
7.3.2.2 Jugement sur les conclusions données par Airy . . . 262
7.3.2.3 Prolongement des calculs d'Airy . . . 262
7.3.3 Qu'est-ce que l'erreur sur le rayon vecteur ? . . . 263

7.4 Modèle de Lai, Lam, Young . . . 263
7.4.1 Présentation du modèle LLY pour la longitude . . . 264
7.4.1.1 Équations du mouvement . . . 264
7.4.1.2 Solutions du système . . . 264
7.4.2 Étude du rayon vecteur . . . 265
7.4.2.1 Comment observe-t-on le rayon vecteur et ses perturbations ? . . . 265
7.4.2.2 Ajustement du rayon vecteur, problème direct . . . 266
7.4.2.3 Ajustement simultané de la longitude et du rayon vecteur, problème direct . . . 267
7.4.3 Mise en évidence de t_0 ou Ω_2 ou (t_0, Ω_2) par la méthode de Lai Lam Young 268
7.4.3.1 Mise en évidence de (t_0, Ω_2) . . . 268
7.4.3.2 Mise en évidence de la date d'opposition t_0 . . . 269
7.4.3.3 Mise en évidence de la vitesse angulaire de rotation Ω_2 . . . 270
7.4.3.4 Conclusions pour les divers problèmes inverses . . . 271
7.4.4 Décalage entre la perturbation directe exercée par Neptune sur Uranus et la perturbation résiduelle observée . . . 272
7.5 Problème inverse pour le rayon vecteur en adaptant la méthode utilisée par Le Verrier . . . 273
7.5.1 Objectif, données . . . 273
7.5.2 Équations de condition . . . 273
7.5.3 Résultats . . . 276
7.6 Conclusions . . . 277

8 Résultats obtenus avec INPOP 279
8.1 Localisation de la planète qui trouble Uranus . . . 281
8.1.1 Établissement du contexte planétaire au 1/1/1800 . . . 281
8.1.2 Première localisation de la planète perturbatrice . . . 282
8.1.2.1 Impossibilité de concilier observations et prédictions des positions d'Uranus en l'absence de Neptune . . . 282
8.1.2.2 Impossibilité de localiser la planète perturbatrice en un seul calcul 282
8.1.2.3 Stratégie adoptée . . . 282
8.1.2.4 Variations des résidus en fonction de la longitude de l'époque . . . 283
8.1.2.5 Longitude optimale en fonction du rapport des demi-grands axes 284
8.1.3 Amélioration de cette première solution . . . 285
8.1.4 Valeurs finales des paramètres . . . 287
8.1.5 Incertitudes sur les résultats . . . 287
8.1.6 Algorithme informel pour déterminer les paramètres optimaux de Neptune 288
8.2 Influence de la masse de Neptune . . . 290
8.2.1 Détermination de la longitude au moment de la découverte, avec une masse double de celle d'Uranus . . . 290
8.2.2 Ajustement sur la masse avec une excentricité nulle . . . 291
8.2.3 Ajustement sur la masse pour $e' = 0.1$ et 6 valeurs pour ϖ' . . . 292
8.3 Influence de l'inclinaison de l'orbite . . . 293
8.4 Influence de l'excentricité . . . 294
8.4.1 Présentation des calculs effectués dans cette section . . . 294
8.4.2 Résidus selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes . . . 294
8.4.3 Résidus minimaux selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes 298
8.4.4 Longitudes moyenne et vraie en fonction du rapport des excentricités . . . 299
8.5 Calculs avec les paramètres trouvés par Le Verrier . . . 300

8.6 Influence de la date des calculs . . . 301
8.6.1 Cas d'une excentricité nulle . . . 301
8.6.2 Cas $e' = 0.1$ et $\varpi' = 270°$ . . . 304
8.6.3 Calculs avec ajustement sur les 7 paramètres de Neptune . . . 306
8.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 308
8.7.1 Principe de l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 309
8.7.2 Objectifs visés en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 310
8.7.3 Recherche d'orbites circulaires pour Neptune . . . 310
8.7.4 Recherche d'orbites elliptiques pour Neptune . . . 313
8.7.5 Détermination de la masse de Neptune . . . 315
8.7.6 Évolutions simultanées des 7 paramètres de Neptune . . . 318
8.7.6.1 Quelques considérations sur l'organisation de l'algorithme . . . 318
8.7.6.2 Exemples de chaînes quand on fait évoluer les 7 paramètres de Neptune . . . 319
8.7.6.3 Répartition des moyennes des paramètres dans les différentes chaînes en fonction des paramètres initiaux . . . 321
8.7.6.4 Résultat final pour une recherche portant sur les 7 paramètres de Neptune . . . 324
8.7.6.5 Utilisation de l'échantillonnage de Gibbs . . . 325
8.7.6.6 Commentaires sur l'ensemble des calculs effectués avec l'algorithme de Métropolis-Hastings . . . 326
8.7.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings avec des observations modernes 'exactes' . . . 326
8.8 Importance de la date de conjonction héliocentrique d'Uranus et de Neptune . . . 327
8.8.1 Cas d'orbites circulaires pour Neptune . . . 327
8.8.2 Cas d'orbites elliptiques . . . 328
8.8.3 Rôle de l'excentricité dans le placement de Neptune . . . 332
8.8.4 Analyse de Tisserand . . . 333
8.8.5 Conclusion. Bilan du rôle important joué par la conjonction de 1822 . . . 334
8.8.5.1 Déclarations historiques sur le rôle de la conjonction de 1822 . . . 334
8.8.5.2 Bilan des calculs modernes . . . 335

9 Simplifications de la méthode adoptée par Le Verrier 337
9.1 Méthodes proposées pour simplifier les calculs de Le Verrier . . . 338
9.1.1 Commentaires sur les calculs effectués par Le Verrier . . . 338
9.1.2 Méthodes imaginées pour raccourcir la détermination de la date de la conjonction . . . 338
9.1.2.1 Méthode de J. Herschel . . . 338
9.1.2.2 Méthode de Liais . . . 339
9.1.2.3 Méthode de Fleury . . . 339
9.1.2.4 Méthode de Brown . . . 339
9.1.2.5 Méthode de Littlewood . . . 340
9.1.2.6 Méthode de Lyttleton . . . 340
9.1.2.7 Observations de Brookes . . . 340
9.1.2.8 Méthode de Lai, Lam et Young . . . 340
9.2 Méthode de Liais . . . 341
9.3 Méthode de Brown et de Lyttleton pour la prévision de la date de conjonction . . . 342
9.3.1 Méthode de Brown . . . 342
9.3.1.1 Calculs préliminaires . . . 342

9.3.1.2 Perturbation de la longitude . . . 343
9.3.1.3 Correction des éléments elliptiques d'Uranus . . . 344
9.3.1.4 Application de la méthode de Brown à la recherche de Neptune 344
9.3.1.5 Amélioration de l'estimation de ε' . . . 345
9.3.1.6 Conclusion sur la méthode de Brown . . . 346
9.3.2 Méthode de Lyttleton . . . 347
9.3.2.1 Données du problème . . . 347
9.3.2.2 Principe de la méthode . . . 348
9.3.2.3 Utilisation de la méthode de Lyttleton pour déterminer la date de l'opposition . . . 349
9.3.2.4 Utilisation de la méthode de Lyttleton pour le demi-grand axe . 350
9.3.2.5 Méthode de Lyttleton sur un intervalle de temps plus étendu . . 352
9.3.2.6 Conclusions . . . 352
9.3.3 Gestion de la pseudo résonance . . . 353
9.4 Reprise des calculs de Lai, Lam, Young . . . 355
9.4.1 Problème direct pour la longitude . . . 355
9.4.2 Problème inverse pour la longitude et le rayon . . . 356

IV Calculs effectués par Adams. Comparaison avec ceux de Le Verrier 357

10 Les calculs effectués par Adams 357
10.1 Les différents calculs d'Adams . . . 359
10.1.1 Origine du problème . . . 359
10.1.2 Principe des différents calculs d'Adams . . . 360
10.1.3 Résultats obtenus par les différentes méthodes . . . 361
10.1.4 Polémique sur le billet transmis à Airy . . . 362
10.1.5 Publication de la méthode de calcul d'Adams . . . 362
10.2 Détail du calcul d'Adams pour la solution de 1843 . . . 362
10.2.1 Formation et résolution des équations . . . 363
10.2.1.1 Formation des équations de condition . . . 363
10.2.1.2 Solutions des équations de condition . . . 364
10.2.1.3 Coordonnées de la planète perturbatrice . . . 365
10.2.1.4 Résidus dans les équations de condition . . . 366
10.2.1.5 Justification mathématique des écarts constatés entre les différentes solutions pour le calcul de 1843 . . . 366
10.2.2 Prolongements et conclusions . . . 367
10.2.2.1 Reprise des calculs avec les O–C de l'hypothèse II . . . 367
10.2.2.2 Calcul pour 20 valeurs différentes de α . . . 367
10.2.2.3 Conclusions . . . 369
10.3 Détail du calcul d'Adams pour l'hypothèse II . . . 369
10.3.1 Interrogations au sujet de la formule utilisée par Adams pour la correction de la longitude moyenne d'Uranus . . . 370
10.3.2 Observations retenues . . . 371
10.3.3 Forme des équations de condition . . . 372
10.3.4 Traitement des équations modernes . . . 373
10.3.5 Traitement des équations anciennes . . . 375
10.3.6 Résolution des équations . . . 375
10.3.7 Discussion de la méthode d'Adams . . . 376

10.3.8 Valeurs obtenues . . . 377
10.3.8.1 Calculs selon l'hypothèse I . . . 377
10.3.8.2 Calculs selon l'hypothèse II . . . 378
10.3.8.3 Dépendance du rapport des demi-grands axes . . . 378
10.3.8.4 Sensibilité aux données . . . 380
10.4 Analyse de la thèse de C. J. Brookes . . . 381
10.4.1 Démarche générale de Brookes . . . 381
10.4.2 Résultats trouvés par Brookes pour différentes dates de calcul . . . 382
10.4.3 Conclusions . . . 385

11 Comparaison entre les calculs d'Adams et ceux de Le Verrier 386
11.1 Différences et ressemblances entre les calculs de Le Verrier et d'Adams . . . 388
11.1.1 Gestion des calculs préliminaires . . . 388
11.1.2 Forme et traitement des équations . . . 388
11.1.3 Objectifs . . . 389
11.1.4 Maudite loi de Bode . . . 389
11.1.5 Comparaison des méthodes de pensée . . . 390
11.1.6 Comparaison des rédactions . . . 391
11.1.7 Comparaison des orbites trouvées par Le Verrier et Adams . . . 395
11.1.8 Stabilité des solutions . . . 395
11.1.9 Conclusions . . . 396
11.2 Retour sur les équations de condition, après la découverte visuelle . . . 397
11.2.1 Comparaison numérique . . . 397
11.2.2 Comparaisons graphiques . . . 398
11.2.2.1 Comparaison à partir de la formule théorique de la mécanique céleste . . . 398
11.2.2.2 Comparaison en utilisant la fonction perturbatrice . . . 399
11.2.2.3 Images des perturbations directes par la transformée de Brown . 400
11.3 Bilan de la recherche d'orbites . . . 400
11.3.1 Orbites circulaires . . . 400
11.3.2 Orbites elliptiques . . . 402
11.3.3 Conclusion . . . 403

V Réflexions sur la méthode Le Verrier 404

12 Réflexions sur la méthode de Le Verrier 404
12.1 Quel est le degré de généralité de la méthode employée par Le Verrier ? . . . 405
12.1.1 Problème direct, problème inverse . . . 405
12.1.2 Problème direct . . . 405
12.1.2.1 Perturbation exercée par une planète connue sur une planète donnée . . . 405
12.1.2.2 Comment détermine-t-on les éléments orbitaux d'un astre connu ? 405
12.1.3 Problème inverse . . . 406
12.1.3.1 Détermination d'une planète inconnue à partir des perturbations qu'elle exerce sur une planète connue, ici Uranus . . . 406
12.1.3.2 Limites de la méthode employée par Le Verrier . . . 407
12.1.4 Chance de Le Verrier, malchance de Bouvard . . . 407
12.1.5 Pourquoi les recherches de Pluton et de Vulcain ont-elles été des échecs ? . 408
12.1.5.1 Pluton . . . 408

12.1.5.2 Vulcain . . . 409
12.1.6 Calculs de Delaunay pour la Lune . . . 411
12.1.7 Auxiliaires de calcul modernes . . . 411
12.2 Utilité de refaire les calculs de Le Verrier . . . 412
12.2.1 Les calculs de Le Verrier sont-ils reproductibles ? . . . 412
12.2.2 Importance de refaire pas à pas certaines démarches de Le Verrier . . . 413
12.2.3 Seule véritable erreur de Le Verrier . . . 413
12.3 Calculs discutables de Le Verrier . . . 413
12.3.1 Calculs théoriquement discutables . . . 413
12.3.2 Situations délicates . . . 415
12.4 Innovations de Le Verrier . . . 416
12.4.1 Premier mémoire de Le Verrier, méthode de Le Verrier . . . 417
12.4.2 Méthode d'interpolation . . . 417
12.4.3 Comètes . . . 417
12.4.4 Problème inverse . . . 417
12.5 Utilité des théories planétaires . . . 418
12.5.1 Plan de Le Verrier, présenté au ministre, pour l'astronomie analytique . . . 418
12.5.2 Est-il vraiment nécessaire d'avoir des théories valables sur des temps très longs ? . . . 419
12.5.3 Reprise des calculs de Le Verrier par Aimable Gaillot . . . 419

13 Le Verrier polémiste 419
13.1 Polémique avec Pontécoulant . . . 420
13.2 Première polémique avec Delaunay . . . 421
13.2.1 Delaunay annonce à l'Académie la découverte de nouveaux termes dans la perturbation de la longitude d'Uranus . . . 421
13.2.2 Réponses de Le Verrier et polémique . . . 422
13.2.3 Conclusions . . . 423
13.3 Polémique avec M. Babinet . . . 424
13.3.1 Rappels sur la découverte de Neptune . . . 424
13.3.2 Attaque de Jacques Babinet . . . 424
13.3.3 Réponses de Le Verrier à Babinet . . . 426
13.3.3.1 Réponse à chaud . . . 426
13.3.3.2 Réponse du 11 septembre 1848 . . . 426
13.3.3.3 Réponse du 2 octobre 1848 . . . 428
13.3.4 Conclusions . . . 432
13.4 Autres polémiques . . . 434

14 Quelques aspects de l'homme Le Verrier 434
14.1 L'homme Le Verrier . . . 435
14.1.1 Santé de Le Verrier . . . 435
14.1.2 Témoignages sur le caractère de Le Verrier . . . 436
14.1.2.1 Témoignages avant l'arrivée à l'Observatoire . . . 436
14.1.2.2 Témoignages plus tardifs . . . 437
14.1.3 Le Verrier dans son travail . . . 439
14.1.4 Éclairage apporté par Lucile . . . 439
14.1.4.1 Journal intime . . . 439
14.1.4.2 Citations de Lucile . . . 439
14.1.5 Quelques traits d'humour . . . 442
14.1.5.1 Le Verrier, humoriste . . . 442

14.1.5.2 Maxime Vincent . . . 443
14.2 Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris . . . 444
14.2.1 Dictature de l'astronomie de position à l'Observatoire de Paris . . . 444
14.2.2 Flammarion . . . 445
14.2.3 Équipement de l'Observatoire en instruments . . . 446
14.3 Le Verrier observateur . . . 446

VI Annexes **450**

A Documents complémentaires **451**
A.1 Observations anciennes d'Uranus, observations faites par Le Monnier . . . 452
A.2 Feuilles de calcul pour la fonction perturbatrice . . . 456
A.2.1 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Vénus sur Mercure . . . 456
A.2.2 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Saturne sur Uranus . . . 457
A.3 Suite de la lettre de Galle à Le Verrier . . . 458
A.4 Justification donnée par Le Verrier à Delaunay . . . 459

B Instruments d'observation **460**
B.1 Instruments pour les observations méridiennes . . . 461
B.1.1 Quart de cercle méridien . . . 461
B.1.2 Lunette des passages ou lunette méridienne . . . 462
B.1.3 Détermination d'une position complète . . . 462
B.1.4 Principe d'une observation au cercle méridien universel . . . 463
B.2 Quelques instruments historiques . . . 464

C Notes prises par Le Verrier. Cours donnés par Le Verrier **466**
C.1 Structure des notes bibliographiques prises par Le Verrier . . . 467
C.2 Notes prises au cours des relevés bibliographiques . . . 468
C.3 Cours donnés par Le Verrier . . . 470
C.3.1 Cours donnés au Collège de France . . . 470
C.3.2 Cours à la Sorbonne . . . 471

D Algorithmes et programmes TRIP **476**
D.1 Transformation des équations de condition . . . 477
D.1.1 Algorithme pour éliminer $\mathbf{m'h'}$ et $\mathbf{m'l'}$ des équations de condition . . . 477
D.1.2 Programme TRIP pour les calculs matriciels visant à éliminer $\mathbf{m'h'}$ et $\mathbf{m'l'}$ 479
D.2 Détermination de la fonction perturbatrice par double interpolation . . . 482
D.2.1 Algorithme de calcul des coefficients A_i et B_i . . . 482
D.2.2 Programme TRIP pour déterminer par double interpolation la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus . . . 484
D.3 Détermination de la fonction perturbatrice par des développements en série . . . 488
D.4 Feuille ce calcul Maple pour la masse m' . . . 491
D.5 Solutions acceptables avec un balayage pour α . . . 493

E Table des matières des cahiers manuscrits **497**

F Où Le Verrier faisait-il ses calculs intermédiaires ? **503**
F.1.1 Calculs élémentaires . . . 504
F.1.2 Calculs plus longs . . . 505
F.1.3 Pages de calculs auxiliaires . . . 506

G Inventaire des dossiers Le Verrier de la Bibliothèque de l'Observatoire de Paris **507**

H Tables diverses **529**
H.1 Liste des encadrés 529
H.2 Liste des notations 530
H.3 Biographies succinctes 534

Bibliographie **542**

Index des noms propres **555**

Liste des figures **556**

Liste des tableaux **562**

Première partie

QUELQUES ASPECTS DE L'ASTRONOME ET DE L'HOMME LE VERRIER

Chapitre 0

INTRODUCTION

Objectifs

Après un bref rappel historique, on présente les principaux objectifs visés par la thèse, ainsi que les outils qui seront utilisés pour effectuer les calculs

Sommaire

0.1 Position du problème et objectifs . . . **3**
0.1.1 Bref historique . . . 3
0.1.2 Reprise des calculs de Le Verrier et prolongements . . . 5
0.1.3 Éléments nouveaux mis en évidence dans la thèse . . . 5
0.2 Plan de la thèse . . . **6**
0.3 Manuscrits . . . **9**
0.4 Outils de calcul utilisés . . . **9**
0.4.1 Techniques calculatoires utilisées par Le Verrier . . . 9
0.4.2 IMCCE . . . 10
0.4.3 TRIP . . . 11
0.4.4 INPOP . . . 12
0.4.5 Miriade . . . 12
0.4.6 SOFA . . . 12
0.4.7 ICRF . . . 12
0.5 Observations . . . **13**
0.6 Indications sur la structuration du texte de la thèse . . . **14**
0.6.1 Notations pour le découpage . . . 14
0.6.2 Citations . . . 14
0.6.3 Notations pour les divers paramètres et variables . . . 14
0.6.4 Biographies . . . 14
0.6.5 Commentateurs privilégiés . . . 14

0.1 Position du problème et objectifs

0.1.1 Bref historique

La planète Uranus a été découverte le 13 mars 1781 par William Herschel. Elle fut considérée comme une comète jusqu'à ce que Lexell [1] [Lexell, 1783] reconnaisse en septembre 1781 sa nature planétaire en lui attribuant une orbite elliptique à une distance moyenne double de celle de Saturne.
Des éphémérides d'Uranus furent établies successivement par Fixlmillner [2] en 1784 [Standage, 2000], Delambre [3] en 1788 [Standage, 2000] et enfin par Bouvard [4] en 1821 [Bouvard, 1821b] (pour les tables de Bouvard, voir l'encadré 3 p. 35) ; mais dans les trois cas, Uranus s'écartait progressivement des positions prédites par les tables.
En 1845, Arago [5] chargea Urbain Le Verrier, qui avait fait de brillants débuts en astronomie après une brève carrière de chimiste (voir § 1.1.1), d'expliquer les irrégularités du mouvement d'Uranus. Le Verrier invoqua l'action d'une planète extérieure à Uranus, dont il chercha à déterminer la position par le calcul, à partir des perturbations qu'elle exerce sur Uranus. C'est ce qu'on appelle un **problème inverse** : déterminer les causes d'un phénomène, d'une observation non encore expliquée à partir de ses conséquences visibles (voir encadré 1, p. 4).

Au bout d'un an de calculs intensifs, Le Verrier fut en mesure de prédire un emplacement pour cette planète perturbatrice. Il envoya ses prédictions à plusieurs observatoires étrangers et la planète Neptune fut découverte le 23 septembre 1846 à l'Observatoire de Berlin par Johann Galle, aidé par Heinrich d'Arrest, à environ 1° de la position prédite par Le Verrier (fig. 6.14).
Le Verrier apprendra en octobre 1846 qu'un mathématicien anglais, J. C. Adams, avait abouti à une localisation voisine de la planète perturbatrice un an avant lui, mais Adams n'avait pas publié ses résultats.
Le Verrier publiera ses calculs dans *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* [Le Verrier, 1846a], qui, pour simplifier, sera désigné dans cette thèse par l'abréviation *Herschel*.
Les circonstances de la découverte de Neptune et des polémiques très vives qui s'en sont suivies – sur la priorité de la découverte et sur le nom à donner à cette planète – ont été très bien décrites dans de nombreux livres [6] et ne seront donc pas évoquées ici.

Par contre, on s'intéressera, entre autres, aux problèmes suivants :

— Quels sont les calculs qui ont permis à Le Verrier de localiser Neptune ?

— Est-ce que ces calculs comportent des erreurs ?

— Comme la prédiction de la position finale est correcte malgré des éléments elliptiques très éloignés des valeurs réelles, y-a-t-il eu des erreurs qui se sont compensées ? Autrement dit, est-ce que Le Verrier a eu de la chance ?

— Quels jugements peut-on porter sur la rigueur et l'efficacité des calculs de Le Verrier ?

1. Anders Johann Lexell (1740−1784), astronome et mathématicien suédo-finlandais. Il étudia principalement les comètes, en particulier celle qu'il découvrit en 1770, et l'étude de cette comète fut reprise en détail par Le Verrier en 1844.

2. Placidus Fixlmillner (1721−1791), prêtre bénédictin. Il fit de nombreuses observations de Mercure, que Lalande utilisa pour construire ses tables de Mercure.

3. Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749−1822). Il participa à la mesure de la longueur du méridien terrestre de 1792 à 1793. Il succèda à Lalande en 1807 à la chaire d'astronomie du Collège de France.

4. Alexis Bouvard (1767−1843). Initialement berger savoyard ; il montre à l'école des aptitudes remarquables pour le calcul. Monté à Paris, il est remarqué par Pierre-Simon Laplace et devient son assistant pour la rédaction de la *Mécanique céleste*.

5. François Arago (1786−1853). Il fut directeur des observations à l'Observatoire de Paris de 1834 à sa mort. Il avait été élu à l'Académie des sciences en 1809 à 23 ans, et en devint le secrétaire perpétuel à partir de 1835.

6. [Grosser, 1962], [Alexander, 1965], [Moore, 1988], [Baum, 1997], [Standage, 2000], [Sheehan, 2021]...

Problème inverse (encadré 1)

Un problème inverse consiste à rechercher la cause d'un phénomène à partir des effets qu'il produit.
Il peut s'agir aussi de déterminer l'état d'un système dans le passé, connaissant son état actuel.
Voici quelques exemples :

- Déterminer l'épicentre d'un tremblement de terre à partir des signaux recueillis en surface.
- Préciser les paramètres orbitaux d'une planète ou d'un satellite naturel d'une planète en observant leurs actions sur la trajectoire d'une sonde spatiale, passant à proximité. C'est ce qui a été fait par exemple avec la sonde Cassini, et cela a permis d'affiner les données d'INPOP17a [Fienga, 2019] (voir § 0.4.4)
- Déterminer l'état du Système solaire, ou du système Terre-Lune il y a 100 millions d'années.
- Déterminer la cause de l'avance du périhélie de Mercure. Le Verrier proposera l'existence d'une planète (ou d'une ceinture d'astéroïdes) entre Mercure et le Soleil. En fait, la cause réelle est un effet de la relativité générale.

Il est important de bien connaître le problème direct et de savoir formaliser ses effets au moyen de formules algébriques. Le problème inverse se résout à l'aide d'une théorie contenant des paramètres indéterminés et s'ajuste en minimisant les écarts entre observations et prédictions.

Dans le cas d'Uranus-Neptune, les effets sont les perturbations résiduelles – après avoir tenu compte des perturbations exercées par Jupiter et Saturne – dans le mouvement d'Uranus.
Le problème direct est très bien connu depuis les travaux de Lagrange et de Laplace. Le problème inverse consiste à localiser une planète minimisant les écarts entre positions calculées et positions observées d'Uranus. C'est un problème difficile, comportant de nombreuses inconnues et admettant de nombreuses solutions a priori, du fait des incertitudes sur les données. Voici ce qu'écrit Danjon [Danjon, 1946a] :

> On parlait beaucoup, en somme, de la planète supposée, mais personne ne la cherchait. Pourquoi ? C'est que sa recherche devait entraîner les astronomes dans un labyrinthe où nulle Ariane ne pouvait les guider.

Il fallut toute la détermination de Le Verrier (et d'Adams) pour sortir seul et victorieux du labyrinthe.
Michel Serres fait la comparaison suivante à propos de la classification de Mendeleïev [Serres, 1997]

> ... Quelle hardiesse de prévoir des places pour des éléments inconnus, mieux, de prédire leurs propriétés ! La classification périodique des éléments est devenue un épisode canonique de l'épistémologie positiviste. On la cite toujours, avec la prévision de la planète Neptune [a] par Urbain Le Verrier, pour illustrer le contraste entre une science empirique qui collectionne les faits et une science rationnelle capable d'organiser et d'anticiper l'expérience.

a. Serres, ou peut-être son éditeur, écrit 'Uranus' !

0.1.2 Reprise des calculs de Le Verrier et prolongements

Pour répondre aux différentes questions posées à la fin du § 0.1.1, il faut refaire les calculs effectués par Le Verrier, en suivant sa démarche, mais en se permettant d'utiliser des outils de calcul modernes.
Dans le travail effectué ici, tous[7] les calculs de Le Verrier ont été refaits, selon *ses* schémas de calcul, en s'appuyant sur le logiciel de calcul formel TRIP (voir § 0.4.3), élaboré par Jacques Laskar et Mickaël Gastineau à l'IMCCE (voir § 0.4.2).
À l'aide de ces outils modernes, on élargira le travail fait par Le Verrier à d'autres données initiales et on examinera la stabilité des calculs de Le Verrier, vis à vis de ces données initiales.
Les calculs de Le Verrier ont déjà fait l'objet d'une thèse[8], soutenue en 1980 par Mohamed Baghdady [Baghdady, 1980] à l'université d'Aston. Malheureusement, cette thèse est loin de reprendre l'ensemble des calculs de Le Verrier : voir § 6.4 à la fin du chapitre 6 pour un examen détaillé de cette thèse.
Les calculs de Le Verrier ont été décrits par Biot[9] [Biot, 1847c] et par Tisserand[10] [Tisserand, 1880]. Biot insiste sur l'innovation et la rigueur des calculs de Le Verrier ; Tisserand analyse les calculs de Le Verrier en tant que mathématicien.

0.1.3 Éléments nouveaux mis en évidence dans la thèse

La narration de la découverte de Neptune par le calcul est un sujet largement relaté, mais essentiellement sur le plan historique [Grosser, 1962], [Alexander, 1965], [Moore, 1988], [Standage, 2000], [Lequeux, 2009], [Sheehan, 2021]... En conséquence, dans cette thèse, on abordera peu ces aspects historiques, très bien documentés dans les ouvrages cités, pour s'intéresser à des aspects moins connus et globalement plus calculatoires de cette découverte. Certaines approches ou certaines discussions n'ont *a priori* jamais été abordées ; en voici quelques unes :

Émile Gautier On mettra en évidence le rôle important joué par Émile Gautier, élève de Le Verrier au Collège de France, dans la première partie des calculs de Le Verrier, consacrés aux perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus. À cette occasion, on montrera que Le Verrier était capable d'avoir une relation apaisée avec Gautier, presque d'égal à égal par moments. Autrement dit, Le Verrier n'était pas toujours aussi inhumain que certains – Flammarion et Liais notamment – ont voulu le faire apparaître (chap. 2). Une biographie succincte d'Émile Gautier se trouve dans [de Candolle, 1892].

Le Verrier calculateur On confirmera que Le Verrier était un calculateur exceptionnel, c'est à dire que non seulement il ne faisait aucune faute de calcul – calcul mental aussi bien que calcul logarithmique – , mais surtout qu'il développait des approches originales et efficaces pour accélérer et simplifier ses calculs. Je n'ai mis en évidence qu'une seule véritable erreur de calcul sur quelques 1300 pages densément remplies (§ 6.2.5) !

Le Verrier professeur On donne quelques indications sur la façon dont se passaient les leçons de Le Verrier au Collège de France et à la Sorbonne (§ C.3).

Rayon vecteur L'erreur dans la connaissance du rayon vecteur d'Uranus était un sujet qui préoccupait beaucoup les astronomes – Bouvard, Airy, Le Verrier – impliqués dans l'étude

7. Hormis les calculs très techniques et très répétitifs, comme les réductions d'observations ou les calculs d'éphémérides.

8. Est-ce que cette thèse n'était que l'équivalent d'une thèse de 3e cycle ?

9. Jean-Baptiste Biot (1774−1862), mathématicien et physicien français ; il connaît parfaitement les techniques de calcul impliquées dans le travail de Le Verrier, puisqu'il a refait tous les calculs de la *Mécanique céleste* de Laplace.

10. Félix Tisserand (1845−1896) Mathématicien et astronome français. Dans son ouvrage *'Traité de Mécanique céleste'*, il fait la synthèse des recherches en mécanique céleste effectuées depuis Laplace.

des mouvements d'Uranus. On détaillera quelques résultats nouveaux concernant ce rayon vecteur (chap. 7).

Importance des choix initiaux Pour effectuer leurs calculs, Le Verrier et Adams ont été obligés de fixer arbitrairement une valeur pour le rapport des demi-grands axes d'Uranus et de la planète perturbant Uranus. Ils ont choisi tous les deux un rapport égal à 2, en s'appuyant sur la loi de Bode. On évaluera, en utilisant des outils modernes (TRIP et INPOP), quel est l'impact de ce choix initial sur le résultat final. On en conclura que la découverte aurait été possible en choisissant un assez large jeu de valeurs plus ou moins arbitraires pour les éléments de la planète perturbatrice (chap. 8).

Algorithme génétique On adaptera un algorithme MCMC à la recherche de la planète perturbatrice. On aboutira à la conclusion que la découverte de Neptune aurait été possible sans aucune connaissance a priori des éléments de la planète perturbant Uranus (fin chap. 8).

Calculs visant à simplifier ceux de Le Verrier Plusieurs méthodes ont été proposées par des successeurs de Le Verrier pour simplifier les calculs de celui-ci. On montrera que chaque méthode proposée possède au moins un défaut, voire une erreur (voir chap. 9).

Adams Les calculs d'Adams ont été en grande partie refaits par Brookes dans sa thèse de 1969 [Brookes, 1969], mais Brookes n'a pas repris le premier calcul effectué par Adams en 1843. J'ai refait entièrement ce calcul, en suivant les indications – sommaires – d'Adams. Je confirme un grand nombre de résultats annoncés par Adams, mais je trouve aussi des erreurs théoriques importantes (§ 10.2).

Le Verrier observateur On révèle que Le Verrier, contrairement à une légende tenace, était un observateur expérimenté et qu'il a vu, au moins à deux occasions, Neptune dans une lunette (chap. 14).

0.2 Plan de la thèse

La thèse actuelle aborde quelques aspects historiques, essentiellement antérieurs à 1848, mais elle est naturellement centrée sur la reprise des calculs de Le Verrier.
La thèse a été découpée en 5 parties, avec une introduction et des annexes :

Introduction (Chapitre 0)

— On rappelle brièvement les circonstances de la découverte d'Uranus. On évoque les écarts grandissants entre théorie et observations, et la nécessité d'ajuster la théorie d'Uranus.

— On énumère dans leurs grandes lignes les questions auxquelles on veut répondre dans cette thèse et on présente les outils utilisés pour effectuer ce travail.

— On y détaille le plan de la thèse.

Partie I Quelques aspects de Le Verrier (Chapitres 1 et 2)

— On indique dans quelles conditions Le Verrier est passé de la chimie à l'astronomie.

— On met en lumière l'aide apportée par Émile Gautier pour la recherche de Neptune.

— On examine quelques aspects de l'homme Le Verrier : caractère, santé, comportement...

Partie II Reprise littérale des calculs de Le Verrier (Chapitres 3, 4, 5, 6)

(Cette partie est elle-même divisée en trois parties) :

Perturbations crées par Saturne et Jupiter (chapitres 3 et 4) Tous les calculs de perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus faits par Le Verrier ont été refaits, en suivant pas à pas sa démarche, et on a pu ainsi vérifier l'exactitude des calculs de Le Verrier. Les équations de condition visant à corriger les éléments elliptiques d'Uranus ont été

recalculées et les 3 méthodes utilisées par Le Verrier pour arriver à une contradiction ont été reprises, confirmant ainsi qu'il est impossible de concilier observations et prédictions ; c'est la deuxième partie de *Herschel* et les cahiers n°s 2 et 3 des manuscrits.

1ère approximation (chapitre 5) À partir de l'expression analytique des perturbations exercées par une planète extérieure, on a formé un premier système d'équations de condition, comportant 8 équations, donnant comme solution la masse de la planète inconnue et on a comparé avec le résultat obtenu par Le Verrier.
Puis, on a recalculé le système constitué de 18 équations, qui permet de former, pour 40 valeurs choisies de la longitude initiale ε' de la planète inconnue (de 0° à 360° par pas de 9°), 40 systèmes de 3 équations, dont seulement deux donnent des solutions physiquement acceptables : il s'agit des systèmes associés à $\varepsilon' = 243°$ ou $\varepsilon' = 252°$. On en conclut avec Le Verrier, qu'il n'y a dans l'écliptique qu'une région du ciel dans laquelle on puisse placer la planète perturbatrice ; c'est la troisième partie de *Herschel* et le cahier n° 4 des manuscrits.

2ème approximation (chapitre 6) On a recalculé les 33 équations de condition qui permettent de préciser l'emplacement précédent ; c'est la quatrième partie de *Herschel* et les cahiers n°s 5 et 6 des manuscrits. Tous les calculs de Le Verrier ont été refaits, et mes résultats confirment pour l'essentiel les siens, mais on découvre une erreur – ou plutôt une étourderie – dans l'interpolation finale.

Partie III Au delà des calculs de Le Verrier (Chapitres 7, 8, 9)

On prolonge certains calculs de Le Verrier en faisant appel à INPOP [Fienga, 2019].

Rayon vecteur (chapitre 7) On examine les questions concernant le rayon vecteur, questions émanant notamment de Airy, et pour la plupart non résolues à l'époque.

- **Airy et le rayon vecteur** On rappelle l'interrogation soulevée par Airy au sujet du rayon vecteur : est-ce que les corrections apportées à l'orbite d'Uranus pour réduire les résidus en longitude corrigent aussi les erreurs du rayon vecteur ? Le Verrier répond à Airy par l'affirmative dans sa lettre du 26 juin 1846 (reproduite dans [Airy, 1846] p. 401 du MnRAS de 1847), mais il n'y a pas de traces d'une telle vérification dans ses manuscrits. Il s'agit probablement d'une vérification indirecte ; on proposera une interprétation (personnelle) de la réponse de Le Verrier au § 7.1.
- **Lai, Lam, Young** Pour donner d'autres éléments de réponse au sujet du rayon vecteur, on prolonge les calculs effectués par Lai, Lam et Young [Lai, 1990].
- **Problème inverse** On envisage ensuite comment aborder le problème inverse lié au rayon vecteur, problème qui n'a jamais été entrepris, faute de données d'observations. On remédiera à ce manque de données historiques en s'appuyant sur les écarts entre les rayons vecteurs donnés par les tables de Bouvard et les rayons vecteurs réels donnés par les éphémérides actuelles.

INPOP (chapitre 8) On s'éloigne ici complètement de la démarche de Le Verrier en utilisant une intégration numérique, à partir du logiciel INPOP [11], développé à l'IMCCE pour établir les éphémérides des corps du Système solaire.
Le but est de déterminer l'influence du choix des paramètres affectés a priori à la planète perturbatrice sur la localisation de cette planète perturbatrice. En effet, INPOP résout numériquement un système différentiel et tous les paramètres des corps du Système solaire – y compris ceux de la planète inconnue – doivent être initialisés.
On testera successivement l'influence

11. Acronyme pour **I**ntégrateur **N**umérique **P**lanétaire de l'**O**bservatoire de **P**aris.
Les éphémérides calculées par INPOP sont disponibles, documentées et mises à jour régulièrement sur le site de l'IMCCE : https://www.imcce.fr/recherche/equipes/ads/inpop/. Voir un peu plus de détails au § 0.4.4.

- du rapport des demi-grands axes.
- de l'excentricité de la planète perturbatrice
- de l'inclinaison de l'orbite de la planète perturbatrice
- on examinera aussi ce qui se serait passé si les calculs avaient été entrepris à une date antérieure à 1845.

D'une manière générale, on constatera que la position finale prédite pour la planète perturbatrice dépend relativement peu des paramètres choisis initialement.

Simplifications de la méthode de Le Verrier (chapitre 9) Les calculs de Le Verrier sont très longs. Plusieurs suggestions de simplification ont été proposées par différents chercheurs. On examine leurs propositions et on constate qu'elles présentent toutes au moins un défaut.

Partie IV Les calculs d'Adams (Chapitres 10, 11)

Calculs faits par Adams (chapitre 10) On présente les différents calculs d'Adams, le concurrent malheureux de Le Verrier, ainsi que les résultats de ses calculs.

Comparaison Adams−Le Verrier (chapitre 11) On compare ensuite la démarche d'Adams avec celle de Le Verrier pour finalement constater que la démarche d'Adams est plus mathématique que celle de Le Verrier et qu'elle est plus facile à programmer.

Partie V Quelques réflexions sur la démarche de Le Verrier (Chapitres 12, 13, 14)

On étudie dans cette partie le contexte de la recherche et de la découverte.

Innovations On essaie de dégager les innovations apportées par Le Verrier, mais on met aussi en évidence quelques calculs discutables.

Utilité de refaire les calculs On examine aussi l'utilité de refaire les calculs de Le Verrier.

Polémiques On analyse les polémiques avec Pontécoulant, Delaunay et surtout avec Babinet.

Annexes

A. Observations anciennes d'Uranus. Feuilles de calcul de Le Verrier. Lettre de Galle à Le Verrier.

B. Instruments d'observation Instruments méridiens. Quelques instruments historiques.

C. Notes de cours Notes bibliographiques prises par Le Verrier en 1837. Notes de cours.

D. Algorithmes et programmes TRIP Programmes TRIP pour calculer la fonction perturbatrice.

E. Table des matières des manuscrits Table des matières des 7 cahiers manuscrits contenant les calculs de Le Verrier pour Neptune.

F. Où Le Verrier faisait-il ses calculs intermédiaires ? On examine sur quel support – manuscrit conservé à la bibliothèque ou bien feuille annexe – Le Verrier faisait ses calculs.

G. Dossiers Le Verrier à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris Description sommaire des 59 dossiers de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris contenant l'essentiel des manuscrits de Le Verrier.

H. Tables diverses Liste des encadrés. Liste des notations. Biographies succinctes.

0.3 Manuscrits

Le Verrier a laissé de nombreux manuscrits, conservés pour l'essentiel à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris. Ces manuscrits ont été rassemblés et classés à la mort de Le Verrier par Aimable Gaillot [12], à la demande du ministre de l'instruction publique, suite à la démarche insistante de Lucien Magne, mari de la fille de Le Verrier, Lucile Le Verrier (p. 277 de [Lucile, 1994]).
Les manuscrits de Le Verrier sont répartis dans plusieurs dossiers, regroupés pour l'essentiel sous la cote Ms 1063, qui en englobe 42. Ces dossiers sont numérotés de 1 à 32 ; en effet, certains numéros interviennent plusieurs fois : 14 et 14A, 17 et 17A, 19 et 19A... Les dossiers de 1 à 26 sont essentiellement les brouillons des articles publiés dans les Annales de l'Observatoire de Paris. Par exemple, les dossiers 11, 11A et 12 sont consacrés à Mercure et ont été publiés dans le tome V des Annales de l'Observatoire de Paris. Un descriptif sommaire de l'ensemble des dossiers Le Verrier, déposés à la bibliothèque de l'Observatoire, est donné à l'annexe, § G. Pour désigner un dossier particulier, on ajoute son numéro ; par exemple le dossier principal pour notre étude est celui consacré aux calculs pour la recherche de Neptune, référencé par Ms 1063 (27). Ce dossier contient 7 cahiers et son contenu est détaillé au § E de l'annexe : comme les cahiers, à part le premier, ne sont pas paginés, une pagination a été rajoutée, afin de préciser la localisation des références.
Le dossier contenant quelques extraits de leçons données par Le Verrier au Collège de France ou à la Sorbonne est référencé par Ms 1063 (31).
Le dossier contenant les références bibliographiques est coté Ms 1063 (32).
Il y a quelques dossiers hors la cote Ms 1063, comme le dossier Ms 1072 (dotation Magne), qui contient des lettres de félicitations adressées à Le Verrier pour sa découverte de Neptune, lettres écrites par Airy, Herschel, Struve, De Vico...
Le dossier Ms 1112 contient quelques copies de lettres de Le Verrier adressées à son ancien élève Émile Gautier.
Il y a d'autres dossiers de manuscrits de Le Verrier (voir la liste au § G), mais ils ne concernent pas directement la recherche de Neptune : dossier pour la recherche de Vulcain, par exemple.

0.4 Outils de calcul utilisés

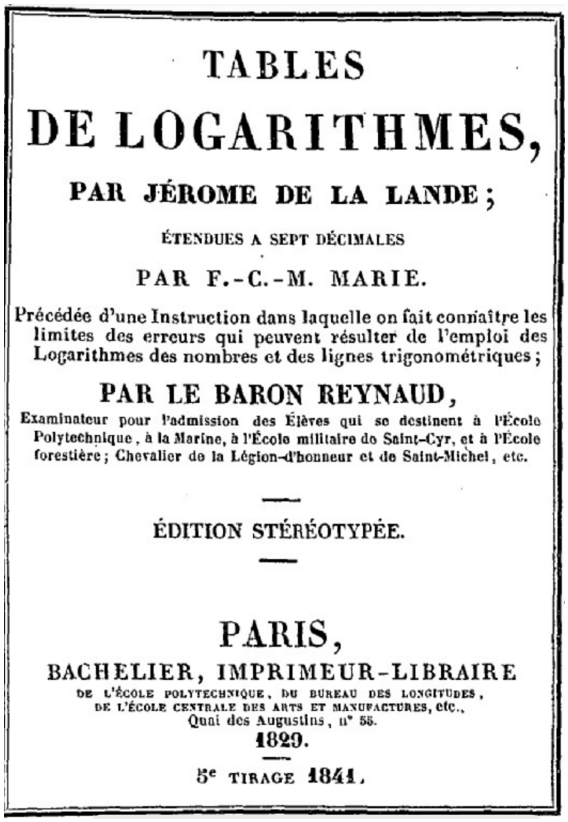
0.4.1 Techniques calculatoires utilisées par Le Verrier

Le Verrier a fait tous ses calculs à la main, en s'aidant d'une table de logarithmes pour les multiplications. Selon les besoins, il utilise une table à 5 ou 7 décimales. La table avec 7 décimales utilisée par Le Verrier est vraisemblablement celle de Lalande [13], étendue à 7 décimales par F.C.M. Marie. La première version de la table date de 1829 et elle sera actualisée à plusieurs reprises [14]. On a représenté fig. 1 la page de titre de la version 5, datée de 1841, ainsi qu'une page de valeurs.
On a relevé des logarithmes (une dizaine en tout) évalués par Le Verrier dans ses manuscrits

12. Aimable Gaillot (1834−1921), aide astronome, puis astronome adjoint (1864), astronome titulaire (1874), et enfin sous-directeur (1897) de l'Observatoire de Paris. De 1873 à 1903, il est le chef du Bureau des Calculs. À partir de 1888, il a prolongé et amélioré les calculs de Le Verrier sur les 4 grosses planètes [Gaillot, 1904].

13. Jerôme Lefrançois de Lalande (1732−1809) mathématicien et astronome français. En 1759, l'Académie royale des Sciencs lui confie la charge de la rédaction des éphémérides astronomiques de la *Connaissance des Temps*. En 1795, il participe avec l'abbé Grégoire à la création du Bureau des Longitudes [Schiavon, 2017].

14. Vraisemblablement pour corriger des erreurs de calculs et des erreurs d'impression, fort courantes dans les tables de l'époque. On peut citer le commentaire de J. Herschel (cité par [Standage, 2000] p. 59) : « An undetected error in a logarithmic table is like a sudden rock at sea yet undiscovered, upon which it is impossible to say what wrecks may have take place ».



TABLES

DE LOGARITHMES,

PAR JÉROME DE LA LANDE;

ÉTENDUES A SEPT DÉCIMALES

PAR F.-C.-M. MARIE.

Précédée d'une Instruction dans laquelle on fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des Logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques;

PAR LE BARON REYNAUD,

Examinateur pour l'admission des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École militaire de Saint-Cyr, et à l'École forestière; Chevalier de la Légion-d'honneur et de Saint-Michel, etc.

ÉDITION STÉRÉOTYPÉE.

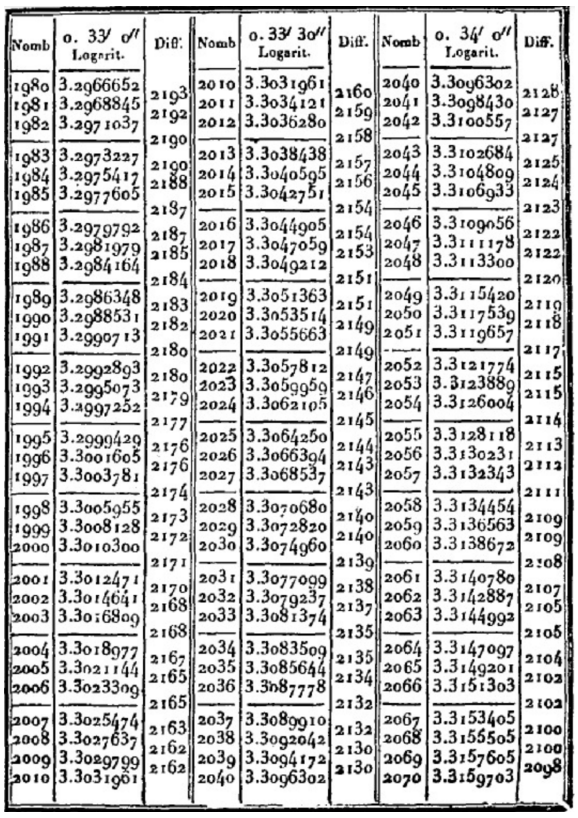
PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES, etc., Quai des Augustins, n° 55.

1829.

5e TIRAGE 1841.



Nomb	o. 33′ o″ Logarit.	Diff.	Nomb	o. 33′ 30″ Logarit.	Diff.	Nomb	o. 34′ o″ Logarit.	Diff.
1980	3.2966652	2193	2010	3.3031961	2160	2040	3.3096302	2128
1981	3.2968845	2192	2011	3.3034121	2159	2041	3.3098430	2127
1982	3.2971037	2190	2012	3.3036280	2158	2042	3.3100557	2127
1983	3.2973227	2190	2013	3.3038438	2157	2043	3.3102684	2125
1984	3.2975417	2188	2014	3.3040595	2156	2044	3.3104809	2124
1985	3.2977605	2187	2015	3.3042751	2154	2045	3.3106933	2123
1986	3.2979792	2187	2016	3.3044905	2154	2046	3.3109056	2122
1987	3.2981979	2185	2017	3.3047059	2153	2047	3.3111178	2122
1988	3.2984164	2184	2018	3.3049212	2151	2048	3.3113300	2120
1989	3.2986348	2183	2019	3.3051363	2151	2049	3.3115420	2119
1990	3.2988531	2182	2020	3.3053514	2149	2050	3.3117539	2118
1991	3.2990713	2180	2021	3.3055663	2149	2051	3.3119657	2117
1992	3.2992893	2180	2022	3.3057812	2147	2052	3.3121774	2115
1993	3.2995073	2179	2023	3.3059959	2146	2053	3.3123889	2115
1994	3.2997252	2177	2024	3.3062105	2145	2054	3.3126004	2114
1995	3.2999429	2176	2025	3.3064250	2144	2055	3.3128118	2113
1996	3.3001605	2176	2026	3.3066394	2143	2056	3.3130231	2112
1997	3.3003781	2174	2027	3.3068537	2143	2057	3.3132343	2111
1998	3.3005955	2173	2028	3.3070680	2140	2058	3.3134454	2109
1999	3.3008128	2172	2029	3.3072820	2140	2059	3.3136563	2109
2000	3.3010300	2171	2030	3.3074960	2139	2060	3.3138672	2108
2001	3.3012471	2170	2031	3.3077099	2138	2061	3.3140780	2107
2002	3.3014641	2168	2032	3.3079237	2137	2062	3.3142887	2105
2003	3.3016809	2168	2033	3.3081374	2135	2063	3.3144992	2105
2004	3.3018977	2167	2034	3.3083509	2135	2064	3.3147097	2104
2005	3.3021144	2165	2035	3.3085644	2134	2065	3.3149201	2102
2006	3.3023309	2165	2036	3.3087778	2132	2066	3.3151303	2102
2007	3.3025474	2163	2037	3.3089910	2132	2067	3.3153405	2100
2008	3.3027637	2162	2038	3.3092042	2130	2068	3.3155505	2100
2009	3.3029799	2162	2039	3.3094172	2130	2069	3.3157605	2098
2010	3.3031961		2040	3.3096302		2070	3.3159703	

FIGURE 1 – Table de logarithmes de Lalande, étendue à 7 décimales par F.C.M. Marie. C'est vraisemblablement la table utilisée par Le Verrier pour faire ses calculs. À droite, page donnant le logarithme d'entiers; elle permet aussi de convertir un angle exprimé en degrés, minutes, secondes en secondes ($33'45'' \to 2025''$) par exemple.

(cahier n° 2 essentiellement), par exemple $\log 3$, $\log 0.49$, $\log 3512$... et l'on a trouvé exactement les mêmes valeurs que Le Verrier pour ces divers nombres en utilisant la table de Lalande. Naturellement, ces constatations ne prouvent rien d'un point de vue purement logique ($A \Rightarrow A$), mais elles n'éliminent pas cette table comme principal auxiliaire de calcul de Le Verrier.
Quand un des facteurs d'une multiplication est un entier, Le Verrier fait le calcul de tête. Il procède aussi à de très nombreuses interpolations, parfois d'ordre 2 (i.e. avec les différences secondes), qu'il fait aussi le plus souvent de tête.
On mentionnera, au fur et à mesure qu'on les rencontrera, les nombreuses astuces utilisées par Le Verrier pour accélérer ses calculs, astuces reposant le plus souvent sur des aptitudes exceptionnelles au calcul numérique.

0.4.2 IMCCE

Voici quelques indications sur l'origine et les missions de l'IMCCE; elles sont extraites du site officiel de l'IMCCE [15].
L'**I**nstitut de **M**écanique **C**éleste et de **C**alcul des **É**phémérides (IMCCE) a été créé par décret du 2 juin 1998, modifiant celui de l'Observatoire de Paris et a remplacé le Service des calculs et de mécanique céleste du Bureau des Longitudes. Ce décret lui confère une structure d'Institut au sein de l'Observatoire, en lui assignant une mission de recherche et une mission de service pour l'élaboration et la diffusion des éphémérides, qu'il mène sous l'égide du Bureau des Longitudes.

15. Un regroupement de l'IMCCE et du SYRTE est prévu pour 2024.

L'IMCCE est aussi une Unité mixte de recherche du CNRS (UMR 8028), intégrée à PSL Research University et est associée aux universités UPMC–Sorbonne Université et université de Lille – sciences et technologies.
L'IMCCE a deux activités principales : une mission de recherche dans les domaines de la mécanique céleste, sous ses aspects tant mathématiques que dynamiques, de l'astrométrie et de la planétologie et une mission de service consacrée à l'élaboration et à la diffusion d'éphémérides originales, ainsi qu'à la participation à d'autres services nationaux d'observation de l'INSU.
L'IMCCE a la responsabilité, sous l'égide du Bureau des Longitudes, de produire et de diffuser les calendriers et éphémérides au niveau national. Cette fonction est assurée à l'Institut par son Service des éphémérides. Aussi, celui-ci :

- produit les publications et éditions annuelles, tout comme les éphémérides en ligne
- diffuse les éphémérides des divers corps du Système solaire (naturels et artificiels) et la prévision de phénomènes célestes remarquables (éclipses, occultations...)
- assure la maintenance et la mise à jour des bases de données
- procure une expertise juridique aux tribunaux
- procure des éphémérides et des données à la demande pour les services similaires (USA, Japon), les agences, les chercheurs, les laboratoires et les observatoires.

Ces activités s'appuient notamment sur un service informatique de calcul des éphémérides, un serveur web d'éphémérides (labellisé centre de traitement automatisé de l'information, CTAI), un Service éditions et un Service de calculs astronomiques et de renseignements.

0.4.3 TRIP

Il n'est naturellement pas question de refaire les calculs de Le Verrier à la main, c'est une tâche surhumaine. On refait ici les calculs en suivant la démarche adoptée par Le Verrier, mais les calculs sont concrètement effectués à l'aide du logiciel TRIP.
TRIP est le logiciel de calcul formel, optimisé pour la mécanique céleste, mis au point à l'IMCCE par Jacques Laskar et Mickaël Gastineau [Laskar, 1988-2021], [Gastineau, 2010].
Il permet de dériver ou d'intégrer des séries formelles, de faire du calcul matriciel, de résoudre des systèmes d'équations linéaires, de tracer des graphes et bien sûr, de programmer des calculs intensifs...
Le calcul sur des séries trigonométriques se fait par l'intermédiaire de troncatures. Par exemple, si la troncature est fixée à l'ordre 3, $\sin x + 4\cos 3x$ sera retenu comme

$$\tfrac{1}{2} * X * *1 - \tfrac{1}{2} * X * * - 1 + 2 * X * *3 + 2 * X * * - 3$$

où $X = \mathrm{expi}(x, 1, 0) = e^{ix}$ et si la troncature est fixée à 2, ce sera simplement

$$\tfrac{1}{2} * X * *1 - \tfrac{1}{2} * X * * - 1$$

On utilisera ces outils de calcul (et d'autres) pour le développement en série de Fourier de la fonction perturbatrice au chapitre 3.
La programmation se fait à l'aide de macros, qui permettent d'effectuer des tâches de plus en plus complexes. Des exemples de programmes TRIP se trouvent en annexe au § D.1.2 et au § D.2.2. En particulier, on y trouvera les macros successives qui permettent de construire la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus.
TRIP possède un noyau numérique permettant de faire des calculs numériques en double ou en quadruple précision. Cette dernière fonction est particulièrement intéressante quand il s'agit de calculer numériquement une dérivée, où l'on est amené à faire la différence entre deux nombres très voisins.
Pour plus d'information sur TRIP, une documentation est disponible à l'adresse suivante : `https://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipes/asd/trip/doc/trip_fr.pdf`
Une présentation de TRIP est donnée dans [Gastineau, 2010].

0.4.4 INPOP

INPOP [Fienga, 2019] est le logiciel de calcul d'éphémérides de l'IMCCE mis au point, entre autres, par Agnès Fienga et Jacques Laskar (https://www.imcce.fr/inpop/).
À partir d'une configuration initiale de l'ensemble du Système solaire, INPOP résout numériquement le système différentiel régissant les mouvements des corps du Système solaire et retourne les positions des divers objets du Système solaire à des instants précisés au départ.
Il résout ce système différentiel avec un pas de calcul ajustable, choisi en fonction de la précision numérique souhaitée. Le logiciel lit les données numériques des principaux corps du Système solaire (planètes, Lune, Soleil, astéroïdes) : masses, positions et vitesses dans l'ICRF au 1er janvier 2000 et INPOP calcule, pas après pas, les coordonnées de tous ces corps aux dates demandées. Les résultats peuvent être lus et récupérés pour traitement.
INPOP tient compte de la relativité générale et de la forme parfois non sphérique des corps. Mais pour la thèse, on utilisera une version simplifiée d'INPOP, ne tenant pas compte ni de la relativité générale, ni de la nature non ponctuelle de certains corps (Terre, Lune, Soleil...).
Une indication sommaire du fonctionnement simplifié d'INPOP est donné à l'encadré 2, p. 15.
INPOP est régulièrement ajusté à partir d'observations nouvelles et plus précises, comme par exemple les données recueillies par la sonde Cassini ; voir :
https://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipes/asd/inpop/inpop19a_20191214.pdf
Dans cette thèse, INPOP sera essentiellement utilisé pour savoir comment évolue le mouvement d'Uranus quand on modifie les données de Neptune, et INPOP sera principalement utilisé aux chapitres 7 et 8.

0.4.5 Miriade

Miriade est une interface, basée sur INPOP, mise au point à l'IMCCE (§ 0.4.2), permettant, entre autres, de déterminer des éphémérides pour les différents corps du Système solaire, de renseigner la visibilité des divers corps du Système solaire, d'annoncer et de décrire les éclipses et les occultations...
Le site de Miriade se trouve à l'adresse https://ssp.imcce.fr/webservices/miriade/

0.4.6 SOFA

La comparaison des résultats trouvés par Le Verrier avec les données modernes exige parfois de procéder à des changements de repères : passage des coordonnées dans l'ICRF aux coordonnées dans l'écliptique (et réciproquement), passage des coordonnées moyennes aux coordonnées vraies (et réciproquement) ou bien des conversions de dates : passage des dates grégoriennes aux dates juliennes... Ces opérations seront effectuées à l'aide des routines **SOFA** adaptées. Ces routines SOFA sont établies sous le contrôle de l'Union Astronomique Internationale et leur précision est garantie par l'UAI.
Les références pour SOFA se trouvent à l'adresse https://www.iausofa.org/current_C.html

0.4.7 ICRF

INPOP utilise comme système de référence l'ICRF, dont voici la description schématique :
L'International Celestial Reference Frame (**ICRF**) est la réalisation de l'International Celestial Reference System (ICRS). Il comprend un catalogue de coordonnées équatoriales précises de radio sources extragalactiques observées par interférométrie à très longue base (VLBI) [Berthier, 2021] et https://aa.usno.navy.mil/faq/ICRS_doc.

0.5 Observations

Les calculs de Le Verrier reposent sur des observations d'Uranus, 279 en tout, effectuées – fortuitement avant sa découverte officielle en 1781, et qui seront qualifiées d'anciennes – régulièrement après la découverte de 1781, et qualifiées ici de modernes.

La liste des observations anciennes utilisées par Le Verrier est donnée au § A.1, en annexe.

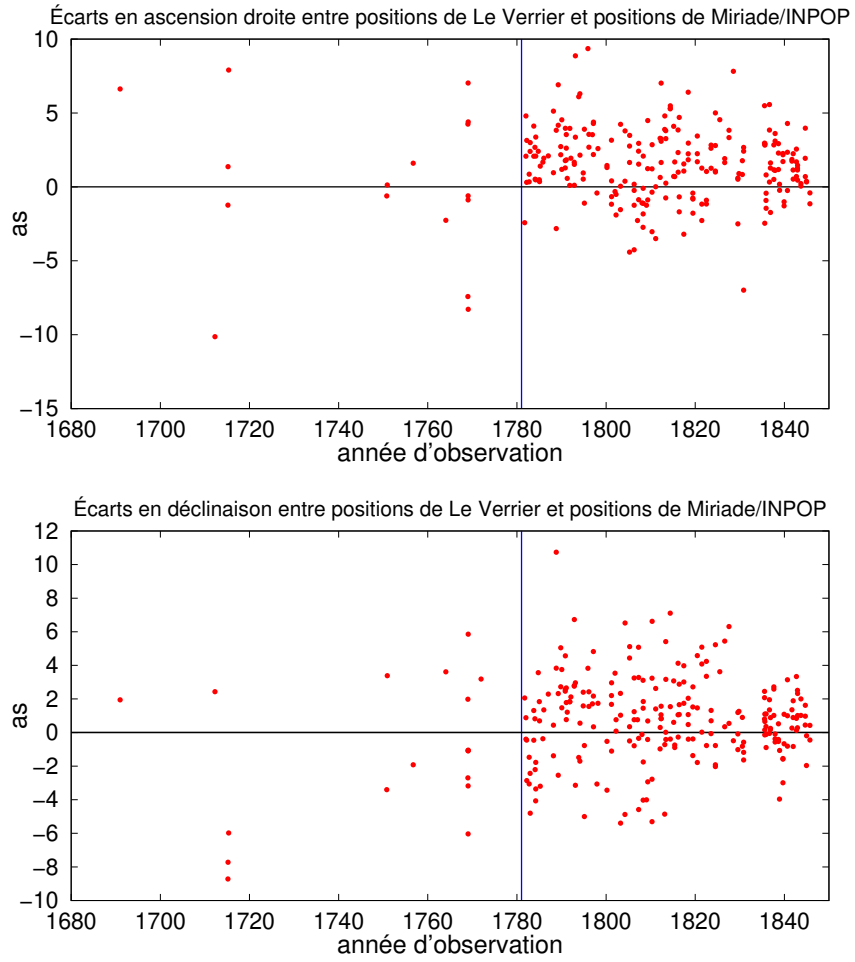


FIGURE 2 – Écarts entre les 279 positions d'Uranus retenues par Le Verrier et les positions correspondantes fournies par INPOP à travers Miriade. En haut, les écarts en ascension droite et en bas, les écarts en déclinaison. On constate que les observations anciennes sont très bonnes, en particulier la première observation de Flamsteed, datant de 1690. Les moins bonnes sont celles de Le Monnier (étalées de 1764 à 1771). Voir § A.1 quelques commentaires sur les observations de Le Monnier. La ligne bleue sépare les observations anciennes des observations modernes.

Le Verrier était assez confiant dans la précision des observations modernes, i.e. celles après 1781. Par contre, il avait quelques doutes sur la précision des observations anciennes – qui avaient été faites de façon fortuite, sans reconnaître la nature planétaire de l'objet – en particulier celle de Flamsteed, datant de 1690. L'observation de Flamsteed est particulièrement importante, car elle permet d'allonger l'arc décrit par Uranus sur lequel portent les équations de condition. En fait, les observations anciennes étaient globalement bonnes, comme on le voit fig. 2, obtenue en comparant les positions historiques utilisées par Le Verrier et les positions fournies par Mi-

riade. Les observations fortuites d'Uranus faites par Lemonnier sont détaillées par Bouvard dans [Bouvard, 1821a] et sont partiellement reprises au § A.1.
Une observation brute doit être corrigée pour tenir compte des conditions de l'observation et de l'état de l'instrument de mesure : on dit que l'on **réduit** l'observation ; des indications sommaires sur la réduction des observations sont données à l'encadré 9, p. 132.

0.6 Indications sur la structuration du texte de la thèse

0.6.1 Notations pour le découpage

Voici la notation utilisée pour numéroter les différentes sections et sous-sections :

chapitre.section.[sous-section.[sous-sous-section]]

Exemples : § 7.2.1.4, § 7.2.1 ou § 7.2.

Une figure, une table ou une note sera référencée par **chapitre.numéro**.
Exemple : fig. 7.14, table 11.3, note 3.45

Les références internes à la thèse sont indiquées à l'aide du numéro complet d'un paragraphe, comme § 4.2.5.3, ou du numéro de la figure, comme fig. 4.7, ou du numéro de la table, comme table 4.3.

Dans tous les cas, le premier nombre indique le numéro du chapitre où trouver la référence.

0.6.2 Citations

Les calculs ou les propos extraits d'articles ou de livres sont indiqués par une référence bibliographique. Toutes ces références bibliographiques sont regroupées dans l'index bibliographique en fin de thèse, p. 542.

0.6.3 Notations pour les divers paramètres et variables

Une table des notations les plus utilisées se trouve à l'annexe H, p. 530.
On utilise essentiellement les notations de Le Verrier, mais en les adaptant pour éviter de possibles confusions (un exemple est donné au § 3.1.2).

0.6.4 Biographies

Une biographie sommaire est donnée dans le texte lors de la première citation d'un personnage historique important.
Ces biographies ont été regroupées – et parfois complétées – à l'annexe H, p. 534.

0.6.5 Commentateurs privilégiés

On reproduira tout au long de la thèse les principales indications de Le Verrier, figurant dans son mémoire *Recherche sur les mouvements de la planète Herschel* ou dans ses manuscrits ; on ajoutera parfois des indications supplémentaires provenant de quatre commentateurs avertis :

Émile Gautier Élève [16] venu de Suisse pour suivre les cours de Le Verrier au Collège de France. Il se lie d'amitié avec lui pendant ses études ; il aide Le Verrier dans différents calculs : tables de Mercure, éphémérides de la comète de 1770 et surtout calcul en double pour la première partie de la recherche de Neptune.
Il établit une correspondance régulière avec ses parents pendant toute la période où il est

16. Émile Gautier (1822−1891), futur directeur de l'Observatoire de Genève (de 1882 à 1889), ami et aide de Le Verrier pour les premiers calculs sur Uranus (voir chapitre 2).

en France, ce qui permet de découvrir des informations précieuses sur le comportement et la façon de travailler de Le Verrier. Ses propos interviendront surtout au chapitre 2.
Il dirigera l'Observatoire de Genève de 1882 à 1889.

Jean-Baptiste Biot, qui présente les calculs de Le Verrier pour Neptune dans 5 articles successifs publiés dans le *Journal des sçavants* et regroupés dans [Biot, 1847a]. Biot détaille surtout les prouesses calculatoires et la maîtrise de la démarche de Le Verrier. Biot a soutenu Le Verrier au début de sa carrière et a été longtemps proche de lui. Le Verrier suppléera Biot au Collège de France à partir de 1843. Rappelons que Biot connaît parfaitement les techniques de calcul impliquées dans le travail de Le Verrier, puisqu'il a refait tous les calculs de la *Mécanique céleste* de Laplace [Laplace, 1802], et il a publié les conclusions de son analyse dans le traité [Biot, 1801].

Félix Tisserand, qui a résumé et analysé les calculs de Le Verrier pour Neptune dans le chapitre XXIII de ses œuvres complètes [Tisserand, 1889]. Son analyse est celle d'un mathématicien.

André Danjon En 1946, à l'occasion du centenaire de la découverte de Neptune, Danjon [17] lit à une réunion de la Société astronomique de France un article retraçant l'historique de la découverte de Neptune par Le Verrier et Adams [Danjon, 1946a] ; il publie à la même époque un article voisin dans la revue *Ciel et Espace* [Danjon, 1946b].
Danjon évoque aussi quelques techniques de calcul mises en œuvre par Le Verrier et il met l'accent sur le nombre important d'inconnues au problème, en insistant sur celles qui interviennent de façon transcendante.

Fonctionnement simplifié de INPOP (encadré 2)

On présente une version très simplifiée du fonctionnement de INPOP [Fienga, 2019], limitée aux principales planètes, considérées comme ponctuelles, mais ce cadre correspond assez bien aux connaissances astronomiques que l'on avait au milieu du XIXe siècle. Le système INPOP complet fait intervenir la relativité générale, l'orientation de la Terre, la libration de la Lune, les effets de marée, la non sphéricité de la Terre...

Principe général
On appelle Y le vecteur qui contient les variables qui décrivent le système, à savoir les vecteurs position et les vecteurs vitesse des différents corps (vecteur à $6n$ composantes, si il y a n corps). Les positions des corps du Système solaire sont obtenues par intégration numérique d'une équation différentielle du premier ordre du type

$$Y' = H(t, Y(t)) \tag{1}$$

On connaît une valeur initiale $Y_0 = Y(t = 0)$ des positions et des vitesses des différents corps à l'instant $t = 0$.
On détermine les interactions [a] F qui s'exercent entre les divers corps en utilisant la loi de la gravitation universelle de Newton.
La suite de la description du fonctionnement de INPOP est donnée page suivante.

a. Dans la version complète de INPOP, tenant compte de la forme réelle – non sphérique – de certains corps, il faut tenir compte aussi des moments.

17. André Danjon (1890−1967). Astronome français ; il a inventé et perfectionné de nombreux instruments utiles à l'astronomie de position, comme l'astrolabe impersonnel. Il a dirigé l'Observatoire de Paris de 1945 à 1963.

Fonctionnement simplifié de INPOP (encadré 2, suite)

On définit alors un modèle d'interactions entre les différents corps du Système solaire et ce modèle d'interactions permet de définir la fonction H.
Puis, à partir du principe fondamental de la dynamique $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\gamma}$, on déduit les vecteurs accélérations des différents corps, à partir de leurs masses m et des forces F qui s'exercent sur eux, ce qui permet d'expliciter l'équation différentielle gérant les mouvements des divers corps.
Cette équation différentielle $Y' = H(t, Y(t))$ est intégrée numériquement, à l'aide d'une méthode d'Adams (voir [Hairer, 2010]), pour en déduire, à partir de Y_0, $Y(h)$, h étant le pas d'intégration, ce pas pouvant être positif ou négatif. De proche en proche, on détermine ensuite les valeurs du vecteur d'état $Y_i = Y(ih)$ pour tout i dans $\mathbb{N}$: on obtient donc une solution tabulée, c'est-à-dire valable pour des valeurs discrètes du temps. Cette solution tabulée est ce que l'on obtient en sortie du programme.
Pour fonctionner, le programme nécessite en entrée deux fichiers de configuration. Le premier contient la définition du modèle dynamique. Le second fichier contient les valeurs de tous les paramètres qui interviennent dans le modèle dynamique : les conditions initiales du système, les masses des corps...
On peut aussi, à l'aide d'interpolation par des polynômes de Tchebichev disposer d'éphémérides planétaires à toutes dates et pas seulement aux dates tabulaires.

INPOP utilise la méthode d'intégration d'Adams-Bashford comme prédicteur et Adams-Moulton comme correcteur.
Formulaire de la méthode d'Adams-Bashford [Bulirsch, 1983], [Hairer, 2010]
On pose $t_n = nh$ et on veut calculer les valeurs $(Y_n) = (Y(t_n))$.
La méthode d'Adams est qualifiée de multistep : cela signifie que pour calculer Y_{n+1}, on dispose de Y_n, Y_{n-1}..., Y_{n-r}, r étant un entier naturel choisi à l'avance et appelé ordre de la méthode.
On approche la pente f_{n-i} de Y en t_{n-i} par $f_{n-i} = H(t_{n-i}, Y_{n-i})$.
On approche localement la fonction Y' à l'aide de polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$P_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^{r} f_{n-i}\, L_{n,i,r}(t) \qquad \text{où } L_{n,i,r} \text{ est un polynôme de Lagrange d'ordre } r. \tag{2}$$

On choisit comme approximation pour $Y(t_{n+1})$:

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_{n,r}(t)dt = Y_n + \sum_{i=0}^{r} f_{n-i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(t)\, dt \tag{3}$$

Le formulaire est donc
$$\begin{cases} f_{n-i} &= H(t_{n-i}, Y_{n-i}) \\ l_{n,i,r} &= \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{j=0,\, j\neq i}^{r} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}}\, dt \\ Y_{n+1} &= Y_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{r} f_{n-i}\, l_{n,i,r} \end{cases}$$

Cette méthode doit extrapoler la valeur de Y' jusqu'à t_{n+1}, ce qui peut limiter la précision. Pour remédier à cela, INPOP applique ensuite la méthode d'Adams-Moulton, qui corrige la valeur trouvée avec le prédicteur.

INPOP utilise la méthode d'Adams avec $r = 12$, mais ce choix est paramétrable. Pour pouvoir appliquer la méthode d'Adams, il faut connaître, en plus de Y_0, des valeurs approchées de Y_1, Y_2, ..., Y_{r-1}, ce qui se fait en utilisant l'intégrateur 'odex' [Hairer, 2010].

Chapitre 1

LES PREMIERS PAS DE LE VERRIER EN ASTRONOMIE

Objectifs

Présentation On rappelle ici comment Urbain Jean-Joseph Le Verrier est devenu astronome, après avoir commencé une carrière prometteuse de chimiste (section 1). On indique ensuite brièvement la teneur des premiers travaux astronomiques de Le Verrier (section 2). On donne enfin quelques indications sur les cours qu'il donnait au Collège de France, puis à la Sorbonne à partir de 1846 (section 3).

Sommaire

1.1 Premiers pas de Le Verrier en astronomie . . . **19**
1.1.1 De la chimie à l'astronomie . . . 19
1.1.2 Notes bibliographiques . . . 20
1.1.3 Liste des références bibliographiques des ouvrages repérés par Le Verrier . . . 23
1.1.4 Notes prises par Le Verrier pendant ses recherches bibliographiques . . . 24
1.2 Moyens d'existence de Le Verrier . . . **25**
1.3 Premiers travaux astronomiques . . . **26**
1.4 Cours d'astronomie . . . **28**
1.4.1 Enseignement au Collège de France . . . 28
1.4.2 Enseignement à la Sorbonne . . . 31

1.1 Premiers pas de Le Verrier en astronomie

1.1.1 De la chimie à l'astronomie

Voici quelques indications concernant l'enfance et la scolarité de Le Verrier. Tous les renseignements suivants proviennent de [Lequeux, 2010].
Le Verrier est né le 11 mars 1811 à Saint Lô (Manche) ; son père est employé à l'administration des domaines, avec des revenus modestes. Urbain va d'abord au collège communal de Saint Lô avant d'entrer comme interne au collège royal de Caen où il étudie les mathématiques de 1827 à 1830. Cette dernière année, il se présente au concours d'entrée à Polytechnique, mais échoue, à la surprise générale, car c'est un élève brillant. Cet échec peut être mis sur le compte d'une préparation au concours insuffisante en province. Son père décide de l'envoyer à Paris, à l'Institution Mayer, et il vend sa maison pour subvenir aux frais générés. Au bout d'un an d'étude sous la direction du mathématicien Charles Choquet, Le Verrier intègre l'École polytechnique en 1831, à l'âge de 20 ans. Il en sort huitième deux ans après ; il n'aura donc pas droit aux œuvres complètes de Laplace, offertes par la veuve de Laplace au major lors de la sortie [1] ; il perfectionne ses connaissances en chimie à l'école des Tabacs et il s'y montre très bon expérimentateur. Il publie deux mémoires : un sur la combinaison du phosphore et de l'hydrogène en 1835 [Le Verrier, 1835] et un autre sur la combinaison du phosphore et de l'oxygène [Le Verrier, 1837] en 1837 [2]. En 1836, deux postes de répétiteur se libèrent à l'École polytechnique, un en chimie et un autre en géodésie, astronomie et machines. Le Verrier postule pour le poste de chimie, mais celui-ci est attribué à Regnault [3] ; il postule alors, fort de ses aptitudes mathématiques – et pour améliorer une situation matérielle précaire – pour celui d'astronomie, qu'il obtient.
Il avait commencé à accumuler une bonne expertise en chimie, mais il doit se sentir novice en astronomie. Il est conscient qu'il succède à ce poste à Arago, Mathieu [4] et à Savary [5] et il veut s'en montrer digne. Voici ce qu'il écrit à son père ([Lantier, 1977] p. 42) :

> En ayant accepté les fonctions qui ont été successivement remplies par Arago, Mathieu et Savary, je me suis imposé l'obligation de ne pas laisser baisser dans l'estime publique le poste qu'ils ont occupé, et pour cela je dois non seulement accepter, mais rechercher les occasions d'étendre mes connaissances [...] J'ai déjà franchi bien des échelons, pourquoi ne continuerai-je pas à monter ?

Joseph Bertrand, dans son éloge funèbre de Le Verrier [Bertrand, 1879], déclare :

> Loin d'être étonné par ses devoirs nouveaux et imprévus, Le Verrier, sans regret comme sans effort, sans se partager, sans regarder en arrière, se détacha de la chimie, et, docile au hasard qui lui montrait la route, devint rapidement astronome.

Tout est sûrement vrai, sauf pour le 'sans effort' ; Le Verrier a dû travailler énormément afin de 'devenir astronome', comme le prouvent les nombreuses notes bibliographiques (§ 1.1.2) prises par lui en 1837. Danjon [Danjon, 1946a] décrit les débuts de Le Verrier en astronomie de la façon suivante :

> Ses débuts avaient été éclatants. En quelques mois, ainsi qu'on devait le dire à ses funérailles, ce chimiste devenu astronome, s'était emparé hardiment de l'héritage vacant de Laplace [6].

1. Contrairement à Delaunay qui, en tant que major en 1836, aura droit aux œuvres complètes du maître.
2. On verra qu'il se souviendra de ses études sur le phosphore lors d'une soirée agitée avec Gautier, voir § 2.3.2.
3. Henri Victor Regnault (1810−1878), chimiste, professeur au Collège de France.
4. Claude-Louis Mathieu (1783−1875), professeur au Collège de France ; membre du Bureau des Longitudes. Il fait partie du clan Arago.
5. Félix Savary (1797−1841), astronome et mathématicien. Il fut le premier à déterminer une orbite de binaire visuelle (celle de ξ Ursa Major).
6. Pierre-Simon Laplace (1749−1827), astronome et mathématicien français. Il réunit dans sa *Mécanique céleste*

1.1.2 Notes bibliographiques

D'après ce qu'il ressort de l'examen du dossier Ms 1063 (32), Le Verrier, « stimulé par une grande ambition » [Lequeux, 2010], doit se rendre fréquemment à la bibliothèque de l'Institut afin d'enregistrer les références de tous les ouvrages et articles, qui pourraient lui être utiles dans sa future carrière. Les notes prises à cette occasion ont été rassemblées plus tard par Aimable Gaillot, quand le ministère de l'instruction publique lui a confié la mission de trier et de regrouper tous les manuscrits de Le Verrier (indication donnée par sa fille, Lucile Le Verrier, p. 277 de [Lucile, 1994]). Les notes bibliographiques prises par Le Verrier se trouvent donc dans ce dossier Ms 1063 (32) ; dossier qui ne comporte pas moins de 639 pages (une photo du dossier se trouve à la figure 1.1).

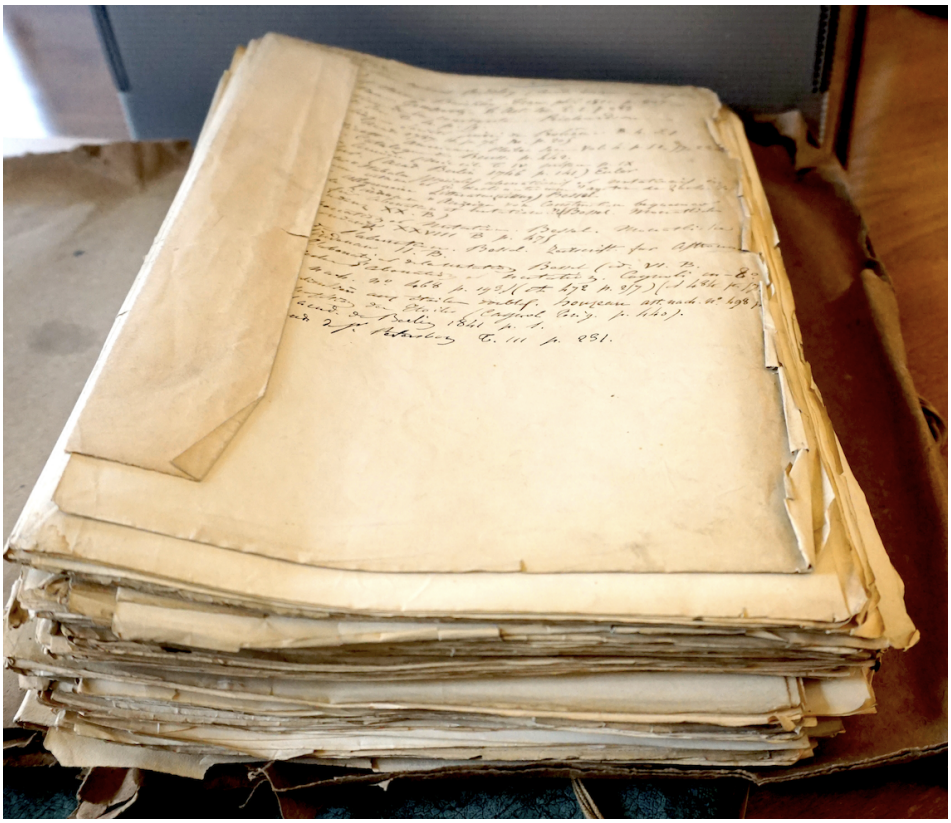


FIGURE 1.1 – Vue du dossier Ms 1063 (32) conservé à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, contenant les références bibliographiques notées par Le Verrier en 1837. Ce dossier comporte 639 pages contenant uniquement (ou presque) des références bibliographiques. Le Verrier voulait sûrement assimiler très rapidement toutes les connaissances astronomiques de l'époque. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

On constate que les références notées sont pour l'essentiel antérieures à 1837, ce qui signifie que Le Verrier a procédé à cet énorme travail de repérage pendant le tout début de sa carrière astronomique[7]. Il y a quelques très rares ajouts – essentiellement pour de nouvelles comètes ou de nouvelles petites planètes – postérieurs à cette date. On peut voir fig. 1.2 une liste de

toutes les méthodes connues de la mécanique céleste. Cet ouvrage sera largement consulté par Le Verrier. Laplace a aussi inventé de nombreux outils mathématiques et a fait grandement progresser le calcul des probabilités.

7. 1837 est aussi l'année de son mariage avec Lucile Marie Clotilde Choquet, la fille de son ancien professeur de mathématiques à l'institut Mayer, Charles Choquet, auteur d'une thèse ([Choquet, 1842], soutenue le 13 juillet 1842) portant sur les perturbations des mouvements planétaires ; il semblerait que le beau-père ait été largement inspiré par son gendre ?

références bibliographiques concernant les instruments et fig. 1.3 une liste pour les perturbations planétaires.
La plupart des références sont en français ; il y aussi de nombreuses références en allemand, mais par contre, il y en a très peu en anglais. Cela doit provenir du fait que Le Verrier devait sûrement parler assez bien l'allemand [8], mais pas du tout l'anglais. Voici ce que dit Gautier dans sa lettre du 24 juin 1847, à l'occasion de la première rencontre de Le Verrier avec Adams (voir aussi § 2.3.7) :

> Il [Le Verrier] s'y est rencontré pour la première fois avec Adams, ce qui était curieux à voir. Le fâcheux de la chose est qu'ils ne peuvent absolument pas s'expliquer mutuellement et c'est drôle de les voir essayer la conversation.

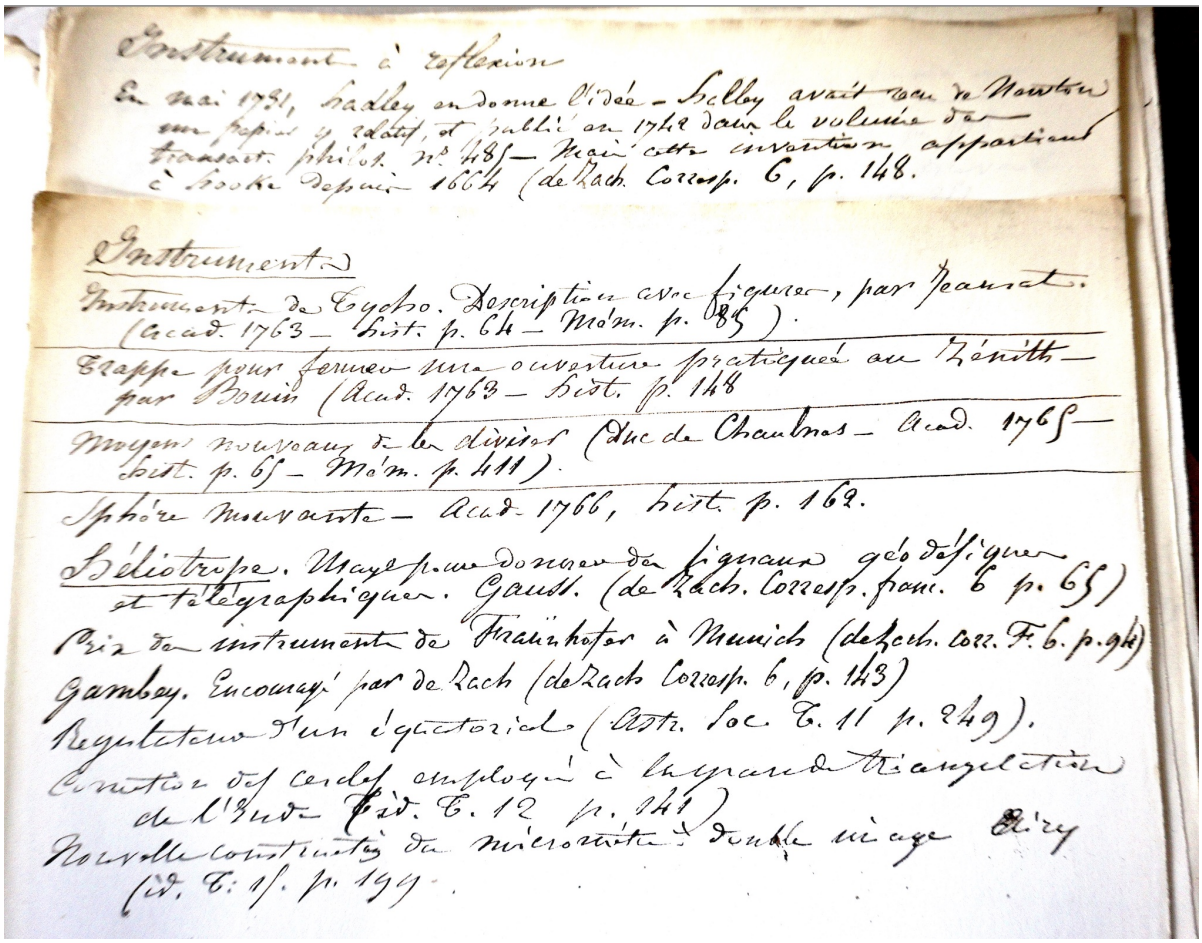


FIGURE 1.2 – Quelques notes bibliographiques prises par Le Verrier sur le fonctionnement de certains instruments scientifiques. Certaines références sont très techniques, comme celle concernant une trappe pour fermer une ouverture pratiquée au plafond (au milieu de la page) afin d'observer au zénith © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris Ms 1063 (32)

8. Dans une lettre à ses parents (lettre du 18 février 1848), Émile Gautier leur indique qu'il va donner quelques cours d'allemand à Le Verrier et à sa femme en vue d'un voyage en Russie, voyage qui finalement ne se fera pas, du fait de l'incertitude politique en France à cette époque.

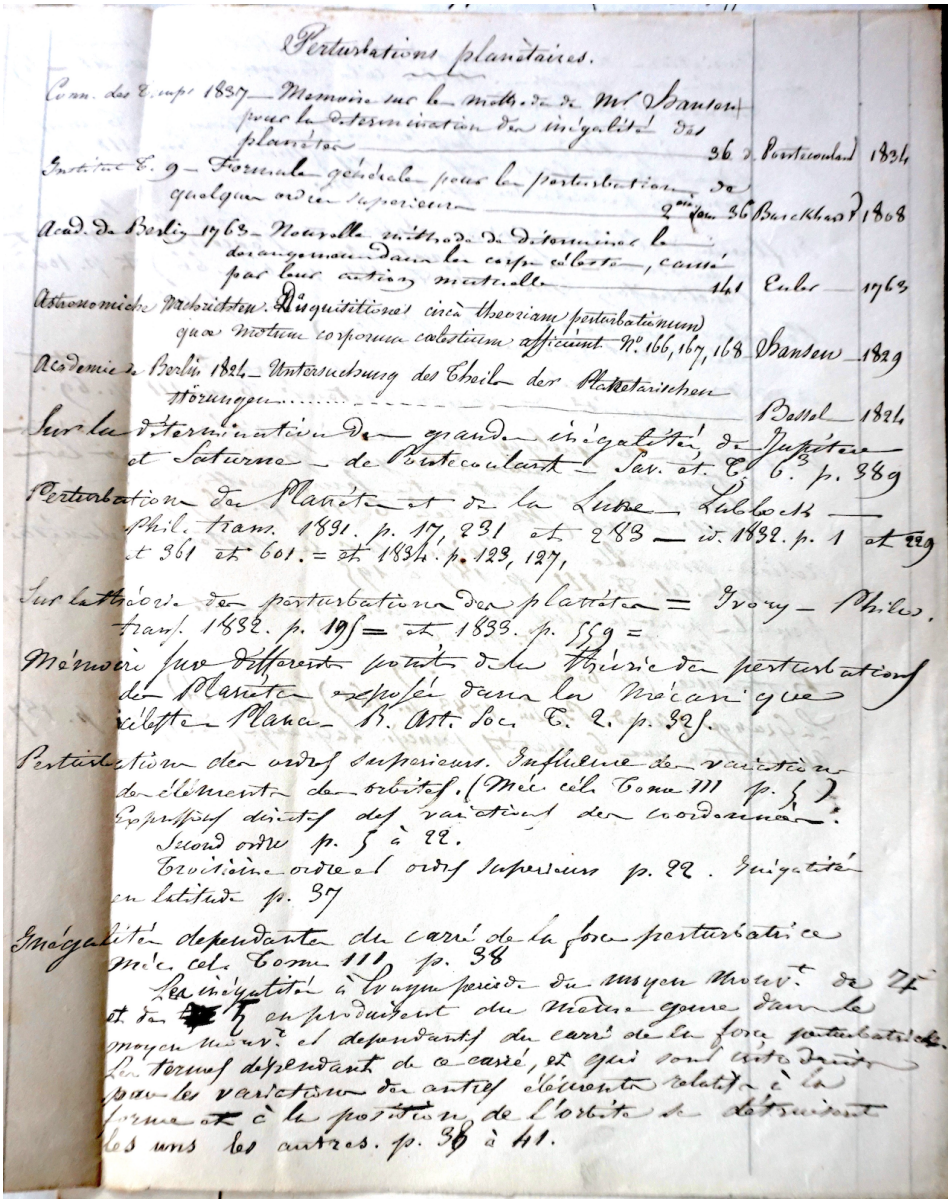


FIGURE 1.3 – Début des références notées par Le Verrier pour les perturbations planétaires. On note en particulier la dernière rubrique, « inégalités dépendantes du carré de la fonction perturbatrice » (*Mécanique céleste* tome III, p. 38), qui lui servira pour déterminer les perturbations de Saturne sur Uranus. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris Ms 1063 (32)

Le Verrier doit déjà penser à se spécialiser en mécanique céleste, ce qui est assez naturel, vu ses grandes aptitudes en mathématiques, car dans ses notes, il privilégie déjà les ouvrages de mécanique céleste : Laplace bien sûr, mais aussi Clairaut, Lalande, Lagrange, Poisson... Voici comment Lequeux qualifie l'astronomie de l'époque [Lequeux, 2010] : « De plus, l'astronomie, à cette époque, se concentrait sur le mouvement des planètes et utilisait les méthodes de mécanique céleste, qui prédisaient leurs mouvements ».
De façon étonnante, Le Verrier prend des références sur les techniques instrumentales, les nébuleuses ou les marées. Mais de façon encore plus étonnante, on trouve de nombreuses références sur l'histoire de l'astronomie : astronomie chinoise, grecque, ou indienne. Il prend aussi des notes sur les astronomes qui l'ont précédé. Dans le dossier 'Histoire', il y a en particulier un passage

curieux où il mentionne quelques 'martyrs'[9] de l'astronomie, en puisant dans la bibliographie astronomique de Lalande [de la Lande, 1803].
On voit donc que Le Verrier s'applique à connaître tous les aspects de sa nouvelle discipline.

On a souvent dit que Le Verrier était un pur théoricien – Flammarion [Flammarion, 1911], Liais [Liais, 1865], par exemple – ce n'est pas entièrement vrai : il y a bien sûr une majorité de références mathématiques et de mécanique céleste, mais il s'intéresse aussi à certains aspects de la physique (à la lumière surtout, en particulier à la spectroscopie), à la technologie des instruments, aux horloges, aux montres... Il mettra toutes ces connaissances en pratique lorsqu'il s'agira d'équiper l'Observatoire de Paris en appareils nouveaux.
On verra aussi que Le Verrier, à partir de sa nomination comme directeur de l'Observatoire en 1854, a rempli 21 cahiers d'observations et qu'il a régulièrement et activement participé aux réglages et aux calibrages des instruments d'observation (voir § 14.3).

1.1.3 Liste des références bibliographiques des ouvrages repérés par Le Verrier

Le Verrier note de façon systématique et détaillée les références bibliographiques de tous les documents qu'il a consultés ou qu'il pourrait consulter pour ses recherches à venir. La liste est longue et impressionnante par sa précision et sa diversité. La liste est même tellement longue (le dossier complet (Ms 1063 (32)) comporte 416 feuilles couvrant 639 pages plus ou moins remplies), qu'on est en droit de se demander ce qu'il a pu récupérer comme renseignements dans chaque document. Pour les articles consacrés aux nébuleuses par exemple, on peut penser que c'est plus de la curiosité qu'autre chose ou bien c'est en vue de la préparation de ses cours ; pour des références à la *Mécanique céleste* de Laplace, on peut par contre penser que la consultation a été plus immédiatement profitable. Il consigne les notes bibliographiques qu'il a prises de ces différents documents dans des rubriques spécialisées, qui sont énumérées dans le tableau ci-dessous, table 1.1.

Table 1.1 – Liste des dossiers regroupant les notes bibliographiques prises par Le Verrier. Le regroupement est fait par Le Verrier lui-même. On indique pour chaque rubrique le nombre de pages de chaque dossier

Références bibliographiques notées par Le Verrier et groupées par sujets		
Aberration, 1 p.	Analyse, 20 p.	Astronomie sphérique, 4 p.
Atmosphère, 1 p.	Bolides, 1 p.	Comètes, 26 p.
Éclipses du Soleil, 34 p.	Étoiles, 14 p.	Histoire, 26 p.
Instruments, 17 p.	La Lune, 42 p.	Mars, 1 p.
Mécanique, 15 p.	Mercure, 5 p.	Mers, marées, 3 p.
Mouvement elliptique, 15 p.	Nébuleuses, 3 p.	Neptune, 1 p.
Nutation, précession, 5 p.	Pallas, 1 p.	Perturbation planétaire, 10 p.
Physique, 10 p.	Planètes, 15 p.	Réfraction, 3 p.
Satellites de Jupiter, 8 p.	Saturne, 12 p.	Séries trigonométriques, 14 p.
Soleil, 28 p.	Terre, 1 p.	Terre, 24 p.
Trigonométrie, 2 p.	Vénus, 12 p.	Vesta, 1 p.
	Divers, 37 p.	

9. À l'image du martyrologue établi par Commerson pour les botanistes. La référence de Le Verrier est la bibliographie de Lalande ([de la Lande, 1803], p 708 à 713), qui cite Le Paute d'Agelet, Duc de la Chapelle, Chabert, Méchain, Delambre, l'abbé Bertrand...

Le Verrier note surtout les ouvrages contenant une table des matières (ou de sujets) et note même les pages où trouver une telle table.
Afin de pouvoir trouver efficacement un renseignement sur un sujet donné, Le Verrier classe un certain nombre de références par ordre de préférence. Le titre qu'il donne à cet 'algorithme' est *Pour trouver ce qui concerne un sujet donné, consulter...* et il énumère dans un ordre préférentiel les documents à consulter ; cet algorithme de recherche se trouve dans le feuillet "Divers" du dossier Ms 1063 (32) ; on peut penser que cet algorithme est à usage purement personnel ; voici comment il est organisé :

Pour trouver ce qui concerne un sujet donné, consulter

1. Mes notes
2. Bibliothèque astronomique de Lalande, tables par noms p. 881 et par matières p. 921
3. Académie des sciences de Paris
   À partir de 1741 tout ce qui concerne l'astronomie est réuni au mot astronomie.
   La bibliothèque de l'Institut possède une table générale par ordre de matières de 1666 jusqu'à 1790
4. Transaction philosophique
   I Table des matières par de Breumond de 1665 à 1735. Les années 1679 à 1682 manquent.
   II Table des matières par ordre alphabétique de 1665 à 1780.
   III Même table continuée de 1781 à 1820.
   IV Relevé dans mes notes depuis 1821 jusqu'en 1847 [? ?]
5. Société astronomique de Londres
   Le 10e volume renferme à la fin un index (p. 1838) par ordre de matières. Relevé ensuite jusqu'au volume 16.
6. Construction des tables de Reuss [? ?] contenant par ordre de matières des collections jusqu'en 1800.
7. Académie de Berlin.
   Miscellanea Berlienssi relevé dans mes notes.
8. Connaissance des temps.
   Voir table placée à la fin de l'année 1822.
   Relevé depuis l'an IV jusqu'en 1839.
9. Académie de St Petersbourg.
   Relevé les commentaires.
   Relevé les nova commentaires.
   Relevé les mémoires.
   Relevé les actes publics.
   Relevé les mémoires depuis 1830 jusqu'en 1850. Relevé les savants étrangers.

En même temps qu'il notait les références bibliographiques, Le Verrier devait noter des passages importants dans des dossiers dédiés. Ces dossiers sont regroupés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris à la cote Ms 1063 (31) et sont partiellement détaillés au paragraphe suivant.

1.1.4 Notes prises par Le Verrier pendant ses recherches bibliographiques

Pendant qu'il collectionnait les références bibliographiques, Le Verrier devait prendre des notes sur les sujets qui l'intéressaient, pour sa propre formation et en vue de la préparation de ses cours. Voici quelques rubriques pour lesquelles Le Verrier a pris des notes, vraisemblablement durant cette même année 1837.
Un inventaire complet se trouve en annexe, au § C.1.

Comètes C'est un dossier de 35 pages où il indique des méthodes pour calculer leurs orbites, mais il donne aussi des éléments historiques.
Il pense déjà à ce qu'il pourra dire dans ses cours : « il ne sera pas sans intérêt de commencer par rappeler les idées des anciens sur la nature des comètes... ».

Mathématiques pures Il donne quelques éléments sur le logarithme, l'exponentielle, les développements limités, les surfaces... Lieux géométriques consacrés aux ellipses. Intégration d'expressions trigonométriques.

Orbites, détermination Ce petit dossier détaille le principe de la méthode de Gauss pour déterminer une orbite à partir de 3 observations. Il se termine par un exemple numérique.

La Lune Un gros dossier sur la Lune : phases, parallaxe, éclipses, mouvement des nœuds, occultations, inégalités périodiques de la latitude et du rayon vecteur...
Il a noté une partie de la théorie de Laplace sur la Lune ; il mentionne comme référence le livre II de la *Mécanique céleste* [Laplace, 1802].
Il a noté aussi la théorie de Hansen : il y a de nombreuses formules extraites du livre de Hansen [Hansen, 1838], avec des références de pages.

Mouvement dans le Système solaire On y trouve une présentation dans ses grandes lignes du Système solaire : écliptique, équateur, nœuds, inclinaison, ainsi que quelques données numériques concernant les différentes planètes.

De la masse et de la densité des planètes et examen de la gravitation Contient des formules pour exprimer la masse, la densité et la gravitation des différentes planètes.

Planètes Nature, dimension des orbites, station et rétrogradation. Il donne des formules de calcul pour ces objectifs ainsi que des exemples.

De la constitution des planètes Il décrit sommairement l'aspect des planètes : pas de détail visible sur la surface de Mercure, description détaillée des anneaux de Saturne.
Il détaille un peu plus l'aspect de Vénus (information venant probablement du cours public d'Arago) : « L'axe de rotation de Vénus est presque parallèle à l'écliptique. On a reconnu de hautes montagnes à la surface. La manière progressive dont la lumière se répand dans cette planète y indique une atmosphère ». Il ajoute : « Éclat très vif tous les 8 ans. Phases, taches, cornes [référence aux observations de Schroeter [10]] d'où rotation en 0.973 jours ». Évoque aussi les passages devant le Soleil.

Soleil Un gros dossier sur le Soleil : lever cosmique, acronique, héliaque. Méthode pour déterminer l'époque de l'année où une étoile donnée a son lever héliaque. Il évoque la mesure du temps. Conditions pour qu'il y ait une éclipse. Il discute la parallaxe du Soleil.

1.2 Moyens d'existence de Le Verrier

Au XIXe siècle, il était d'usage pour les nouveaux fonctionnaires de roder leur talent en province avant de pouvoir prétendre à exercer à Paris. Le Verrier, à sa sortie de l'École des Tabacs, aurait dû accepter un poste en province [Lequeux, 2009] ; il préféra démissionner de l'Administration des Tabacs : d'une part pour continuer ses travaux de chimie avec Gay-Lussac et d'autre part pour épouser Marie-Lucile Choquet, la fille de son ancien professeur de maths, en 1837. Le couple vivait de leçons particulières et de cours de mathématiques donnés au collège Stanislas [Lequeux, 2009].
Ce qui suit provient de [Poirier, 2011], mais voir aussi `bdl.ahp-numerique.fr`.
Le procès verbal du 20 janvier 1841 du Bureau des Longitudes indique :

10. Johann Schröter (1745−1816). Astronome allemand ; il a réalisé des dessins de Mars et de la Lune ; il a noté une anomalie dans les phases de Vénus, anomalie qui introduit un retard d'une semaine environ entre la phase prédite par la théorie et celle observée et cette anomalie est maximale à la quadrature.

> M. Arago, au nom de la commission nommée dans la dernière séance, annonce que la majorité de la commission présente M. Babinet [11] pour la place vacante de bibliothécaire. La minorité aurait désiré que le candidat à cette place fût M. Leverrier. Les titres de M. Babinet et de M. Leverrier sont discutés.

Le physicien Jacques Babinet (1794−1872), suppléant d'Ampère au Collège de France et à la Sorbonne, avait été élu membre de l'Académie des sciences l'année précédente.
La minorité en question était constituée de Biot [et uniquement de Biot] qui, le 24 janvier 1841, écrivait à Louis-Claude Freycinet, président du Bureau des Longitudes :

> Depuis notre dernière séance, j'ai appris sur M. Le Verrier des détails qui m'étaient inconnus et qui peuvent l'être aussi à d'autres membres du Bureau. M. Le Verrier a 29 ans, est marié, a un enfant, et n'ayant pour vivre que sa petite place de répétiteur à l'École Polytechnique, il est obligé chaque jour de donner à des leçons particulières une portion du temps qu'il emploierait si bien, comme avec tant d'ardeur, au perfectionnement de l'Astronomie théorique. N'y aurait-il pas une sorte de barbarie à le laisser dans cette situation, pour gratifier un homme déjà âgé, qui n'a rendu aucun service à l'Astronomie et donc est assuré dans une carrière toute différente ? Ne serait-ce pas dénaturer l'institution du Bureau des Longitudes que d'agir ainsi, est-ce là l'exemple que nous ont donné nos prédécesseurs ? je soumets cette question à votre conscience comme à vos lumières.

Mais, au procès-verbal de la séance du 27 janvier, on lit :

> Le Bureau procède à l'élection du bibliothécaire. M. Babinet obtient 8 voix, M. Le Verrier 1 [évidemment celle de Biot]. M. Babinet est élu bibliothécaire [12].

M. Biot [déçu que son candidat ne soit pas élu] demande que l'on recherche les règlements qui fixent les attributions de cette place. À la séance suivante, Arago répond qu'il n'existe aucun règlement spécial sur les fonctions de secrétaire-bibliothécaire dans les archives de l'Observatoire.
On verra que Le Verrier prendra sa revanche sur Babinet à l'occasion d'une polémique au sujet des éléments approximatifs donnés par Le Verrier pour Neptune (voir § 13.3).
Le Verrier obtiendra une aisance financière, une fois nommé sénateur par Napoléon III le 26 janvier 1852, poste qui lui assure un revenu annuel de 30 000 frs [Lequeux, 2010].

1.3 Premiers travaux astronomiques

On donne ici, de façon très succincte, quelques indications sur les premiers travaux astronomiques de Le Verrier. Pour plus de détails, voir l'article de J. Laskar [Laskar, 2017] ou bien celui de F. Tisserand [Tisserand, 1880].
On constate que les problèmes abordés par Le Verrier dès son entrée en astronomie sont des problèmes difficiles et ambitieux (stabilité du Système solaire, par exemple), qui lui permettent de mettre au point, puis de maîtriser en peu de temps tous les outils dont il aura besoin pour Uranus. Il se fait ainsi rapidement remarquer par ses collègues géomètres ; c'est ce qui lui vaudra d'être sollicité par Arago pour s'attaquer aux irrégularités d'Uranus. Il est élu à l'Académie des sciences le 19 janvier 1846, en pleine recherche sur les irrégularités dans le mouvement d'Uranus. Voici quelques mentions de ses premiers calculs :

11. Jacques Babinet (1794-1872), mathématicien, physicien et astronome français, connu surtout pour ses ouvrages de vulgarisation scientifique.

12. Lequeux [Lequeux, 2010] écrit (p. 10) « Le Verrier n'est pas élu, mais le candidat qu'on lui oppose [Babinet] n'est pas élu non plus, et le poste restera vacant pendant 2 ans avant d'être rempli par Victor Mauvais. Lequeux doit penser à l'élection d'un nouveau membre du Bureau et non à l'élection du secrétaire-bibliothécaire. Les extraits précédents proviennent des procès verbaux du Bureau des longitudes (`http://bdl.ahp-numerique.fr/index`).

Variations séculaires des orbites Le Verrier commence par déterminer les variations séculaires des éléments des 7 planètes principales [Le Verrier, 1839a] et [Le Verrier, 1839d]. Ce travail avait déjà été fait par Lagrange, mais les valeurs des masses utilisées par Lagrange étaient à actualiser, et il fallait faire intervenir Uranus, non encore découvert au moment des calculs de Lagrange, ce que Le Verrier se propose de faire. Jacques Laskar [Laskar, 2017] écrit : « Le Verrier tient à montrer l'originalité de son travail et à affirmer son importance, en relativisant les résultats de Lagrange qui, selon lui, ne disposait pas de valeurs de masses des planètes assez précises ». Jacques Laskar cite un commentaire de Le Verrier : « [...] Les formules qu'il [Lagrange] donne pour les quatre planètes dont nous parlons sont complètement inexactes, et leur emploi doit être rejeté [Le Verrier, 1839d] ». Le Verrier établira des formules [13] incluant d'éventuelles retouches à effectuer sur les masses de certains corps du Système solaire, un moyen de prolonger la durée de vie de ses formules. Au cours de son calcul, Le Verrier invente une méthode pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, méthode connue maintenant sous le nom de méthode de Le Verrier ou bien de Le Verrier-Souriau (voir aussi p. 417).
Il utilise les résultats qu'il vient de trouver pour examiner la stabilité du Système solaire, travail déjà entrepris par Lagrange [Lagrange, 1781] et Laplace [Laplace, 1802], mais il pousse les calculs à un degré supérieur des excentricités. Voir plus de détails sur ces calculs de stabilité dans [Laskar, 1992].

Mercure En 1843 [14], pour l'étude de Mercure, il met au point une méthode [15] de développement de la fonction perturbatrice comme somme de fonctions trigonométriques des anomalies moyennes des deux planètes concernées (Mercure perturbé par Vénus). Jacques Laskar [Laskar, 2017] écrit : « cette théorie de Mercure lui servira d'étalon pour ses travaux futurs ». Ce travail [Le Verrier, 1843b] lui facilitera grandement l'étude des perturbations subies par Uranus. Le Verrier reprendra et améliorera la théorie de Mercure en 1859, et découvrira alors la fameuse avance du périhélie de Mercure [Le Verrier, 1859b].
Il applique aussi cette méthode de la double interpolation au couple Jupiter-Pallas [16] [Le Verrier, 1843a].

Comète de Lexell En 1844, Le Verrier s'attaque au mouvement de la comète Lexell (apparue en 1770), travail pour lequel il développe une méthode originale, qui consiste à proposer non pas une seule orbite, mais une famille d'orbites dépendant d'un paramètre [Le Verrier, 1844b]. En effet, le problème est indéterminé et les solutions sont très sensibles aux données d'observation. De ses calculs, il pourra conclure que la comète Lexell n'a pas été capturée par Jupiter et qu'elle n'est pas le même objet que la comète de Faye de 1843. Il utilisera les calculs effectués à cette occasion dans son cours d'astronomie au Collège de France, voir § 1.4.1. Il reprendra le problème en 1857 [Le Verrier, 1857].
Jacques Laskar analyse le travail de Le Verrier en ces termes [Laskar, 2017] : « Le Verrier se rend compte de la très grande dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales. Comme le faisait remarquer G. Valsecchi dans [Valsecchi, 2003], Le Verrier est véritablement en train d'étudier le comportement d'un système chaotique ».

13. Le Verrier utilisera son formulaire pour calculer la perturbation séculaire de la longitude vraie d'Uranus (voir chap. 3).

14. Les manuscrits des calculs pour Mercure sont en partie rassemblés dans le dossier Ms 1063, tomes 2 et 3, de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

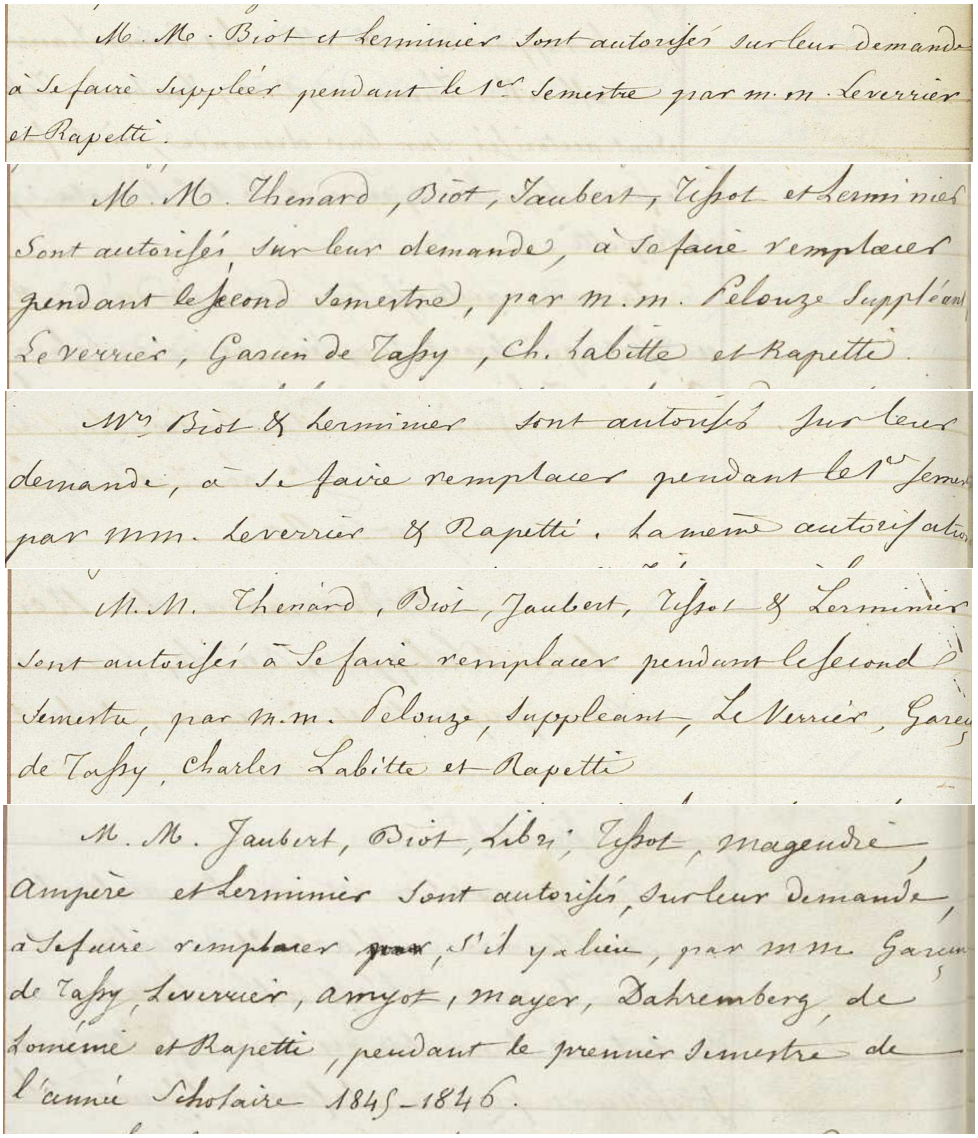
15. L'idée initiale d'un tel développement semble être due à Euler, selon une référence bibliographique donnée par Le Verrier lui-même : Académie de Berlin 1783, p 59. Le Verrier améliorera grandement l'efficacité de sa méthode pendant la recherche de Neptune, en adoptant une disposition des calculs voisine de celle d'un tableur. Le Verrier qualifie cette méthode de double interpolation. Voir plus de détails au chapitre 3.

16. Ces deux objets sont en quasi résonance 7 : 18 ; Le Verrier détermine par un calcul itératif le coefficient du terme résonnant en $\cos(18\lambda_{Jup} - 7\lambda_{Pal})$ où λ représente la longitude moyenne d'une planète.

1.4 Cours d'astronomie

1.4.1 Enseignement au Collège de France

Le Verrier commence à enseigner au Collège de France à la rentrée 1843, en remplacement [17] de J. B. Biot [18], qui reste titulaire de sa chaire. Le remplacement doit être actualisé chaque semestre par l'Assemblée des professeurs, comme on le voit à la figure 1.4.


M. M. Biot et Lerminier sont autorisés sur leur demande à se faire suppléer pendant le 1er semestre par m. m. Leverrier et Rapetti.

M. M. Thenard, Biot, Jaubert, Tissot et Lerminier sont autorisés sur leur demande, à se faire remplacer pendant le second semestre, par m. m. Pelouze suppléant, Leverrier, Garcin de Tassy, Ch. Labitte et Rapetti.

Mrs Biot & Lerminier sont autorisés sur leur demande, à se faire remplacer pendant le 1er semestre par mm. Leverrier & Rapetti. La même autorisation

M. M. Thenard, Biot, Jaubert, Tissot & Lerminier sont autorisés à se faire remplacer pendant le second semestre, par m. m. Pelouze, suppleant, Le Verrier, Garcin de Tassy, Charles Labitte et Rapetti

M. M. Jaubert, Biot, Libri, Tissot, Magendie, Ampère et Lerminier sont autorisés, sur leur demande, à se faire remplacer ~~par~~, s'il y a lieu, par mm. Garcin de Tassy, Leverrier, Amyot, Mayer, Dahremberg, de Loménie et Rapetti, pendant le premier semestre de l'année scholaire 1845-1846.

FIGURE 1.4 – Extraits des assemblées de professeurs du Collège de France des 13 novembre 1843, 31 Mars 1844, 17 novembre 1844, 16 mars 1845 et 16 novembre 1845 notifiant les remplacements pour les semestres concernés de Jean-Baptiste Biot par Le Verrier (Source : archives du Collège de France 2 AP 5 pages 38–42)

17. Mais dans la liste des professeurs du collège de France, le nom de Le Verrier ne figure pas (voir https://www.college-de-france.fr/media/en-college/UPL50600_LISTE_DES_PROFESSEURS.pdf) ; le remplacement n'est pas signalé.

18. J.B. Biot (1774–1852) semble avoir une santé fragile à la fin de sa vie et il privilégie ses recherches scientifiques : à partir de 1835, on lui prévoit un remplaçant (de luxe) en cas d'absence ou de maladie ; ce sera successivement Cauchy, Liouville, Leverrier, Delaunay !

Le Verrier était prévu pour remplacer Biot aussi au premier semestre 46−47, mais comme une chaire d'astronomie mathématique a été spécialement créée pour lui à la Sorbonne après la découverte de Neptune, il sera remplacé par Delaunay, qui suppléera Biot au Collège de France à partir de ce premier semestre 46−47 (voir fig. 1.5).

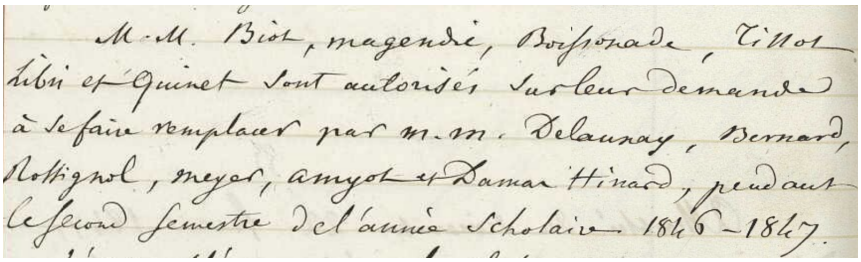
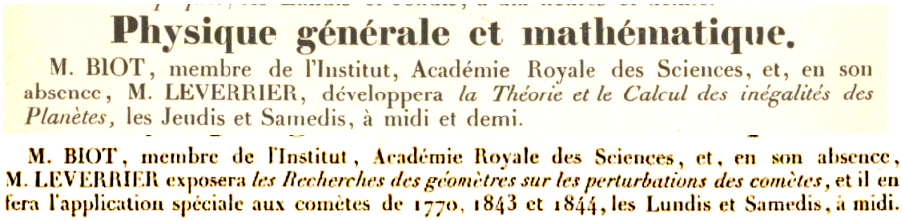

MM. Biot, magendie, Boissonade, Tiliot
libri et Quinet sont autorisés sur leur demande
à se faire remplacer par mm. Delaunay, Bernard,
Rottignol, meyer, amyot et Damas Hinard, pendant
le second semestre de l'année scholaire 1846-1847.

FIGURE 1.5 – Remplacement de Biot par Delaunay à la rentrée de l'année scolaire 46−47 (Source : archives du Collège de France 2 AP 5, pages 38−40)

Le Verrier assure deux cours par semaine : le jeudi et le samedi de 12h30 à 14h pendant l'année 43−44 et le lundi et le samedi de 12h à 13h30 pendant l'année 44−45.


Physique générale et mathématique.

M. BIOT, membre de l'Institut, Académie Royale des Sciences, et, en son absence, M. LEVERRIER, développera *la Théorie et le Calcul des inégalités des Planètes*, les Jeudis et Samedis, à midi et demi.

M. BIOT, membre de l'Institut, Académie Royale des Sciences, et, en son absence, M. LEVERRIER exposera *les Recherches des géomètres sur les perturbations des comètes*, et il en fera l'application spéciale aux comètes de 1770, 1843 et 1844, les Lundis et Samedis, à midi.

FIGURE 1.6 – Annonce du contenu du cours de Le Verrier au Collège de France ; en haut pour l'année scolaire 1843−1844, en bas pour l'année scolaire 1844−1845 (Source : archives du Collège de France 4 AFF 181 et 4 AFF 182)

Le Verrier aura notamment comme élèves Émile Gautier et un peu plus tard l'abbé Aoust [19].
Des notes [20] prises pour préparer ses cours ont été rassemblées dans le dossier Ms 1063 (31). Des passages très structurés alternent avec des ébauches de leçons.
Il y a un petit fascicule qui contient les esquisses et les plans de quelques leçons. On trouve aussi des dossiers plus épais contenant plus de détails sur le contenu de certains de ses cours.

On lit par exemple (une liste plus complète est donnée en annexe, § C.1) :
7 septembre 1844 : 2e leçon : Apprendre à se reconnaître dans le ciel ;
23 septembre : 7e leçon : Bases de la mécanique, composition des mouvements ;
Lundi 16 juin : 51e : Fonction perturbatrice ;
Samedi 21 juin : 52e : 3e partie du mémoire de Lagrange analysée ;
Lundi 23 juin : 53e : Intégration de la fonction perturbatrice ;
Samedi 28 juin : 54e : Théorie de la comète de 1770, éléments provisoires, observations pouvant servir au calcul des éléments ;
Lundi 30 juin : 55e : Perturbation produite par la Terre [sur la comète] ;
Samedi 5 juillet : 56e : Calcul des équations de condition. Leur résolution ;
Lundi 7 juillet : 57e : Introduction de l'indéterminée μ [comète de 1770]. Éléments variables.

19. Louis Stanislas Xavier Barthélamy Aoust (1814−1885), futur professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Marseille et auteur d'une biographie de Le Verrier [Aoust, 1878].

20. Ces notes ne sont pas toujours très ordonnées ; il y a par exemple plusieurs plans pour la 3e leçon, organisée différemment selon les années. Il se peut que ces notes concernent aussi les cours qu'il a donnés à la Sorbonne. Il est difficile de se repérer, car les documents comportent très peu de dates.

Le Verrier aurait donc donné 57 leçons en 9 mois, ce qui, compte tenu des vacances, représente un peu plus que deux séances par semaine [21].

Dans ce dossier (Ms 1063 (31)), les leçons ne sont pas complètement rédigées : il n'y a le plus souvent que des indications, des directives, des mentions de rappels à effectuer.
La leçon sur les comètes débute, comme indiqué plus haut, par « il ne sera pas sans intérêt de commencer par rappeler les idées des anciens sur la nature des comètes ». Le texte se poursuit avec un historique des croyances et des interprétations données aux apparitions de comètes, et finit par des formules pour calculer leurs positions.
Ces notes de cours sont essentiellement des plans de cours ; il y a peu de rédactions complètes. La 9e leçon d'une certaine année [laquelle ?] a bénéficié d'une rédaction complète. En voici le début ; elle montre le style très élaboré [22] de Le Verrier, professeur (l'écriture de Le Verrier n'est pas toujours facile à lire, d'où quelques 'trous')

> .. J'ai dit que l'étude du mouvement de la Terre nous conduirait à répondre à un grand nombre de questions intéressantes : à connaître le cours des saisons, la courbe des variations de la durée des jours et des nuits suivant les époques et suivant les pays, à comprendre la construction de notre calendrier, et les réformes introduites successivement par César et Grégoire XIII dans la mesure du temps historique.
> Peut-être penserez-vous qu'il serait bon dès lors de traiter ces divers points avant de nous livrer à l'étude des autres planètes. Mais je dois vous demander la permission de remettre à l'une des prochaines leçons ces [points ?] quelque soit l'importance que j'y attache. Il me serait d'abord impossible de traiter complètement de la Terre avant d'avoir acquis sur les autres planètes quelques notions et d'ailleurs je poursuis ici un autre but. Mon principal objet est de [dérouler ?] devant vos yeux la route par laquelle l'esprit humain est arrivé à la plus grande de ses conceptions, à la découverte du seul principe général peut-être qui soit au pouvoir de notre intelligence. Je n'entends pas par là bien entendu parler des lois de Kepler, mais bien du principe de la gravitation universelle, qui régit le monde. La connaissance des lois de Kepler est le premier pas que nous ayons dû faire dans l'étude de cette théorie. Or elles sont encore incomplètes pour nous : il nous manque la troisième qui lie les mouvements de deux planètes. Quand nous aurons complété nos recherches à cet égard, nous nous élèverons pour l'étude des lois de Kepler au principe de la gravitation dont elles ont préparé la découverte. Nous redescendrons ensuite de ce principe à l'explication du phénomène et nous le verrons suffire à tout [expliquer ?] dans les moindres détails. Que s'il arrive par hasard qu'un phénomène inexpliqué [vienne ?] à faire douter de la généralité du principe, le vrai philosophe aimera toujours mieux penser que les déductions ont été inexactement conduites ; et effectivement un examen ultérieur et [définitif ?] viendra toujours en définitive assurer le triomphe de la théorie.
> Nous allons donc passer à l'étude du mouvement d'une autre planète, d'une seule.... Je voudrais bien prendre Jupiter que vous avez maintenant le soir sous les yeux. Mais c'est véritablement sur Mars que Kepler a fait sa découverte et cette circonstance doit nous décider : mais on appliquera à Jupiter avec des nombres [adaptés ?]...

On voit que Le Verrier avait une foi inébranlable dans l'universalité de la loi d'attraction gravitationnelle de Newton. Il n'est donc pas étonnant qu'au moment d'analyser les causes des irrégularités dans le mouvement d'Uranus, il ait tout de suite rejeté l'hypothèse d'un écart par rapport à la loi d'attraction universelle, qui interviendrait à une grande distance du Soleil (voir début du chapitre 5 et *Herschel* p. 152).

21. Le Verrier écrit à Gautier le 29 juin 1846 : « que peut-on espérer d'un homme qui a 16 leçons par semaine à faire ? » Ce décompte [16 leçons] paraît très étonnant : qu'appelle-t-il leçon ? Et en plus, à cette époque, il est en plein dans le calcul de la deuxième approximation pour Uranus. Ces deux occupations semblent totalement incompatibles.

22. On rappelle que Le Verrier avait fait de très bonnes études littéraires et qu'il était très apprécié de son ancien professeur de rhétorique de Caen, Julien Travers, avec qui il était resté en contact, voir § 14.1.1.

1.4.2 Enseignement à la Sorbonne

À partir de la rentrée scolaire 1846, Le Verrier donne des cours d'astronomie à la Sorbonne, dans la chaire d'astronomie spécialement créée pour lui, après la découverte de Neptune.
Les indications suivantes proviennent de [Poirier, 2011] :
Cette nomination n'est pas sans créer une vive réaction de la part de J.B. Biot, qui possédait déjà une chaire d'astronomie à la Sorbonne, car l'intitulé de la chaire de Le Verrier est aussi 'Astronomie', comme pour la sienne. Biot s'en étonne et écrit au doyen Dumas [23] :

> Je reçois à l'instant le programme imprimé des cours de la Faculté ; et j'y vois, avec étonnement, que l'on y donne à celui [l'enseignement] de M. Le Verrier le titre de la chaire que j'occupe dans l'Université depuis sa création. Si c'est là une erreur typographique, je vous prie de bien vouloir la faire rectifier avant de publier le programme.

Le doyen lui répond que les deux chaires sont bien réunies sous le même nom 'astronomie' : la sienne, programmée pour le premier semestre recevant la désignation 'astronomie physique' et celle de Le Verrier, se déroulant au deuxième semestre, 'astronomie mathématique ou mécanique céleste' ; et ce, afin de créer, selon la volonté du Ministre, dans chaque faculté un programme complet d'astronomie, et confié seulement à Paris, à deux professeurs distincts.
Biot revient à la charge et insiste auprès du doyen en arguant que le nom de la nouvelle chaire [celle de Le Verrier] est 'astronomie mathématique ou mécanique céleste' « et que personne, dans la faculté, n'a le droit de la classer sous une dénomination différente ». Biot obtiendra finalement gain de cause.

Biot est mis à la retraite de la Faculté des sciences en 1849 (il a 75 ans). Le Verrier en profite pour récupérer l'enseignement de Biot : 'Astronomie physique' et laisser le sien : 'Astronomie mathématique' à Cauchy, qui peut ainsi retrouver un poste universitaire, ayant perdu tout poste universitaire (enseignement à Polytechnique entre autres) depuis qu'il n'avait pas voulu prêter serment de fidélité à Louis Philippe. Cauchy refusera aussi de prêter serment à Napoléon III, mais gardera son poste à la Sorbonne. Pour plus de détail sur le parcours scientifique de Cauchy, voir [Belhoste, 1985].
Des notes manuscrites du cours donné par Le Verrier à la Sorbonne en 1853, notes prises par V. E. Mauduit [Mauduit, 1854], sont accessibles dans les archives [24] de l'École normale. Le contenu de ce cours est très général : présentation succincte des objets astronomiques, puis étude en détail du Système solaire. Le niveau est assez élémentaire ; en particulier, il n'y a aucune indication sur le calcul des perturbations dans les notes consultables.

23. Archives de l'Académie des sciences, dossier Biot.
24. https://archive.org/details/ENS01_Ms0210.

Chapitre 2

COMMENT SE SONT DÉROULÉS LES CALCULS DE LE VERRIER POUR NEPTUNE ?

Objectifs

Présentation On donne ici un bref historique des calculs de Le Verrier (section 1). On examine dans quelles conditions matérielles ces calculs ont été faits (section 2). On détaille l'aide apportée par Émile Gautier pendant la première phase des calculs et les indications précieuses qu'il donne, par l'intermédiaire de lettres écrites à ses parents, sur l'ambiance qui régnait au cours de ces calculs (section 3).

Sommaire

2.1 Bref historique des calculs de Le Verrier . . . **36**
2.1.1 Découverte et comportement inexplicable d'Uranus . . . 36
2.1.2 Description sommaire des manuscrits . . . 38
2.1.3 Plan de travail de Le Verrier . . . 44
2.1.4 Publication des résultats successifs . . . 44
2.1.5 Description des calculs de Le Verrier par Biot et Tisserand . . . 45
2.1.6 *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)* . . . 46
2.2 Indications sur la méthode utilisée par Le Verrier pour Neptune . . . **47**
2.2.1 Façons d'effectuer les calculs . . . 47
2.2.2 Précautions et vérifications . . . 48
2.2.3 Principe de la démarche de Le Verrier et épilogue . . . 48
2.2.4 Épuisement de Le Verrier à la fin des calculs . . . 49
2.2.5 Vérification des calculs de Le Verrier . . . 49
2.3 Collaboration avec Émile Gautier pour le calcul des perturbations d'Uranus . . . **50**
2.3.1 Un collaborateur peu connu de Le Verrier : Émile Gautier . . . 50
2.3.2 Lettres de Gautier à ses parents pendant son premier séjour à Paris . . . 51
2.3.3 Comment fonctionnait le tandem Le Verrier - Gautier ? . . . 56
2.3.4 Confirmations du rôle de collaborateur joué par Gautier . . . 60
2.3.5 Vers la découverte . . . 60
2.3.6 Quelques jugements portés par Gautier sur Le Verrier . . . 61
2.3.7 Correspondances après la découverte de Neptune . . . 62

2.3.8 Commentaires et conclusions 67

Tables de Bouvard (encadré 3)

Alexis Bouvard avait réalisé des tables de Jupiter et de Saturne en 1808 [Bouvard, 1808], tables qui avaient besoin d'être réactualisées, car les connaissances sur les données numériques de ces deux planètes, en particulier leurs masses, avaient progressé.
En 1821, Alexis Bouvard reprit donc et corrigea ses tables de Jupiter et de Saturne datant de 1808 et il ajouta des tables d'Uranus [Bouvard, 1821b] (pour illustration, voir la table de l'équation du centre, page suivante, fig. 2.1).
Pour cette dernière planète, Bouvard essaie de déterminer une orbite satisfaisant à l'ensemble des observations dont il dispose. Mais il fut dans l'impossibilité de déterminer une orbite conciliant observations anciennes et observations modernes. Devant choisir, Bouvard fonde ses tables uniquement sur les observations modernes, i.e. celles datant d'après la découverte visuelle d'Uranus en 1781. Mais il n'était pas satisfait d'avoir été obligé de choisir ; voici ce qu'il écrit [Bouvard, 1821b] :

> Telle est donc l'alternative que présente la formation des Tables de la planète Uranus, que si l'on combine les observations anciennes avec les modernes, les premières seront passablement représentées, tandis que les secondes ne le seront pas avec la précision qu'elles comportent ; et que si l'on rejette les unes pour ne conserver que les autres, il en résultera des Tables qui auront toute l'exactitude désirable relativement aux observations modernes, mais qui ne pourront satisfaire convenablement aux observations anciennes. Il fallait se décider entre ces deux partis ; j'ai dû m'en tenir au second, comme étant celui qui réunit le plus de probabilité en faveur de la vérité, et je laisse aux tems à venir le soin de faire connaître si la difficulté de concilier les deux systèmes tient réellement à l'inexactitude des observations anciennes, ou si elle dépend de quelque action étrangère et inaperçue, qui aurait agi sur la planète.

L'accord avec les observations dura un temps et progressivement Uranus se décala des positions données par les tables de Bouvard pour atteindre un écart de 30″ d'arc en 1832. Le problème des irrégularités dans le mouvement d'Uranus n'était donc pas résolu.
En 1837, le neveu d'Alexis, Eugène Bouvard, fut chargé par son oncle de réviser les tables d'Uranus [Bouvard, 1837] ; le travail ne fut pas jugé satisfaisant par Arago ([Lequeux, 2009] p. 25), qui confia alors la mission d'éclaircir les irrégularités des mouvements d'Uranus à U. J-J. Le Verrier.

2.1 Bref historique des calculs de Le Verrier

2.1.1 Découverte et comportement inexplicable d'Uranus

Le 13 mars 1781, William Herschel[1] observe[2], à l'occasion d'une exploration systématique du ciel, un objet « hazy and ill-defined », qu'il interprète comme « a nebulous star or perhaps a comet » (voir le manuscrit de Herschel mentionnant cette observation fig. B.6) ; l'idée qu'il existerait une planète inconnue dans le Système solaire n'était pas du tout dans l'air du temps. Aucune orbite parabolique ne pouvant représenter correctement la trajectoire, ce n'est qu'après que Lexell [Lexell, 1783] eût ajusté une orbite circulaire deux fois plus éloignée du Soleil que Saturne que la nature planétaire de l'objet fut reconnue. Deux éphémérides furent établies successivement par Fixlmillner [Standage, 2000], puis par Delambre[3] [Standage, 2000], mais Uranus se décalait rapidement des positions données par les tables.
En 1821, Alexis Bouvard corrige ses tables de Saturne et de Jupiter, datant de 1808 [Bouvard, 1808], et ajoute des tables d'Uranus [Bouvard, 1821b] (voir encadré 3, p. 35 et fig. 2.1). L'écart entre les positions calculées par les tables de Bouvard pour Uranus et les positions observées augmente progressivement au fil des ans.

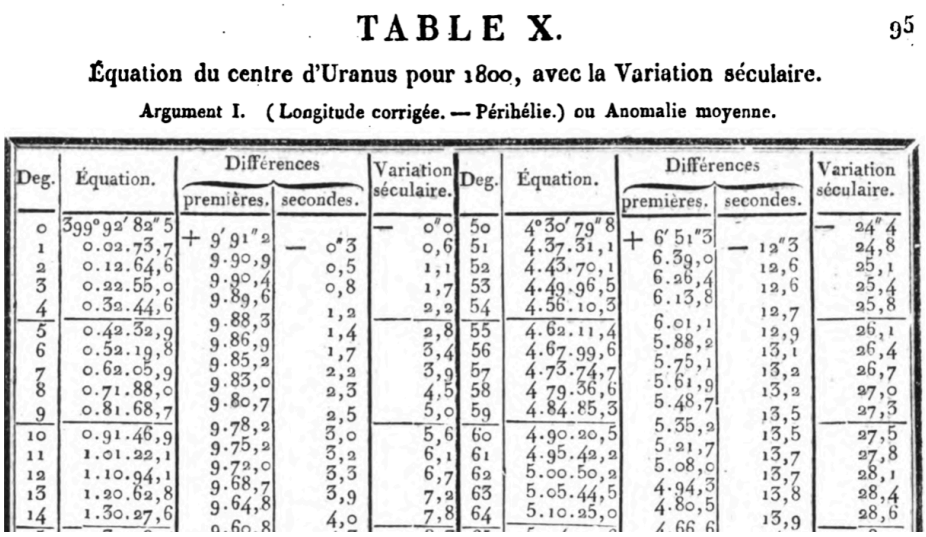


TABLE X. 95

Équation du centre d'Uranus pour 1800, avec la Variation séculaire.

Argument I. (Longitude corrigée. — Périhélie.) ou Anomalie moyenne.

Deg.	Équation.	Différences premières.	Différences secondes.	Variation séculaire.	Deg.	Équation.	Différences premières.	Différences secondes.	Variation séculaire.
0	399°92′82″5	+ 9′91″2	— 0″3	— 0″0	50	4°30′79″8	+ 6′51″3	— 12″3	— 24″4
1	0.02.73,7	9.90,9	0,5	0,6	51	4.37.31,1	6.39,0	12,6	24,8
2	0.12.64,6	9.90,4	0,8	1,1	52	4.43.70,1	6.26,4	12,6	25,1
3	0.22.55,0	9.89,6	1,2	1,7	53	4.49.96,5	6.13,8	12,7	25,4
4	0.32.44,6	9.88,3	1,4	2,2	54	4.56.10,3	6.01,1	12,9	25,8
5	0.42.32,9	9.86,9	1,7	2,8	55	4.62.11,4	5.88,2	13,1	26,1
6	0.52.19,8	9.85,2	2,2	3,4	56	4.67.99,6	5.75,1	13,2	26,4
7	0.62.05,9	9.83,0	2,3	3,9	57	4.73.74,7	5.61,9	13,2	26,7
8	0.71.88,0	9.80,7	2,5	4,5	58	4 79.36,6	5.48,7	13,5	27,0
9	0.81.68,7	9.78,2	3,0	5,0	59	4.84.85,3	5.35,2	13,5	27,3
10	0.91.46,9	9.75,2	3,2	5,6	60	4.90.20,5	5.21,7	13,7	27,5
11	1.01.22,1	9.72,0	3,3	6,1	61	4.95.42,2	5.08,0	13,7	27,8
12	1.10.94,1	9.68,7	3,9	6,7	62	5.00.50,2	4.94,3	13,8	28,1
13	1.20.62,8	9.64,8	4,0	7,2	63	5.05.44,5	4.80,5	13,9	28,4
14	1.30.27,6	9.60,8		7,8	64	5.10.25,0	4.66,6		28,6

FIGURE 2.1 – Début de la table X de Bouvard [Bouvard, 1821b] donnant les valeurs de l'équation du centre d'Uranus en fonction de l'anomalie moyenne, ainsi que sa variation séculaire. On rappelle que l'équation du centre est l'écart entre anomalie vraie et anomalie moyenne (voir table 3.2)

On a représenté fig. 2.2 les écarts entre les positions calculées par Le Verrier à partir des tables (corrigées) de Bouvard et les positions observées aux 279 dates retenues par Le Verrier (*Herschel* p. 129−135 et fig. 4.12). On peut facilement se convaincre que ces écarts ne sont pas dus à des erreurs aléatoires dans les observations. Plusieurs hypothèses avaient été avancées à l'époque pour expliquer le comportement irrégulier d'Uranus ; voici les hypothèses mentionnées par Le Verrier (*Herschel*, p. 152) :

— impact avec une comète

— présence d'un gros satellite

1. William Herschel (1738−1822), compositeur, musicien et astronome amateur allemand. Il s'installe en Angleterre en 1756 et y construira des télescopes avec des miroirs en bronze, de diamètres de plus en plus grands.
2. Les descriptions sont empruntées en grande partie à [Baum, 1997].
3. Delambre reçut le grand prix de l'Académie en 1789 pour la précision de ses tables d'Uranus.

— résistance de l'éther

— non applicabilité de la loi de Newton à cette distance du Soleil

— action perturbatrice d'une planète située au delà d'Uranus.

Aucune de ces hypothèses n'avait été sérieusement étayée et Le Verrier éliminera facilement les quatre premières hypothèses, pour ne conserver que la dernière (voir plus de détails au début du chapitre 5).

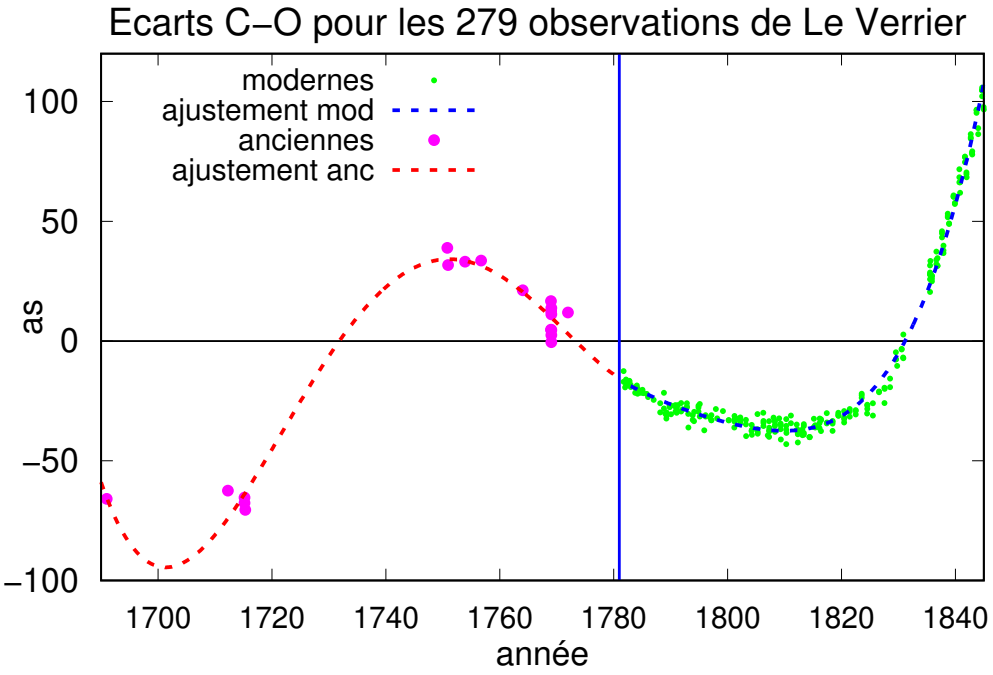


FIGURE 2.2 – Écarts en longitude géocentrique vraie (voir § 3.3.2) entre les 279 positions observées d'Uranus retenues par Le Verrier (*Herschel*, p. 129−135) et les 279 positions correspondantes calculées par Le Verrier à partir des tables (corrigées) de Bouvard. On imagine assez volontiers que ces écarts suivent une variation régulière et ne représentent pas une suite aléatoire d'erreurs de mesure. On constate l'absence de données entre 1715 (observation de Flamsteed) et 1750 (2 observations de Le Monnier) ; un ajustement à l'ordre 4 a été fait séparément sur les observations modernes et les observations anciennes. On retrouve, avec ce graphe, le tracé fait par Danjon [Danjon, 1946a] à l'occasion du centenaire de la découverte de Neptune

D'autres astronomes avaient eu l'idée d'une planète perturbatrice : Bouvard, qui avait envisagé de faire le calcul s'il disposait du temps nécessaire [4], Bessel [5], qui avait chargé son élève Flemming d'étudier le problème en commençant par reprendre en détail les réductions des observations ; mais Flemming meurt prématurément et Bessel lui-même tombe gravement malade peu après, ce qui l'empêche d'approfondir le problème ([Sheehan, 2021] p. 194). Il mourra le 17 mars 1846, quelques mois avant la découverte visuelle de Neptune.

4. Propos rapporté par Hussey dans sa lettre du 17 novembre 1834 à Airy, publiée dans [Airy, 1846].

5. Friedrich Willem Bessel (1784−1846) mathématicien et astronome allemand. Il est connu pour les fonctions qui portent son nom. En 1838, Struve avait mesuré la première parallaxe, celle de Véga ; Bessel avait mis en doute la mesure de Struve et avait mesuré avec une très grande précision les parallaxes de 61 Cygni puis de Véga. Struve avait repris sa mesure sur Véga et avait doublé sa valeur initiale, ce qui avait jeté un doute sur la précision de cette mesure, qui était finalement très bonne ; c'est ainsi que l'Histoire a accordé à Bessel la paternité de la première mesure de parallaxe.

Au début de l'été 1845, Arago, alors directeur [6] des observations à l'Observatoire de Paris, charge Le Verrier d'éclaircir le comportement discordant d'Uranus (*Herschel* p. 4).

2.1.2 Description sommaire des manuscrits

2.1.2.1 Des manuscrits expliqués et commentés

Le Verrier se met aussitôt [7] au travail et conserve soigneusement ses feuilles de calcul [8], accompagnées le plus souvent d'explications sur la nature et le but de ses calculs. Les manuscrits de Le Verrier pour la recherche de Neptune sont conservés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris sous la cote Ms 1063 (27) ; ils comportent environ 1300 pages de calculs et de commentaires.

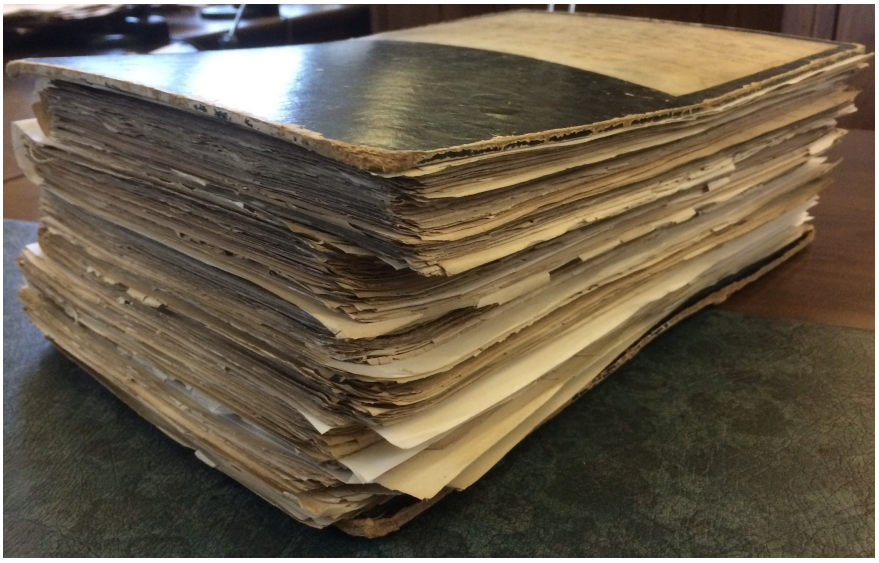


FIGURE 2.3 – Dossier regroupant les calculs de Le Verrier consacrés à la recherche de la planète qui perturbe Uranus, dossier conservé à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, sous la référence Ms 1063 (27). Ce dossier comporte environ 1300 pages, inégalement remplies. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

Contrairement à ceux de Tobias Mayer [Wepster, 2010] ou d'Adams [Sampson, 1904], les manuscrits de Le Verrier ne sont pas que des suites de calculs numériques : Le Verrier explique ses objectifs, et structure ses calculs. Il n'exclut pas que ses manuscrits soient examinés par un curieux, auquel il destine certaines de ses explications et il écrit par exemple au bas de la page 23 du cahier n° 2 l'indication suivante, un peu inattendue dans un tel contexte : $\mathcal{T}\ \mathcal{S}\ \mathcal{V}\ \mathcal{P}$. La lecture des manuscrits n'est pas toujours aisée, loin s'en faut, mais Le Verrier donne de nombreux points de repère à un éventuel lecteur.
Il y a de nombreux tableaux de valeurs numériques ; ces tableaux ont toujours un titre : perturbation de la longitude, perturbation du rayon vecteur, coefficients de $m'h'$... et les expressions successives nécessaires pour arriver au résultat sont bien indiquées. Un exemple typique est

6. J. Lequeux, dans ([Arago, 1846a] p. 11), indique qu'il n'était que le directeur des observations et non le directeur de l'Observatoire, le Bureau des Longitudes voulant garder la mainmise sur la gestion de l'Observatoire.

7. Danjon [Danjon, 1946a] écrit : « Aussitôt, Le Verrier se lance à l'assaut de ce problème comme on se lance à l'assaut d'une forteresse ».

8. Il est difficile de savoir si toutes les feuilles utiles ont été conservées, car il n'y a presque pas de pagination. Il y a parfois des absences d'intermédiaires entre certaines données et les résultats issus de ces données : calculs perdus ? Par exemple, Le Verrier annonce à Airy (lettre du 28/6/46 [Airy, 1846]) qu'il a fait des calculs montrant que sa théorie corrige aussi bien la longitude que le rayon vecteur, mais ces calculs sur le rayon vecteur sont absents des manuscrits.

donné à la figure 4.11. On est loin des indications sommaires des manuscrits d'Adams qui se limitent à « Hence we find : », suivi d'une équation, ou « we subst in eq 3 » et qui ne dépassent jamais une courte phrase (voir par exemple fig. 11.1 et plus généralement les 10 pages manuscrites d'Adams reproduites à la fin de [Sampson, 1904]). Une comparaison plus détaillée des deux manuscrits est effectuée au chapitre 11.

2.1.2.2 Organisation des manuscrits

Le dossier de la bibliothèque consacré à la recherche de Neptune (Ms 1063 (27)) contient 7 cahiers [9] :

- cahier n° 1 : brouillon du mémoire *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel.*
- cahier n° 2 : perturbations produites par Jupiter et Saturne sur Uranus.
- cahier n° 3 : observations d'Uranus. Éphémérides. Équations de condition.
- cahier n° 4 : recherche du corps troublant, première approximation.
- cahier n° 5 : recherche du corps troublant, deuxième approximation.
- cahier n° 6 : recherche du corps troublant, deuxième approximation (suite).
- cahier n° 7 : calcul des positions de Neptune. Rectification des éléments à l'aide des premières observations.

On trouvera une table des matières détaillée pour chacun de ces cahiers en annexe à la page 498. Par exemple, à la fin du cahier n° 1, se trouve la copie de la lettre de Galle annonçant à Le Verrier la découverte de Neptune (la lettre est reproduite en partie à la figure 6.14).
Par la suite, la référence "cahier n° x" signifiera "cahier n° x du dossier Ms 1063 (27) des manuscrits de Le Verrier".

2.1.2.3 Prévision des calculs à effectuer

Est-ce que durant l'été 1845 Le Verrier est conscient de la longueur des calculs qui l'attendent ? On peut en douter : Le Verrier, et vraisemblablement Arago, devaient espérer qu'une fois les tables de Bouvard corrigées, les irrégularités des mouvements d'Uranus seraient parfaitement expliquées. En effet, on peut s'appuyer sur les indications données par Gautier à ses parents dans sa lettre du 9 octobre 1845 (voir § 2.3), « [Le Verrier espère] tomber sur un bon solécisme [10], qui remettrait la théorie d'accord avec les observations ».
Comme ce ne sera pas le cas, Le Verrier devra échafauder au fur et à mesure de l'avancée des calculs une tactique adaptée pour expliquer les irrégularités d'Uranus. Il réutilisera à plusieurs reprises des calculs déjà effectués, en particulier ceux portant sur un système de 18 équations, mais il sera aussi régulièrement obligé d'innover. Voici le jugement admiratif porté par Biot [Biot, 1847c] sur la construction, l'utilisation et la réutilisation de ce système de 18 équations, appelé (4.16) par la suite (on détaillera sa construction au § 4.4.3.1 et on en montrera sa grande pertinence) :

> Il [Le Verrier] a voulu établir un caractère absolu d'incompatibilité [des éphémérides avec les observations]. Il y est parvenu en se servant d'un tableau numérique, dont il faut nécessairement que je parle, car c'est la pièce ouvrière de tout le reste de son travail : c'est le fondement de toutes les opérations ultérieures, et l'instrument de son succès définitif. On ne comprendra rien à la suite de ses calculs, on n'en sentira nullement la justesse et la force, si l'on ne sait d'abord comment il a formé ce tableau de nombres, et pourquoi il peut l'employer en toute sécurité...

9. La répartition des calculs entre les différents cahiers et leurs titres proviennent de Le Verrier lui-même.
10. Faute de raisonnement induite par une faute de langage ; voir aussi note 2.40.

D'autre part, pour effectuer ses calculs, Le Verrier doit [11] attribuer des valeurs à certains paramètres, comme la distance moyenne où peut se trouver cette planète perturbatrice ; il semblerait que Le Verrier ait initialement envisagé 21 valeurs pour cette distance, mais seul le calcul pour une distance moyenne double de celle d'Uranus a été poussé jusqu'au bout : voir § 5.4.

2.1.2.4 Aspect des manuscrits

Le papier utilisé par Le Verrier est jauni par le temps et certaines feuilles sont devenues fragiles ; leur manipulation est parfois délicate.
Le Verrier n'utilise que du papier non réglé [12], ce qui ne l'empêche pas d'écrire relativement droit. Quand il a de longs tableaux à remplir, il fait des traits, très fins, au crayon, pour remplir proprement ces tableaux ; les espacements ne sont pas toujours très réguliers et les traits ne couvrent pas tout à fait la largeur de la feuille. L'espacement moyen entre les lignes dépend de la taille des éléments à insérer dans le tableau et peut varier entre 6 et 15 mm.
Le trait du texte est souvent épais et l'encre utilisée pour le texte est assez foncée [13]. L'écriture du texte est hâtive [14], pas toujours très lisible. Quand il doit remplir un tableau de valeurs numériques, il semble utiliser une encre plus pâle associée à une plume plus fine, ce qui lui permet de faire des chiffres plus petits et très lisibles, avec un graphisme constant tout au long des manuscrits, voir fig. 2.6 par exemple.
Le Verrier n'utilise le plus souvent que le recto de ses feuilles, sauf pour le deuxième cahier très densément rempli et la deuxième moitié du troisième cahier, comportant les calculs d'éphémérides pour Uranus, pour lesquels il utilise le recto et le verso.
Le Verrier utilise le plus souvent des feuilles séparées ; mais de longs calculs ayant un but commun sont souvent réunis en feuillets. C'est le cas par exemple des calculs pour la deuxième approximation où il faut faire une longue série de calculs pour 6 valeurs différentes des paramètres : chacun de ces 6 calculs est regroupé dans un feuillet d'une vingtaine de pages chacun.
Quelquefois, Le Verrier colle un bout de feuille au bas d'une page, quand son calcul dépasse la longueur de cette page et qu'il souhaite le conserver en intégralité sur une seule page. Dans la plupart des cas, les feuilles sont alors reliées par des pastilles gris-bleu de cire.
Quand il doit procéder à de nombreuses multiplications comportant un multiplicande commun, comme par exemple le calcul de nt avec n fixé et t prenant de nombreuses valeurs, il écrit sur une bande de papier la table de multiplication par n, qui se résume en fait à des additions ($n(t+1) = (nt) + n$) et qui ne se limite pas systématiquement à $\times 10$ et il procède ensuite par interpolations. Il y a des centaines de bandes de ce type dans les manuscrits [15].
D'une manière très générale, il y a relativement peu de ratures, aussi bien dans le texte que dans les calculs. Voir cependant un contre-exemple à la figure 2.4. Il n'y a aucune date dans les manuscrits ; il est impossible, à la seule lecture de ceux-ci, de mesurer le travail accompli en un jour. Les calculs journaliers s'enchaînent sans séparation apparente. Les seuls repères temporels sûrs sont ceux déduits des dates de publication des différents mémoires.
La pagination est le plus souvent absente, et quand elle est présente, elle n'est pas toujours très cohérente, ce qui fait que l'on ne peut pas savoir avec certitude s'il manque des feuilles à certains endroits. Et effectivement, il semble qu'il manque plusieurs calculs – concernant le rayon vecteur notamment – , ce qui sera signalé le moment venu.

11. Cette démarche est indispensable, sinon l'on ne peut même pas commencer les calculs.
12. Pourtant le papier réglé existait à l'époque, comme on peut le constater avec les papiers utilisés pour dresser les procès verbaux de certaines assemblées savantes (assemblées des professeurs du Collège de France, par exemple, voir fig. 1.4).
13. L'encre utilisée par Gautier (voir § 2.3) est plus claire et sa plume est plus fine.
14. On sent que Le Verrier a en permanence envie d'aller à l'essentiel.
15. Et des milliers sur l'ensemble des 59 dossiers regroupant les manuscrits de Le Verrier conservés à l'Observatoire de Paris (voir annexe § G).

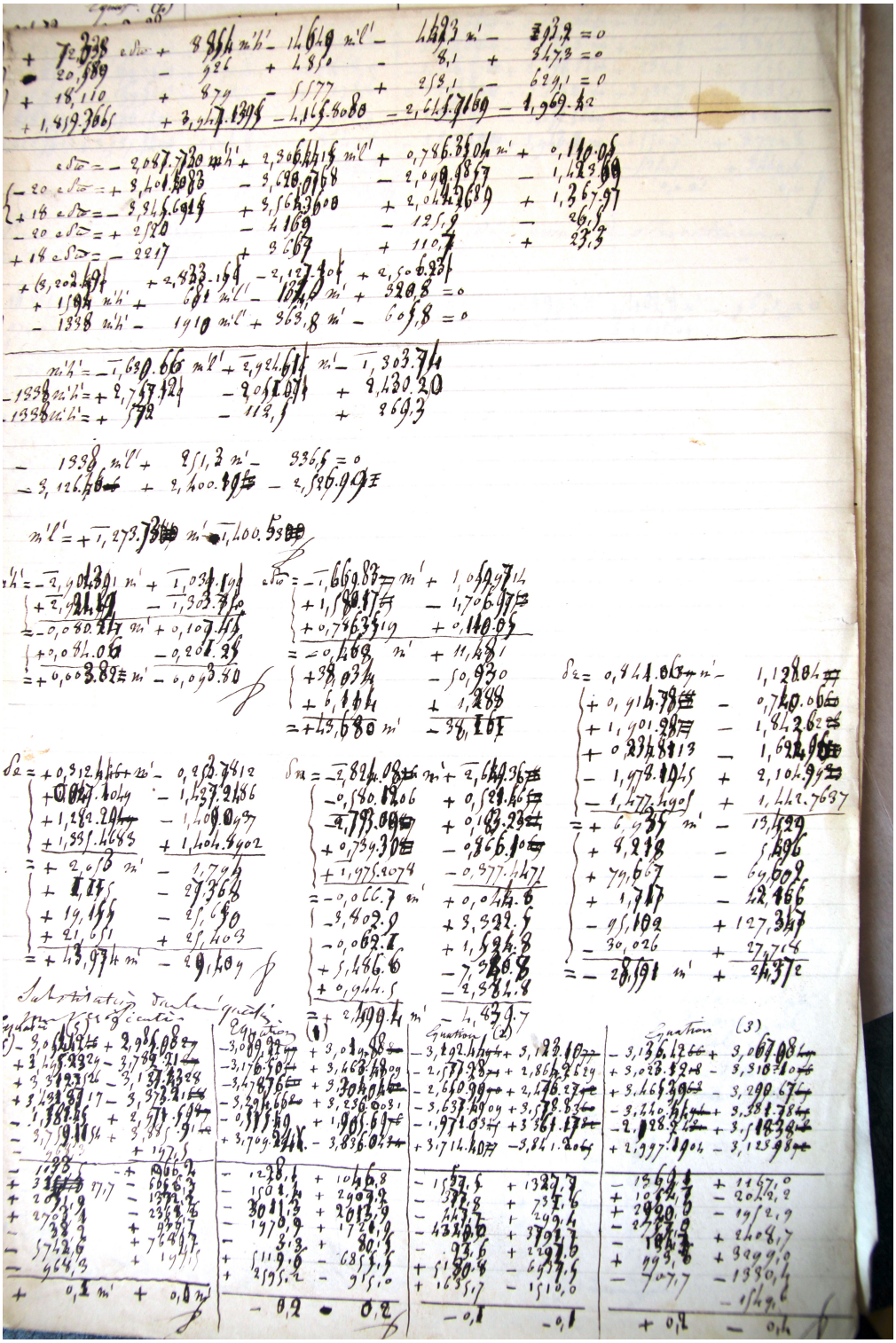


FIGURE 2.4 – Dans l'ensemble, les manuscrits de Le Verrier comportent relativement peu d'erreurs et donc relativement peu de ratures. Voici un contre-exemple où l'accès au résultat correct a été laborieux, bien qu'il il n'y ait pas de difficulté particulière a priori : calcul nocturne, fatigue ? Les calculs concernent la résolution d'un système (fig. 6.8) de 6 équations à 7 inconnues lors de la deuxième approximation (voir chapitre 6) ; ce calcul est extrait du cahier n° 5 des manuscrits © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

Le cahier n° 2, consacré au calcul des perturbations exercées par Saturne et Jupiter est particulièrement impressionnant par sa densité : Le Verrier y répète de très nombreuses fois le développement en série de fonctions trigonométriques à partir d'échantillonnages numériques 16×16 (voir le chapitre 3 pour plus de détails).
On observe par endroits des tâches d'huile, provenant des lampes que Le Verrier devait utiliser pour ses travaux nocturnes. On peut se rendre compte sur l'illustration de la figure 2.5 (provenant de [Flammarion, 1881]) de l'installation nocturne probable de Le Verrier.

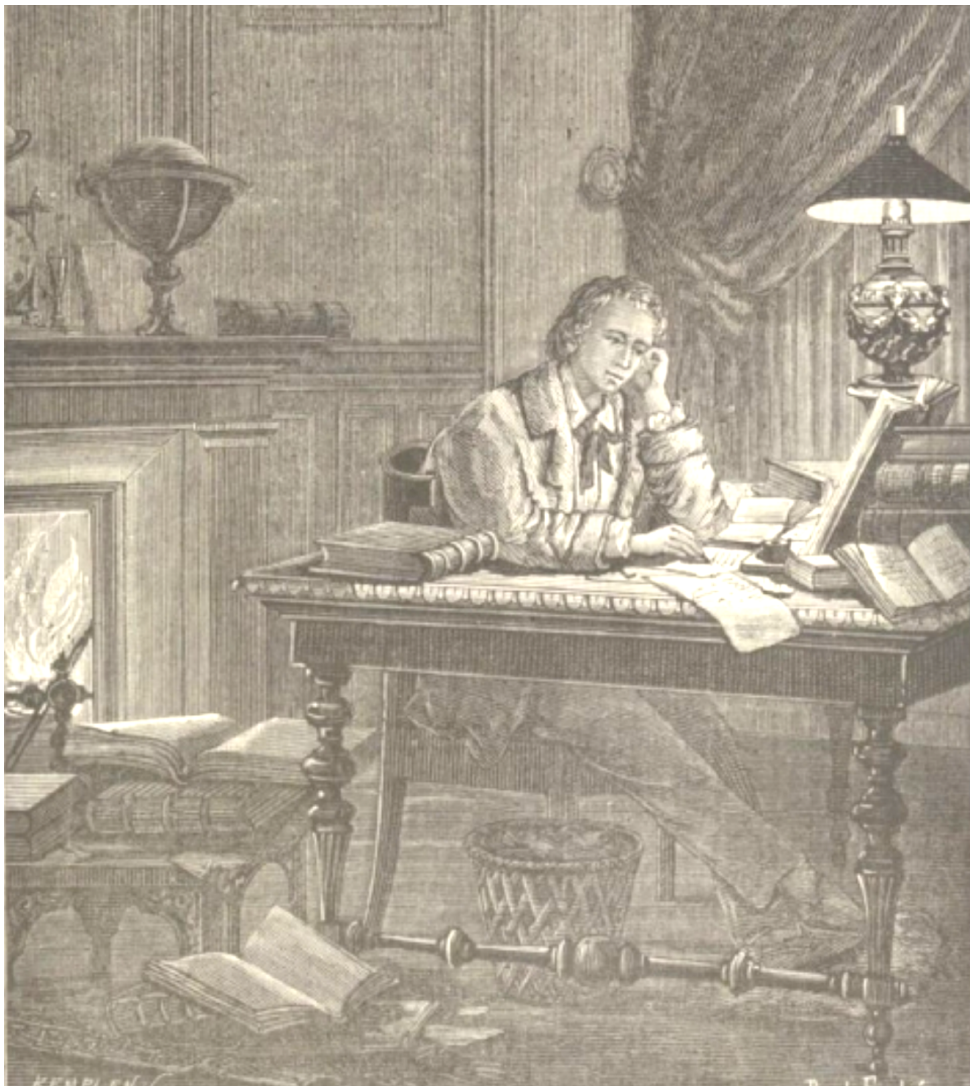


FIGURE 2.5 – Le Verrier, dans son cabinet de travail, travaillant de nuit à la lueur d'une lampe à huile (gravure extraite de *l'astronomie populaire* de Camille Flammarion [Flammarion, 1881]).
On peut citer un extrait d'une lettre de Le Verrier à son ancien élève l'Abbé Aoust (lettre du 18 novembre 1873 [Aoust, 1878], p. 29) : « Une des choses qui fatiguent le plus, c'est de passer sans cesse d'un sujet à un autre et c'est ce qui dans l'administration épuise le plus les hommes. Et je m'imagine que ce va et vient d'un sujet à un autre pendant tant d'années a beaucoup contribué à m'épuiser. Ce qui y avait aussi contribué c'est l'exécution des travaux scientifiques dont la communication vous semblait un signe de santé. Les gens qui passaient, la nuit, sur le pont des Saints-Pères, ont vu pendant de longs mois une lampe allumée jusqu'à trois ou quatre heures du matin et qui a laissé des taches d'huile sur les manuscrits de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune ».

À en croire la disposition de ses calculs, Le Verrier semble avoir refait chaque calcul au moins deux fois. Quand le deuxième calcul confirme le premier, Le Verrier appose son paraphe près du résultat. Ce paraphe a évolué au cours du temps : initialement, c'était ses initiales 𝔏𝔙 ou bien 𝔙𝔲, suivi d'une boucle, boucle qui est devenue progressivement prépondérante et le graphisme a évolué vers un ∞ plus ou moins incliné selon la place disponible, comme on le constate à la figure 2.6.

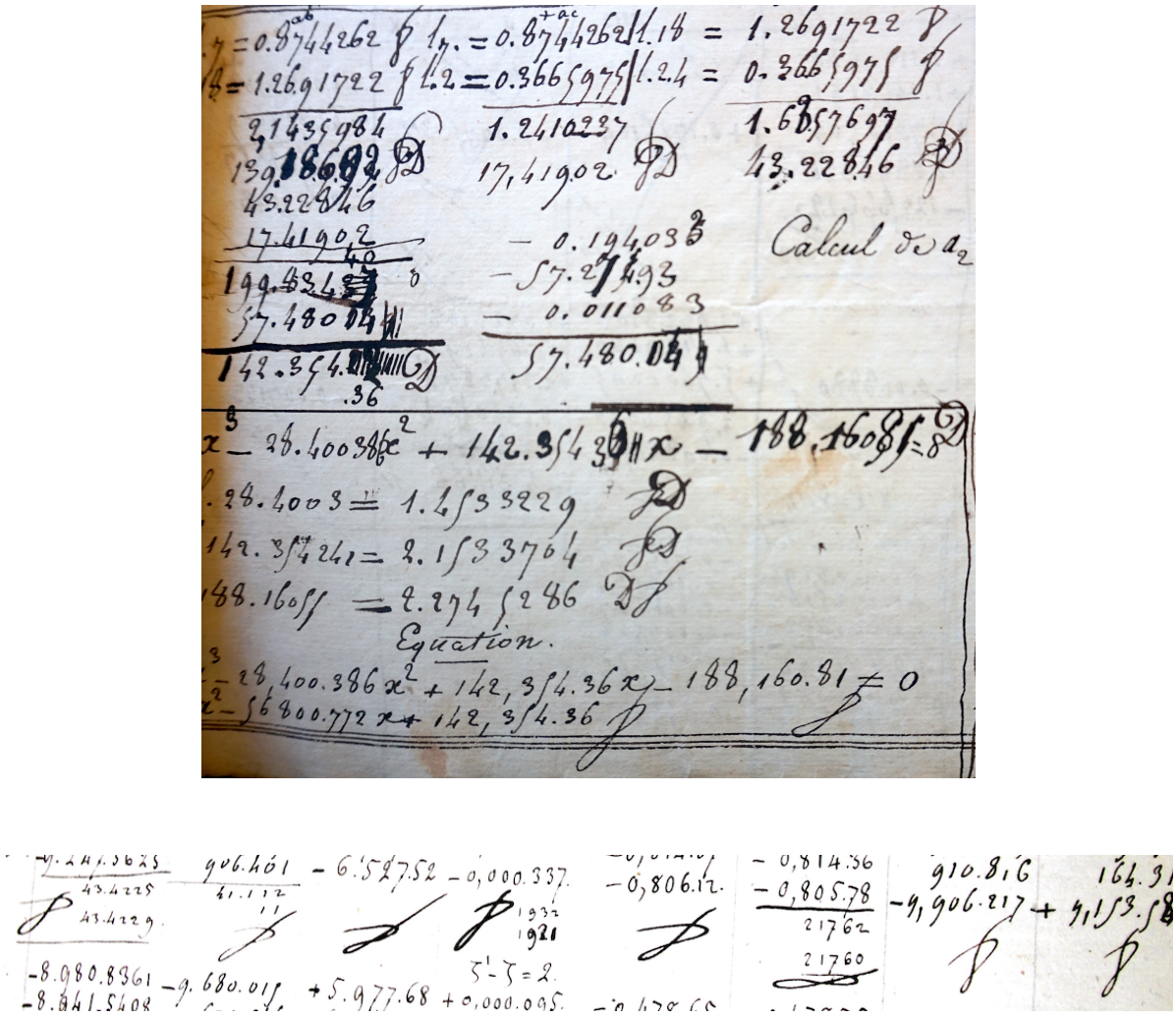


Figure 2.6 – Le Verrier refaisait systématiquement deux fois chaque calcul. Quand le deuxième calcul confirmait le premier, Le Verrier apposait son paraphe, paraphe dont le graphisme a évolué au cours du temps. La reproduction du haut est extraite du dossier Ms 1063, consacré à Mercure, datant de 1843. Le paraphe situé au milieu de cette feuille (près de .36) est soit un 𝔇 soit un 𝔏 avec une boucle hyper développée ; en allant vers le bas de la reproduction, la boucle du 𝔇 augmente dans les paraphes suivants jusqu'à se séparer du 𝔇. Dans les deux derniers paraphes (en bas de la première reproduction), on ne voit plus que la boucle. Que représente le 𝔇 initial, si c'est bien un 𝔇 et que signifie-t-il ? ou bien est-ce un 𝔏 pour Le Verrier ?
Dans la reproduction du bas (extraite de Ms 1063 (27), datant de 1845), le paraphe a évolué et pris sa forme quasi définitive. L'orientation du ∞ est variable, selon l'espace disponible.
On peut observer la présence systématique de ce paraphe dans les différentes reproductions des manuscrits de Le Verrier incluses dans la thèse © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

Une fois la lecture complète des manuscrits achevée, il est difficile de croire qu'un travail aussi monumental, contenant autant d'opérations faites de tête ou avec une table de logarithmes, puisse avoir été effectué en si peu de temps (1 an environ).
Biot [Biot, 1847a], à qui Le Verrier a probablement montré ses manuscrits, s'exprime de la façon suivante pour commenter le passage de la première à la deuxième approximation, passage rassemblé dans les cahiers n°s 5 et 6 :

> Il est à peine compréhensible qu'une pareille masse de calculs numériques, si difficiles, ait pu être exécutée avec tant de promptitude. Mais M. Le Verrier avait fait des efforts incroyables pour obtenir ces déterminations définitives avant l'opposition prochaine [août 1846] de la planète.

2.1.3 Plan de travail de Le Verrier

Le travail de Le Verrier peut être décomposé en 3 phases principales (les calculs eux-mêmes seront détaillés dans les 4 chapitres suivants) :

Phase 1 Le Verrier commence par calculer de la façon la plus précise possible les perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus. Il constate que pour former ses tables, Bouvard a omis des termes importants. Il espère ainsi pouvoir expliquer simplement le mouvement d'Uranus à partir des nouvelles expressions des perturbations qu'il vient de déterminer.
À partir de ces nouvelles expressions, il en déduit des éphémérides détaillées – héliocentriques puis géocentriques – d'Uranus. Puis, à partir d'une sélection d'équations (8 puis 18), il essaie de corriger les éléments elliptiques d'Uranus afin de réduire à un niveau acceptable l'écart entre les valeurs calculées pour les positions d'Uranus et les valeurs observées. Il montre par *trois* méthodes indépendantes qu'il est impossible de concilier l'ensemble des observations disponibles.

Phase 2 Le Verrier fait donc l'hypothèse que les écarts résiduels $O-C$ sur la longitude d'Uranus sont dus à l'action d'une planète inconnue ; en s'appuyant sur la loi empirique de Titius-Bode (voir encadré 12, p. 168), il fixe le rapport α des demi-grands axes de la planète inconnue et d'Uranus à la valeur 2.
Pour une première approche, il forme des équations de condition à partir de 18 observations, équations qui dépendent de la longitude moyenne initiale ε' de la planète inconnue. Il constate (*Herschel*, p. 185) que les résidus dans ces 18 équations ne sont tous faibles que si la planète perturbatrice se trouvait à la date du 1/1/1800 dans la région du ciel correspondant à une longitude moyenne ε' comprise entre 243° et 252°.

Phase 3 Pour affiner cette première approche, il fait une recherche locale autour de cette première solution en exprimant α et ε' sous la forme $\alpha = 0.51 + 0.02\gamma$ et $\varepsilon' = 252° + 18\mathcal{C}$; il forme 33 équations de condition aux inconnues γ, $\mathcal{C}$ et m' (masse de la planète inconnue). En s'appuyant sur une variante de la méthode des moindres carrés, Le Verrier trouve une valeur de ε' qui permet à Johann Galle et Heinrich d'Arrest de localiser Neptune le 23 septembre 1846 à l'Observatoire de Berlin, à environ 1° de la position indiquée par Le Verrier.

2.1.4 Publication des résultats successifs

Au fur et à mesure de l'avancement de ses calculs, Le Verrier présente sa démarche à l'Académie et publie dans les comptes rendus de l'Académie des sciences (CRAS) ses principaux résultats [16] : il publie successivement 4 mémoires, dont la table 2.1 précise les dates et les contenus.

16. Les principales indications de calcul et les principaux résultats donnés dans les 4 mémoires sont repris dans *Herschel*.

TABLE 2.1 – Historique des publications de Le Verrier dans les comptes rendus de l'Académie des sciences (CRAS), menant à la découverte de Neptune.

Été 1845	À la demande d'Arago, Le Verrier commence à examiner les écarts entre les positions observées d'Uranus et les positions calculées par Bouvard.
CRAS du 10 novembre 1845	Présentation du premier mémoire sur Uranus contenant l'ensemble des perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus. Le Verrier déclare qu'il a découvert de nombreuses erreurs dans les tables de Bouvard et qu'il est nécessaire d'en reprendre entièrement le calcul avant de pouvoir conclure si les écarts constatés entre observations et prédictions sont dus aux erreurs des tables ou bien à une cause extérieure.
CRAS du 1er juin 1846	Deuxième mémoire sur Uranus ; Le Verrier a recalculé les éphémérides d'Uranus, a constaté qu'il est impossible de concilier les calculs et les observations en corrigeant seulement les tables de Bouvard, et en conséquence, il émet l'hypothèse que la cause du désordre est due à l'action d'une planète inconnue située au delà d'Uranus et il donne une première position approximative de cette planète perturbatrice.
CRAS du 31 août 1846	Troisième mémoire donnant une position plus précise de cette planète au 1/1/1800 (position notée ε') et la prédiction de la position au 1/1/1847.
23 septembre 1846	Découverte de Neptune par Johann Gottfried Galle et Heinrich d'Arrest à l'Observatoire de Berlin le 23 septembre 1846, peu avant minuit.
CRAS du 5 octobre 1846	Quatrième mémoire, contenant une estimation de l'inclinaison (4°38') de l'orbite de Neptune sur celle d'Uranus. Le calcul avait été fait par Le Verrier avant la découverte visuelle.
Séance du 5 octobre 1846	Lecture par Arago de la lettre datée du 25 septembre de Galle à Le Verrier, annonçant la découverte de Neptune et l'évaluation estimée à $52'$ par Le Verrier entre la position qu'il avait prédite et la position observée.
À partir du 26 octobre 1846	Le Verrier commence à déposer devant le Bureau de l'Académie les brouillons de son futur ouvrage rassemblant les calculs faits pour localiser la planète qui trouble Uranus : *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel*.

2.1.5 Description des calculs de Le Verrier par Biot et Tisserand

La démarche générale de Le Verrier a été décrite par Biot dans cinq articles successifs du *journal des scavant*s, regroupés dans [Biot, 1847a] et datés d'octobre 1846 à février 1847 ainsi que par Tisserand dans le chapitre XXIII du tome I de ses œuvres complètes [Tisserand, 1880].

Biot a besoin de 5 articles pour décrire la démarche de Le Verrier. Et il ne sait pas trop le type de commentaires qu'il doit faire ; voici ce qu'il écrit au début du troisième article [Biot, 1847c] :

> À mesure que j'avance dans la tâche que j'ai entreprise, la rigueur du sujet que je traite se fait sentir davantage ; et la route qui mène au but où je tends se hérisse d'obstacles, comme si la découverte que je veux montrer à tous les yeux se refusait à être présentée sous des formes qui la rendraient trop généralement accessible. Je me vois ainsi de plus en plus exposé au péril d'une alternative dont les deux issues seraient également fâcheuses pour moi et pour nos lecteurs. Car l'une me conduirait à leur exprimer cette découverte en termes trop techniques pour qu'ils pussent les interpréter sans préparation ; et l'autre me réduirait à en remplacer l'exposition par de vains éloges, qui auraient toute l'insignifiance d'une ovation vulgaire, sans leur rien apprendre de réel.

Biot essaie de mettre en évidence les choix effectués par Le Verrier et d'en souligner la justesse, mais, contrairement à Tisserand, il n'entre pas dans des considérations numériques ; il n'y a pas de formules. Par contre, il refait, dans un supplément à ses 5 articles [Biot, 1847a], le calcul de la formule donnant la longitude vraie au 1/1/1847 (voir fig. 5.9), estimant, avec raison, que Le Verrier n'avait pas assez détaillé sa démarche.

Tisserand [Tisserand, 1880] dégage surtout les aspects analytiques des différentes étapes de la démarche de Le Verrier, sans trop insister sur les aspects numériques. Il le fait en spécialiste de la mécanique céleste ; et voici comment il commente la conclusion de Le Verrier à l'issue de la première approche :

> La partie la plus difficile du problème est maintenant résolue ; il n'y a plus qu'à perfectionner la solution et à lui faire acquérir le maximum de précision.

Cette dernière étape « il n'y a plus qu'à perfectionner la solution » prend 3 cahiers de manuscrits et deux mois de travail épuisant ! (voir chapitre 6 et § 2.2.4).

2.1.6 *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)*

Une fois Neptune découvert, Le Verrier décrit l'ensemble de sa démarche dans un recueil intitulé *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* [Le Verrier, 1846b], publié fin 1846. En fait, le titre intérieur (p. 3) est *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)* ; Le Verrier avait proposé dans un premier temps d'appeler la nouvelle planète Neptune, puis il avait souhaité l'appeler par son propre nom ; afin de légitimer cette demande, il avait suggéré que l'on nommât Uranus par le nom de son découvreur, Herschel. Il présente cette résolution dans une note à la première page de son ouvrage (*Herschel*) :

> Dans mes publications ultérieures, je considérerai comme un strict devoir de faire disparaître complètement le nom Uranus, et de ne plus appeler la planète que du nom de HERSCHEL. Je regrette vivement que l'impression déjà avancée de cet écrit ne m'ait pas permis, dès à présent, de me conformer à une détermination que j'observerai religieusement dans la suite.

Après de longs débats, la communauté scientifique en décida autrement, en s'appuyant sur les traditions historiques pour les planètes (petites et grandes), qui héritent de noms tirés de la mythologie.
Cet ouvrage, *Herschel*, est très détaillé et est très précieux pour comprendre la démarche de Le Verrier, mais la lecture des manuscrits reste indispensable dans de nombreuses situations [17], car les manuscrits contiennent des informations qui ne sont pas toujours reprises dans *Herschel*.
Le brouillon de ce mémoire se trouve dans le cahier n° 1 des manuscrits (Ms 1063 (27)). Il y a très peu de modifications entre le brouillon et la version définitive : quelques indications typographiques, quelques changements de mise en page et quelques corrections de valeurs numériques dans certains tableaux. *Herschel* comporte cinq parties, découpées en sections numérotées de 1 à 150. Dans ses explications pour décrire la méthode qu'il a suivie, Le Verrier fait souvent référence aux différents articles de son livre : « Recourons à la première des formules du n° 11... » ; « d'après le n° 14... » ; « comme au n° 80... » ... De la même façon, je ferai aussi souvent référence aux repères numérotés de *Herschel* : (*Herschel*, n° x) signifiera : n° x de *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* ; de même pour (*Herschel*, p. x).

17. Des exemples de telles situations seront donnés explicitement par la suite.

2.2 Indications sur la méthode utilisée par Le Verrier pour Neptune

On donne quelques idées très générales, sans entrer ici dans tous les détails, sur la façon dont les calculs ont été menés ; toutes ces idées seront développées, détaillées et précisées dans les chapitres suivants.

2.2.1 Façons d'effectuer les calculs

Les calculs de Le Verrier pour la découverte de Neptune couvrent donc environ 1300 pages, et sont conservés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris sous la cote Ms 1063 (27).
Ces calculs pour arriver à une prédiction ont duré environ un an, ce qui est relativement court, compte tenu du nombre considérable d'opérations élémentaires à effectuer, opérations effectuées bien sûr à la main ou avec une table de logarithmes. Selon Biot [Biot, 1847c], il semblerait même que Le Verrier, croyant à un moment avoir abouti à une impasse, ait interrompu ses calculs pendant plusieurs mois (voir le § 5.2.4.4). On peut déjà observer ici que Le Verrier a systématiquement organisé ses calculs de façon à les simplifier dans la mesure du possible, en limitant au maximum le nombre de multiplications à effectuer. Un exemple sera donné au § 3.5.1.3 pour le calcul de la fonction perturbatrice ; un autre exemple sera donné au § 4.1.3 pour le calcul des perturbations de la longitude d'Uranus, où sa façon de faire permet de réduire le nombre de multiplications par un facteur d'environ 50.
L'outil de calcul principal de Le Verrier est la table de logarithmes : selon la précision cherchée, il utilise une table à 5 ou 7 décimales [18]. Par ailleurs, il doit faire beaucoup de calculs de tête. Par exemple [19], pour appliquer la méthode des moindres carrés, quand il faut multiplier une équation par un de ses coefficients, disons a, il lui arrive le plus souvent de remplacer a par une valeur approchée : 1.824, remplacé par 1.8 par exemple (ou même par 2) et Le Verrier effectue [20] les multiplications de tête. Cela explique les petits écarts dans les résultats numériques quand on les compare avec un outil de calcul moderne, qui applique la méthode des moindres carrés à la lettre et avec un grand nombre de chiffres significatifs. Mais Le Verrier le reconnaît lui-même (*Herschel*, p. 226) :

> je suivrais, pour cet objet [Résolution d'un système redondant et en particulier le dernier système [table 6.2] constitué de 33 équations à 7 inconnues], la méthode des moindres carrés, sinon dans toute sa rigueur, du moins avec une approximation suffisante pour en conserver l'esprit. L'emploi de cette méthode est, dans le cas actuel, tellement long et pénible, que je ne me suis décidé à en faire usage qu'après m'être convaincu qu'aucune démarche plus simple ne conduirait à un résultat satisfaisant ; mais, [...] j'ai simplifié les calculs en réduisant les multiplicateurs à être, en général, des nombres entiers [voir aussi encadré 13, p. 211].

Le Verrier est sans aucun doute un virtuose du calcul mental. Il s'en sert pour appliquer sa variante de la méthode des moindres carrés, mais aussi pour procéder à des interpolations : il fabrique de nombreuses tables numériques contenant systématiquement les différences tabulaires d'ordre 1 et souvent aussi celles d'ordre 2 ; à partir de ces données, il procède à des interpolations, le plus souvent de tête [21] pour obtenir des valeurs intermédiaires. C'est ainsi qu'il a construit

18. On a vu dans l'introduction (voir fig. 0.1) quelle table de logarithmes il devait vraisemblablement utiliser.
19. Autre exemple : pour calculer les perturbations exercées par Saturne sur Uranus, Le Verrier doit souvent multiplier deux sommes trigonométriques, disons S et S', et donc effectuer de nombreux produits de sinus ou de cosinus, qu'il faut ensuite linéariser ; aussi, il forme systématiquement le produit $2SS'$ afin d'utiliser le développement de $2\cos a \sin b$ et ainsi éviter les divisions par 2 lors de la linéarisation.
20. Quand les mêmes facteurs reviennent souvent, Le Verrier crée sur des bandes de papier des tables de multiplication adaptés à ces facteurs. Il y a des centaines de tables de la sorte dans ses manuscrits.
21. Lors de mes études, en 1965-1968, les calculs se faisaient encore avec une table de logarithmes appelée Bouvart et Ratinet [Bouvart, 1950] et je faisais les interpolations de tête.

les tables de longitudes héliocentriques puis géocentriques d'Uranus. Le Verrier est capable de conserver jusqu'à 5 chiffres significatifs. En comparaison, Adams n'obtient pas une aussi grande précision dans ses calculs, essentiellement numériques aussi ; voir chapitre 11 pour une comparaison plus détaillée des calculs effectués par ces deux savants.

2.2.2 Précautions et vérifications

Avant d'effectuer un calcul effectif, Le Verrier prend le plus souvent soin de se fixer la précision souhaitée dans le résultat final et à partir de là, de déterminer le nombre de termes à conserver dans ses développements et le nombre de chiffres significatifs à utiliser. C'est particulièrement le cas dans le cahier n° 2 consacré à la détermination de la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus. C'est le cas aussi pour la détermination des perturbations dépendant du carré des masses : Le Verrier prend un grand soin à séparer les termes utiles des termes négligeables. Biot [Biot, 1847b] formulera un jugement admiratif au sujet de ce calcul (voir ce jugement au § 3.9).
On a vu que Le Verrier faisait chaque calcul élémentaire au moins deux fois afin d'en assurer l'exactitude ; il appose alors son paraphe (∞) à côté du résultat final ; voir fig. 2.6 pour l'évolution du paraphe. Mais Le Verrier procède aussi à des vérifications de méthode : il essaie toutes les fois que cela est possible de développer deux approches indépendantes pour un même calcul, afin d'en vérifier l'exactitude [22]. Voici ce qu'il écrit p. 6 de *Herschel* :

> On trouvera donc naturel que j'accumule les vérifications ; on me permettra volontiers de m'arrêter souvent à établir le même fait de plusieurs manières différentes.

En procédant ainsi, il peut par exemple comparer les résultats obtenus par des calculs théoriques avec les mêmes résultats obtenus par des méthodes numériques, et ainsi examiner leur cohérence. C'est la démarche qui sera utilisée pour obtenir la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus : il obtient une première expression sous forme d'un développement en série de Fourier à partir d'un échantillonnage numérique de 16×16 valeurs de R et il compare ce développement avec celui obtenu en appliquant le formulaire théorique de la *Mécanique céleste* de Laplace (voir chapitre 3).
Pour montrer (*Herschel*, p. 150) « qu'il y a incompatibilité formelle entre les observations d'Uranus, et l'hypothèse que cette planète ne serait soumise qu'aux actions du Soleil et des autres planètes, agissant conformément aux principes de la gravitation universelle », Le Verrier utilise trois méthodes indépendantes afin d'aboutir dans chaque cas à une contradiction (voir chapitre 4).

2.2.3 Principe de la démarche de Le Verrier et épilogue

Pour déterminer les éléments orbitaux de la planète perturbatrice, Le Verrier établit des équations de condition reliant les perturbations théoriques, faisant intervenir, d'une part les paramètres de la planète perturbatrice et les corrections à apporter aux éléments d'Uranus et d'autre part, les écarts entre les observations et les positions calculées à partir des éphémérides. Il résout [23] ensuite ces équations de condition par la méthode des moindres carrés (voir encadré 13, p. 211), résolution qui lui fournit les éléments elliptiques de la planète perturbatrice au 1er janvier 1800. À partir de ces éléments, il prédit la position au 1er janvier 1847.

22. La vérification de ses calculs est une obsession pour Le Verrier. Par exemple, quand il résout un système de plusieurs équations par éliminations successives des diverses inconnues, il reporte les valeurs finales dans les équations de départ afin de vérifier qu'elles sont bien satisfaites avec les valeurs qu'il a trouvées. Cette vérification peut s'étendre sur une page complète.

23. Voir le détail des calculs de Le Verrier aux chapitres 5 et 6.

La suite est bien connue : devant le peu d'enthousiasme et le manque de moyens de ses collègues français, Le Verrier lance un appel à des astronomes étrangers et Galle [24], à l'Observatoire de Berlin, avec l'appui de d'Arrest [25], localise rapidement, à partir des indications de Le Verrier, la planète inconnue le 23 septembre 1846.
Le retentissement de cette découverte à travers l'Europe est énorme et Le Verrier sera comblé d'honneurs [Lequeux, 2010].

2.2.4 Épuisement de Le Verrier à la fin des calculs

Les manuscrits de Le Verrier contiennent des milliers de calculs effectués en un an environ. Le Verrier a dû souvent être lassé par ces calculs répétitifs, en aveugle, pas toujours intéressants : on rappelle que la justification des irrégularités du mouvement d'Uranus par l'existence et l'action d'une planète inconnue était simplement une **hypothèse de travail**, parmi d'autres (voir le début du chapitre 5) ; tous ses efforts auraient pu aboutir à une impasse, comme ce fut le cas plus tard pour Vulcain (§ 12.1.5.2). Mais il a dû aussi être pris d'une fièvre pour terminer le plus tôt possible. Fièvre bien réelle en fait, car il finira ses calculs mi-août 46 tellement épuisé, ainsi qu'il le dit dans une lettre à Émile Gautier datée du 10 septembre 1846 (donc juste après la présentation de son troisième mémoire), qu'il avait été incapable de présenter son dernier mémoire à l'Académie avant le 31 août.

> On paraît décidé à m'emmener pendant quelques jours à Fontainebleau ; si cela s'améliore, je vous l'écrirai... Voilà comment, mon cher ami, vous n'entendez pas parler de moi malgré votre délicieuse [26] lettre du 27 juillet. Je me suis acharné à rectifier l'orbite de la planète qui trouble Uranus, et pendant les mois de juin, juillet, et la première dixaine [sic] d'août, j'ai travaillé tout le jour par une chaleur affreuse [...] Je l'ai payé cher ; j'ai été pris de maux de tête, de faiblesse ; bref, obligé de rester couché trois semaines. Et, quoique mon travail fût terminé, il m'a fallu attendre jusqu'au commencement de septembre pour aller à l'Académie et faire ma lecture.

Cela signifie que Le Verrier a bouclé l'approximation finale pour Uranus entre le 1er juin et le 10 août 1846 : c'est tout simplement sidérant. Signalons aussi que la présentation à l'Académie eut lieu le 31 août 1846 et non début septembre.

2.2.5 Vérification des calculs de Le Verrier

Quelle que soit l'habileté calculatoire de Le Verrier et le soin méticuleux qu'il apporte à ses calculs, il est naturel de se demander si ses calculs ne contiennent pas quelques erreurs, théoriques ou numériques.
Pour tester d'éventuelles erreurs de calcul, nous allons reprendre à l'identique la démarche de Le Verrier et examiner s'il existe des écarts significatifs entre nos résultats et ceux obtenus par Le Verrier, ce qui sera fait dans les 4 chapitres suivants (chapitres 3, 4, 5 et 6), mais à l'aide, bien sûr, d'outils de calcul modernes : TRIP et INPOP essentiellement (voir plus de détails au § 0.4).

24. Johann Gottfried Galle (1812−1910). Astronome allemand, auteur d'une thèse sur les réductions des observations de Rømer. Le 23 septembre 1846, avec l'aide de Heinrich d'Arrest, il localise la planète Le Verrier. Il deviendra plus tard directeur de l'Observatoire de Breslau.

25. D'Arrest (1822−1875), astronome allemand. Il est étudiant à l'époque de la découverte de Neptune et il a été oublié de toutes les narrations de la découverte de Neptune jusqu'à ce que Dreyer [Dreyer, 1882] et Encke rétablissent le rôle décisif joué par d'Arrest dans cette découverte. Il sera directeur de l'Observatoire de Copenhague de 1861 à 1875.

26. Voilà un mot qu'a priori on n'attendrait pas sous la plume de Le Verrier.

2.3 Collaboration avec Émile Gautier pour les perturbations d'Uranus. Indications sur la façon de travailler de Le Verrier

On va essayer ici de cerner dans quelle ambiance Le Verrier a effectué ses calculs pour Neptune. Le Verrier parle peu de lui-même. Heureusement, un de ses élèves sera à ses côtés pendant la première phase de la recherche de Neptune et cet élève, Émile Gautier, racontera à ses parents leur travail commun, ainsi que plusieurs anecdotes concernant Le Verrier.

2.3.1 Un collaborateur peu connu de Le Verrier : Émile Gautier

Il est bien connu que Le Verrier a eu à sa disposition [27] de nombreux [28] calculateurs : Buisson à partir de 1847, et puis beaucoup plus [29], une fois nommé directeur de l'Observatoire de Paris [30]. Par contre, il semblait acquis que Le Verrier avait effectué ses calculs pour Neptune en solitaire ; or ce n'est pas tout à fait le cas. Émile Gautier (1822−1891), futur directeur de l'Observatoire de Genève de 1882 à 1889, était venu en automne 1844 de Suisse pour suivre l'enseignement donné par Le Verrier au Collège de France ; ce dernier avait remarqué son assiduité et ils étaient devenus très proches [31] l'un de l'autre au milieu de l'année 1845. À cette époque, Le Verrier travaillait sur la comète de 1770 (la comète Lexell) et sur l'orbite de Mercure ; Gautier l'aida dans ces calculs, « tout en apprenant le métier ». Cette situation est indiquée par Bigourdan dans *l'annuaire du Bureau des Longitudes de 1932 p. A14* : il y mentionne cette collaboration (voir figure 2.7) et renvoie à des lettres de Le Verrier à Gautier et de Gautier à sa famille [32] dans lesquelles celui-ci explique le travail qu'il fait auprès de Le Verrier. Des copies de certaines de ces lettres se trouvent à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris sous la cote Ms 1112 et des extraits sont donnés par Bigourdan dans *l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1932* p. A21−A25. Par contre, Le Verrier ne semble pas avoir conservé les lettres qu'il a reçues de Gautier.

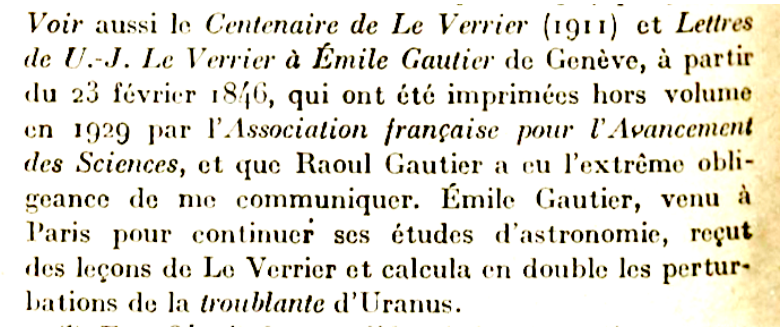

Voir aussi le *Centenaire de Le Verrier* (1911) et *Lettres de U.-J. Le Verrier à Émile Gautier* de Genève, à partir du 23 février 1846, qui ont été imprimées hors volume en 1929 par l'*Association française pour l'Avancement des Sciences*, et que Raoul Gautier a eu l'extrême obligeance de me communiquer. Émile Gautier, venu à Paris pour continuer ses études d'astronomie, reçut des leçons de Le Verrier et calcula en double les perturbations de la *troublante* d'Uranus.

FIGURE 2.7 – Indication de Bigourdan au sujet de la relation épistolaire entre Le Verrier et Gautier et du travail en double de ceux-ci sur les perturbations d'Uranus

27. Selon une communication personnelle de François Magne (datée du 15/12/2017), arrière-arrière petit-fils de Lucile Le Verrier : « Une collaboratrice qui y passera (dit-on) des nuits à ajouter les logarithmes : Marie Lucile Choquet, sa femme. Il y avait en effet, en plus des cahiers répertoriés à l'Observatoire, des cahiers annexes tenus par Mme Le Verrier. Hélas, ces manuscrits n'ont pas été conservés à ma connaissance, mais j'ai des souvenirs fugitifs d'enfance d'avoir vu des cahiers de colonnes de chiffres manuscrits chez mon Grand Père ».

28. Les mauvais esprits disent 'une armée de calculateurs'.

29. En particulier Camille Flammarion, de 1858 à 1862, qui sera renvoyé après la publication de *La pluralité des mondes habités* (voir plus de détails au § 14.2.1) et surtout Aimable Gaillot à partir de 1861, qui regroupera et classera les manuscrits de Le Verrier à la mort de celui-ci.

30. Ce qui lui a permis de disposer de plus de temps pour élaborer la théorie complète des planètes.

31. Voir aussi le commentaire de C. Candolle au § 14.1.2.1.

32. Publiées par l'Afas en 1929, mais dans un recueil difficile à trouver.

Des extraits des lettres de Le Verrier à Gautier et de Gautier à ses parents ont été publiés par Rudolf Wolf (1816−1893), astronome et historien suisse, dans [Wolf, 1892], ainsi que par Georges Tiercy (1886−1955), directeur de l'Observatoire de Genève de 1928 à 1955 [Tiercy, 1947]. J'ai extrait de ces deux documents quelques informations, en sélectionnant surtout celles qui apportent un éclairage nouveau sur l'homme Le Verrier ; il est maintenant possible de confronter ces extraits avec les lettres originales, qui ont été localisées par M. Michel Grenon, de l'Observatoire de Genève, dans le dossier déposé par la Fondation de la famille Gautier aux archives d'État de Genève [Gautier, 1845-1846]. La fondation Gautier conserve aussi des documents concernant Raoul Gautier, fils d'Émile, et directeur de l'Observatoire de Genève de 1889 à 1931.

Le Verrier, dans ses manuscrits, explique un peu ses méthodes, justifie ses choix astronomiques, mais il est difficile de connaître le temps passé pour chaque calcul, car ses manuscrits ne sont pas datés. On connaît bien sûr les dates clefs pour les recherches sur les irrégularités des mouvements d'Uranus ; début : courant de l'été 1845 ; premier mémoire : 10 novembre 1845 ; première approximation : 1er juin 1846 ; deuxième approximation : 31 août 1846, mais qu'en est-il entre ces dates ?

Le Verrier ne dit rien sur lui-même dans ses manuscrits : comment, où travaille-t-il ? Quelle est la durée de sa journée de calcul ? Prend-il du repos ? Est-il en bonne santé ? Quelle est son humeur ? Les lettres de Gautier écrites à sa famille à partir de 1845 sont extrêmement précieuses, car elles donnent quelques indications sur ces différents points et elles donnent aussi une indication sur l'ambiance dans laquelle les calculs ont été faits.

On a un premier élément de réponse à certaines de ces questions dans la lettre de Le Verrier à Gautier, datée du 23 février 1846, dans laquelle il reprend un propos que Gautier a dû lui adresser dans une lettre préalable (les guillemets internes encadrent la citation du propos de Gautier) : « j'ai eu « le bonheur, le très grand avantage de passer, pendant 6 mois de suite, de 6 heures à 12 heures par jour avec vous dans le sanctum sanctorum » ». Ainsi, la journée de travail pouvait s'élever à 12 heures. Le 'sanctum sanctorum' était le cabinet de travail de Le Verrier, qui n'était pas totalement sanctuarisé, car à une époque, il hébergeait des poules et plus tard un ouistiti (voir la déclaration de Raoul Gautier p. 62).

2.3.2 Lettres de Gautier à ses parents pendant son premier séjour à Paris

Dans sa lettre du 25 décembre 1844 à Charles Le Fort (ami d'enfance), Gautier donne des indications sur la façon de travailler.

> Décidément on travaille ici autrement qu'à Genève, et j'espère en tirer quelque profit. J'ai deux cours à la Sorbonne, (un de Lefébure [33] de Calcul différentiel et intégral, et un de Sturm [34] de mécanique rationnelle), et deux au Collège de France, (l'un d'Astronomie de M. J. Binet [35], l'autre de Mécanique céleste de M. Leverrier, remplaçant de M. Biot).

Dans cette lettre, il juge ses professeurs :

> Lefébure ne vaut pas grand'chose, est très diffus, et va d'un train de poste. Sturm est tout le contraire, parfaitement clair et lucide ; son Cours est excellent, quoique sortant d'une bouche peu éloquente et vigoureusement originale. M. Binet a la réputation d'être un des premiers analystes de France, mais jusqu'à présent il se répète à un point fabuleux ; c'est une vraie pitié que ses leçons, et s'il ne s'améliore pas, je renoncerai. Leverrier est le plus difficile à

33. Louis Lefébure (1787−1869), officier d'artillerie, puis professeur de mathématiques et enfin titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral au Collège de France.

34. Charles-François Sturm (1803−1855), mathématicien genevois connu surtout pour sa théorie permettant de résoudre certaines équations différentielles, théorie connue maintenant sous le nom de Sturm-Liouville.

35. Jacques Philippe Marie Binet (1786−1856), mathématicien français connu, entre autres, pour ses travaux en cinématique.

> suivre, comme s'adressant à un auditoire censé plus instruit, mais ses leçons sont vraiment profitables, et je me donne la peine de les rédiger ensuite.

Gautier ajoute : « Mes lettres de recommandation m'ont procuré un très bon accueil à l'Observatoire [où il fut admis à travailler] ». Le 5 juin 1845, il écrit à ses parents :

> M. Leverrier m'a très bien reçu. Nous nous sommes mis à l'œuvre, et il m'a laissé travailler dans son cabinet pendant qu'il était sorti. J'avais fini quand il est rentré et il a voulu que je restasse à dîner avec lui pour me présenter à sa famille, qui se compose de sa femme, de sa sœur, sa belle-mère et son petit garçon. Il m'a recommandé de ne *rien* dire de ce que je faisais avec lui, ainsi quand je vous en parlerai, ce sera pour vous et mon oncle Alfred *seuls*.

6 juin 1845 (Gautier à ses parents) :

> Je suis revenu travailler jusqu'à près de minuit. C'est mon pain quotidien à présent, car mon gaillard de maître n'y va pas de main morte. [...] pour le moment je suis occupé à faire toutes les réductions des observations faites à la lunette méridienne.

16 juin 1845 (Gautier à ses parents) :

> J'ai bien travaillé ces derniers jours avec M. Leverrier à calculer les longitudes et anomalies moyennes du Soleil, pour la comparaison des observations de Mercure [36]. Je suis toujours plus content de lui, et je souhaite que cela dure tout le temps comme cela ! Je me réjouis même qu'il n'y ait plus de leçons au Collège de France et à la Sorbonne, pour lui être complètement dévoué. Il est d'une complaisance et d'une activité étonnante.

Le fait qu'il n'y ait plus de cours au 16 juin est une information plutôt surprenante. Dans le dossier Ms 1063 (31), Le Verrier donne comme date pour sa dernière leçon [de quelle année ?] le 7 juillet (§ 1.4.1).

21 juin 1845 (Gautier à ses parents) :

> Le Bureau des Longitudes a décidé tout dernièrement l'impression des Tables de Mercure de mon Patron [c'est ainsi que Gautier désignait Le Verrier], et comme il veut tout revoir avant de les livrer, c'est un nouvel élément de presse qui nous incombe, et qui fait qu'il me laisse à peine souffler. Mais j'en suis content, quoi que ce soit quelquefois terriblement fatigant de chiffrer toute la sainte journée.

À cette occasion, Le Verrier propose une nouvelle façon de former les tables d'une planète, en s'appuyant sur l'année anomalistique de la planète et non sur le temps moyen : voir plus de détails au § 4.4.1.7 et dans [Bureau des Longitudes, 1845].

22 juin 1845 (Gautier à ses parents) :

> Nous continuons à vivre en très bonne intelligence ensemble [...] Il [Le Verrier] se trouve très pressé dans ce moment par le Bureau des Longitudes pour l'impression de ses Tables de Mercure, en sorte que les calculs qu'il doit me faire faire sont un peu renvoyés et remplacés par une autre besogne. Dans tous les cas, soyez tranquilles ; il ne me laissera pas oisif.

10 juillet 1845 (Gautier à ses parents) :

36. Effectivement dans le manuscrit Ms 1063 (28) consacré à Mercure, Le Verrier prépare pour Gautier les calculs de perturbations, qui se font en colonne : il écrit la première ligne (qui comporte l'ascension droite du Soleil) et Gautier remplit les lignes suivantes, qui comportent les perturbations exercées par les planètes les plus proches de Mercure. Un peu plus loin, Gautier opère tout seul.

> Mon patron est toujours très bon pour moi, et nous sommes ensemble sur un pied de plaisanterie très agréable. *Il me dit que je devrais rester quatre ans avec lui pour refaire toute la théorie des quatre premières planètes* ; je lui ai répondu que je ne pouvais pas toujours vivre seul ici. Il m'a dit : je vous comprends parfaitement ; alors il faut rester et vous marier. Je lui ai dit : nous verrons.... Ma besogne est de plus en plus pénible ; tant que ces malheureuses tables de Mercure ne seront pas finies, ce sera d'un ennui mortel. Cela durera encore 8 à 10 jours, après quoi il me donnera huit jours pour revoir la théorie, et nous reprendrons les Comètes et leurs perturbations.

On peut noter que Le Verrier a, dès cette époque, le dessein de refaire les théories des planètes telluriques. On comprend aussi l'intérêt de confier à des calculateurs dédiés ces tâches ingrates de formation des tables ; Airy qualifiera ses calculateurs, souvent très jeunes et peu expérimentés, de *drudge* [Sheehan, 2021].
Dans cette même lettre, Gautier écrit :

> M. Leverrier m'a annoncé de nouveaux projets de calculs qui doivent rester un profond mystère et qui seront très longs. Cela me fait bien un peu peur... *Quant à savoir lequel de nous deux est l'obligé de l'autre, nous le sommes tous deux ! J'aurais beaucoup plus difficilement trouvé son équivalent que lui le mien ; mais enfin je lui fais aussi de la besogne !*

Ces projets concernent Uranus, et Le Verrier débute son premier mémoire sur Uranus (celui du 10 novembre 1845) [Le Verrier, 1845a] par : « Dans le courant de l'été dernier, M. Arago voulut bien me représenter que l'importance de cette question [les mouvements d'Uranus] imposait à chaque astronome le devoir de concourir [...] à en éclaircir quelque point ». Le courant de l'été serait donc début juillet ! Gautier rajoute dans cette même lettre :

> Nous sommes toujours très bien ensemble, mais je vais moins chez lui, parce qu'il me donne du nouveau à étudier pour le calcul des perturbations. Lui-même va avoir à méditer seul sur sa nouvelle entreprise ! Il y met une ardeur inextinguible, et il faut bien que je suive ! C'est de la fin de l'entreprise et de son succès que dépendra mon retour [en Suisse].

Lettre du 31 août 1845 (Gautier à ses parents) :

> Mr Arago a dévoilé aujourd'hui notre secret à l'Académie des sciences. C'est d'Uranus que nous nous occupons avec mon Patron. Le voilà maintenant engagé à terminer, devant l'Académie et aussi devant Mr Airy, qui assistait à la séance. Or il faut vous dire que cette planète est celle dont les Tables offrent le plus d'imperfections ; tous ceux qui ont voulu les corriger se sont fourvoyés, et M. Airy lui-même avait fini par croire que c'était un échec contre la théorie de la gravitation universelle[37] [...] Là-dessus mon Patron reprend tout le calcul des perturbations, que Bouvard [Eugène] n'a point retouché, et c'est ce qui nous met dans un émoi épouvantable. Il faudra tenir compte du carré de la fonction perturbatrice, et c'est un ouvrage énorme.

En fait, ils doivent déterminer les perturbations proportionnelles à l'ordre 2 des masses ; on dit proportionnelles au carré des masses ; voir un éclairage sur la complexité de ce calcul au § 3.9.
Émile Gautier donne un peu l'ambiance qui règne pendant ces calculs en parallèle (lettre du 18 septembre 1845 à ses parents) :

> J'ai tenu tête aujourd'hui à mon Patron dans une longue intégration, et j'ai eu la gloire d'avoir fini en même temps et de n'avoir fait que deux fautes, tandis que lui en avait fait trois ! Il me dit que nous aurons fini à la fin de l'année.

Dans sa lettre du 24 Septembre 1845 (à ses parents), il écrit :

37. Il faut nuancer, voir la lettre d'Airy du 21 décembre 1846 adressée à Challis dans [Sheehan, 2021] p. 147.

> J'ai dîné hier chez mon Patron [...] Décidément sa petite femme est charmante, & je conçois qu'il travaille d'aussi bon cœur, qu'il a dans les intervalles quelqu'un d'aussi gentil pour le châcholer [38]. Il m'a semé horriblement depuis dimanche et s'est lancé à corps perdu dans le calcul algébrique des perturbations par Saturne. Il dit que nous en aurons pour huit jours : c'est une délicieuse nouvelle ; mais je ne sais pas trop quand je pourrai le rattraper [39].

Le 25 septembre 1845 (Gautier à ses parents) :

> Aujourd'hui, j'ai fait des prodiges d'habileté et d'exactitude. J'ai même semé Mr Le Verrier assez proprement cet après-midi ; c'est la seule chose que je puisse faire qui le vexe véritablement, et aujourd'hui cela m'a parfaitement amusé ! Je n'ai fait qu'un éclat de rire, tout seul en revenant chez moi.

Le 9 octobre 1845 (Gautier à ses parents) :

> Nous avons fini les perturbations de Jupiter et Saturne sur notre Uranus. Nous allons passer au carré de la force perturbatrice, puis nous passerons à la révision des Tables de Bouvard où j'espère que nous trouverons quelque bon solécisme [40] qui remettrait la théorie d'accord avec les observations.

Le 20 octobre 1845 (Gautier à ses parents) :

> Jamais nous n'avons été si pressés, et le moment devient d'autant plus intéressant que nous découvrons du nouveau dans ce que nous faisons à présent. Il paraît décidément qu'il y a des termes assez considérables omis dans le carré de la force perturbatrice, et M. Leverrier s'en étant aperçu, nous avons tout recommencé [41]. C'est très compliqué et ennuyeux, mais l'espérance de faire du nouveau, qui mette notre affaire d'accord [42] avec les observations, nous soutient. M. Leverrier est descendu de garde ce matin, ce qui ne l'a pas empêché de piocher toute la journée comme un possédé. Il y met un tel acharnement que cela le rend presque furibond et parfois insupportable [43].

Dans cette lettre, il ajoute un élément inédit sur le fonctionnement de la famille Le Verrier :

> Son moutard [44] [Léon] est de plus en plus sot & donne lieu à des scènes très fréquentes et de toute violence. Le petit polisson fait toujours des leçons avec sa mère qui a, je crois, la main assez leste. Mais l'impression produite est à peu près nulle. Elle provoque seulement des brailleries que nous [Le Verrier et lui, dans le cabinet de travail] entendons de l'autre côté de la maison, pendant lesquelles le gueux s'écoute crier ; or c'est ce qu'il y a de pis.

38. On apprend un peu du parler suisse et on constate que Le Verrier, en dehors de ses calculs, est très humain.
39. Car il doit refaire les calculs effectués par Le Verrier, afin de les vérifier.
40. Faute contre la syntaxe. Le Verrier espère détecter une erreur théorique grave qui expliquerait les erreurs de la théorie de Bouvard. À cette époque, Le Verrier devait être convaincu que la marche d'Uranus ne présenterait plus de secrets, une fois les erreurs de Bouvard corrigées.
41. Confirmation que l'avancée des calculs n'a pas pu être linéaire : il y a eu des ratés et des retours en arrière.
42. Confirmation de l'espoir d'une solution simple aux irrégularités d'Uranus, après correction des erreurs de Bouvard.
43. Selon son fils, Raoul, Émile Gautier racontait que lorsque Leverrier n'en pouvait plus, il s'asseyait brusquement par terre avec son violon (il était bon musicien) et jouait pendant une demi-heure ; après quoi, il était détendu et en état de reprendre ses calculs ([Wolf, 1892] p. 331). Advielle [Advielle, 1893] indique que Le Verrier, encore étudiant, fit connaissance avec son voisin de palier, étudiant aussi (en droit), en jouant du violon à des heures indues. Cet étudiant, violoniste aussi, était le frère du peintre Charles-Aimé Daverdoing, qui fit le célèbre portrait de Le Verrier en 1842. Le peintre voulait placer des instruments d'astronomie aux pieds de Le Verrier, ce que refusa Le Verrier, arguant qu'il n'avait jamais encore utilisé de tels instruments, ce détail confirmant la grande honnêteté intellectuelle de Le Verrier. Advielle, bibliothécaire de métier, fut chargé de vendre la bibliothèque de Le Verrier – peu fournie, selon Advielle – à la mort de celui-ci.
44. Léon (1838−1876), avait été reçu aux Mines, mais avait abandonné sa carrière d'ingénieur pour diriger une entreprise sucrière, qui fit faillite. Il s'est probablement suicidé ([Lucile, 1994] p. 268). Notons que dans une lettre à Gautier (du 5 août 1850), Le Verrier demande à Gautier s'il peut trouver un logement (à Genève, pour deux mois) pour lui, sa femme, ses deux moutards et la bonne ; le mot 'moutard' ne devait donc pas être très péjoratif.

Le 27 octobre 1845 (Gautier à ses parents) :

> Mon Patron a bon espoir de devenir Académicien. M. Arago le porte : il y a beaucoup d'autres amis, et évidemment c'est le plus fort sans comparaison des candidats qui se présentent. Je ne doute pas qu'il ne soit nommé, mais c'est une immense affaire et cela le fait prodigieusement courir [45]. Je ne sais pas si je vous ai dit que nous trouvions des termes nouveaux dans notre carré de la force perturbatrice, en sorte qu'avec cela il n'est pas impossible de faire marcher notre planète dans les règles.

Toujours l'espoir de remettre les choses en ordre après correction des tables de Bouvard. Dans la même lettre, il ajoute :

> C'est cette première partie de notre besogne [les perturbations d'Uranus] que M. Leverrier désire lire à l'Académie un de ces jours, et qui nous force à travailler à outrance pour en finir. Nous ne saurons quelque chose de certain que quand le mouvement elliptique sera revu...

Gautier confirme son rôle de collaborateur occulte ; 6 novembre 1845 (à ses parents) :

> Nous avons fini les perturbations d'Uranus avec M. Le Verrier. M Arago rendra compte de ce travail à l'Académie des sciences, et il en paraîtra un extrait dans les comptes rendus. Je vous les enverrai si vous voulez, mais je vous préviens qu'il ne sera pas question de moi. J'en suis fâché dans un sens, mais fort aise dans un autre [46].

Ce travail commun sur Uranus s'achèvera avec la présentation par Arago du premier mémoire sur Uranus à l'Académie des sciences le 10 novembre 1845 [Le Verrier, 1845a]. Gautier retourne alors chez lui en Suisse, début décembre 1846, pour préparer sa thèse sur les perturbations des comètes, dans laquelle il fait souvent référence à Le Verrier [Gautier, 1847], mais il reste en relation avec Le Verrier [47].
La collaboration a été certes profitable, mais Gautier a trouvé parfois son travail trop répétitif :

> Quand il est passé au calcul des Tables, j'ai trouvé que cela me faisait perdre beaucoup de temps [...] le dit Patron était trop occupé de ses affaires à lui, pour s'occuper de mon avancement théorique.

Le travail en double pour Uranus concerne donc seulement la première partie des recherches de Le Verrier : calcul de la fonction perturbatrice et calcul des perturbations exercées sur Uranus par Jupiter et Saturne.

45. Ce sont les visites protocolaires aux académiciens. Dans sa lettre du 23 février 1846 à Gautier, il écrit : « Quelque chose comme quatre cents avant [l'élection du 19 janvier 1846] et deux cents après. Impossible d'en rien rabattre ». Ces nombres paraissent invraisemblables. On rappelle que dans sa lettre du 29 juin 1846, Le Verrier écrit : « que peut-on espérer d'un homme qui a 16 leçons par semaine à faire ? ». Le Verrier est d'une précision absolue dans ses calculs astronomiques, mais semble plus fantasque et excessif quand il s'agit de décomptes dans la vie courante : faut-il diviser par 10, comme le suggère James Lequeux dans une communication personnelle du 25/1/24 ? Et entre temps, il essaie de localiser la planète perturbatrice ! Et il donne ses cours au Collège de France. Il est difficile d'imaginer de pouvoir combiner toutes ces activités en même temps.

46. Georges Tiercy [Tiercy, 1947] commente : « s'il [Le Verrier] n'avait pas eu le concours de ce jeune et brillant astronome, il aurait été condamné à faire lui-même toutes les vérifications [...]. Qui sait, si dans ces conditions, il aurait encore devancé Adams ? ».

47. Le Verrier donne de temps en temps des nouvelles de l'Observatoire et il est toujours aussi aimable avec ses collègues : par exemple le 23 février 1846 (dans une lettre à Gautier) : « Mr. Eugène Bouvard a quitté l'Observatoire et s'est mis dans le cadastre des chemins de fer. Pauvre cadastre ».

FIGURE 2.8 – Portraits d'Émile Gautier (à gauche, © Bibliothèque de Genève) et de Urbain Le Verrier (à droite, lithographie de Maurin). Il semblerait que Le Verrier n'ait jamais accepté d'être pris en photo [Advielle, 1893].

2.3.3 Comment fonctionnait le tandem Le Verrier - Gautier ?

Comme on l'a vu dans les lettres précédentes, Le Verrier n'est pas aussi épouvantable qu'on le prétend quand il est en bonne compagnie : « Mon Patron est toujours très bon avec moi, et nous sommes ensemble sur un pied de plaisanterie très agréable » (lettre du 10 juillet 1845).
On peut aussi imaginer que le fait que les deux hommes aient des idées politiques voisines (très conservatrices, parti de l'ordre) les ait rapprochés.
Dans sa lettre à Gautier du 2 juin 1848, Le Verrier écrit : « Dans votre ferveur de l'ordre, et désespérant de trouver sur notre planète quelque chose qui y ressemble ± (style E. G.), vous êtes vous décidé à ne plus entendre parler que d'astres à l'allure grave et méthodique ? ».
Et voici une réponse (22 juin 1849) du député Le Verrier (élu le 13 mai 1849) à un questionnement de Gautier :

> Vous me recommandez de ne pas laisser prendre le dessus aux rouges. Je travaille de mon mieux contre eux dans ma petite sphère parlementaire. J'ai voté
> contre toutes les enquêtes
> contre l'amnistie
> contre la demande de mise en accusation des ministres
> mais pour l'autorisation de poursuites contre nos aimables montagnards...
> pour l'état de siège
> contre les clubs...
> Si vous n'êtes pas content, je renonce à vous satisfaire.
> On prétend qu'ils [les rouges] ont encore des projets. Soit. Nous nous défendrons, même par les armes.

Mais il y a surtout une très grande ardeur commune au travail et une très bonne entente sur le plan scientifique. Comment fonctionnait leur collaboration ? Gautier faisait une partie des calculs, que Le Verrier vérifiait. Par moments, ils semblaient écrire les colonnes de chiffres à tour de rôle (voir figure 2.9) ou bien des lignes en alternance (voir figure 2.10). À d'autres moments, Gautier vérifiait les calculs faits par Le Verrier (calcul algébrique des perturbations d'Uranus par Saturne par exemple, voir lettre du 24 septembre 1845, p. 53).

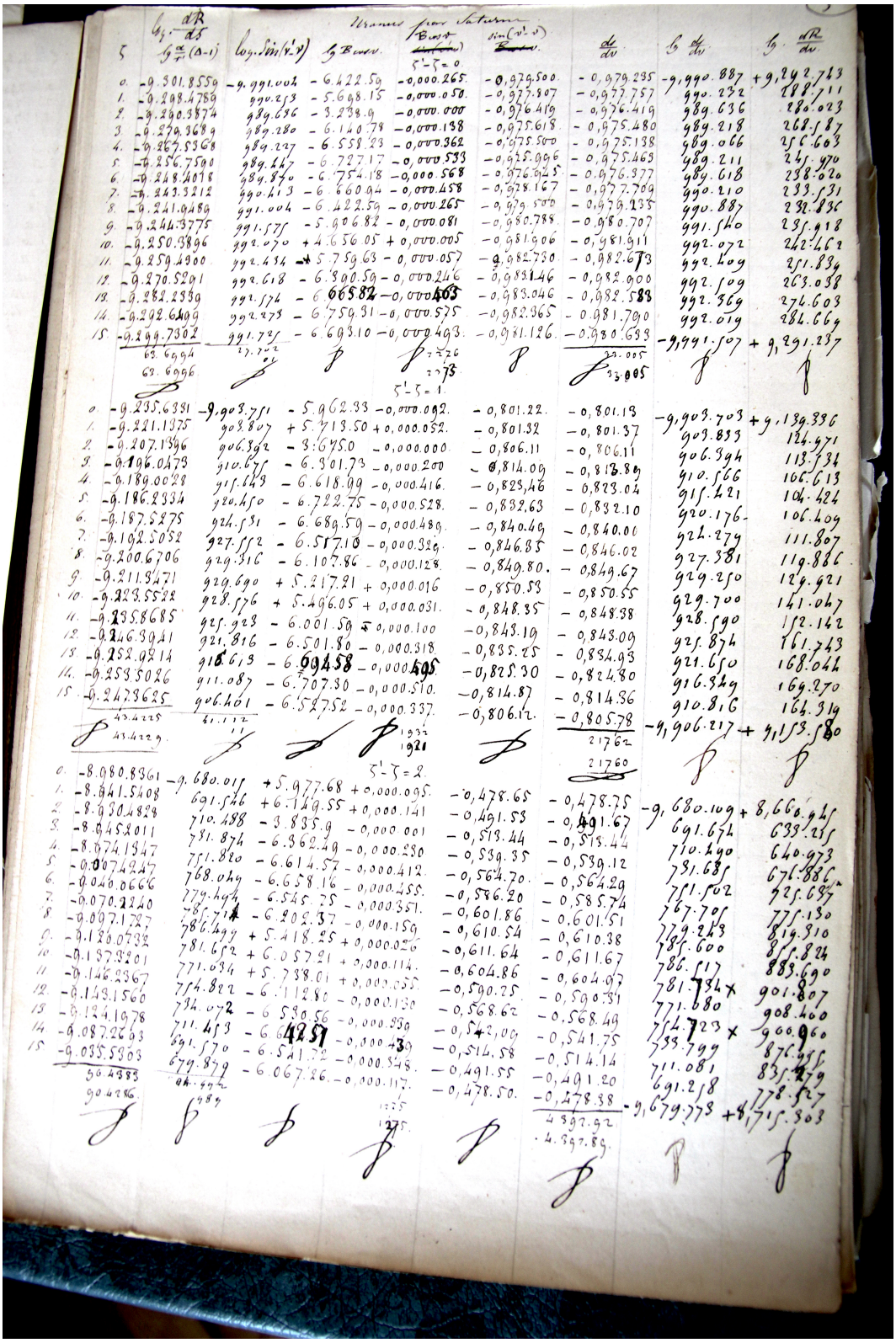


FIGURE 2.9 – On voit ici l'alternance de colonnes écrites successivement par l'un puis par l'autre, ainsi que les corrections de Le Verrier, suivies de son paraphe. Les colonnes écrites par Gautier (colonnes 3, 5, 6) sont en encre plus pâle et les chiffres sont assez différents de ceux de Le Verrier, en particulier le 4, le 5 et le 7 (extrait du cahier n° 3 du dossier Ms 1063 (27).)

Avec un peu d'attention, on voit les différences dans leurs écritures : l'encre de Gautier est plus pâle que celle de Le Verrier, il écrit mieux et certains chiffres, comme le 7, le 5 et le 4 sont sensiblement différents : le 7 de Gautier a une petite barre médiane, alors que le 7 de Le Verrier n'en a pas ; le 5 de Gautier est classique, celui de Le Verrier ressemble plus à un S, le 4 de Gautier a une barre verticale plus prononcée...

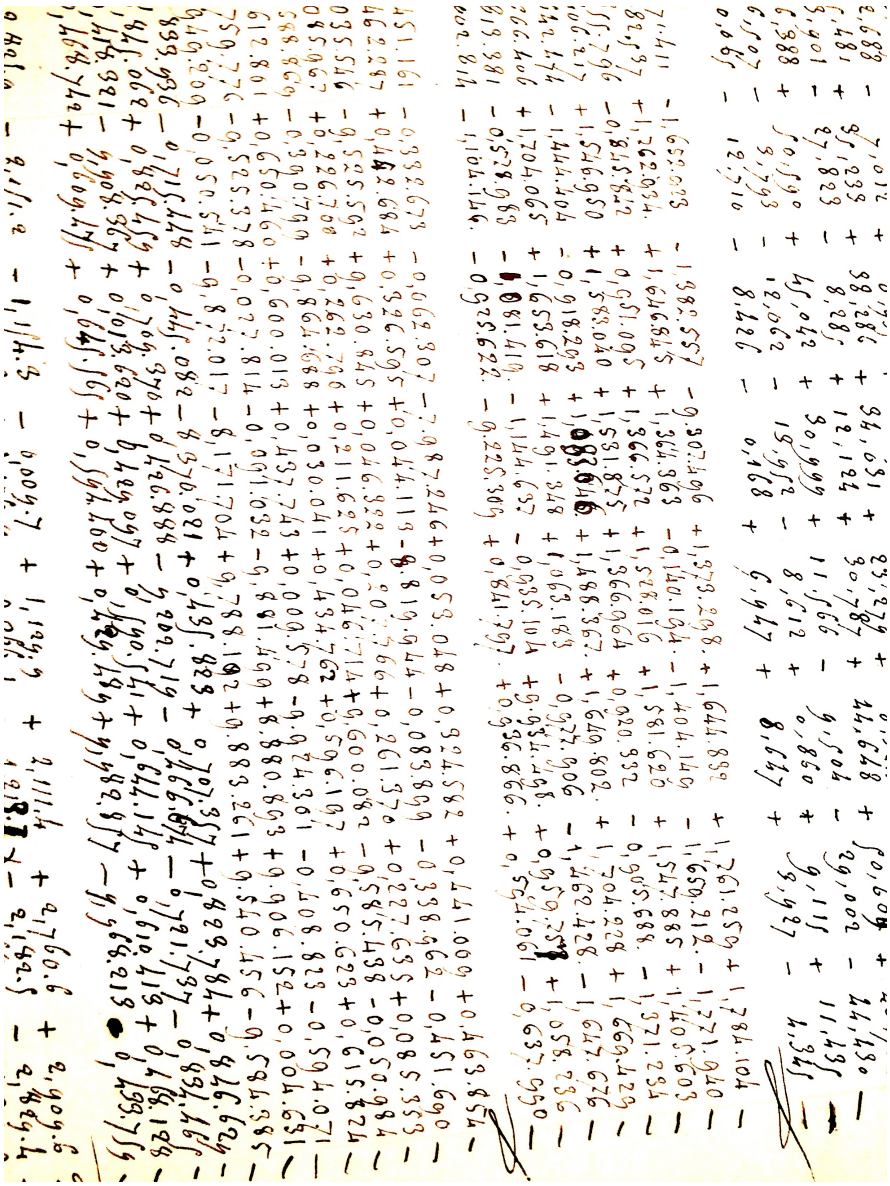


FIGURE 2.10 – On voit ici l'alternance de lignes ; écriture fine pour Gautier, écriture plus grasse pour Le Verrier. Comparer les 4, 5 et les 7. Les corrections sont de Le Verrier (cahier n° 2).

Par contre, comme on le verra dans les paragraphes suivants, Le Verrier n'a pas de contact de travail avec ses collègues de l'Observatoire : 1) Parce qu'ils appartiennent presque tous au clan Arago (républicains convaincus) et 2) comme le dit Jacques Laskar, Le Verrier est très au dessus [48] de ses collègues et n'a plus rien à apprendre d'eux.

48. Gautier écrit dans sa lettre du 6 novembre 1847 à ses parents : « on ne se fait nulle idée des pauvretés que recèle l'Observatoire ».

Il semblerait que l'élève ne soit pas toujours très doué, car son texte est souvent corrigé par le 'Patron', alors que le Patron fait beaucoup moins d'erreurs et donc beaucoup moins de ratures (voir un exemple de corrections à la figure 2.11).

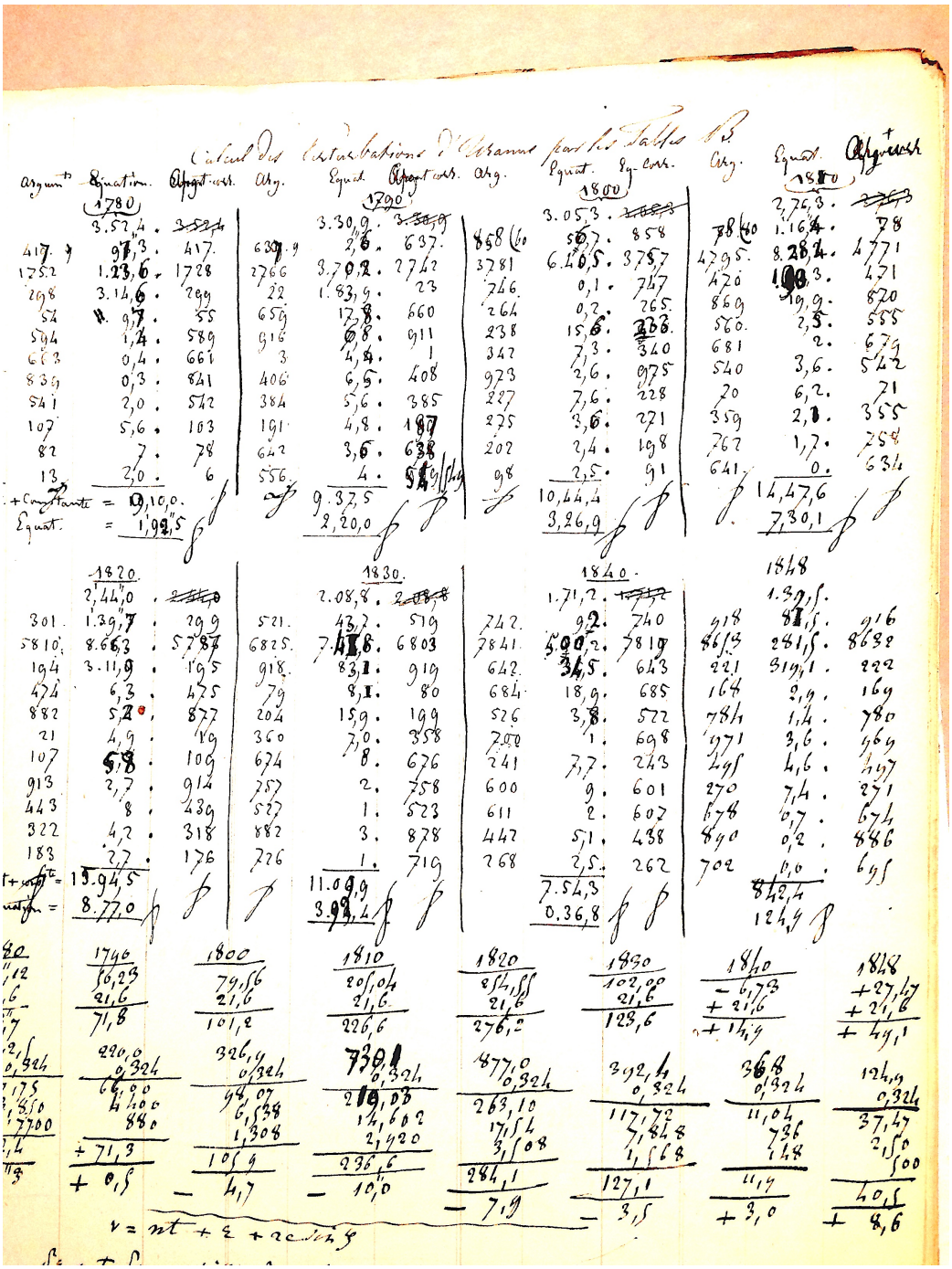


FIGURE 2.11 – Exemple où le maître (le Patron !) reprend son élève ! Les colonnes sont remplies par Gautier. Dans les surcharges et les contrôles en bas de page on reconnaît l'écriture de Le Verrier. Il s'agit ici du calcul de la perturbation de la longitude vraie d'Uranus en 1780, 1790, 1800, ..., 1840, 1848 à partir des tables de Bouvard. Les valeurs calculées par Gautier sont en secondes centésimales ; Le Verrier les convertit en secondes sexagésimales et ce sont les valeurs utilisées à la table 4.2 (page extraite du cahier n° 3)

2.3.4 Confirmations du rôle de collaborateur joué par Gautier

On a plusieurs [49] confirmations du rôle de calculateur en double joué par Gautier [50] ; 17 janvier 1846, lettre à Charles le Fort (ami d'enfance, mise en italique ajoutée) :

> Tout l'été dernier, je n'ai pas eu d'autre compagne qu'une table de logarithmes ; vrai mariage en vérité !... J'ai quitté en partant de Paris, dans la personne de mon Patron, un gaillard ferré sur ces sujets-là [la mécanique céleste], et qui m'a fait donner un bien vigoureux coup de collier. Ç'a été un grand privilège pour moi que de l'avoir pour directeur et pour aiguillonneur pendant six mois. *Il m'a fait faire en double tous les calculs des perturbations d'Uranus qu'il a présentés à l'Académie des sciences en novembre*, et c'était une besogne qui m'était d'un bout à l'autre profitable.

Dans sa lettre du 3 mai 1846, Le Verrier confirme les dires de Gautier au sujet de leur collaboration ; il justifie par ailleurs la méthode employée pour le calcul des perturbations :

> Lorsqu'on développe les formules des perturbations en sinus et en cosinus des multiples des longitudes moyennes ou des anomalies excentriques, on peut ramener la détermination des coefficients du développement de la fonction perturbatrice et des dérivées de cette fonction au calcul mécanique par les quadratures de certaines intégrales doubles. La détermination de ces intégrales s'effectue d'ailleurs au moyen des formules d'interpolation, ainsi que nous l'avons pratiqué dans la théorie d'Uranus, qui, entre parenthèses, a cruellement changé [51] de face depuis votre départ.

Une autre confirmation de ce travail en double se trouve dans un article publié dans *Nature* en 1891 [AR, 1891] :

> ... he [Gautier] became the pupil of the celebrated astronomer Leverrier. One of the early recollections that Émile Gautier loved particularly to recall was the time when he worked under the direction of the illustrious *savant* at the calculations of the perturbations of the planets ; he went over again in duplicate all the calculations relative to the perturbations of Uranus, calculations which Leverrier presented at the Academy of sciences in November 1845.

2.3.5 Vers la découverte

Suite de la lettre du 17 janvier 1846 : Gautier informe Charles le Fort qu'il se perfectionne en mécanique céleste :

> Te dire la peine qu'un débutant éprouve à suivre ce scélérat de La Place dans ce qu'il lui a plu de nous livrer de ses calculs et de ses transformations, je ne l'entreprendrai pas. J'ai heureusement un compagnon de transpiration dans la personne du professeur Émile Plantamour qui a trouvé l'occasion favorable pour s'occuper d'un sujet qu'il n'a jamais beaucoup travaillé [...] avec ces formidables formules.

Les rapports de Le Verrier avec ses collègues de l'Observatoire ne s'arrangent pas. Le Verrier écrit le 3 mai 1846 (à Gautier) :

49. Voir aussi l'annonce faite par Gautier à ses parents dans sa lettre du 6 novembre 1845, p. 55

50. On peut comparer avec le tandem Laplace-Bouvard : Bouvard a fait de nombreux calculs pour la *Mécanique céleste* de Laplace, mais celui-ci lui a rendu un hommage public. Peut-être que cette différence de traitement est due au fait que Laplace était un savant célèbre, reconnu par un large public, alors que Le Verrier était un savant en devenir, connu essentiellement dans les sphères scientifiques. Le Verrier deviendra célèbre du jour au lendemain après la découverte de Neptune.

51. Tiercy [Tiercy, 1947] ajoute en note qu'il [Le Verrier] fait référence aux ajouts faits à la théorie d'Uranus depuis le départ de Gautier : « Les nouveaux développements se trouvent dans le second mémoire de Le Verrier à l'Académie des sciences, daté du 1er juin 1846 » [Le Verrier, 1846a]

> Vous me regardez sans doute comme un homme bien abominable, et qui ne tient pas ses promesses [pour répondre aux lettres]. Quand vous viendrez nous voir, il ne se passera pas 48 heures pour que je sois absous. Si vous êtes entouré d'amis, vous êtes bienheureux. Notre monde à nous est, je crois, en vérité échappé de l'Enfer, et si je connaissais quelque coin de la terre, où je pusse vivre sans que cette affreuse race de soi-disant savants s'occupât de moi, je m'y échapperais immédiatement. Ils auraient, je crois, fini par me persuader que j'étais méchant, vous savez. Mais je réfléchis que d'une part, je ne m'occupe pas d'eux, que de l'autre, ils se mangent entr'eux, ne se réunissent que quand il y a quelque mauvais coup à faire. Excusez ce préambule en réfléchissant que si vous imaginez tout ce que l'envie, la paresse, l'ignorance, la cupidité et les autres péchés capitaux peuvent enfanter, vous n'en resterez pas moins en dessous de la vérité. Vous les avez bien jugés sous un rapport : mais pas assez noir [52]. Vous pouvez maintenant compter sur moi que je vous répondrai aussitôt, par la raison que j'ai enfin résolu de fouler aux pieds toutes ces misères dont je vous parlais et de me réfugier en la compagnie des honnêtes gens.

Le Verrier a bien du mérite à avancer son travail sur Uranus, car on rappelle qu'il dit dans sa lettre du 29 juin 1846 à Gautier (en plein calcul de l'approximation finale pour Neptune !) : « que peut-on espérer d'un homme qui a 16 leçons par semaine à faire ? », mais il est difficile de comprendre comment Le Verrier fait ce décompte de 16 leçons (voir note 2.21). Il ajoute :

> ... Je m'occupe à rectifier l'orbite de la planète inconnue, et si vous avez envie de la chercher, je vous enverrai sa position précise que j'aurais dans trois semaines, un mois au plus...

On reconnaît là l'optimisme – justifié – que Le Verrier mettait dans ses calculs.
Gautier était en Suisse au moment de la découverte ; voici comment Le Verrier annonce (le 1er octobre 1846), de façon bien étonnante, à Gautier comment Galle a trouvé Neptune (l'original de la lettre est reproduit fig. 2.12) :

> J'avais envoyé à M. Galle à Berlin la position de ma planète pour qu'il la cherchât. M. Galle a eu confiance et s'est mis à l'œuvre. Quelques heures seulement après, suivant la lettre qu'il m'écrit, il a aperçu le Bœuf. Le lendemain, il a constaté son mouvement propre, et décidé ainsi que c'était bien ma planète. Il m'a envoyé la position exacte qui diffère de moins d'un degré de la position que j'avais assignée.... Le Bureau des Longitudes a choisi le nom de Neptune, repoussant le nom de Janus, qui est faux, car nous n'avons aucune idée de croire que cette nouvelle planète soit la dernière du Système solaire.

Pourquoi le Bœuf ? Parce que Neptune tirait Uranus, comme un bœuf tire une charrue ?
Le Verrier utilise à plusieurs reprises ce mot Bœuf et toujours de façon péjorative : « Quel Bœuf ce Moigno. Je n'ai jamais moi tant ri. Quel pavé ! et quel Ours... » (lettre à Gautier du 2 juin 1848).
Le 12 juillet 1848, il écrit à Gautier, qui lui a fait parvenir l'orbite de Métis : « cette orbite satisfait parfaitement aux observations [...] ; ce qui suffit pour montrer qu'il n'y a pas de Bœuf ; tous ces quadrupèdes se sont d'ailleurs réfugiés dans mon pays ». Allusion à ses collègues astronomes de l'Observatoire de Paris.

2.3.6 Quelques jugements portés par Gautier sur Le Verrier

Georges Tiercy écrit [Tiercy, 1947] :

> Les relations entre Le Verrier et Émile Gautier ne se sont pas arrêtées avec la découverte de Neptune ; elles ont continué sur une note très agréable ; et si Émile Gautier, dans ses lettres

52. Remarque de Wolf : « Dans ces deux mots, on reconnaît en partie la même bande d'envieux qui est décrite dans les lettres ultérieures » ; voir par exemple la lettre du 19 mai 1847, page suivante.

> à ses parents, révèle de temps à autre que son Patron n'est pas toujours très commode, les deux hommes n'en ont pas moins entretenu une amitié fidèle, et leur collaboration a continué à s'exercer dans d'autres problèmes que celui d'Uranus et Neptune.

Voici un exemple de jugement que Gautier porte sur son Patron (lettre d'Émile Gautier datée du 6 novembre 1847 à ses parents) :

> À 2 heures, j'ai été à l'Institut, où il y a eu une petite prise de bec entre mon Patron et M. Arago. Il [Le Verrier] a un peu trop l'esprit tendu à faire de l'opposition. Il a beau jeu, car on ne se fait nulle idée des pauvretés que recèle l'Observatoire ; mais je trouve qu'il va quelquefois un peu loin.

On peut penser que le cabinet de travail de Le Verrier devait être un lieu protégé, feutré ; et bien non ! son environnement de travail est pour le moins étonnant : Raoul Gautier [53] écrit (cité par Wolf [Wolf, 1892] p. 356) :

> M. Leverrier a été très aimable pour mon père et pour nous. Il avait toujours des animaux avec lui dans son cabinet. En 1867, c'était un petit singe américain (ouistiti) qui aimait beaucoup se tenir sur le cou de Le Verrier, sous ses cheveux, qu'il portait longs. Précédemment, quand mon père travaillait avec lui, il avait des poules dans son cabinet.

On est loin de l'autocrate hautain, inaccessible, décrit par Flammarion [Flammarion, 1911].

2.3.7 Correspondances après la découverte de Neptune

Il est intéressant de suivre les échanges postérieurs à la découverte de Neptune, entre Le Verrier et Gautier. On y apprend le climat, délétère, qui règne dans les relations de Le Verrier avec ses collègues, et ses conséquences indirectes. Le 19 mai 1847 (à Gautier) :

> Vous savez, mon très cher Monsieur, de quelles difficultés je suis entouré... Notre Observatoire est un Enfer dans lequel s'élaborent complots et intrigues de tout genre, où l'on est sans cesse occupé, par des inventions et des calomnies, à brouiller tous les savants entr'eux ! Diviser pour régner ! Telle est la maxime. Et malheureusement on a réussi. On a empoisonné les dernières années de Laplace, et plus tard celles de Poisson... C'est aujourd'hui mon tour. Vous ne vous doutiez pas, mon pauvre ami, que nous étions exclusivement occupés dans notre long cabinet à fabriquer de la fausse monnaie, et à y forger une foule de crimes ! C'est à le persuader au public que notre Observatoire est maintenant occupé : Digne et glorieuse entreprise ! On ne réussira pas, mais il faudra un peu de temps pour que tout cela échoue.... Tout occupé, comme par le passé, de la fabrication de la fausse monnaie, je ne me soucie pas d'échanger la paix de mon cabinet pour aller peut-être essuyer les difficultés qu'il aura plu à M. A. [Arago] de me préparer. Il déplaît à M. A. que je fasse ce voyage en Angleterre. Il travaille de son mieux à m'aliéner les savants de ce pays. Il est donc très probable, mon très cher, que je resterai ici... M Forbes [54] est à Paris. Sa visite m'avait été annoncée. J'ignore si celui-là aussi a été se faire catéchiser à l'Observatoire ; mais je ne l'ai pas vu.

Voici le commentaire fait par Wolf au sujet de cette déclaration [Wolf, 1892] :

> Ce tableau est peut-être un peu noir à cause de l'agitation fébrile dont souffrait encore Leverrier à la suite d'un long surmenage ; mais qu'il existât depuis longtemps un cercle centré sur l'Observatoire de Paris, dans lequel il fallait se laisser entraîner comme un membre obéissant si l'on ne voulait pas être combattu, et que ce cercle ne fût pas très difficile dans le choix des moyens de combat, cela n'est guère douteux : Arago était autoritaire, ne supportait

53. Fils aîné d'Émile (1854−1931), qui sera aussi directeur de l'Observatoire de Genève, de 1889 à 1931.
54. James David Forbes (1809−1868), physicien écossais, membre de la RAS.

> pas la contradiction et cherchait, comme Zach l'avait déjà appris, à abattre quiconque osait s'opposer à lui ; son beau-frère Matthieu, [...], le secondait de son mieux, et quelques affidés subalternes [...] étaient toujours prêts à se rendre agréables à leurs maîtres en attaquant les personnes indésirables.
> Au début, on trouvait tout à fait agréable de s'étendre dans les rayons du soleil levant et de jouer le rôle de protecteur. Mais quand Leverrier osa s'affirmer, et qu'il ne craignit pas de faire parfois usage de sa langue acérée, il devint dérangeant, et l'on donna volontiers libre cours à l'inspiration des envieux, et même on les encouragea dans leurs agissements, qui se rapportaient notamment, comme Leverrier l'a laissé entendre avec sa fausse monnaie, et comme nous l'entendrons encore plus tard, à la suspicion des comptes de Leverrier.

Faut-il comprendre 'comptes bancaires' ? Ce serait étonnant, car à l'époque, Le Verrier n'était pas très riche. Peut-être l'insinuation concerne-t-elle la période ultérieure, une fois Le Verrier devenu sénateur (en janvier 1852) ?
Lettre de Gautier à ses parents (21 mai 1847), confirmant les hésitations de Le Verrier à se rendre en Angleterre :

> Je viens de rentrer à Greenwich et je découvre une lettre de M. Leverrier qui m'annonce qu'il ne viendra pas ici [en Angleterre], cela pour des raisons déplorables, venant de tours que l'on cherche à lui jouer à l'Observatoire. C'est un dédale de perfidies dans lequel je ne puis entrer. Mais je regrette d'autant plus la décision de Plantamour...

Voici ce qui dit Wolf [Wolf, 1892] au sujet de cet épisode impliquant Plantamour [55] :

> (Commentaire de Wolf [résumant un échange de lettres]) Quand Le Verrier a demandé à Plantamour, par l'intermédiaire de Gautier, s'il lui permettrait d'accéder à l'Observatoire lors d'un séjour à Genève en automne 1847, il a d'abord reçu une promesse ; mais quand Plantamour a cru avoir deviné que Le Verrier ne souhaitait pas seulement voir l'Observatoire, mais aussi se familiariser avec l'astronomie pratique sous sa direction, il a chargé Gautier le 8 Mai par une lettre adressée à Londres, d'informer Le Verrier qu'il ne serait pas en mesure de le recevoir parce que lui et sa femme seraient en cure thermale, mais il ne lui cachait pas non plus qu'en dehors de cette absence, il ne pourrait pas réaliser le souhait de Le Verrier.

Dans cette même lettre du 8 mai, adressée à Gautier, Plantamour ajoute :

> Je ne me dissimule point l'honneur qui pourrait rejaillir sur l'Observatoire de Genève de pouvoir compter pour ainsi dire au nombre de ses élèves un homme qui occupe une position scientifique aussi éminente, mais d'un autre côté c'est de cette position éminente que viennent mes scrupules, vu les relations qui existent entre M. Le Verrier et les astronomes de l'Observatoire de Paris avec qui je suis lié d'ancienne amitié et par un vif sentiment de reconnaissance.... Je regrette vivement que ces considérations m'empêchent de rendre service à un savant pour les talents duquel j'éprouve une haute admiration ; je le regrette aussi pour vous, sachant le plaisir que vous vous seriez fait de recevoir M. Le Verrier pendant son séjour à Genève.

Ainsi Le Verrier aurait eu le désir de se former [56] à l'astronomie pratique (d'observation) sous la férule d'Émile Plantamour ! Et ce, après la découverte de Neptune !
Au sujet de la polémique entre Le Verrier et l'Observatoire de Paris, l'oncle de Gautier (Alfred Gautier [57]) observe (dans sa lettre à son neveu datée du 18 juin 1847) :

55. Émile Plantamour (1815−1882) se forma successivement avec Arago, Encke, Bessel et Gauss avant de diriger l'Observatoire de Genève de 1839 à 1882.

56. Signalons que Le Verrier a fait des observations méridiennes classiques dès sa prise de fonction à l'Observatoire de Paris. Il a rempli 21 cahiers d'observations du 15/2/54 à fin 64 ; voir § 14.3.

57. Alfred Gautier (1793-1881), oncle d'Émile. Après des études à Genève puis à Paris, il devint le 3e directeur de l'Observatoire de Genève de 1821 à 1839. Il dut cesser ses activités de directeur du fait de graves problèmes de vue.

> Je regrette toujours plus la mésintelligence qui règne actuellement entre MM. Arago et Leverrier et je désirerais fort qu'elle put cesser. Je n'en ai un peu entendu parler en détail que de la part de M. Plantamour, qui n'en avait été instruit que par les astronomes de l'Observatoire. Tu ne peux guère la connaître que de l'autre côté, et il faudrait probablement combiner et peser les deux versions pour s'en faire une idée impartiale et complète.

À la suite de la nouvelle orbite proposée par Walker et Peirce pour Neptune en février 1847, orbite très différente de celle trouvée par Le Verrier, Alfred Gautier rajoute dans cette même lettre du 18 juin 1847 :

> Je suppose que cela va obliger M. Leverrier à revoir lui-même son travail afin d'en déduire les résultats les plus exacts qu'il comporte, et j'estime que c'est une chose bien plus importante pour lui que d'assister à la réunion d'Oxford ou de s'occuper d'astronomie pratique. Dans l'état actuel de la science, il me semble que chacun doit avoir sa spécialité et il y a si peu de calculateurs aussi habiles et aussi intrépides que M. Leverrier qu'il en paraîtrait bien dommage qu'il ne poursuivit pas jusqu'à leurs dernières limites des travaux de ce genre qui lui ont valu l'un des plus brillants succès que la science ait jamais obtenu.

Déjà la spécialisation de la science !
Gautier est à Londres quand il écrit à ses parents (2 juin 1847) :

> ... M. Forbes m'a emmené un peu contre mon gré pour me parler affaires, en particulier de M. Le Verrier, sur lequel il s'est laissé dire un tas d'absurdités, je crois par M Arago, absurdités qui l'ont empêché, je le crains, de le voir à Paris.

C'est finalement sur les sollicitations d'Émile Gautier que Le Verrier se décide à rendre visite à ses collègues britanniques : il débarque le 23 juin 1847 pour l'Assemblée générale de la British Association ; il y reste 3 semaines et il en repartira, souffrant de violents maux de tête [Tiercy, 1947].
Le 24 Juin 1847 (Gautier à ses parents) :

> ... M. Airy m'a laissé le soin d'emmener M. Le Verrier à l'Observatoire [de Greenwich]. Il s'y est rencontré pour la première fois avec Adams, ce qui était curieux à voir. Le fâcheux de la chose est qu'ils ne peuvent absolument pas s'expliquer mutuellement et c'est drôle de les voir essayer la conversation. Chez M. Daubeny, c'était encore plus curieux de voir l'empressement de tous ces braves Anglais, hommes et femmes, à l'approcher, à le dévisager, et il doit être réellement fièrement content de l'accueil qu'on lui a fait.

Forbes, dans une lettre à sa femme [Forbes, 1847], mentionnant un dîner auquel participaient Adams, Le Verrier et Airy, fait un peu la même remarque que Gautier ; les propos de Forbes sont rapportés par William Thomson, qui assistait à la scène ([Sheehan, 2021] p. 289) :
« Adams and Leverrier were the great stars and [...] conducted themselves with great prudence and amity ; to which, » he joked, « perhaps the Circumstance that Leverrier speaks no English, and Adams no French, somewhat contributed ».
Et Forbes ajoute :

> As the evening was very fine, the group was told that Neptune might be seen. Fancy the interest of seeing the New Planet for the first time in company with its **two** discoverers.

Le 28 juin 1847 (Gautier à ses parents) :

> M. Le Verrier, aux acclamations des Anglais, a fait son speech sur les trois comètes périodiques de 1770, de Faye et de Vico. Vous pouvez trouver dans ma thèse une bonne partie de ce qu'il a dit.

Gautier a visité plusieurs villes anglaises avant de revenir à Londres début août ; il y apprend que Le Verrier est retourné en France mi-juillet, malade ; il lui écrit une lettre début août 1847 en mentionnant [58] l'Observatoire de Paris et Le Verrier lui répond (9 août 1847) :

> Faites moi le plaisir, s'il vous plaît, de ne me jamais parler de notre absurde Observatoire et de ses stupides (pour ne pas dire plus) habitants.

Comme quoi, les rapports de Le Verrier avec le personnel de l'Observatoire sont toujours au plus mal !

Le 5 octobre 1847, Le Verrier écrit (à Gautier) :

> Confidentiellement (c'est entendu) je vous dirai que je ferai cet hiver plus d'études et de lectures que d'additions. J'entame définitivement mes grands projets ; et je vais commencer par une révision attentive et scrupuleuse (théoriquement) de chaque point de la mécanique céleste [59] [...] je serai fort heureux de vous avoir pour causer des choses avec vous et à fond. Sur ce, je compte sur vous prochainement, et je suis certain que cette fois, vous me resterez aussi longtemps que vous le pourrez.

C'est encore une fois un bel hommage de Le Verrier à son collaborateur.

Le 24 octobre 1847 (Gautier à ses parents) :

> Aujourd'hui je me suis rendu à l'Institut. M. Le Verrier a lu une communication de M. Hind à l'occasion de sa nouvelle planète [Flore] et puis a communiqué un mémoire de sa façon sur les perturbations de la comète Faye, rapprochée de celle de 1770 [Le Verrier, 1844b]. Pour la première fois depuis un an, il a vu M. Arago ne pas renverser tous ses papiers en l'entendant parler, et l'écouter jusqu'au bout !

Le 1er novembre 1847 (Gautier, à ses parents) :

> Je ne sais pas si mon oncle [60] vous parle toujours avec défaveur de mon Patron ? Il [Le Verrier] n'est certainement pas impeccable et il me vexe souvent par son défaut de tenue et de manières, mais je tiens à le blanchir de l'affaire avec Arago [..] La fameuse lettre à Encke sur le nom de la planète, qui est cause de toute la bisbille au dire d'Arago, il la lui avait montrée avant de l'envoyer, et Arago ne l'avait nullement blâmée.

Le 11 novembre 1847 (à son frère Adolphe) :

> J'ai sur les bras une rectification d'orbite d'une Comète. C'est M. Le Verrier qui m'a indiqué cette dernière, et j'espère que cela me donnera quelque chose à communiquer à l'Institut. Je continue à vivre en bonne intelligence avec le Patron et j'ai espoir de faire quelques progrès cet hiver.

Le 31 janvier 1848 (à son frère Adolphe) : « Je vais maintenant travailler pour mon Patron, qui a énormément de besogne à me fournir ».

Le 18 février 1848 (à son frère Adolphe) :

> J'ai commencé la rectification de l'orbite de la dernière des petites planètes, qui s'appelle Flore.... J'ai commencé à donner des leçons d'allemand à Mr et Mme Le Verrier, qui doivent aller en Russie cet été. [61]

58. Lettre non disponible ; information obtenue par recoupement à partir des documents de Tiercy et de Wolf.
59. Réflexion qui nourrira les futures Recherches astronomiques, publiées à partir de 1855 dans les Annales de l'Observatoire impérial de Paris.
60. Alfred Gautier (1793−1881), directeur de l'Observatoire de Genève de 1821 à 1839.
61. On a déjà signalé que ce voyage ne se fera pas, du fait de l'incertitude de la situation politique en France.

Le 2 juin 1848 (Le Verrier à Gautier) :

> Je trouve encore beaucoup de temps pour travailler à la révision complète que vous savez.... Je suis en train de gâter le métier. Je cherche à faire descendre les perturbations dans l'astronomie pratique, en les mettant au moyen de tables à la portée des plus ganaches. Je dis à Buisson : calculez-moi telle perturbation de telle planète. Et en deux minutes il me la donne.

Le 29 juin 1848 (Le Verrier à Gautier) : « J'ai échappé sain et sauf à la bataille ; mais j'en suis encore un peu étourdi. Nous avons à déplorer un seul mort dans ma compagnie ».
Le 21 juillet 1848 (Le Verrier à Gautier) : « Buisson travaille à force à mes tables de perturbations. Mais c'est long, très long ».
Le 23 septembre 1848 (Le Verrier à Gautier), Le Verrier, un peu déçu de ne pas avoir reçu un soutien de la part de Gautier au moment où Babinet lançait sa polémique sur Neptune :

> Pourquoi ne m'avez-vous pas adressé vos témoignages d'indignation sur les beaux articles de Babinet, Moigno et compagnie ? Est-ce que par hasard vous auriez aussi cru que Neptune était perdu, ou qu'il avait été trouvé par hasard ? J'en serais fâché ; car j'ai **démoli**, dans deux séances consécutives [62], le dit Babinet à l'Académie, de manière que je ne sais s'il en reste quelque chose.

Le 7 octobre 1848 (Le Verrier à Gautier) : « J'ai achevé les termes du septième ordre de la fonction perturbatrice [63], ce qui n'était pas une petite besogne ».
Le 16 janvier 1849 (Le Verrier à Gautier) :

> Je vous informe que tous mes matériaux de révision analytique et numérique de la mécanique céleste sont prêts, et que j'en vais procéder à la mise en œuvre... [Je vous attends] pour prendre part à la dite révision et mise en œuvre. Je vous attends pour le 1er mars [1849] au plus tard.

Le 21 novembre 1849 (Le Verrier à Gautier) :

> Excusez-moi pour pour mon continuel retard. La situation politique n'est pas tellement nette que je veuille lui sacrifier ma situation scientifique. Je fais mon cours à la Faculté, en même temps que le reste ; le calcul des perturbations va bon train, etc...
> Je regrette bien que vos élections aient si mal tourné. Je le regrette moins, si par hasard cela vous amènerait à Paris.

Le Verrier fait allusion aux élections suisses de 1848, qui ont validé la nouvelle constitution conduisant à un état fédéral et qui ont porté au pouvoir les libéraux-radicaux (et non les conservateurs). On constate encore une fois que Le Verrier souhaite avoir Gautier à ses côtés.
Le 28 novembre 1852 (Le Verrier à Gautier) :

> Je travaille de mon côté comme si j'avais à gagner un fauteuil [64] à l'Institut. Tout instant que mes occupations laissent libre est consacré à un grand travail [65] qui me donne bien de la peine et bien du souci.

62. Pour la polémique avec Babinet, voir § 13.3.
63. Le développement est publié dans les Annales de l'Observatoire de Paris pour l'année 1855 et ne comporte pas moins de 65 pages [Le Verrier, 1855c] !
64. On rappelle que Le Verrier est déjà académicien depuis le 19 janvier 1846. Il doit faire allusion à la réalisation de travaux innovants [qu'il est justement en train de produire], dignes d'être récompensés par une élection à l'Académie.
65. Il s'agit vraisemblablement des « Recherches astronomiques », qui seront publiées progressivement dans les premiers tomes des Annales de l'Observatoire de Paris ; ce travail peut être aussi la théorie du Soleil.

Le 18 juin 1860 (Le Verrier à Gautier) :

> Je ne vous donnerai pas de recommandation pour l'Observatoire d'Alger [pour observer l'éclipse du Soleil]. Je vous vois trop rarement pour en perdre une bonne occasion. Nous allons en Espagne... et vous viendrez avec nous [66].

Apparemment « Le Verrier s'y montra observateur habile et impartial [67], apportant ainsi un démenti à ceux qui ne voulaient voir en lui qu'un théoricien » [Tiercy, 1947]..
Le Verrier semble d'une certaine manière soulagé, une fois licencié de la direction de l'Observatoire ; le 30 avril 1870 il écrit à Gautier :

> Ma femme a été fort souffrante pendant une année ; mais depuis que nous demeurons rue des Saints-Pères avec une liberté pareille à celle des trois Suisses [68], n'ayant plus les bœufs [69] sur le dos, tout le monde va beaucoup mieux... je vous donne rendez-vous à Lyon au 10 août pour l'observation des étoiles filantes. Si vous êtes bien gentil, on vous reconduira à Genève.

Le Verrier s'intéresse toujours au travail de Gautier, même si ce travail concerne désormais l'astrophysique.
Le 21 juillet 1871 (Le Verrier à Gautier) :

> J'ai lu votre notice avec un grand intérêt. C'est bien que vous ne soyez pas, ce me semble, très partisan de cette hypothèse que le Soleil déjeune et dîne d'astéroïdes [70]

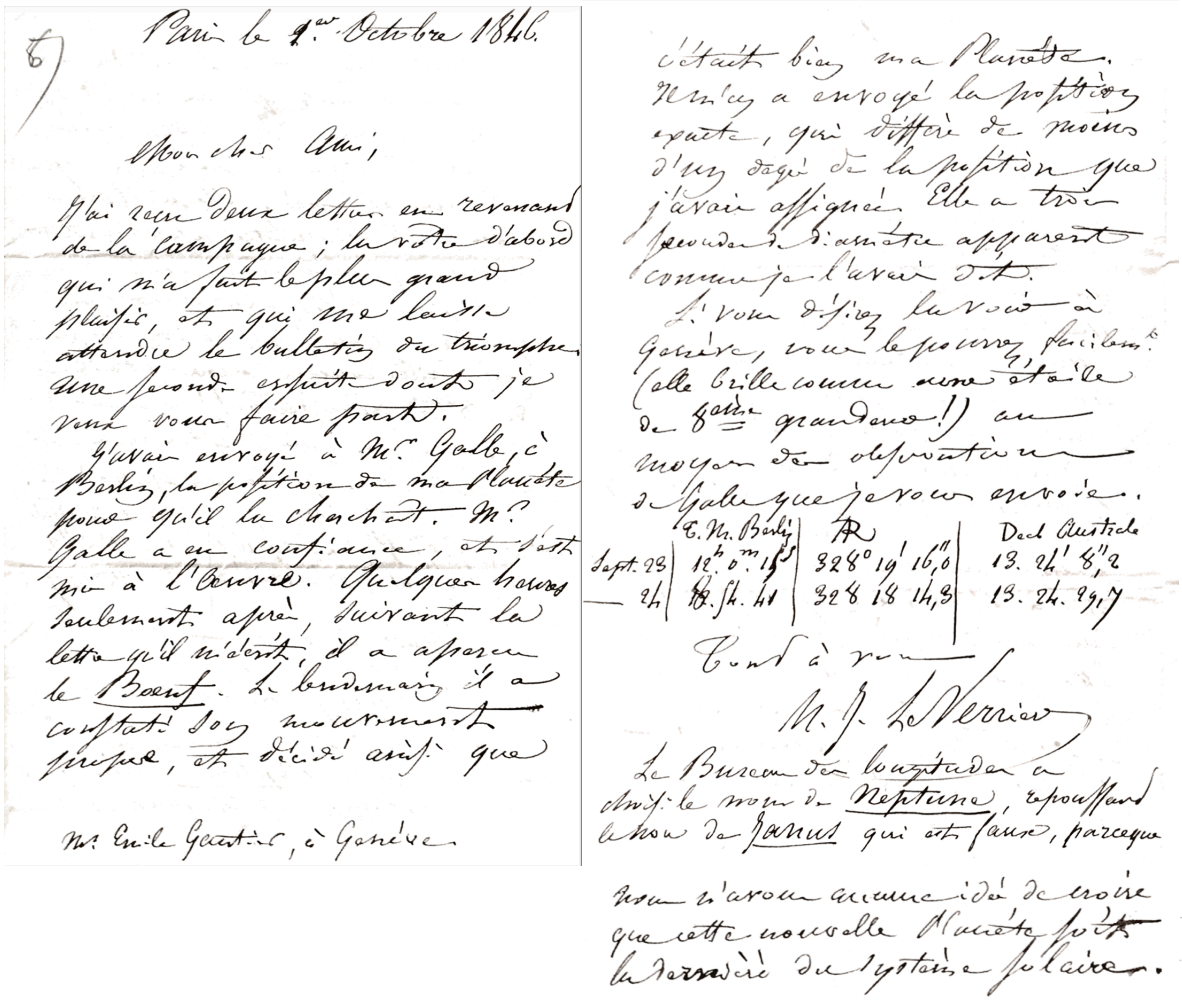
2.3.8 Commentaires et conclusions

Comme conclusion, je reprends celle donnée par Tiercy [Tiercy, 1947] :

> Nous terminerons ces notes en disant combien la constance de l'amitié et de la collaboration entre Le Verrier et Émile Gautier nous paraît touchante. Gautier a pu constater, comme d'autres, que son Patron n'était pas d'un abord facile ; mais il a aussi mesuré tout le reste. Et il a proclamé hautement que son Patron « valait certainement mieux que sa réputation » ; et qu'il « ne manquait pas de cœur, quoique l'écorce ne fût pas toujours agréable ». Et [..] Le Verrier lui rendait bien cette affection.

Dans son étude sur Le Verrier, James Lequeux [Lequeux, 2009] mentionne quelques lettres entre celui-ci et Gautier, mais ne mentionne pas leur collaboration. Il faut dire que Le Verrier souhaitait la garder secrète, et Le Verrier n'a jamais fait allusion en public à l'aide fournie par son élève.
L'abbé Aoust, pourtant un intime de Le Verrier, ne mentionne même pas le nom de Gautier dans son éloge de Le Verrier.
Cette collaboration semble peu connue ; elle ne semble pas avoir été mentionnée par les nombreux auteurs qui ont raconté la découverte de Neptune : Patrick Moore [Moore, 1988], Morton Grosser [Grosser, 1962], A.F. O'D Alexander [Alexander, 1965]. Elle n'a été signalée que par William Sheehan [Sheehan, 2021], avec une référence à Arthur Ranyard [Ranyard, 1891].

66. On note l'affection que Le Verrier porte toujours à Gautier.
67. On rappelle qu'une fois directeur de l'Observatoire, Le Verrier a rempli 21 cahiers d'observations s'étalant de 1854 à 1864 (voir § 14.3)
68. Les trois Suisses qui ont libéré l'Helvétie.
69. Encore une fois les bœufs, mais sans majuscule cette fois. Ce terme désigne ici le personnel de l'Observatoire.
70. Son propos, un peu humoristique, fait allusion à la théorie qui, pour expliquer la constance du rayonnement solaire, suggère que le Soleil se nourrit d'astéroïdes.



Paris le 1er Octobre 1846.

Mon cher Ami,

J'ai reçu deux lettres en revenant de la campagne ; la vôtre d'abord qui m'a fait le plus grand plaisir, et qui me laisse attendre le bulletin du triomphe. Une seconde ensuite dont je veux vous faire part.

J'avais envoyé à Mr Galle, à Berlin, la position de ma planète pour qu'il la cherchât. Mr Galle a eu confiance, et s'est mis à l'œuvre. Quelques heures seulement après, suivant la lettre qu'il m'écrit, il a aperçu le Boeuf. Le lendemain il a constaté son mouvement propre, et décidé ainsi que c'était bien ma planète. Il m'en a envoyé la position exacte, qui diffère de moins d'un degré de la position que j'avais assignée. Elle a trois secondes de diamètre apparent comme je l'avais dit.

Si vous désirez la voir à Genève, vous le pourrez facilement (elle brille comme une étoile de 8ème grandeur !) au moyen des observations de Galle que je vous envoie.

	T. M. Berlin	AR	Decl Australe
Sept. 23	12h 0m 15s	328° 19' 16",0	13. 24' 8",2
— 24	12. 54. 41	328 18 14,3	13. 24. 29,7

Tout à vous

M. J. Le Verrier

Le Bureau des longitudes a choisi le nom de Neptune, repoussant le nom de Janus qui est faux, parceque nous n'avons aucune idée de croire que cette nouvelle planète soit la dernière du système solaire.

Mr Emile Gautier, à Genève

FIGURE 2.12 – Lettre de Le Verrier à Émile Gautier, datée du 1er octobre 1846 [Le Verrier, 1845-1870], annonçant la découverte de Neptune. L'annonce se fait sous la forme, pour le moins surprenante : « il [Galle] a aperçu le Boeuf ». Est-ce parce que Le Verrier considérait que Neptune tirait Uranus, comme un bœuf tire une charrue ? Il considère, à juste titre, que Neptune est sa planète : « c'était bien ma planète ». Il annonce que le Bureau des Longitudes a refusé le nom 'Janus' proposé par Encke et a choisi d'appeler la nouvelle planète Neptune : en fait c'est Le Verrier lui-même qui avait, dans un premier temps, proposé ce nom pour la nouvelle planète, avant de regretter rapidement ce choix ; voir [Sheehan, 2021] pour plus d'informations.

Deuxième partie

CALCULS EFFECTUÉS PAR LE VERRIER

POUR NEPTUNE

Chapitre 3

DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS CRÉÉES PAR SATURNE ET JUPITER SUR URANUS

Objectifs

On reprend les calculs faits par Le Verrier pour déterminer les perturbations exercées par Saturne sur Uranus, par Jupiter sur Uranus et enfin par Jupiter sur Saturne. Le but principal est de déterminer la perturbation totale de la longitude héliocentrique d'Uranus

Sommaire

3.1 Organisation de la thèse en vue de refaire les calculs de Le Verrier . . . **71**
3.1.1 Reprise des calculs de Le Verrier . . . 71
3.1.2 Notations . . . 71
3.2 Présentation des calculs de perturbations planétaires . . . **72**
3.3 Paramètres orbitaux d'une planète . . . **73**
3.3.1 Notations pour les éléments orbitaux d'une planète . . . 73
3.3.2 Relations entre les différents paramètres orbitaux, équation du centre . . . 75
3.4 Perturbations planétaires . . . **76**
3.4.1 Perturbations des éléments orbitaux d'Uranus . . . 76
3.4.2 Équations de Lagrange . . . 78
3.4.3 Stratégie utilisée par Le Verrier . . . 79
3.5 Détermination numérique de la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus . . . **80**
3.5.1 Principe du développement en série de la fonction perturbatrice . . . 80
3.5.2 Calcul explicite du développement de la fonction perturbatrice à l'aide de TRIP . . . 89
3.6 Développements en série des perturbations des éléments elliptiques d'Uranus . . . **97**
3.6.1 Formulation utilisée par Le Verrier pour les équations de Lagrange . . . 97
3.6.2 Développement de $\sin\phi_1\,\delta\theta_1$ (longitude du nœud) . . . 99
3.6.3 Développement de δa (demi-grand axe) . . . 100
3.6.4 Développement de $\delta\rho$ (moyen mouvement) . . . 101
3.6.5 Développement de $e\delta\varpi$ (longitude du périhélie) . . . 102
3.6.6 Développement de $\delta_2 e$ (perturbation partielle de l'excentricité) . . . 103
3.6.7 Développement de δe (excentricité) . . . 104

3.6.8 Développement de $\delta\varepsilon$ (longitude de l'époque) . . . 105
3.6.9 Développement de $\delta\phi_1$ (inclinaison de l'orbite sur celle de Saturne) . . . 106
3.7 Utilisation de la fonction perturbatrice sous forme algébrique . . . **107**
3.7.1 Expression littérale de la fonction perturbatrice utilisée par Le Verrier . . . 107
3.7.2 Fonction perturbatrice trouvée par Le Verrier . . . 107
3.7.3 Fonction perturbatrice obtenue avec TRIP . . . 109
3.7.4 Équations de Lagrange . . . 110
3.7.5 Perturbations des éléments elliptiques . . . 110
3.8 Perturbations exercées par Jupiter sur Uranus . . . **114**
3.9 Perturbations à l'ordre 2 des masses . . . **115**
3.9.1 Inégalités séculaires . . . 115
3.9.2 Perturbations exercées par Jupiter sur Saturne . . . 115
3.9.3 Modification de la fonction perturbatrice . . . 116
3.9.4 Résultats . . . 121
3.10 Résumé de la théorie . . . **121**

.

3.1 Organisation de la thèse en vue de refaire les calculs de Le Verrier

3.1.1 Reprise des calculs de Le Verrier

Dans les chapitres suivants, on va maintenant reprendre en détail tous les calculs de Le Verrier et examiner s'il existe des erreurs de calcul ou bien des fautes de méthode.
À cette fin, tous[1] les calculs mentionnés dans *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* ont été refaits, selon la méthode de Le Verrier :

1. Calcul des perturbations exercées sur Uranus par Saturne et Jupiter au chapitre 3.
2. Comparaison de la théorie de Le Verrier avec celle de Bouvard au chapitre 4.
3. Recherche de la planète perturbatrice, première approximation au chapitre 5.
4. Recherche de la planète perturbatrice, deuxième approximation au chapitre 6.

Il est inutile de laisser planer le moindre suspense : on confirmera la justesse des résultats trouvés par Le Verrier et le fait que Le Verrier est un calculateur hors du commun.
On constate seulement de petits écarts numériques – ce qui est tout à fait normal, car le calcul moderne se fait avec 16 chiffres significatifs, à comparer aux 5 ou 7 chiffres significatifs de Le Verrier.
La seule erreur numérique notable a été constatée dans la dernière interpolation conduisant au résultat final : l'écart entre position calculée et position observée à Berlin était en fait $\underline{1°11'}$ et non $52'$, comme annoncé par Le Verrier (voir § 6.2.5).
Si cette constatation avait été faite plus tôt, on aurait évité la répétition généralisée de la formule « Le Verrier a localisé Neptune à **moins** de 1° de la position réelle ».

S'il n'y a pas grand chose à dire sur le plan numérique, on verra qu'il y a quelques approches théoriques un peu discutables, en particulier lors de la deuxième approximation : une discussion complète des méthodes utilisées par Le Verrier est faite au § 12.3.

3.1.2 Notations

Le Verrier utilise des notations, qui diffèrent un peu des notations modernes (voir § 3.3 par exemple). On utilisera toutes les fois qu'il est possible les notations de Le Verrier, en les adaptant si besoin.
Mais parfois, dans *Herschel* ou dans les manuscrits, la même lettre désigne des variables différentes selon l'endroit où elles apparaissent. Par exemple la lettre α désigne le rapport des rayons vecteurs r/r' au début de *Herschel* ; cette même lettre désigne l'angle $22°30'$ pour l'échantillonnage numérique de la fonction perturbatrice, puis un des coefficients permettant de déterminer l'erreur sur la longitude géocentrique, l'ascension droite et enfin le rapport des demi-grands axes d'Uranus et de la planète qui le perturbe à partir de la deuxième moitié de *Herschel*.
Conserver strictement les notations de Le Verrier pourrait causer par endroits des confusions. Afin de réduire ces éventuelles confusions, sans trop s'éloigner des notations de Le Verrier, on "ornera" la lettre concernée : dans l'exemple précédent la notation pour r/r' sera $\tilde{\alpha}$, celle pour l'angle $22°30'$ sera $\bar{\alpha}$, celle pour l'erreur en longitude géocentrique sera α_g, pour l'ascension droite ce sera $\mathring{\alpha}$ et on conservera la notation α uniquement pour le rapport des demi grands-axes d'Uranus et de la planète perturbatrice.
On résume l'exemple précédent dans le tableau suivant :

1. Sauf les vérifications systématiques d'éphémérides et les réductions d'observations, pour lesquelles seuls quelques contrôles ponctuels ont été effectués.

TABLE 3.1 – 'Habillages' de la lettre α pour les notations et signification de ces habillages

Notation	Signification
α	Rapport des demi-grands axes de Neptune et d'Uranus
$\mathring{\alpha}$	Ascension droite
$\bar{\alpha}$	$22°30'$
$\tilde{\alpha}$	$\frac{r}{r'}$ Rapport des rayons vecteurs d'Uranus et de Neptune
α_g	Coefficient de δv dans l'expression de δG
α_d	Coefficient intervenant dans la correction instrumentale

On procédera ainsi pour toute variable utilisée avec différentes significations par Le Verrier.
Un index détaillé des notations est donné à la page 530.

3.2 Présentation des calculs de perturbations planétaires

Dans ce chapitre, on refait pas à pas tous les calculs que Le Verrier a effectués pour déterminer les perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus (voir encadré 5, p. 77) ; pour cela, on utilise ses notations et on suit strictement sa démarche, ce qui va permettre de tester l'exactitude de ses calculs.
À cette fin, le résultat obtenu par Le Verrier sera le plus souvent affiché en regard du résultat obtenu avec TRIP.
Les calculs manuscrits pour ce chapitre se trouvent dans le cahier n° 2 du dossier Neptune de l'Observatoire de Paris, et les résultats de ces calculs se trouvent dans le chapitre 1 de *Herschel*. Dans *Herschel*, Le Verrier ne reprend que les résultats de ses développements, mais pas tous les calculs intermédiaires, d'où la nécessité de consulter systématiquement les manuscrits.

On a vu (encadré 3, p. 35) que Bouvard n'avait pas pu réaliser des éphémérides représentant correctement à la fois les observations anciennes et les observations modernes, et que Uranus s'éloignait progressivement des positions prédites par ses tables. La situation était difficilement acceptable pour le monde astronomique, en particulier pour la France, qui possédait une longue tradition d'excellence en mécanique céleste.
Le Verrier écrit « les astronomes ne sont pas accoutumés à de pareils mécomptes » [Le Verrier, 1845a].
En 1837 [Bouvard, 1837], Alexis Bouvard avait délégué à son neveu, Eugène Bouvard [2] alors élève-astronome à l'Observatoire de Paris, le soin de réviser ses tables d'Uranus de 1821 [Bouvard, 1821b], mais le travail d'Eugène n'avait pas été jugé satisfaisant par Arago (les tables d'Eugène Bouvard ne seront pas publiées). D'où la démarche d'Arago pour solliciter l'intervention de Le Verrier, qui avait déjà prouvé sa capacité à résoudre de façon originale et efficace des problèmes difficiles (voir § 1.2).
Ainsi que Le Verrier l'a indiqué (*Herschel*, p. 4), le problème qui lui avait été confié par Arago était de prédire avec un maximum de précision le mouvement d'Uranus, perturbé par Saturne et Jupiter et de savoir si le mouvement ainsi prédit coïncidait avec le mouvement observé :

> Dans le courant de l'été 1845, M. Arago voulut bien me représenter que l'importance de cette question imposait à chaque astronome le devoir de concourir, autant qu'il était en lui, à l'éclaircir… Tel est l'origine du travail actuel. Je désire vivement avoir répondu d'une manière satisfaisante à l'appel de l'illustre savant dont l'amitié m'a si passionnément encouragé dans ces longues et pénibles recherches.

2. Eugène Bouvard (1812−1879). Après son échec à réviser les tables d'Uranus, il abandonnera sa carrière d'astronome pour rejoindre le cadastre, comme l'écrit Le Verrier à Émile Gautier le 23 février 1846 (voir note 2.47, p. 55).

Émile Gautier[3] écrit à ses parents (lettre du 10 juillet 1845) :

> M. Leverrier m'a annoncé de nouveaux projets de calculs qui doivent rester un profond mystère et qui seront très longs. Lui-même va avoir à méditer seul sur sa nouvelle entreprise... Il y met une ardeur inextinguible.

Est-ce qu'à cette époque, Le Verrier a déjà prévu dans les grandes lignes tous les enchaînements qui le conduiront à la découverte ? Il est vraisemblable qu'initialement Le Verrier pensait qu'avec la nouvelle théorie d'Uranus, qu'il s'apprêtait à établir, il pourrait concilier prédictions et observations d'Uranus (voir l'extrait de la lettre de Gautier à Le Verrier du 9 octobre 1845 au § 2.3.2). La stratégie pour mettre en évidence une planète perturbatrice a dû survenir dans un deuxième temps.
Voici comment il envisage initialement la démarche (*Herschel*, p. 6) :

> Pour établir avec précision la théorie d'une planète dont le mouvement est déjà approximativement connu... il faut rechercher avec soin la forme des expressions analytiques propres à représenter, à une époque quelconque, les coordonnées de l'astre. Il faut en second lieu, disposer d'une série d'observations exactes et nombreuses... Il reste ensuite à les rapprocher, à conclure des observations, les valeurs précises des constantes qui sont restées indéterminées dans les formules.
> Les expressions analytiques des coordonnées d'Uranus renferment des termes dus au mouvement elliptique et des termes de perturbations provenant de l'action des autres planètes...
> Je vais m'occuper de déterminer les perturbations produites par ces deux planètes [Saturne et Jupiter].

Pour comprendre le travail effectué par Le Verrier, on va présenter succinctement les paramètres orbitaux d'une planète, puis les perturbations planétaires, afin de mieux apprécier la stratégie utilisée par Le Verrier.

3.3 Paramètres orbitaux d'une planète

3.3.1 Notations pour les éléments orbitaux d'une planète

Une planète décrit en première approximation une orbite elliptique autour du Soleil. On a indiqué table 3.2 les notations utilisées par Le Verrier pour désigner les paramètres utiles pour décrire le mouvement d'une planète.
Une orbite elliptique est définie par 6 paramètres, appelés pour cette raison 'éléments elliptiques'. Ce sont $(a,\ \varepsilon,\ e,\ \varpi,\ \phi,\ \theta)$ ou alternativement $(a,\ \varepsilon,\ h,\ l,\ p,\ q)$ (voir table 3.2).
Si la planète était seule avec le Soleil, ses éléments elliptiques seraient des constantes ; seule la longitude moyenne ℓ varierait avec le temps, selon la formule $\ell = \varepsilon + nt$.
En fait, sous l'action des autres planètes, ses éléments elliptiques varient légèrement avec le temps : on dit qu'ils sont perturbés par l'action des autres planètes, ou qu'ils subissent des **perturbations** de la part des autres planètes (voir encadré 5, p. 77).

3. Émile Gautier a aidé Le Verrier dans la première partie de ses calculs (voir le chapitre précédent).

TABLE 3.2 – Notations choisies par Le Verrier (*Herschel* p. 7) pour nommer les paramètres orbitaux d'une planète, paramètres utilisés essentiellement pour Uranus ; pour Neptune, il utilise les mêmes notations, mais accentuées : a', e', r', m'.... On met, quand les habitudes ont changé, la notation moderne entre parenthèses

a	le demi-grand axe de l'orbite ;
n	le moyen mouvement sidéral en une année julienne ;
e	l'excentricité de l'orbite ;
ϖ	la longitude du périhélie ;
ϕ	l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de référence ; (i)
θ	la longitude du nœud ascendant ; (Ω)
ε	la longitude de l'époque i.e. la longitude moyenne d'Uranus au 1er janvier 1800 ; $(\lambda_0\ )$
$h,\ l$	$h = e\sin\varpi$; $l = e\cos\varpi$; $(h = e\sin\varpi\,;\ k = e\cos\varpi)$
$p,\ q$	$p = \tan\phi\sin\theta$; $q = \tan\phi\cos\theta$; $(p = \sin\frac{i}{2}\sin\Omega\,;\ q = \sin\frac{i}{2}\cos\Omega)$;
m	masse ;
v	longitude héliocentrique vraie (ℓ) ;
λ	latitude héliocentrique vraie (b) ;
G	longitude géocentrique vraie (λ) ;
b	latitude géocentrique vraie (β) ;
ℓ	longitude moyenne ; $\ell = \varepsilon + nt$ avec une origine des temps au 1/1/1800 ; (λ)
ζ	anomalie moyenne ; (M)
E	anomalie excentrique ;
w	anomalie vraie ; (v)
r	module du rayon vecteur, appelé plus simplement rayon vecteur ; c'est donc la distance entre la planète et le Soleil.

Ce sont les notations utilisées pour Uranus ; les éléments de la planète perturbatrice seront notés avec les mêmes lettres, mais accentuées : a', ε', e'... On a mis pour certains paramètres la notation moderne entre parenthèses.

Le Verrier utilise les notations supplémentaires suivantes :

TABLE 3.3 – Action perturbatrice d'une planète (P') sur une planète (P)

$m,\ m'$	masses de (P) et (P') respectivement
$n,\ n'$	moyens mouvements sidéraux annuels de (P) et de (P')
$r,\ r'$	rayons vecteurs de (P) et (P') respectivement
s	cosinus de l'angle $\widehat{P\,Sun\,P'}$
$k = \frac{anm'}{1+m}$	coefficient intervenant dans la fonction perturbatrice
$\psi = \arcsin e$	d'où $\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \cos\psi\tan\frac{\psi}{2}$
$\Delta' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr's}$	distance mutuelle entre les deux planètes
$R = \frac{1}{\Delta'} - \frac{rs}{r'^2}$	fonction perturbatrice de la planète (P') sur la planète intérieure (P)

Longitude héliocentrique vraie et anomalie vraie

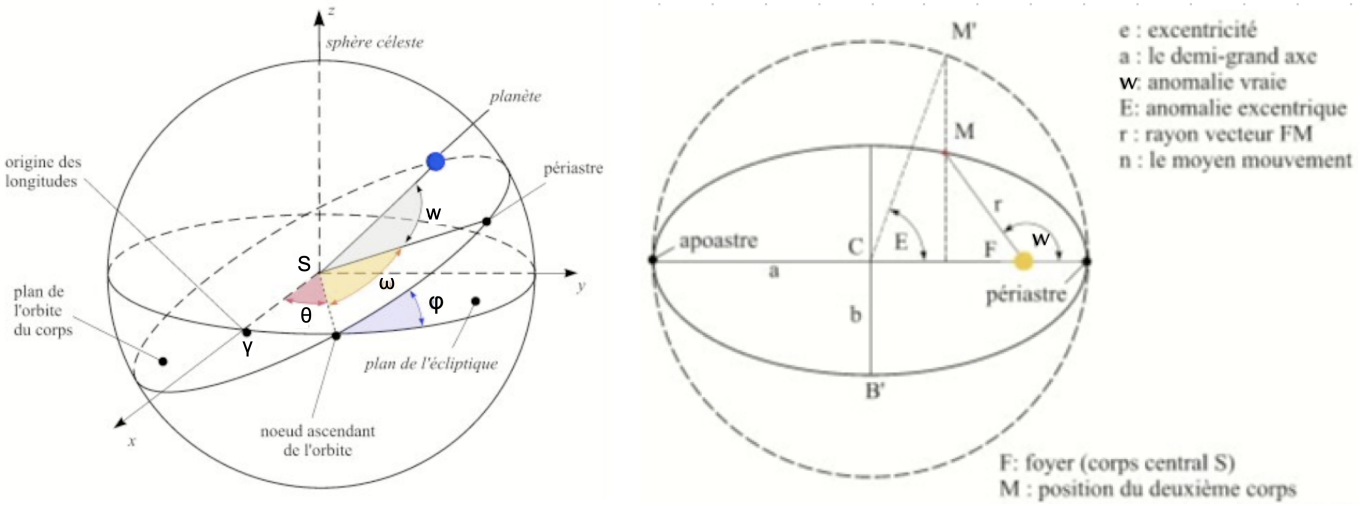


FIGURE 3.1 – Sur le dessin de gauche, le centre du Soleil est en S ; on voit certains éléments orbitaux : θ, longitude du nœud ascendant ; ω, argument du périhélie ; on utilise surtout ϖ, appelé **longitude du périhélie**, avec $\boldsymbol{\varpi = \theta + \omega}$; ϕ inclinaison de l'orbite sur l'écliptique ; $\boldsymbol{w}$ **l'anomalie vraie**. Le **rayon vecteur** est la distance $\boldsymbol{r}$ entre le Soleil et la planète. **La longitude héliocentrique vraie** $\boldsymbol{v}$ est définie par $\boldsymbol{v = \varpi + w}$.
Sur le dessin de droite on voit le demi-grand axe a, le demi-petit axe $b = a\sqrt{1-e^2}$, **l'anomalie vraie** $\boldsymbol{w}$, l'anomalie excentrique E, le rayon vecteur r, le foyer F occupé par le Soleil et l'excentricité e égale à $e = CF/a$ (Crédit IMCCE/Patrick Rocher)

3.3.2 Relations entre les différents paramètres orbitaux, équation du centre

Voici table 3.4 quelques formules reliant les paramètres orbitaux d'une planète (cahier n° 3) :

TABLE 3.4 – Relations algébriques entre les différents paramètres elliptiques d'une planète

$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{3.1}$$

$$r = \frac{a}{1+e\cos(v-\varpi)} = \frac{a}{1+e\cos w} = a(1-e\cos E) \tag{3.2}$$

$$\text{On a } \boldsymbol{v = \varpi + w}\,;\ \boldsymbol{\ell = \varpi + \zeta} \tag{3.3}$$

Quand il ne connaît que l'anomalie moyenne ζ, Le Verrier utilise un développement à l'ordre 4 pour r (cahier n° 3 p. 97) :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + (-e + \frac{3}{8}e^3)\sin\zeta + (-\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{3})\sin 2\zeta - \frac{3}{8}e^3\sin 3\zeta - \frac{e^4}{3}\sin 4\zeta \tag{3.4}$$

On passe de l'anomalie moyenne ζ à l'anomalie excentrique E par l'équation de Kepler :

$$E - e\sin E = \zeta \tag{3.5}$$

On passe de E à l'anomalie vraie w par la relation $\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$ (3.6)

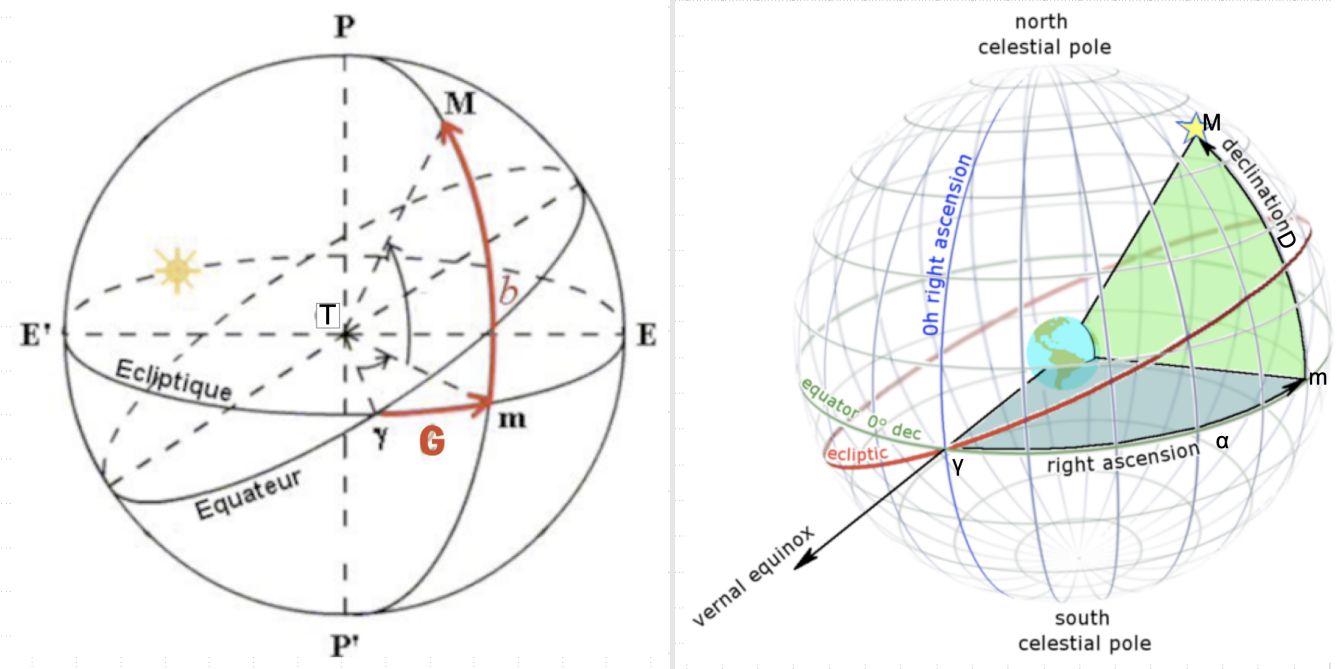
L'équation du centre C_e est l'écart entre anomalie vraie w et anomalie moyenne ζ :

$$C_e = w - \zeta = (v - \varpi) - \zeta = v - \ell \tag{3.7}$$

Le Verrier utilise le plus souvent l'expression de C_e obtenue à l'aide d'un développement limité à l'ordre 4 (cahier n° 3 p. 97) :

$$C_e = (2e - \frac{e^3}{4})\sin\zeta + (\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{12}e^4)\sin 2\zeta + \frac{13}{12}e^3\sin 3\zeta + \frac{103}{96}e^4\sin 4\zeta \tag{3.8}$$

Longitude et latitude géocentriques, ascension droite, déclinaison (encadré 4)



(À gauche) T désigne le centre de la Terre. Soit M la position de l'astre ; on trace le demi-grand cercle passant par M et les pôles P et P' de l'écliptique ; soit m le point d'intersection de ce grand cercle avec l'écliptique. La latitude géocentrique b est la mesure de l'arc $\widehat{mM}$. La **longitude géocentrique G** est la mesure de l'arc $\widehat{\gamma m}$ où **γ est le point vernal**.
(À droite) L'ascension droite est la mesure de l'arc $\widehat{\gamma m}$, mesurée sur l'équateur céleste ; elle sera notée $\mathring{\alpha}$ dans la thèse ; la déclinaison est la mesure de l'arc $\widehat{mM}$ et sera notée D dans la thèse.

3.4 Perturbations planétaires

3.4.1 Perturbations des éléments orbitaux d'Uranus

Le Verrier veut donc déterminer les perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur les éléments orbitaux d'Uranus.
On est là dans un domaine bien connu depuis les travaux de Lagrange et de Laplace [Lagrange, 1778], [Laplace, 1802]. Les calculs des perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus avaient déjà été effectués successivement par Fixlmiller, Delambre [Standage, 2000] et Bouvard [Bouvard, 1821b], mais peut-être de façon imparfaite. Voici ce que Le Verrier écrit dans son mémoire du 10 novembre 1845 [Le Verrier, 1845a] :

> Je n'ai pas cru devoir, dans ces recherches, me borner à vérifier simplement les nombres antérieurement donnés. Il m'a paru nécessaire de reprendre le travail en son entier sur de nouvelles bases, et de manière à ne plus laisser planer la plus légère incertitude sur aucune des parties de cette importante théorie.

Il a conscience de l'importance des calculs qu'il doit effectuer ; il prévient donc dans *Herschel* p. 6 : « Pour cela [la justesse des calculs de perturbations], on trouvera donc naturel que j'accumule les vérifications ».
Il rappelle ensuite comment on obtient les éléments du mouvement elliptique d'une planète (*Herschel* p. 90) :

> Lorsque, dans le but de déterminer les éléments du mouvement elliptique d'Uranus, on a recours aux observations, on doit commencer par retrancher, des positions observées, la valeur calculée des perturbations ; le reste de la soustraction représente le lieu de l'astre. Si donc les perturbations sont inexactement calculés, les positions elliptiques se trouveront empreintes des mêmes erreurs changées de signes : erreurs qui passeront, en s'aggravant peut-être, dans les éléments de l'orbite. La multiplicité des positions employées ne remédiera d'ailleurs en rien à cet inconvénient, puisqu'elles seront toutes empreintes des mêmes erreurs systématiques.

Concrètement, les perturbations planétaires théoriques s'obtiennent par intégration des équations de Lagrange [Perez, 2011] (voir paragraphe suivant).
Dans le cas d'Uranus, les calculs de perturbations et de vérifications remplissent l'intégralité des 325 pages du cahier n° 2 des manuscrits et ont occupé Le Verrier à plein temps pendant 4 mois [4].

Perturbations exercées par une planète, inégalités (encadré 5)

Dans le problème des deux corps, Soleil (S) et une seule planète (P) par exemple, les éléments orbitaux de la planète (P) restent fixes avec le temps. Par contre, quand il y a une planète supplémentaire, que l'on peut qualifier de perturbatrice, cette planète perturbatrice modifie légèrement les éléments orbitaux de la planète étudiée ; on dit qu'elle crée des perturbations de ces paramètres orbitaux. Ces perturbations sont aussi qualifiées **d'inégalités**. Par exemple, Le Verrier intitule le n° 30 de *Herschel* : 'Inégalités de la longitude et du rayon vecteur', quantités qu'il note respectivement δv et δr.
Bouvard et Le Verrier singularisent la plus forte inégalité (de longue période) subie par Uranus de la part de Saturne, dépendant de l'argument $\zeta' - 3\zeta$, qu'ils appellent "grande inégalité".
Le but de Le Verrier est de déterminer avec précision les perturbations, i.e. les modifications des éléments orbitaux d'Uranus, exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus, et d'en donner les expressions analytiques en fonction du temps. Il pourra ainsi déterminer avec précision les expressions analytiques des coordonnées d'Uranus, « qui renferment des termes dus au mouvement elliptique, et des perturbations provenant des autres planètes [ici Saturne et Jupiter] » (*Herschel* p. 6).
Les perturbations s'obtiennent en intégrant les équations dites de Lagrange (voir paragraphe suivant et [Perez, 2011]) : on obtient alors les perturbations à l'ordre 1 des masses. Le calcul des perturbations à l'ordre 1 est fait en supposant que chaque planète décrit son ellipse de référence ; or cette approximation n'est pas toujours suffisante : dans certains cas, il faut tenir compte de ces perturbations à l'ordre 1 pour avoir une position plus précise de chacune des deux planètes ; on peut alors calculer le supplément de perturbations créé par cet ajustement des positions des deux planètes ; le calcul est décrit dans la *Mécanique céleste* [Laplace, 1802], mais il est beaucoup plus délicat que le calcul à l'ordre 1 ; les compléments de perturbations ainsi calculés sont proportionnels au produit des masses des deux planètes concernées ; on dit que ce sont des perturbations à l'ordre 2 des masses.
Si l'on supprime à un instant t l'action de toutes les planètes perturbatrices, la planète étudiée (P) poursuit son chemin sur une ellipse fixe dont les éléments orbitaux sont ceux qu'elle avait à l'instant t : on dit que ces éléments orbitaux sont les éléments **osculateurs** de (P) à l'instant t.

4. Lire le § 2.3.2, qui décrit comment Le Verrier, aidé par son élève Émile Gautier, a réalisé tous ces calculs de perturbations en à peine 4 mois.

Fonction Perturbatrice (encadré 6)

La fonction perturbatrice R exercée par une planète sur une autre planète est l'outil essentiel dans le calcul des perturbations planétaires ; la fonction perturbatrice exercée sur la planète (P) par la planète (P') est donnée par la formule

$$R = \frac{1}{\Delta'} - \frac{r\,s}{r'^2}$$

où Δ' est la distance mutuelle de (P) et de (P'), r et r' les rayons vecteurs respectifs de (P) et de (P') et s le cosinus de l'angle $\widehat{PSP'}$. La fonction perturbatrice intervient dans les deuxièmes membres des équations de Lagrange (voir § 3.4.2), qui permettent de déterminer les perturbations des éléments orbitaux de (P).
La fonction R elle-même est relativement simple à calculer, mais pour résoudre les équations de Lagrange, il faut d'abord la dériver par rapport aux éléments elliptiques de la planète (P). Ce calcul est plus ou moins difficile selon le mode d'expression choisi pour R, mode que l'on détaille maintenant ; il y a en gros deux stratégies possibles :

1. On peut choisir le développement algébrique donné dans la *Mécanique céleste* comme combinaison linéaire de lignes trigonométriques dépendant des deux longitudes moyennes de ces planètes avec des coefficients fonction des éléments osculateurs de ces planètes. C'est la solution classique, utilisée systématiquement par Bouvard et par Le Verrier pour les perturbations exercées par Jupiter sur Uranus, pour celles exercées par Jupiter sur Saturne et pour celles exercées par Saturne sur Uranus, ces dernières comme vérification de sa méthode de double interpolation.
2. On peut aussi utiliser un développement numérique fonction des anomalies moyennes des deux planètes, comme le fera Le Verrier dans un premier temps. L'avantage de cette méthode, qualifiée de double interpolation par Le Verrier, est de ne pas avoir à faire d'hypothèses sur la petitesse des excentricités des deux planètes et sur la petitesse de leur inclinaison mutuelle. L'inconvénient est une plus grande difficulté à accéder aux dérivées utiles ; il faut récrire les équations de Lagrange, ce que Le Verrier sera amené à faire (voir § 3.6.1).

3.4.2 Équations de Lagrange

Lagrange classique

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{da}{dt} &=& 2ka\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
\dfrac{d\varepsilon}{dt} &=& -2ka\left(\dfrac{dR}{da}\right) + k\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{k\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \phi} \\
\dfrac{de}{dt} &=& -\dfrac{k\sqrt{1-e^2}}{e}\dfrac{\partial R}{\partial \varpi} - k\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
e\,\dfrac{d\varpi}{dt} &=& k\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{\partial R}{\partial e} + k\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\tan\dfrac{\phi}{2}\dfrac{\partial R}{\partial \phi} \\
\dfrac{d\phi}{dt} &=& -\dfrac{k}{\sin\phi\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \theta} - \dfrac{k\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial R}{\partial \varpi}\right) \\
\sin\phi\,\dfrac{d\theta}{dt} &=& \dfrac{k}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \phi}
\end{array}\right. \tag{3.9}$$

En partant de l'équation de Newton, Lagrange [Lagrange, 1778] a montré que les perturbations des éléments elliptiques d'une planète peuvent être obtenues à partir de la fonction perturbatrice R (voir encadré 6, p. 78), et que le mouvement perturbé est régi par les équations différentielles (3.9), dites de Lagrange, (voir par exemple [Perez, 2011]) :
Ces équations permettent de déterminer individuellement, par intégration, les différentes perturbations. On observe que les deuxièmes membres font intervenir les dérivées de la fonction perturbatrice par rapport aux éléments elliptiques de la planète perturbée. L'accès à ces dérivées partielles peut nécessiter une réécriture des équations de Lagrange, ce que Le Verrier sera amené à faire (voir § 3.6.1).

3.4.3 Stratégie utilisée par Le Verrier

Pour déterminer les expressions analytiques des perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus, Le Verrier va utiliser deux méthodes indépendantes [5] : il commence avec une méthode purement numérique (présentée dans ce chapitre à la section 3.5), qu'il qualifie de double interpolation, puis, à des fins de vérification, il utilise un développement algébrique classique (présenté à la section 3.7) de la fonction perturbatrice comme somme de fonctions trigonométriques avec des coefficients fonction des éléments elliptiques des deux planètes. Voici précisément ce qu'il écrit (*Herschel*, p. 8) :

> J'ai donc préféré commencer par l'emploi d'une méthode qui fournit simultanément toutes les inégalités. Cette dépendance mutuelle fait que, si le travail n'est pas complètement exact, il est nécessairement faux en tout point. [...] Reprenons, en effet, après avoir traité toutes les perturbations simultanément, le calcul d'une seule d'entre elles par une méthode directe [algébrique] : sa vérification entraînera celle du travail entier.

Et après avoir mené à bien le calcul numérique, et avant de débuter plus loin (§ 3.7) ce développement algébrique, il écrit (*Herschel*, n° 23) :

> nous allons retrouver toutes ces perturbations [établies par la méthode numérique de la double interpolation] avec une très grande approximation, et par une démarche tout à fait distincte de celle qui vient de nous servir [la double interpolation]. La concordance des résultats obtenus par les deux méthodes ne pourra laisser subsister aucun doute sur l'exactitude de cette partie de la théorie d'Uranus.

Observons que le mot 'interpolation' n'est pas vraiment adapté ici. Il s'agit de développer une fonction en série trigonométrique double, i.e. dépendant de deux arguments ; les coefficients sont calculables par une intégrale double ; mais pour avoir une valeur approchée d'une intégrale double dans le contexte choisi ici, Le Verrier doit faire la somme de $16 \times 16 = 256$ termes, ce qui est très difficile à gérer à la main, et il y a environ 200 coefficients de ce type à calculer. Le Verrier préfère déterminer le développement de la série double en deux temps, en fixant une des variables dans un premier temps, puis en la faisant varier dans un deuxième temps ; il n'a alors que des intégrales simples à calculer, soit, dans le contexte, des sommes de 'seulement' 16 termes.
La lecture des manuscrits permet de constater la grande efficacité dans la gestion des calculs, effectués de tête pour un grand nombre. Les calculs par double interpolation sont organisés dans des sortes de tableurs, dont la disposition spatiale a beaucoup progressé depuis leur première utilisation lors de l'étude en 1843 du mouvement de Mercure [Le Verrier, 1843b]. Une présentation de la disposition améliorée adoptée par Le Verrier est indiquée à la section 3.5.1 et une présentation de la disposition ancienne pour Mercure est donnée fig. A.4 de l'annexe.

5. Bouvard n'utilise que les expressions analytiques de la *Mécanique céleste* [Laplace, 1802].

On donne plus loin les développements détaillés pour Saturne. Par contre, pour alléger la présentation, on ne fera que quelques remarques sur les calculs des perturbations exercées par Jupiter, calculs qui sont tout aussi exacts que ceux effectués pour Saturne. Comme Le Verrier a constaté pour Saturne la concordance des deux méthodes de développement (numérique et algébrique), il se contentera pour Jupiter du seul développement algébrique.
Par contre, je trouve des différences non négligeables dans le calcul des perturbations dépendant du carré des masses, différences qui sont indiquées au § 3.9.

3.5 Détermination numérique de la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus

Dans un premier temps, Le Verrier va donc déterminer numériquement la fonction perturbatrice R, comme fonction seulement des anomalies moyennes ζ et ζ' d'Uranus et de Saturne, en utilisant les valeurs admises pour leurs paramètres orbitaux. Il ne dispose que de $\frac{\partial R}{\partial \zeta}$ et il n'a donc pas accès directement aux dérivées partielles intervenant dans les équations de Lagrange. Il lui faudra donc déterminer les dérivées partielles utiles ($\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$...) en fonction des dérivées facilement calculables, à savoir $\frac{\partial R}{\partial s}$ et $\frac{\partial R}{\partial r}$; les formules sont établies p. 10−13 de *Herschel* et recopiées dans la thèse au paragraphe 3.6.1.
On détaille dans les 5 sous-sections de la section 3.5.1 le principe du développement en série de la fonction perturbatrice, développement qui se fait en 3 étapes successives.
On illustre ensuite à la section 3.5.2 cette méthode de calcul en l'appliquant au calcul explicite de la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus. On pourra, en fin de calcul, comparer le résultat obtenu avec TRIP (§ 3.5.1) avec celui obtenu par Le Verrier (fig. 3.8).

3.5.1 Principe du développement en série de la fonction perturbatrice

On présente les différentes étapes, il y en a trois, pour obtenir l'expression de la fonction perturbatrice.

3.5.1.1 Présentation : but du calcul

Le Verrier veut développer [6] la fonction perturbatrice R en somme de lignes trigonométriques [7] :

$$R = C_0^0 + \sum_{(k,k')\neq(0,0)} C_k^{k'} \cos(k\zeta - k'\zeta') + S_k^{k'} \sin(k\zeta - k'\zeta') \tag{3.10}$$

où k et k' désignent deux entiers, ζ l'anomalie moyenne d'Uranus et ζ' celle [8] de la planète troublante ; les coefficients C et S dépendant des éléments osculateurs des deux planètes. Le développement effectif ne comporte qu'un nombre fini de termes, les termes non retenus étant supposés négligeables ; leur nombre varie en fonction de la situation étudiée (Saturne ou bien Jupiter) et de la précision souhaitée.
L'intérêt de cette décomposition est le suivant : comme ζ et ζ' dépendent linéairement du temps,

6. Le Verrier ne détaille pas dans Herschel la justification donnée ici dans les paragraphes qui suivent : il donne simplement le résultat. Le calcul de la fonction perturbatrice sur un échantillonnage de points se lit (pas très facilement) dans le cahier n° 2 des manuscrits et le principe de la double interpolation est expliqué dans [Le Verrier, 1855c].
7. On dirait aujourd'hui série de Fourier (1768−1830) double.
8. Dans un premier temps c'est Saturne ; puis dans un deuxième temps, ce sera Jupiter.

avec $\frac{d\zeta}{dt} = n$ et $\frac{d\zeta'}{dt} = n'$, R devient une fonction du temps et un terme en $C_k^{k'} \cos(k\zeta - k'\zeta')$ s'intègre alors, par rapport au temps, au premier ordre, en $\dfrac{C_k^{k'}}{nk - n'k'} \sin(k\zeta - k'\zeta')$

3.5.1.2 Étape 1 : Échantillonnage de la fonction perturbatrice

Pour le calcul effectif, Le Verrier ne va pas choisir exactement comme variables ζ et ζ', mais ζ et $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$. Ce choix est très habile, car les coefficients devant $\cos k\tilde{\phi}$ ont en facteur e^0 et sont donc a priori plus grands que ceux devant $\cos(k'\zeta' - k\zeta)$, $k' \neq k$, qui sont de degré $|k' - k|$ en les excentricités (voir fig. 3.17).
Pour déterminer le développement de la fonction perturbatrice, Le Verrier choisit 16 valeurs équiréparties pour ζ, qu'il numérote de 0 à 15 ainsi que 16 valeurs équiréparties pour la différence $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$, qu'il numérote également de 0 à 15. Pourquoi ce choix de 16 ? parce qu'il est préférable [9] de choisir un nombre qui est une puissance de 2, ce qui simplifie grandement les calculs faits à la main, car, avec ce choix, on fait fréquemment intervenir des sommes de produits ayant un facteur commun, et on peut alors effectuer des regroupements additifs avant de procéder à des multiplications : par exemple $A \sin\frac{\pi}{8} + B \sin\frac{\pi}{8} + C \sin\frac{\pi}{8}$, où A, B et C sont des constantes, est évalué en $(A + B + C) \sin\frac{\pi}{8}$, ce qui évite deux multiplications. Voir par exemple les expressions retenues pour $A_1^{k'}$ et $A_2^{k'}$ aux équations (3.14) et (3.15), afin de limiter le nombre de multiplications à effectuer. Si le découpage ne se fait pas avec une puissance de 2, le nombre de regroupements additifs de ce type est moindre.
Deux valeurs consécutives de ζ ont donc un écart de $\bar{\alpha} = \frac{360}{16} = 22°30'$. La k-ème valeur de ζ, que l'on notera ζ_k, est égale à $k\bar{\alpha}$. La k'-ème valeur $\zeta'_{k'}$ de ζ' vérifie $\zeta'_{k'} - \zeta_{k'} = k'\bar{\alpha}$.
Ensuite, Le Verrier détermine les valeurs numériques $R(\zeta_k, \zeta'_{k'})$ de la fonction perturbatrice R en ces 16×16 points à partir de la formule $\boxed{R = \dfrac{1}{\Delta'} - \dfrac{r\,s}{r'^2}}$ où Δ' désigne la distance Uranus-Saturne, r et r' les rayons vecteurs respectifs d'Uranus et de Saturne et s le cosinus de l'angle $\widehat{Ura\,Sun\,Sat}$; on rappelle (formule d'Al-Kachi) que $\Delta' = (r^2 + r'^2 - 2rr's)^{\frac{1}{2}}$.
Pour simplifier, on notera $R_{k,k'}$ la valeur prise par R quand $\zeta = \zeta_k = k\bar{\alpha}$ et $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta = k'\bar{\alpha}$.
Le Verrier détermine tous les $R_{k,k'}$ pas à pas, dans le cahier n° 2, selon l'ordre suivant :
• Il commence par évaluer les paramètres relatifs à Uranus ne dépendant que de ζ, à savoir :
Les 16 valeurs de l'équation du centre C_e pour les 16 valeurs choisies pour l'anomalie moyenne ζ ; (voir équation (3.7) à la table 3.4 la formule utilisée pour C_e).
Les 16 valeurs correspondantes de la longitude vraie v par la formule $v = \varpi + \zeta + C_e$;
Les 16 valeurs correspondantes du rayon vecteur r (voir équation (3.4) la formule utilisée pour r) ;
• Il fait le même travail pour Saturne pour les paramètres ne dépendant que de ζ', à savoir :
Les 16 valeurs de l'équation du centre ;
Les 16 valeurs correspondantes de la longitude vraie v' ;
Les 16 valeurs de $B = 2\sin^2\frac{\Phi}{2} \sin v'$ (Φ désigne l'inclinaison mutuelle des deux orbites) ;
Les 16 valeurs du rayon vecteur r' ;
• Il calcule ensuite les paramètres faisant intervenir ζ et ζ', à savoir :
$\tilde{\alpha} = \frac{r}{r'}$
$v' - v$
$\log(B \sin v)$
$\cos(v' - v)$
$B \sin v$
$s = \cos(v - v') - B \sin v$

9. Voir l'indication donnée pour un tel choix par Le Verrier à Gautier dans sa lettre du 20 juin, 1846, p. 416.

$\log s$
$\log \tilde{\alpha}$
$\log \tilde{\alpha}^2$
$\log \tilde{\alpha} s$
$\tilde{\alpha} s$
$1 + \tilde{\alpha}^2$
$2\tilde{\alpha} s$
$1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s$
$\log(1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s)$
$\log[(1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s)^{-1/2}]$
$(1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s)^{-1/2} \quad (= \frac{r'}{\Delta})$
$r'R = (1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s)^{-1/2} - \tilde{\alpha} s$
$\log(r'R)$
$\log(3knR)$
$3knR$

Ces calculs sont disposés par 3 blocs dans une même page, chaque bloc correspondant à une valeur particulière de $\zeta' - \zeta$. Voici une partie du schéma de l'organisation d'un de ces blocs ; le calcul complet s'étend sur 6 pages consécutives du manuscrit :

TABLE 3.5 – Disposition adoptée par Le Verrier pour un bloc afin de calculer, par étapes successives, les valeurs numériques de $3k_{u,s}nR$ pour une valeur donnée de $\zeta' - \zeta$, ici 0. Le calcul complet se poursuit sur les 5 pages suivantes. Un tableau rempli de valeurs numériques se trouve fig. 3.2 page suivante

$\zeta' - \zeta = 0$												
ζ	$v' - v$	$\log(\cos(v' - v))$	$\log(B \sin v)$	$B \sin v$	s	$\log s$	$\log \tilde{\alpha}$	$\log \tilde{\alpha}^2$	$\log \tilde{\alpha} s$	$\tilde{\alpha} s$	$1 + \tilde{\alpha}^2$	$1 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha} s$
0												
1												
2												
	.....											
15												

Le Verrier remplit donc des feuilles contenant tous les calculs intermédiaires ; une feuille de calcul est reproduite à la figure 3.2.
En fait, Le Verrier poursuit (sur 6 pages en tout) sa feuille de calcul au delà de la valeur de $3knR$ en évaluant (pour le choix en cours du couple (ζ, ζ')) d'autres intermédiaires afin de pouvoir accéder aux dérivées partielles de R par rapport à s et r.
Une fois les 256 valeurs $R_{k,k'}$ calculées, Le Verrier amorce le calcul des coefficients du développement en série de R ; ce calcul se fait en deux temps, que Le Verrier appelle première et deuxième interpolation. Ces deux étapes sont présentées dans les deux paragraphes suivants.

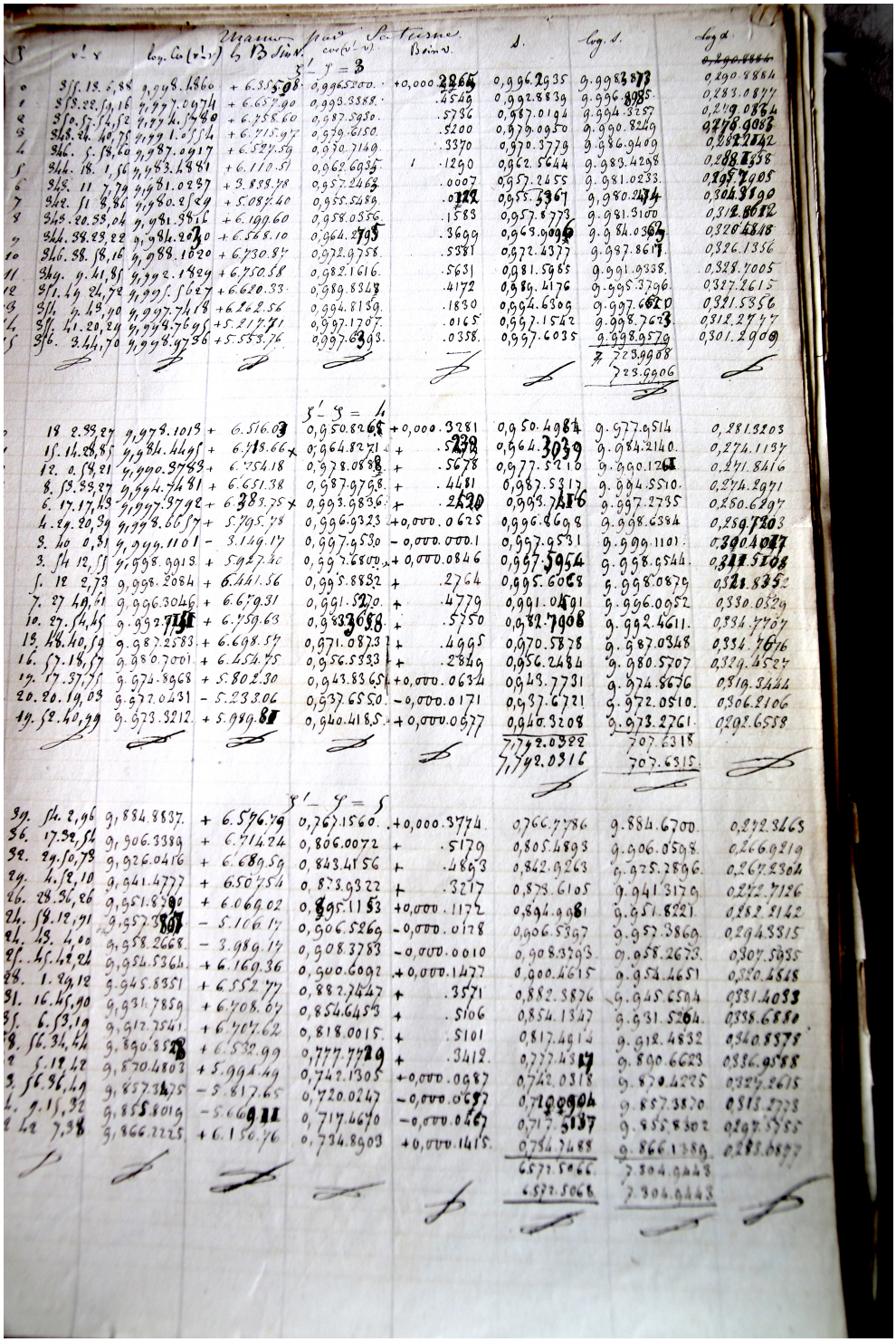


FIGURE 3.2 – Une page contenant les calculs successifs : $v - v'$, $\log\cos(v - v')$, $\log B \sin v$, s..., faits par Le Verrier pour accéder à une valeur numérique de $3k_{u,s}nR$ ainsi qu'à certaines de ses dérivées. On voit l'organisation par blocs, à raison de 3 blocs par feuille, chaque bloc correspondant à une valeur particulière de $\zeta' - \zeta$. Le calcul complet se poursuit sur les 5 pages suivantes du manuscrit. On notera la présence alternée des écritures de Le Verrier et de Gautier (cahier n° 2 p. 150)

3.5.1.3 Étape 2 : Première interpolation

Le Verrier fixe $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta = k'\bar{\alpha}$ et pour chaque valeur k', il développe la restriction de la fonction R à la droite d'équation $\tilde{\phi} = k'\bar{\alpha}$ en série trigonométrique :

$$R_{\tilde{\phi}=k'\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^{7} A_i^{k'} \sin i\zeta + \sum_{i=0}^{8} B_i^{k'} \cos i\zeta \tag{3.11}$$

Ainsi, on a pour tout k, k'

$$R_{k,k'} = \sum_{i=1}^{7} A_i^{k'} \sin i\zeta_k + \sum_{i=0}^{8} B_i^{k'} \cos i\zeta_k \tag{3.12}$$

En effectuant des combinaisons linéaires après multiplications par des sinus ou des cosinus, Le Verrier obtient pour les coefficients $A_i^{k'}$ et $B_i^{k'}$ les expressions suivantes (on peut dire aussi que ces coefficients sont donnés par des intégrales, que l'on approche, en termes modernes, par des sommes de Riemann) :

$$A_i^{k'} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{15} R_{j,k'} \sin ij\alpha \qquad B_i^{k'} = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{15} R_{j,k'} \cos ij\alpha \qquad (\tfrac{1}{16} \text{ pour } B_0^{k'}) \tag{3.13}$$

L'idée est de réduire au maximum le nombre de multiplications ; pour cela, Le Verrier regroupe les termes de ces sommes qui ont un multiplicande commun, à savoir $\sin\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{2\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$... C'est vraiment là que l'on voit l'intérêt d'avoir découpé la circonférence à l'aide d'une puissance de 2. Le Verrier utilise le regroupement suivant pour $A_{1,k'}$:

$$A_1^{k'} = \tfrac{1}{8}\left[((1)+(7)-(9)-(15))\sin\tfrac{\pi}{8} + ((2)+(6)-(10)-(14))\sin\tfrac{2\pi}{8} + ((3)+(5)-(11)-(13))\sin\tfrac{3\pi}{8} + ((4)-(12))\right] \tag{3.14}$$

où $(i) = R_{i,k'}$; de même $A_{2,k'}$ est calculé à partir du regroupement

$$A_2^{k'} = \tfrac{1}{8}\left[((1)+(3)-(5)-(7)+(9)+(11)-(13)-(15))\sin\tfrac{\pi}{4} + ((2)-(6)+(10)-(14))\right] \tag{3.15}$$

et des formules semblables pour les autres valeurs de i.
Pour les coefficients $B_i^{k'}$, il utilise des formules du même type, mais avec des cosinus.
En conséquence, Le Verrier dispose dans la première ligne de sa feuille de calcul les 16 valeurs de $\zeta' - \zeta$ et dans la première colonne des expressions du type

$$\tfrac{1}{8}(4),\ \tfrac{1}{8}[(4)-(12)],\ \tfrac{1}{8}[(1)+(7)-(9)-(15))],\ \tfrac{1}{8}\left[(1)+(3)-(5)-(7)+(9)+(11)-(13)-(15)\right]...$$

Et sur les lignes suivantes, il multiplie ces valeurs par $\sin\frac{\pi}{8}$, et/ou $\sin\frac{\pi}{4}$, et/ou $\sin\frac{3\pi}{8}$..
Il y a 81 lignes du type précédent en tout, s'étalant sur deux pages au format (voisin de) A3 ; une reproduction d'une telle page est donnée à la figure 3.3, page suivante.
Sur les dernières lignes de la colonne n° k', on trouve les valeurs des coefficients cherchés $A_i^{k'}$ et $B_i^{k'}$. En fait, il faut faire la différence ou la somme de deux termes figurant explicitement sur la feuille de calcul pour obtenir ces deux nombres (pour comprendre la raison de ce calcul pas complètemnt achevé, voir la disposition des calculs à la table D.1 de l'annexe). Il est étonnant que Le Verrier ne fasse pas cette dernière petite étape ; il termine en fait cette feuille de calcul dans celle qui contiendra la deuxième interpolation ; et cela est possible, car Le Verrier utilise ici des feuilles de calcul séparées. On a donné au § 3.5.2.2 certaines valeurs numériques de $A_i^{k'}$ et $B_i^{k'}$.

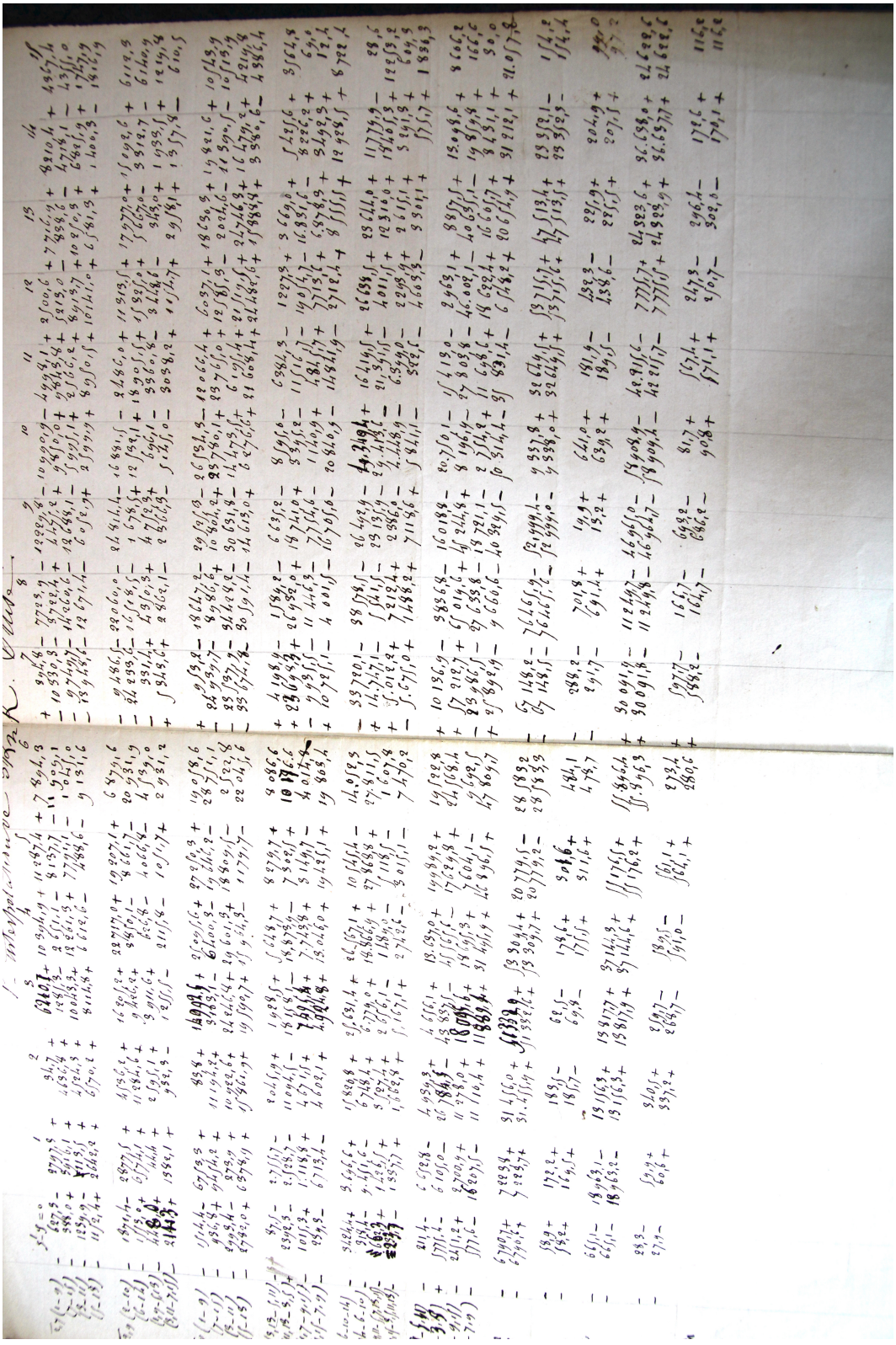


FIGURE 3.3 – Feuille de calcul pour la première interpolation dans le calcul de $3k_{u,s}nR$. On voit sur la première ligne les valeurs successives de $\zeta' - \zeta$ et dans la première colonne les calculs intermédiaires successifs :
$\frac{1}{8}(1),\ \frac{1}{8}(9),\ \frac{1}{8}(1-9),\ \frac{1}{8}(6-14),\ \frac{1}{8}(1+9-5-13),\ \frac{1}{8}(0+4+8+12),\ 1-9,\ 7-15\ldots$
$\bar{2}.7(1-9)$ représente $\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4}(R_{1,k'}-R_{9,k'})$; $\bar{2}.9(6-14)$ représente $\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{8}(R_{6,k'}-R_{14,k'})$...
(cahier n° 2 p. 168)

3.5.1.4 Deuxième interpolation

Les feuilles de calcul sont séparées, donc Le Verrier peut avoir devant ses yeux les valeurs des coefficients précédents $A_i^{k'}$ et $B_i^{k'}$, obtenus avec la première interpolation.
Pour toute valeur de i fixée, il considère des fonctions trigonométriques, S_i et T_i, de la variable $\tilde{\phi}$ telles que

$$\forall(i,k') \quad S_i(k'\bar{\alpha}) = A_i^{k'} \quad \text{et} \quad T_i(k'\bar{\alpha}) = B_i^{k'} \tag{3.16}$$

que l'on développe en série de fonctions trigonométriques de la variable $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$.

$$S_i(\tilde{\phi}) = \sum_{j=1}^{7} C_i^j \sin j\tilde{\phi} + \sum_{j=0}^{8} D_i^j \cos j\tilde{\phi} \qquad \text{et} \qquad T_i(\tilde{\phi}) = \sum_{j=1}^{7} E_i^j \sin j\tilde{\phi} + \sum_{j=0}^{8} F_i^j \cos j\tilde{\phi} \tag{3.17}$$

Le calcul effectif est identique au précédent, puisque l'on connaît un échantillonnage de S_i et de T_i, à savoir $S_i(k'\bar{\alpha}) = A_i^{k'}$ et $T_i(k'\bar{\alpha}) = B_i^{k'}$, en remplaçant i par k' ; mais la disposition adoptée par Le Verrier est légèrement différente : il dispose les A_i et les B_i sur des lignes successives et il place les combinaisons utiles : $\frac{1}{8}(4)$, $\frac{1}{8}((4)-(12))$, $\frac{1}{8}((1)+(5)-(9)-(13))....)$ dans les colonnes successives ; voir un exemple fig. 3.4 p. 87.
En fin de calcul, il obtient [10] les coefficients C_i^j, D_i^j, E_i^j, F_i^j.

10. Sur les dernières colonnes cette fois, mais les valeurs finales sont aussi à former en combinant deux valeurs présentes sur la feuille.

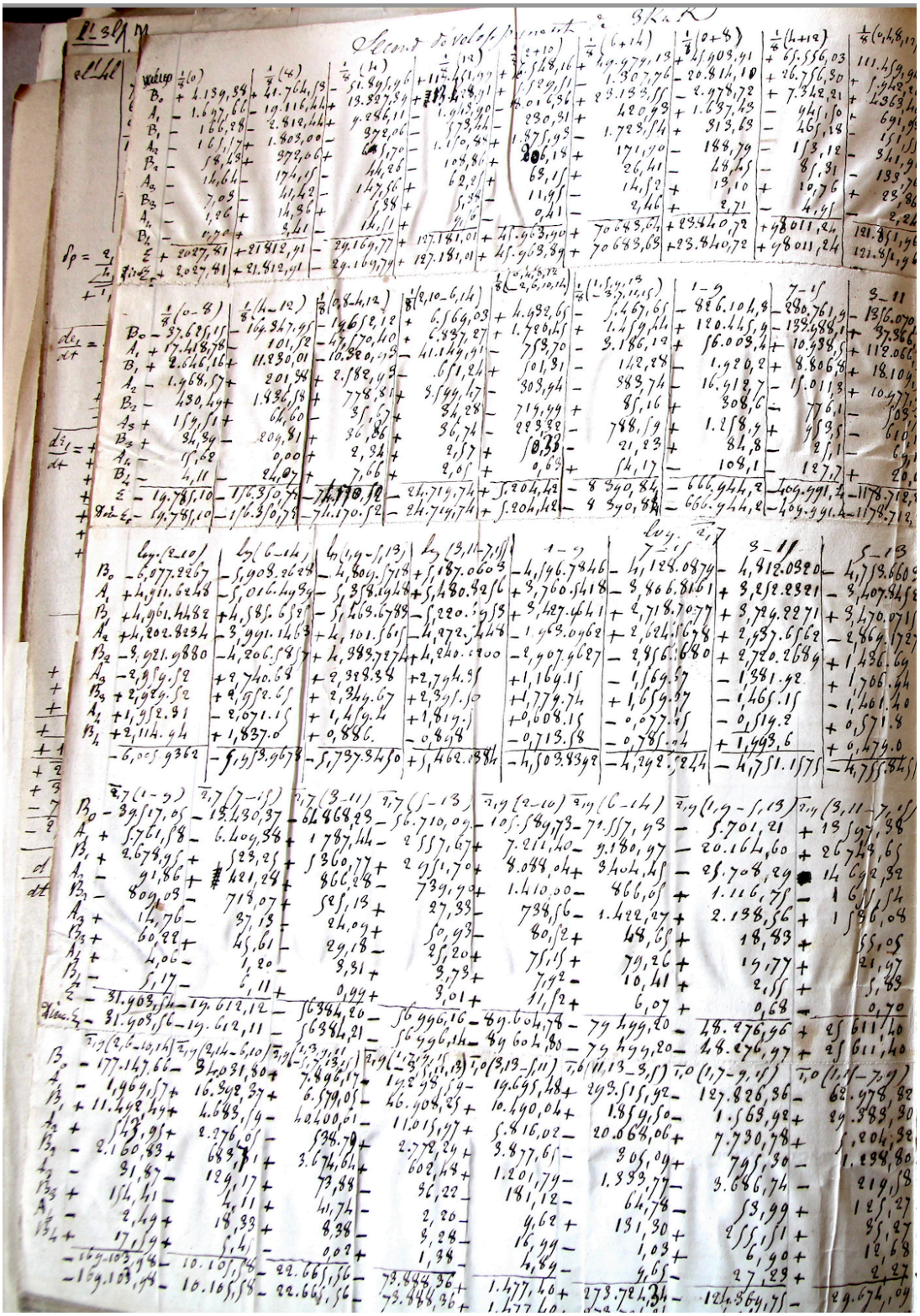


FIGURE 3.4 – Deuxième interpolation pour le calcul de $3k_{u,s}nR$. Dans les lignes, on lit les valeurs des coefficients A_i et B_i et dans les colonnes, les sous-expressions nécessaires $(\frac{1}{4}(0), \frac{1}{8}((0)-(8)), ...)$ pour accéder en fin de calcul aux valeurs finales des coefficients utiles C_i^j, D_i^j, E_i^j, F_i^j ; (extrait du cahier n° 2, p. 23)

3.5.1.5 Conclusion

$$\text{Si on pose} \qquad F(\zeta,\ \tilde{\phi}) = \sum_i S_i(\tilde{\phi}) \sin i\zeta + T_i(\tilde{\phi}) \cos i\zeta =$$

$$\sum_i \left(\sum_j C_i^j \sin j\tilde{\phi} + \sum_j D_i^j \cos j\tilde{\phi} \right) \sin i\zeta + \sum_i \left(\sum_j E_i^j \sin j\tilde{\phi} + \sum_j F_i^j \cos j\tilde{\phi} \right) \cos i\zeta \qquad (3.18)$$

on aura pour tout $(k, k') \in [\![0, 15]\!]^2$

$$F(k\bar{\alpha}, k'\bar{\alpha}) = \sum_i S_i(k'\alpha) \sin i\zeta_k + T_i(k'\alpha) \cos i\zeta_k = \sum_i A_i^{k'} \sin i\zeta_k + \sum_i B_i^{k'} \cos i\zeta_k = R_{k,k'} = R(k\bar{\alpha}, k'\bar{\alpha}) \qquad (3.19)$$

F peut donc être considérée [11] comme une bonne approximation de R.
Il ne reste plus alors qu'à développer les produits [12] de sinus et de cosinus dans l'équation (3.18), pour avoir le développement voulu de R en série trigonométrique.

Le calcul effectif du développement de la fonction perturbatrice R de Saturne sur Uranus en série trigonométrique s'étend (dans le cahier n° 2) sur
– 38 pages pour l'échantillonnage de R,
– 4 pages pour la première interpolation et
– 4 pages pour la deuxième interpolation.

Raccourci pour les développements en série double d'une fonction de 2 variables $f(\zeta,\ \zeta')$
Le développement en série d'une telle fonction f nécessite le calcul des coefficients d'une série trigonométrique double ; il existe un formulaire simple :

$$C_k^{k'} = \frac{1}{2\pi^2} \iint f(\zeta,\ \zeta') \cos(k\zeta - k'\zeta') d\zeta d\zeta' \quad ; \quad S_k^{k'} = \frac{1}{2\pi^2} \iint f(\zeta,\ \zeta') \sin(k\zeta - k'\zeta') d\zeta d\zeta' \quad (k, k') \neq (0, 0) \qquad (3.20)$$

intégrales que l'on approche par des sommes de Riemann (en termes modernes) :

$$C_k^{k'} = \sum_{0 \leq j,\, j' \leq 15} f(j\bar{\alpha},\ j'\bar{\alpha}) \cos(kj\bar{\alpha} - k'j'\bar{\alpha}) \qquad \bar{\alpha} = \frac{\pi}{8} \qquad (3.21)$$

On obtient, sans surprise, exactement les mêmes valeurs qu'avec la double interpolation [13], ce que l'on vérifie numériquement, car c'est en fait la même méthode. Simplement, l'évaluation d'une intégrale double nécessite de faire ici la somme de 256 termes, ce qui est peu pratique à effectuer à la main, d'où l'obligation pour Le Verrier de scinder le calcul complet en deux étapes.

11. Les explications qui précèdent ne figurent pas dans *Herschel* ; on trouve ces développements avec des explications et des notations voisines dans [Le Verrier, 1855c]. En effet, cette méthode de double interpolation a déjà été utilisée – mais de façon moins efficace – dans sa première théorie de Mercure [Le Verrier, 1843b].

12. On rappelle la petite astuce de calcul fait à la main : Le Verrier multiplie toutes les expressions de ce type [produit de deux séries] par 2, afin de développer $2 \sin a \cos b$, ce qui évite les divisions ultérieures par 2. Le Verrier calcule donc en fait $6k_{u,s}nR$.

13. Il faut simplement ajuster les indices, car Le Verrier a pris comme variables principales ζ et $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$.

Résumé des opérations pour développer en série double une fonction f dépendant de deux variables trigonométriques (encadré 7)

On résume ici les calculs lus dans les manuscrits (Ms 1063 (27) cahier n° 2) et partiellement détaillés dans [Le Verrier, 1855d], p. 108−114.
Soit à développer une fonction f en série trigonométrique double : $f(\zeta, \zeta')$.

Échantillonnage

On découpe la circonférence en 16 points équirépartis : $\zeta_k = k\bar{\alpha}$; on fait de même pour l'angle $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$: $\zeta'_{k'} - \zeta_{k'} = k'\bar{\alpha}$.
On échantillonne f en ces 16×16 points $(\zeta_k, \zeta'_{k'})$ et on note ces valeurs dans un tableau.

Première interpolation

On commence par fixer $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$; on obtient ainsi pour chaque valeur de $\zeta' - \zeta = k'\bar{\alpha}$ les valeurs des coefficients du développement en série de la fonction f restreinte à $\zeta' - \zeta = k'\bar{\alpha}$. On note ces coefficients

$$A_1^{k'},\ A_2^{k'},\ ....,\ A_7^{k'},\ B_0^{k'},\ B_1^{k'},\ ...,\ B_8^{k'} \tag{3.22}$$

Deuxième interpolation

À partir des calculs précédents, on forme le tableau 16×16 dont les colonnes sont les valeurs obtenues pour $A_1,\ ..,A_7,\ B_0,\ ...,\ B_8$ pour les 16 valeurs de $\zeta' - \zeta$ et on recommence [a] *exactement* la même série de calculs pour développer chacune des 'fonctions' $A_1,\ ...,\ B_8$ en série de la variable $\zeta' - \zeta$.
Enfin, on combine les deux calculs selon la formule (3.18) pour former la série trigonométrique de f.
Le Verrier utilise de façon répétée cet algorithme qui lui permet de calculer efficacement [b] chacun des développements en série des paramètres d'Uranus : $a,\ e,\ \phi,\ \theta$ ....
Le Verrier a grandement amélioré son efficacité depuis ses premiers calculs sur Mercure, qui étaient beaucoup moins bien disposés (une reproduction d'une de ses pages de calcul pour Mercure est donnée fig. A.4 de l'annexe). Il a ajouté, par exemple, des regroupements de termes, qui permettent de réduire le nombre de multiplications. Par comparaison, une reproduction d'une page de calcul pour Uranus est donnée fig. 3.4.
L'ensemble de ces développements forme la majeure partie du cahier n° 2 des manuscrits et s'étend sur environ 325 pages, densément remplies.

a. Le programme de calcul est absolument identique ; la séquence est la suivante : on calcule les valeurs de f sur l'échantillon 16×16 ; une première application de la macro `tableau_coefs` (voir p. 484 de l'annexe) donne le tableau `tab` de coefficients ${A_i}^{k'}$, ${B_i}^{k'}$; ensuite, on applique `tableau_coefs` à la transposée de `tab` pour obtenir les coefficients ${C_i}^j$, ${D_i}^j$, ${E_i}^j$, ${F_i}^j$; il suffit ensuite de reconstituer les sinus et les cosinus selon la formule (3.18).

b. Les manuscrits de Le Verrier déposés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris sont impressionnants de clarté et de maîtrise. On constate, par exemple, que les calculs sont systématiquement refaits, puis certifiés à l'aide de son paraphe (∞) et qu'il y a fort peu de ratures. La séquence de calculs est répétée un grand nombre de fois pour déterminer les perturbations des différents éléments orbitaux d'Uranus par Saturne, puis d'Uranus par Jupiter, et enfin de Saturne par Jupiter...

3.5.2 Calcul explicite du développement de la fonction perturbatrice à l'aide de TRIP

Pour illustrer les considérations précédentes, on donne les résultats numériques que l'on obtient avec TRIP [Gastineau, 2010] pour les 3 étapes précédentes : échantillonnage, première interpolation, puis deuxième interpolation pour la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus.

3.5.2.1 Échantillonnage de la fonction perturbatrice

On a reporté, table 3.6, une partie des valeurs numériques de $3k_{u,s}nR_{k,k'}$ obtenues avec TRIP (en se limitant à $k' \leq 7$). Le tableau des valeurs trouvées par Le Verrier se trouve p. 24 du cahier n° 2 des manuscrits et Le Verrier obtient quasiment les mêmes résultats, comme on peut le constater à la figure 3.5.

TABLE 3.6 – Valeurs numériques de la fonction perturbatrice $3k_{u,s}nR$ obtenues par TRIP en 16×16 points. Le tableau calculé par Le Verrier est quasi identique, comme on peut le constater à la figure 3.5.

	Valeurs de la fonction perturbatrice $3k_{u,s}nR$ obtenues par TRIP à partir de l'expression littérale de R, $R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r.s}{r'^2}$							
$\zeta' - \zeta$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\zeta = 0$	31256	-257260	-393355	-377562	-336688	-260718	-107451	94642
$\zeta = 1$	25282	-245622	-363413	-340022	-304699	-257506	-135317	47917
$\zeta = 2$	21211	-229968	-338461	-318977	-289520	-265668	-169200	1211
$\zeta = 3$	19560	-213849	-321183	-314584	-293033	-285552	-207391	-42059
$\zeta = 4$	20112	-199755	-311834	-323577	-313799	-316950	-248038	-77748
$\zeta = 5$	22328	-189016	-309780	-342240	-347778	-357590	-287604	-100133
$\zeta = 6$	25660	-182206	-314395	-367944	-390298	-402842	-320093	-102263
$\zeta = 7$	29675	-179550	-325281	-399025	-436937	-446099	-337530	-78357
$\zeta = 8$	34029	-181169	-342092	-433873	-482907	-479180	-332130	-28116
$\zeta = 9$	38394	-187143	-364139	-469844	-522004	-493472	-300347	39663
$\zeta = 10$	42382	-197411	-389782	-502318	-546533	-482973	-247034	108538
$\zeta = 11$	45479	-211478	-415763	-524539	-549356	-448425	-185546	161759
$\zeta = 12$	47043	-227972	-436915	-529188	-527740	-398821	-131789	189679
$\zeta = 13$	46418	-244251	-447131	-511880	-486015	-347375	-96707	191462
$\zeta = 14$	43231	-256583	-442067	-474590	-433855	-304846	-83277	171908
$\zeta = 15$	37787	-261414	-422212	-425894	-381517	-275979	-88570	137599

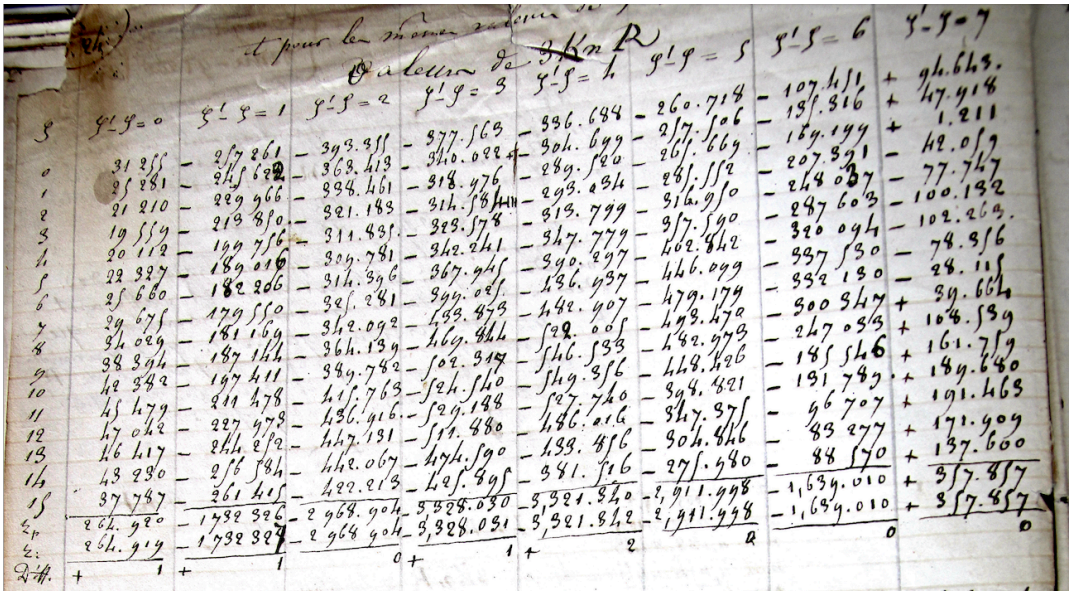


FIGURE 3.5 – Valeurs numériques de $3k_{u,s}nR$ calculées par Le Verrier sur l'échantillonnage 16×16. Les valeurs trouvées par TRIP (tableau supérieur) coïncident à l'unité près. Comme vérification, Le Verrier calcule sur les deux dernières lignes la somme (Σ_p) des termes d'indices pairs, la somme (Σ_i) des termes d'indices impairs et vérifie que $\Sigma_p - \Sigma_i \simeq 0$ (cahier n° 2 p. 24).

3.5.2.2 Première interpolation

À partir de ce tableau, on effectue la première interpolation selon l'algorithme de Le Verrier ; l'algorithme complet est explicité au § D.2 de l'annexe. On obtient, table 3.7, le tableau des

coefficients A et B en fonction des valeurs de $\zeta' - \zeta$.
Les valeurs obtenues par Le Verrier (p. 25 du cahier n° 2) sont quasi identiques, comme on le constate à la figure 3.6. (Par contre, la disposition n'est pas tout à fait la même).

TABLE 3.7 – Résultats de la première interpolation pour $3k_{u,s}nR$ obtenus par TRIP (limité à $k' \leq 7$). Le tableau calculé par Le Verrier est quasi identique (à la disposition près), comme on le voit à la figure 3.6, et ce tableau se trouve à la page 25 du cahier n° 2 des manuscrits

	Valeurs des coefficients de Fourier de $3k_{u,s}nR$ déterminés par TRIP à partir du tableau des valeurs de R							
$\zeta' - \zeta$	0	1	2	3	4	5	6	7
A_1	-13581.3	14447.2	62911.9	102665.5	106619.2	41558.9	-57166.4	-134296.6
A_2	-1324.5	2852.8	7054.8	5311.1	-2976.3	-10237.9	-3215.7	10025.2
A_3	-116.9	341.4	369.1	-132.5	-354.1	613.4	962.9	-579.8
A_4	-9.9	32.4	-3.2	7.0	43.2	14.2	-117.1	-4.0
A_5	-0.8	2.6	-2.3	7.4	-2.8	-9.9	4.9	3.5
A_6	-0.1	0.2	-0.2	0.9	-1.4	0.4	0.2	-0.57
A_7	-0.0	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.1	-0.1	0.1
B_0	33115.4	-216540.4	-371112.6	-416003.6	-415167.3	-363999.9	-204876.5	44731.4
B_1	-1329.8	-37926.3	-26312.6	27635.8	74288.8	110353.0	111792.6	60183.7
B_2	-467.7	-2675.4	3325.5	10333.2	5485.3	-6031.2	-14939.6	-11350.7
B_3	-56.2	-120.3	678.0	528.8	-1180.8	-1125.0	554.0	1185.9
B_4	-5.5	1.5	63.5	-46.3	-116.0	82.6	24.5	-117.0
B_5	-0.5	1.1	3.4	-9.2	1.6	2.6	-7.0	9.5
B_6	-0.0	0.2	0.0	-0.8	0.7	-0.4	0.8	-0.6
B_7	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.1	0.0	0.0	0.03
B_8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

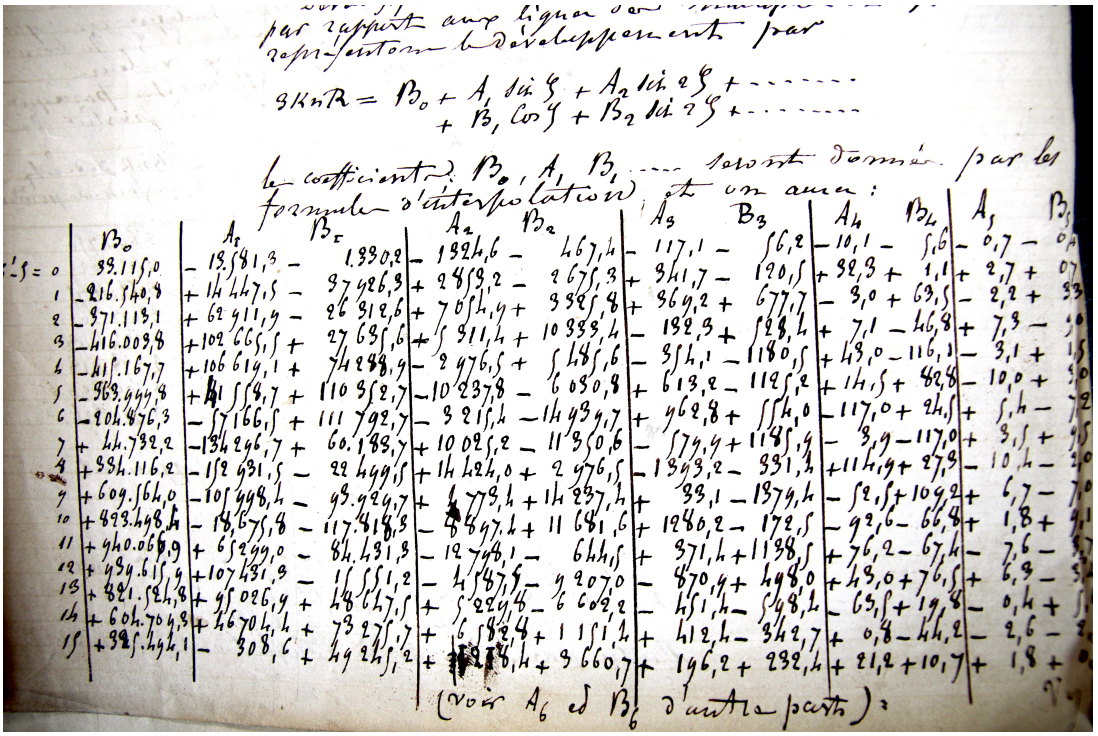


FIGURE 3.6 – Valeurs des coefficients A_i et B_i trouvées par Le Verrier pour la première interpolation de $3k_{u,s}nR$. On trouve les mêmes valeurs avec TRIP à quelques dixièmes près. Dans la colonne de gauche, on lit les valeurs de $\zeta - \zeta'$ (cahier n° 2 p. 25).

3.5.2.3 Deuxième interpolation

À partir des valeurs qui viennent d'être trouvées, on développe les 'fonctions'

$$A_1, ..., \ A_7, \ B_0, ..., \ B_8$$

en série trigonométrique de $\tilde{\phi} = \zeta' - \zeta$ en utilisant *exactement* la même macro `tableau_coefs` (voir p. 484 de l'annexe) appliquée à la *transposée* de la matrice des coefficients A et B. On rappelle que les coefficients C_k sont les coefficients des $\sin k(\zeta' - \zeta)$, D_k ceux de $\cos k(\zeta' - \zeta)$ dans le développement des A_i, E_k sont les coefficients des $\sin k(\zeta' - \zeta)$ et F_k ceux des $\cos k(\zeta' - \zeta)$ dans le développement des B_i (par simplification, on a sous-entendu dans le tableau suivant l'indice supérieur pour les coefficients C, D, E, F).
Les résultats sont donnés à la table 3.8. Là aussi, on retrouve quasi à l'identique les valeurs (cahier n° 2, p. 29) de Le Verrier, comme on le constate sur la figure 3.7.

TABLE 3.8 – Résultats de la deuxième interpolation de $3k_{u,s}nR$. Coefficients des développements de $A_1, ..., \ A_7, \ B_0, \ ..., \ B_8$ comme fonctions de $\zeta' - \zeta$. On constate que les coefficients du développement $C_i, \ D_i$ ne décroissent pas très vite (et idem pour E_i et F_i). Ces valeurs s'interprètent sous la forme de l'équation (3.18) à la page 27 du cahier n° 2 et sont reproduites à la fig. 3.7

	Valeurs des coefficients des développements des A_i et des B_i par TRIP											
coef	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	B_0	B_1	B_2	B_3	coef
C_1	-4578.4	1379.8	75.1	1.3	-0.27	-0.03	0.00	-692958.9	45992.8	-517.7	-80.8	E_1
C_2	13416.2	-1190.1	108.1	11.0	0.88	0.04	0.00	14465.2	-81550.5	7274.0	78.6	E_2
C_3	-2661.8	1011.3	-177.4	3.8	0.85	0.11	0.01	-14047.9	-319.1	-8236.4	674.2	E_3
C_4	1459.4	-142.2	85.2	-21.2	-0.67	-0.04	0.00	-5467.6	-3186.1	-383.8	-788.6	E_4
C_5	1074.2	326.3	15.5	8.9	-2.12	-0.14	-0.01	1551.6	-844.1	-241.8	-54.3	E_5
C_6	-258.3	112.3	39.4	5.8	1.65	-0.06	-0.00	1327.0	749.2	75.1	4.9	E_6
C_7	-436.2	-110.8	9.7	6.3	1.33	0.26	0.00	32.1	547.8	130.9	30.0	E_7
D_0	9981.6	839.6	42.6	0.6	-0.10	-0.01	0.00	218045.9	9726.3	58.3	-30.7	F_0
D_1	67539.4	674.8	80.4	8.3	0.61	0.03	0.00	-142793.4	14943.2	531.4	61.5	F_1
D_2	-94478.6	5355.2	-71.7	-0.8	0.50	0.07	0.00	-38950.8	-21336.9	1381.2	34.6	F_2
D_3	2707.3	-8635.4	521.7	-11.6	-0.99	-0.05	0.00	-9984.5	-5697.6	-2406.9	62.7	F_3
D_4	1720.4	501.3	-720.0	50.4	-1.09	-0.14	-0.01	4932.6	-753.6	-303.8	-223.4	F_4
D_5	-654.4	146.1	55.8	-56.1	5.32	0.03	-0.00	2797.8	1622.9	178.5	14.2	F_5
D_6	-662.2	-189.4	0.5	5.5	-4.13	0.55	0.01	-353.4	695.1	176.3	39.1	F_6
D_7	82.7	-59.7	-19.8	-2.9	-0.28	-0.46	0.03	-520.0	-283.5	-25.2	-1.0	F_7
D_8	182.3	42.8	-6.3	-3.2	-0.66	-0.09	-0.04	-58.6	-245.7	-57.5	-13.4	F_8

À partir de ces valeurs, on peut reconstituer, à l'aide de la formule (3.18) (page 88 de la thèse), le développement de la fonction R. Et après développement, on constate que les valeurs trouvées par Le Verrier coïncident à moins de 0.1 près avec les valeurs trouvées par TRIP, comme on peut le constater au paragraphe 3.5.2.4, ce qui montre encore une fois les qualités exceptionnelles de Le Verrier, calculateur.

On a reproduit figure 3.7 l'expression qu'obtient Le Verrier pour $3k_{u,s}nR$ sous forme de produit de séries.
Comme il reste ces produits de lignes trigonométriques à effectuer, Le Verrier formera en fait $6k_{u,s}nR$ pour éviter les divisions par 2.

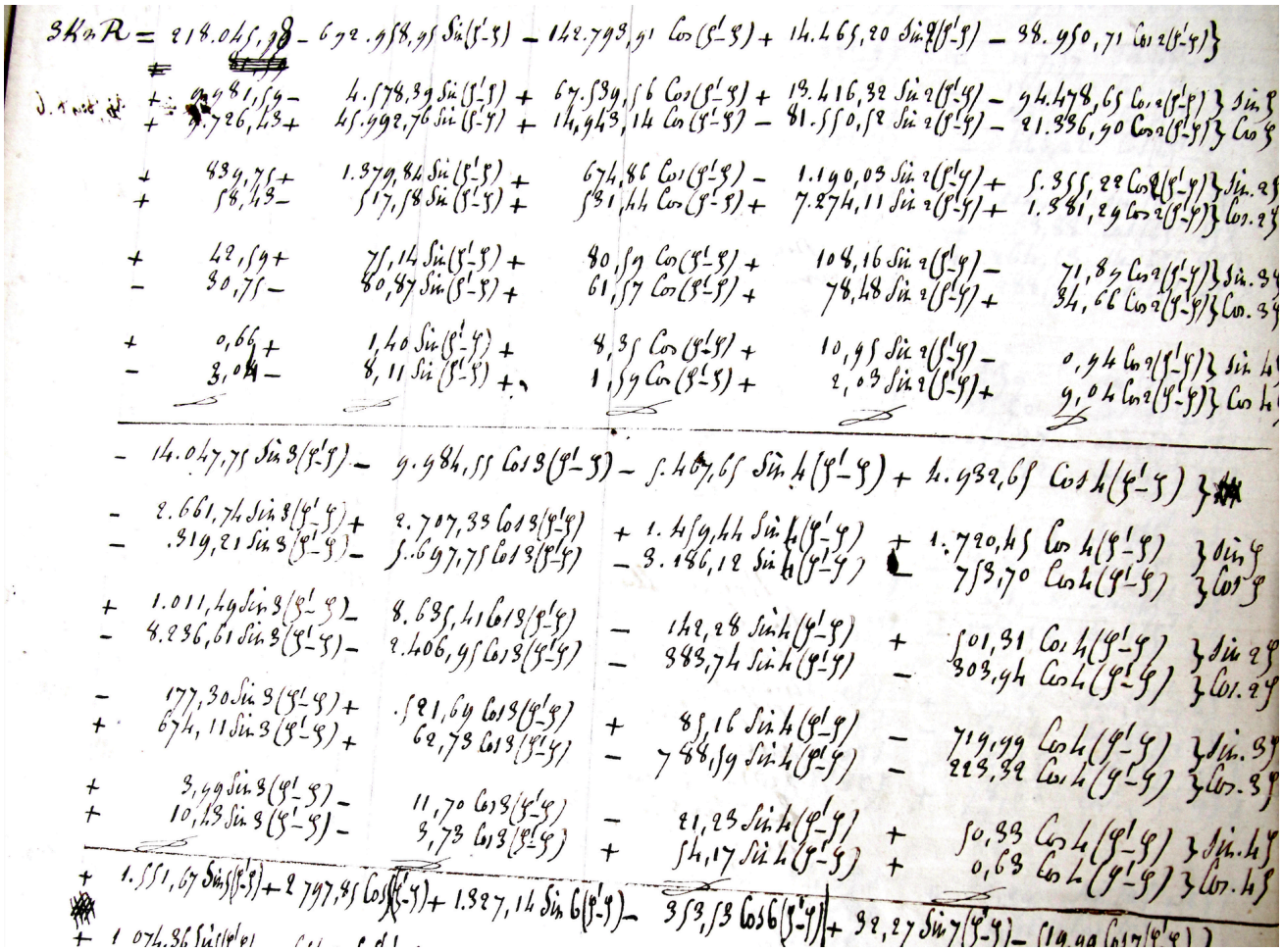


FIGURE 3.7 – Expression obtenue par Le Verrier pour la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus. Il reste les produits trigonométriques à linéariser, ce que fera Le Verrier à l'étape suivante. Les coefficients de la première ligne ($=B_0$) sont successivement F_0, E_1, F_1, E_2, F_3, ce qui permet les comparaisons avec les valeurs trouvées par TRIP (table 3.8) et de même pour les autres lignes : la deuxième ligne contient le développement de A_1 (coefficients D_0, C_1, D_1, C_2..), la troisième celle de B_1, la quatrième celle de A_2...

3.5.2.4 Fonction perturbatrice obtenue par TRIP et par Le Verrier

Fonction perturbatrice obtenue à l'aide de TRIP

	$6knR =$	436 091, 90	−	1 385 917.97	$\sin(\zeta' - \zeta)$	−	285 586.94	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			+	28 930.44	$\sin(2\,\zeta' - 2\zeta)$	−	77 901.68	$\cos(2\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	28 095.83	$\sin(3\,\zeta' - 3\zeta)$	−	19 969.04	$\cos(3\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			−	10 935.29	$\sin(4\,\zeta' - 4\zeta)$	+	9865.22	$\cos(4\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	3103.32	$\sin(5\,\zeta' - 5\zeta)$	+	5595.73	$\cos(5\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	2654.12	$\sin(6\,\zeta' - 6\zeta)$	−	706.95	$\cos(6\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			−	64.29	$\sin(7\,\zeta' - 7\zeta)$	−	1040.06	$\cos(7\,\zeta' - 7\,\zeta)$
+	19 963.31	$\sin(\zeta)$	+	113 532.38	$\sin(\zeta')$	+	19 521.73	$\cos(\zeta')$
+	19 452.70	$\cos(\zeta)$	−	21 546.60	$\sin(\zeta' - 2\,\zeta)$	+	10 364.84	$\cos(\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	176 029.27	$\sin(2\,\zeta' - \zeta)$	−	34 753.21	$\cos(2\,\zeta' - \zeta)$
			+	12 928.10	$\sin(2\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	7920.64	$\cos(2\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			+	2388.12	$\sin(3\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	3035.81	$\cos(3\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	3026.50	$\sin(3\,\zeta' - 4\,\zeta)$	−	8359.51	$\cos(3\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			−	1465.76	$\sin(4\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	2213.13	$\cos(4\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			−	4906.57	$\sin(4\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	705.85	$\cos(4\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			−	1498.60	$\sin(5\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	548.68	$\cos(5\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			−	189.72	$\sin(5\,\zeta' - 6\,\zeta)$	+	2697.20	$\cos(5\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			+	87.05	$\sin(6\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	953.54	$\cos(6\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	1411.46	$\sin(6\,\zeta' - 7\,\zeta)$	+	436.81	$\cos(6\,\zeta' - 7\,\zeta)$
			+	630.57	$\sin(7\,\zeta' - 6\,\zeta)$	+	152.62	$\cos(7\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			+	465.05	$\sin(7\,\zeta' - 8\,\zeta)$	−	719.80	$\cos(7\,\zeta' - 8\,\zeta)$
+	1679.36	$\sin(2\,\zeta)$	+	157.05	$\sin(\zeta' + \zeta)$	−	848.40	$\cos(\zeta' + \zeta)$
+	116.69	$\cos(2\,\zeta)$	−	1192.60	$\sin(\zeta' - 3\,\zeta)$	+	1911.20	$\cos(\zeta' - 3\,\zeta)$
			+	12 629.29	$\sin(2\,\zeta')$	+	2571.34	$\cos(2\,\zeta')$
			+	1918.79	$\sin(2\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	191.12	$\cos(2\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			−	16 871.91	$\sin(3\,\zeta' - \zeta)$	−	3418.34	$\cos(3\,\zeta' - \zeta)$
			+	399.00	$\sin(3\,\zeta' - 5\,\zeta)$	−	1395.58	$\cos(3\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	117.56	$\sin(4\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	161.64	$\cos(4\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	885.21	$\sin(4\,\zeta' - 6\,\zeta)$	−	446.14	$\cos(4\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			−	95.62	$\sin(5\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	147.78	$\cos(5\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			−	387.99	$\sin(5\,\zeta' - 7\,\zeta)$	+	504.86	$\cos(5\,\zeta' - 7\,\zeta)$
			−	114.27	$\sin(6\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	63.97	$\cos(6\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	264.59	$\sin(6\,\zeta' - 8\,\zeta)$	+	288.72	$\cos(6\,\zeta' - 8\,\zeta)$
			−	71.15	$\sin(7\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	85.68	$\cos(7\,\zeta' - 5\,\zeta)$
+	85.24	$\sin(3\,\zeta)$	−	0.41	$\sin(\zeta' + 2\,\zeta)$	−	13.56	$\cos(\zeta' + 2\,\zeta)$
−	61.40	$\cos(3\,\zeta)$	−	161.22	$\sin(\zeta' - 4\,\zeta)$	+	136.72	$\cos(\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	6.94	$\sin(2\,\zeta' + \zeta)$	−	73.56	$\cos(2\,\zeta' + \zeta)$
			+	150.37	$\sin(2\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	142.77	$\cos(2\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	1195.98	$\sin(3\,\zeta')$	+	240.25	$\cos(3\,\zeta')$
			+	152.48	$\sin(3\,\zeta' - 6\,\zeta)$	−	114.70	$\cos(3\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			−	1508.66	$\sin(4\,\zeta' - \zeta)$	−	308.64	$\cos(4\,\zeta' - \zeta)$
			−	68.60	$\sin(4\,\zeta' - 7\,\zeta)$	−	138.17	$\cos(4\,\zeta' - 7\,\zeta)$
			+	1.44	$\sin(5\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	1.31	$\cos(5\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	110.17	$\sin(5\,\zeta' - 8\,\zeta)$	+	29.88	$\cos(5\,\zeta' - 8\,\zeta)$
			+	5.48	$\sin(6\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	0.32	$\cos(6\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			+	10.20	$\sin(7\,\zeta' - 4\,\zeta)$	−	10.81	$\cos(7\,\zeta' - 4\,\zeta)$
+	1.37	$\sin(4\,\zeta)$	+	0.41	$\sin(\zeta' + 3\,\zeta)$	+	0.52	$\cos(\zeta' + 3\,\zeta)$
−	6.14	$\cos(4\,\zeta)$	−	16.38	$\sin(\zeta' - 5\,\zeta)$	+	3.11	$\cos(\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	1.15	$\sin(2\,\zeta' + 2\,\zeta)$	−	2.03	$\cos(2\,\zeta' + 2\,\zeta)$
			+	2.92	$\sin(2\,\zeta' - 6\,\zeta)$	+	20.00	$\cos(2\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			−	1.15	$\sin(3\,\zeta' + \zeta)$	−	7.65	$\cos(3\,\zeta' + \zeta)$
			+	22.18	$\sin(3\,\zeta' - 7\,\zeta)$	+	0.14	$\cos(3\,\zeta' - 7\,\zeta)$
			+	104.53	$\sin(4\,\zeta')$	+	21.91	$\cos(4\,\zeta')$
			+	3.70	$\sin(4\,\zeta' - 8\,\zeta)$	−	20.61	$\cos(4\,\zeta' - 8\,\zeta)$
			+	129.10	$\sin(5\,\zeta' - \zeta)$	−	24.22	$\cos(5\,\zeta' - \zeta)$
			+	3.55	$\sin(6\,\zeta' - 2\,\zeta)$	+	0.30	$\cos(6\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	1.91	$\sin(7\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	5.23	$\cos(7\,\zeta' - 3\,\zeta)$
−	0.20	$\sin(5\,\zeta)$	−	1.05	$\sin(\zeta' - 6\,\zeta)$	−	0.49	$\cos(\zeta' - 6\,\zeta)$
−	0.26	$\cos(5\,\zeta)$	−	0.91	$\sin(2\,\zeta' - 7\,\zeta)$	+	1.55	$\cos(2\,\zeta' - 7\,\zeta)$
			−	0.37	$\sin(4\,\zeta' + \zeta)$	−	0.35	$\cos(4\,\zeta' + \zeta)$
			+	9.33	$\sin(5\,\zeta')$	+	2.27	$\cos(5\,\zeta')$
			−	10.17	$\sin(6\,\zeta' - \zeta)$	−	2.48	$\cos(6\,\zeta' - \zeta)$
			−	0.17	$\sin(7\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	0.99	$\cos(7\,\zeta' - 2\,\zeta)$

Fonction perturbatrice obtenue par Le Verrier

$$
\begin{aligned}
6knR = 436091{,}96 &- 1385917{,}90\sin(\zeta' - \zeta) - 285587{,}82\cos(\zeta' - \zeta)\\
&+ 28930{,}40\sin(2\zeta' - 2\zeta) - 77901{,}42\cos(2\zeta' - 2\zeta)\\
&- 28095{,}50\sin(3\zeta' - 3\zeta) - 19969{,}10\cos(3\zeta' - 3\zeta)\\
&- 10935{,}30\sin(4\zeta' - 4\zeta) + 9865{,}30\cos(4\zeta' - 4\zeta)\\
&+ 3103{,}34\sin(5\zeta' - 5\zeta) + 5595{,}70\cos(5\zeta' - 5\zeta)\\
&+ 2654{,}28\sin(6\zeta' - 6\zeta) - 707{,}06\cos(6\zeta' - 6\zeta)\\
+ 19963{,}18\sin\zeta &+ 113532{,}32\sin(\zeta') + 19521{,}53\cos(\zeta')\\
+ 19452{,}86\cos\zeta &- 21546{,}80\sin(\zeta' - 2\zeta) + 10364{,}75\cos(\zeta' - 2\zeta)\\
&- 176029{,}17\sin(2\zeta' - \zeta) - 34753{,}22\cos(2\zeta' - \zeta)\\
&+ 12928{,}13\sin(2\zeta' - 3\zeta) - 7920{,}58\cos(2\zeta' - 3\zeta)\\
&+ 2388{,}12\sin(3\zeta' - 2\zeta) - 3036{,}01\cos(3\zeta' - 2\zeta)\\
&- 3026{,}54\sin(3\zeta' - 4\zeta) - 8359{,}49\cos(3\zeta' - 4\zeta)\\
&- 1465{,}67\sin(4\zeta' - 3\zeta) - 2213{,}14\cos(4\zeta' - 3\zeta)\\
&- 4906{,}57\sin(4\zeta' - 5\zeta) + 705{,}74\cos(4\zeta' - 5\zeta)\\
&- 1498{,}68\sin(5\zeta' - 4\zeta) + 548{,}53\cos(5\zeta' - 4\zeta)\\
&- 189{,}66\sin(5\zeta' - 6\zeta) + 2697{,}25\cos(5\zeta' - 6\zeta)\\
&+ 87{,}15\sin(6\zeta' - 5\zeta) + 953{,}26\cos(6\zeta' - 5\zeta)\\
&+ 1411{,}45\sin(6\zeta' - 7\zeta) + 436{,}82\cos(6\zeta' - 7\zeta)\\
+ 1679{,}50\sin 2\zeta &+ 157{,}28\sin(\zeta' + \zeta) - 848{,}40\cos(\zeta' + \zeta)\\
+ 116{,}86\cos 2\zeta &- 1192{,}44\sin(\zeta' - 3\zeta) + 1911{,}28\cos(\zeta' - 3\zeta)\\
&+ 12629{,}33\sin(2\zeta') + 2571{,}32\cos(2\zeta')\\
&+ 1918{,}89\sin(2\zeta' - 4\zeta) + 191{,}26\cos(2\zeta' - 4\zeta)\\
&- 16872{,}02\sin(3\zeta' - \zeta) - 3418{,}44\cos(3\zeta' - \zeta)\\
&+ 398{,}80\sin(3\zeta' - 5\zeta) - 1395{,}46\cos(3\zeta' - 5\zeta)\\
&+ 117{,}57\sin(4\zeta' - 2\zeta) - 161{,}66\cos(4\zeta' - 2\zeta)\\
&- 885{,}05\sin(4\zeta' - 6\zeta) - 446{,}22\cos(4\zeta' - 6\zeta)\\
&- 95{,}62\sin(5\zeta' - 3\zeta) - 147{,}80\cos(5\zeta' - 3\zeta)\\
&- 387{,}96\sin(5\zeta' - 7\zeta) + 504{,}90\cos(5\zeta' - 7\zeta)\\
&- 114{,}19\sin(6\zeta' - 4\zeta) + 63{,}88\cos(6\zeta' - 4\zeta)\\
&+ 264{,}53\sin(6\zeta' - 8\zeta) + 288{,}78\cos(6\zeta' - 8\zeta)\\
+ 85{,}18\sin 3\zeta &- 0{,}28\sin(\zeta' + 2\zeta) - 13{,}57\cos(\zeta' + 2\zeta)\\
- 61{,}50\cos 3\zeta &- 161{,}46\sin(\zeta' - 4\zeta) + 136{,}71\cos(\zeta' - 4\zeta)\\
&+ 6{,}59\sin(2\zeta' + \zeta) - 73{,}50\cos(2\zeta' + \zeta)\\
&+ 150{,}37\sin(2\zeta' - 5\zeta) + 142{,}82\cos(2\zeta' - 5\zeta)\\
&+ 1195{,}80\sin(3\zeta') + 240{,}03\cos(3\zeta')\\
&+ 152{,}42\sin(3\zeta' - 6\zeta) - 114{,}57\cos(3\zeta' - 6\zeta)\\
&- 1508{,}58\sin(4\zeta' - \zeta) - 308{,}48\cos(4\zeta' - \zeta)\\
&- 68{,}60\sin(4\zeta' - 7\zeta) - 138{,}16\cos(4\zeta' - 7\zeta)\\
&+ 1{,}34\sin(5\zeta' - 2\zeta) - 1{,}37\cos(5\zeta' - 2\zeta)\\
&- 110{,}00\sin(5\zeta' - 8\zeta) + 29{,}91\cos(5\zeta' - 8\zeta)\\
&+ 5{,}55\sin(6\zeta' - 3\zeta) - 0{,}54\cos(6\zeta' - 3\zeta)\\
&+ 4{,}45\sin(6\zeta' - 9\zeta) + 78{,}66\cos(6\zeta' - 9\zeta)\\
+ 1{,}32\sin 4\zeta &+ 0{,}24\sin(\zeta' + 3\zeta) + 0{,}19\cos(\zeta' + 3\zeta)\\
- 6{,}08\cos 4\zeta &- 16{,}46\sin(\zeta' - 5\zeta) + 2{,}99\cos(\zeta' - 5\zeta)\\
&+ 1{,}09\sin(2\zeta' + 2\zeta) - 1{,}91\cos(2\zeta' + 2\zeta)\\
&+ 2{,}97\sin(2\zeta' - 6\zeta) + 19{,}99\cos(2\zeta' - 6\zeta)\\
&- 1{,}27\sin(3\zeta' + \zeta) - 7{,}72\cos(3\zeta' + \zeta)\\
&+ 22{,}13\sin(3\zeta' - 7\zeta) + 0{,}26\cos(3\zeta' - 7\zeta)\\
&+ 104{,}50\sin(4\zeta') + 21{,}86\cos(4\zeta')\\
&+ 3{,}84\sin(4\zeta' - 8\zeta) - 20{,}60\cos(4\zeta' - 8\zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.8 – Fonction perturbatrice déterminée par Le Verrier par double interpolation.

On peut constater que les deux expressions de $6knR$ sont quasi identiques. C'est une première preuve (il y en aura beaucoup d'autres) de la maîtrise absolue du calcul numérique par Le Verrier. Le calcul se trouve p. 26−27 du cahier n° 2 des manuscrits et p. 19−20 de *Herschel*.

3.5.2.5 Développements à des ordres plus élevés

Pour échantillonner la fonction perturbatrice R, Le Verrier a découpé les intervalles d'intégration en 16 parties, ce qui limite les valeurs de k et k' dans les expressions du type $\cos(k'\zeta' - k\zeta)$ du développement en série à 8 (7 pour le sinus). Avec des programmes écrits en TRIP, il est facile de reprendre l'ensemble des calculs précédents avec un découpage en 32 (ou 64) parties et une troncature [14] à l'ordre 16 (ou 32). On constate que les coefficients calculés par Le Verrier sont peu affectés par le supplément de points intermédiaires. Par contre, et c'est normal, il apparaît des termes supplémentaires, pas tous négligeables : voir quelques termes à la fin du paragraphe.
À la table 3.9, on a reporté les valeurs de quelques coefficients par différentes méthodes :
Colonne n° 1 : les valeurs trouvées par Le Verrier et lues dans le cahier n° 2 des manuscrits.
Colonne n° 2 : les valeurs trouvées par TRIP en utilisant exactement l'algorithme de Le Verrier.
Colonnes n° 3−5 : les valeurs obtenues par TRIP en tronquant les fonctions trigonométriques à l'ordre 8, 16 et 32 respectivement.
Puis on reprend dans les colonnes 6−10 la même disposition pour les coefficients des cosinus.

TABLE 3.9 – Comparaison de quelques coefficients de la fonction perturbatrice obtenus par différentes méthodes : en première colonne, on trouve les valeurs calculées par Le Verrier, dans la deuxième les valeurs calculées avec TRIP en utilisant exactement la démarche de Le Verrier, et dans les colonnes 3 à 5 les valeurs obtenues par TRIP en tronquant les fonctions trigonométriques à l'ordre 8, 16 et 32 respectivement. Dans les colonnes 6 à 10 on reprend la même disposition pour les coefficients correspondants des cosinus.

	Coefficients du sinus					Coefficients du cosinus				
(k,k')	Le Verrier	Méth LV	TRIP 8	TRIP 16	TRIP 32	Le Verrier	Méth LV	TRIP 8	TRIP 16	TRIP 32
(1,1)	-1 385 918	-1 385 918	-1 385 918	-1 385 918	-1 385 918	-285 587	-285 587	-285587	-285 588	-285 588
(2,2)	28 930.4	28 930.4	28 930.4	28 929.0	28 929,0	-77 901.4	-77 901.7	-77 901.7	-77 905.9	-77 905.9
(3,3)	-28 095.5	-28 905.8	-28 095.8	-28 106.0	-28 106.0	-19 969.1	-19969.0	-19 969.0	-19 968.6	-19 968.6
(4,4)	-10 935.3	-10 935.3	10 935.3	10 941.2	10 941.2	9865.30	9 865.22	9865.22	9887.13	9887.13
(5,5)	3103.34	3103.32	3 103.32	3146.35	3146.35	5595.70	5595.73	5595.73	5622.45	5622.45
(6,6)	2654.28	2654.12	2654.12	2738.07	2738.07	-707.06	-706.91	-706.95	-782.81	-782.81
(1,0)	19 963.2	19 963.2	19 963.3	19 963.7	19 963.7	19 452.9	19 452.8	19 452.8	19 452.8	19 452.8
(0,1)	113 532	113 532	113 532	113 532	113 532	19 521.5	19 521.7	19521.7	19 519.9	19 519.9
(2,1)	-21 546.8	-21 546.6	-21 546.6	-21 547.3	21 547.3	10 364.7	10 364.8	10364.8	10 363.5	10 363.5
(1,2)	-176 029	-176 029	-176 029	-176 030	-176 030	-34 753.2	-34 753.2	-34 753.2	-34 758.2	-34 758.2
(3,2)	12 928.1	12 928.1	12 928.1	12 924.0	12 924.0	-7920.58	-7920.64	-7920.64	-7919.96	-7919.96
(2,3)	2388.12	2388.12	2388.12	2376.42	2376.42	-3036.01	-3035.81	-3035.81	-3032.1	-3032.1
(3,4)	-1465.67	-1465.76	-1465.76	-1464.15	-1464.15	-2213.14	-2213.13	-2213.13	-2188.29	-2188.29
(4,3)	-3026.54	-3026.50	-3026.50	-3027.32	-3027.32	-8539.49	-8359.51	-8359.51	-8350.76	-8350.76
(4,5)	-1498.68	-1498.60	-1498.60	-1449.43	-1449.43	548.53	548.68	548.68	557.23	557.23
(5,4)	-4906.57	-4096.57	-4906.57	-4889.87	-4889.87	705.74	705.85	705.85	711.70	711.70
(1,3)	-16 872.0	-16 871.9	-16 871.9	-16 876.8	-16 876.8	-3418.44	-3418.34	-3418.34	-3413.09	-3413.09
(3,1)	-1192.44	-1192.6	-1192.60	-1193.6	-1193.6	1911.28	1911.2	1911.20	1912.13	1912.13
(0,2)	12 629.3	12 629.3	12 629.3	12 625.9	12 625.9	2571.32	2571.34	2571.34	2569.49	2569.49
(2,0)	1679.50	1679.36	1679.36	1680.73	1680.73	116.86	116.69	116.69	116.34	116.34
(1,4)	-1508.58	-1508.66	-1508.66	-1504.26	-1504.26	-308.48	-308.64	-308.64	-306.73	-306.73
(4,1)	-161.46	-161.22	-161.22	-161.29	-161.29	136.71	136.72	136.72	137.18	137.18
(0,3)	1195.80	1195.98	1195.98	1195.42	1195.42	240.03	240.25	240.25	242.99	242.99
(5,1)	-16.46	-16.38	-16.38	-16.43	-16.43	2.99	3.0	3.01	3.12	3.12
(0,4)	104.50	104.53	104.53	105.87	105.87	21.86	21.91	21.91	21.66	21.66

14. Voir la présentation de TRIP au chapitre d'introduction (§ 0.4.3) pour la syntaxe liée à une troncature.

On constate que
• les deux premières colonnes – obtenues par les mêmes méthodes - (une avec des calculs effectués à la main par Le Verrier et l'autre avec un outil de calcul) - sont quasi identiques.
• les résultats obtenus par la méthode de Le Verrier et par TRIP avec $kmax = 8$ ($kmax$ est l'ordre de troncature des fonctions trigonométriques) sont en excellent accord, ce qui est naturel, car l'échantillonnage 0..15 choisi par Le Verrier correspond exactement au choix $kmax = 8$ dans TRIP.
Conformément à ce que déclare Le Verrier (*Herschel*, p. 9), « on ne trouvera aucun terme du cinquième ordre [i.e. tels que $|k - k'| = 5$] ; ces termes ont été calculés et se sont trouvés insensibles » ; j'ai calculé les termes de degré 5 pour les excentricités et ils sont effectivement négligeables après intégration, comme on le voit p. 94. Le Verrier s'est limité à $|k - k'| = 4$, comme on le voit dans *Herschel* p. 21.
• des petites différences surgissent quand on augmente la valeur de k_{max} ; elles sont dues au fait que les coefficients sont calculés à l'aide de sommes de Riemann dont le nombre de termes est $2k_{max}$, ce qui donne des petites différences quand k_{max} change de valeur.
Et il apparaît des termes 'normaux' supplémentaires comme

$$-1040\cos(7\zeta' - 7\zeta),\ -234\cos(8\zeta - 8\zeta'),\ 11\cos(10\zeta - 6\zeta') \text{ ou } -33\cos(11\zeta - 8\zeta')$$

et des termes plus bizarres comme

$$491\cos(7\zeta + 8\zeta')$$

mais qui deviennent négligeables après intégration.

3.6 Développements en série des perturbations des éléments elliptiques d'Uranus

3.6.1 Formulation utilisée par Le Verrier pour les équations de Lagrange

Comme indiqué plus haut (p. 78), Le Verrier doit procéder à deux types de modifications dans la formulation classique des équations de Lagrange [Perez, 2011] :
• Faire intervenir les éléments elliptiques θ_1, ϕ_1, ϖ_1, ε_1, v_1, v_1'... relatifs à l'orbite de Saturne, et non les éléments elliptiques relatifs à l'écliptique.
• Ne faire intervenir que les dérivées de R disponibles directement, à savoir $\frac{\partial R}{\partial r}$ et $\frac{\partial R}{\partial s}$.
Le Verrier donne (*Herschel, p. 10–11*) une idée des calculs nécessaires pour arriver aux équations finales, mais les manuscrits (début du cahier n° 2) sont plus explicites, bien que pas toujours très clairs, car Le Verrier n'utilise pas la notion de dérivée partielle [15] ; il est donc difficile de savoir, à chaque étape du calcul, quelles sont les variables effectives de R.
On a placé système (3.22) les équations dont Le Verrier va se servir pour procéder au calcul des perturbations exercées par Saturne sur les éléments d'Uranus (on rappelle que $\psi = \arcsin e$) ; les premières lignes du système établissent le formulaire pour calculer les dérivées utiles.

15. Alors que dans le cahier n° 2 des manuscrits, Le Verrier utilise à deux reprises la notation $\frac{\partial R}{\partial r}$ (dans l'échantillonnage de R) ; on peut regretter que Le Verrier n'ait pas plus utilisé cette notation, qui n'était pas encore systématique à l'époque, mais qui a l'avantage de préciser les variables effectives.

Équations de Lagrange adaptées aux variables utilisées par Le Verrier

$$\text{Lagrange (adapté)} \begin{cases} R = \frac{1}{\Delta'} - \frac{rs}{r'^2} \\ s = \cos(v'_1 - v_1) - 2\sin^2\frac{\phi_1}{2}\sin(v'_1 - \theta_1)\sin(v_1 - \theta_1) \\ \frac{dR}{dr} = (1 + \alpha^2 - 2\alpha s)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{s-\alpha}{r'^2}\right) - \frac{s}{r'^2} \\ \frac{dR}{ds} = (1 + \alpha^2 - 2\alpha s)^{-\frac{3}{2}}\frac{\alpha}{r'} - \frac{\alpha}{r'} \qquad \frac{dR}{dv_1} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{dv_1} \\ \frac{ds}{dv_1} = \sin(v'_1 - v_1) - 2\sin^2\frac{\phi_1}{2}\sin(v'_1 - \theta_1)\cos(v_1 - \theta_1) \\ \sin\phi_1\frac{d(\delta\theta_1)}{dt} = -k\frac{\sin\phi_1}{\cos\psi}\frac{dR}{ds}\sin(v'_1 - \theta_1)\sin(v_1 - \theta_1) \\ \frac{d(\delta\phi_1)}{dt} = -k\frac{\sin\phi_1}{\cos\psi}\frac{dR}{ds}\sin(v'_1 - \theta_1)\cos(v_1 - \theta_1) \\ \frac{d(\delta a)}{dt} = 2ka\frac{dR}{d\zeta} \qquad \frac{d(\delta\rho)}{dt} = -\frac{3n}{2a}\int d(\delta a) \\ \frac{dR}{de} = -a\cos(v_1 - \varpi_1)\frac{dR}{dr} + \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2\psi}\right)\sin(v_1 - \varpi_1)\frac{dR}{dv_1} \\ e\frac{d(\delta\varpi_1)}{dt} = k\cos\psi\frac{dR}{de} + \sin\psi\tan\frac{\phi_1}{2}\sin\phi_1\frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d(\delta_1 e)}{dt} = ak\sin(v_1 - \varpi_1)\frac{dR}{dr} - \frac{k}{\tan\psi}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos\psi\right)\frac{dR}{dv_1} \qquad \delta_2 e = -\frac{\cos\psi}{2a}\tan\frac{\psi}{2}\delta a \\ \frac{d(\delta_1\varepsilon_1)}{dt} = -2kr\frac{dR}{dr} \qquad \delta_2\varepsilon_1 = \tan\frac{\psi}{2}e\delta\omega_1 \qquad \delta_3\varepsilon_1 = \tan\frac{\phi_1}{2}\cos\psi\sin\phi_1\delta\theta_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

Les premières lignes de ces équations de Lagrange permettent d'accéder aux dérivées partielles utiles et les suivantes donnent, après intégration, les perturbations des éléments elliptiques.
La fonction ρ, que Le Verrier appelle *moyen mouvement* – alors que n est appelé : *moyen mouvement sidéral annuel* – est définie par

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -3k_{u,s}n\frac{dR}{d\varepsilon} \tag{3.23}$$

Cette fonction ρ permet d'écrire la longitude moyenne ℓ sous la forme $\ell = \varepsilon + \rho$, qui est l'équivalent de $\ell = \varepsilon + nt$ dans le mouvement képlérien non perturbé. La première intégration de ρ introduit une constante σ, qui est choisie pour que $\delta\ell$ $(= \delta\rho + \delta\varepsilon)$ ne comporte aucun terme proportionnel au temps.

Dans les pages suivantes, on donne les développements obtenus par Le Verrier pour les perturbations des éléments elliptiques d'Uranus en utilisant le formulaire de Lagrange ci-dessus. Les expressions affichées sont prélevées de *Herschel* (p. 22 à 32), et elles ont été calculées en détail, par double interpolation, dans le cahier n° 2 des manuscrits. Pour chaque élément, on indiquera la page du manuscrit où se trouve le calcul.
On met en regard de chaque développement de Le Verrier celui obtenu avec TRIP en utilisant exactement la même méthode que Le Verrier i.e. échantillonnage, première, deuxième interpolation et enfin linéarisation des produits trigonométriques obtenus.
On constatera dans tous les cas que les deux développements sont très voisins.

3.6.2 Développement de $\sin\phi_1\,\delta\theta_1$ (longitude du nœud)

$$
\begin{aligned}
\sin\phi_1\,\delta\theta_1 = -0''.048\,54\,t \;&+\; 0''.29\,\sin(\zeta'-\zeta) \;-\; 1''.43\,\cos(\zeta'-\zeta)\\
&+\; 0.22\,\sin(2\zeta'-2\zeta) \;+\; 0.09\,\cos(2\zeta'-2\zeta)\\
&+\; 0.05\,\sin(3\zeta'-3\zeta) \;-\; 0.08\,\cos(3\zeta'-3\zeta)\\
\\
-\;0.21\,\sin(\zeta) \;&+\; 0.11\,\sin(\zeta') \;+\; 0.17\,\cos(\zeta')\\
+\;0.18\,\cos(\zeta) \;&-\; 0.22\,\sin(\zeta'-2\zeta) \;+\; 0.09\,\cos(\zeta'-2\zeta)\\
&+\; 0.05\,\sin(2\zeta'-\zeta) \;-\; 0.10\,\cos(2\zeta'-\zeta)\\
&+\; 0.04\,\sin(2\zeta'-3\zeta) \;+\; 0.07\,\cos(2\zeta'-3\zeta)\\
\\
+\;0.04\,\sin(2\zeta) \;&-\; 0.80\,\sin(\zeta'+\zeta) \;-\; 0.05\,\cos(\zeta'+\zeta)\\
+\;0.33\,\cos(2\zeta) \;&+\; 2.67\,\sin(\zeta'-3\zeta) \;+\; 0.85\,\cos(\zeta'-3\zeta)\\
&+\; 0.04\,\sin(2\zeta') \;-\; 0.10\,\cos(2\zeta')\\
&-\; 0.07\,\sin(2\zeta'-4\zeta) \;+\; 0.13\,\cos(2\zeta'-4\zeta)\\
&-\; 0.04\,\sin(3\zeta'-\zeta) \;-\; 0.03\,\cos(3\zeta'-\zeta)\\
\\
&+\; 0.06\,\sin(\zeta'-4\zeta) \;+\; 0.07\,\cos(\zeta'-4\zeta)\\
&-\; 0.07\,\sin(2\zeta'+\zeta) \;-\; 0.01\,\cos(2\zeta'+\zeta)\\
&-\; 0.10\,\sin(2\zeta'-5\zeta) \;+\; 0.05\,\cos(2\zeta'-5\zeta)\\
\\
+\;0.03\,\sin(3\zeta) \;&+\; 0.05\,\sin(2\zeta'-6\zeta) \;+\; 0.00\,\cos(2\zeta'-6\zeta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\varphi_1\,\delta\theta_1 = -\,0'',048.55\,t \;&+\; 0'',29\,\sin(\zeta'-\zeta) \;-\; 1'',43\,\cos(\zeta'-\zeta)\\
&+\; 0,22\,\sin(2\zeta'-2\zeta) \;+\; 0,09\,\cos(2\zeta'-2\zeta)\\
&+\; 0,05\,\sin(3\zeta'-3\zeta) \;-\; 0,08\,\cos(3\zeta'-3\zeta)\\
\\
-\;0,21\,\sin\zeta \;&+\; 0,11\,\sin(\zeta') \;+\; 0,17\,\cos(\zeta')\\
+\;0,18\,\cos\zeta \;&-\; 0,22\,\sin(\zeta'-2\zeta) \;+\; 0,09\,\cos(\zeta'-2\zeta)\\
&+\; 0,05\,\sin(2\zeta'-\zeta) \;-\; 0,10\,\cos(2\zeta'-\zeta)\\
&+\; 0,04\,\sin(2\zeta'-3\zeta) \;+\; 0,07\,\cos(2\zeta'-3\zeta)\\
\\
+\;0,04\sin 2\zeta \;&-\; 0,80\,\sin(\zeta'+\zeta) \;-\; 0,05\,\cos(\zeta'+\zeta)\\
+\;0,33\cos 2\zeta \;&+\; 2,68\,\sin(\zeta'-3\zeta) \;+\; 0,85\,\cos(\zeta'-3\zeta)\\
&+\; 0,04\,\sin(2\zeta') \;-\; 0,10\,\cos(2\zeta')\\
&-\; 0,07\,\sin(2\zeta'-4\zeta) \;+\; 0,13\,\cos(2\zeta'-4\zeta)\\
\\
&+\; 0,06\,\sin(\zeta'-4\zeta) \;+\; 0,07\,\cos(\zeta'-4\zeta)\\
&-\; 0,07\,\sin(2\zeta'+\zeta) \;-\; 0,01\,\cos(2\zeta'+\zeta)\\
&-\; 0,09\,\sin(2\zeta'-5\zeta) \;+\; 0,05\,\cos(2\zeta'-5\zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.9 – Expression de $\sin\phi_1\delta\theta_1$ trouvée avec TRIP en haut et par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 18). Le calcul est fait page 40 du cahier n° 2 des manuscrits.

3.6.3 Développement de δa (demi-grand axe)

$$
\begin{array}{llllll}
\delta a = -\frac{2}{3}\frac{\sigma}{n}a & + & 0''.020\,11 & \sin(\zeta' - \zeta) & + & 0.004\,14 \quad \cos(\zeta' - \zeta) \\
& - & 0.000\,42 & \sin(2\,\zeta' - 2\zeta) & + & 0.001\,13 \quad \cos(2\,\zeta' - 2\,\zeta) \\
& + & 0.000\,41 & \sin(3\,\zeta' - 3\zeta) & + & 0.000\,29 \quad \cos(3\,\zeta' - 3\,\zeta) \\
& + & 0.000\,16 & \sin(4\,\zeta' - 4\zeta) & - & 0.000\,14 \quad \cos(4\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
& - & 0.000\,05 & \sin(5\,\zeta' - 5\zeta) & - & 0.000\,08 \quad \cos(5\,\zeta' - 5\,\zeta) \\
& - & 0.000\,04 & \sin(6\,\zeta' - 6\zeta) & + & 0.000\,01 \quad \cos(6\,\zeta' - 6\,\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
+ & 0''.000\,54 \quad \sin(\zeta) & + & 0''.001\,36 & \sin(\zeta' - 2\,\zeta) & - \quad 0''.000\,65 \quad \cos(\zeta' - 2\,\zeta) \\
+ & 0.000\,52 \quad \cos(\zeta) & + & 0.001\,01 & \sin(2\,\zeta' - \zeta) & + \quad 0.000\,20 \quad \cos(2\,\zeta' - \zeta) \\
& & - & 0.000\,39 & \sin(2\,\zeta' - 3\,\zeta) & + \quad 0.000\,24 \quad \cos(2\,\zeta' - 3\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,02 & \sin(3\,\zeta' - 2\,\zeta) & + \quad 0.000\,02 \quad \cos(3\,\zeta' - 2\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,07 & \sin(3\,\zeta' - 4\,\zeta) & + \quad 0.000\,20 \quad \cos(3\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,10 & \sin(4\,\zeta' - 5\,\zeta) & - \quad 0.000\,01 \quad \cos(4\,\zeta' - 5\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,00 & \sin(5\,\zeta' - 6\,\zeta) & - \quad 0.000\,05 \quad \cos(5\,\zeta' - 6\,\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
+ & 0.000\,05 \quad \sin(2\,\zeta) & + & 0.000\,65 & \sin(\zeta' - 3\,\zeta) & + \quad 0.001\,04 \quad \cos(\zeta' - 3\,\zeta) \\
& & - & 0.000\,12 & \sin(2\,\zeta' - 4\,\zeta) & - \quad 0.000\,01 \quad \cos(2\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,06 & \sin(3\,\zeta' - \zeta) & + \quad 0.000\,01 \quad \cos(3\,\zeta' - \zeta) \\
& & - & 0.000\,02 & \sin(3\,\zeta' - 5\,\zeta) & + \quad 0.000\,05 \quad \cos(3\,\zeta' - 5\,\zeta) \\
& & + & 0.000\,03 & \sin(4\,\zeta' - 6\,\zeta) & + \quad 0.000\,01 \quad \cos(4\,\zeta' - 6\,\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
& & - & 0.000\,02 & \sin(\zeta' - 4\,\zeta) & + \quad 0.000\,01 \quad \cos(\zeta' - 4\,\zeta) \\
& & - & 0.000\,03 & \sin(2\,\zeta' - 5\,\zeta) & - \quad 0.000\,03 \quad \cos(2\,\zeta' - 5\,\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta a = -\frac{2}{3}\frac{\sigma}{n}a \quad & + 0'',020.11\sin(\zeta' - \zeta) + 0'',004.14\cos(\zeta' - \zeta) \\
& - 0,000.42\sin(2\zeta' - 2\zeta) + 0,001.13\cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,000.41\sin(3\zeta' - 3\zeta) + 0,000.29\cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0,000.16\sin(4\zeta' - 4\zeta) - 0,000.14\cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0,000.04\sin(5\zeta' - 5\zeta) - 0,000.08\cos(5\zeta' - 5\zeta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + 0'',000.54\sin\zeta + 0'',001.36\sin(\zeta' - 2\zeta) - 0'',000.65\cos(\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,000.52\cos\zeta + 0,001.01\sin(2\zeta' - \zeta) + 0,000.20\cos(2\zeta' - \zeta) \\
& \qquad - 0,000.39\sin(2\zeta' - 3\zeta) + 0,000.24\cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& \qquad + 0,000.07\sin(3\zeta' - 4\zeta) + 0,000.20\cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
& \qquad + 0,000.10\sin(4\zeta' - 5\zeta) - 0,000.01\cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
& \qquad + 0,000.00\sin(5\zeta' - 6\zeta) - 0,000.05\cos(5\zeta' - 6\zeta) \\
& \qquad + 0,000.65\sin(\zeta' - 3\zeta) - 0,001.04\cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& \qquad - 0,000.12\sin(2\zeta' - 4\zeta) - 0,000.01\cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
& \qquad + 0,000.06\sin(3\zeta' - \zeta) + 0,000.01\cos(3\zeta' - \zeta) \\
& \qquad - 0,000.02\sin(3\zeta' - 5\zeta) + 0,000.05\cos(3\zeta' - 5\zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.10 – Expression de δa avec TRIP en haut et selon Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 22−23). La concordance est parfaite. Le calcul se trouve à la page 31 du cahier n° 2 des manuscrits. σ est une constante apparaissant dans l'intégration de $\delta\rho$ (voir page suivante) et on détermine σ pour que $\delta\ell = \delta\rho + \delta\varepsilon$ ne comporte pas de terme dépendant explicitement du temps, ce qui donne ici $\sigma = -10''.931$ en utilisant l'expression de $\delta\varepsilon$ (voir fig. 3.15)

3.6.4 Développement de $\delta\rho$ (moyen mouvement)

$$
\begin{array}{llllllll}
\delta\rho = & \sigma t & & - & 36''.08 & \sin(\zeta' - \zeta) & + & 175.10 \quad \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & & - & 4.92 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & - & 1.83 \quad \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & & & - & 0.84 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & + & 1.18 \quad \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & + & 0.31 & \sin(4\zeta' - 4\zeta) & + & 0.35 \quad \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & + & 0.14 & \sin(5\zeta' - 5\zeta) & - & 0.08 \quad \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
 & & & & & & & \\
- & 8''.43 & \sin(\zeta) & + & 12''.37 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & + & 25''.72 \quad \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
+ & 8.65 & \cos(\zeta) & - & 0.68 & \sin(2\zeta' - \zeta) & + & 3.45 \quad \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & & & - & 1.41 & \sin(2\zeta' - 3\zeta) & - & 2.30 \quad \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & - & 0.06 & \sin(3\zeta' - 2\zeta) & - & 0.05 \quad \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & & & - & 0.70 & \sin(3\zeta' - 4\zeta) & + & 0.25 \quad \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & - & 0.04 & \sin(4\zeta' - 3\zeta) & + & 0.03 \quad \cos(4\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & + & 0.04 & \sin(4\zeta' - 5\zeta) & + & 0.26 \quad \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
 & & & & & & & \\
- & 0''.03 & \sin(2\zeta) & + & 0.02 & \sin(\zeta' + \zeta) & - & 0.00 \quad \cos(\zeta' + \zeta) \\
+ & 0.36 & \cos(2\zeta) & + & 113''.67 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & + & 70''.93 \quad \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & + & 0.11 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & - & 1.15 \quad \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & - & 0.03 & \sin(3\zeta' - \zeta) & + & 0.13 \quad \cos(3\zeta' - \zeta) \\
 & & & - & 0.24 & \sin(3\zeta' - 5\zeta) & - & 0.07 \quad \cos(3\zeta' - 5\zeta) \\
 & & & + & 0.04 & \sin(4\zeta' - 6\zeta) & + & 0.08 \quad \cos(4\zeta' - 6\zeta) \\
 & & & & & & & \\
- & 0.01 & \sin(3\zeta) & + & 0.18 & \sin(\zeta' - 4\zeta) & + & 0.21 \quad \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
- & 0.01 & \cos(3\zeta) & + & 0.62 & \sin(2\zeta' - 5\zeta) & - & 0.66 \quad \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
 & & & & & & & \\
 & & & + & 0.59 & \sin(2\zeta' - 6\zeta) & - & 0.09 \quad \cos(2\zeta' - 6\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\delta\rho = & \sigma t & - 36'',08 \sin(\zeta' - \zeta) + 175'',10 \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & - 4,92 \sin(2\zeta' - 2\zeta) - 1,83 \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - 0,84 \sin(3\zeta' - 3\zeta) + 1,18 \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & & + 0,31 \sin(4\zeta' - 4\zeta) + 0,35 \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + 0,14 \sin(5\zeta' - 5\zeta) - 0,08 \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
 & & - 0,01 \sin(6\zeta' - 6\zeta) - 0,05 \cos(6\zeta' - 6\zeta) \\
 & & \\
 & - 8'',43 \sin\zeta & + 12'',37 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 25'',72 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & + 8,65 \cos\zeta & - 0,68 \sin(2\zeta' - \zeta) + 3,45 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & & - 1,41 \sin(2\zeta' - 3\zeta) - 2,30 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & & - 0,06 \sin(3\zeta' - 2\zeta) - 0,05 \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - 0,70 \sin(3\zeta' - 4\zeta) + 0,25 \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & & - 0,03 \sin(4\zeta' - 3\zeta) + 0,03 \cos(4\zeta' - 3\zeta) \\
 & & + 0,04 \sin(4\zeta' - 5\zeta) + 0,26 \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
 & & + 0,01 \sin(5\zeta' - 4\zeta) + 0,02 \cos(5\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + 0,10 \sin(5\zeta' - 6\zeta) + 0,01 \cos(5\zeta' - 6\zeta) \\
 & & \\
 & - 0'',03 \sin 2\zeta & + 113'',67 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 70'',92 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
 & + 0,36 \cos 2\zeta & + 0,11 \sin(2\zeta' - 4\zeta) - 1,15 \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & & - 0,03 \sin(3\zeta' - \zeta) + 0,13 \cos(3\zeta' - \zeta) \\
 & & - 0,24 \sin(3\zeta' - 5\zeta) - 0,07 \cos(3\zeta' - 5\zeta) \\
 & & - 0,04 \sin(4\zeta' - 6\zeta) + 0,08 \cos(4\zeta' - 6\zeta) \\
 & & \\
 & & + 0,18 \sin(\zeta' - 4\zeta) + 0,21 \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + 0,62 \sin(2\zeta' - 5\zeta) - 0,66 \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
 & & - 0,05 \sin(3\zeta' - 6\zeta) - 0,06 \cos(3\zeta' - 6\zeta) \\
 & & \\
 & & + 0,59 \sin(2\zeta' - 6\zeta) - 0,09 \cos(2\zeta' - 6\zeta);
\end{array}
$$

FIGURE 3.11 – Perturbation de $\delta\rho$ obtenue avec TRIP en haut et par Le Verrier en bas (Herschel, p. 22). Le calcul est fait page 30 du cahier n° 2 des manuscrits. On rappelle que ρ est l'équivalent, dans le mouvement perturbé, de nt dans le mouvement non perturbé. Voir la définition de ρ à l'équation (3.23) ; σ est calculé pour que $\delta\ell = \delta\rho + \delta\varepsilon$ ne contienne aucun terme dépendant explicitement du temps.

3.6.5 Développement de $e\delta\varpi$ (longitude du périhélie)

$e\delta\varpi = 0''.0561\,t$			+	$0''.25$	$\sin(\zeta' - \zeta)$	− 5.74	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			−	0.27	$\sin(2\zeta' - 2\zeta)$	+ 3.66	$\cos(2\zeta' - 2\zeta)$
			+	0.04	$\sin(3\zeta' - 3\zeta)$	− 0.36	$\cos(3\zeta' - 3\zeta)$
			−	0.25	$\sin(4\zeta' - 4\zeta)$	− 0.04	$\cos(4\zeta' - 4\zeta)$
			−	0.04	$\sin(5\zeta' - 5\zeta)$	+ 0.15	$\cos(5\zeta' - 5\zeta)$
			+	0.08	$\sin(6\zeta' - 6\zeta)$	+ 0.03	$\cos(6\zeta' - 6\zeta)$
+	$73''.06$	$\sin(\zeta)$	+	$25''.38$	$\sin(\zeta')$	− $123''.28$	$\cos(\zeta')$
+	0.07	$\cos(\zeta)$	−	12.21	$\sin(\zeta' - 2\zeta)$	+ 56.55	$\cos(\zeta' - 2\zeta)$
			+	0.92	$\sin(2\zeta' - \zeta)$	+ 0.12	$\cos(2\zeta' - \zeta)$
			−	15.04	$\sin(2\zeta' - 3\zeta)$	− 5.93	$\cos(2\zeta' - 3\zeta)$
			+	0.35	$\sin(3\zeta' - 2\zeta)$	− 0.35	$\cos(3\zeta' - 2\zeta)$
			−	3.16	$\sin(3\zeta' - 4\zeta)$	+ 4.61	$\cos(3\zeta' - 4\zeta)$
			−	0.24	$\sin(4\zeta' - 3\zeta)$	− 0.27	$\cos(4\zeta' - 3\zeta)$
			+	1.51	$\sin(4\zeta' - 5\zeta)$	+ 1.58	$\cos(4\zeta' - 5\zeta)$
			−	0.17	$\sin(5\zeta' - 4\zeta)$	+ 0.09	$\cos(5\zeta' - 4\zeta)$
			+	0.77	$\sin(5\zeta' - 6\zeta)$	− 0.48	$\cos(5\zeta' - 6\zeta)$
			+	0.03	$\sin(6\zeta' - 5\zeta)$	+ 0.10	$\cos(6\zeta' - 5\zeta)$
			−	0.13	$\sin(6\zeta' - 7\zeta)$	− 0.37	$\cos(6\zeta' - 7\zeta)$
			−	0.18	$\sin(7\zeta' - 8\zeta)$	+ 0.03	$\cos(7\zeta' - 8\zeta)$
+	$3''.18$	$\sin(2\zeta)$	−	$0''.37$	$\sin(\zeta' + \zeta)$	+ $0''.48$	$\cos(\zeta' + \zeta)$
−	3.18	$\cos(2\zeta)$	−	53.03	$\sin(\zeta' - 3\zeta)$	+ 0.21	$\cos(\zeta' - 3\zeta)$
			+	1.38	$\sin(2\zeta')$	− 6.82	$\cos(2\zeta')$
			−	3.34	$\sin(2\zeta' - 4\zeta)$	− 5.61	$\cos(2\zeta' - 4\zeta)$
			−	2.22	$\sin(3\zeta' - 5\zeta)$	+ 0.80	$\cos(3\zeta' - 5\zeta)$
			+	0.16	$\sin(4\zeta' - 6\zeta)$	+ 1.04	$\cos(4\zeta' - 6\zeta)$
			−	0.02	$\sin(5\zeta' - 3\zeta)$	− 0.01	$\cos(5\zeta' - 3\zeta)$
			+	0.50	$\sin(5\zeta' - 7\zeta)$	+ 0.03	$\cos(5\zeta' - 7\zeta)$
			+	0.06	$\sin(6\zeta' - 8\zeta)$	− 0.23	$\cos(6\zeta' - 8\zeta)$

$e\delta\varpi =$ +	$0''{,}0561\,t$		+	$0''{,}25$	$\sin(\zeta' - \zeta)$	− $5''{,}74$	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			−	0,27	$\sin(2\zeta' - 2\zeta)$	+ 3,66	$\cos(2\zeta' - 2\zeta)$
			+	0,04	$\sin(3\zeta' - 3\zeta)$	− 0,36	$\cos(3\zeta' - 3\zeta)$
			−	0,25	$\sin(4\zeta' - 4\zeta)$	− 0,04	$\cos(4\zeta' - 4\zeta)$
			−	0,04	$\sin(5\zeta' - 5\zeta)$	+ 0,15	$\cos(5\zeta' - 5\zeta)$
			+	0,08	$\sin(6\zeta' - 6\zeta)$	+ 0,03	$\cos(6\zeta' - 6\zeta)$
+	$73''{,}06 \sin\zeta$		+	$25''{,}26$	$\sin(\zeta')$	− $123''{,}24$	$\cos(\zeta')$
−	0,29 $\cos\zeta$		−	11,81	$\sin(\zeta' - 2\zeta)$	+ 56,38	$\cos(\zeta' - 2\zeta)$
			+	0,97	$\sin(2\zeta' - \zeta)$	+ 0,18	$\cos(2\zeta' - \zeta)$
			−	15,13	$\sin(2\zeta' - 3\zeta)$	− 6,02	$\cos(2\zeta' - 3\zeta)$
			+	0,37	$\sin(3\zeta' - 2\zeta)$	− 0,41	$\cos(3\zeta' - 2\zeta)$
			−	3,19	$\sin(3\zeta' - 4\zeta)$	+ 4,68	$\cos(3\zeta' - 4\zeta)$
			−	0,29	$\sin(4\zeta' - 3\zeta)$	− 0,27	$\cos(4\zeta' - 3\zeta)$
			+	1,57	$\sin(4\zeta' - 5\zeta)$	+ 1,58	$\cos(4\zeta' - 5\zeta)$
			−	0,15	$\sin(5\zeta' - 4\zeta)$	+ 0,13	$\cos(5\zeta' - 4\zeta)$
			+	0,76	$\sin(5\zeta' - 6\zeta)$	− 0,52	$\cos(5\zeta' - 6\zeta)$
			+	0,06	$\sin(6\zeta' - 5\zeta)$	+ 0,08	$\cos(6\zeta' - 5\zeta)$
			−	0,16	$\sin(6\zeta' - 7\zeta)$	− 0,34	$\cos(6\zeta' - 7\zeta)$
			+	0,05	$\sin(7\zeta' - 6\zeta)$	− 0,02	$\cos(7\zeta' - 6\zeta)$
			−	0,15	$\sin(7\zeta' - 8\zeta)$	+ 0,04	$\cos(7\zeta' - 8\zeta)$
+	$3''{,}18 \sin 2\zeta$		−	$0''{,}37$	$\sin(\zeta' + \zeta)$	+ $0''{,}48$	$\cos(\zeta' + \zeta)$
−	3,18 $\cos 2\zeta$		−	53,05	$\sin(\zeta' - 3\zeta)$	+ 0,22	$\cos(\zeta' - 3\zeta)$
			+	1,38	$\sin(2\zeta')$	− 6,82	$\cos(2\zeta')$
			−	3,34	$\sin(2\zeta' - 4\zeta)$	− 5,61	$\cos(2\zeta' - 4\zeta)$
			−	2,22	$\sin(3\zeta' - 5\zeta)$	+ 0,80	$\cos(3\zeta' - 5\zeta)$
			+	0,16	$\sin(4\zeta' - 6\zeta)$	+ 1,04	$\cos(4\zeta' - 6\zeta)$
			+	0,50	$\sin(5\zeta' - 7\zeta)$	+ 0,03	$\cos(5\zeta' - 7\zeta)$
			+	0,06	$\sin(6\zeta' - 8\zeta)$	− 0,23	$\cos(6\zeta' - 8\zeta)$
			−	0,11	$\sin(7\zeta' - 9\zeta)$	− 0,05	$\cos(7\zeta' - 9\zeta)$

FIGURE 3.12 – Début de la perturbation de $e\delta\varpi$ calculée avec TRIP en haut et par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 28). Le calcul est fait page 63 du cahier n° 2 des manuscrits.

3.6.6 Développement de $\delta_2 e$ (perturbation partielle de l'excentricité)

$$
\begin{aligned}
\delta_2 e = \quad & - 2''.52 \sin(\zeta' - \zeta) - 0''.52 \cos(\zeta' - \zeta) \\
& + 0.05 \sin(2\zeta' - 2\zeta) - 0.14 \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
& - 0.05 \sin(3\zeta' - 3\zeta) - 0.04 \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
& - 0.02 \sin(4\zeta' - 4\zeta) + 0.02 \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
& + 0.00 \sin(5\zeta' - 5\zeta) + 0.01 \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
\\
- 0''.07 \sin(\zeta) & - 0''.17 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 0''.08 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
- 0.07 \cos(\zeta) & - 0.13 \sin(2\zeta' - \zeta) - 0.02 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
& + 0.05 \sin(2\zeta' - 3\zeta) - 0.03 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0.00 \sin(3\zeta' - 4\zeta) - 0.02 \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0.01 \sin(4\zeta' - 5\zeta) + 0.00 \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
\\
& - 0.08 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 0.13 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0.02 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 0.00 \cos(2\zeta' - 4\zeta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2 e = \quad & - 2'',52 \sin(\zeta' - \zeta) - 0'',52 \cos(\zeta' - \zeta) \\
& + 0,05 \sin(2\zeta' - 2\zeta) - 0,14 \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
& - 0,05 \sin(3\zeta' - 3\zeta) - 0,04 \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
& - 0,02 \sin(4\zeta' - 4\zeta) + 0,02 \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
& + 0,01 \sin(5\zeta' - 5\zeta) + 0,01 \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
\\
- 0'',07 \sin\zeta & - 0'',17 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 0'',08 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
- 0,07 \cos\zeta & - 0,13 \sin(2\zeta' - \zeta) - 0,03 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
& + 0,05 \sin(2\zeta' - 3\zeta) - 0,03 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& - 0,01 \sin(3\zeta' - 4\zeta) - 0,03 \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0,01 \sin(4\zeta' - 5\zeta) + 0,00 \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
\\
& - 0,08 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 0,13 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0,02 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 0,00 \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0,01 \sin(3\zeta' - \zeta) - 0,00 \cos(3\zeta' - \zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.13 – Expression de $\delta_2 e$ (contribution partielle à δe) trouvée avec TRIP en haut et par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 23). Le calcul est fait page 52 du cahier n° 2 des manuscrits. Le Verrier a scindé le calcul de δe en 3 parties : $\delta e = \delta_1 e + \delta_2 e + \delta_3 e$. Le résultat final pour δe se trouve à la page suivante.

3.6.7 Développement de δe (excentricité)

$\delta e = -0''.046\,49\,t$

			−	$2''.37$	$\sin(\zeta' - \zeta)$	−	0.28	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			+	3.01	$\sin(2\zeta' - 2\zeta)$	+	0.35	$\cos(2\zeta' - 2\zeta)$
			−	0.31	$\sin(3\zeta' - 3\zeta)$	+	0.42	$\cos(3\zeta' - 3\zeta)$
			+	0.24	$\sin(4\zeta' - 4\zeta)$	+	0.25	$\cos(4\zeta' - 4\zeta)$
			+	0.17	$\sin(5\zeta' - 5\zeta)$	−	0.11	$\cos(5\zeta' - 5\zeta)$
−	$0''.20$	$\sin(\zeta)$	+	$123''.38$	$\sin(\zeta')$	+	$25''.33$	$\cos(\zeta')$
+	72.88	$\cos(\zeta)$	+	57.04	$\sin(\zeta' - 2\zeta)$	+	12.11	$\cos(\zeta' - 2\zeta)$
			−	0.50	$\sin(2\zeta' - \zeta)$	+	0.84	$\cos(2\zeta' - \zeta)$
			−	6.04	$\sin(2\zeta' - 3\zeta)$	+	14.92	$\cos(2\zeta' - 3\zeta)$
			+	0.72	$\sin(3\zeta' - 2\zeta)$	+	0.41	$\cos(3\zeta' - 2\zeta)$
			+	4.53	$\sin(3\zeta' - 4\zeta)$	+	13.24	$\cos(3\zeta' - 4\zeta)$
			+	0.24	$\sin(4\zeta' - 3\zeta)$	−	0.24	$\cos(4\zeta' - 3\zeta)$
			+	1.64	$\sin(4\zeta' - 5\zeta)$	−	1.46	$\cos(4\zeta' - 5\zeta)$
			−	0.43	$\sin(5\zeta' - 6\zeta)$	−	0.80	$\cos(5\zeta' - 6\zeta)$
			−	0.38	$\sin(6\zeta' - 7\zeta)$	+	0.10	$\cos(6\zeta' - 7\zeta)$
+	3.17	$\sin(2\zeta)$	−	0.48	$\sin(\zeta' + \zeta)$	−	0.37	$\cos(\zeta' + \zeta)$
+	3.18	$\cos(2\zeta)$	−	0.08	$\sin(\zeta' - 3\zeta)$	+	52.94	$\cos(\zeta' - 3\zeta)$
			+	6.82	$\sin(2\zeta')$	+	1.38	$\cos(2\zeta')$
			−	5.61	$\sin(2\zeta' - 4\zeta)$	+	3.31	$\cos(2\zeta' - 4\zeta)$
			−	0.03	$\sin(3\zeta' - \zeta)$	+	0.03	$\cos(3\zeta' - \zeta)$
			+	0.78	$\sin(3\zeta' - 5\zeta)$	+	2.22	$\cos(3\zeta' - 5\zeta)$
			+	1.05	$\sin(4\zeta' - 6\zeta)$	−	0.14	$\cos(4\zeta' - 6\zeta)$
			+	0.04	$\sin(5\zeta' - 7\zeta)$	−	0.50	$\cos(5\zeta' - 7\zeta)$
			−	0.23	$\sin(6\zeta' - 8\zeta)$	−	0.07	$\cos(6\zeta' - 8\zeta)$
+	0.30	$\sin(3\zeta)$	−	0.40	$\sin(\zeta' - 4\zeta)$	+	1.29	$\cos(\zeta' - 4\zeta)$
+	0.02	$\cos(3\zeta)$	−	2.55	$\sin(2\zeta' - 5\zeta)$	−	0.31	$\cos(2\zeta' - 5\zeta)$
			+	0.43	$\sin(3\zeta')$	+	0.09	$\cos(3\zeta')$
			−	0.19	$\sin(3\zeta' - 6\zeta)$	+	0.62	$\cos(3\zeta' - 6\zeta)$
			+	0.27	$\sin(4\zeta' - 7\zeta)$	+	0.14	$\cos(4\zeta' - 7\zeta)$
			+	0.57	$\sin(2\zeta' - 6\zeta)$	+	0.56	$\cos(2\zeta' - 6\zeta)$

$\delta e = -\,0'',046.54\,t$

	− 2″,38 sin (ζ′ − ζ)	− 0″,28 cos (ζ′ − ζ)
	+ 3,01 sin (2ζ′ − 2ζ)	+ 0,35 cos (2ζ′ − 2ζ)
	− 0,31 sin (3ζ′ − 3ζ)	+ 0,42 cos (3ζ′ − 3ζ)
	+ 0,24 sin (4ζ′ − 4ζ)	+ 0,25 cos (4ζ′ − 4ζ)
	+ 0,17 sin (5ζ′ − 5ζ)	− 0,11 cos (5ζ′ − 5ζ)
	− 0,04 sin (6ζ′ − 6ζ)	− 0,09 cos (6ζ′ − 6ζ)
− 0″,20 sin ζ	+ 123″,38 sin (ζ′)	+ 25″,33 cos (ζ′)
+ 72,87 cos ζ	+ 57,04 sin (ζ′ − 2ζ)	+ 12,11 cos (ζ′ − 2ζ)
	− 0,50 sin (2ζ′ − ζ)	+ 0,84 cos (2ζ′ − ζ)
	− 6,04 sin (2ζ′ − 3ζ)	+ 14,92 cos (2ζ′ − 3ζ)
	+ 0,72 sin (3ζ′ − 2ζ)	+ 0,41 cos (3ζ′ − 2ζ)
	+ 4,53 sin (3ζ′ − 4ζ)	+ 3,23 cos (3ζ′ − 4ζ)
	+ 0,25 sin (4ζ′ − 3ζ)	− 0,23 cos (4ζ′ − 3ζ)
	+ 1,64 sin (4ζ′ − 5ζ)	− 1,46 cos (4ζ′ − 5ζ)
	− 0,09 sin (5ζ′ − 4ζ)	− 0,14 cos (5ζ′ − 4ζ)
	− 0,43 sin (5ζ′ − 6ζ)	− 0,81 cos (5ζ′ − 6ζ)
+ 3″,18 sin 2ζ	− 0″,48 sin (ζ′ + ζ)	− 0″,37 cos (ζ′ + ζ)
+ 3,18 cos 2ζ	− 0,24 sin (ζ′ − 3ζ)	+ 53,20 cos (ζ′ − 3ζ)
	+ 6,82 sin (2ζ′)	+ 1,38 cos (2ζ′)
	− 5,60 sin (2ζ′ − 4ζ)	+ 3,31 cos (2ζ′ − 4ζ)
	+ 0,77 sin (3ζ′ − 5ζ)	+ 2,23 cos (3ζ′ − 5ζ)
	+ 1,05 sin (4ζ′ − 6ζ)	− 0,14 cos (4ζ′ − 6ζ)

FIGURE 3.14 – Début de la perturbation de e obtenue avec TRIP en haut et début du développement fait par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 25). Le calcul est fait aux pages 55−56 du cahier n° 2 des manuscrits. Les deux développements sont quasi identiques.

3.6.8 Développement de $\delta\varepsilon$ (longitude de l'époque)

$\delta\varepsilon = 10''.9310\,t$			+	$67''.03$	$\sin(\zeta' - \zeta)$	−	$327''.40$	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			−	19.61	$\sin(2\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	8.61	$\cos(2\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	4.39	$\sin(3\,\zeta' - 3\,\zeta)$	+	6.28	$\cos(3\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			+	2.05	$\sin(4\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	2.23	$\cos(4\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	1.08	$\sin(5\,\zeta' - 5\,\zeta)$	−	0.62	$\cos(5\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			−	0.14	$\sin(6\,\zeta' - 6\,\zeta)$	−	0.49	$\cos(6\,\zeta' - 6\,\zeta)$
+	$9''.12$	$\sin(\zeta)$	−	$3''.10$	$\sin(\zeta')$	+	$7''.92$	$\cos(\zeta')$
−	14.00	$\cos(\zeta)$	+	21.50	$\sin(\zeta' - 2\,\zeta)$	−	22.23	$\cos(\zeta' - 2\,\zeta)$
			+	2.58	$\sin(2\,\zeta' - \zeta)$	−	11.40	$\cos(2\,\zeta' - \zeta)$
			−	2.64	$\sin(2\,\zeta' - 3\,\zeta)$	−	5.65	$\cos(2\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			−	0.33	$\sin(3\,\zeta' - 2\,\zeta)$	−	0.43	$\cos(3\,\zeta' - 2\,\zeta)$
			−	2.61	$\sin(3\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	0.71	$\cos(3\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			−	0.34	$\sin(4\,\zeta' - 3\,\zeta)$	+	0.17	$\cos(4\,\zeta' - 3\,\zeta)$
			+	0.10	$\sin(4\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	1.29	$\cos(4\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	0.06	$\sin(5\,\zeta' - 4\,\zeta)$	+	0.24	$\cos(5\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	0.64	$\sin(5\,\zeta' - 6\,\zeta)$	+	0.08	$\cos(5\,\zeta' - 6\,\zeta)$
			+	0.15	$\sin(6\,\zeta' - 5\,\zeta)$	+	0.00	$\cos(6\,\zeta' - 5\,\zeta)$
			+	0.11	$\sin(6\,\zeta' - 7\,\zeta)$	−	0.31	$\cos(6\,\zeta' - 7\,\zeta)$
−	0.13	$\sin(2\,\zeta)$	−	0.02	$\sin(\zeta' + \zeta)$	+	0.05	$\cos(\zeta' + \zeta)$
−	0.66	$\cos(2\,\zeta)$	−	14.88	$\sin(\zeta' - 3\,\zeta)$	−	1.38	$\cos(\zeta' - 3\,\zeta)$
			−	0.10	$\sin(2\,\zeta')$	+	0.47	$\cos(2\,\zeta')$
			+	0.40	$\sin(2\,\zeta' - 4\,\zeta)$	−	1.38	$\cos(2\,\zeta' - 4\,\zeta)$
			+	0.14	$\sin(3\,\zeta' - \zeta)$	−	0.67	$\cos(3\,\zeta' - \zeta)$
			−	0.57	$\sin(3\,\zeta' - 5\,\zeta)$	−	0.26	$\cos(3\,\zeta' - 5\,\zeta)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\delta\varepsilon = 10'',9324\,t & + & 67'',03 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 327'',39 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & - & 19,62 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & - & 8,61 & \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & - & 4,40 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & + & 6,29 & \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & + & 2,06 & \sin(4\zeta' - 4\zeta) & + & 2,23 & \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & + & 1,08 & \sin(5\zeta' - 5\zeta) & - & 0,62 & \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
 & - & 0,14 & \sin(6\zeta' - 6\zeta) & - & 0,49 & \cos(6\zeta' - 6\zeta) \\
 & - & 0,18 & \sin(7\zeta' - 7\zeta) & - & 0,01 & \cos(7\zeta' - 7\zeta) \\
 & & & & & & \\
+\ 9'',12\ \sin\zeta & - & 3'',10 & \sin(\zeta') & + & 7'',92 & \cos(\zeta') \\
-\ 14,01\ \cos\zeta & + & 21,52 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & - & 22,24 & \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & + & 2,56 & \sin(2\zeta' - \zeta) & - & 11,40 & \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & - & 2,64 & \sin(2\zeta' - 3\zeta) & - & 5,65 & \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & - & 0,34 & \sin(3\zeta' - 2\zeta) & - & 0,43 & \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & - & 2,61 & \sin(3\zeta' - 4\zeta) & + & 0,72 & \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & - & 0,34 & \sin(4\zeta' - 3\zeta) & + & 0,18 & \cos(4\zeta' - 3\zeta) \\
 & + & 0,11 & \sin(4\zeta' - 5\zeta) & + & 1,30 & \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
 & + & 0,06 & \sin(5\zeta' - 4\zeta) & + & 0,23 & \cos(5\zeta' - 4\zeta) \\
 & + & 0,62 & \sin(5\zeta' - 6\zeta) & + & 0,09 & \cos(5\zeta' - 6\zeta) \\
 & & & & & & \\
 & + & 0'',15 & \sin(6\zeta' - 5\zeta) & - & 0'',00 & \cos(6\zeta' - 5\zeta) \\
 & + & 0,12 & \sin(6\zeta' - 7\zeta) & - & 0,30 & \cos(6\zeta' - 7\zeta) \\
 & + & 0,03 & \sin(7\zeta' - 6\zeta) & - & 0,11 & \cos(7\zeta' - 6\zeta) \\
 & - & 0,15 & \sin(7\zeta' - 8\zeta) & - & 0,10 & \cos(7\zeta' - 8\zeta) \\
 & & & & & & \\
-\ 0'',13\ \sin 2\zeta & - & 0'',00 & \sin(\zeta' + \zeta) & + & 0'',04 & \cos(\zeta' + \zeta) \\
-\ 0,66\ \cos 2\zeta & - & 14,94 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & - & 1,39 & \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
 & - & 0,10 & \sin(2\zeta') & + & 0,48 & \cos(2\zeta') \\
 & + & 0,40 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & - & 1,38 & \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & + & 0,14 & \sin(3\zeta' - \zeta) & - & 0,67 & \cos(3\zeta' - \zeta) \\
 & - & 0,57 & \sin(3\zeta' - 5\zeta) & - & 0,26 & \cos(3\zeta' - 5\zeta)
\end{array}
$$

FIGURE 3.15 – Début de la perturbation de ε obtenue avec TRIP en haut et début du développement fait par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 32−33). Il y a une excellente concordance. Le calcul est fait page 69 du cahier n° 2 des manuscrits. On lit la valeur à choisir pour σ : −10.931 avec TRIP et −10.9324 pour Le Verrier

3.6.9 Développement de $\delta\phi_1$ (inclinaison de l'orbite sur celle de Saturne)

$$
\begin{array}{llllllll}
\delta\phi_1 = 0''.000\,59\,t & & - & 1''.85 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 0''.39 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & + & 0.04 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & - & 0.10 & \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - & 0.04 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & - & 0.02 & \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & & & & & \\
- & 0.04 & \sin(\zeta) & + & 0.05 & \sin(\zeta') & + & 0.12 & \cos(\zeta') \\
- & 0.11 & \cos(\zeta) & - & 0.01 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & + & 0.07 & \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & & & - & 0.09 & \sin(2\zeta' - \zeta) & + & 0.01 & \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & & & & & & & & \\
- & 0.32 & \sin(2\zeta) & + & 0.05 & \sin(\zeta' + \zeta) & - & 0.80 & \cos(\zeta' + \zeta) \\
+ & 0.04 & \cos(2\zeta) & + & 0.82 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & - & 2.52 & \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
 & & & + & 0.11 & \sin(2\zeta') & + & 0.04 & \cos(2\zeta') \\
 & & & + & 0.12 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & + & 0.06 & \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & + & 0.02 & \sin(3\zeta' - \zeta) & - & 0.05 & \cos(3\zeta' - \zeta) \\
 & & & & & & & & \\
- & 0.03 & \sin(3\zeta) & + & 0.01 & \sin(\zeta' + 2\zeta) & + & 0.00 & \cos(\zeta' + 2\zeta) \\
+ & 0.03 & \cos(3\zeta) & + & 0.07 & \sin(\zeta' - 4\zeta) & - & 0.06 & \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & + & 0.01 & \sin(2\zeta' + \zeta) & - & 0.07 & \cos(2\zeta' + \zeta) \\
 & & & + & 0.05 & \sin(2\zeta' - 5\zeta) & + & 0.10 & \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
 & & & & & & & & \\
 & & & + & 0.00 & \sin(2\zeta' - 6\zeta) & - & 0.05 & \cos(2\zeta' - 6\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\delta\varphi_1 = +0'',000.59\,t - 1'',85 \sin(\zeta' - \zeta) - 0'',39 \cos(\zeta' - \zeta) \\
\qquad\qquad + 0,04 \sin(2\zeta' - 2\zeta) - 0,10 \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
\\
\quad - 0,04 \sin\zeta + 0,05 \sin(\zeta') + 0,12 \cos(\zeta') \\
\quad - 0,11 \cos\zeta - 0,01 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 0,07 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
\qquad\qquad - 0,09 \sin(2\zeta' - \zeta) + 0,01 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
\\
- 0,32 \sin 2\zeta + 0,05 \sin(\zeta' + \zeta) - 0,80 \cos(\zeta' + \zeta) \\
+ 0,04 \cos 2\zeta + 0,83 \sin(\zeta' - 3\zeta) - 2,53 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
\qquad\qquad + 0,11 \sin(2\zeta') + 0,04 \cos(2\zeta') \\
\qquad\qquad + 0,12 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 0,07 \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
\\
\qquad\qquad + 0,07 \sin(\zeta' - 4\zeta) - 0,06 \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
\qquad\qquad + 0,01 \sin(2\zeta' + \zeta) - 0,07 \cos(2\zeta' + \zeta) \\
\qquad\qquad + 0,05 \sin(2\zeta' - 5\zeta) + 0,09 \cos(2\zeta' - 5\zeta).
\end{array}
$$

FIGURE 3.16 – Expression de $\delta\phi_1$ trouvée avec TRIP en haut et par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 19). Le calcul est fait page 45 du cahier n° 2 des manuscrits.

Le Verrier donne le développement de δv un peu plus loin (*Herschel* p. 44), à partir du développement algébrique (voir fig. 3.22).

Remarque de Le Verrier : Après avoir fait tous ces calculs à partir de la fonction perturbatrice développée en série double des variables ζ et ζ', Le Verrier écrit p. 33 du cahier n° 2 :

> La forme précédente [$R(\zeta, \zeta')$] ne se prêtant pas commodément [16] aux différentiations exigées pour le calcul des autres éléments, je vais reprendre [17] complètement la détermination de R sous la seconde forme que je lui ai donnée [c'est à dire la forme algébrique].

C'est cette seconde forme que l'on va découvrir dans les pages suivantes.

16. Mais il va quand même au bout des calculs !

17. Au début du cahier n° 2, Le Verrier avait commencé par la détermination algébrique de la fonction perturbatrice au degré 6 et il avait brutalement abandonné les calculs p. 10 devant l'ampleur de la tâche ; il reprend alors le calcul de R avec un développement au degré 2 seulement ; il achèvera beaucoup plus tard le développement limité de la fonction perturbatrice au degré 7 [Le Verrier, 1855c] avec une méthode plus adaptée. Le résultat, s'étendant sur 73 pages, sera publié dans le premier tome des Annales de l'Observatoire de Paris [Le Verrier, 1855a].

3.7 Utilisation de la fonction perturbatrice sous forme algébrique

3.7.1 Expression littérale de la fonction perturbatrice utilisée par Le Verrier

On a vu comment on pouvait obtenir relativement facilement des valeurs numériques pour la fonction perturbatrice R et à partir d'un échantillonnage de cette fonction R, on a pu la développer comme fonction des deux anomalies moyennes ζ et ζ' d'Uranus et de Saturne. Mais pour déterminer les perturbations exercées par Saturne sur Uranus, il est indispensable de dériver cette fonction par rapport aux éléments elliptiques d'Uranus ; or, comme l'a constaté Le Verrier p. 33 du cahier n° 2 (et repris p. 106 de la thèse), une telle expression de R se prête mal aux dérivations.
Pour confirmer les résultats obtenus avec sa méthode de double interpolation, Le Verrier va utiliser l'expression de R obtenue par des développements algébriques, expression figurant dans la *Mécanique céleste* de Laplace, mais qu'il a recalculée entièrement au début du cahier n° 2.
Cette expression est connue depuis Lagrange. Elle fait intervenir les coefficients de Laplace, qui sont définis par le développement en série (de la variable α) suivant :

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha) + \sum_{k\geq 1} b_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha)\cos k\theta \tag{3.24}$$

Ces coefficients, dits de Laplace, vérifient de nombreuses relations de récurrence qui permettent de les calculer, ainsi que leurs dérivées, à partir des valeurs trouvées pour $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha)$ et $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha)$.
L'expression de R utilisée par Le Verrier (*Herschel*, p. 33 et p. 32 du cahier n° 2) se trouve à la figure 3.17.
Dans cette formule, les accolades représentent en principe des sommes d'une infinité de termes : $-\infty < i < +\infty$, mais dans la pratique, on se limite bien sûr à un nombre fini. Combien de termes faut-il retenir dans ces développements ? Le Verrier fait varier i de -2 à 2, mais naturellement, avec TRIP, il est tout aussi facile d'augmenter la tranche de variations de i : $-nb \leq i \leq nb$, avec nb arbitraire.

3.7.2 Fonction perturbatrice trouvée par Le Verrier

Dans *Herschel*, Le Verrier ne donne que les logarithmes des coefficients du développement de R (*Herschel*, p. 35−36). L'expression de R avec des coefficients explicites est donnée p. 34 du cahier n° 2 de ses manuscrits ; il l'obtient en remplaçant dans l'expression théorique (fig. 3.17) ℓ par $\zeta + \Pi$ et ℓ' par $\zeta' + \Pi'$; Π désignant la longitude du périhélie d'Uranus par rapport au nœud ascendant de l'orbite d'Uranus sur Saturne et Π' désignant la longitude du périhélie de Saturne par rapport au nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur Uranus. Cette expression de R a été reproduite à la figure 3.18.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{1}{2a} b^{(i)}_{\frac{1}{2}} \cos(il' - il) \\
& + \frac{e^2+e'^2}{8a}\left\{ -4i^2 b^{(i)}_{\frac{1}{2}} + 2\alpha \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \right\} \cos(il' - il) \\
& + \frac{ee'}{4a}\left\{ (i-1)(4i-2) b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}} - 2\alpha \frac{db^{(i-1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2 b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \right\} \cos(il' - il - \varpi' + \varpi) \\
& + \frac{1}{2a} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \left\{ -\alpha\, b^{(i-1)}_{\frac{3}{2}} \right\} \cos(il' - il) \\
& + \frac{e}{2a}\left\{ -(2i-1)\, b^{(i)}_{\frac{1}{2}} + \alpha \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} \right\} \cos[il' - (i-1)\, l - \varpi] \\
& + \frac{e'}{2a}\left\{ (2i-2)\, b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha \frac{db^{(i-1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} \right\} \cos[il' - (i-1)\, l - \varpi'] \\
& + \frac{e^2}{8a}\left\{ (4i^2 - 9i + 4)\, b^{(i)}_{\frac{1}{2}} - (4i-6)\alpha \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \right\} \cos[il' - (i-2) l - 2\varpi] \\
& + \frac{ee'}{4a}\left\{ (-4i^2 + 10i - 6) b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}} + (4i-6)\alpha \frac{db^{(i-1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2 b^{(i-1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \right\} \cos[il' - (i-2) l - \varpi' - \varpi] \\
& + \frac{e'^2}{8a}\left\{ (4i^2 - 11i + 6) b^{(i-2)}_{\frac{1}{2}} - (4i-6)\alpha \frac{db^{(i-2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(i-2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \right\} \cos[il' - (i-2) l - 2\varpi'] \\
& + \frac{1}{2a} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \left\{ \alpha\, b^{(i-1)}_{\frac{3}{2}} \right\} \cos[il' - (i-2) l - 2\theta_1].
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.17 – Expression algébrique utilisée par Le Verrier pour la fonction perturbatrice R

L'expression obtenue par Le Verrier fig. 3.18 est très voisine de celle obtenue par double interpolation (fig. 3.8), et de celle de la fig. 3.19, qui utilise les mêmes formules (fig. 3.17), mais avec $nb = 4$. La méthode algébrique (fig. 3.17) utilisée par Le Verrier se limite ici au degré 2 des excentricités, alors que la méthode d'interpolation peut prendre en compte des termes jusqu'au cinquième degré, ce qui explique quelques lacunes dans l'expression algébrique.
Le Verrier considère cette coïncidence entre les résultats obtenus par les deux méthodes indépendantes comme une justification a posteriori de sa méthode d'interpolation.

$6k_{u,s}nR$	=	436 091		−	1 390 400	$\sin(\zeta'-\zeta)$	−	285 960	$\cos(\zeta'-\zeta)$
				+	33 429	$\sin(2\,\zeta'-2\,\zeta)$	−	77 832	$\cos(2\,\zeta'-2\,\zeta)$
	+	19 980	$\sin(\zeta)$	+	113 798	$\sin(\zeta')$	+	19 527	$\cos(\zeta')$
	+	19 425	$\cos(\zeta)$	−	21 698	$\sin(\zeta'-2\,\zeta)$	+	10 437	$\cos(\zeta'-2\,\zeta)$
				−	176 701	$\sin(2\,\zeta'-\zeta)$	−	34 891	$\cos(2\,\zeta'-\zeta)$
				+	13 210	$\sin(2\,\zeta'-3\,\zeta)$	−	7919	$\cos(2\,\zeta'-3\,\zeta)$
	+	1682	$\sin(2\,\zeta)$	+	158	$\sin(\zeta'+\zeta)$	−	852	$\cos(\zeta'+\zeta)$
	+	113	$\cos(2\,\zeta)$	−	1208	$\sin(\zeta'-3\,\zeta)$	+	1919	$\cos(\zeta'-3\,\zeta)$
				+	12 663	$\sin(2\,\zeta')$	+	2571	$\cos(2\,\zeta')$
				+	1941	$\sin(2\,\zeta'-4\,\zeta)$	+	205	$\cos(2\,\zeta'-4\,\zeta)$

FIGURE 3.18 – Fonction perturbatrice obtenue par Le Verrier à partir du développement algébrique théorique avec $nb = 2$, ϖ remplacé par $\Pi = 221°$, ϖ' par $\Pi' = 142°$ et θ_1 par 0. Il y a une très bonne concordance avec l'expression obtenue par double interpolation, à part le coefficient de $\sin(2\zeta' - 2\zeta)$ (Le Verrier a constaté la différence, mais n'a pas fait de commentaire ; différence due à $nb = 2$?). Le Verrier a volontairement limité le coefficient de ζ' à 0, 1 ou 2, ce qui explique l'absence de certains termes dans son développement algébrique quand on le compare au développement algébrique de la figure 3.19, obtenu par TRIP avec $nb = 4$. Le Verrier interprétait donc les longitudes des périhélies relativement aux orbites respectives et non relativement à l'écliptique (cahier n° 2, p. 71).

3.7.3 Fonction perturbatrice obtenue avec TRIP

$6knR$	=	436 091		−	1 385 911	$\sin(\zeta'-\zeta)$	−	285 587	$\cos(\zeta'-\zeta)$
				+	28 909	$\sin(2\,\zeta'-2\,\zeta)$	−	77 908	$\cos(2\,\zeta'-2\,\zeta)$
				−	28 086	$\sin(3\,\zeta'-3\,\zeta)$	−	19 964	$\cos(3\,\zeta'-3\,\zeta)$
				−	10 939	$\sin(4\,\zeta'-4\,\zeta)$	+	9878	$\cos(4\,\zeta'-4\,\zeta)$
	+	19 980	$\sin(\zeta)$	+	113 798	$\sin(\zeta')$	+	19 527	$\cos(\zeta')$
	+	194 25	$\cos(\zeta)$	−	21 698	$\sin(\zeta'-2\,\zeta)$	+	10437	$\cos(\zeta'-2\,\zeta)$
				−	176 698	$\sin(2\,\zeta'-\zeta)$	−	34 890	$\cos(2\,\zeta'-\zeta)$
				+	13 209	$\sin(2\,\zeta'-3\,\zeta)$	−	7918	$\cos(2\,\zeta'-3\,\zeta)$
				+	2789	$\sin(3\,\zeta'-2\,\zeta)$	−	2981	$\cos(3\,\zeta'-2\,\zeta)$
				−	3083	$\sin(3\,\zeta'-4\,\zeta)$	−	8500	$\cos(3\,\zeta'-4\,\zeta)$
				−	1506	$\sin(4\,\zeta'-3\,\zeta)$	−	2212	$\cos(4\,\zeta'-3\,\zeta)$
				−	3464	$\sin(4\,\zeta'-5\,\zeta)$	+	3288	$\cos(4\,\zeta'-5\,\zeta)$
	+	1681	$\sin(2\,\zeta)$	+	158	$\sin(\zeta'+\zeta)$	−	852	$\cos(\zeta'+\zeta)$
	+	113	$\cos(2\,\zeta)$	−	1208	$\sin(\zeta'-3\,\zeta)$	+	1919	$\cos(\zeta'-3\,\zeta)$
				+	12 662	$\sin(2\,\zeta')$	+	2571	$\cos(2\,\zeta')$
				+	1941	$\sin(2\,\zeta'-4\,\zeta)$	+	205	$\cos(2\,\zeta'-4\,\zeta)$
				−	16 954	$\sin(3\,\zeta'-\zeta)$	−	3428	$\cos(3\,\zeta'-\zeta)$
				+	1200	$\sin(3\,\zeta'-5\,\zeta)$	−	1139	$\cos(3\,\zeta'-5\,\zeta)$
					+161	$\sin(4\,\zeta'-2\,\zeta)$	−	144	$\cos(4\,\zeta'-2\,\zeta)$

FIGURE 3.19 – Fonction perturbatrice obtenue à partir du développement algébrique théorique donné à la figure 3.17 avec $nb = 4$, ϖ remplacé par $\Pi = 221°$, ϖ' par $\Pi' = 142°$ et θ_1 par 0 ; calcul effectué avec TRIP. Il y a une bonne coïncidence avec le résultat obtenu par Le Verrier (fig. 3.18), à part le coefficient de $\sin(2\zeta' - 2\zeta)$. Il y a des termes supplémentaires car ici $nb = 4$ alors que Le Verrier s'était limité à $nb = 2$ (nb coefficient maximal devant ζ').

3.7.4 Équations de Lagrange

Pour déterminer les perturbations causées par Saturne sur les éléments elliptiques d'Uranus, on utilise les équations de Lagrange, avec la formulation initiale donnée par Le Verrier (*Herschel*, p. 10−11), qui est une simple réécriture des formules classiques [Perez, 2011] obtenue en remplaçant e par ψ défini par $\psi = \arcsin e$.

$$\text{Équations de Lagrange} \begin{cases} \dfrac{da}{dt} &= 2ka\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} &= -2ka\left(\dfrac{dR}{da}\right) + k\cos\psi\tan\dfrac{\psi}{2}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{k\tan\dfrac{\phi}{2}}{\cos\psi}\dfrac{\partial R}{\partial \phi} \\ \dfrac{de}{dt} &= -\dfrac{k}{\tan\psi}\dfrac{\partial R}{\partial \varpi} - k\cos\psi\tan\dfrac{\psi}{2}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ e\,\dfrac{d\varpi}{dt} &= k\cos\psi\dfrac{\partial R}{\partial e} + k\tan\psi\tan\dfrac{\phi}{2}\dfrac{\partial R}{\partial \phi} \\ \dfrac{d\phi}{dt} &= -\dfrac{k}{\sin\phi\cos\psi}\dfrac{\partial R}{\partial \theta} - \dfrac{k\tan\dfrac{\phi}{2}}{\cos\psi}\left(\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial R}{\partial \varpi}\right) \\ \sin\phi\,\dfrac{d\theta}{dt} &= \dfrac{k}{\cos\psi}\dfrac{\partial R}{\partial \phi} \end{cases} \tag{3.24}$$

On rappelle que ϕ désigne l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique (i en termes actualisés), θ la longitude du nœud ascendant (Ω en termes actualisés) et ε la longitude moyenne au 1er janvier 1800 (λ_0 en termes actualisés), longitude que Le Verrier appelle *longitude de l'époque*.
Les expressions pour les dérivées partielles s'obtiennent ici très facilement à partir de l'expression algébrique de R. Elles s'obtiennent aussi facilement avec TRIP, car TRIP permet de dériver ou d'intégrer formellement une série par rapport à un paramètre.
Les significations de ℓ, ζ, v ont été données à la table 3.2.

- Pour $\delta\ell$, Le Verrier utilise la formule $\delta\ell = \delta\varepsilon + \delta\rho$;
- Pour $e\,\delta\zeta$, il utilise $e\,\delta\zeta = e\delta\ell - e\delta\varpi$;
- Enfin pour δv, il utilise un développement à l'ordre 2 des éléments elliptiques (*Herschel*, p. 44) :

$$\begin{aligned} \delta v = {} & \delta\ell \\ & + \left\{\left(1 - \tfrac{3}{8}e^2\right)\sin\zeta + \tfrac{5}{4}e\sin 2\zeta + \tfrac{13}{8}e^2\sin 3\zeta\right\} 2\delta e \\ & + \left\{\left(1 - \tfrac{1}{8}e^2\right)\cos\zeta + \tfrac{5}{4}e\cos 2\zeta + \tfrac{13}{8}e^2\cos 3\zeta\right\} 2e\delta\zeta \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.7.5 Perturbations des éléments elliptiques

Le Verrier applique les formules de Lagrange, qui donnent – par intégration – les expressions des perturbations des éléments elliptiques d'Uranus, expressions qui sont très voisines de celles obtenues par la méthode numérique.
Il manque quelques termes, car pour les développements algébriques, que Le Verrier limite au degré 2 des excentricités, le coefficient de ζ' ne peut pas dépasser 2. Mais ces développements confirment la justesse de ceux trouvés par la méthode numérique, car les deux méthodes sont totalement indépendantes.
Le Verrier dit à la fin du n° 26 d'*Herschel*, consacré au calcul de $\delta\rho$ par la méthode algébrique :

> Le résultat ne s'éloigne de celui du n° 19 [obtenu par la méthode numérique] que de quantités fort petites, et qui n'auraient même pas d'influence sur les conséquences auxquelles nous arriverons dans la suite.

Mais, comme indiqué plus haut, il y a quelques lacunes (assumées) dans le développement algébrique, car par construction, ce développement ne peut pas faire intervenir la quantité $k'\zeta'$ avec $k' \geq 3$.
Au n° 27 de *Herschel*, Le Verrier fait lui-même la comparaison entre les résultats trouvés par les deux méthodes pour le développement de l'excentricité :

La partie principale de $\frac{de}{dt}$, celle que j'ai désignée au n° 20 par $\frac{d.\delta_1 e}{dt}$, dépend de la différentiation de la fonction du n° 25 par rapport à ϖ. En la formant et en intégrant, on trouvera :

$$\begin{aligned}
\delta_1 e = {} & + 0'',00 \sin\zeta + 123'',54 \sin(\zeta') + 25'',41 \cos(\zeta') \\
& + 72,87 \cos\zeta + 57,47 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 11,82 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
& - 0,37 \sin(2\zeta' - \zeta) + 0,87 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
& - 6,48 \sin(2\zeta' - 3\zeta) + 15,09 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& + 3,19 \sin 2\zeta - 0,48 \sin(\zeta' + \zeta) - 0,37 \cos(\zeta' + \zeta) \\
& + 3,18 \cos 2\zeta - 0,40 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 53,54 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& + 6,84 \sin(2\zeta') + 1,38 \cos(2\zeta'). \\
& - 5,73 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 3,32 \cos(2\zeta' - 4\zeta)
\end{aligned}$$

tandis que la valeur de $\delta_1 e$, trouvée au n° 20, et qui a pour expression $\delta_1 e - \delta_2 e$, est

$$\begin{aligned}
\delta_1 e = {} & - 0'',13 \sin\zeta + 123'',38 \sin(\zeta') + 25'',33 \cos(\zeta') \\
& + 72,94 \cos\zeta + 57,21 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 12,03 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
& - 0,37 \sin(2\zeta' - \zeta) + 0,87 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
& - 6,09 \sin(2\zeta' - 3\zeta) + 14,95 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& + 3,18 \sin 2\zeta - 0,48 \sin(\zeta' + \zeta) - 0,37 \cos(\zeta' + \zeta) \\
& + 3,18 \cos 2\zeta - 0,16 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 53,07 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& + 6,82 \sin(2\zeta') + 1,38 \cos(2\zeta') \\
& - 5,73 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 3,31 \cos(2\zeta' - 4\zeta).
\end{aligned}$$

FIGURE 3.20 – Comparaison effectuée par Le Verrier entre le développement de $\delta_1 e$ obtenu par la méthode algébrique (en haut) et celui obtenu par la méthode numérique (en bas). On constate la grande ressemblance entre les deux développements, mais on peut constater que Le Verrier ne compare que les termes figurant dans les deux développements, le développement obtenu par double interpolation contenant plus de termes que le développement obtenu par voie algébrique (*Herschel* n° 27) ; le calcul est fait p. 51 du cahier n° 2 des manuscrits

Pour alléger la présentation, je ne recopie pas les autres développements obtenus par Le Verrier avec la méthode algébrique, développements qui se trouvent dans *Herschel* et que j'ai confirmés par mes calculs. Je ne donnerai, dans les pages suivantes, que le développement de $\delta\ell$, obtenu à partir de la formule $\delta\ell = \delta\varepsilon + \delta\rho$ et celui de δv obtenu à partir de la formule (3.25) ; dans les deux cas, le développement obtenu par Le Verrier est comparé à celui obtenu par TRIP.
On constate des petites différences entre les deux développements de δv, dus aux reports successifs des différents développements intermédiaires. Pour ces deux développements, Le Verrier ne garde pas tous les termes obtenus dans les développements successifs préalables, car son expression de δv comprendrait alors trop de termes, ce qui compliquerait encore plus les calculs numériques ultérieurs (voir § 4.1.3). Il supprime ceux qui lui paraissent insensibles.

Perturbation de la longitude moyenne

$$
\begin{array}{llllllll}
\delta\ell = & & + & 30.98 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 152.31 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 24.54 & \sin(2\,\zeta' - 2\,\zeta) & - & 10.44 & \cos(2\,\zeta' - 2\,\zeta) \\
 & & - & 5.24 & \sin(3\,\zeta' - 3\,\zeta) & + & 7.46 & \cos(3\,\zeta' - 3\,\zeta) \\
 & & + & 2.37 & \sin(4\,\zeta' - 4\,\zeta) & + & 2.58 & \cos(4\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
 & & + & 1.09 & \sin(5\,\zeta' - 5\,\zeta) & - & 0.63 & \cos(5\,\zeta' - 5\,\zeta) \\
 & & - & 0.16 & \sin(6\,\zeta' - 6\,\zeta) & - & 0.51 & \cos(6\,\zeta' - 6\,\zeta) \\
 & & - & 0.23 & \sin(7\,\zeta' - 7\,\zeta) & + & 0.01 & \cos(7\,\zeta' - 7\,\zeta) \\
 & & & & & & & \\
+0.67 & \sin(\zeta) & - & 3.10 & \sin(\zeta') & + & 7.93 & \cos(\zeta') \\
-5.35 & \cos(\zeta) & + & 34.07 & \sin(\zeta' - 2\,\zeta) & + & 3.73 & \cos(\zeta' - 2\,\zeta) \\
 & & + & 1.90 & \sin(2\,\zeta' - \zeta) & - & 7.97 & \cos(2\,\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 4.04 & \sin(2\,\zeta' - 3\,\zeta) & - & 8.05 & \cos(2\,\zeta' - 3\,\zeta) \\
 & & - & 0.39 & \sin(3\,\zeta' - 2\,\zeta) & - & 0.47 & \cos(3\,\zeta' - 2\,\zeta) \\
 & & - & 3.36 & \sin(3\,\zeta' - 4\,\zeta) & + & 0.97 & \cos(3\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
 & & & & & & & \\
-0.14 & \sin(2\,\zeta) & - & 0.11 & \sin(\zeta' + \zeta) & + & 0.00 & \cos(\zeta' + \zeta) \\
-0.36 & \cos(2\,\zeta) & + & 103.18 & \sin(\zeta' - 3\,\zeta) & + & 70.20 & \cos(\zeta' - 3\,\zeta) \\
 & & - & 0.12 & \sin(2\,\zeta') & + & 0.51 & \cos(2\,\zeta') \\
 & & + & 0.55 & \sin(2\,\zeta' - 4\,\zeta) & - & 2.63 & \cos(2\,\zeta' - 4\,\zeta) \\
 & & + & 0.13 & \sin(3\,\zeta' - \zeta) & - & 0.52 & \cos(3\,\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 0.76 & \sin(3\,\zeta' - 5\,\zeta) & - & 0.53 & \cos(3\,\zeta' - 5\,\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\delta l = (10'',9324 + \sigma)\,t & & + & 30'',95 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 152'',29 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 24,54 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & - & 10,44 & \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - & 5,24 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & + & 7,47 & \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & & + & 2,37 & \sin(4\zeta' - 4\zeta) & + & 2,58 & \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 1,22 & \sin(5\zeta' - 5\zeta) & - & 0,70 & \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
 & & - & 0,15 & \sin(6\zeta' - 6\zeta) & - & 0,54 & \cos(6\zeta' - 6\zeta) \\
 & & - & 0,18 & \sin(7\zeta' - 7\zeta) & - & 0,01 & \cos(7\zeta' - 7\zeta) \\
 & & & & & & & \\
 & + 0'',69 \sin\zeta & - & 3'',10 & \sin(\zeta') & + & 7'',92 & \cos(\zeta') \\
 & - 5,36 \cos\zeta & + & 33,89 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & + & 3,48 & \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & & + & 1,88 & \sin(2\zeta' - \zeta) & - & 7,95 & \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 4,05 & \sin(2\zeta' - 3\zeta) & - & 7,95 & \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & & - & 0,40 & \sin(3\zeta' - 2\zeta) & - & 0,48 & \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - & 3,31 & \sin(3\zeta' - 4\zeta) & + & 0,97 & \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & & & & & & & \\
 & - 0'',16 \sin 2\zeta & - & 0'',00 & \sin(\zeta' + \zeta) & + & 0'',04 & \cos(\zeta' + \zeta) \\
 & - 0,30 \cos 2\zeta & + & 98,73 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & + & 69,53 & \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
 & & - & 0,10 & \sin(2\zeta') & + & 0,48 & \cos(2\zeta') \\
 & & + & 0,51 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & - & 2,53 & \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 0,11 & \sin(3\zeta' - \zeta) & - & 0,54 & \cos(3\zeta' - \zeta) \\
 & & - & 0,81 & \sin(3\zeta' - 5\zeta) & - & 0,33 & \cos(3\zeta' - 5\zeta)
\end{array}
$$

FIGURE 3.21 – Expression de la perturbation de la longitude moyenne exercée par Saturne sur Uranus calculée par TRIP en haut et par Le Verrier en bas. On a vu qu'il fallait choisir $\sigma = -10''.931$ pour que $\delta\ell$ ne contienne aucun terme dépendant explicitement du temps (Le Verrier choisit $\sigma = -10''.9324$) (*Herschel* p. 44–45) ; le calcul est fait p. 77 du cahier n° 2 des manuscrits

Le Verrier retient finalement 46 termes dans l'expression de la perturbation δv due à Saturne (voir fig. 3.22).

Perturbation de la longitude vraie

$$
\begin{array}{llrrlrrl}
\delta v = & & + & 11.85 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 19.32 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & & + & 4.00 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & + & 2.31 & \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & & + & 0.49 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & - & 0.72 & \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & & - & 0.31 & \sin(4\zeta' - 4\zeta) & - & 0.16 & \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 1.13 & \sin(5\zeta' - 5\zeta) & - & 0.62 & \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
+2.83 & \sin(\zeta) & + & 0.41 & \sin(\zeta') & + & 1.34 & \cos(\zeta') \\
+1.02 & \cos(\zeta) & + & 144.14 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & + & 18.41 & \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & & + & 0.38 & \sin(2\zeta' - 1\zeta) & - & 0.70 & \cos(2\zeta' - 1\zeta) \\
 & & + & 1.29 & \sin(2\zeta' - 3\zeta) & + & 2.09 & \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & & + & 0.06 & \sin(3\zeta' - 2\zeta) & - & 0.04 & \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & & - & 2.19 & \sin(3\zeta' - 4\zeta) & + & 3.50 & \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 0.00 & \sin(4\zeta' - 3\zeta) & - & 0.02 & \cos(4\zeta' - 3\zeta) \\
 & & + & 0.41 & \sin(4\zeta' - 5\zeta) & + & 1.97 & \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
+0.34 & \sin(2\zeta) & + & 0.00 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & + & 71.02 & \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
-0.48 & \cos(2\zeta) & + & 0.04 & \sin(2\zeta' + 0\zeta) & - & 0.14 & \cos(2\zeta' + 0\zeta) \\
 & & + & 0.30 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & - & 2.95 & \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 0.12 & \sin(3\zeta' - 1\zeta) & - & 0.53 & \cos(3\zeta' - 1\zeta) \\
 & & - & 0.92 & \sin(3\zeta' - 5\zeta) & - & 0.45 & \cos(3\zeta' - 5\zeta) \\
 & & + & 4.83 & \sin(\zeta' - 4\zeta) & + & 3.35 & \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
 & & + & 0.01 & \sin(2\zeta' - 5\zeta) & - & 0.13 & \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
 & & + & 0.28 & \sin(\zeta' - 5\zeta) & + & 0.20 & \cos(\zeta' - 5\zeta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrlrrl}
\delta v = & + & 11'',96 & \sin(\zeta' - \zeta) & - & 18'',67 & \cos(\zeta' - \zeta) \\
 & + & 3,81 & \sin(2\zeta' - 2\zeta) & + & 1,66 & \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
 & + & 0,49 & \sin(3\zeta' - 3\zeta) & - & 0,68 & \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
 & - & 0,17 & \sin(4\zeta' - 4\zeta) & - & 0,16 & \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
 & - & 0,09 & \sin(5\zeta' - 5\zeta) & + & 0,04 & \cos(5\zeta' - 5\zeta) \\
+ 2'',83 \sin\zeta & + & 0'',41 & \sin(\zeta') & + & 1'',38 & \cos(\zeta') \\
+ 1,04 \cos\zeta & + & 138,77 & \sin(\zeta' - 2\zeta) & + & 14,18 & \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
 & + & 0,36 & \sin(2\zeta' - \zeta) & - & 0,73 & \cos(2\zeta' - \zeta) \\
 & + & 1,27 & \sin(2\zeta' - 3\zeta) & + & 2,29 & \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
 & + & 0,11 & \sin(3\zeta' - 2\zeta) & + & 0,06 & \cos(3\zeta' - 2\zeta) \\
 & + & 0,44 & \sin(3\zeta' - 4\zeta) & - & 0,14 & \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
 & - & 0,01 & \sin(4\zeta' - 5\zeta) & - & 0,12 & \cos(4\zeta' - 5\zeta) \\
+ 0'',10 \sin 2\zeta & + & 3'',79 & \sin(\zeta' - 3\zeta) & + & 2'',22 & \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
+ 0,54 \cos 2\zeta & - & 0,08 & \sin(2\zeta') & + & 0,05 & \cos(2\zeta') \\
 & - & 0,05 & \sin(2\zeta' - 4\zeta) & + & 2,02 & \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
 & + & 0,19 & \sin(3\zeta' - 5\zeta) & - & 0,04 & \cos(3\zeta' - 5\zeta) \\
 & + & 0,07 & \sin(\zeta' - 4\zeta) & - & 0,37 & \cos(\zeta' - 4\zeta) \\
 & + & 2,17 & \sin(2\zeta' - 5\zeta) & - & 2,18 & \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
 & - & 0,15 & \sin(3\zeta' - 6\zeta) & - & 0,23 & \cos(3\zeta' - 6\zeta) \\
 & - & 0,09 & \sin(4\zeta' - 7\zeta) & + & 0,05 & \cos(4\zeta' - 7\zeta) \\
 & + & 0,55 & \sin(2\zeta' - 6\zeta) & - & 0,17 & \cos(2\zeta' - 6\zeta).
\end{array}
$$

FIGURE 3.22 – Expressions de la perturbation de la longitude vraie d'Uranus par Saturne obtenues par TRIP en haut et par Le Verrier en bas (*Herschel*, p. 47), toutes les deux obtenues à partir de la formule (3.25). Il y a des différences non négligeables dans les coefficients, en partie dues aux reports successifs dans les différentes perturbations avant d'en arriver à δv. Le Verrier partage les termes en $\zeta' - 3\zeta$ entre la longitude vraie et la longitude moyenne ; il faut donc comparer la somme des coefficients figurant dans les deux développements avec le coefficient obtenu avec TRIP ; le calcul est fait p. 73 du cahier n° 2 des manuscrits

3.8 Perturbations exercées par Jupiter sur Uranus

Le Verrier a constaté que les deux démarches, numérique et algébrique, donnaient des résultats très voisins pour la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus. En conséquence, pour l'action de Jupiter sur Uranus, il ne fera que le calcul de la fonction perturbatrice à partir de son expression algébrique. Je ne donne pas les résultats pour ne pas surcharger la présentation. Les résultats de Le Verrier sont dans *Herschel*, p. 81 à 94 et dans le cahier n° 2 des manuscrits p. 42−49. Je les ai vérifiés avec TRIP ; ils sont tout aussi exacts que ceux obtenus avec Saturne. Le nombre de termes dans les développements est moindre que dans ceux de Saturne, car l'action de Jupiter sur Uranus est moins forte que celle de Saturne. J'ai placé à la table 3.10 l'expression obtenue avec TRIP pour la perturbation de la longitude vraie exercée par Jupiter et pour comparaison, à la figure 3.23 ce que trouve Le Verrier. ζ'' désigne l'anomalie moyenne de Jupiter.

TABLE 3.10 – Perturbation de la longitude vraie d'Uranus exercée par Jupiter sur Uranus, calculée par TRIP à partir de l'expression algébrique. ζ'' désigne l'anomalie moyenne de Jupiter. On trouve sensiblement les mêmes valeurs que Le Verrier (fig. 3.23)

$\delta v =$			$-$	49.27	$\sin(\zeta'' - \zeta)$	$-$	21.49	$\cos(\zeta'' - \zeta)$
			$+$	0.30	$\sin(2\,\zeta'' - 2\,\zeta)$	$+$	0.00	$\cos(2\,\zeta'' - 2\,\zeta)$
$-$	1.26	$\sin\zeta$	$+$	1.07	$\sin(\zeta'')$	$+$	0.47	$\cos(\zeta'')$
$+$	1.36	$\cos\zeta$	$-$	3.10	$\sin(\zeta'' - 2\,\zeta)$	$-$	1.28	$\cos(\zeta'' - 2\,\zeta)$
			$-$	1.16	$\sin(2\,\zeta'' - \zeta)$	$-$	0.51	$\cos(2\,\zeta'' - \zeta)$

$$
\begin{aligned}
\delta v = \quad & - 48'',92 \sin(\zeta'' - \zeta) - 21'',38 \cos(\zeta'' - \zeta) \\
& + 0,18 \sin(2\zeta'' - 2\zeta) - 0,04 \cos(2\zeta'' - 2\zeta) \\
- 1'',29 \sin\zeta \; & + 0,93 \sin(\zeta'') + 0,53 \cos(\zeta'') \\
+ 1,36 \cos\zeta \; & - 3,00 \sin(\zeta'' - 2\zeta) - 1,10 \cos(\zeta'' - 2\zeta) \\
& - 1,31 \sin(2\zeta'' - \zeta) - 0,66 \cos(2\zeta'' - \zeta) \\
& - 0,17 \sin(2\zeta'' - 3\zeta) - 0,25 \cos(2\zeta'' - 3\zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.23 – Perturbation de la longitude vraie d'Uranus exercée par Jupiter, calculée par Le Verrier avec la méthode algébrique (*Herschel* p. 94) ; ζ'' désigne l'anomalie moyenne de Jupiter ; le calcul est fait p. 94 du cahier n° 2 des manuscrits

3.9 Perturbations à l'ordre 2 des masses

Dans les calculs précédents, la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus a été calculée en supposant les éléments elliptiques d'Uranus et de Saturne constants, i.e. en plaçant Uranus et Saturne sur leur orbite théorique et non sur leur orbite réelle [18] ; or les éléments elliptiques de Saturne varient sous l'action de Jupiter et l'on a déjà déterminé les variations des éléments d'Uranus à l'ordre 1 dues à Jupiter et à Saturne. Si l'on veut plus de précision dans le résultat final, il faut donc calculer la fonction perturbatrice en tenant compte de ces variations. Concrètement, cela revient à tenir compte dans les perturbations des termes d'ordre 2 selon les masses (voir encadré 5, p. 77).

3.9.1 Inégalités séculaires

Le Verrier examine comment évolue avec le temps le coefficient de la perturbation principale (en $(\zeta' - 3\zeta)$) de la longitude moyenne et celui de la perturbation principale (en $(\zeta' - 2\zeta)$) de la longitude vraie d'Uranus en se servant des variations séculaires des excentricités et des longitudes du périhélie de Saturne et d'Uranus. Il connaît les valeurs de R, e, ϖ, e', ϖ', ε, ε' en 1800 ; il détermine leurs valeurs pour 2300 en utilisant le formulaire qu'il a établi pour les variations séculaires des éléments elliptiques d'Uranus et de Saturne, variations qu'il a déterminées dans son premier mémoire *Variations séculaires des éléments des orbites pour les 7 planètes principales* [Le Verrier, 1839a]. Il forme ensuite l'expression de R en 2300 ; il en déduit les perturbations δe, $\delta\varepsilon$ et $e\delta\varpi$ en 2300. À partir de ces données, il calcule les expressions de $\delta\ell$ et de δv en 2300, et par suite, il connaît leur évolution dans le temps par une simple interpolation linéaire. Mais Le Verrier ne signale pas dans les manuscrits qu'il a utilisé les données de son premier mémoire et il est difficile de comprendre dans un premier temps comment il passe de 1800 à 2300. Voici les résultats trouvés par Le Verrier pour ces inégalités séculaires :

$$\delta\ell = (125''.95 - 0''.0113t)\sin(\ell' - 3\ell + 88°33'58'' + 18''.25t) \tag{3.26}$$

$$\delta v = (140''.87 - 0''.0092t)\sin(\ell' - 2\ell + 252°1'41'' + 16''.31t) \tag{3.27}$$

Et il conclut cette partie en disant que ce sont les seuls termes séculaires sensibles.
Je n'ai pas vérifié le calcul complet, qui est très long, j'ai simplement vérifié la cohérence des données.

3.9.2 Perturbations exercées par Jupiter sur Saturne

Pour accéder aux perturbations des éléments elliptiques de Saturne exercées par Jupiter, Le Verrier détermine la fonction perturbatrice de Jupiter sur Saturne en utilisant la formule algébrique et il en prend une version simplifiée, car il ne s'agit que de procéder à des corrections par rapport aux expressions trouvées avec les perturbations à l'ordre 1 des masses.
Le Verrier détermine, comme il vient de le faire pour Saturne et Jupiter sur Uranus, les perturbations des éléments elliptiques de Saturne sous l'action de Jupiter. J'ai vérifié les expressions trouvées par Le Verrier avec TRIP et elles sont tout aussi exactes que celles trouvées pour Saturne sur Uranus. Voici par exemple figure 3.24 la perturbation de la longitude moyenne de Saturne sous l'action de Jupiter :

18. Voir la remarque de Biot un peu plus loin, p. 120.

Perturbations de la longitude moyenne de Saturne.

$$
\begin{aligned}
\delta l' = {} & + 111'',13 \sin(\zeta'' - \zeta') - 523'',31 \cos(\zeta'' - \zeta') \\
& - 135,701 \sin(2\zeta'' - 2\zeta') - 60,353 \cos(2\zeta'' - 2\zeta') \\
& + 7,690 \sin(\zeta') - 20,008 \cos(\zeta') \\
& - 12,686 \sin(\zeta'') + 28,549 \cos(\zeta'') \\
& + 310,57 \sin(\zeta'' - 2\zeta') - 2,305 \cos(\zeta'' - 2\zeta') \\
& + 5,460 \sin(2\zeta'' - \zeta') - 20,559 \cos(2\zeta'' - \zeta') \\
& - 37,134 \sin(2\zeta'' - 3\zeta') - 54,938 \cos(2\zeta'' - 3\zeta') \\
& + 24,422 \sin(\zeta'' - 3\zeta') + 13,544 \cos(\zeta'' - 3\zeta') \\
& - 2,112 \sin(2\zeta'' - 4\zeta') - 34,290 \cos(2\zeta'' - 4\zeta') \\
& + 1116,1 \sin(2\zeta'' - 5\zeta') - 2707,8 \cos(2\zeta'' - 5\zeta').
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.24 – Perturbation exercée par Jupiter sur la longitude moyenne de Saturne, calculée par Le Verrier. On y reconnaît la grande inégalité (dépendant de l'argument $2\zeta'' - 5\zeta'$), qui peut atteindre $48'$; le calcul est fait p. 97 du cahier n° 2 des manuscrits

TABLE 3.11 – Perturbation de la longitude moyenne exercée par Jupiter sur Saturne avec TRIP. On retrouve la tendance des coefficients de Le Verrier, mais avec des petites différences, notamment sur la grande inégalité. Les lettres A, B, L sont utilisées dans le calcul de la perturbation à la figure 3.26

$\delta\ell' =$	$+$	109.44 $\sin(\zeta'' - \zeta')$	$-$	524.89 $\cos(\zeta'' - \zeta')$		A
	$-$	134.85 $\sin(2\zeta'' - 2\zeta')$	$-$	59.06 $\cos(2\zeta'' - 2\zeta')$		B
	$-$	32.14 $\sin(3\zeta'' - 3\zeta')$	$+$	44.14 $\cos(3\zeta'' - 3\zeta')$		
	$+$	7.95 $\sin(\zeta')$	$-$	20.01 $\cos(\zeta')$		
	$-$	12.67 $\sin(\zeta'')$	$+$	28.46 $\cos(\zeta'')$		
	$+$	307.89 $\sin(\zeta'' - 2\zeta')$	$-$	1.61 $\cos(\zeta'' - 2\zeta')$		E
	$+$	5.59 $\sin(2\zeta'' - \zeta')$	$-$	20.51 $\cos(2\zeta'' - \zeta')$		
	$-$	37.26 $\sin(2\zeta'' - 3\zeta')$	$-$	54.27 $\cos(2\zeta'' - 3\zeta')$		
	$+$	24.48 $\sin(\zeta'' - 3\zeta')$	$+$	13.36 $\cos(\zeta'' - 3\zeta')$		
	$-$	2.40 $\sin(2\zeta'' - 4\zeta')$	$-$	34.10 $\cos(2\zeta'' - 4\zeta')$		
	$+$	1030.20 $\sin(2\zeta'' - 5\zeta')$	$-$	2433.20 $\cos(2\zeta'' - 5\zeta')$		L

3.9.3 Modification de la fonction perturbatrice

Il faut maintenant tenir compte de toutes les perturbations précédentes ; voici ce que Le Verrier écrit (*Herschel* p. 68) :

> Occupons-nous des changements qu'éprouve la fonction R du n° 25 [fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus], lorsqu'au lieu d'y regarder les éléments des orbites de Saturne et d'Uranus constants, on considère les variations que subissent ces éléments, variations qui ont été précédemment déterminées. Nous avons déjà eu égard, dans les n° 48 et 49, à l'influence des variations séculaires des éléments des orbites [voir § 3.9.1] ; il nous reste à tenir compte des termes périodiques.

Il faut pour cela déterminer les perturbations supplémentaires du moyen mouvement (on rappelle que c'est ainsi que Le Verrier appelle la fonction ρ), de l'excentricité, de la longitude du périhélie et de la longitude de l'époque dues aux variations des éléments d'Uranus dans un premier temps, puis dues aux variations des éléments de Saturne dans un deuxième temps et enfin ajouter ces deux résultats partiels.

Les calculs s'appuient sur des formules de la *Mécanique céleste* de Laplace. Voici la formule permettant de déterminer les perturbations du moyen mouvement dues aux variations des éléments de Saturne :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -3kn\frac{d.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}}{d\varepsilon'}\delta l' - 3kn\frac{d.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}}{da'}\delta a'$$
$$-3kn\frac{d.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}}{de'}\delta e' - 3kn.\frac{1}{e'}\frac{d.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}}{d\varpi'}.e'\delta\varpi'.$$

FIGURE 3.25 – Formule permettant de déterminer les perturbations à l'ordre 2 des masses du moyen mouvement (ρ) d'Uranus, perturbations dues aux variations ($\delta e'$, $\delta\varpi'$, $\delta l'$, $\delta\varepsilon'$, $\delta a'$) des éléments de Saturne sous l'action de Jupiter ; R désigne la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus (*Herschel* p. 73)

Le calcul est d'une extrême complexité. La formule donnant $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ (fig. 3.25) est, comme on le voit, une somme de 4 termes, chaque terme étant un produit de 2 facteurs exprimés en termes de série trigonométrique. Typiquement, chaque série comporte une dizaine de termes ; donc le produit de deux séries comprendrait, s'il était effectué complètement, une centaine de termes. Or la plupart des termes que l'on obtiendrait en effectuant complètement ce produit seraient négligeables, soit parce qu'affectés d'un coefficient faible, soit parce que de périodes courtes et devenant alors faibles après deux intégrations, soit parce qu'ils sont détruits par un terme voisin provenant d'un autre produit. Il 'suffit' donc de sélectionner les termes utiles ; voici comment procède Le Verrier : il appelle A, B ..., L les termes d'une série et (1), (2),...,(10) les termes de l'autre. En tenant compte des coefficients et des arguments respectifs, il se limite à une dizaine de produits qu'il pense sensibles, comme (A*1), (A*5), (B*3),..., (F*7)... par exemple, dont il fait la somme et qu'il intègre deux fois par rapport au temps. Voir la sélection effectuée pour le premier terme de la formule se trouvant à la figure 3.25 par Le Verrier à la fig. 3.26. Il fait cette délicate opération (produit de deux séries trigonométriques en sélectionnant les termes sensibles) pour chacun des 4 termes de la somme figurant dans la formule écrite à la figure 3.25.

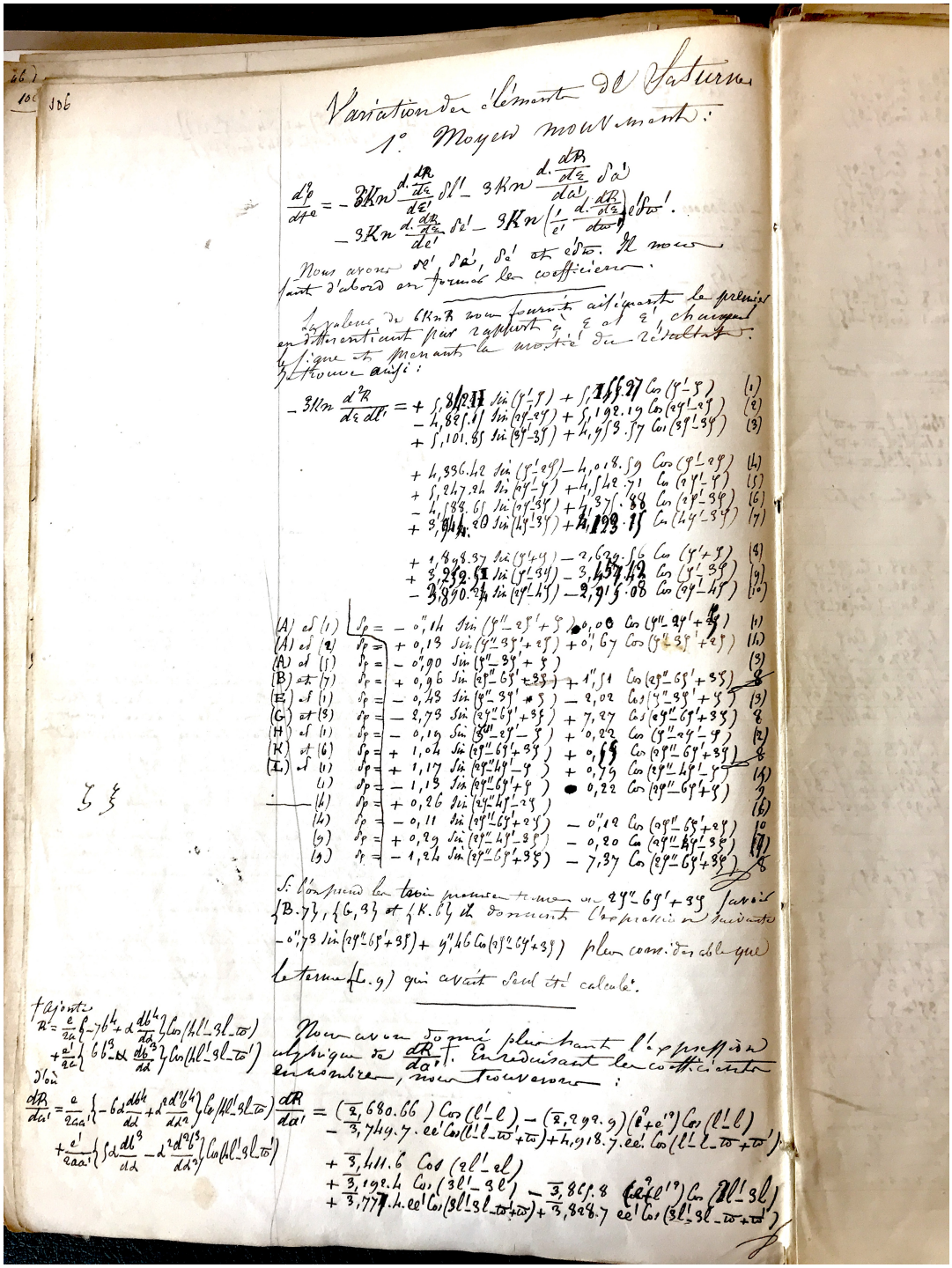


FIGURE 3.26 – Sélection réalisée par Le Verrier pour déterminer les termes sensibles de la perturbation en longitude dépendant du carré des masses. On voit que Le Verrier sélectionne dans chacun des facteurs un terme, comme (A) et (1), (B) et (7), (K) et (6)..., en fait le produit, puis il reporte la somme de tous les termes obtenus.
(1) à (10) provient de $-3kn\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\ell'}$ (situé en milieu de page) ; A, B, ..., L provient de $\delta\ell'$, table 3.11. Le calcul est fait p. 101 du cahier n° 2 des manuscrits.
On voit dans la marge ζ et ξ ; comme ce manuscrit n'est pas à l'usage des typographes, on peut imaginer qu'il montre à Gautier la différence de graphisme entre ces deux lettres ?

Et voici le résultat qu'il obtient pour le moyen mouvement :

$$
\begin{aligned}
\delta\rho = {} & + 0'',05 \sin(\zeta' - \zeta) && - 0'',24 \cos(\zeta' - \zeta) \\
& + 0,10 \sin(\zeta' - 2\zeta) && - 0,07 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,58 \sin(\zeta' - 3\zeta) && - 0,22 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
& - 0,14 \sin(\zeta'' - 2\zeta' + \zeta) && + 0,00 \cos(\zeta'' - 2\zeta' + \zeta) \\
& - 0,02 \sin(\zeta'' - 2\zeta' - \zeta) && - 0,18 \cos(\zeta'' - 2\zeta' - \zeta) \\
& + 0,03 \sin(\zeta'' - 3\zeta' + 2\zeta) && + 0,18 \cos(\zeta'' - 3\zeta' + 2\zeta) \\
& - 3,00 \sin(\zeta'' - 3\zeta' + \zeta) && - 0,82 \cos(\zeta'' - 3\zeta' + \zeta) \\
& + 0,14 \sin(\zeta'' - 4\zeta' + 3\zeta) && - 0,06 \cos(\zeta'' - 4\zeta' + 3\zeta) \\
& - 0,24 \sin(\zeta'' - 4\zeta' + 4\zeta) && + 0,41 \cos(\zeta'' - 4\zeta' + 4\zeta) \\
& + 1,17 \sin(2\zeta'' - 4\zeta' - \zeta) && + 0,79 \cos(2\zeta'' - 4\zeta' - \zeta) \\
& + 0,26 \sin(2\zeta'' - 4\zeta' - 2\zeta) && + 0,00 \cos(2\zeta'' - 4\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,29 \sin(2\zeta'' - 4\zeta' - 3\zeta) && - 0,20 \cos(2\zeta'' - 4\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0,27 \sin(2\zeta'' - 5\zeta' + \zeta) && - 0,09 \cos(2\zeta'' - 5\zeta' + \zeta) \\
& - 1,13 \sin(2\zeta'' - 6\zeta' + \zeta) && - 0,22 \cos(2\zeta'' - 6\zeta' + \zeta) \\
& + 0,08 \sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta) && + 0,22 \cos(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta) \\
& + 34,45 \sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta) && - 0,87 \cos(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 3.27 – Expression de $\delta\rho$ trouvée par Le Verrier quand il tient compte des variations des éléments de Saturne dans le calcul de la fonction perturbatrice, en s'appuyant sur la formule de la figure 3.25. On voit que Le Verrier conserve des termes relativement faibles ; il en éliminera beaucoup dans le résultat final (*Herschel* p. 76) ; le calcul est fait p. 105 du cahier n° 2 des manuscrits

Quand on utilise un outil de calcul comme TRIP, tous les calculs sont effectués complètement, sans faire le tri sélectif de Le Verrier. On constate des différences importantes avec les résultats de Le Verrier. Est-ce que Le Verrier aurait oublié des termes sensibles en faisant la sélection des produits à effectuer ?
Voir au § 3.9.4 le commentaire fait par Simon et Chapront [Simon, 1973] après comparaison des termes dépendant du carré des masses calculés par Le Verrier et ceux obtenus par un moyen moderne. Les calculs contrôlés par Simon et Chapront concernent Jupiter, mais leur commentaire, énoncé pour Jupiter, doit vraisemblablement s'appliquer aussi bien à Uranus.
Voici ce que je trouve avec TRIP en effectuant le calcul tel qu'il est écrit à la formule de la figure 3.25 :

TABLE 3.12 – Perturbation du moyen mouvement $\delta\rho$ déterminé par TRIP à l'aide de la formule de la figure 3.25. Il y a des ressemblances, mais aussi de nombreuses différences avec les résultats trouvés par Le Verrier à la figure 3.27

$\delta\rho =$			+	0.55	$\cos(\zeta' - \zeta)$
			−	0.22	$\cos(\zeta'' - 2\zeta' - \zeta)$
−	0.32	$\sin(\zeta'' - 3\zeta' + \zeta)$			
−	0.21	$\sin(\zeta'' - 4\zeta' + 4\zeta)$	−	0.62	$\cos(\zeta'' - 4\zeta' + 4\zeta)$
+	1.05	$\sin(2\zeta'' - 4\zeta' - \zeta)$	+	0.72	$\cos(2\zeta'' - 4\zeta' - \zeta)$
			−	0.20	$\cos(2\zeta'' - 4\zeta' - 2\zeta)$
−	0.28	$\sin(2\zeta'' - 4\zeta' - 3\zeta)$	−	0.21	$\cos(2\zeta'' - 4\zeta' - 3\zeta)$
+	0.30	$\sin(2\zeta'' - 5\zeta' + \zeta)$			
−	1.14	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + \zeta)$	−	0.21	$\cos(2\zeta'' - 6\zeta' + \zeta)$
+	0.23	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta)$			
+	42.95	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta)$	+	6.84	$\cos(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta)$

Le Verrier recommence cette opération pour l'excentricité, la longitude du périhélie et la longi-

tude de l'époque, en s'appuyant sur les formules appropriées de la *Mécanique céleste*.
Ensuite, il doit recommencer l'ensemble des opérations précédentes quand on tient compte cette fois des variations des éléments d'Uranus, en s'appuyant pour ce nouveau calcul sur la formule suivante :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{6m'}{a^3}\frac{dR}{d\varepsilon}\delta a - \frac{3m'}{a^2}\frac{d\frac{dR}{da}}{d\varepsilon}\delta a - \frac{3m'}{a^2}\cdot\frac{d\frac{dR}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}\delta l - \frac{3m'}{a^2}\frac{d\frac{dR}{de}}{d\varepsilon}\delta e - \frac{3m'}{a^2}\cdot\frac{d\frac{dR}{d\varpi}}{d\varepsilon}\delta\varpi.$$

FIGURE 3.28 – Formule permettant de déterminer les perturbations à l'ordre 2 des masses du moyen mouvement (ρ) d'Uranus, perturbations dues aux variations (δe, $\delta\varpi$, δl, $\delta\varepsilon$, δa) des éléments d'Uranus ; R désigne la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus (*Herschel* p. 69)

Commentaire : Le Verrier effectue donc en détail [19] le calcul (pénible) de ces perturbations du second ordre selon les masses, calcul que n'avait pas abordé Bouvard.
Ce calcul s'étend de la page 61 à la page 84 de *Herschel* et de la page 101 du cahier n° 2 à la page 121, et il est loin d'être facile à suivre. Voici comment Le Verrier commente le calcul dans son premier mémoire sur Uranus [Le Verrier, 1845a] :

> Le calcul des termes, dépendant du carré des masses, est donc très compliqué ; il demande, en outre, une grande attention si l'on veut, d'une part, obtenir tous les termes sensibles, et, de l'autre, ne pas s'exposer à regarder comme tels des expressions qui auraient disparu, si l'on avait poussé plus loin les approximations. Je me suis débarrassé d'une grande partie des termes, en démontrant qu'ils se détruisaient entre eux, soit dans les expressions totales des perturbations des éléments, soit dans la valeur complète des perturbations de la longitude vraie.

L'ensemble est très technique [20] : les calculs font intervenir des dérivées partielles par rapport à deux variables, mais il n'utilise pas la notation ∂ et il ne précise pas toujours quelles sont les variables effectives, ce qui rend parfois le calcul difficile à suivre.
Voici ce qu'en dit Biot [21] ([Biot, 1847b], 4e article)

> Les attractions doivent se calculer d'après les distances réelles et troublées des corps, et non pas d'après les distances de leurs lieux elliptiques.... En conséquence, M. Le Verrier a dû porter le calcul jusqu'au carré des fractions qui les expriment [les perturbations]. Il l'a fait avec non moins de scrupule, son intelligence intime de la théorie et sa grande pratique des applications lui servant à distinguer, sans incertitude, tous les termes de cet ordre qui pouvaient ne pas être absolument négligeables dans la question qu'il voulait résoudre.... Il faut beaucoup de tact pour choisir, en chaque circonstance, ceux que l'on peut omettre ou que l'on doit conserver. C'était là un des pas les plus difficiles que M. Le Verrier eût à franchir.

19. Gautier, qui a aidé Le Verrier pendant le calcul des perturbations, déclare : « Jamais nous n'avons été si pressés, et le moment devient d'autant plus intéressant que nous découvrons du nouveau dans ce que nous faisons à présent. Il paraît décidément qu'il y a des termes assez considérables omis dans le carré de la force perturbatrice, et M. Leverrier, s'en étant aperçu, nous avons tout recommencé » (lettre du 20 octobre 1845, adressée à ses parents).
20. Ici, en fait la préoccupation principale de Le Verrier est de déterminer les calculs dont il peut se passer.
21. Rappelons que Biot a relu et corrigé l'intégralité de la *Mécanique céleste* de Laplace ; ce travail l'a occupé pendant deux ans et l'a épuisé (Photoniques n° 51 janvier/février 2011 et [Poirier, 2011]), mais il apprend énormément, en particulier le traitement des termes de perturbation dépendant du carré des masses. Il a publié son travail de correction en 1801 [Biot, 1801].

3.9.4 Résultats

Le Verrier conserve finalement une soixantaine de termes (en sinus et cosinus) pour δv, qu'il qualifie de sensibles ; mais il en supprimera encore un certain nombre dans son résultat final.
Il y a beaucoup de convergences entre les calculs effectués par Le Verrier et ceux effectués par TRIP, mais j'ai trouvé quelques différences avec les valeurs données par Le Verrier ; en voici quelques exemples table 3.13. D'une manière assez générale, je trouve avec TRIP les

TABLE 3.13 – Comparaisons de certains coefficients d'ordre 2 selon les masses obtenus par Le Verrier et TRIP (*Herschel* p. 76, 83 et 85) ; les calculs sont faits p. 101−117 du cahier n° 2

élément	coefficient de	LV	TRIP
$\delta\rho$	$\sin(\zeta'' - 3\zeta' + \zeta)$	-3	-0.68
$\delta\varepsilon$	$\sin(\zeta'' - 3\zeta' + \zeta)$	1.09	0.33
$\delta\ell$	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta)$	34.45	42.95

élément	coefficient de	LV	TRIP
δv	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta)$	5.33	6.55
δv	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 4\zeta)$	-0.30	1.45
δv	$\sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 4\zeta)$	-3.0	-0.32

mêmes ordres de grandeur que Le Verrier dans les coefficients des développements successifs. Les coefficients assez grands, de l'ordre de quelques dizaines ou centaines sont plutôt bien calculés, mais les coefficients plus petits sont beaucoup moins bien approchés en valeur relative. Cela tient sûrement au fait que Le Verrier, dans ses produits de séries, ne conserve qu'une dizaine de termes (sur la centaine de termes potentiels du produit complet) et des petites différences doivent progressivement s'accumuler au fil des opérations successives.
J.L Simon et J. Chapront ([Simon, 1973]) ont analysé les perturbations du second ordre exercées par Jupiter sur Saturne en vue d'une comparaison avec les résultats de Le Verrier pour ces deux planètes. Ils ont constaté quelque erreurs et l'absence de quelques termes importants. On peut penser qu'il en est de même pour Uranus.

3.10 Résumé de la théorie

Dans un premier temps, Le Verrier avait retenu 46 termes (en sinus et cosinus) pour la perturbation de δv due à Saturne, 14 pour celle due à Jupiter et 60 pour les perturbations d'ordre 2 selon les masses.
Cela fait beaucoup trop de termes en vue des calculs numériques à venir ; voir § 4.1.3 comment Le Verrier calcule, avec une grande efficacité, les valeurs numériques des perturbations pour ses 279 observations.
Il élimine donc, dans un deuxième temps, des termes qu'il trouve finalement peu sensibles et il regroupe les termes en sinus et cosinus du même argument en un seul terme, ce qui divise le nombre total de termes par deux.
Il reste finalement 30 termes pour δv et 2 pour $\delta\ell$, dont on a placé les expressions finales, fig. 3.29 (*Herschel*, p. 87).

On peut dire que l'on a constaté, tout au long de ce chapitre, une très grande ressemblance entre les résultats de Le Verrier et ceux obtenus avec TRIP.

Inégalités applicables à la longitude moyenne.

$$\delta l = (124'',32 - 0'',011.26t)\sin(50^\circ.53'.11'' - 0^\circ.37'.42'',562t) + 32'',74\sin(314.44.8 + 0^\circ.13'.33'',611t);$$

Inégalités applicables à la longitude vraie.

$$\begin{aligned}
\delta v = {} & 21'',39\sin(331^\circ.22'.39'' + 7^\circ.56'.10'',482t)\\
& + 4,16\sin(79.27.8 + 15.52.20,964t)\\
& + 0,84\sin(29.38.30 + 23.48.31,446t)\\
& + 0,23\sin(335.5.7 + 31\,44.41,928t)\\
& + 1,44\sin(107.24.19 + 12.13.16,127t)\\
& + (139'',92 - 0'',0092t)\sin(27.27.53 + 3.39.21,147t)\\
& + 0,81\sin(358.9.26 + 20.9.26,609t)\\
& + 2,62\sin(110.53.51 + 11.35.15,319t)\\
& + 0,46\sin(60.13.8 + 19.31.25,801t)\\
& + 0,55\sin(91.30.15 + 8.34.11,290t)\\
& + 2,02\sin(135.19.53 + 7.18.9,674t)\\
& + 0,48\sin(266.47.20 - 4.55.6,453t)\\
& + 3,08\sin(352.47.7 + 3.1.4,029t)\\
& + 0,27\sin(302.45.33 + 10.57.14,511t)\\
& + 0,58\sin(14.44.44 - 1.16.1,616t)\\
& + 53,39\sin(268.21.16 + 26.3.51,074t)\\
& + 1,07\sin(100.25.21 + 30\,20.56,719t)\\
& + 3,20\sin(258.53.7 + 21.46.45,429t)\\
& + 1,47\sin(342.13.55 + 56.24.47,793t)\\
& + 0,30\sin(359.16.46 + 47.50.36,503t)\\
& + 1,52\sin(188.50.16 + 10.11.30,110t)\\
& + 2,04\sin(167.37.37 - 2.1.46,017t)\\
& + 1,28\sin(289.57.52 - 5.40.50,854t)\\
& + 0,28\sin(5.23.44 - 1.23.45,209t)\\
& + 0,73\sin(290.36.2 + 3.14.37,640t)\\
& + 0,35\sin(313.5.40 - 1.2.28,005t)\\
& + 0,78\sin(142.47.40 + 3.52.38,448t)\\
& + 0,45\sin(350.33.46 - 8.20.37,679t)\\
& + 7,87\sin(357.8.23 - 4.3.32,034t)\\
& + 0,32\sin(119.57.58 + 4.30.39,256t).
\end{aligned}$$

FIGURE 3.29 – Expression finale obtenue par Le Verrier pour la perturbation de la longitude moyenne et pour celle de la longitude vraie d'Uranus en cumulant les perturbations exercées par Saturne, Jupiter et celles d'ordre 2 des masses (*Herschel*, p. 87) et p. 123 du cahier n° 2 des manuscrits

C'est la conclusion et l'aboutissement de la première partie de *Herschel*. Le Verrier est maintenant en mesure de comparer sa théorie avec celle de Bouvard et d'examiner si sa théorie va lui permettre de prédire avec plus de précision les positions d'Uranus. C'est l'objet du chapitre suivant. Et Gautier peut rentrer chez lui en Suisse, avec la satisfaction du travail accompli !

Chapitre 4

COMPARAISON DE LA THÉORIE D'URANUS AVEC LES OBSERVATIONS

Objectifs

Présentation On compare la théorie d'Uranus établie par Bouvard avec celle déterminée par Le Verrier (section 1).
On explique comment Le Verrier a établi ses éphémérides pour Uranus (section 2).
On décrit comment Le Verrier forme ses équations de condition et on reprend les 3 démonstrations de Le Verrier qui conduisent à l'impossibilité de représenter l'ensemble des observations d'Uranus sans faire appel à une cause extérieure (section 3).
Enfin, on prolonge certains calculs de Le Verrier à la section 4.

Sommaire

4.1 Comparaison des théories de Bouvard et de Le Verrier **124**
4.1.1 Comparaison de l'expression de la perturbation de la longitude obtenue par Le Verrier avec celle obtenue par Bouvard 124
4.1.2 Écarts numériques entre les deux théories 125
4.1.3 Analyse détaillée de la façon dont Le Verrier a calculé les valeurs numériques des perturbations de la longitude aux dates d'observation 127
4.1.4 Critiques des tables de Bouvard 130
4.2 Éphémérides successives calculées par Le Verrier **130**
4.2.1 Calculs envisagés par Le Verrier 130
4.2.2 Observations et éphémérides d'Uranus 137
4.3 Équations de condition **145**
4.3.1 Expression des équations de condition pour la longitude géocentrique 145
4.3.2 Expression des équations de condition pour la longitude héliocentrique 149
4.4 Compléments **156**
4.4.1 Utilisation concrète des tables de Bouvard 156
4.4.2 Autres exploitations possibles des équations de condition de Le Verrier 160
4.4.3 Comment interpoler les O–C à des dates régulières ? 162
4.4.4 Algorithme pour former les équations de condition de Le Verrier de la page 149 de *Herschel* 164

4.1 Comparaison des théories de Bouvard et de Le Verrier

Au début de la deuxième partie de *Herschel*, Le Verrier écrit : « Mon but est ici d'examiner si le mouvement elliptique, augmenté des perturbations produites par Jupiter et Saturne, est susceptible de représenter exactement les observations d'Uranus ». II veut savoir si ***ses*** nouvelles formules de perturbations permettront de rétablir « l'harmonie entre le calcul et l'observation » (*Herschel*, p. 89).

4.1.1 Comparaison de l'expression de la perturbation de la longitude obtenue par Le Verrier avec celle obtenue par Bouvard

Le Verrier commence par comparer ses résultats avec ceux de Bouvard. Le Verrier a obtenu une expression pour la perturbation de la longitude héliocentrique d'Uranus contenant 32 termes (*Herschel*, p. 87 et fig. 3.29, à la fin du chapitre 3). L'expression de celle de Bouvard ne contient que 16 termes. Pour mieux comparer les deux théories, Le Verrier corrige les résultats de Bouvard en utilisant les valeurs qu'il a lui-même utilisées pour les masses de Jupiter et de Saturne (*Herschel*, p. 89 et fig. 4.1).

$$
\begin{aligned}
\delta l' = {} & 103'',04 \sin(\zeta' - 3\zeta) + 72'',63 \cos(\zeta' - 3\zeta) \\
\delta \nu = {} & 12,00 \sin(\zeta' - \zeta) - 18,61 \cos(\zeta' - \zeta) \\
& + 3,81 \sin(2\zeta' - 2\zeta) + 1,66 \cos(2\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,49 \sin(3\zeta' - 3\zeta) - 0,68 \cos(3\zeta' - 3\zeta) \\
& - 0,17 \sin(4\zeta' - 4\zeta) - 0,16 \cos(4\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0,07 \sin(\zeta') + 1,32 \cos(\zeta') \\
& + 140,75 \sin(\zeta' - 2\zeta) + 13,50 \cos(\zeta' - 2\zeta) \\
& + 0,36 \sin(2\zeta' - \zeta) - 0,73 \cos(2\zeta' - \zeta) \\
& + 0,90 \sin(2\zeta' - 3\zeta) + 2,35 \cos(2\zeta' - 3\zeta) \\
& + 0,42 \sin(3\zeta' - 4\zeta) - 0,15 \cos(3\zeta' - 4\zeta) \\
& + 0,09 \sin(2\zeta' - 4\zeta) + 1,64 \cos(2\zeta' - 4\zeta) \\
& - 0,60 \sin(2\zeta' - 5\zeta) + 0,74 \cos(2\zeta' - 5\zeta) \\
& - 47,77 \sin(\zeta'' - \zeta) - 20,89 \cos(\zeta'' - \zeta) \\
& + 1,12 \sin(\zeta'') + 0,51 \cos(\zeta'') \\
& - 3,20 \sin(\zeta'' - 2\zeta) - 1,25 \cos(\zeta'' - 2\zeta) \\
& - 1,15 \sin(2\zeta'' - \zeta) - 0,52 \cos(2\zeta'' - \zeta).
\end{aligned}
$$

FIGURE 4.1 – Expressions de la perturbation de la longitude héliocentrique et de la perturbation de la longitude moyenne calculées par Bouvard et corrigées par Le Verrier, en tenant compte de meilleures valeurs pour les masses de Jupiter et de Saturne. ζ, ζ', ζ'' désignent repectivement les anomalies moyennes d'Uranus, Saturne et Jupiter

Il manque dans l'expression de Bouvard tous les termes dépendant de l'ordre 2 des masses, en particulier ceux dont l'argument est de la forme $k\zeta + k'\zeta' + k''\zeta''$ avec $kk'k'' \neq 0$. Les termes les plus importants de ce type, et donc présents uniquement dans les formules de Le Verrier, sont :

$$
\begin{gathered}
32''.73 \sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta) \quad \text{et} \\
5''.33 \sin(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta) + 5''.79 \cos(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta)
\end{gathered}
$$

le premier terme, ayant une très longue période (1600 ans), est donc quasi constant ($\simeq 26''$) sur la période considérée, et le deuxième peut entraîner un écart de $8''$.
On a donné table 4.1 les valeurs des coefficients de certains termes de la forme $\sin(k\zeta - k'\zeta')$ ou $\sin(k\zeta - k''\zeta'')$ présents à la fois chez Bouvard et chez Le Verrier dans la perturbation de la longitude héliocentrique vraie.

TABLE 4.1 – Comparaison de certains coefficients présents dans l'expression de la perturbation de la longitude héliocentrique vraie de Bouvard (fig. 4.1) et dans celle de Le Verrier (fig. 3.29)

Coefficients de $\sin(k'\zeta' - k\zeta)$ ou de $\sin(k''\zeta'' - k\zeta)$ dans la perturbation de la longitude								
Argument	Bouv	LV	Argument	Bouv	LV	Argument	Bouv	LV
$\zeta' - \zeta$	12.00	11.78	$\zeta' - 2\zeta$	140.75	139.27	$\zeta'' - 2\zeta$	−3.20	−3.00
$2(\zeta' - \zeta)$	3.81	3.81	$2\zeta' - 4\zeta$	0.09	−0.05	$2\zeta' - 3\zeta$	0.90	1.27
$3(\zeta' - \zeta)$	0.49	0.49	$\zeta'' - \zeta$	−47.77	−48.92	ζ'	−0.07	0.41
$4(\zeta' - \zeta)$	−0.17	−0.17	$3\zeta' - 4\zeta$	0.42	0.44	$2\zeta'' - \zeta$	−1.15	−1.31
ζ''	1.12	0.93	$2\zeta' - 5\zeta$	−0.60	2.17	$2\zeta' - \zeta$	0.36	0.36

Il y a beaucoup de ressemblances, mais aussi quelques petits écarts, en particulier pour les coefficients de l'argument $2\zeta' - 5\zeta$. La comparaison des coefficients des cosinus conduirait à des constatations voisines.
Le Verrier écrit (p. 90 de *Herschel*) : « nous trouvons que la somme de toutes les erreurs individuelles des perturbations qui sont comprises dans les Tables actuelles en usage, s'élève à 29 secondes sexagésimales [1] ». Il veut ensuite « apprécier l'influence que les erreurs des formules anciennes [celles de Bouvard] ont pu avoir sur l'exactitude des Tables ».

4.1.2 Écarts numériques entre les deux théories

Le Verrier commence donc par déterminer, dans le cahier n° 3, les écarts entre les perturbations de la longitude héliocentrique selon que l'on utilise les tables de Bouvard (corrigées comme il a été indiqué fig. 4.1) ou bien la formule qu'il vient d'établir (fig. 3.29) ; il fait le calcul pour les années 1780, 1790, 1800, 1810, 1820, 1830, 1840 et 1848 dans les manuscrits .
– Le détail du calcul par la formule de Bouvard est visible fig. 2.11
– Le calcul à partir de sa formule est expliqué en détail au § 4.1.3
Mais il n'utilise que quatre de ces dates dans *Herschel* pour former ses équations de correction (voir encadré 8, p. 126).

Pour comparer avec le résultat de Le Verrier, j'ai fait le calcul avec TRIP en utilisant la même formule que lui. Voici table 4.2 les écarts trouvés :

TABLE 4.2 – Écarts entre la perturbation héliocentrique de la longitude calculée par Le Verrier (fig. 3.29) et celle calculée par Bouvard (et corrigée par Le Verrier, voir fig. 4.1). La 1ère ligne est calculée par Le Verrier et la 2e ligne est calculée avec TRIP, à partir des mêmes formules

Écart (en as) entre la perturbation de la longitude calculée par Le Verrier et celle calculée par Bouvard									
date	1780	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1845	1848
Le Verrier	1.3	0.5	−4.7	−10	−7.9	−3.5	3	–	8.6
TRIP	1.5	1.0	−4.7	−10.3	−7.7	−3.0	3.1	6.5	8.4

Et pour mieux juger de l'importance des écarts entre les deux théories, voici figure 4.2, le tracé des écarts entre ces deux théories de perturbation sur différentes périodes autour de 1800.

1. Il dit qu'il ne tient pas compte de l'inégalité à longue période, de coefficient $32''.73$, qu'il peut confondre avec le moyen mouvement sur un intervalle de temps restreint (*Herschel p. 90)*.

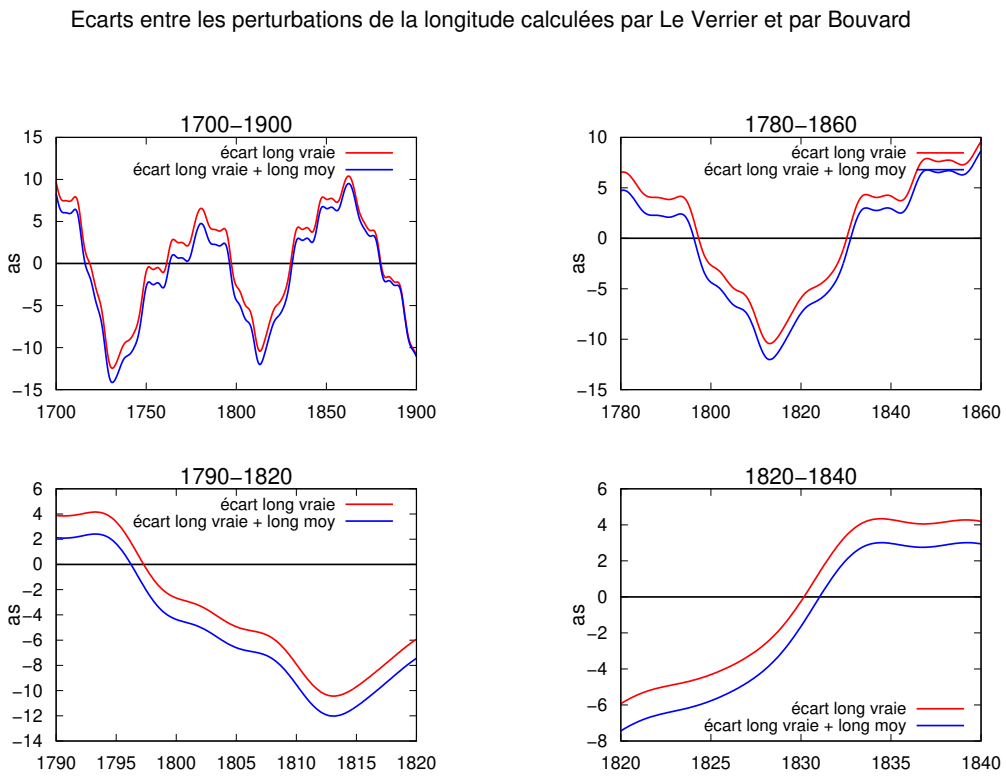


FIGURE 4.2 – Écarts entre la perturbation de la longitude calculée par Le Verrier et celle calculée par Bouvard (et corrigée par Le Verrier) pour différentes époques.

Équations de correction pour les tables de Bouvard (encadré 8)

Le Verrier essaie de déterminer les corrections δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\varpi$ et δe qu'il faudrait apporter respectivement aux éléments elliptiques n, ε, ϖ, e d'Uranus, pour réduire les écarts entre sa théorie et celle de Bouvard. Pour cela, il faut déterminer l'expression théorique δv_{th} de la variation de la longitude vraie quand on modifie les éléments elliptiques des quantités δn, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ et δe ; le calcul est détaillé au § 4.3.1.1.
L'équation de correction à un instant t consiste à écrire que la variation théorique δv_{th} de la longitude vraie à l'instant t est égale à l'écart entre le δv calculé par Le Verrier à l'instant t et celui calculé par Bouvard au même instant t :

$$\delta v_{th}(t) = \delta v_{LV}(t) - \delta v_{Bouv}(t) \tag{4.1}$$

Il suffit de quatre équations, ce que fait Le Verrier, mais on peut rajouter des équations (ce que j'ai fait à la table 4.2) et résoudre alors le système obtenu par les moindres carrés.

Le Verrier forme (*Herschel*, p. 91) les équations de correction (voir encadré 8, p. 126), correspondant ici aux écarts entre les deux théories, portant sur la période 1790−1820, et trouve (*Herschel*, p. 91) qu'il faudrait apporter aux éléments elliptiques d'Uranus les corrections données à la table 4.3 pour réduire ces écarts entre les deux théories.
Avec les écarts trouvés avec TRIP, j'ai fait le même calcul à partir d'équations de correction formées à différentes dates (les dates – avec pour origine 1800 – utilisées sont indiquées dans la table 4.3). J'ai aussi repris les 8 écarts trouvés par Le Verrier dans ses manuscrits et j'ai calculé les corrections à apporter pour réduire ces écarts en utilisant les moindres carrés (dernière ligne).

TABLE 4.3 – Corrections (en as) à apporter aux éléments elliptiques d'Uranus pour réduire les écarts entre la théorie de Bouvard et celle de Le Verrier en retenant plusieurs groupements de date (origine des dates 1800)

Corrections à apporter aux éléments	$\delta\varepsilon$	δn	$2\delta e$	$2e\delta\varpi$
Le Verrier [-10 : 0 : 10 : 20]	4.8	−0.87	20.4	2.3
TRIP [-10 : 0 : 10 : 20]	4.5	−0.95	22.2	2.1
TRIP [10 : 20 : 30 : 40]	10.3	−0.33	4.0	−0.4
LV+TRIP [-20 : -10 : 0 : 10 : 20 : 30 : 40 : 48]	4.5	−0.44	14.7	1.3

Aux dates choisies par Le Verrier (1790, 1800, 1810 et 1820), je trouve pratiquement les mêmes valeurs que Le Verrier. Si on se place à une période postérieure (ici 1810, 1820, 1830 et 1840), la valeur de δn tombe à $-0''.33$. On peut assez facilement expliquer le décalage : si l'on voulait baser des tables d'Uranus sur des observations comprises entre 1790 et 1820, on tomberait sur un moyen mouvement trop élevé, car durant cette période, Uranus est accéléré par Neptune, et pour se rapprocher d'une valeur correcte, il faudrait le diminuer de $0''.95$; alors que si l'on se base sur la période 1810-1840, on aurait un moyen mouvement un peu moins élevé, car durant cette période, Uranus est surtout ralenti par Neptune, et pour se rapprocher d'une valeur correcte, il faudrait diminuer le moyen mouvement de seulement $0''.33$.
Les corrections pour les éléments elliptiques sont assez différentes selon les options choisies, mais vont toutes dans le même sens pour δn, à savoir $\delta n < 0$. Avec ses valeurs, Le Verrier trouve que l'avance à l'opposition de 1845 des tables de Bouvard sur la longitude réelle serait de $0.87 * 45 = 39''$; comme les perturbations dans les tables de Bouvard sont en erreur de $6''.5$ en 1845 (voir table 4.2), il en découle une avance [2] de $32''.5$ des tables de Bouvard sur la position réelle à l'opposition de 1845 (*Herschel*, p. 91).
Le Verrier juge une telle avance inacceptable, car beaucoup trop forte [3] : 5 à 6 fois les erreurs d'observations modernes ou 2 fois les erreurs d'observations anciennes. Il en conclut que la seule correction des éléments elliptiques d'Uranus ne suffit pas à réduire de manière acceptable les écarts entre les deux théories et qu'il faut revoir complètement les Tables de Bouvard et il avance déjà la présence d'une cause extérieure (*Herschel*, p. 92) :

> Nous pourrions déclarer, dès à présent, qu'il faut chercher ailleurs que dans l'imperfection des éléments de l'ellipse, la cause des étranges inégalités qui nous occupent ; qu'Uranus est nécessairement soumis à une force perturbatrice autre que celles que nous connaissions jusqu'ici.
> Nous voilà donc conduits, par la nécessité de notre sujet, à un examen sérieux et critique des Tables d'Uranus, des Tables dont on fait actuellement usage.

4.1.3 Analyse détaillée de la façon dont Le Verrier a calculé les valeurs numériques des perturbations de la longitude aux dates d'observation

Faisons une parenthèse pour décrire de façon détaillée la méthode originale et efficace utilisée par Le Verrier pour calculer les valeurs numériques des 279 perturbations de la longitude héliocentrique d'Uranus aux dates historiques.
Le Verrier a déterminé une expression pour la perturbation de la longitude d'Uranus (*Herschel*, p. 87 et p. 122 de la thèse). Cette expression contient 32 termes, chacun de la forme $a_i \sin(\alpha_i + \beta_i t)$

2. Avec les valeurs de TRIP, je trouve $0.95 * 45 - (6.4) = 36''.3$.
3. S'il avait pris la moyenne sur les 8 dates, il aurait trouvé une avance de seulement $13''$.

où $a_i,\ \alpha_i,\ \beta_i$ sont des constantes numériques. Le but final est de déterminer la perturbation de la longitude vraie aux 279 dates d'observation. On va estimer le temps de calcul nécessaire à cette opération.
On ne comptera que les multiplications nécessaires pour obtenir le résultat, les additions pouvant être considérées comme effectuées beaucoup plus rapidement.

Examinons d'abord une méthode naïve :
Pour calculer $a_i \sin(\alpha_i + \beta_i t)$, il faut effectuer 2 multiplications (et une recherche de la valeur d'un sinus) ; pour chaque date d'observation il faut donc effectuer 64 multiplications, soit au total environ 18 000 multiplications pour les 279 observations. Si une multiplication prend en moyenne 2 mn (temps moyen d'un calcul de logarithme avec interpolation), le temps de calcul est de l'ordre de 600 h !

Examinons maintenant la démarche suivie par Le Verrier (cahier n° 3 p. 87) :
Il regroupe les termes de la somme exprimant la perturbation de la longitude d'Uranus en fonction de leur période. Il forme des tables de valeurs de ces termes avec un pas dépendant de la période : par exemple si la période excède 300 ans, le pas de la table est de 32 ans. Cette démarche permet aussi de remplacer les multiplications $\beta_i t$ par des additions successives $(\beta_i(t+T) = \beta_i t + (\beta_i T))$.
Voici table 4.4 le détail des groupements effectués et des pas de calcul correspondants.

TABLE 4.4 – Groupements effectués dans la formule de la perturbation de la longitude d'Uranus pour accélérer le temps de calcul de la perturbation δv de la longitude vraie d'Uranus.

terme de coefficient égal à	pas	terme de coefficient égal à	pas
32.74, 0.58, 0.28, 0.35	32 ans	21.39, 4.16, 0.84, 0.23, 1.44	2 ans
124.32, 2.04, 0.73, 0.32	16 ans	0.81, 2.62, 0.46, 1.07, 3.20	2 ans
0.48, 3.08, 1.28, 0.78	8 ans	1.47, 0.30	1 an
139.92, 0.55, 2.02, 0.27, 1.52, 0.45, 7.87	4 ans	53.39	6 mois

Il faut remarquer le choix raisonné des pas, qui sont des puissances de 2, choix qui va permettre d'effectuer facilement les interpolations successives pour passer d'un groupement au suivant. Encore une fois, un détail important qui simplifie beaucoup les calculs.
Le Verrier fait le calcul, groupement après groupement, en commençant par ceux de la plus longue période. Pour chaque date retenue, il calcule l'argument du sinus, puis la valeur du terme correspondant et enfin il fait la somme de tous les termes de ce groupement pour chaque date de la table du groupement.
Pour chaque groupement, il forme les différences premières et secondes, qui vont lui permettre d'interpoler afin de calculer la perturbation aux dates du groupement suivant. Il reporte donc les sommes trouvées dans la table du groupement suivant, afin d'obtenir progressivement le cumul des termes calculés aux dates du dernier groupement. À partir de cette dernière table, il peut déterminer par interpolation la perturbation héliocentrique aux dates des observations réelles.
Le nombre de multiplications à effectuer est beaucoup plus faible : de l'ordre de quelques centaines seulement, ce qui est un progrès considérable.
On constate une fois de plus la virtuosité du calculateur Le Verrier.
On peut voir, fig. 4.3, l'organisation de la première page de calcul avec les regroupements indiqués.
On peut noter que la même organisation est utilisée pour le calcul efficace de la perturbation du rayon vecteur, mais ici le calcul est plus simple, car l'expression de δr ne comporte que 4 termes.

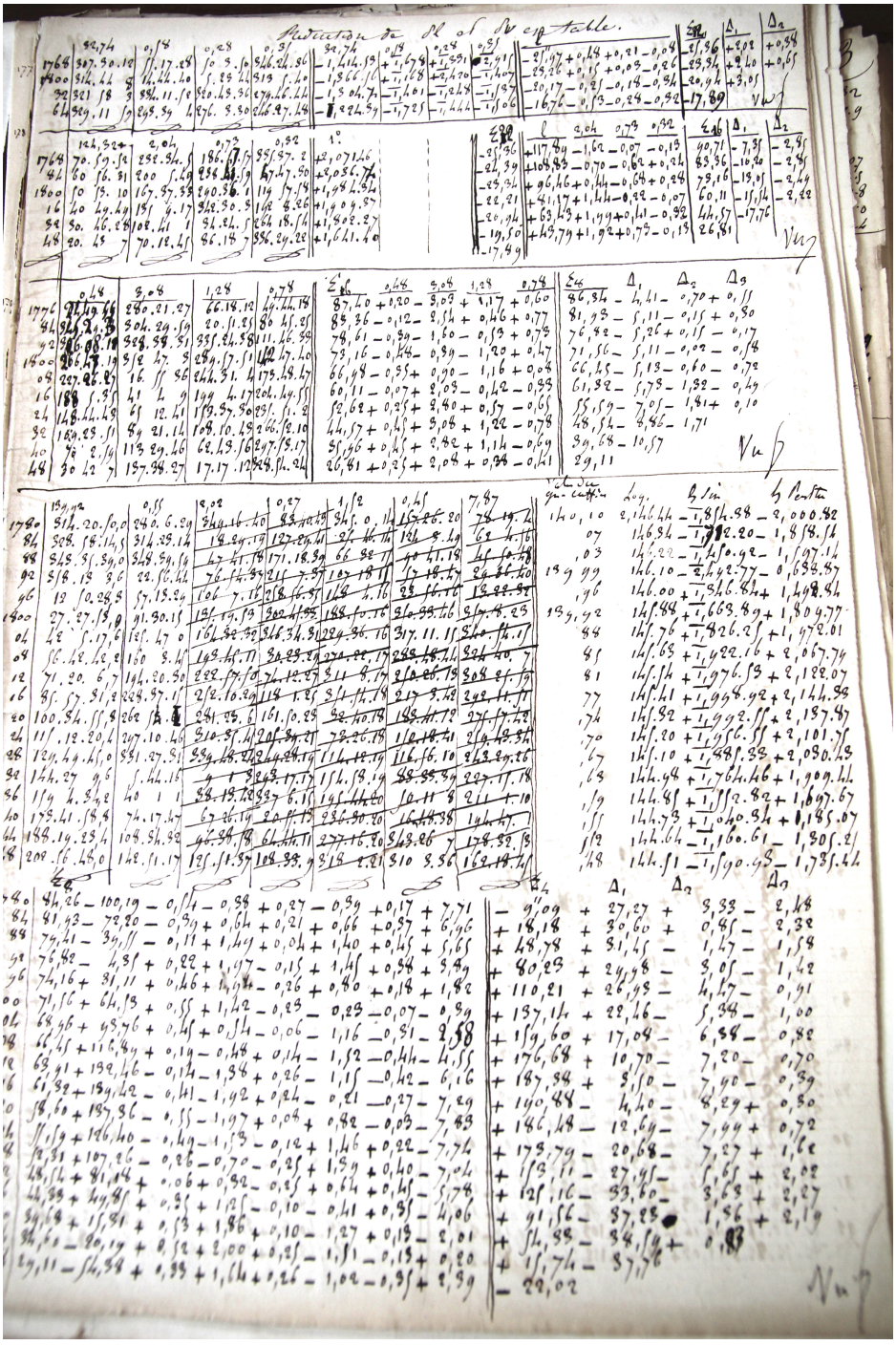


FIGURE 4.3 – Feuille de calcul montrant les groupements des termes constituant la perturbation de la longitude vraie d'Uranus en fonction de la période de leur argument (les groupements sont indiqués à la table 4.4). À chaque date retenue pour le groupement, Le Verrier fait le calcul de chaque argument puis du terme correspondant et il fait la somme date par date de tous les termes d'un même groupement, somme qu'il reporte en début du groupement suivant (dans la colonne Σ) en interpolant pour compléter les données aux dates supplémentaires du groupement suivant. Par exemple, sur les 4 premières lignes, il y a successivement les 4 arguments des sinus, les 4 logarithmes des termes $a_i \sin(\alpha_i t + \beta_i)$, la somme (non effectuée) des 4 termes, la valeur Σ de cette somme, les différences premières (Δ_1) et secondes (Δ_2), puis le report de ces 4 valeurs, avec 3 valeurs supplémentaires interpolées, au milieu des 7 lignes suivantes dans la colonne Σ (centrale), puis calcul de cette tranche dans la partie gauche de la feuille et le cumul de toutes ces valeurs dans le Σ de droite et report des valeurs dans la tranche suivante, avec ajout des valeurs interpolées... jusqu'au cumul final dans la page suivante du manuscrit (p. 89 du cahier n° 3 des manuscrits). Si dans un groupement, il y a n valeurs calculées, dans le suivant il y en a $2n - 2$

4.1.4 Critiques des tables de Bouvard

Le Verrier reprend donc minutieusement les données des tables de Bouvard. Il constate que pour former ses tables, Bouvard a utilisé [4] (volontairement ?) trois valeurs différentes pour l'excentricité. Il détermine alors (*Herschel*, n° 65) la valeur de l'excentricité qui a servi à Bouvard pour construire la table de l'équation du centre, ce qui lui permettra d'utiliser cette table (après correction de quelques erreurs) pour établir ses propres éphémérides. Il obtient $e = 0.046\,6794$. Enfin, et surtout, Bouvard, pour former ses équations de condition, n'a tenu compte que des perturbations de longitude et pas celles du rayon vecteur. Ce n'est pas très grave quand on se limite aux observations à l'opposition : cela tient au fait que la correction δG pour la longitude géocentrique est donnée par la formule : $\delta G = \alpha_g \delta v - \beta_g \delta r$ et à l'opposition $\beta_g = 0$, donc la correction δr n'intervient pas (voir le paragraphe 4.3.1.1 pour plus de détail), ce qui est le plus souvent le cas [opposition] pour les observations modernes, mais pas pour les observations anciennes, qui étaient faites sans connaître la nature de l'astre visé. L'erreur dans le rayon vecteur sera soulevée plus tard par Airy, et sera une issue cruciale pour lui (« experimentum crucis » [Airy, 1846]) ; le problème du rayon vecteur est étudié en détail au chapitre 7 de la thèse. Compte tenu de toutes ces constatations, Le Verrier décide de reprendre complètement le calcul des éphémérides d'Uranus afin de les comparer aux observations (*Herschel*, p. 94).

> ... il devient tout à fait impossible de baser, sur des documents aussi incertains, cette grave conclusion, que nos théories astronomiques sont en défaut à l'égard d'Uranus, quand on ne tient compte que des actions des planètes connues. Mais alors, il ne reste plus d'autre parti que de reprendre en son entier la comparaison de la théorie avec les observations anciennes et modernes, et c'est ce que nous allons faire. Nous commencerons par donner une éphéméride théorique des positions de la planète en ascension droite et en déclinaison, éphéméride à laquelle il sera ensuite facile de comparer les ascensions droites et les déclinaisons observées.

Jacques Laskar [Laskar, 2017] écrit : « Comme dans ses travaux précédents, Le Verrier ne se contente pas d'une adaptation des solutions existantes pour Uranus. Il veut reprendre à la base l'ensemble du travail ».

4.2 Éphémérides successives calculées par Le Verrier

4.2.1 Calculs envisagés par Le Verrier

Concrètement, Le Verrier décide donc de donner une éphéméride théorique des positions d'Uranus en ascension droite et en déclinaison, positions qu'il pourra ainsi facilement comparer avec les ascensions droites et les déclinaisons observées. Mais pour cela, il doit commencer par établir des éphémérides héliocentriques, puis géocentriques. En effet, examinons les étapes nécessaires pour comparer positions observées et positions calculées : il y a trois types de coordonnées possibles, on peut passer d'un système de représentation à un autre et voici dans quel ordre on les obtient selon que l'on part d'observations ou bien d'éphémérides :

Ordre d'obtention des différents types de coordonnées			
Nature des données	Point de départ	$1^{\text{ère}}$ transformation	2e transformation
Observations	équatoriales	géocentriques	héliocentriques
Éphémérides	héliocentriques	géocentriques	équatoriales

4. Il faut noter que Le Verrier a lui-même utilisé différentes valeurs pour l'excentricité d'Uranus ; il donne initialement une valeur de référence précise avec 6 décimales, mais dans certains calculs répétitifs (comme les calculs d'éphémérides), il utilise une valeur arrondie de cette excentricité, sûrement dans l'intention de réduire les temps de calcul et aussi parce que cette précision est suffisante pour le calcul effectué. Ces changements de valeurs pour certains paramètres ne sont pas toujours annoncés explicitement dans les manuscrits.

Pour former les $O-C$, Le Verrier utilise soit les coordonnées héliocentriques, soit les coordonnées géocentriques ; mais dans les deux cas, il y a deux transformations à effectuer.
Le Verrier espère qu'avec sa nouvelle théorie, il pourra concilier prédictions et observations.
Ce ne sera pas le cas, car il montrera, par 3 méthodes indépendantes (voir § 4.3.1.3, 4.3.2.2, 4.3.2.3), qu'il est impossible de concilier prédictions et observations.
On présente, table 4.5, son programme d'action ; les références renvoient aux numéros de *Herschel* (les calculs eux-mêmes sont dans le cahier n° 3 des manuscrits) :

TABLE 4.5 – Ordre dans lequel Le Verrier va organiser ses calculs (voir aussi l'organigramme à la fin du chapitre)

Schéma d'ensemble de l'enchaînement des calculs		
Observations	Sélection de 279 observations d'Uranus. Réduction des coordonnées équatoriales. Tableau des coordonnées équatoriales observées.	cahier n° 3 (p. 1−47) et n° 74
Éphémérides		
Coordonnées héliocentriques	À partir de *ses* calculs de perturbations – déterminées au chapitre 3 – calcul des coordonnées *héliocentriques* d'Uranus à des dates régulièrement espacées encadrant les 279 observations retenues.	n° 71
Coordonnées géocentriques	Passage de ces coordonnées héliocentriques *calculées* aux coordonnées *géocentriques* puis aux coordonnées *équatoriales* (calculées) d'Uranus.	n° 72 et n° 73.
Écarts géocentriques	À partir des écarts entre les coordonnées équatoriales observées et calculées, détermination des *écarts entre la longitude géocentrique calculée et celle observée* aux 279 dates retenues par Le Verrier	n° 76 et n° 77
3 méthodes pour arriver à une contradiction		
Méthode 1	Formation des équations de condition pour la longitude *géocentrique* en vue de déterminer les *corrections* à apporter aux paramètres elliptiques d'Uranus eafin de réduire au maximum les écarts $O-C$.	n° 78
	Résolution des équations de condition et *constatation qu'il existe, après correction, des résidus trop importants dans ces équations.*	n° 79
Méthode 2	Sélection de 8 équations de condition pour les longitudes *héliocentriques* sur des dates régulièrement espacées. Obtention, à partir de ces équations, de 3 valeurs incompatibles pour δn.	n° 80
Méthode 3	Formation de 18 équations de condition aux longitudes *héliocentriques.*	n° 81
	Report d'une solution partielle dans les équations de condition.	n° 82
	Combinaison montrant que ces 18 équations sont impossibles à satisfaire de façon acceptable.	n° 83

Réduction des observations, opérations astronomiques (encadré 9)

Le Verrier déclare p. 126 de *Herschel* :

> La réduction des observations méridiennes, le calcul des erreurs de collimation, sont trop bien connus pour que j'expose rien à ce sujet : j'aurais seulement désiré de pouvoir présenter dans les tableaux suivants les détails des réductions ; mais la trop grande place que prendraient ces développements me force à les supprimer et à me contenter de rapporter les résultats auxquels je suis arrivé.

Ce qui était sûrement vrai vers 1850 dans le milieu astronomique, l'est sûrement un peu moins à l'heure actuelle ; aussi, donnons quelques indications sur la réduction des observations méridiennes.
Il y a deux types de corrections à effectuer :
– des corrections d'ordre astronomique (précession, nutation, aberration...) ; les indications viendront pour la plupart de Danjon [Danjon, 1959].
– des corrections (collimation, azimut...) liées au fait que les instruments d'observations ne sont pas parfaitement réglés et orientés ; les indications pour cette partie seront tirées essentiellement de [Boquet, 1909].

Pour mesurer avec précision la position d'un astre au début du XIXe siècle, les astronomes-observateurs utilisent des instruments méridiens (voir plus de détails au § B de l'annexe) :
– La lunette méridienne, ou instrument de transit, ou encore lunette des passages, pour mesurer son ascension droite.
– Le quart de cercle mural, adossé à un mur solide, aligné avec le méridien, pour déterminer sa déclinaison.

La détermination de la position complète d'un astre se fait donc en deux temps, par deux observateurs distincts. À partir du milieu du XIXe siècle, on construit des cercles méridiens universels, qui permettent de faire les deux mesures sur le même instrument, mais un tel instrument nécessite au moins deux assistants : un pour lire la déclinaison sur les microscopes et un autre pour noter les valeurs lues.

Dans tous les cas, les lectures effectuées sur les instruments ne sont que des lectures brutes ; il faut les corriger en tenant compte de nombreux facteurs, instrumentaux et astronomiques ; l'opération qui corrige les données brutes s'appelle **réduction des observations**. C'est une opération fastidieuse, souvent repoussée à plus tard. Ainsi, Airy, en prenant la direction de l'Observatoire de Greenwich, a constaté que les observations faites à l'Observatoire n'étaient pas correctement réduites depuis plusieurs décennies. Le Verrier fit une constatation du même ordre en prenant la direction de l'Observatoire de Paris.
On présente ici les opérations de réduction effectuées à l'époque de Le Verrier.

Une observation méridienne complète comporte l'ascension droite, la déclinaison, la température extérieure, la pression atmosphérique et l'heure de passage au méridien, en temps solaire moyen (donné par une horloge) ou en temps sidéral (par une autre horloge).
L'observateur ne regarde pas l'horloge pendant son observation : il la consulte peu avant le passage de l'astre au méridien, et compte mentalement les secondes qui s'égrènent ; un assistant note les instants de passage aux différents fils, instants annoncés par l'observateur. Bessel avait remarqué, pour chaque observateur, un décalage systématique entre le temps de passage exact et le temps retenu par cet observateur : c'est l'équation personnelle, qui doit être évaluée et dont il faut tenir compte pour chaque observation.

Les mesures de coordonnées sont **différentielles** : on observe le passage d'un astre à repérer au méridien ; soit $(\mathring{\alpha},\ D)$ les lectures faites aux instruments au moment du passage. On note les coordonnées $(\mathring{\alpha}', D')$, lues aux mêmes instruments, d'une étoile voisine de l'astre étudié, étoile dont les coordonnées sont données par un catalogue d'étoiles [a] à une certaine date de référence t_{ref}.
Le texte se poursuit page suivante.

a. L'établissement de catalogues d'étoiles était l'occupation principale des astronomes de la fin du XVIIe siècle (Flamsteed) jusqu'au début du XXe siècle. Puis, les catalogues photographiques (comme la carte du ciel) prendront le relais. On connaît les catalogues de Flamsteed, Bradley, Lalande, Piazzi, Argelander... (disponibles par exemple à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris).

Réduction des observations, opérations astronomiques, suite (encadré 9)

Ici, pour éviter les confusions avec les notations de Danjon, on note les déclinaisons δ et non D.

On commence par corriger les déclinaisons de la réfraction atmosphérique r_{at} en tenant compte de la température et de la pression. La formule donnant la réfraction atmosphérique est (pour une distance zénithale inférieure à 85°) :

$$r_{at} = A \tan z$$

où z est la distance zénithale et A un coefficient dépendant de la température et de la pression atmosphérique, donné par les tables de Bessel. On note encore δ et δ' les déclinaisons corrigées de la réfraction. Ces deux mesures donnent les positions différentielles des deux astres : $\Delta\mathring{\alpha} = \mathring{\alpha} - \mathring{\alpha}'$ et $\Delta\delta = \delta - \delta'$.
Les coordonnées de l'étoile de référence $(\alpha_{ref}, \delta_{ref})$ lues dans le catalogue d'étoiles sont les coordonnées équatoriales moyennes à la date t_{ref}. Il faut les corriger de la précession, de la nutation et de l'aberration pour obtenir les coordonnées apparentes à la date d'observation ; pour cela, on utilise les formules données dans le tableau suivant et pour simplifier les formules, on note (α, δ) au lieu de $(\alpha_{ref}, \delta_{ref})$:

Formulaire de Bessel pour les corrections astronomiques (formulaire extrait de [Danjon, 1959])			
$\theta = 259°8' + 69629''(t-1900)$	$A = t + \frac{N}{n}\sin\varepsilon$	$a = m + n\sin\alpha\tan\delta$	$a' = n\cos\alpha$
$\Omega = 9''.21\cos\theta$	$B = -\Omega$	$b = \cos\alpha\tan\delta$	$b' = -\sin\alpha$
$N = -17''.23\sin\theta$	$C = -k\cos\varepsilon$	$c = \cos\alpha\sec\delta$	$c' = \tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta$
$P = 50''.2564$; $k = 20''.5$	$D = -k\sin\odot$	$d = \sin\alpha\sec\delta$	$d' = \cos\alpha\sin\delta$
$m = P\cos\varepsilon$; $n = P\sin\varepsilon$	$E = N(\cos\varepsilon - \frac{m}{n}\sin\varepsilon)$		
La correction d'ascension droite est $\Delta\mathring{\alpha}' = Aa + Bb + Cc + Dd + E$			
La correction en déclinaison est $\Delta\delta' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd'$			

où P est la constante de précession, θ la longitude du nœud ascendant de la Lune sur l'écliptique, $\odot$ la longitude du Soleil, Ω la différence entre l'obliquité vraie et l'obliquité moyenne, N la différence entre l'équinoxe vrai et l'équinoxe moyen, k la constante de l'aberration et ε l'obliquité de l'écliptique.
Les coordonnées apparentes de l'astre observé sont alors

$$\mathring{\alpha}_v = \mathring{\alpha}' + \Delta\mathring{\alpha} + \Delta\mathring{\alpha}' \qquad \delta_v = \delta' + \Delta\delta + \Delta\delta' \tag{4.2}$$

Exemple : on a reproduit à la figure 4.4 le calcul fait par Le Verrier pour la réduction de α Arietis à l'occasion de l'observation de Flamsteed du 23/12/1690.
On lit en haut à gauche les coordonnées de α Arietis dans le catalogue de Bradley où $t_{ref} = 1/1/1755$:

$$\mathring{\alpha}' = 28.21.17,3\,;\ \delta' = 22.17.29,5$$

La correction en ascension droite effectuée par Le Verrier est :

$$(-64,023)49,80 - 7,1\tan\delta + 8''.7\sec\delta + 4,6$$

Et celle en déclinaison est :

$$(-64,023)17,725 - 0.29\cos\delta + 18,2\sin\delta + 6,2$$

Ces deux expressions correspondent assez bien aux coefficients théoriques donnés par Danjon.
Les coordonnées corrigées de α Arietis sont

$$\mathring{\alpha} = 27.28.19,9\,;\ \delta = 21.48.47,5$$

À partir de l'ascension droite observée, Le Verrier en déduit la correction de l'horloge : -5h58m29.38s.

En fait, dans le cas de cette réduction de l'observation du 23/12/1690, Le Verrier recommence l'opération précédente pour 4 autres étoiles de référence (voir fig. 4.6). En faisant la moyenne des corrections individuelles, il en déduit la correction à apporter à l'horloge et en fin de calcul, il en déduit la position apparente d'Uranus (en bas à droite de la figure 4.6).

Par contre, pour déterminer la position de Neptune le jour de la découverte, Galle n'utilise qu'une seule étoile de référence, à savoir (*a*) Bessel, zone 119. Il lui applique les corrections de précession, nutation et à l'aide de coordonnées différentielles, il déduit la position de Neptune, comme on le voit p. 252 de *Herschel* et fig. 4.5.

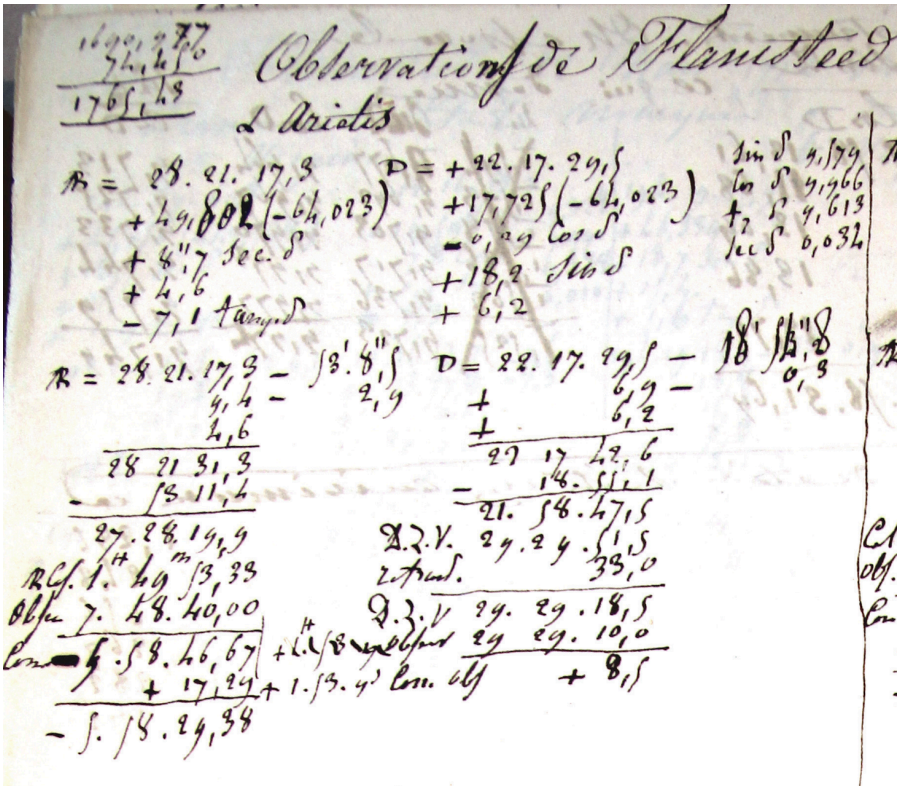


FIGURE 4.4 – Correction de précession, nutation effectuée par Le Verrier sur l'étoile α Arietis lors de la réduction de l'observation de Flamsteed du 23/12/1690, en utilisant les formules données à l'encadré 9, p. 132.
Ce calcul lui permet d'accéder à la correction d'horloge, ici -5h58m29,38s. Il fait cette correction pour 4 autres étoiles (voir fig. 4.6) et prend la moyenne des 5 corrections d'horloge pour déterminer la position d'Uranus (extrait p. 35 du cahier n° 3 des manuscrits)

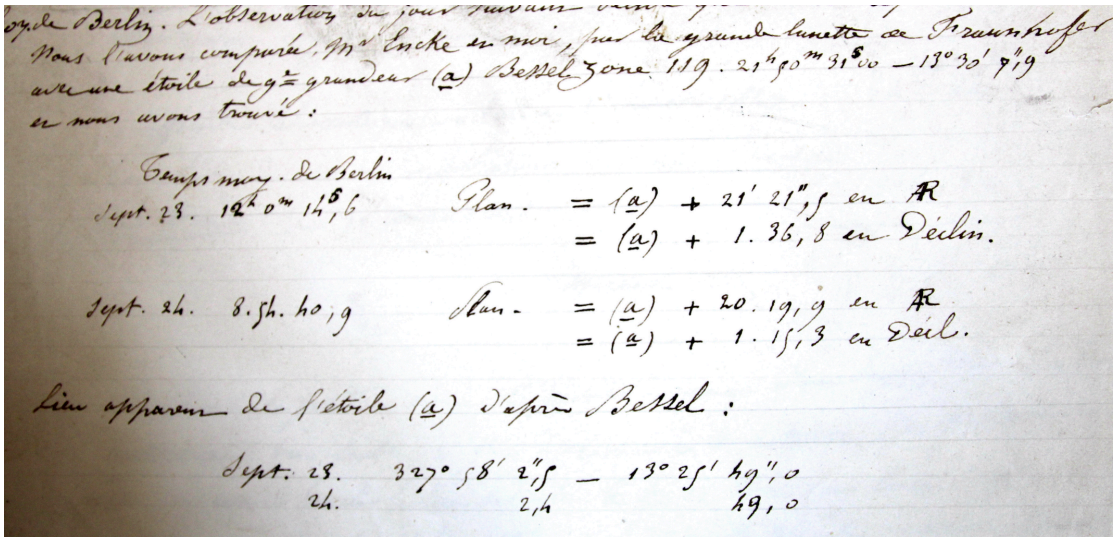


FIGURE 4.5 – Positions différentielles de Neptune par rapport à l'étoile (a) de Bessel et positions corrigées de (a), calculées par Galle à partir des coordonnées lues dans le catalogue de Bradley ; (extrait p. 216 du cahier n° 1 des manuscrits)

Réduction des observations (suite), opérations instrumentales (encadré 9)

On rappelle que les principales indications proviennent de [Boquet, 1909].
Une fois les corrections astronomiques effectuées, il y a 3 corrections supplémentaires à opérer, liées aux imperfections dans les réglages de l'instrument :
– La déviation relative à l'inclinaison par rapport à un plan horizontal, notée β_d.
– La déviation provenant de ce que l'axe optique n'est pas rigoureusement perpendiculaire à l'axe de rotation : c'est la collimation de l'axe optique, notée c_d
– La déviation résultant du fait que le plan azimutal passant par l'axe de rotation fait un certain angle α_d avec le premier vertical : cet angle est la déviation azimutale ou l'azimut de la lunette.

Ces nombres sont régulièrement mis à jour par des manipulations sur l'instrument : retournement, inversion, visée des mires, visée du nadir...
Notons au passage, que Le Verrier, une fois à la tête de l'Observatoire de Paris, procédera souvent lui-même à ce type de réglages, comme on peut le constater en consultant ses cahiers d'observations (voir fig. 14.2).
Boquet écrit [Boquet, 1909]

> La correction I qu'il y aura lieu d'apporter à l'heure observée pour avoir le temps sidéral du passage au méridien sera une certaine fonction des trois nombres précédents :
> $$I = f(\alpha_d, \beta_d, c_d)$$

Dans la pratique, la correction I à effectuer s'obtient à l'aide du formulaire simplifié suivant (dit de Bessel) :

$$\left| \begin{array}{l} m_d = \beta_d \cos\phi + \alpha_d \sin\phi \\ n_d = \beta_d \sin\phi - \alpha_d \cos\phi \end{array} \right. \qquad I = m_d + n_d \tan D + c_d \sec D$$

où ϕ désigne la latitude du lieu d'observation.
Il faut tenir compte aussi de la correction de l'horloge, obtenue à partir des observations d'étoiles de référence passant un peu avant et un peu après l'astre étudié, comme on l'a vu à la page précédente. Un exemple de calcul de la correction d'horloge est donné à la figure 4.6.
On rappelle qu'il faut aussi tenir compte de l'aberration diurne, de la précession, de la nutation et de l'équation personnelle.
Il faut noter que d'autres erreurs instrumentales peuvent intervenir, et doivent être corrigées, comme la division irrégulière ou l'excentricité des cercles de déclinaison.
Pour la précision obtenue dans la construction des instruments méridiens, on peut consulter avec profit *Dividing the cercle* [Chapman, 1990].

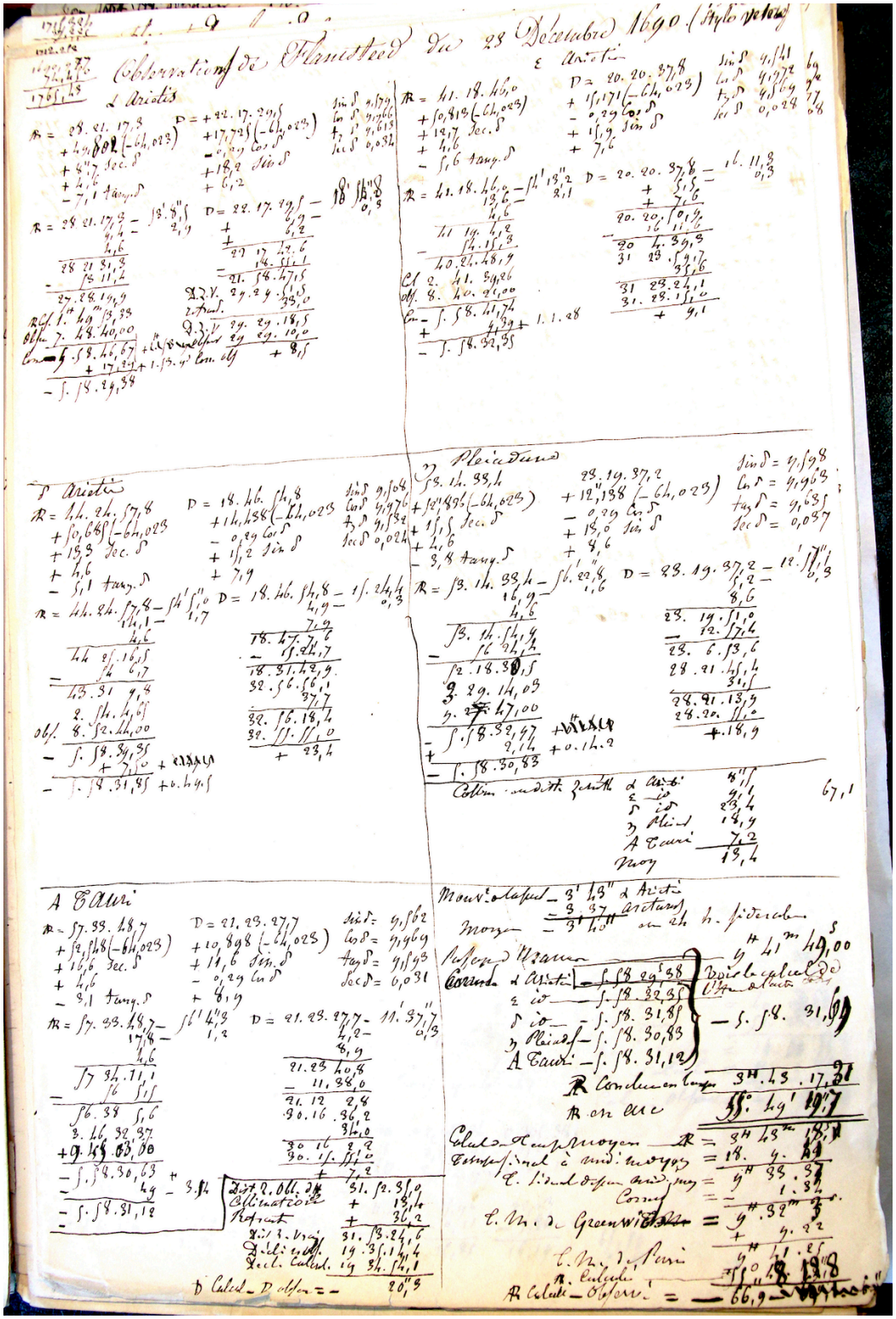


FIGURE 4.6 – Feuille de calcul pour déterminer les coordonnées équatoriales d'Uranus, observé comme une étoile (baptisée 34 Tauri) par Flamsteed le 23 décembre 1690. Le Verrier calcule, à partir d'un catalogue d'étoiles de référence (celui de Bradley), les positions théoriques de 5 étoiles (ici α, ε et δ du Bélier, η des Pléïades et A du Taureau) passant un peu avant ou un peu après Uranus au méridien. La correction effectuée ici sur l'horloge est -5h58′31″.69, moyenne des 5 corrections d'horloge déterminées pour chacune des 5 étoiles précédentes (calcul dans le carré en bas, à droite). Lire le commentaire de Le Verrier, au sujet de cette correction, page suivante (extrait p. 37 du cahier n° 3 des manuscrits)

Voici ce que dit Le Verrier au sujet de l'observation de Flamsteed (*Herschel* p. 144) :

> Uranus, étoile de sixième grandeur, passe au méridien à 9h41m49s, temps de la pendule [5]. α, ε et δ du Bélier, η des Pléïades et A du Taureau fournissent pour la correction de l'heure, et en tenant compte de la déviation azimutale de l'instrument, -5h58m31^s.69 [voir encadré 9 p. 132], il reste 3h41m17^s.31 pour l'ascension droite d'Uranus. On lit, pour la distance d'Uranus au zénith, 31°52′35″.0 ; il faut l'augmenter de 13″.4, erreur de collimation, suivant les mêmes étoiles que ci-dessus, et de 36″.2 pour la réfraction : on en conclut la distance zénithale vraie, et par suite la déclinaison vraie, qui est de 19°35′14″.4 boréale, [$\delta = \phi - z$ avec ϕ latitude du lieu.]

Équation de condition héliocentrique (encadré 10)

Le Verrier essaie de déterminer les corrections δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\varpi$ et δe qu'il faudrait apporter aux éléments elliptiques n, ε, ϖ, e d'Uranus respectivement, pour réduire les écarts entre longitude calculée et longitude observée. Pour cela, il faut déterminer l'expression théorique de la variation δv de la longitude vraie quand on modifie les éléments elliptiques des quantités δn, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ et δe ; le calcul est détaillé au § 4.3.1.1.
L'équation de condition portant sur la longitude héliocentrique à un instant t consiste à écrire que la variation théorique δv de la longitude vraie à l'instant t est égale à l'écart entre la longitude héliocentrique observée O_h à l'instant t et la longitude héliocentrique calculée C_h par l'éphéméride à ce même instant t, ce qui s'écrit

$$\boxed{\delta v = O_h - C_h}$$

On peut former de même des équations de condition géocentriques qui sont de la forme

$$\delta G = O_g - C_g$$

où O_g et C_g sont respectivement les longitudes géocentriques observée et calculée à l'instant t.
Dans la pratique, on écrit plusieurs équations de condition (au moins 4, et en pratique beaucoup plus) et on les résout par la méthode des moindres carrés.

4.2.2 Observations et éphémérides d'Uranus

4.2.2.1 Observations retenues

Le Verrier sélectionne un certain nombre d'observations d'Uranus, après les avoir réduites avec précision (voir encadré 9, p. 132) :

— 19 observations 'anciennes' i.e. datant d'avant la découverte d'Uranus par William Herschel le 13 Mars 1781, la plus ancienne étant celle de Flamsteed datant du 23 décembre 1690. Une liste des observations anciennes est donnée en annexe à la table A.1.

— 260 'modernes' i.e. postérieures à la découverte d'Uranus, observations faites essentiellement à Paris et à Greenwich.

L'ensemble des 279 observations est donné dans *Herschel* p. 129−135. Le début de cette liste des observations retenues par Le Verrier est donné à la figure 4.12.

5. On rappelle qu'à l'époque de Le Verrier, le jour astronomique commence à 12h ; l'observation a eu lieu en fait vers 21h41m.

4.2.2.2 Calcul des coordonnées héliocentriques

On détaille la séquence de calculs pour obtenir la longitude héliocentrique. La table des positions héliocentriques se trouve au n° 71 de *Herschel* (le début de la table est donné fig. 4.7).
Pour chaque date, Le Verrier part de la longitude moyenne, ajoute les perturbations $\delta\ell$ et δv données au n° 60 et fig. 3.29, ainsi que l'équation du centre lue dans la table X de Bouvard (corrigée de ses erreurs). Il modifie la longitude vraie v en ajoutant la réduction ρ_e à l'écliptique lue dans la table XXXII de Bouvard [Bouvard, 1821b], pour obtenir la longitude vraie v_1 rapportée à l'écliptique.
Il fait de même pour la distance polaire et pour le rayon vecteur avec les perturbations données au n° 60 de *Herschel* et fig. 3.29.
Il ajoute dans cette table des positions héliocentriques d'Uranus la longitude de la Terre ainsi que la distance de la Terre au Soleil, tirées des tables de Bessel et de la Connaissance des Temps pour 1844 [Bureau des Longitudes, 1841] et qui serviront plus loin pour passer de la longitude héliocentrique à la longitude géocentrique.

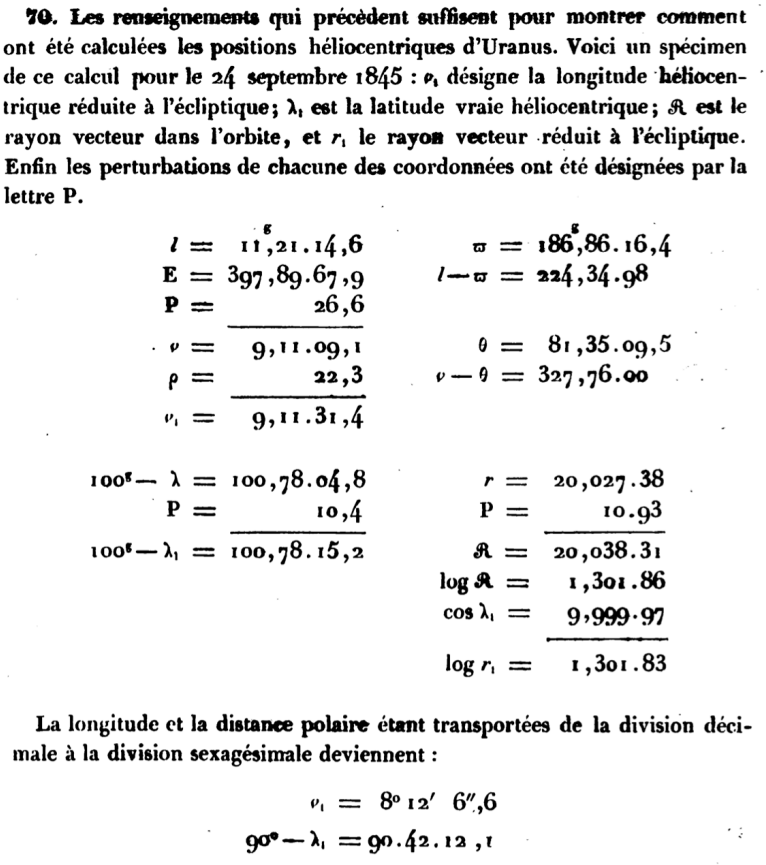
4.2.2.3 Première éphéméride d'Uranus : positions héliocentriques

71. ***Éphémérides des positions héliocentriques d'Uranus et de la Terre, pour le minuit moyen du méridien de Paris.***

ANNÉES.	MOIS et jours.	PERTURBATIONS D'URANUS. Longitude.	Distance polaire.	Rayon vecteur.	LONGITUDE d'Uranus.	DISTANCE polaire d'Uranus.	LOGARITH. du rayon vecteur d'Uranus.	LONGITUDE de la Terre.	LOGARITH. du rayon vect' de la Terre.
		"	"		° ′ ″	° ′ ″		° ′ ″	
1690	Déc. 22	+ 49,1	— 7,1	— 569	59.39.40,6	90.10.14,1	1,28774	91.43.26	9,99267
	23	+ 49,3	— 7,1	— 569	59.40.22,1	90.10.14,3	1,28774	92.44.35	9,99266
	24	+ 49,5	— 7,1	— 568	59.41. 3,6	90.10.14,6	1,28774	93.45.46	9,99266
	25	+ 49,7	— 7,1	— 568	59.41.45,0	90.10.14,8	1,28773	94.46.57	9,99265
1712	Avril 1	+840,7	— 7,9	— 267	155.23.16,8	89.13.53,6	1,26259	192.19.57	0,00043
	2	+840,6	— 7,9	— 267	155.24. 3,3	89.13.53,5	1,26259	193.18.58	0,00056
	3	+840,5	— 7,9	— 268	155.24.49,7	89.13.53,5	1,26259	194.17.57	0,00069
	4	+840,3	— 7,9	— 268	155.25.36,1	89.13.53,4	1,26259	195.16.54	0,00081
1715	Mars 4	+652,6	— 6,1	— 98	169. 9.56,3	89.13.52,8	1,26231	163.50. 2	9,99691
	6	+652,3	— 6,1	— 97	169.11.29,3	89.13.53,0	1,26231	165.49.58	9,99714
	8	+652,0	— 6,1	— 96	169.13. 2,3	89.13.53,1	1,26231	167.49.47	9,99737
	10	+651,7	— 6,1	— 95	169.14.35,3	89.13.53,3	1,26231	169.49.28	9,99760
	Avril 27	+649,4	— 6,1	— 87	169.51.49,3	89.13.56,8	1,26232	217. 0.30	0,00342
	28	+649,3	— 6,1	— 86	169.52.35,9	89.13.56,9	1,26232	217.58.42	0,00353
	29	+649,2	— 6,1	— 86	169.53.22,4	89.13.57,0	1,26232	218.56.52	0,00364
	30	+649,0	— 6,1	— 85	169.54. 8,9	89.13.57,1	1,26232	219.55. 1	0,00375
1780	Oct. 13	+147,6	+ 7,5	+ 715	324. 4.56,6	90.44. 2,8	1,30139	20.31.33	9,99837
	14	+147,6	+ 7,5	+ 715	324. 5.35,6	90.44. 2,9	1,30139	21.31. 7	9,99825
	Déc. 2	+149,4	+ 7,5	+ 690	324.37.25,0	90.44.11,1	1,30146	70.47.51	9,99349
	3	+149,4	+ 7,5	+ 690	324.38. 2,9	90.44.11,2	1,30146	71.48.50	9,99343

FIGURE 4.7 – Début des éphémérides des positions héliocentriques d'Uranus. Le Verrier donne des positions à des dates qui encadrent les observations retenues, par exemple celle de Flamsteed du 23/12/1690 ; les secondes d'arc sont centésimales. Il détaille les perturbations sur la longitude héliocentrique, la distance polaire et le rayon vecteur, toutes calculées à partir de **ses** formules. Il donne aussi la longitude de la Terre en vue du passage aux coordonnées géocentriques (*Herschel* p. 100) et les calculs sont faits p. 171 du cahier n° 3 des manuscrits.

Le Verrier va montrer sur l'exemple suivant comment utiliser ses éphémérides. On a reporté, fig. 4.8 le calcul fait par Le Verrier pour déterminer la longitude héliocentrique d'Uranus le 24 septembre 1845 en utilisant la séquence indiquée au n° 70 de *Herschel* et au § 4.2.2.2.



70. Les renseignements qui précèdent suffisent pour montrer comment ont été calculées les positions héliocentriques d'Uranus. Voici un spécimen de ce calcul pour le 24 septembre 1845 : v_1 désigne la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique; λ_1 est la latitude vraie héliocentrique; $\mathfrak{R}$ est le rayon vecteur dans l'orbite, et r_1 le rayon vecteur réduit à l'écliptique. Enfin les perturbations de chacune des coordonnées ont été désignées par la lettre P.

$l = 11^s,21.14,6$ $\quad \varpi = 186^s,86.16,4$

$E = 397,89.67,9$ $\quad l-\varpi = 224,34.98$

$P = 26,6$

$v = 9,11.09,1$ $\quad \theta = 81,35.09,5$

$\rho = 22,3$ $\quad v-\theta = 327,76.00$

$v_1 = 9,11.31,4$

$100^s - \lambda = 100,78.04,8$ $\quad r = 20,027.38$

$P = 10,4$ $\quad P = 10.93$

$100^s - \lambda_1 = 100,78.15,2$ $\quad \mathfrak{R} = 20,038.31$

$\log \mathfrak{R} = 1,301.86$

$\cos \lambda_1 = 9,999.97$

$\log r_1 = 1,301.83$

La longitude et la distance polaire étant transportées de la division décimale à la division sexagésimale deviennent :

$v_1 = 8^\circ\,12'\ 6'',6$

$90^\circ - \lambda_1 = 90.42.12,1$

FIGURE 4.8 – Calcul effectué par Le Verrier (*Herschel* p. 98) pour déterminer la longitude héliocentrique et la distance polaire d'Uranus le 24 septembre 1845. E désigne ici l'équation au centre, ρ_e la réduction à l'équateur, ϖ la longitude du périhélie et θ la longitude du nœud ascendant ; la signification des autres notations est donnée par Le Verrier. Il poursuivra ce calcul un peu plus loin (voir fig. 4.9) pour déterminer la longitude géocentrique et les coordonnées équatoriales à cette même date.

4.2.2.4 Deuxième éphéméride d'Uranus : positions géocentriques

À partir de la table 4.7, donnant les coordonnées héliocentriques d'Uranus, Le Verrier détermine ses coordonnées géocentriques. Voici les notations utilisées :

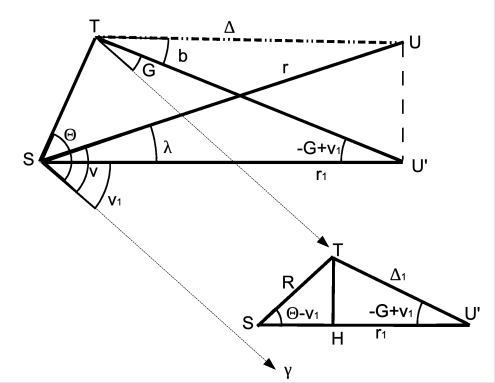
Notations pour passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques	
G	Longitude géocentrique d'Uranus
b	Latitude géocentrique d'Uranus
λ	Latitude héliocentrique d'Uranus
v_1	Longitude héliocentrique d'Uranus réduite à l'écliptique
r_1	Longueur de la projection du rayon vecteur sur l'écliptique
Δ_1	Longueur de la projection du vecteur Terre-Uranus sur l'écliptique
R_T	Distance de la Terre au Soleil
Θ	Longitude de la Terre

On indique table 4.6 le formulaire pour passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques. *Nut* désigne la nutation. (La justification de ces formules se trouve à l'encadré 11, p. 140).

TABLE 4.6 – Formulaire permettant de passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques

coordonnées héliocentriques	$\Delta_1 \cos(G - v_1 - Nut) = r_1 - R_T \cos(\Theta - v_1)$	(4.3)
$(v_1,\, \lambda)$	$\Delta_1 \sin(G - v_1 - Nut) = -R_T \sin(\Theta - v_1)$	(4.4)
vers	$\Delta_1 \tan b = r_1 \tan \lambda$	(4.5)
$(G,\, b)$	d'où	
coordonnées géocentriques	$G - v_1 - Nut = -\arctan \dfrac{R_T \sin(\Theta - v_1)}{r_1 - R_T \cos(\Theta - v_1)}$	(4.6)

Justification des formules pour passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques (encadré 11)



Justification : S : Soleil, T : Terre et U : Uranus. Soit U' la projection orthogonale de U sur l'écliptique. L'écliptique est donc matérialisée par le triangle STU'. Les formules de transformation résultent, pour la première (4.3), de deux évaluations différentes de $U'H$ ($U'H = SU' - SH$) dans le triangle projeté STU', pour la deuxième (4.4), de deux évaluations de TH, une dans le triangle STH et l'autre dans le triangle $TU'H$ et pour la troisième (4.5), de deux évaluations de UU', une dans SUU' et l'autre dans TUU'.

$$G - v_1 - N = 0.20.18,6 \qquad \log \Delta_1 = 1,279.70$$
$$v_1 = 8.12.\ 6,6 \qquad \log \operatorname{tang} b = -\,8,111.21$$
$$N = 12,6$$
$$G = 8.32.37,8$$

$$\psi = -\,4.58.10,6 \qquad \text{AR} - \text{Ab} = 0.32.33,38 \qquad D - \text{Ab} = 2.42.37,0$$
$$\omega = 23.27.28,5 \qquad \text{Ab} = 0,97 \qquad \text{Ab} = 6,2$$
$$\omega + \psi = 18.29.17,9 \qquad \text{AR} = 0.32.34,35 \qquad D = 2.42.43,2$$

FIGURE 4.9 – Exemple traité par Le Verrier (*Herschel* p. 111) pour passer des coordonnées héliocentriques d'Uranus le 24 septembre 1845 aux coordonnées géocentriques $(G,\, b)$ (en haut), puis pour passer des coordonnées géocentriques aux coordonnées équatoriales $(AR,\, D)$ (en bas) en utilisant le formulaire de la page suivante ; Ab désigne l'aberration.

4.2.2.5 Troisième éphéméride : coordonnées équatoriales

Le Verrier détaille dans ses manuscrits (cahier n° 3, p. 167−215) le passage des coordonnées héliocentriques calculées aux coordonnées géocentriques, puis aux coordonnées équatoriales calculées. J'ai vérifié la justesse de certains calculs. Voici le formulaire [6] utilisé par Le Verrier pour passer des coordonnées géocentriques $(G,\ b)$ aux coordonnées équatoriales $(\mathring{\alpha}, D)$, formulaire dans lequel ψ_e désigne une auxiliaire et ε_e l'obliquité de l'écliptique.

coordonnées géocentriques	$\tan\psi_e = \frac{\tan b}{\sin G}$
vers	$\tan\mathring{\alpha} = \frac{\cos(\varepsilon_e+\psi_e)}{\cos\psi_e}\tan G$
coordonnées équatoriales	$\tan D = \tan(\varepsilon_e+\psi_e)\sin\mathring{\alpha}$

La table contenant les positions géocentriques (calculées) d'Uranus, ainsi que ses coordonnées équatoriales, se trouve au n° 73 de *Herschel* et le début de cette table est donné à la figure 4.10.

73. *Éphémérides des positions géocentriques d'Uranus.*

ANNÉES.	MOIS et jours.	NUTATION en longitude.	LONGITUDE géocentrique.	LOGARITH. de la distance à la Terre, projetée sur l'écliptiq.	LOGARITHME de la tangente de la latitude géocentrique.	MINUTES et secondes de l'obliquité de l'écliptiq.	ASCENSION droite apparente d'Uranus.	DÉCLINAISON apparente d'Uranus.
		″	° ′ ″			′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1690	Déc. 22	+ 5,6	58. 3. 8,2	1,26884	−7,49271	28.53,4	55.50. 2,5	+19.35.17,8
	23	+ 5,7	58. 1.11,1	1,26907	−7,49265	28.53,4	55.48. 1,1	+19.34.51,6
	24	+ 5,7	57.59.15,9	1,26930	−7,49258	28.53,4	55.46. 1,7	+19.34.25,8
	25	+ 5,8	57.57.22,7	1,26953	−7,49251	28.53,4	55.44. 4,3	+19.34. 0,5
1712	Avril 1	+16,5	153.25.27,2	1,24344	+8,14667	28.38,8	155.39. 8,9	+11. 0.50,8
	2	+16,5	153.23.37,3	1,24370	+8,14642	28.38,8	155.37.23,7	+11. 1.29,3
	3	+16,4	153.21.49,5	1,24397	+8,14616	28.38,8	155.35.40,6	+11. 2. 6,9
	4	+16,4	153.20. 4,2	1,24424	+8,14590	28.38,8	155.33.59,7	+11. 2.43,5
1715	Mars 4	+15,2	169.28.31,2	1,23818	+8,15177	28.28,3	170.39.12,5	+ 4.55. 5,2
	6	+15,1	169.23.18,2	1,23811	+8,15181	28.28,3	170.34.23,8	+ 4.57. 8,2
	8	+15,0	169.18. 4,3	1,23806	+8,15183	28.28,3	170.29.34,1	+ 4.59.11,9
	10	+14,9	169.12.49,8	1,23803	+8,15184	28.28,3	170.24.43,8	+ 5. 1.15,5
	Avril 27	+13,1	167.27.52,7	1,24611	+8,14322	28.27,7	168.47.16,2	+ 5.41.32,6
	28	+13,1	167.26.30,5	1,24643	+8,14289	28.27,7	168.45.59,1	+ 5.42. 2,7
	29	+13,0	167.25.10,7	1,24675	+8,14256	28.27,7	168.44.44,2	+ 5.42.32,0
	30	+13,0	167.23.53,9	1,24707	+8,14222	28.27,7	168.43.32,0	+ 5.43. 0,0

FIGURE 4.10 – Début des éphémérides des positions géocentriques et équatoriales d'Uranus. Le Verrier donne des positions à des dates qui encadrent les observations disponibles ; par exemple l'observation de Flamsteed a eu lieu le 23 décembre 1690 à 9h41m. Dans les deux dernières colonnes, il donne les coordonnées équatoriales apparentes calculées d'Uranus ; (*Herschel* p. 112 ; calcul fait p. 171 du cahier n° 3 des manuscrits)

4.2.2.6 Détail des calculs faits par Le Verrier pour les 3 éphémérides

L'exemple numérique traité par Le Verrier p. 111 de *Herschel* paraît simple : il s'agit de déterminer, à partir des positions héliocentriques calculées à la fig. 4.8, les coordonnées géocentriques puis équatoriales d'Uranus le 24 septembre 1845 ; voir figure 4.9 les calculs qu'il effectue pour faire ces transformations. En fait, la chaîne complète de calculs est beaucoup plus longue : dans les manuscrits, elle s'étend sur de nombreuses colonnes rapprochées, chacune comportant 55 lignes. Une reproduction de l'organisation des calculs de Le Verrier est donnée figure 4.11 et une mise au propre des deux premières colonnes est donnée page 143. Ce calcul au propre concerne l'observation de Flamsteed du 23 décembre 1690.

6. Formulaire obtenu à partir de relations dans un triangle sphérique rectangle et qui se trouve p. 98 du premier tome des Annales de l'Observatoire de Paris [Le Verrier, 1855a].

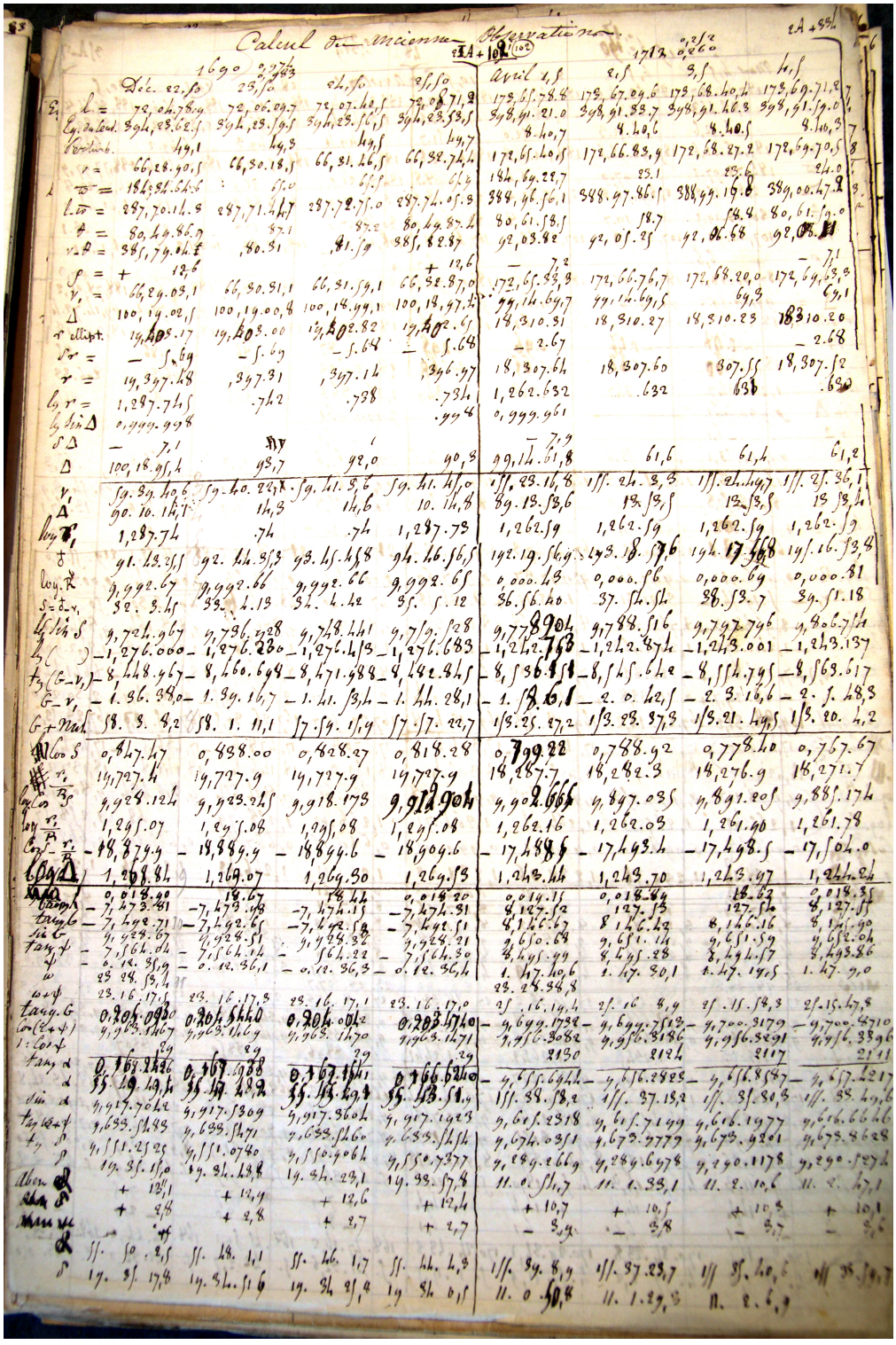


FIGURE 4.11 – Séquence utilisée par Le Verrier pour passer des coordonnées héliocentriques calculées (en haut de la page) aux coordonnées géocentriques calculées (au milieu) et enfin aux coordonnées équatoriales calculées (en bas). Dans la moitié gauche de la feuille, le calcul est fait quotidiennement sur une période de 4 jours (22.5, 23.5, 24.5, 25.5 décembre 1690) pour pouvoir interpoler à la date d'observation (23/12 à 9h41m). La traduction au propre des deux premières colonnes de cette page manuscrite se trouve à la page 143, avec quelques commentaires ainsi que des indications sur les notations ; (extrait p. 171 du cahier n° 3 des manuscrits)

Voici la séquence de calculs utilisée par Le Verrier qui lui permet de *calculer* les coordonnées équatoriales d'Uranus (en bas) à partir de ses coordonnées héliocentriques (en haut). Les valeurs intermédiaires $\frac{r_1}{\Delta_1}$, $\sin(G-v_1)$ et $\cos(G-v_1)$ sont utilisées pour calculer les coefficients α_g et β_g intervenant dans l'expression de δG. Il n'est reproduit ici qu'une seule colonne ; dans les manuscrits, il y en a plusieurs centaines, écrites en caractères précis et serrés. Pour la période moderne (i.e. après 1781), il y a le plus souvent un calcul par trimestre dans les périodes utiles (i.e. contenant une observation), et Le Verrier procède ensuite par interpolations linéaires. Les valeurs ci-contre ont été calculées par Le Verrier dans le cahier n° 3 de ses manuscrits, et l'ensemble des calculs de passage des coordonnées héliocentriques aux coordonnées équatoriales s'étend de la page 167 à la page 215 de ce cahier n° 3. Les formules théoriques sont à la page 141 de la thèse. Les angles au dessus de la ligne horizontale sont en grades et ceux en dessous sont en degrés. Le tableau ci-contre concerne l'observation de Flamsteed du 23/12/1690 et se trouve p. 171 du cahier n° 3 des manuscrits : la reproduction du manuscrit se trouve à la page précédente. La façon de noter les angles est celle de Le Verrier.

	22.5/12/1690	date
ℓ	72.04.78.9	longitude moyenne
équation du centre	394.23.62.5	
perturbation	$49''.1$	de la longitude vraie
v	66.28.90.5	longitude vraie
ϖ	184.34.64.6	longitude du périhélie
$\zeta = \ell - \varpi$	287.70.14.3	anomalie moyenne
θ	80.49.86.9	longitude du nœud ascendant
$v - \theta$	385.79.06	argument de la latitude
ρ_e	$12''.6$	réduction à l'écliptique
v_1	66.29.03.1	longitude réduite à l'écliptique
Δ	100.19.02.5	distance au pôle de l'écliptique
r ellipse	19.40317	rayon sur l'orbite théorique
δr	-0.00569	correction sur le rayon
r	19.39748	rayon vecteur réel
$\log r$	1.287745	
$\log \sin \theta$	0.999998	
$\delta\Delta$	$-7''.1$	
Δ	100.18.95.4	distance polaire corrigée
v_1 en degrés	59.39.40.6	
Δ en degrés	90.10.14.1	
$\log r_1$	1.28774	
longitude Terre $\odot$	91.43.25.5	
$\log R$	$\bar{1}.99267$	log de la distance Terre-Soleil
$S = \odot - v_1$	32.3.45	
$\log \sin S$	$\bar{1}.724967$	
$\log \tan(G - v_1)$	$\bar{2}.498967$	
$G - v_1$	$-1.36.38.0$	
$G +$ nutation	58.3.82	
$\cos S$	0.84747	
r/R	19.7274	
$\log \cos S$	$\bar{1}.9928124$	
$\log(r_1/R)$	1.29507	
$\cos S - \frac{r_1}{\Delta}$	-18.8799	
$\log \Delta$	1.26884	
$\log \frac{r}{\Delta}$	0.01890	
$\log \tan \lambda$	$-\bar{3}.47381$	
$\log \tan \odot$	$-\bar{3}.49271$	
$\log \sin G$	$\bar{1}.92867$	
$\log \tan \psi_e$	$-\bar{3}.56404$	ψ_e : variable auxiliaire
ψ_e	$-0.12.35.9$	
ω_e	23.28.53.4	obliquité de l'écliptique
$\omega_e + \psi_e$	23.16.17.5	
$\log \tan G$	0.205093	
$\log \cos(\omega_e + \psi_e)$	$\bar{1}.963147$	
$\log \frac{1}{\cos \psi_e}$	0.000029	
$\log \tan \alpha$	0.1682426	
α	55.49.49.4	ascension droite brute
$\sin \alpha$	$\bar{1}.9177042$	
$\tan(\omega_e + \psi_e)$	$\bar{1}.6835483$	
$\tan \delta$	$\bar{1}.5512525$	
δ	19.35.15	déclinaison brute
Aberration α	$18''.1$	
Aberration δ	$2''.8$	
α	55.50.2.5	ascension droite finale
δ	19.35.17.8	déclinaison finale

4.2.2.7 Écarts $O - C$ en longitude et latitude géocentriques

On trouvera fig. 4.12 le début du tableau comparant les ascensions droites et les déclinaisons calculées – en appliquant les méthodes de la figure 4.11 – avec celles observées pour les 279 observations retenues. On notera que certaines observations ne comportent que l'ascension droite ; cela tient au fait, qu'à une certaine époque, les deux mesures – ascension droite et déclinaison – étaient faites sur des instruments distincts (voir encadré 9, p. 132).

77. *Tableau de la comparaison des observations d'Uranus avec la théorie admise.*

ANNÉES	MOIS et jours.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite Æ, observée.	SECOND' de l'Æ calculée.	Æ calculée moins Æ observée.	DÉCLINAISON observée.	SECOND' de la déclinaison calculée	DÉCLIN. calculée moins déclin. observ.	LONGIT. calculée moins longitude observ.	LATIT. calculée moins latitude observ.
		h m s	o ′ ″	″	″	o ′ ″	″	″	″	″
1690	Déc. 23	9.41.25	55.49.19,7	12,8	−66,9	+19.35.14,4	54,1	−20,3	−65,9	− 5,7
1712	Avril 2	9.46.47	155.38.29,4	33,3	−56,1	+11. 0.55,2	25,8	+30,6	−62,5	+ 8,5
1715	Mars 4	12.43.35	170.40. 2,7	8,1	−54,6	+ 4.54.27,9	6,9	+39,0	−65,4	+14,4
	10	12.19. 2	170.25.39,3	41,9	−57,4	+ 5. 0.38,2	16,3	+38,1	−67,6	+12,5
	Avril 29	8.55.49	168.45.55,5	53,6	−61,9	+ 5.41.53,1	28,3	+35,2	−70,5	+ 8,3
1750	Oct. 14	8. 4. 8	324.15.25,4	4,8	+39,4	−15. 1.41,3	32,5	+ 8,8	+38,9	− 4,0
	Déc. 3	4.48.51	324.34.52,4	26,6	+34,2	−14.53.19,8	18,5	+ 1,3	+31,7	− 9,5
1753	Déc. 3	5.42. 1	335.50.24,6	58,3	+33,7	» » »	»	»	+33,1	»
1756	Sept. 25	10.21.12	348. 0.54,5	27,9	+33,4	− 6. 1.49,4	41,7	+ 7,7	+33,6	− 5,9
1764	Janv. 15	5.12. 0	12.37.39,0	0,9	+21,9	+ 4.43.47,2	44,4	+ 2,8	+21,2	− 5,9
1768	Déc. 27	7.38.42	31.26.52,0	58,6	+ 6,6	+12.15,35,0	30,9	− 4,1	+ 4,7	− 6,0
	30	7.26.54	31.24.45,8	3,6	+17,8	+12.14.55,4	56,1	+ 0,7	+16,7	− 5,3
1769	Janv. 15	6.23.41	31.22. 7,7	19,3	+11,6	+12.14.26,0	31,6	+ 5,6	+12,5	+ 1,4
	16	6.19.46	31.22.23,4	34,9	+11,5	+12.14.36,3	37,6	+ 1,3	+11,1	− 2,6
	20	6. 4. 9	31.24. 6,6	6,4	− 0,2	+12.15.19,0	18,1	− 0,9	− 0,5	− 0,8
	21	6. 0.16	31.24.33,8	36,8	+ 3,0	+12.15.31,8	30,9	− 0,9	+ 2,5	− 1,8
	22	5.56.21	31.25. 4,7	10,1	+ 5,4	+12.15.45,7	44,7	− 1,0	+ 4,6	− 2,7
	23	5.52.26	31.25.28,5	46,6	+18,1	+12.16. 7,5	59,4	− 8,1	+13,8	−13,6
1771	Déc. 18	9. 6.53	43.58. 6,0	21,0	+15,0	+12.25.20,2	13,7	− 6,5	+11,9	−10,3

FIGURE 4.12 – Début du tableau comparant les coordonnées équatoriales d'Uranus calculées par Le Verrier avec celles observées (*Herschel* p. 129). Dans la 6e colonne, on trouve l'écart en ascension droite, dans la 9e, l'écart en déclinaison. Dans l'avant-dernière colonne, on trouve les écarts en longitude géocentrique, nombres qui vont être essentiels pour la suite des calculs ; et dans la dernière colonne, on lit les écarts en latitude géocentrique, écarts que Le Verrier utilisera pour estimer l'inclinaison de l'orbite de Neptune sur celle d'Uranus (§ 6.2.10)

L'élément le plus important pour la suite se situe dans l'avant-dernière colonne : c'est l'écart (δG) dans la longitude géocentrique d'Uranus. Les écarts en coordonnées écliptiques (δG, δb) sont obtenus à partir des écarts en coordonnées équatoriales ($\delta\mathring{\alpha}$, δD) à l'aide des formules :

$$\delta G = P_g\,\delta\mathring{\alpha} - Q_g\,\delta D \qquad \delta b = -R_g\,\delta\mathring{\alpha} + S_g\,\delta D \tag{4.7}$$

où P_g, Q_g, R_g, S_g sont des nombres faciles à calculer ; le formulaire complet est donné au § 7.3.2.1 ; et les valeurs numériques de ces nombres sont publiées dans le recueil d'observations de Greenwich de 1835, [Pond, 1835]. Pour compenser certaines observations lacunaires (pas de déclinaison par exemple), Le Verrier utilise plutôt la formule $\delta G = (P - \frac{Q_g R_g}{S_g})\delta\mathring{\alpha} - \frac{Q_g}{S_g}\delta b$, associée à des interpolations ; c'est le cas pour l'observation de Bradley de 1753 par exemple.

4.3 Équations de condition

4.3.1 Expression des équations de condition pour la longitude géocentrique

4.3.1.1 Formulaire

On veut déterminer les variations de la longitude géocentrique G d'Uranus sous l'effet de variations de ses paramètres elliptiques $\varepsilon,\ e,\ n$ et ϖ ; en différenciant les formules (4.3) et (4.4), on obtient au premier ordre (voir aussi [Danjon, 1959]) :

$$\boxed{dG = \frac{r_1}{\Delta_1}\cos(G-v_1)\,dv_1 - \frac{\sin(G-v_1)}{\Delta_1}\,dr_1 = \alpha_g\,dv_1 - \beta_g\,dr_1} \tag{4.8}$$

en posant (notations actualisées de Le Verrier) :

$$\boxed{\alpha_g = \frac{r_1}{\Delta_1}\cos(G-v_1) \quad \text{et} \quad \beta_g = \frac{\sin(G-v_1)}{\Delta_1}} \tag{4.9}$$

On observe par exemple qu'à l'opposition i.e. quand $G = v_1$, on a $\beta_g = 0$ et la correction du rayon vecteur n'a pas d'influence sur la correction de la longitude géocentrique.
Le Verrier utilise le développement à l'ordre 4 de la longitude vraie v et du rayon vecteur r en fonction de l'anomalie moyenne ζ et de l'excentricité e (cahier n° 3 p. 223) :

$$\begin{aligned} v &= \zeta + (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin\zeta + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{12}e^4)\sin 2\zeta + \tfrac{13}{12}e^3\sin 3\zeta + \tfrac{103}{96}e^4\sin 4\zeta \\ \tfrac{r}{a} &= 1 + \tfrac{e^2}{2} + (-e + \tfrac{3}{8}e^3)\sin\zeta + (-\tfrac{e^2}{2} + \tfrac{e^4}{3})\sin 2\zeta - \tfrac{3}{8}e^3\sin 3\zeta - \tfrac{e^4}{3}\sin 4\zeta \end{aligned}$$

d'où les valeurs des dérivées par rapport à e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial e} = Q_h(t) &= (2 - \tfrac{3}{4}e^2)\sin\zeta + (\tfrac{5}{2}e - \tfrac{11}{3}e^3)\sin 2\zeta + \tfrac{13}{4}e^2\sin 3\zeta + \tfrac{103}{24}e^3\sin 4\zeta \\ \frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial e} &= e - (1 - \tfrac{9}{8}e^2)\sin\zeta - (e - \tfrac{4}{3}e^3)\sin 2\zeta - \tfrac{9}{8}e^2\sin 3\zeta - \tfrac{4}{3}e^3\sin 4\zeta \end{aligned}$$

et en observant que $\zeta = \varepsilon + nt - \varpi$, et en tenant compte du fait que ε et ϖ sont des variables indépendantes, on a $\dfrac{\partial}{\partial\varpi} = -\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{e\,\partial\varpi} &= -(2 - \tfrac{1}{4}e^2)\cos\zeta - (\tfrac{5}{2}e - \tfrac{11}{6}e^3)\cos 2\zeta - \tfrac{13}{4}e^2\cos 3\zeta - \tfrac{103}{24}e^3\cos 4\zeta \\ \frac{1}{a}\frac{\partial r}{e\,\partial\varpi} &= -(1 - \tfrac{3}{8}e^2)\cos\zeta - (e - \tfrac{2}{3}e^3)\cos 2\zeta - \tfrac{9}{8}e^2\cos 3\zeta - \tfrac{4}{3}e^3\cos 4\zeta \end{aligned}$$

Au premier ordre on a $v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \varpi)$; donc
$\dfrac{\partial v}{\partial\varepsilon} = 1 + 2e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) = 1 - \dfrac{\partial v}{\partial\varpi} = 1 - eP_h(t)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial n} = (1 - P_h(t)e)t$ en posant $P_h(t) = \dfrac{\partial v}{e\,\partial\varpi}$

Le Verrier utilisera :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \delta v &=& R_h(t)\delta\varepsilon + S_h(t)\,\delta n + Q_h(t)\,\delta e + P_h(t)\,e\,\delta\varpi & (4.10) \\ \delta G &=& (\alpha_g - eH_g)\,\delta\varepsilon + (\alpha_g - eH_g)\,t\,\delta n + K_g\,\delta e + H_g\,e\,\delta\varpi & (4.11) \end{array}\right\}$$

avec les notations suivantes :

α_g	β_g	M_g	N_g	$P_h(t)$	$Q_h(t)$	$R_h(t)$	$S_h(t)$	H_g	K_g
$\frac{r_1}{\Delta_1}\cos(G-v_1)$	$\frac{\sin(G-v_1)}{\Delta_1}$	$\frac{\partial r}{e\partial\varpi}$	$\frac{\partial r}{\partial e}$	$\frac{\partial v}{e\partial\varpi}$	$\frac{\partial v}{\partial e}$	$\frac{\partial v}{\partial\varepsilon} = 1 - eP_h(t)$	$\frac{\partial v}{\partial n} = (1 - eP_h(t))\,t$	$\alpha_g P_h(t) - \beta_g M_g$	$\alpha_g Q_h(t) - \beta_g N_g$

4.3.1.2 Équations de condition pour la longitude géocentrique

Le Verrier part des valeurs admises pour les éléments d'Uranus et il veut savoir s'il est possible de corriger légèrement ces valeurs afin de faire concorder les longitudes géocentriques calculées avec celles observées.
Pour cela, il écrit les équations de condition, qui expriment que la correction théorique δG (formule (4.11)) est égale à l'écart entre la position géocentrique calculée C_g et la position géocentrique observée O_g, ce qui s'écrit

$$\delta G = O_g - C_g$$

Il fait le calcul pour chacune des 279 dates d'observation retenues, mais quand il dispose d'observations à des dates voisines, il fait la moyenne de ces équations de condition et il indique le nombre d'observations regroupées. Son tableau (fig. 4.13) ne contient finalement que 114 dates moyennes. Voici ce qu'il écrit p. 137 de *Herschel* :

> J'ai formé cette équation [de condition géocentrique] pour toutes [279] les observations indistinctement. Il suffira de présenter ici les équations moyennes [114] qui en résultent, quand on groupe les observations faites à une même époque.

On a reproduit fig. 4.13 la première page de ces équations de condition, qui se trouve p. 138−141 de *Herschel*.

ANNÉES.	MOIS et jours.	NOMBRE d'obser-vations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
1690	Déc. 23	1	1,019$\delta\varepsilon$	−111,09δn	−1,986δe	+0,538$e\delta\varpi$	− 65″,9 = 0
1712	Avril 2	1	1,145	−100,47	−0,442	−2,171	− 62,5 = 0
1715	Mars 7	2	1,162	− 98,45	+0,112	−2,241	− 66,5 = 0
	Avril 29	1	1,139	− 96,44	+0,087	−2,199	− 70,5 = 0
1730	Oct. 14	1	0,943	− 46,41	+0,816	+1,770	+ 38,9 = 0
	Déc. 3	1	0,905	− 44,42	+0,769	+1,703	+ 31,7 = 0
1733	Déc. 3	1	0,907	− 41,79	+0,396	+1,837	+ 33,1 = 0
1736	Sept. 25	1	0,958	− 41,44	−0,008	+1,983	+ 33,6 = 0
1764	Janv. 15	1	0,913	− 32,83	−0,909	+1,652	+ 21,2 = 0
1768	Déc. 29	2	0,961	− 29,81	−1,493	+1,286	+ 10,7 = 0
1769	Janv. 19	6	0,944	− 29,21	−1,469	+1,257	+ 7,3 = 0
1771	Déc. 18	1	0,996	− 27,93	−1,788	+0,953	+ 11,9 = 0
1781	Sept. 27	2	1,028	− 18,77	−1,958	−0,563	− 14,8 = 0
1782	Janv. 6	2	1,079	− 19,39	−2,063	−0,566	− 18,3 = 0
	Mars 12	2	1,030	− 18,34	−1,977	−0,531	− 17,3 = 0
	Oct. 1	2	1,035	− 17,85	−1,917	−0,715	− 16,8 = 0
	Déc. 21	2	1,089	− 18,54	−2,023	−0,737	− 18,7 = 0
1783	Oct. 9	2	1,045	− 16,95	−1,868	−0,868	− 20,5 = 0
1784	Janv. 23	2	1,090	− 17,38	−1,966	−0,877	− 19,5 = 0
	Mars 19	3	1,046	− 16,51	−1,889	−0,837	− 20,9 = 0
	Oct. 10	2	1,049	− 15,97	−1,798	−1,009	− 21,2 = 0
1785	Janv. 16	2	1,102	− 16,49	−1,904	−1,040	− 20,7 = 0
	Mars 28	1	1,050	− 15,50	−1,819	−0,981	− 21,8 = 0
	Oct. 26	1	1,068	− 15,14	−1,739	−1,168	− 22,1 = 0
1786	Janv. 13	1	1,111	− 15,52	−1,824	−1,196	− 23,4 = 0
1787	Janv. 14	1	1,119	− 14,50	−1,732	−1,343	− 24,6 = 0
1788	Mars 9	2	1,100	− 12,99	−1,605	−1,432	− 27,9 = 0
	Oct. 26	2	1,071	− 11,98	−1,416	−1,535	− 24,9 = 0
1789	Janv. 18	1	1,131	− 12,39	−1,507	−1,611	− 30,3 = 0
	Avril 10	3	1,080	− 11,58	−1,457	−1,523	− 31,1 = 0
	Oct. 30	2	1,076	− 10,94	−1,295	−1,647	− 27,3 = 0

Figure 4.13 – Première page des équations de condition géocentriques pour essayer d'annuler l'écart entre position géocentrique observée et position géocentrique calculée pour Uranus. Ce sont des équations aux quatre inconnues $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$, qui sont les corrections à apporter aux éléments elliptiques d'Uranus. Pour chaque date, le nombre d'équations regroupées pour former l'équation moyenne figure dans la troisième colonne (*Herschel* p. 138)

4.3.1.3 Résolution des équations de condition pour les longitudes géocentriques par Le Verrier (Méthode 1)

Le Verrier constate « qu'il reste, entre la théorie [celle qu'il vient d'établir] et les observations, des écarts considérables ». Il poursuit (*Herschel*, n° 78) :

> Nous devons examiner s'il serait possible de les faire disparaître [les écarts], en modifiant convenablement les éléments de l'ellipse [d'Uranus].

Dans un premier temps, il ne retient que les 260 observations postérieures à la découverte d'Uranus. Pour réduire les erreurs d'observations, il va regrouper ces 260 équations pour en former 4 en utilisant le tableau d'équations de condition géocentriques dont le début se trouve à la figure 4.13 et où il a déjà effectué des regroupements ; voici comment il procède (*Herschel* n° 79) :

> ...on peut regarder comme sensiblement nulle l'erreur [...] qui se trouve dans la somme des soixante-cinq observations faites depuis 1781 jusqu'en 1796. On exprimera cette [équation de] condition en sommant les équations ci-dessus, après les avoir respectivement multipliées par le nombre d'équations sur lesquels elles sont fondées. On aura une *première* équation, propre à la détermination des corrections des éléments. Une *seconde* équation s'obtiendra de la même manière, au moyen des soixante-dix observations faites depuis 1797 jusqu'en 1813 ; une troisième, au moyen des soixante-trois observations faites depuis 1813 jusqu'en 1830 ; enfin, la quatrième équation se déduira des soixante-six observations faites depuis 1835 jusqu'en 1845.

Je reproduis les 4 équations ainsi formées par Le Verrier :

$$
\begin{aligned}
70{,}964\,\delta\varepsilon - 778{,}49\,\delta n - 88{,}428\,\delta e - 95{,}012\,e\delta\varpi - 1661{,}2 &= 0,\\
74{,}350\,\delta\varepsilon + 448{,}59\,\delta n + 76{,}171\,\delta e - 112{,}588\,e\delta\varpi - 2313{,}4 &= 0,\\
64{,}889\,\delta\varepsilon + 1386{,}42\,\delta n + 118{,}545\,\delta e + 22{,}212\,e\delta\varpi - 1709{,}1 &= 0,\\
62{,}167\,\delta\varepsilon + 2484{,}39\,\delta n + 6{,}747\,\delta e + 125{,}161\,e\delta\varpi + 4006{,}7 &= 0,
\end{aligned}
$$

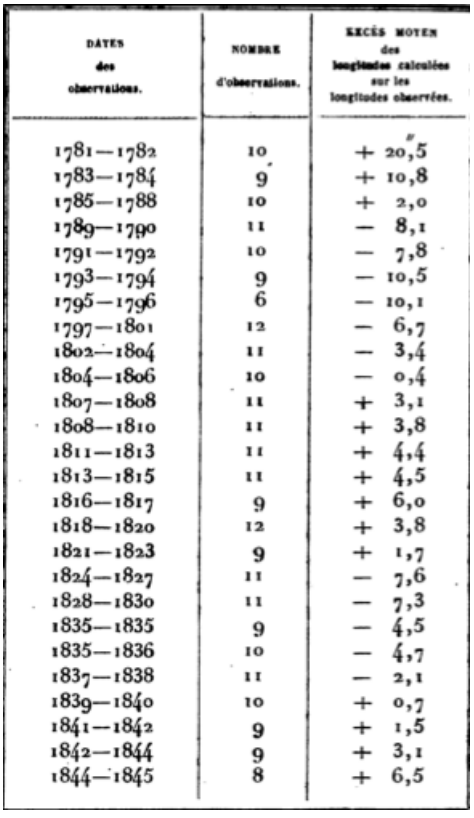
FIGURE 4.14 – Système de 4 équations aux 4 inconnues δn, δe, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ obtenu par Le Verrier en faisant la somme de ses équations de condition géocentriques en les groupant par paquets de l'ordre de 65 équations chacun : (*Herschel*, n° 79)

On donne dans la table 4.7 la solution obtenue, pour ces mêmes 4 équations, par Le Verrier et par TRIP. On voit là encore les qualités exceptionnelles du calculateur, mais il aura fallu une page de calculs serrés (plus les vérifications) à Le Verrier pour résoudre le système.
J'ai rajouté dans les trois dernières colonnes les corrections à effectuer quand on a égard – pour parler comme Le Verrier – à l'ensemble des 279 équations de condition, prises individuellement, quand on considère seulement les 260 observations modernes ou bien quand on considère seulement les 19 anciennes. La discussion pour les cas non traités par Le Verrier se poursuit au § 4.4.2 et est très instructive, particulièrement pour le dernier cas : on verra que le résultat met en évidence l'orbite d'Uranus non perturbée par Neptune.
Le Verrier reporte les corrections qu'il a trouvées dans les premiers membres de ses 260 équations de condition ; il fait la moyenne de ces premiers membres en les groupant par paquets de l'ordre de 10, le détail des dates et du nombre d'équations regroupées dans chaque paquet est donné à la figure 4.15. Les groupements effectués se voient très bien à la figure 4.13, Le Verrier ayant séparé les différents groupes par une ligne blanche.

TABLE 4.7 – Solutions des équations de condition géocentriques selon le nombre d'équations retenues ; de gauche à droite et successivement : solution des 4 équations de la figure 4.14 par Le Verrier, solution de ces mêmes 4 équations par TRIP, solution quand on considère les 279 équations individuellement, solution quand on considère uniquement les 260 équations modernes et enfin quand on se limite aux 19 anciennes

Solutions pour $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$ quand on résout successivement les 4 équations de Le Verrier, l'ensemble des 279 équations, les 260 modernes et les 19 anciennes					
Inconnues	Équations de la fig. 4.14 par Le Verrier	par TRIP	Avec les 279 équations	Avec les 260 modernes	Avec les 19 anciennes
$\delta\varepsilon$	$39''.587$	$39''.587$	$4''.5$	$34''.4$	$-29''.6$
δn	-3.2908	-3.2907	-0.70	-2.9	-0.67
δe	28.971	28.971	15.3	27.6	-13.9
$e\delta\varpi$	12.083	12.083	-15.6	7.7	-15.9

Le Verrier trouve les résidus moyens suivants (figure 4.15 et *Herschel*, p. 143) :



DATES des observations.	NOMBRE d'observations.	EXCÈS MOYEN des longitudes calculées sur les longitudes observées.
1781—1782	10	+ 20″,5
1783—1784	9	+ 10,8
1785—1788	10	+ 2,0
1789—1790	11	— 8,1
1791—1792	10	— 7,8
1793—1794	9	— 10,5
1795—1796	6	— 10,1
1797—1801	12	— 6,7
1802—1804	11	— 3,4
1804—1806	10	— 0,4
1807—1808	11	+ 3,1
1808—1810	11	+ 3,8
1811—1813	11	+ 4,4
1813—1815	11	+ 4,5
1816—1817	9	+ 6,0
1818—1820	12	+ 3,8
1821—1823	9	+ 1,7
1824—1827	11	— 7,6
1828—1830	11	— 7,3
1835—1835	9	— 4,5
1835—1836	10	— 4,7
1837—1838	11	— 2,1
1839—1840	10	+ 0,7
1841—1842	9	+ 1,5
1842—1844	9	+ 3,1
1844—1845	8	+ 6,5

Excès moyens des longitudes calculées sur les longitudes observées	
1781-1782	+ $20''.6$
1783-1784	+ 10.8
1785-1788	+ 1.8
1789-1790	- 8.2
1791-1792	- 7.8
1793-1794	- 10.5
1795-1796	- 10.1
1797-1801	- 6.8
1802-1804	- 3.4
1804-1806	- 0.4
1807-1808	+ 2.1
1808-1810	+ 3.7
1811-1813	+ 4.4
1813-1815	+ 4.5
1816-1817	+ 6.1
1818-1820	+ 3.8
1821-1823	+ 1.7
1824-1827	- 7.6
1828-1830	- 7.3
1835-1835	- 4.4
1835-1836	- 4.7
1837-1838	- 2.0
1839-1840	+ 2.3
1841-1842	+ 1.5
1842-1844	+ 3.2
1844-1845	+ 7.7

Résidus pour certaines dates anciennes	
1690.98	$288''.8$
1712.25	274.2
1715.33	266.6
1750.79	273.7
1753.92	240.4
1756.74	231.7
1764.04	158.9
1768.99	113.4
1771.60	99.6

FIGURE 4.15 – À gauche, résidus des écarts entre longitude observée et longitude calculée après correction des éléments elliptiques. Les moyennes sont effectuées sur des paquets regroupant chacun une dizaine d'observations (*Herschel*, p. 143) ; au milieu, le tableau donnant les résidus obtenus avec TRIP, tableau très proche de celui de Le Verrier et à droite les résidus pour quelques dates anciennes (calculés par TRIP).

Ces résidus lui semblent beaucoup trop importants par rapport à la précision des mesures, et il émet le commentaire suivant (*Herschel*, n° 79) :

> Il est tout à fait impossible d'admettre que la position moyenne d'Uranus, déduite de dix

> observations méridiennes, faites en 1781 et 1782, par Maskelyne, soit erronée de $20''.5$: il n'est pas, au reste, plus admissible que les observations faites depuis 1835 jusqu'en 1845 soient entachées de l'erreur progressive qu'on y remarquerait, et qui, partant de $-4''.5$ en 1835, s'élèverait jusqu'à $+6''.5$ en 1845.

Ce qui le préoccupe, c'est que l'erreur soit progressive et non aléatoire, indiquant par là qu'il existe probablement une cause non identifiée.
En utilisant les corrections des éléments elliptiques déterminées par Le Verrier (données dans la deuxième colonne de la table 4.7), j'ai calculé les résidus pour chacune des 279 équations de condition, prises individuellement, et on constate de gros résidus dans les observations anciennes, résidus qui vont en augmentant jusqu'à $288''$ en 1690 (voir fig. 4.15 et fig. 4.20), ce qui justifie a posteriori la réflexion de Le Verrier (*Herschel*, p. 144) :
« Il est impossible avec la théorie admise de satisfaire à l'ensemble des observations ».

Deuxième version de la méthode 1
Quand on lit attentivement les manuscrits, on constate que ce calcul par la méthode 1 est repris sous une variante, mais cette deuxième version n'a pas été publiée dans *Herschel*. Voici quelques indications sur cette variante. Le Verrier forme 4 équations en regroupant des équations individuelles de condition : il ajoute les 50 premières équations modernes entre elles, puis les 48 suivantes entre elles , les 53 suivantes entre elles et enfin les 48 suivantes ; les dates correspondantes s'étalent de 1781 à 1830. Il résout ce système de 4 équations et reporte les valeurs trouvées pour les inconnues dans les équations. Il obtient des résidus relativement faibles jusqu'en 1830, ce qui est cohérent avec la démarche adoptée, puis les résidus deviennent élevés jusqu'en 1845. Le Verrier ne fait aucun commentaire et passe à la suite.
Comment interpréter ce deuxième calcul, si c'est bien un deuxième calcul ? Il se pourrait [7] que ce calcul ait été fait en premier, qu'il n'ait pas donné satisfaction et du coup, Le Verrier aurait étendu sa tranche d'équations jusqu'en 1845. Mais pourquoi avoir limité les observations à 1830 si c'est un premier calcul, ou bien pourquoi avoir repris le premier calcul si cette deuxième version intervient vraiment en second ? est-ce un test pour voir comment évoluent les résidus dans les équations ? Dans tous les cas, il est difficile, faute de commentaires de la part de Le Verrier, de comprendre l'utilité de ce deuxième calcul.

4.3.2 Expression des équations de condition pour la longitude héliocentrique

4.3.2.1 Forme de l'équation de condition héliocentrique

Le Verrier a déjà conclu à une contradiction par une première méthode

> qu'il est impossible, avec la théorie admise, de satisfaire à l'ensemble des observations. La considération précédente me paraît déjà décisive et si je reprends la démonstration sous deux nouveaux points de vue totalement différents, c'est que rien ne peut être de trop, quand il s'agit d'étayer une conclusion d'une pareille gravité pour l'avenir de notre Système planétaire (*Herschel*, n° 79).

Il est conscient de l'importance de la mission que lui a confiée Arago et il va donc confirmer ce premier résultat par deux autres méthodes. Pour cela, pour ces deux méthodes, il va s'appuyer sur les équations de condition portant sur la longitude héliocentrique. En reprenant la formule (4.10) du paragraphe 4.3.1 et ses notations, l'équation de condition pour la longitude *héliocentrique*

7. Les deux calculs se trouvent sur des feuillets séparés, et leur ordre dans les manuscrits peut être facilement inversé.

s'écrit, en posant Cor = longitude héliocentrique observée - longitude héliocentrique calculée (voir encadré 10, p. 137) :

$$\boxed{\delta v = R_h(t)\delta\varepsilon + S_h(t)\delta n + Q_h(t)\delta e + P_h(t)e\delta\varpi = Cor} \tag{4.12}$$

Pour les deux calculs annoncés (par Le Verrier), Le Verrier va utiliser une démarche qui est proche de celle utilisée par Adams : au lieu d'utiliser les observations aux dates historiques, il va les combiner et les interpoler pour avoir des données sur des dates en progression arithmétique de 14 ans dans la méthode 2 et de 7 ans dans la méthode 3.

4.3.2.2 Méthode 2

Le Verrier donne le détail de ces interpolations p. 7−11 bis du cahier n° 4 des manuscrits afin d'avoir des données sur des dates en progression arithmétique de 14 ans. Dans *Herschel* (p. 145), Le Verrier se contente de dire (voir cependant § 4.4.3) :

> Les observations d'Uranus, qui ont été faites vers les oppositions, nous mettent à même de former les expressions des erreurs héliocentriques des Tables à huit époques successives, distantes entre elles de quatorze années. Nous n'avons pas toujours, il est vrai, d'observations aux moments précis que nous devons considérer ; mais la lenteur de la variation de l'erreur héliocentrique tabulaire nous permet d'y suppléer par des interpolations convenables.

Il utilise pour ses équations de condition les expressions (équation 4.10) des coefficients tronquées au degré 1 des excentricités, d'une part parce que les équations qu'il va former vont ainsi pouvoir se simplifier et d'autre part, parce que Bouvard a utilisé exactement les mêmes équations dans la construction de ses Tables pour Uranus et qu'avec les solutions de ces équations, Bouvard a déjà amélioré la théorie d'Uranus. Le Verrier se demande s'il peut encore améliorer la théorie à partir de ces mêmes équations, avec les données améliorées, ou sinon prouver « qu'en réduisant les équations de condition aux termes employés par M. Bouvard, il serait impossible de concilier la théorie avec les observations ; ce qui n'est pas sans intérêt » (*Herschel*, p. 144).
Il part donc de 8 équations de condition héliocentriques aux dates $1747.7 + k14$, $0 \leq k \leq 7$. Il appelle ν_k l'erreur dans la longitude héliocentrique à l'époque $1747.7 + 14\,k$.
Il forme les différences secondes entre ces 8 équations pour obtenir 6 nouvelles équations.
Il fait la somme de la première et de la quatrième de ces 6 équations, puis la somme de la deuxième et de la cinquième équation et enfin la somme de la troisième et de la sixième équation.
Comme $6 \times 14 = 84 \simeq$ la période de révolution d'Uranus, plusieurs coefficients s'annulent et ces 3 nouvelles équations ont des formes très simples, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 84\,e\,\delta n\cos(\zeta + 60°) + \delta^2\nu_1 + \delta^2\nu_4 & = & 0 \\ 84\,e\,\delta n\cos(\zeta + 120°) + \delta^2\nu_2 + \delta^2\nu_5 & = & 0 \\ 84\,e\,\delta n\cos(\zeta + 180°) + \delta^2\nu_3 + \delta^2\nu_6 & = & 0 \end{array}\right.$$

où ζ représente l'anomalie moyenne d'Uranus en 1747.7, soit $141°55'$ et $\delta^2\nu_1$ représente la différence seconde des erreurs d'observations, à savoir $\nu_1 - 2\nu_2 + \nu_3$ et de même, par permutation circulaire, pour les autres différences secondes $\delta^2\nu_k$.
Il obtient ainsi 3 valeurs pour δn : $\delta n = -3''.3$, $\delta n = 69''$ et $\delta n = -29''$, « qui sont incompatibles entre elles [...] et, de plus, la seconde et la troisième sont des valeurs tout à fait inadmissibles [trop fortes en valeur absolue]. » (*Herschel* p. 146).
Il continue : « Je passe à une [autre] démonstration qui ne laissera, ce me semble, rien à désirer ».

4.3.2.3 Méthode 3

Le Verrier reprend (*Herschel* p. 146) le calcul précédent, mais en l'affinant :

> Je vais reprendre cette même équation de condition [portant sur la longitude héliocentrique], en ne me contentant plus d'une approximation dans la valeur des coefficients des inconnues, en les formant, au contraire, avec toute l'exactitude possible. J'en donnerai le calcul à des époques plus nombreuses et plus rapprochées l'une de l'autre que cela ne serait, à la rigueur, nécessaire pour le but que je me propose ici. Cependant toutes ces équations devant nous être indispensables dans la troisième partie de ce travail, il valait mieux les présenter simultanément ».

Le Verrier va former 15 équations de condition héliocentriques aux 15 dates suivantes : $1747.7 + 7k$, $0 \leq k \leq 14$, espacées de 7 ans et s'étalant sur 98 ans. Il leur adjoint 3 équations, fondées sur les observations faites accidentellement par Flamsteed en 1690, 1712 et 1715 ; voici ce qui dit Biot à ce sujet [Biot, 1847b] :

> chacun des intervalles est presque exactement égal à la 12e partie d'une révolution sidérale moyenne d'Uranus. Cela le fait correspondre à une fraction semblable du contour de l'orbite considérée comme circulaire, par conséquent à un mouvement angulaire moyen de 30°. Ce choix avait donc l'avantage de répartir les épreuves sur tout le cercle de l'astre, en les séparant par des intermittences d'égale durée, ce qui en montre la convenance.

Biot signale un problème potentiel pour l'interpolation de 1831.7, car Le Verrier ne dispose d'aucune observation entre 1830 et 1835. Biot pense avoir compris la démarche de Le Verrier, démarche que Le Verrier n'explicite que dans ses manuscrits, et Biot dit qu'il a retrouvé par le calcul la valeur retenue par Le Verrier, mais il ne publie pas son calcul. Voir quelques indications sur la façon d'interpoler à des dates régulières au § 4.4.3.
Le Verrier va organiser ses équations de condition de façon très originale. Il présente son calcul de la manière suivante (*Herschel* p. 147) :

> Les constantes des équations n'ont pas une rigueur absolue, à cause des erreurs dont les observations sont susceptibles. Supposons que la position héliocentrique déduite des observations faites en 1715 soit erronée d'une quantité P ; la constante $-64''.6$ de l'équation correspondante devra, pour être exacte, être augmentée de cette quantité P, et c'est ce qui a été fait dans les équations suivantes. Semblablement, les équations correspondantes à 1775, 1810 et 1845 ont été augmentées des quantités Q, R et S, erreurs dont sont entachés les lieux empruntés à l'observation. Enfin, toutes les autres équations de condition ont besoin, pour devenir exactes, de corrections analogues que j'ai désignées par les symboles (1), (2), (3),..., (13), et (14). Ces corrections, que nous ne connaissons pas a priori, mais auxquelles nous pouvons cependant fixer des limites supérieures, joueront désormais un rôle important.

On a reproduit le système formé de ces 18 équations (*Herschel*, p. 149) à la figure 4.16.

Équations de condition, déduites de la considération des erreurs héliocentriques des Tables.

Années.					
1690,98	0,977 $\delta\varepsilon$ — 106,5 δn — 1,912 δe + 0,487 $e\delta\varpi$ — 63,1 +	(1) = 0
1712,25	1,097 $\delta\varepsilon$ — 96,2 δn — 0,388 δe — 2,086 $e\delta\varpi$ — 59,9 +	(2) = 0
1715,23	1,099 $\delta\varepsilon$ — 93,2 δn + 0,111 δe — 2,121 $e\delta\varpi$ — 64,6 +	P = 0
1747,7	0,928 $\delta\varepsilon$ — 48,5 δn + 1,127 δe + 1,542 $e\delta\varpi$ + 34,8 +	(3) = 0
1754,7	0,912 $\delta\varepsilon$ — 41,3 δn + 0,254 δe + 1,874 $e\delta\varpi$ + 32,8 +	(4) = 0
1761,7	0,917 $\delta\varepsilon$ — 35,1 δn — 0,669 δe + 1,775 $e\delta\varpi$ + 24,7 +	(5) = 0
1768,7	0,941 $\delta\varepsilon$ — 29,5 δn — 1,461 δe + 1,257 $e\delta\varpi$ + 10,0 +	(6) = 0
1775,7	0,982 $\delta\varepsilon$ — 23,9 δn — 1,939 δe + 0,393 $e\delta\varpi$ — 3,7 +	Q = 0
1782,7	1,031 $\delta\varepsilon$ — 17,8 δn — 1,932 δe — 0,653 $e\delta\varpi$ — 17,4 +	(7) = 0
1789,7	1,074 $\delta\varepsilon$ — 11,1 δn — 1,355 δe — 1,595 $e\delta\varpi$ — 28,6 +	(8) = 0
1796,7	1,098 $\delta\varepsilon$ — 3,6 δn — 0,320 δe — 2,097 $e\delta\varpi$ — 29,8 +	(9) = 0
1803,7	1,091 $\delta\varepsilon$ + 4,0 δn + 0,830 δe — 1,943 $e\delta\varpi$ — 33,6 +	(10) = 0
1810,7	1,056 $\delta\varepsilon$ + 11,3 δn + 1,686 δe — 1,202 $e\delta\varpi$ — 35,3 +	R = 0
1817,7	1,008 $\delta\varepsilon$ + 17,8 δn + 2,004 δe — 0,171 $e\delta\varpi$ — 32,3 +	(11) = 0
1824,7	0,962 $\delta\varepsilon$ + 23,8 δn + 1,773 δe + 0,821 $e\delta\varpi$ — 24,5 +	(12) = 0
1831,7	0,928 $\delta\varepsilon$ + 29,4 δn + 1,129 δe + 1,541 $e\delta\varpi$ + 3,4 +	(13) = 0
1838,7	0,912 $\delta\varepsilon$ + 35,3 δn + 0,255 δe + 1,874 $e\delta\varpi$ + 50,0 +	(14) = 0
1845,7	0,917 $\delta\varepsilon$ + 41,9 δn — 0,666 δe + 1,775 $e\delta\varpi$ + 110,5 +	S = 0

FIGURE 4.16 – Système de 18 équations de condition héliocentriques obtenu par Le Verrier en privilégiant 4 équations parmi les 18 retenues. Il rend ces 18 équations exactes en ajoutant à chacune d'entre elles des variables P, Q, R, S, (1), (2), ..., (13), (14) inconnues, mais bornées, de bornes connues. Les calculs programmés avec TRIP donnent exactement les mêmes coefficients !

Il envisage la suite des calculs de la façon suivante (*Herschel* p. 148) :

> Les constantes des équations de 1715, 1775, 1810 et 1845 peuvent être considérées comme rigoureuses par l'addition des indéterminées P, Q, R et S. Nous résoudrons ces équations par rapport à $\delta\varepsilon$, δn, δe et $e\delta\varpi$, ce qui fournira pour les valeurs de ces inconnues des fonctions de P, Q, R et S. En les portant dans les autres équations de condition, il faudra que les fonctions qu'on obtiendra pour les premiers membres de ces équations puissent toutes devenir nulles par un choix convenable des arbitraires P, Q, R, S, (1), (2)..., (13), (14).

Et il commente cette stratégie de la manière suivante (*Herschel*, p. 148) :

> Nous n'aurons pas, il est vrai, fait autre chose que de susbstituer, dans les relations, un système d'inconnues à un autre système ; mais nous y aurons gagné cet avantage, que les nouvelles arbitraires P, Q, R, S devront rester comprises entre des limites fixées à l'avance par les erreurs possibles des observations, tandis que les anciennes $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$. pouvaient admettre des valeurs quelconques.

C'est vraiment une approche [8] très subtile et on voit là le grand art de Le Verrier, mathématicien calculateur. D'un point de vue plus formel, cela consiste à remplacer la recherche d'un extremum dans $\mathbb{R}^4$ par la recherche de ce même extremum dans un parallélépipède connu. On verra plus loin, et à plusieurs reprises, le grand intérêt de savoir P, Q, R, S *bornées*, avec des bornes *connues*. Le Verrier résout donc les 4 équations pour 1715, 1775, 1810, 1845, puis il reporte les valeurs trouvées pour $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$ comme fonction de P, Q, R, S dans le système (4.16).

8. Danjon, dans [Danjon, 1946a] p. 373−374, observe (malicieusement) qu'il est malheureusement impossible de généraliser la démarche, sinon on se retrouverait avec n équations à $n+4$ inconnues !

On a reproduit fig. 4.17 le système obtenu par Le Verrier après ce report et qui sera noté (4.17) par la suite, à comparer avec ce que je trouve à la table 4.8 :

TABLE 4.8 – Système de 18 équations de condition après remplacement des corrections elliptiques par leurs valeurs en fonction de P, Q, R, S. Le calcul est fait avec TRIP à partir des 18 équations de condition héliocentriques (4.16)

1690.98	−1.915	P	+0.907	Q	+1.652	R	−1.644	S	+	(1)	= +182.7
1712.25	−0.849	P	−0.346	Q	−0.025	R	+0.220	S	+	(2)	= −21.4
1715.23	+0.000	P	+0.000	Q	+0.000	R	+0.000	S	+		= −0.0
1747.7	−2.743	P	+3.348	Q	+1.955	R	−3.560	S	+	(3)	= +262.8
1754.7	−2.360	P	+2.717	Q	+1.859	R	−3.215	S	+	(4)	= +245.7
1761.7	−1.714	P	+1.665	Q	+1.468	R	−2.419	S	+	(5)	= +189.9
1768.7	−0.886	P	+0.352	Q	+0.821	R	−1.288	S	+	(6)	= +105.3
1775.7	−0.000	P	+0.000	Q	+0.000	R	−0.000	S	+		= −0.0
1782.7	+0.771	P	−2.096	Q	−0.851	R	+1.175	S	+	(7)	= −100.5
1789.7	+1.219	P	−2.603	Q	−1.518	R	+1.902	S	+	(8)	= −166.0
1796.7	+1.190	P	−2.305	Q	−1.787	R	+1.902	S	+	(9)	= −175.1
1803.7	+0.708	P	−1.298	Q	−1.572	R	+1.162	S	+	(10)	= −109.4
1810.7	−0.000	P	+0.000	Q	+0.000	R	−0.000	S	+		= +0.0
1817.7	−0.640	P	+1.101	Q	−0.328	R	−1.133	S	+	(11)	= +108.7
1824.7	−1.003	P	+1.687	Q	+0.207	R	−1.892	S	+	(12)	= +182.3
1831.7	−1.006	P	+1.659	Q	+0.467	R	−2.120	S	+	(13)	= +188.4
1838.7	−0.654	P	+1.059	Q	+0.397	R	−1.801	S	+	(14)	= +124.7
1845.7	−0.000	P	+0.000	Q	+0.000	R	+0.000	S	+		= +0.0

Années.						
1690,98	−1,913P	+0,904Q	+1,651R	−1,642S	+ (1)	−182,6=0
1712,25	−0,846	−0,349	−0,028	+0,224	+ (2)	+ 21,7=0
1715,23	+0,000	+0,000	+0,000	−0,000	+	0,0=0
1747,7	−2,745	+3,351	+1,958	−3,565	+ (3)	−263,3=0
1754,7	−2,364	+2,721	+1,862	−3,221	+ (4)	−246,3=0
1761,7	−1,715	+1,668	+1,470	−2,423	+ (5)	−190,3=0
1768,7	−0,887	+0,354	+0,823	−1,289	+ (6)	−105,6=0
1775,7	+0,000	−0,000	+0,000	+0,000	+	0,0=0
1782,7	+0,774	−2,100	−0,854	+1,180	+ (7)	+100,9=0
1789,7	+1,221	−2,605	−1,520	+1,905	+ (8)	+166,3=0
1796,7	+1,193	−2,308	−1,790	+1,906	+ (9)	+175,4=0
1803,7	+0,708	−1,299	−1,573	+1,163	+(10)	+109,5=0
1810,7	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+	0,0=0
1817,7	−0,642	+1,103	−0,326	−1,136	+(11)	−108,9=0
1824,7	−1,005	+1,690	+0,209	−1,896	+(12)	−182,7=0
1831,7	−1,008	+1,662	+0,469	−2,123	+(13)	−188,8=0
1838,7	−0,656	+1,061	+0,399	−1,804	+(14)	−125,0=0
1845,7	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+	0,0=0.

FIGURE 4.17 – Système obtenu par Le Verrier en reportant dans le système (4.16) les valeurs trouvées pour δn, δe, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ en résolvant le sous-système (4.16) formé des 4 équations aux dates 1715, 1775, 1810 et 1845.

Les petites différences entre les deux calculs peuvent être mises sur le compte des arrondis et ont peu d'influence sur la suite des calculs.

Enfin, en faisant une combinaison linéaire de ces 14 équations (combinaison détaillée au n° 83 de *Herschel*), Le Verrier tombe sur une équation de la forme $355''.9 + \sum_i A_i e_i = 0$ où les e_i représentent des erreurs de mesure (en particulier il y a P, Q, R, S, (1), (2), ... (14)) et les A_i des coefficients numériques ; il estime que les erreurs modernes ne peuvent pas dépasser $4''$ et les anciennes $15''$, ce qui fait que $|\sum_i A_i e_i|$ ne peut pas dépasser $100''$; il en conclut que le système de départ est impossible.
On peut aussi résoudre le système des 14 équations de la table 4.8 (ou de la figure 4.17) par les moindres carrés ; je trouve :

$$P = 3.56,\ Q = -2.77,\ R = -4.80,\ S = 75.03$$

et la valeur de S est inacceptable, car beaucoup trop élevée : selon Le Verrier, on doit avoir $|S| \leq 4''$.
Tout cela lui permet de conclure que l'on ne peut pas éliminer les écarts entre observations et prédictions par le seul ajustement des paramètres elliptiques d'Uranus, et donc de conclure la deuxième partie de *Herschel*, qui remplit près de 300 pages dans les manuscrits (cahier n° 3), par ces mots, insistant sur la rigueur de la démonstration, qui est en fait, d'un point de vue logique, un pur raisonnement par l'absurde (*Herschel*, p. 150) :

> Je me suis appuyé sur des formules exactes, avantage dont s'étaient privés mes devanciers, en ne commençant pas par approfondir la théorie ; cette négligence aurait toujours fait suspecter l'exactitude de leurs conclusions. On doit remarquer, en second lieu, que je ne me suis pas borné à essayer des combinaisons plus ou moins nombreuses d'équations, et à déclarer que je n'avais pas réussi à représenter le mouvement de la planète ; on n'aurait pas manqué de m'objecter que j'avais peut-être omis la véritable combinaison, qu'un autre plus heureux pourrait la découvrir. On se serait ainsi trouvé dans la même incertitude qu'auparavant : mais telle n'est pas la marche que j'ai suivie. J'ai démontré, si je ne me trompe, qu'il y a incompatibilité formelle entre les observations d'Uranus, et l'hypothèse que cette planète ne serait soumise qu'aux actions du Soleil et des autres planètes, agissant conformément aux principes de la gravitation universelle. On ne parviendra jamais, dans cette hypothèse, à représenter les mouvements observés.

4.3.2.4 Déroulement des calculs pour les méthodes 2 et 3

On ne peut être qu'impressionné par la rigueur et la maîtrise de Le Verrier, qui ne se contente pas d'une seule contradiction, mais qui en produit trois, très convaincantes, par trois méthodes originales et indépendantes.

Mais est-ce que cette présentation ne cache pas quelques réorganisations ?

La rédaction de *Herschel* suit en général très fidèlement l'ordre des manuscrits. La méthode 1 (§ 4.3.1.3) est détaillée dans le cahier n° 3, avec la démarche indiquée dans ce paragraphe § 4.3.1.3. Par contre, il n'y a pas de trace dans le cahier n° 3 des méthodes 2 et 3. Est-ce que les manuscrits correspondants ont été insérés au mauvais endroit dans les dossiers de la bibliothèque ? Il est facile de vérifier que ce n'est pas le cas. Est-ce que les manuscrits correspondants ont été perdus ? C'est l'hypothèse que j'avais envisagée dans un premier temps, mais à force de lire et de relire les différents manuscrits de Le Verrier, je pense pouvoir établir la probable chronologie des calculs pour les différentes méthodes ; voici mon hypothèse :

Le Verrier vient d'aboutir à une contradiction avec la méthode 1 (§ 4.3.1.3) en montrant qu'il est impossible de corriger la théorie d'Uranus en corrigeant seulement ses éléments elliptiques. En toute logique, Le Verrier passe donc à la recherche de la planète inconnue, dont les manuscrits se trouvent dans le cahier n° 4.
Il met en œuvre sa première méthode (§ 5.2.2), qui n'aboutit pas, car il y a des coefficients dans ses équations qui dépendent de façon compliquée de ε'. Il doit alors se dire qu'il peut reprendre

les calculs sur lesquels il vient de buter en ne faisant plus intervenir une planète extérieure et ces calculs deviennent alors la méthode 2 (§ 4.3.2.2) du chapitre 4 : il n'a qu'à ajouter la résolution d'un système de 3 équations à 1 inconnue, pour conclure à une deuxième contradiction.
Il aborde ensuite la méthode 2 de la première approche (avec l'hypothèse d'une planète extérieure § 5.2.3), calcul qui a abouti et qui a permis de « sélectionner la zone dans laquelle doit se trouver la planète perturbatrice ». Sous l'effet d'une inspiration, ou sous le besoin d'obtenir une troisième contradiction, il reprend les mêmes 18 équations, sans bien sûr les 3 variables associées à la planète troublante, et il forme une combinaison astucieuse aboutissant de nouveau à une impossibilité de corriger la théorie de Bouvard.

En résumé
1) il montre qu'il n'est pas possible de corriger la théorie d'Uranus en restant dans le cadre connu du Système solaire (méthode 1 du chapitre 4).
2) Il passe donc à la recherche d'une planète perturbatrice par deux méthodes ; la première n'aboutissant pas et la deuxième permettant de prédire un emplacement pour la planète perturbatrice (méthodes 1 et 2 du chapitre 5).
3) Ces deux derniers calculs lui donnent l'idée de revenir au calcul du chapitre 4 et de consolider la contradiction trouvée en 1).

Un élément supplémentaire en faveur de cette interprétation se trouve dans le commentaire fait par Le Verrier p. 146 de *Herschel* : « [Je] donnerai le calcul à des époques plus nombreuses et plus rapprochées l'une de l'autre que cela ne serait, à la rigueur, nécessaire pour le but que je me propose ici [contradiction]. Cependant toutes ces équations devant nous être indispensables dans la troisième partie de ce travail, il valait mieux les présenter simultanément ».

Le nombre est plus important que nécessaire, car il s'agit en fait d'un calcul fait pour la première approche (du chapitre 5) et non (dans un premier temps) la recherche d'une contradiction supplémentaire pour le chapitre 4.

Le Verrier aurait donc recyclé de façon très heureuse les deux calculs du chapitre 5.

Si le déroulé, tel qu'il vient d'être décrit, est exact, on peut estimer que dans l'affirmation précédente de Le Verrier (§ 4.3.2.1) « si je reprends la démonstration sous deux nouveaux points de vue totalement différents, c'est que rien ne peut être de trop, quand il s'agit d'étayer une conclusion d'une pareille gravité pour l'avenir de notre système planétaire », on peut y voir une pointe d'opportunisme et de mise en scène ou, si l'on veut positiver – et c'est bien sûr ainsi qu'il faut réagir – une façon intelligente d'utiliser, en l'adaptant, un calcul abouti.

4.3.2.5 Conclusion pour cette recherche de correction de la théorie de Bouvard

Comme déjà signalé, Le Verrier ne commet pas d'erreur de calcul [9] ; cela tient principalement au fait qu'il vérifie systématiquement tous ses calculs, en les refaisant au moins 2 fois chacun, et quand il a confirmé le premier résultat, il ajoute son paraphe (∞) à côté du résultat (voir fig. 2.6). Ayant prouvé que la connaissance actuelle du Système solaire ne permet pas d'expliquer les mouvements d'Uranus, il peut maintenant proposer comme explication aux irrégularités des mouvements d'Uranus l'action d'une planète inconnue, dont il va essayer de déterminer la position, ce qui fait l'objet des deux chapitres suivants.

Mais avant d'aborder ces chapitres, on va prolonger certains calculs déjà effectués pour
– procéder à une utilisation concrète des tables de Bouvard au § 4.4.1 ;
– exploiter les équations géocentriques formées par Le Verrier au § 4.4.2.

9. Il y a quelques petits décalages, par exemple dans les deux calculs de la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus, mais ces décalages sont sans conséquence notable. Par contre, on découvrira une erreur dans le calcul final pour placer la planète perturbatrice (voir la fin du chapitre 6).

4.4 Compléments

4.4.1 Utilisation concrète des tables de Bouvard

4.4.1.1 Objectif visé : calcul de la longitude d'Uranus au 24/9/1845 à l'aide des tables de Bouvard

Le Verrier écrit qu'il a construit ses éphémérides d'Uranus en utilisant une partie (tables I-IV et table X) des tables de Bouvard [Bouvard, 1821b], après en avoir vérifié l'exactitude. Par contre, il utilise les inégalités de la longitude moyenne et les inégalités de la longitude vraie qu'il a lui-même établies (*Herschel*, n° 60 et fig. 3.29).
Les tables traduisent en valeurs numériques les expressions analytiques de la longitude, du rayon vecteur et de la distance polaire. La longitude vraie est la somme de la longitude moyenne ($\varepsilon+nt$), de la grande inégalité et de diverses perturbations retenues – 12 en tout, données p. XV de ses tables – par Bouvard. On lit dans les différentes tables les valeurs numériques des arguments littéraux des diverses fonctions trigonométriques, ce qui permet d'accéder, au moyen de ces mêmes tables, aux valeurs numériques de ces fonctions. Il faut prendre garde qu'il est souvent ajouté à chaque table une valeur constante, choisie pour que tous les éléments tabulés soient positifs.
J'ai essayé[10] de reprendre le calcul complet de la position héliocentrique puis géocentrique d'Uranus le 24 septembre 1845, qui est l'exemple de calcul donné par Le Verrier p. 98, puis p. 111 de *Herschel*. Il faut noter que pour Le Verrier 24/9 signifie 24/9 à minuit alors que pour Bouvard, cela signifie 24/9 à 0 h. Il faut donc lire dans les tables de Bouvard à la case 25 et non 24 ! Le Verrier donne quelques intermédiaires de calcul, mais sans détailler complètement sa démarche. J'ai repris le calcul complet à partir des tables de Bouvard (il est donné à la figure 4.19), pour le comparer à celui de Le Verrier.
Toutes les valeurs angulaires sont en grades (sauf indication contraire).

4.4.1.2 Calcul de la longitude héliocentrique

`Avec les tables de Bouvard`
On utilise les tables I à IX de Bouvard pour déterminer la longitude moyenne corrigée de la grande inégalité. Dans le même temps, on lit les valeurs des arguments (allant de II à XII) qui permettront de calculer les perturbations de la longitude vraie. On obtient pour la longitude moyenne corrigée de la grande inégalité 11ᵍ2257. On détermine par la table X l'équation du centre, ainsi que sa variation séculaire, à partir de la valeur de l'anomalie moyenne. On lit dans les tables XI à XXI les corrections à apporter à la longitude vraie, et enfin on lit la réduction à l'écliptique à la table XXXII. En faisant la somme de tous ces nombres, on obtient (voir la figure 4.19) 9ᵍ11735.
`Calcul de Le Verrier`
Le Verrier procède un peu différemment ; il lit aux tables I-IV (longitude moyenne + grande inégalité) :

$$7.71986+3.17776+0.31385=11.21147$$

Il ajoute ensuite l'équation du centre, calculée à partir de la table X de Bouvard, puis il ajoute **sa** perturbation totale en longitude, à savoir la perturbation de la longitude moyenne, suivie de la variation de l'équation du centre et enfin de la perturbation de la longitude vraie, soit ici $26''.6$; il obtient pour la longitude héliocentrique

10. La démarche n'est pas évidente quand on n'a pas l'habitude de ce genre de calcul, mais en insistant, on comprend progressivement mieux la marche à suivre. On découvre – et on apprécie aussi – les subtilités de la construction de ces tables, par exemple la constante ajoutée à tous les nombres tabulés, afin de n'avoir que des valeurs positives, et ce, pour limiter le nombre d'erreurs dans les tables.

$$11.21146+397.87679+0.00266=9^g11091=v$$

Enfin il ajoute la réduction à l'écliptique, soit $22''.3$, ce qui donne finalement pour la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique : 9.11091+0.00223=9^g11314, soit un écart avec Bouvard de $42''$ centésimales ou bien de $14''$ sexagésimales.

4.4.1.3 Calcul de la longitude géocentrique

`Avec les tables de Bouvard`

On considère la projection orthogonale U d'Uranus sur l'écliptique (voir fig. 4.18).
On lit dans une table (par exemple la table de Bessel) la longitude Θ de la Terre ; on obtient l'angle au soleil S par la formule $S = v_1 - \Theta$ (on rappelle que v_1 est la longitude d'Uranus rapportée à l'écliptique) ; son complément, $T + U$, est la somme de l'angle T à la Terre et de la parallaxe U de la Terre, vue d'Uranus (voir figure 4.18) ; on pose $\tan M_U = \frac{r_1}{R_T} = \frac{r\cos\lambda}{R_T} = \frac{\sin T}{\sin U}$ (relation des sinus dans le triangle STU) où r est le rayon vecteur d'Uranus, R_T celui de la Terre et λ la latitude héliocentrique d'Uranus.
Une petite manipulation trigonométrique (voir équation (4.13)) montre que

$$\cot\tfrac{T+U}{2}\tan\tfrac{T-U}{2} = \tan(M_U - \tfrac{\pi}{4})$$

d'où $(T-U)/2$ puis T par $T = (T-U)/2 + (T+U)/2$.
Enfin la longitude géocentrique s'obtient par

$$G = (T\gamma', TU) = (S\gamma, ST) + (TS, TU) = \Theta - T = 9^g4937$$

On observe ces différents intermédiaires (T, U, $(T+U)/2$...) relatifs à Jupiter dans le calcul fait par Bouvard p. XXIV-XXV de ses tables, et on les a adaptés pour le calcul fait à la figure 4.19, qui s'inspire très largement de la disposition adoptée pour Jupiter par Bouvard.

`Calcul de Le Verrier`

Le Verrier utilise un calcul analytique à partir de la formule (4.3) donnée au paragraphe 4.2.2.4 :

$$G - v_1 - Nut = \mathrm{atan2}(-R_T\sin(\Theta - v_1),\ r_1 - R_T\cos(\Theta - v_1))$$

ce qui donne $G = 9^g49315$.
L'écart avec Bouvard est de $5''$ centésimales, soit moins de $2''$ sexagésimales.

4.4.1.4 Calcul du rayon vecteur et de la distance polaire

On fait le même type de calcul pour le rayon vecteur et la distance polaire.
Pour le rayon vecteur on trouve 20.03738 *au* avec les tables de Bouvard contre 20.03831 *au* avec les formules de Le Verrier ; et pour la distance polaire : 100^g78184 par les tables de Bouvard contre 100^g78152 par les formules de Le Verrier.

4.4.1.5 Justifications

Les notations sont rappelées figure 4.18.
On pose $S = (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{SU}) = \Theta - v_1$; $T = (\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TS})$ et $U = (\overrightarrow{SU}, \overrightarrow{TU})$; on a $S + T + U = \pi\ [2\pi]$ donc $T + U = \pi - S$ et la longitude géocentrique vaut

$$G = (\overrightarrow{T\gamma'}, \overrightarrow{TU}) = (\overrightarrow{T\gamma'}, \overrightarrow{TS}) + (\overrightarrow{TS}, \overrightarrow{TU}) = \Theta - T$$

On rappelle que l'on a défini M_U par $\tan M_U = \frac{\sin T}{\sin U}$.

$$\tan(M_U - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sin T - \sin U}{\sin T + \sin U} = \frac{2\sin\frac{T-U}{2}\cos\frac{T+U}{2}}{2\sin\frac{T+U}{2}\cos\frac{T-U}{2}} = \tan\tfrac{T-U}{2}\cot\tfrac{T+U}{2} \qquad (4.13)$$

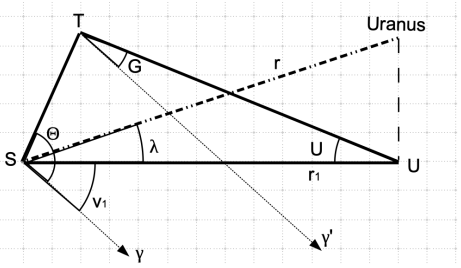


Figure 4.18 – Positions relatives de la Terre (T), du Soleil (S) et d'Uranus ; U est la projection orthogonale d'Uranus sur l'écliptique ; les angles du triangle STU sont orientés de façon que
$\hat{S} + \hat{T} + \hat{U} = \pi$

4.4.1.6 Feuille de calcul pour le calcul des longitudes à partir des tables de Bouvard

On a rempli, page suivante, fig. 4.19, une feuille de calcul permettant de déterminer, en utilisant les tables de Bouvard, la longitude moyenne, la longitude vraie, le rayon vecteur et la distance polaire d'Uranus le 24 septembre 1845. Les explications sont données dans les paragraphes précédents. La disposition est largement inspirée de l'exemple donné par Bouvard pour le calcul d'une position de Jupiter (p. XXIV et XXV de ses tables [Bouvard, 1821b]).
Pour établir des éphémérides, il faut répéter cet enchaînement de calculs pour chaque date retenue. Bien sûr, quand on a fait le calcul une fois, les calculs suivants sont plus rapides. Mais on prend conscience de l'intérêt d'avoir à sa disposition de nombreux calculateurs entraînés. Le Verrier a bénéficié de l'aide d'Émile Gautier pour l'établissement de ses éphémérides de Mercure et d'Uranus et à partir de 1847, après la découverte de Neptune, de l'aide de Buisson.

4.4.1.7 Les tables d'éphémérides selon Le Verrier

Après avoir sûrement appliqué de nombreuses fois la méthode précédente de calcul d'éphémérides, Le Verrier constate qu'elle fait intervenir un nombre important de variables : longitude moyenne, anomalie moyenne, argument de latitude... Il estime que cette multiplication de variables est une source importante d'erreurs. Et en plus, il faut consulter de nombreuses tables pour arriver au résultat : 50 tables pour Jupiter, 46 pour Uranus dans les tables de Bouvard [Bouvard, 1821b]. Il propose donc dans un mémoire à l'Académie [Le Verrier, 1843c], de n'utiliser comme variable effective que le temps, mais le temps exprimé en **années anomalistiques de la planète**. Il donne des éphémérides régulièrement espacées avec un pas dépendant de la planète tabulée (pas d'une heure pour Mercure par exemple, première planète à laquelle il applique sa méthode). Le Verrier annonce qu'avec sa méthode, on peut aller 3 fois plus vite qu'avec la méthode classique. Il dit aussi qu'il n'a pas sensiblement modifié le calcul des perturbations et affirme que celui-ci est très court. Ce n'est pas l'impression donnée à première vue, après le calcul des perturbations exercées sur Uranus par Saturne et Jupiter (voir fig. 4.3). Mais comme ces perturbations sont calculées une fois pour toutes, pour une tranche de temps suffisamment longue, il suffit de les interpoler pour les dates voulues. Le Verrier applique sa méthode, pendant l'année 1845, avec l'aide de Gautier, pour les tables de Mercure, qui seront publiées dans les additions pour la *Connaissance des temps pour 1848*. On rappelle que Gautier n'appréciait guère ce travail (lettre du 21 juin 1845 à ses parents) :

> Le Bureau des Longitudes a décidé tout dernièrement l'impression des Tables de Mercure de mon Patron [...], c'est un nouvel élément de presse qui nous incombe, et qui fait qu'il me laisse à peine souffler... [c'est] terriblement fatigant de chiffrer toute la sainte journée.

Il ne semble pas que le Bureau des Longitudes ait utilisé la méthode de Le Verrier dans les éditions suivantes de la connaissance des temps. Est-ce par inertie, est-ce parce que le gain de temps n'est pas suffisamment important pour justifier un tel changement d'habitude ou bien est-ce tout simplement par opposition systématique à Le Verrier ?

Légende	Longitude	Périhélie	Noeud	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1845	7.71986	186.8476	81.2957	852	8349	4	986	687	870	24	21	653	722	539
septembre	3.17776	0.01079	0.00288	16	67	48	40	22	23	103	56	6	38	37
25	0.31385	0.00107	0.00026	2	6	5	4	3	3	10	6	1	4	4
Grande inégalité	0.01423	**186.85946**		-2	-21	1	1	-4	-2	2	1	-4	-4	-6
Longitude moy corrigée	**11.2257**	-186.85946	**81.29884**	868	8401	58	1031	708	894	139	84	656	760	574
		11.2257	9.11508											

équation centre	397.82433	**224.36624**	**327.81624**				
II	0.00617	Anomalie moyenne	Argument de la latitude				
III	0.03425						
IV	0.02179	Arg1 pour équation centre	397.85355	Distance polaire pour 327°	100.78305		
V	0.00113	Partie proportionnelle	-0.0303	Partie proportionnelle	-0.00462		
VI	0.00002	Correction secondes	0.00002	Variation séculaire	0.00088		
VII	0.00018	Variation séculaire	0.00106	**Distance polaire brute**	**100.77931**		
VIII	0.00064	**équation centre**	**397.82433**	Perturbation Arg III	0.00165		
IX	0.00064			Perturbation Arg VII	0.00034		
X	0.00006	1840 (table IX)	0.01712	Perturbation Arg IX	0.00054		
XI	0.00017	24.09.45	-0.00289	**Distance polaire**	**100.78184**		
XII	0.00004	**Grande inégalité**	**0.01423**	**Le Verrier**	**100.78152**		
Longitude orbite	9.11508			**Miriade**	**100.77891**		
Réduction écliptique	0.00223	Rayon vecteur Arg I	20.01413	log rayon	1.30184		
Longitude héliocentrique	**9.11731**	Partie proportionnelle	-0.00178	log cos lambda	9.99996		
Longitude Terre	1.9522	Variation séculaire	-0.00046	complément log R	9.99903		
Angle au soleil S	7.16511	Rayon elliptique	20.01189	log tanM	21.30083		
T+U	192.8349	arg II	0.00548	M	1.52082		
(T+U)/2	96.4174	arg III	0.01138	(T-U)/2	96.04108		
(T-U)/2	96.0411	arg IV	0.00641				
T	192.4585	arg VI	0.00093				
Longitude Soleil	201.9522	arg VII-VI	0.00129				
Longtidue géocentrique	**9.4937**	**Rayon vecteur**	**20.0374**				
Le Verrier	**9.4932**	**Rayon Le Verrier**	**20.0383**				
Miriade	**9.4846**	**Rayon Miriade**	**20.0463**				

FIGURE 4.19 – Feuille de calcul pour déterminer la longitude héliocentrique, la longitude géocentrique, le rayon vecteur et la distance polaire d'Uranus le 24 septembre 1845 à partir des tables de Bouvard. La disposition est largement inspirée de l'exemple donné par Bouvard dans ses tables (p. XXIV et XXV) [Bouvard, 1821b]. Le 24/9 pour Le Verrier correspond au 25/9 pour Bouvard. L'unité de mesure pour les angles est le grade. Pour comparaison, on a ajouté les valeurs retournées par Miriade. Les chiffres romains renvoient aux tables de Bouvard (encadré 3, p. 35)

4.4.2 Autres exploitations possibles des équations de condition de Le Verrier

Les commentaires suivants reprennent les résultats donnés à la table 4.7. Les graphes correspondants aux 4 calculs se trouvent à la figure 4.20. On dispose des 279 équations de condition retenues par Le Verrier (*Herschel* p. 129−135) et on va sélectionner quelques groupements.

4.4.2.1 Utilisation seulement des équations anciennes

En appliquant la méthode des moindres carrés seulement aux 19 équations anciennes, on a trouvé (table 4.7) les valeurs suivantes pour la correction des éléments elliptiques d'Uranus :

$$\delta\varepsilon = -29''.6 \quad \delta n = -0''.67 \quad \delta e = -1''.9 \quad e\delta\varpi = -15''.9$$

En reportant dans les équations de condition, on voit que les résidus sont faibles pour les époques anciennes : cela correspond à l'ellipse que suivrait Uranus, une fois neutralisées les actions de Jupiter et de Saturne. On voit aussi nettement (fig. 4.20 (a)) l'action de Neptune, qui entre en jeu vers 1800 en accélérant Uranus dans un premier temps jusque vers 1825, puis en le ralentissant jusque vers 1845−1850. Ce tracé suggère la date de la conjonction Uranus−Neptune : autour de 1825 ? Ce graphe aurait permis de raccourcir la longueur des calculs initiaux de Le Verrier, puisqu'il montre nettement la date de la conjonction Soleil−Uranus−Neptune, date qui est l'objectif essentiel des méthodes visant à raccourcir les calculs de Le Verrier (voir méthode de Lyttleton ou de Brown au chapitre 9). Mais il aurait fallu savoir que la période 1690−1780 était une période avec une influence faible de Neptune, mettant en évidence l'orbite non perturbée d'Uranus, ce que l'on apprend seulement une fois l'objet trouvé.

4.4.2.2 Utilisation seulement des équations modernes

Avec uniquement les 260 observations modernes, on a trouvé pour les corrections :

$$\delta\varepsilon = 34''.4 \quad \delta n = -2''.9 \quad \delta e = 27''.8 \quad e\delta\varpi = -7''.7$$

Sans surprise, les résidus sont faibles après 1781, mais sont très importants (jusqu'à 250″) pour les années qui précèdent la découverte, ce qui explique l'impossibilité pour Bouvard de concilier observations anciennes et observations modernes dans une même théorie (fig. 4.20 (b))

4.4.2.3 Utilisation de toutes les équations de condition, anciennes et modernes

On applique les moindres carrés sur l'ensemble des 279 équations de condition, chacune considérée individuellement. On obtient les valeurs suivantes :

$$\delta\varepsilon = 4''.5 \quad \delta n = -0''.70 \quad \delta e = 15''.3 \quad e\delta\varpi = -15''.6$$

qui sont très éloignées des valeurs trouvées par Le Verrier, ce qui est normal.
On forme les résidus correspondants et on constate qu'ils sont bien partagés entre les observations anciennes et les plus récentes, ce qui est conforme à la méthode utilisée, mais ils sont globalement trop forts par rapport aux erreurs de mesure, ce qui justifie une fois de plus l'impossibilité de concilier l'ensemble des observations, anciennes et modernes (fig. 4.20 (c))

4.4.2.4 Utilisation seulement des 18 équations (4.16) de Le Verrier

Avec uniquement les 18 équations de Le Verrier de la page 147 de *Herschel* (reproduites fig. 4.16), regroupant des observations anciennes et modernes, on a trouvé

$$\delta\varepsilon = 0''.58 \quad \delta n = -0''.41 \quad \delta e = 6''.9 \quad e\delta\varpi = -19''.0$$

Le profil des résidus (fig. 4.20 (c)) est semblable à celui obtenu avec l'ensemble des 279 équations ; cela confirme la confiance qu'avait Le Verrier dans la représentativité de ces 18 équations, et cela montre aussi la qualité de la démarche de Le Verrier, qui n'est pas qu'un prodigieux calculateur.

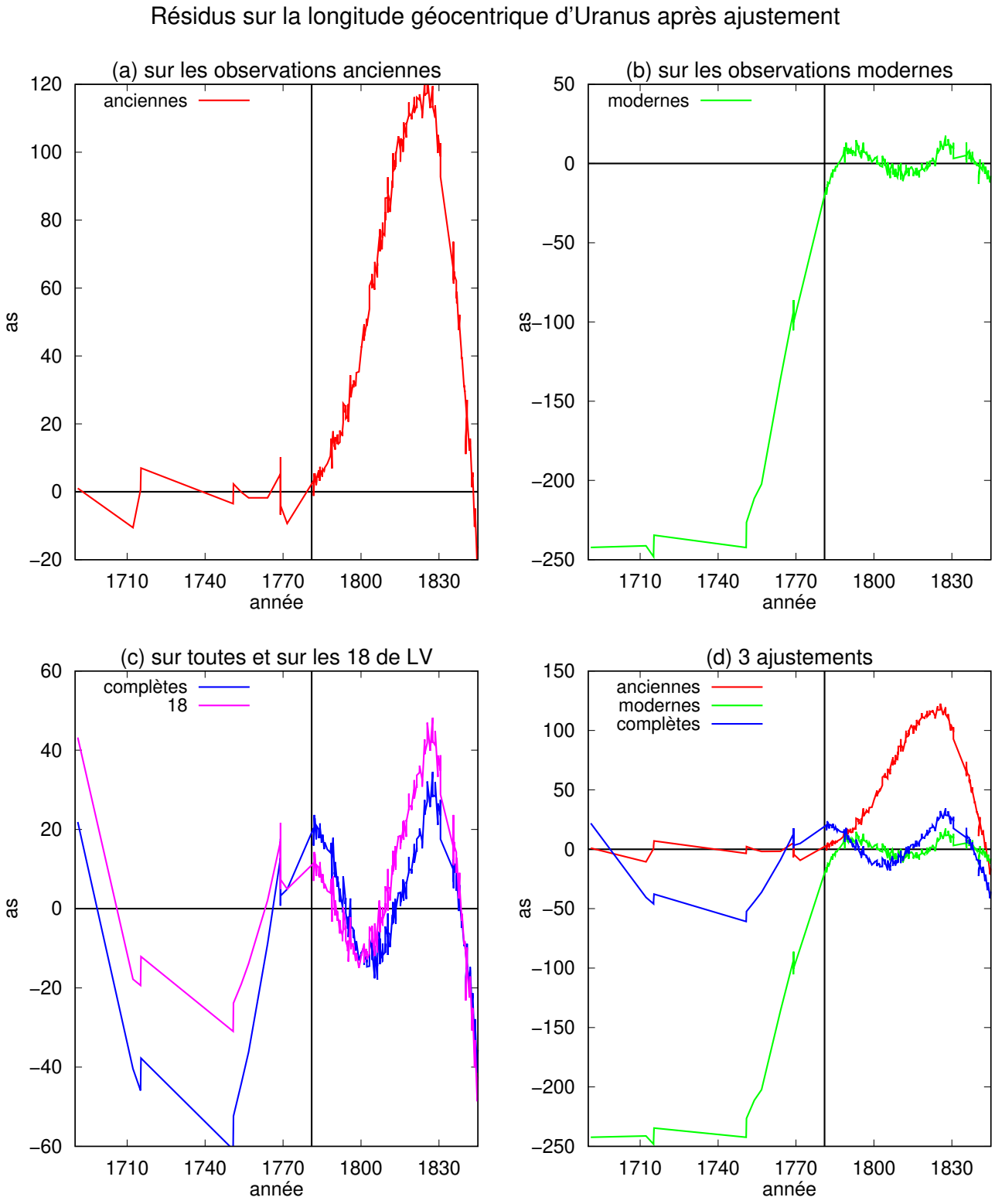


FIGURE 4.20 – Résidus dans les 279 équations de condition portant sur la longitude géocentrique d'Uranus quand on a ajusté les éléments d'Uranus sur les observations anciennes (a), les observations modernes (b), toutes les observations et les 18 équations sélectionnées par Le Verrier (c) et la superposition des trois (d). Le premier graphe met nettement en évidence la date de la conjonction Soleil−Uranus−Neptune (vers 1825). Le troisième, (c), montre très clairement la très bonne représentativité des 18 équations (4.16) formées par Le Verrier.

4.4.3 Comment interpoler les O–C à des dates régulières ?

4.4.3.1 Commentaires de J. B. Biot

Commençons par un commentaire de Biot, [Biot, 1847b], commentaire portant sur la troisième preuve de Le Verrier utilisant les 18 équations (4.16) et « qui a le mérite d'aller avec une grande intelligence au cœur de la démarche de Le Verrier » :

> On ne comprendra rien à la suite de ses calculs, [..] si l'on ne sait d'abord comment il a formé ce tableau de nombres (4.16), et pourquoi il peut l'employer en toute sécurité, comme type d'épreuve des résultats vrais ou faux, admissibles ou inadmissibles que ses tentatives lui présentent, ainsi qu'il le fait à chaque instant. Or c'est précisément là un point sur lequel il ne s'est que très peu expliqué ; de sorte qu'à moins de se résoudre à le croire sur parole, il faut tâcher d'éclaircir le mystère dont il lui a plu de se couvrir.

Biot décrit le principe général : l'interpolation, mais en soulignant le risque de reproduire les erreurs présentes dans les données interpolées. Il pense que Le Verrier a agi de façon plus fine :

> M. Le Verrier a très probablement employé quelque procédé plus sûr et plus pratique pour évaluer les erreurs des longitudes héliocentriques d'Uranus, calculées par les tables provisoires à des époques exactement équidistantes, et pour former un usage si habile. Mais il s'est borné à dire qu'il l'a obtenu par une méthode d'interpolation convenable, ce qui ne découvre nullement son secret.

Biot déclare qu'il est parvenu à reconstruire le tableau des erreurs en longitude héliocentrique de Le Verrier, en combinant un tracé graphique avec le calcul, mais son travail est introuvable.

4.4.3.2 Interpolation graphique

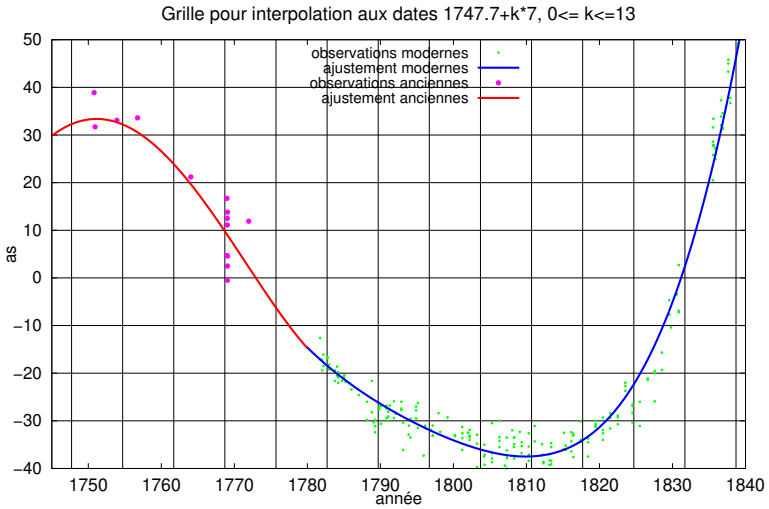


FIGURE 4.21 – Écarts $O-C$ en longitudes géocentriques pour la tranche 1745−1840. Les positions retenues par Le Verrier ont été placées (points verts et rouges) et un lissage à l'ordre 4 a été effectué graphiquement sur les observations anciennes et indépendamment sur les observations modernes. Ce tracé peut permettre d'interpoler les écarts pour la progression arithmétique $1747.7 + 7k$. Un graphe semblable avait été tracé par Danjon en 1946 [Danjon, 1946a].

Le Verrier dispose de données d'observation sur la tranche 1690−1845 à des dates irrégulières. Il voudrait avoir des estimations à des dates régulièrement espacées de 7 ans, car cela correspond

sur l'orbite d'Uranus à des positions séparées en moyenne de 30°. Ses données présentent des lacunes, dans les observations anciennes, mais aussi entre 1830 et 1835. Il pourrait s'aider d'un graphe comme celui de la fig. 4.21, graphe qui avait été fait par Danjon en 1946 [Danjon, 1946a]. En fait, en examinant de près les manuscrits de Le Verrier, on voit qu'il procède à des ajustements algébriques : interpolations, et même extrapolations quand c'est nécessaire. Les calculs sont faits au début du cahier n° 4 (p. 11−20). Pour les dates modernes, à part pour 1831.7, il n'y a pas de difficultés particulières : ce sont des interpolations classiques avec des données qui encadrent la date visée.

4.4.3.3 Calcul de l'écart pour 1831.7 par Le Verrier

Le seul problème pour les dates modernes est, comme l'a signalé Biot, pour 1831.7, car il n'y a pas de données d'observations entre 1830 et 1835. Voici comment Le Verrier procède :
Il fait la moyenne des 14 observations allant du 28/7/1827 au 11/11/1830, ce qui donne :
date moyenne : 1829.43 ; écart moyen : -10″.15 (borne inférieure)
Pour la borne supérieure, c'est un plus compliqué :
Il fait la moyenne des 4 observations du mois d'août 1835 (qui entourent l'opposition) :
date moyenne : 1835.62 ; écart moyen : 27″.7
et la moyenne des 3 observations du mois d'août 1836 (qui entourent l'opposition aussi) :
date moyenne : 1836.66 ; écart moyen : 32″.7
Ensuite il prend la moyenne pondérée de ces deux derniers calculs, qui donne :
date moyenne : 1836.14 ; écart moyen : 30″.2 (borne supérieure)
Enfin par simple interpolation linéaire entre ces deux bornes : 1829.43 et 1836.14 il trouve un écart de 3″.4 en 1831.7.

4.4.3.4 Calcul pour 1747.7, 1754.7 et 1761.7 par Le Verrier

Ici c'est le peu de données et leur espacement irrégulier dans le temps qui posent problème. Voici comment Le Verrier contourne la difficulté :
Il fait la moyenne des 3 observations 14/10/1750, 3/12/1750 et 3/12/1753 :
date moyenne : 1751.87 ; écart moyen : 34″.3
Il fait la moyenne des deux observations du 27/9/1756 et du 15/1/1764 :
date moyenne : 1760.39 ; écart moyen : 26″.7
Il fait la moyenne des 10 observations allant du 27/12/1768 au 18/12/1771 :
date moyenne : 1768.83 ; écart moyen : 9″.83

Ensuite il fait un ajustement quadratique sur les 3 résultats précédents pour trouver :
1747.7 : 34″.8 ; 1754.7 : 32″.8 ; 1761.7 : 24″.7

J'ai refait les calculs que l'on peut deviner à la lecture des manuscrits, et comme d'habitude, les calculs de Le Verrier sont corrects.
On voit la diversité des différentes approches et on lève un peu le voile sur ce que Biot et Le Verrier appelaient une "interpolation convenable".

4.4.3.5 Comparaison des valeurs trouvées par Le Verrier et les interpolations graphiques

Pour finir, on rassemble les valeurs trouvées par Le Verrier via ses différentes interpolations et celles trouvées par interpolation graphique à partir du graphe fig. 4.21. Les valeurs suivent la même tendance, mais il y a des écarts non négligeables.

TABLE 4.9 – Valeurs trouvées par Le Verrier pour les écarts en longitude héliocentrique aux dates $1747.7 + 7k$ et valeurs trouvées avec TRIP en utilisant le graphe tracé fig. 4.21

Date	LV	TRIP	Date	LV	TRIP	Dates	LV	TRIP
1690.98	-63.1		1768.7	10.0	9.7	1810.7	-35.3	-31.9
1712.25	-59.9		1775.7	-3.7	-0.6	1817.7	-32.3	-30.7
1715.23	-64.6	-65.1	1782.7	-17.4	-11.0	1824.7	-24.5	-19.8
1747.7	34.8	29.2	1789.7	-28.6	-21.5	1831.7	3.4	0.3
1754.7	32.8	28.8	1796.7	-29.8	-31.8	1838.7	50.0	38.6
1761.7	24.7	19.4	1803.7	-33.6	-32.2	1845.7	110.5	106.0

4.4.4 Algorithme pour former les équations de condition de Le Verrier de la page 149 de *Herschel*

Il est facile de dire : pour résoudre ce système (4.16) de 18 équations à 4 inconnues, on sélectionne 4 équations, que l'on résout ; on reporte les valeurs trouvées pour les 4 inconnues dans les 14 autres équations...
Mais la programmation effective de telles opérations est un peu moins simple ; voici comment on peut programmer de telles manipulations.

On explique le détail des opérations à programmer pour passer des équations (4.16) de la page 147 de *Herschel* (fig. 4.16 de la thèse) aux équations (4.17) de la page 149 de *Herschel* (et fig. 4.17 de la thèse) i.e. pour éliminer les corrections des éléments elliptiques d'Uranus.

On pose $\Delta_c = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon \\ \delta n \\ \delta e \\ e\delta\varpi \end{bmatrix}$ et $PS = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{bmatrix}$

Les 18 équations de condition retenues par Le Verrier (p. 147 de *Herschel* et fig. 4.16 de la thèse) peuvent s'écrire symboliquement :

$$A_{18} * \Delta_c + B_{18} + Cor = 0 \tag{4.14}$$

où A_{18} est une (18,4)−matrice, B_{18} un vecteur à 18 composantes et Cor représente les écarts entre les longitudes calculées et mesurées.

$$B_{18} = [-63.1 : -59.9.... : 110.5] \quad \text{et} \quad Cor = [(1) : (2) : P... : (14) : S].$$

On ne conserve que les lignes 3, 8, 13, 18 et on note A_4 et B_4 les matrices extraites à partir de ces lignes respectivement de A_{18} et B_{18} ; les 4 équations de condition extraites sur ces lignes peuvent s'écrire :

$$A_4 * \Delta_c + B_4 + I_4 * PS = 0 \tag{4.15}$$

où I_4 est la matrice unité d'ordre 4. On détermine Δ_c par $\Delta_c = -A_4^{-1} * PS - A_4^{-1} B_4$
On reporte cette valeur dans les 18 équations de condition (équation (4.16)) ; on obtient :

$$A_{18} * (-A_4^{-1} * PS - A_4^{-1} * B_4) + B_{18} + Cor = 0 \tag{4.16}$$

On pose $\boxed{A_{184} = -A_{18} * A_4^{-1}}$ et $\boxed{B_{184} = -A_{18} * A_4^{-1} * B_4 + B_{18}}$.
Les équations de condition s'écrivent alors

$$A_{184} * PS + B_{184} + Cor = 0 \tag{4.17}$$

Ces formules sont programmées dans `EliminationCondition.t` (§ D.1.2 de l'annexe).

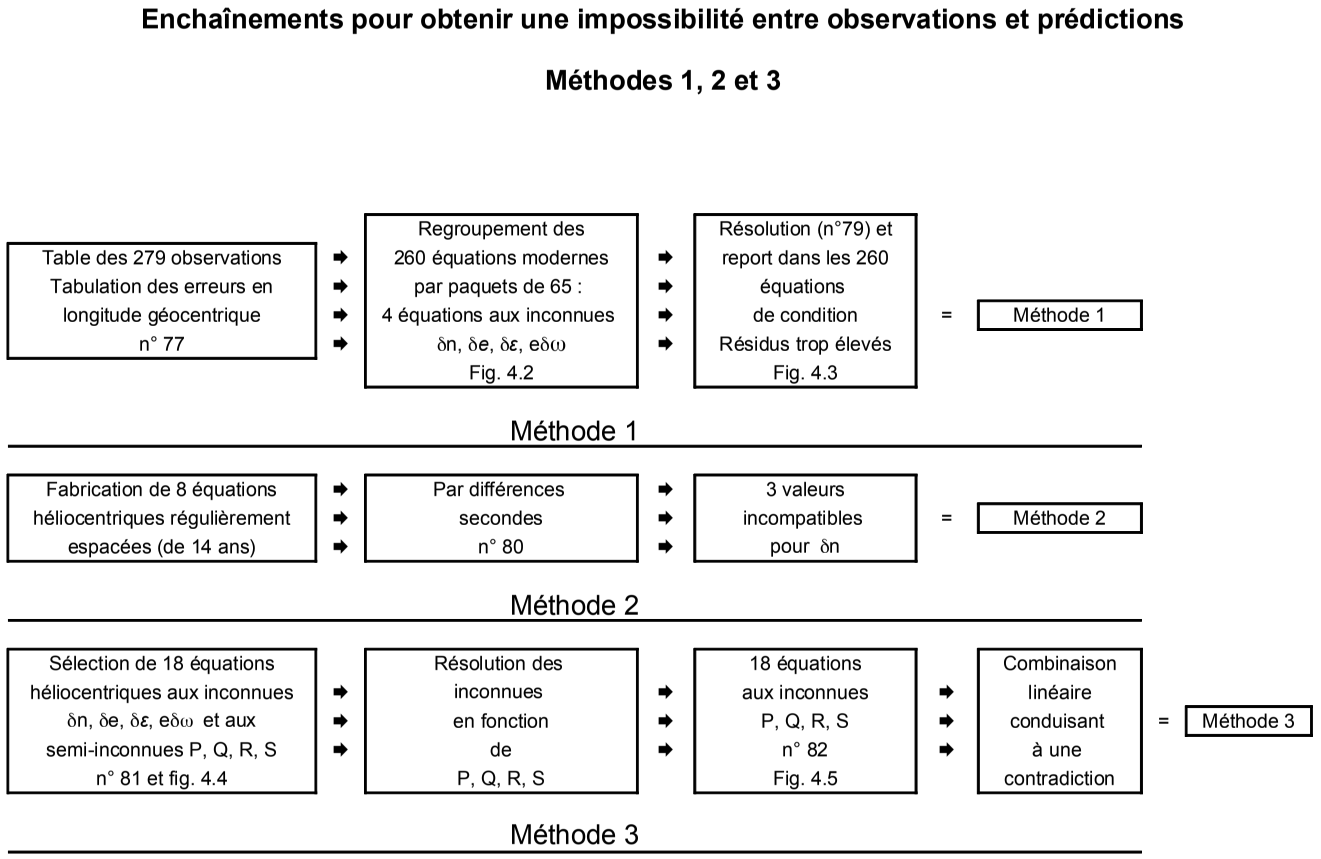


FIGURE 4.22 – Enchaînement des différents calculs menant aux 3 contradictions échafaudées par Le Verrier pour prouver l'incompatibilité entre observations et prédictions par sa nouvelle théorie

Chapitre 5

À LA RECHERCHE DE LA PLANÈTE PERTURBATRICE

Objectifs

Présentation On reprend ici les calculs de Le Verrier qui aboutissent à une première localisation de la planète qui perturbe Uranus (sections 1, 2, 3). Pour faire ses premiers calculs, Le Verrier avait placé cette planète perturbatrice au double de la distance d'Uranus ; c'était une hypothèse assez logique pour l'époque, s'appuyant sur la loi de Titius-Bode (voir encadré 12, p. 168), et de toutes façons, une hypothèse sur la distance de la planète perturbatrice était indispensable pour pouvoir amorcer les calculs.
On examine ensuite les prédictions que l'on obtiendrait en choisissant d'autres rapports des demi-grands axes (section 4).
On examine enfin si chercher une orbite circulaire au lieu d'une orbite elliptique aurait simplifié les calculs (section 5).

Sommaire

5.1 Quelle peut être la cause des irrégularités dans le mouvement d'Uranus ? . . . **168**
5.1.1 Énumération de causes possibles . . . 168
5.1.2 Hypothèse d'une planète perturbatrice . . . 170
5.2 Détermination de la planète inconnue . . . **173**
5.2.1 Forme de l'équation de condition en longitude héliocentrique . . . 173
5.2.2 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Première méthode. . . . 174
5.2.3 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Deuxième méthode. . . . 176
5.2.4 Essai de détermination de la longitude de l'époque à partir de la masse de la planète perturbatrice . . . 183
5.3 Aboutissement de cette première recherche : formule pour la longitude vraie . . . **189**
5.4 Prolongements : résultats pour d'autres valeurs de α . . . **191**
5.4.1 Bilan des calculs précédents . . . 191
5.4.2 Stratégies possibles . . . 192
5.4.3 Comparaison des solutions optimales pour des valeurs de α qui donnent des solutions acceptables par au moins deux méthodes . . . 193
5.4.4 Solutions optimales avec un balayage pour α . . . 194
5.5 Recherche d'orbites circulaires en adaptant les calculs de Le Verrier . . . **195**

5.5.1 Utilisation de conditions portant sur la longitude héliocentrique 195
5.5.2 Utilisation de conditions portant sur la longitude géocentrique 197

Loi de Titius-Bode (encadré 12)

La loi de Titius-Bode, souvent raccourcie en loi de Bode, est une relation empirique donnant les valeurs des demi-grands axes des orbites des principales planètes. Elle avait été énoncée en 1766 par le mathématicien Johann Daniel Titius [a], qui avait trouvé une relation numérique entre les distances moyennes des planètes au Soleil. La 'loi' a été publiée et popularisée par Johann Elert Bode [b] dans un mémoire de 1772 [Bode, 1772]. Cette loi donne une expression pour le demi-grand axe a_n de la n^e planète du Système solaire :

$$a_n = 0.4 + 0.3 * 2^{n-1} \quad \text{en posant Vénus=1, Terre=2...} \quad (\text{distance en } au) \tag{5.1}$$

Cette 'loi' avait acquis une grande crédibilité avec la découverte d'Uranus ($n = 7$, $a_7 = 19.6$, proche de la valeur exacte 19.2), et la découverte de Céres en 1801 ($n = 4$, $a_4 = 2.8$, proche de la valeur exacte, 2.77), comblant ainsi la lacune entre Mars et Jupiter.
La planète suivant Uranus, si la loi était une vraie loi, aurait été à une distance moyenne de :

$$0.4 + 0.3 * 2^7 = 38.8\, au$$

Malheureusement pour Adams et Le Verrier, la loi n'est plus valable pour Neptune, dont la distance moyenne au Soleil est seulement de 30.1 *au*.

a. Johann Daniel Titius (1729−1796). Astronome et physicien allemand.
b. Johann Elert Bode (1747−1826). Astronome allemand qui dirigea l'Observatoire de Berlin de 1785 à 1826. Il étudia des représentations artistiques des constellations [Bode, 1801].

5.1 Quelle peut être la cause des irrégularités dans le mouvement d'Uranus ?

5.1.1 Énumération de causes possibles

La nouvelle théorie d'Uranus que vient d'établir Le Verrier ne lui permet malheureusement [1] pas d'expliquer les irrégularités de son mouvement. Il faut donc trouver une cause à ces irrégularités. Au n° 85 de *Herschel*, Le Verrier passe en revue quelques causes possibles avancées par certains de ses prédécesseurs ou de ses contemporains pour expliquer les irrégularités du mouvement d'Uranus :
– résistance de l'éther
– gros satellite qui accompagnerait Uranus
– impact avec une comète,
– loi de la gravitation universelle non applicable à cette distance du Soleil
– planète encore inconnue au delà d'Uranus

Le Verrier précise que ces différentes hypothèses ont été émises sans aucune justification (*Herschel*, p. 151) :

> Chacun, il est vrai, suivait simplement le penchant de son imagination, sans apporter aucune considération à l'appui de son assertion [...]
> Je le répète, toutes ces opinions ont été émises sous la forme d'hypothèses, et sans qu'on ait cherché à étayer aucune d'elles par des considérations positives. On ne doit pas s'en étonner. Le problème du mouvement d'Uranus n'avait pas été traité avec une rigueur telle, qu'il fût démontré qu'on ne pourrait pas parvenir à le résoudre, par la considération des forces actuellement connues.

1. On rappelle son espoir avant de se lancer dans le calcul des perturbations : il espérait que « ses nouvelles formules de perturbations permettraient de rétablir l'harmonie entre le calcul et l'observation » (*Herschel*, p. 89).

Sa première affirmation doit être nuancée : il y a eu par exemple une thèse intitulée *Sur la résistance de l'éther au mouvement des planètes*, soutenue en 1843 par G. Lecaplain [Lecaplain, 1843]. Lecaplain conclut à une lente diminution de la longueur du demi-grand axe accompagnée d'une accélération du moyen mouvement. Mais dans sa thèse, aucune référence explicite n'est faite à Uranus, ou à la comète d'Encke, dont la période décroît régulièrement.
Voici le commentaire de Biot sur l'action supposée de l'éther [Biot, 1847b] :

> On avait supposé que les irrégularités d'Uranus pouvaient être produites par la rencontre d'un milieu résistant d'une densité très faible, qui serait répandu dans les espaces célestes. L'existence de cet éther avait été suggéré par les changements qu'on a observés dans les durées des révolutions de plusieurs comètes périodiques.

Il faut rappeler que Le Verrier avait pris des notes [2] en 1837 sur l'action d'un éventuel éther, notes conservées dans le dossier Ms 1063 (31) de la bibliothèque de l'Observatoire. Il avait refait les calculs théoriques et avait conclu à une diminution du demi-grand axe a de $4\pi na^2$ à chaque révolution, où n est un coefficient homogène à l'inverse d'une distance, coefficient dépendant de la nature et du diamètre de la planète ainsi que de la densité de l'éther. Le Verrier termine en disant : « La résistance de l'éther n'a point été remarquée sur les planètes. Mr Encke a cru la découvrir sur la comète de 1200 jours ». Et voici ce qu'il écrit dans *Herschel*, p. 152 :

> Je ne saurais croire [...] à l'influence de la résistance de l'éther ; résistance dont on a à peine entrevu des traces dans le mouvement des corps de la densité la plus faible ; c'est à dire dans les circonstances qui seraient les plus propres à manifester l'action de ce fluide.

Et quant à l'influence de l'éther sur la comète de Gambart (lettre du 3 mai 1846 à Gautier) :

> Quant à la résistance de l'éther, il n'y a rien du tout de démontré : et surtout après ce qui paraît être arrivé [séparation de la comète en deux] à la comète de Gambart [ou Biela], on ne peut considérer les conséquences qu'on voudrait déduire que comme une mauvaise plaisanterie.

Plus généralement, Le Verrier pense que le statut des irrégularités des mouvements d'Uranus a changé depuis qu'il a établi avec une grande précision les inégalités auxquelles Uranus est soumis : « le moment est venu de chercher à démêler la direction et la grandeur de la force qui les produit [les irrégularités] » (*Herschel* p. 152).
Puis au n° 86, Le Verrier réfute une à une les 4 premières hypothèses [3] :
On a vu qu'il ne croyait pas à la résistance de l'éther, car aucune action n'avait été notée sur des objets de faible densité.
Le Verrier écarte aussi l'hypothèse d'un gros satellite :

> car les oscillations qui se manifesteraient dans la marche d'Uranus affecteraient une très courte période ; et c'est précisément le contraire qui résulte des observations. Les inégalités qui nous occupent se développent avec une très grande lenteur. Il est impossible de recourir à l'hypothèse actuelle, d'autant plus que le satellite devrait être effectivement très gros, et n'aurait pu échapper aux observateurs.

Il envisage l'hypothèse d'une rencontre rapprochée avec une comète :

2. L'origine des notes semble être Tomes III et IV de Laplace.

3. Cette analyse semble avoir été faite au moment de la rédaction de *Herschel*. Elle ne se trouve pas dans les manuscrits. Peut-être que Le Verrier a privilégié d'emblée l'hypothèse d'une planète inconnue, qui ouvrait la perspective de calculs intéressants et totalement nouveaux ?

> Serait-ce une comète, qui, tombant sur Uranus, aurait, à une certaine époque, changé brusquement la grandeur et la direction de son mouvement ? J'ai déjà dit qu'on satisfaisait assez bien au mouvement de la planète entre 1781 et 1820, sans le secours d'aucune force extraordinaire. Cette remarque, qui semble prouver que la force perturbatrice n'a point exercé d'influence sensible durant cette période, serait assez conforme à l'hypothèse actuelle d'une altération brusque du mouvement de la planète. Mais alors, la période de 1781 à 1820 pourrait se lier naturellement, soit à la série des observations antérieures, soit à la série des observations postérieures, et ne serait compatible qu'avec l'une d'elles. Or c'est ce qui n'a pas lieu. On peut prouver que la série intermédiaire ne peut s'accorder, d'une part, avec les anciennes observations, et, de l'autre, avec les nouvelles.

Il rappelle enfin que ce n'est pas la première fois que l'on essaie d'expliquer des inégalités non complètement comprises par une altération de la loi de la gravitation universelle, explication qui est pour lui un dernier recours : voir l'extrait de cours au § 1.4.1 pour constater la croyance absolue de Le Verrier en l'universalité de la gravitation universelle.
Et voici l'opinion de Biot au sujet de la mise en cause de la gravitation universelle [Biot, 1847a] :

> quant à la loi physique de l'attraction même, elle n'était nullement mise en péril par les irrégularités inexpliquées des mouvements d'Uranus. Comment aurait-on pu croire qu'elle devint inexacte à cette distance du Soleil, après que la comète de Halley ait été vue, du temps de Clairaut et de nos jours, revenir d'une distance double, en concordance si précise avec le calcul des attractions qui la sollicitaient ? Ce doute pouvait exister dans les premières épreuves, lorsque le mouvement du périgée lunaire, calculé avec une approximation insuffisante, s'obtenait par Newton, d'abord, puis par Clairault [sic] et d'Alembert, moitié moindre qu'on ne l'observe ; ou quand Euler se trompant sur le sens d'un signe algébrique, accusait l'attraction d'intervertir les effets de Jupiter sur Saturne, qu'elle lui donnait tels qu'ils sont en réalité. Mais ces calculs, mieux faits, se trouvant aujourd'hui reproduire minutieusement les phénomènes, l'objection se change en preuve confirmative.

Rappelons [4] que Bessel, très préoccupé par les irrégularités des mouvements d'Uranus, avait aussi envisagé une modification de la loi de Newton : l'idée de Bessel était que l'action gravitationnelle dépendait de la nature physique de chaque corps. Bessel s'appuie sur les réductions d'observations faites par son élève Flemming, mais son manuscrit [Bessel, 1823] est resté inachevé : Bessel ne semble pas être parvenu à résoudre le problème des mouvements d'Uranus à l'aide de cette loi de Newton modifiée, et il semble avoir abandonné, peu après, l'idée d'une attraction sélective.
Airy, lui-même, était prêt à remettre en cause la loi de Newton si les modifications de l'orbite d'Uranus effectuées par Adams pour réduire les écarts en longitude ne corrigeaient pas en même temps les écarts dans le rayon vecteur (lettre à Adams du 5/11/1845, [Airy, 1846]).

5.1.2 Hypothèse d'une planète perturbatrice

Ayant éliminé toutes les hypothèses précédentes, Le Verrier peut essayer l'influence d'un corps agissant de manière continue sur Uranus ; et il ajoute [5] aussitôt (*Herschel* p. 153) :

« Mais cette hypothèse est-elle plus plausible que les précédentes ? ».
« Est-il possible d'assigner la place que cette planète devrait occuper dans le ciel ? »

Il commence au n° 87 de *Herschel* par essayer de localiser une telle planète :

> Elle ne peut pas être en deçà de Saturne, parce qu'elle la dérangerait plus qu'elle ne dérange Uranus, ce qui n'est pas le cas. Elle ne peut se situer entre Saturne et Uranus, car il faudrait

4. Ces informations au sujet de Bessel proviennent de ([Sheehan, 2021], p. 192.).
5. Le Verrier écrit ceci **après** la découverte de Neptune ; en tout cas il n'y en a pas de trace d'une telle interrogation dans les manuscrits. Le Verrier sait bien ménager son suspense.

> la placer beaucoup plus près de l'orbite d'Uranus que de celle de Saturne ; et dès lors, sa masse devrait être assez petite pour ne produire sur Uranus que des perturbations qui sont, en définitive, peu considérables...
> La planète sera donc située au delà d'Uranus. Nous ne devons pas supposer qu'elle en soit voisine, car sa masse serait très petite et on tomberait dans les mêmes impossibilités que précédemment. Ce sera donc bien loin au delà d'Uranus, que nous pourrons espérer de découvrir ce nouveau corps dont la masse sera assez considérable. En observant la disposition des autres planètes, il serait naturel [6] d'admettre que le nouveau corps est deux fois plus loin du Soleil qu'Uranus. Cette idée peut être confirmée par la considération suivante : il n'est pas possible de la placer à une très grande distance, à une distance triple de celle d'Uranus au Soleil par exemple. Il faudrait, en effet, dans cette hypothèse, attribuer [7] à cette planète une masse très considérable ; la grande distance à laquelle elle se trouverait à la fois de Saturne et d'Uranus rendrait ses actions, sur ces deux planètes, comparables entre elles, et il ne serait point possible d'expliquer les inégalités d'Uranus sans développer dans Saturne des perturbations très sensibles, et dont il n'existe point de traces.

Contrairement à ce que lui a été parfois reproché ([Liais, 1865], [Airy, 1846]), Le Verrier ne se précipite pas sur les calculs. Il raisonne ici en physicien, en analysant les rapports de force possibles. Il ne faut pas oublier que Le Verrier avait commencé une carrière (prometteuse) de chimiste et qu'il s'y était montré très bon expérimentateur (voir § 1.1.1).
Il suppose aussi que, dans une première approximation, l'inclinaison sur l'écliptique est très faible, car c'est le cas pour toutes les planètes connues. Il pose alors la question [8] sous la forme suivante (*Herschel*, n° 87) :

> **Est-il possible que les inégalités d'Uranus soient dues à l'action d'une planète, située dans l'écliptique, à une distance moyenne double de celle d'Uranus ? Et, s'il en est ainsi, où est actuellement située cette planète ? Quelle est sa masse ? Quels sont les éléments de l'orbite qu'elle parcourt ?**

Voici ce que dit Biot sur le choix du rapport 2 dans les distances moyennes [Biot, 1847a], p. 43 :

> Nous trouverons plus loin que M. Le Verrier l'a employée [la loi de Titius-Bode], pour obtenir un premier aperçu de la distance à laquelle on pouvait présumer l'existence d'une planète immédiatement supérieure à Uranus ; mais je soupçonne qu'il a eu encore, pour cela, d'autres motifs plus abstraits, que je craindrais de ne pouvoir pas indiquer sans indiscrétion.

Malheureusement, Biot n'en dit pas plus ; quels pouvaient être « ces motifs plus abstraits » ? Une croyance en une esthétique mathématique, liée à une progression géométrique de raison 2 ? Est-ce que Le Verrier pensait, comme les Pythagoriciens, que le Système solaire était gouverné par les nombres ?
Enfin, Le Verrier précise le problème posé en rappelant (*Herschel*, n° 88) que

> les expressions numériques des perturbations ne pourraient se déduire immédiatement des observations que si l'on connaissait les valeurs rigoureuses des éléments de l'ellipse décrite par Uranus autour du Soleil ; et ces éléments, à leur tour, ne peuvent se déterminer exactement, si l'on ne connaît pas la quantité des perturbations. On le voit, il est impossible de scinder en deux parties distinctes la recherche des éléments d'Uranus et celle des éléments du corps qui le trouble...

6. C'est la "loi" (empirique) de Titius et Bode ; voir encadré 12, p.168. Mais Le Verrier ne mentionne pas explicitement ce nom : il préfère utiliser le mot "naturel". Est-ce que "naturel", sous la plume de Le Verrier, signifie en fait mathématique ? Lire un peu plus bas le commentaire que fait Biot sur ce choix de Le Verrier.
7. La masse optimale de la planète perturbatrice en fonction du demi-grand axe est estimée au § 8.2.
8. On ne trouve pas une telle formulation dans les manuscrits, mais Le Verrier a dû se poser cette question intérieurement au moment où il se lançait à la recherche d'une planète inconnue.

En effet, les écarts résiduels observés, de l'ordre de $0-100''$ ne correspondent pas à la perturbation directe de Neptune, qui est de l'ordre de $900''$. Ce que l'on observe, c'est l'action directe de Neptune réduite par la correction, en fait erronée, des éléments orbitaux d'Uranus, en particulier par celle de l'excentricité (voir plus de détails au § 9.4, s'appuyant sur le modèle LLY).
Et de conclure, avant de se lancer dans les calculs :

> Il n'y a qu'une route à suivre : il faudra former les expressions des perturbations, dues au nouveau corps, en fonction de sa masse et des éléments inconnus de l'ellipse qu'il décrit ; il faudra introduire ces perturbations dans les coordonnées d'Uranus, calculées au moyen des éléments inconnus de l'ellipse que cette planète parcourt autour du Soleil. En égalant les coordonnées ainsi obtenues aux coordonnées observées, on prendra pour inconnues, dans les équations qui en résulteront, non seulement les éléments de l'ellipse décrite par Uranus, mais encore les éléments de l'ellipse décrite par la planète troublante dont nous cherchons la position.

Le Verrier pose donc le problème très clairement, mais de façon ambitieuse. En effet, tel qu'il l'a abordé, le problème a 4+5=9 inconnues : les 4 corrections à apporter aux éléments d'Uranus : δn, $\delta\varepsilon$, δe, $e\delta\varpi$, les 4 éléments de la planète inconnue n', ε', e', ϖ' ainsi que sa masse m'. En fait, pour le but cherché, c'est à dire localiser la planète perturbatrice, il n'y a qu'une valeur à connaître (puisque la planète est supposée rester au voisinage de l'écliptique) : la longitude héliocentrique (ou géocentrique) vraie à la fin de ses calculs, afin de permettre une détection visuelle. Les éléments de la planète inconnue ne sont pas indispensables a priori dans un premier temps. On aurait pu imaginer que Le Verrier commence à ajuster une orbite circulaire, ainsi que l'avait fait Adams dans son premier calcul, ce qui aurait réduit à 7 le nombre d'inconnues. En fait, on verra au § 5.5 que l'on ne simplifie pas beaucoup le problème et surtout qu'il n'est pas possible de déterminer une valeur optimale pour le demi-grand axe. Et d'autre part, Le Verrier, dès ses premiers travaux, avait pris l'habitude d'aborder sans étapes intermédiaires le problème général. Les différentes conclusions pour la recherche d'orbites circulaires seront reprises au chapitre 11. Plus tard, J. Herschel [Herschel, 1849], Brown [Brown, 1931], R. Lyttleton [Lyttleton, 1960] et d'autres essaieront d'inventer des simplifications dans la méthode utilisée par Le Verrier : voir le chapitre 9 pour une présentation détaillée de ces méthodes.
Le programme de Le Verrier est clair, les idées sont bien en place et c'est exactement la démarche qu'il va adopter, mais la route sera très longue. Est-ce qu'au moment où il commence cette recherche, Le Verrier a conscience de l'ampleur des calculs qui l'attendent ? À l'époque où il envisage ce programme, il n'a rempli [9] 'que' le cahier n° 2. Il lui en reste 5 autres à remplir, et peut-être aussi de nombreuses feuilles de calculs auxiliaires, aujourd'hui disparues. Il a écrit (*Herschel*, n° 85) :

> Je ne me dissimule pas les écueils dont est semée la route que je vais actuellement parcourir. Plus d'une fois, des obstacles imprévus m'auraient fait renoncer [10] à mon entreprise, si je n'avais pas eu la profonde conviction de son utilité.

Le Verrier aboutira à un moment à une impasse dans le calcul de la position de la planète perturbatrice (voir § 5.2.4.4) et Biot [Biot, 1847c] écrit p. 36 :

> Cette conclusion [aboutir à une impasse] était dure à admettre et M. Le Verrier ne s'y résigna point, mais il la retourna dans son esprit pendant trois mois, sans faire un pas de plus.

On constate donc la profonde détermination de Le Verrier, détermination qui l'accompagnera toute sa vie, malgré l'emprise progressive de la maladie ; il veut aller jusqu'au bout de sa tâche :

9. Ce cahier contient déjà 325 pages de calculs denses ; quelques unes sont reproduites au chapitre 3.
10. Voir plus de détails au § 5.2.4.2.

Uranus d'abord, le Soleil ensuite, Mercure, puis les éphémérides précises de toutes les planètes du Système solaire. Les tables de Le Verrier (partiellement revues par Gaillot) sont tellement précises qu'elles seront utilisées jusqu'en 1984 pour établir les éphémérides officielles publiées par le Bureau des Longitudes [Berthier, 2021].

5.2 Détermination de la planète inconnue

5.2.1 Forme de l'équation de condition en longitude héliocentrique

Le Verrier recalcule (*Herschel*, n° 90−91) les expressions littérales des perturbations de la longitude vraie exercées par une planète extérieure, expressions présentes dans la *Mécanique céleste* [Laplace, 1802].
Il estime (*Herschel* n° 92) que, dans une première approximation, on peut négliger les perturbations dépendant des puissances supérieures ou égales à 2 des excentricités. Il montre (*Herschel* n° 93) aussi que l'on peut [11] négliger dans un premier temps les inégalités séculaires. Il ne retient donc, dans un premier temps, que les inégalités indépendantes des excentricités et celles de degré 1 par rapport aux excentricités. Il choisit les notations suivantes pour exprimer la perturbation de la longitude héliocentrique δv exercée par une planète extérieure :

$$\boldsymbol{\delta v = A.m' + H.m'h' + L.m'l'} \tag{5.2}$$

avec m' masse la planète perturbatrice, $h' = e' \cos \varpi'$, $l' = e' \sin \varpi'$ et les valeurs suivantes pour les coefficients A, H, L :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = &+ \mathrm{P}^{(1)} \sin\{(n'-n)t + \varepsilon' - \varepsilon\} \\
&+ \mathrm{P}^{(2)} \sin\{(2n'-2n)t + 2\varepsilon' - 2\varepsilon\} \\
&+ \mathrm{P}^{(3)} \sin\{(3n'-3n)t + 3\varepsilon' - 3\varepsilon\} \\
&+ \mathrm{N}^{(1)} \sin(n't + \varepsilon' - \varpi) \\
&+ \mathrm{N}^{(2)} \sin\{(2n'-n)t + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi\} \\
&+ \mathrm{N}^{(3)} \sin\{(3n'-2n)t + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = &- \mathrm{M}^{(1)} \cos(n't + \varepsilon') \\
&- \mathrm{M}^{(2)} \cos\{(2n'-n)t + 2\varepsilon' - \varepsilon\} \\
&- \mathrm{M}^{(3)} \cos\{(3n'-2n)t + 3\varepsilon' - 2\varepsilon\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = &+ \mathrm{M}^{(1)} \sin(n't + \varepsilon') \\
&+ \mathrm{M}^{(2)} \sin\{(2n'-n)t + 2\varepsilon' - \varepsilon\} \\
&+ \mathrm{M}^{(3)} \sin\{3n'-2n)t + 3\varepsilon' - 2\varepsilon\};
\end{aligned}$$

FIGURE 5.1 – Pour plus de clarté, on notera par la suite les coefficients A', H', L' au lieu de A, H, L, puisque ces coefficients sont relatifs à la planète perturbatrice

Les valeurs explicites des coefficients, notés $P^{(i)}$, $M^{(i)}$, $N^{(i)}$ par Le Verrier ne dépendent que du rapport α des demi-grands axes et sont donnés aux n° 91−92 de *Herschel*. Voici par exemple l'expression de $P^{(1)}$:

$$P^{(1)} = \frac{\alpha}{(1-\tilde{\gamma})^2} \left\{1 - \frac{4}{\tilde{\gamma}(2-\tilde{\gamma})}\right\} \left(\alpha - b_{1/2}^{(1)}\right) - \frac{2\alpha}{\tilde{\gamma}(1-\tilde{\gamma})(2-\tilde{\gamma})} \left(\alpha - \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}\right) \tag{5.3}$$

où $\tilde{\gamma} = \frac{n'}{n} = \alpha^{\frac{3}{2}}$ et $b_{1/2}^{(1)}$ est un coefficient de Laplace, dépendant seulement de α.

11. Les arguments ne sont pas toujours détaillés ; il écrit au n° 93 : « ces variations sont très faibles, ainsi qu'on peut s'en assurer ». Je n'ai pas trouvé de trace de cette vérification dans le cahier n° 4 des manuscrits (consacré à cette première approche). Et le calcul des coefficients des inégalités séculaires n'apparaît que dans le cahier n° 5, consacré à la deuxième approche. Il semblerait donc que ces remarques aient été faites a posteriori.

L'expression de la perturbation δv de la longitude héliocentrique vraie exercée par la planète inconnue sur la planète intérieure dépend donc linéairement de m', $m'h'$, $m'l'$, de α par l'intermédiaire des coefficients $N^{(i)}$, $P^{(i)}$, $M^{(i)}$ et de ε' par l'intermédiaire de ses lignes trigonométriques. Il est important de noter que pour une observation donnée (i.e. t connu), les coefficients A', H', L' intervenant dans δv ne dépendent que de ε', la longitude de l'époque de la planète inconnue, car Le Verrier (ainsi qu'Adams) a dû fixer une valeur a priori pour α, avant de pouvoir commencer le moindre calcul. Plus précisément, en développant les diverses lignes trigonométriques, on constate que ces coefficients A', H', L' ne dépendent que de :

$$\sin\varepsilon',\ \sin 2\varepsilon',\ \sin 3\varepsilon',\ \cos\varepsilon',\ \cos 2\varepsilon',\ \cos 3\varepsilon'$$

On rappelle que le but premier de tous les calculs de Le Verrier est de déterminer une valeur optimale pour ε'.

Le Verrier se place à l'instant t d'une observation d'Uranus ; il ajoute à la perturbation due à la planète extérieure la modification de la longitude quand on ajuste les éléments d'Uranus et égale cette somme à l'écart entre la longitude *héliocentrique* O observée à l'instant t et la longitude héliocentrique calculée C à ce même instant t (à partir de la théorie en vigueur). Cette équation est appelée équation de condition (portant sur la longitude héliocentrique) à l'instant t.

Forme de l'équation de condition portant sur la longitude héliocentrique à l'instant t

$$\underbrace{R_h(t)\,\delta\varepsilon + S_h(t)\,\delta n + Q_h(t)\,\delta e + P_h(t)\,e\delta\varpi}_{\text{ajustement des éléments elliptiques d'Uranus}} + \underbrace{A'\,m' + H'\,m'h' + L'\,m'l'}_{\text{perturbation exercée par la planète inconnue}} = \underbrace{O-C}_{\text{écart}}$$

Il importe de souligner toute la difficulté de cette forme d'équations : il y a 7 inconnues intervenant linéairement ($\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$, m', $m'h'$, $m'l'$), et deux (α et ε') de façon non linéaire et compliquée, ε' dans des expressions trigonométriques ($\sin k\varepsilon', \cos k\varepsilon'$) par l'intermédiaire de A', H', L' et α par l'intermédiaire des coefficients de Laplace.

Comme Le Verrier a retenu 279 observations d'Uranus (partiellement reproduites à la figure 4.12, et dans *Herschel* p. 129−135), il dispose de 279 équations de condition portant sur la longitude héliocentrique ; il ne détaille pas dans *Herschel* ces 279 équations individuelles, il va les grouper de différentes manières, comme ce sera précisé dans les paragraphes suivants.

Devant l'impossibilité d'effectuer un calcul entièrement algébrique [12], Le Verrier sera amené à faire un balayage systématique sur ε' pour la première approximation et dans l'approximation finale, une interpolation sur α.

On peut reformuler de façon plus calculatoire la question existentielle posée par Le Verrier au n° 87 de *Herschel* (et reproduite p. 171 de la thèse) :

Peut-on choisir les 4+5 inconnues du problème de façon à satisfaire de façon admissible (i.e. dans la limite des erreurs d'observation) toutes les équations de condition ?

5.2.2 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Première méthode.

Dans une *première méthode*, décrite au n° 96 de *Herschel*, Le Verrier reprend le système de 8 équations héliocentriques qu'il avait déjà envisagé au n° 80 (à l'occasion de la méthode 2, § 4.3.2.2) et correspondant à des observations régulièrement espacées de $T = 14$ ans dans le temps afin de profiter de simplifications trigonométriques liées au fait que $3T = 42 \simeq$ demi-période de révolution d'Uranus. Il complète chacune de ces 8 équations en ajoutant la perturbation théorique exercée par la planète inconnue. Il fait subir à ces 8 équations le même traitement

12. Car les expressions analytiques des coefficients de Laplace sont beaucoup trop compliquées, et ε' intervient aussi de façon très compliquée.

qu'au n° 80, à savoir : former les différences secondes, ajouter la première et la quatrième de ces différences secondes, ajouter la deuxième et la cinquième et enfin la troisième et la sixième. Il obtient les 3 équations suivantes, plus simples, mais dépendant de ε' :

$$8\ \Sigma K \sin^2\frac{k\tau}{2}\cos\frac{3k\tau}{2}\sin\left(\gamma+\frac{5k\tau}{2}\right)+12'',0=0,$$
$$8\ \Sigma K \sin^2\frac{k\tau}{2}\cos\frac{3k\tau}{2}\sin\left(\gamma+\frac{7k\tau}{2}\right)-37'',9=0,$$
$$8\ \Sigma K \sin^2\frac{k\tau}{2}\cos\frac{3k\tau}{2}\sin\left(\gamma+\frac{9k\tau}{2}\right)-91'',3=0.$$

FIGURE 5.2 – Système d'équations final pour la 1ère méthode, après avoir pris les différences secondes des équations de départ, puis les avoir ajoutées 2 par 2. L'expression symbolique de δv utilisée par Le Verrier est $\delta v = \sum K \sin(kt+\gamma)$, avec des coefficients K (non détaillés par Le Verrier) dépendant de α et les arguments γ dépendant de ε' ; τ vaut 14 ans

Voici ce qu'il constate (*Herschel* n° 100) :

> Toutes les inconnues s'obtiendront donc aisément dès que l'on connaîtra la valeur de ε'. Quant à cette dernière, la complication avec laquelle elle se présente dans les équations du problème, ne paraît pas permettre qu'on puisse arriver à une équation finale qui la renferme seule, et dont la simplicité soit assez grande pour qu'on trouve des avantages à la former. Il faudra donc recourir en définitive à des essais successifs. On attribuera à ε' des valeurs particulières ; on en déduira, au moyen des formules précédentes, différents systèmes de valeurs pour toutes les inconnues, et l'on examinera quel est celui de ces systèmes qui satisfait aux huit équations du n° 96.

Ensuite, il écrit simplement « Examinons, par exemple le cas où l'on prendrait ε' égal à 270° décimaux ». Il détermine alors les valeurs numériques des coefficients de ses 3 équations aux trois variables m', $m'h'$ et $m'l'$ pour cette valeur de ε' et en éliminant les deux dernières, il trouve [13] $m' = 2.11$.
En reprenant la démarche de Le Verrier, je trouve $m' = 1.99$, car le système est mal conditionné et les erreurs d'arrondi ont une assez grande incidence sur le résultat.
Remarquons que l'on a initialement (avant les transformations effectuées par Le Verrier) un système linéaire de 8 équations à 7 inconnues (δn, $\delta\varepsilon$, δe, $e\delta\varpi$, $m'h'$, $m'l'$, m') ; Le Verrier procède par élimination ; en fait il faudrait plutôt utiliser la méthode des moindres carrés, qui donnerait $m' = 2.30$.
Deuxième remarque : pourquoi Le Verrier choisit-il cette valeur de 270° décimaux, soit 243° sexagésimaux, valeur proche du résultat obtenu par sa deuxième méthode ? A-t-il repris ce calcul après avoir mis en œuvre cette deuxième méthode ? En effet, dans les manuscrits, le calcul pour cette première méthode s'achève sans véritable conclusion, et Le Verrier aborde alors la deuxième méthode.
Autre question : pourquoi dans cette première méthode, ne procède-t-il pas à un balayage sur ε', comme il l'a annoncé (voir citation plus haut (*Herschel* n° 100, "essais successifs")) et comme il le fera dans la méthode suivante ?
Avec cette valeur de ε' ($\varepsilon' = 270°$) et après toutes les transformations effectuées pour éliminer toutes les variables autres que m', le coefficient a dans la dernière équation, qui est de la forme $am' + b = 0$, est beaucoup plus petit que les coefficients correspondants dans les équations de départ et donc entaché d'une erreur relative importante, qui rend la valeur de m' peu fiable [14] ;

13. L'unité choisie par Le Verrier pour la masse est le 1/10 000 de la masse solaire.
14. Le Verrier a raison de se méfier de ce calcul, car la valeur finale qu'il trouvera pour m' est $m' = 1.07$.

il écrit en conclusion de cette première méthode inaboutie : « il est ... indispensable de former les équations de condition avec toute la rigueur possible » (*Herschel* n° 100).
C'est peut-être à cause de cette perte de précision numérique qu'il ne pousse pas plus loin le calcul par cette première méthode, et qu'il passe sans véritable conclusion à la méthode suivante.

5.2.3 Recherche des éléments elliptiques de la planète troublante. Deuxième méthode.

5.2.3.1 Principe de la deuxième méthode

Pour cette deuxième approche [15] (*Herschel*, n° 101), Le Verrier reprend les 18 équations (4.16) écrites au n° 81 de *Herschel* en supposant cette fois que les symboles (1), (2)..., (14), P, Q, R et S représentent maintenant [16], à chaque époque, la somme de la perturbation de la longitude héliocentrique exercée par la planète inconnue (fonction de m', $m'h'$ et $m'l'$, voir équation (5.2)) et de l'erreur *exacte* (et inconnue bien sûr !) dans les observations. Il détermine, comme cela a été fait au n° 82 de *Herschel* les valeurs des corrections des éléments elliptiques d'Uranus en fonction de P, Q, R, S, valeurs qu'il reporte dans les 18 équations (4.16). Il obtient un système de 14 équations entre P, Q, R, S et les 3 paramètres de la planète troublante, système formellement identique à celui écrit à la fig. 4.17.
Voici comment il va combiner ces différentes équations (*Herschel*, p. 161) :

> Si l'on considère attentivement les quatre équations correspondantes à 1817, 1824, 1831, 1838, on s'apercevra que chacune d'elles n'a pas une signification bien différente de celle de l'équation moyenne ; nous formerons donc avec leur somme une équation unique, plus exacte que les équations particulières, et qui pourra concourir avec avantage à la détermination de m', $m'h'$, $m'l'$ en fonction de ε'.
> Les quatre équations correspondantes à 1782, 1789, 1796 et 1803 étant dans le même cas que les précédentes, leur somme fournira sensiblement la *seconde* équation dont nous avons besoin.
> Pour obtenir la troisième, je ferai la somme des équations correspondantes à 1747, 1754, 1761 et 1768 [mais il ne constate pas de similarité particulière entre ces 4 équations, contrairement aux deux groupes précédents] ; en sorte que nous aurons, en définitive, pour déterminer m', $m'h'$, $m'l'$, les relations

Époques moyennes.	
1758	$7{,}721\,P - 8{,}094\,Q - 6{,}113\,R + 10{,}499\,S - \{(3) + (4) + (5) + (6)\} + 805''{,}5 = 0,$
1793	$3{,}896\,P - 8{,}311\,Q - 5{,}737\,R + 6{,}154\,S + \{(7) + (8) + (9) + (10)\} + 552{,}1 = 0,$
1828	$3{,}311\,P - 5{,}515\,Q - 0{,}752\,R + 6{,}960\,S - \{(11) + (12) + (13) + (14)\} + 605{,}4 = 0.$

FIGURE 5.3 – Forme des équations obtenues par Le Verrier en faisant la somme 4 par 4 de 12 équations, groupées comme indiqué dans le tableau ci-dessous, (*Herschel*, n° 101)

On résume les combinaisons faites par Le Verrier :

référence 1758	somme des équations 1747, 1754, 1761, 1768
référence 1793	somme des équations 1782, 1789, 1796, 1803
référence 1828	somme des équations 1817, 1824, 1831, 1838

15. Tous les calculs et les résultats indiqués dans ce paragraphe se trouvent au début du cahier n° 4 des manuscrits.

16. Au n° 81, ces notations représentaient seulement les erreurs d'observation, puisque l'on ne supposait pas alors l'existence d'une planète perturbatrice.

Du fait de la similarité – signalée plus haut par Le Verrier – des 4 équations au sein des deux derniers groupes, Le Verrier estime que si ces 3 équations sont satisfaites, toutes les équations comprises entre 1775 et 1845 le seront : il pense donc que ces 3 équations (les 3 de la fig. 5.3) assurent une bonne représentativité des 11 équations comprises entre 1775 et 1845 (*Herschel* p. 165) :

> Il suffira, en général, que ces équations [les 3 de la figure 5.3] soient satisfaites, pour que toutes celles qui sont comprises entre 1775 et 1845 le soient aussi.

Il ajoute à la même page :

> Mais on n'en peut pas dire autant des équations comprises entre 1715 et 1775. Il sera nécessaire, quand on aura calculé les valeurs de m', $m'h'$, $m'l'$ correspondantes à une valeur de ε', d'examiner si ces expressions satisfont aux équations de 1747 et de 1690. Ce sera le *criterium* qui servira à reconnaître la valeur de ε' qu'on doit adopter dans la solution cherchée.

Il lui reste donc à examiner le degré de satisfaisabilité des équations anciennes. Pour cela, il écrit les équations de la fig. 5.3 sous la forme suivante, les deuxièmes membres étant obtenus en faisant passer les incertitudes [17] P, Q, R, S dans ces deuxièmes membres.

$$\begin{cases} a\,.\,m' + b\,.\,m'h' + c\,.\,m'l' = d, \\ a'.\,m' + b'.\,m'h' + c'.\,m'l' = d', \\ a''.\,m' + b''.\,m'h' + c''.\,m'l' = d''. \end{cases} \qquad \begin{aligned} d &= -805,''5 - 7,711\,P' + 8,094\,Q', \\ d' &= -552,1 - 3,896\,P' + 8,311\,Q', \\ d'' &= -605,4 - 3,311\,P' + 5,515\,Q'. \end{aligned}$$

FIGURE 5.4 – Forme symbolique retenue pour les équations de la figure 5.3

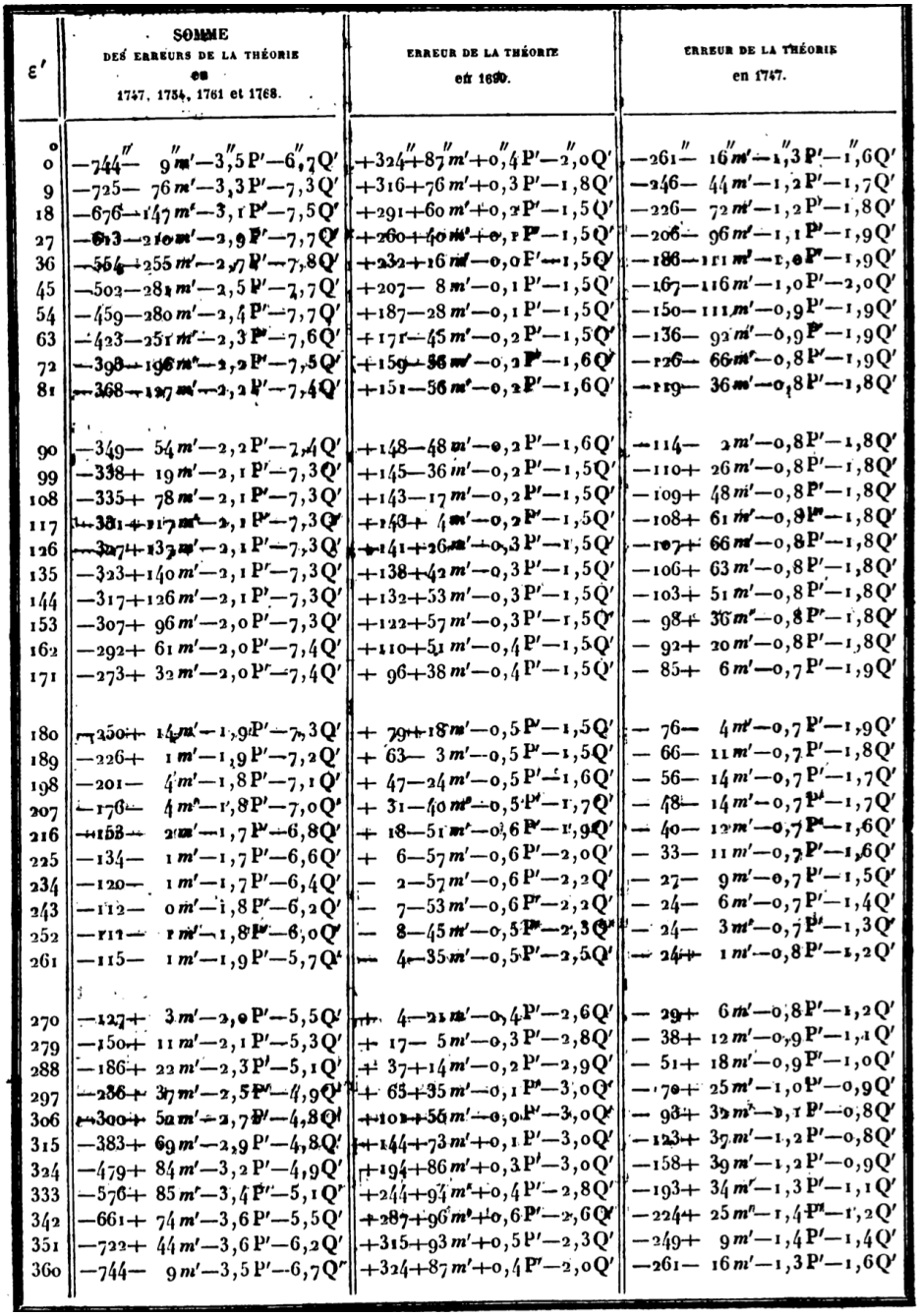
De plus, il suppose que les deux observations les plus récentes (de 1810 et de 1845) sont suffisamment précises pour négliger R' et S'. C'est une hypothèse un peu surprenante, mais qui simplifie beaucoup les calculs. Il n'est pas difficile dans les programmes de garder les 4 paramètres, ce qui sera fait plus loin ; et on constatera que leur présence améliore la qualité de la solution.
Le Verrier donne p. 169 de *Herschel* des expressions explicites pour a, b, ..., c'' comme combinaisons linéaires de lignes trigonométriques de ε' (une expression de a est donnée au § 5.2.4.3). Il fait ensuite varier ε' avec un pas de 9°. Pour chaque valeur de ε', il résout les deux dernières équations de (5.4) par rapport à $m'h'$ et $m'l'$ et reporte le résultat dans la 1ère équation de (5.4) (qui n'a pas servi), dans l'équation de condition pour 1690 (qui n'a pas servi) et dans l'équation de 1747 (qui a déjà servi, associée à d'autres) et qui seront qualifiées par la suite d'*erreurs* ; Le Verrier considère ces trois équations comme des équations test pour les observations anciennes. Il a donc 40 × 3 'erreurs', détaillées p. 183 de *Herschel*. La reproduction de cet ensemble de systèmes calculés par Le Verrier se trouve à la figure 5.5, page 179.
J'ai formé ces mêmes équations avec TRIP en partant des équations (4.16), en les regroupant, comme indiqué par Le Verrier, puis en remplaçant les inconnues $(m'h', m'l')$ par leurs expressions en fonction du couple d'inconnues (P', Q') ; ces équations se trouvent à la table 5.1, page suivante.

17. L'ajout de l'apostrophe ($P \to P'$) n'est pas expliqué dans les manuscrits.

TABLE 5.1 – Équations de condition que j'ai obtenues avec TRIP après substitution des corrections des valeurs des éléments elliptiques ($\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$) en fonction de P', Q', m' dans (4.16), puis en suivant la démarche de Le Verrier, c'est à dire élimination de $m'h'$ et $m'l'$ (démarche indiquée à la page précédente). Les résultats sont très voisins de ceux de Le Verrier, donnés p. 183 de *Herschel* et reproduits fig. 5.5, page suivante

ε'	Somme des erreurs en 1747, 1754, 1761, 1768	Erreur en 1690	Erreur en 1747
0°	−738 −11 m' −3.5 P' −6.8 Q'	+323 +87 m' +0.4 P' −2.0 Q'	−252 −17 m' −1.4 P' −1.6 Q'
9	−715 −77 m' −3.3 P' −7.3 Q'	+312 +76 m' +0.3 P' −1.8 Q'	−244 −45 m' −1.3 P' −1.8 Q'
18	−668 −146 m' −3.1 P' −7.6 Q'	+288 +61 m' +0.2 P' −1.6 Q'	−226 −73 m' −1.2 P' −1.9 Q'
27	−608 −209 m' −2.9 P' −7.7 Q'	+260 +41 m' +0.1 P' −1.5 Q'	−205 −96 m' −1.1 P' −2.0 Q'
36	−548 −255 m' −2.7 P' −7.8 Q'	+232 +17 m' −0.0 P' −1.5 Q'	−183 −111 m' −1.1 P' −2.0 Q'
45	−492 −278 m' −2.5 P' −7.8 Q'	+207 −7 m' −0.1 P' −1.5 Q'	−164 −115 m' −1.0 P' −2.0 Q'
54	−446 −274 m' −2.4 P' −7.7 Q'	+187 −29 m' −0.1 P' −1.5 Q'	−147 −108 m' −1.0 P' −2.0 Q'
63	−408 −244 m' −2.3 P' −7.6 Q'	+171 −45 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−134 −91 m' −0.9 P' −1.9 Q'
72	−379 −193 m' −2.2 P' −7.5 Q'	+161 −54 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−124 −65 m' −0.9 P' −1.9 Q'
81	−358 −126 m' −2.2 P' −7.4 Q'	+154 −55 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−117 −35 m' −0.9 P' −1.9 Q'
90	−345 −53 m' −2.2 P' −7.4 Q'	+150 −48 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−112 −3 m' −0.9 P' −1.9 Q'
99	−336 +18 m' −2.2 P' −7.3 Q'	+148 −35 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−109 +25 m' −0.9 P' −1.8 Q'
108	−332 +78 m' −2.2 P' −7.3 Q'	+147 −16 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−108 +48 m' −0.9 P' −1.8 Q'
117	−329 +119 m' −2.2 P' −7.3 Q'	+147 +5 m' −0.2 P' −1.6 Q'	−107 +62 m' −0.9 P' −1.8 Q'
126	−327 +140 m' −2.2 P' −7.3 Q'	+145 +26 m' −0.3 P' −1.6 Q'	−107 +66 m' −0.9 P' −1.8 Q'
135	−324 +138 m' −2.1 P' −7.3 Q'	+141 +43 m' −0.3 P' −1.5 Q'	−105 +62 m' −0.9 P' −1.8 Q'
144	−317 +120 m' −2.1 P' −7.3 Q'	+134 +55 m' −0.3 P' −1.5 Q'	−102 +50 m' −0.9 P' −1.9 Q'
153	−307 +91 m' −2.1 P' −7.4 Q'	+124 +58 m' −0.3 P' −1.5 Q'	−98 +35 m' −0.9 P' −1.9 Q'
162	−292 +59 m' −2.0 P' −7.4 Q'	+111 +53 m' −0.4 P' −1.5 Q'	−92 +19 m' −0.8 P' −1.9 Q'
171	−273 +31 m' −2.0 P' −7.3 Q'	+96 +39 m' −0.4 P' −1.5 Q'	−84 +4 m' −0.8 P' −1.9 Q'
180	−250 +10 m' −1.9 P' −7.3 Q'	+79 +19 m' −0.5 P' −1.5 Q'	−76 −6 m' −0.8 P' −1.9 Q'
189	−226 −2 m' −1.9 P' −7.2 Q'	+62 −2 m' −0.5 P' −1.6 Q'	−66 −12 m' −0.8 P' −1.8 Q'
198	−202 −6 m' −1.8 P' −7.1 Q'	+45 −23 m' −0.5 P' −1.7 Q'	−57 −15 m' −0.7 P' −1.8 Q'
207	−178 −6 m' −1.8 P' −7.0 Q'	+30 −40 m' −0.6 P' −1.8 Q'	−48 −14 m' −0.7 P' −1.7 Q'
216	−157 −3 m' −1.8 P' −6.8 Q'	+16 −51 m' −0.6 P' −1.9 Q'	−40 −13 m' −0.7 P' −1.7 Q'
225	−139 −0 m' −1.8 P' −6.6 Q'	+5 −57 m' −0.6 P' −2.0 Q'	−33 −10 m' −0.7 P' −1.6 Q'
234	−125 +1 m' −1.8 P' −6.4 Q'	−3 −57 m' −0.6 P' −2.1 Q'	−28 −8 m' −0.7 P' −1.5 Q'
243	−116 +2 m' −1.8 P' −6.2 Q'	−7 −53 m' −0.5 P' −2.2 Q'	−25 −5 m' −0.7 P' −1.4 Q'
252	−113 +2 m' −1.9 P' −6.0 Q'	−8 −45 m' −0.5 P' −2.4 Q'	−23 −2 m' −0.8 P' −1.4 Q'
261	−117 +3 m' −1.9 P' −5.8 Q'	−5 −34 m' −0.5 P' −2.5 Q'	−25 +2 m' −0.8 P' −1.3 Q'
270	−130 +6 m' −2.0 P' −5.5 Q'	+3 −20 m' −0.4 P' −2.6 Q'	−30 +7 m' −0.8 P' −1.2 Q'
279	−153 +13 m' −2.2 P' −5.3 Q'	+17 −4 m' −0.3 P' −2.8 Q'	−38 +13 m' −0.9 P' −1.1 Q'
288	−189 +24 m' −2.3 P' −5.1 Q'	+38 +15 m' −0.2 P' −2.9 Q'	−52 +20 m' −0.9 P' −1.0 Q'
297	−240 +38 m' −2.5 P' −4.9 Q'	+66 +35 m' −0.1 P' −3.0 Q'	−70 +26 m' −1.0 P' −1.0 Q'
306	−306 +53 m' −2.8 P' −4.8 Q'	+102 +55 m' −0.0 P' −3.0 Q'	−95 +32 m' −1.1 P' −0.9 Q'
315	−390 +68 m' −3.0 P' −4.8 Q'	+147 +72 m' +0.1 P' −3.0 Q'	−125 +36 m' −1.2 P' −0.9 Q'
324	−486 +79 m' −3.3 P' −4.9 Q'	+197 +86 m' +0.3 P' −2.9 Q'	−160 +37 m' −1.3 P' −1.0 Q'
333	−584 +81 m' −3.5 P' −5.2 Q'	+247 +94 m' +0.4 P' −2.8 Q'	−196 +34 m' −1.4 P' −1.1 Q'
342	−669 +70 m' −3.6 P' −5.7 Q'	+290 +96 m' +0.4 P' −2.5 Q'	−227 +24 m' −1.4 P' −1.2 Q'
351	−723 +39 m' −3.6 P' −6.3 Q'	+317 +93 m' +0.4 P' −2.3 Q'	−246 +7 m' −1.4 P' −1.4 Q'

Les valeurs trouvées pour les coefficients de ces équations sont proches de celles de Le Verrier, mais il y a quelques décalages non négligeables par rapport aux valeurs trouvées par Le Verrier ; de plus, dans son calcul, il arrondit, de façon inhabituelle, certains coefficients.



ε′	SOMME DES ERREURS DE LA THÉORIE en 1747, 1754, 1761 et 1768.	ERREUR DE LA THÉORIE en 1690.	ERREUR DE LA THÉORIE en 1747.
°			
0	−744″ − 9″m′ − 3″,5 P′ − 6″,7 Q′	+324″ + 87″m′ + 0″,4 P′ − 2″,0 Q′	−261″ − 16″m′ − 1″,3 P′ − 1″,6 Q′
9	−725 − 76 m′ − 3,3 P′ − 7,3 Q′	+316 + 76 m′ + 0,3 P′ − 1,8 Q′	−246 − 44 m′ − 1,2 P′ − 1,7 Q′
18	−676 − 147 m′ − 3,1 P′ − 7,5 Q′	+291 + 60 m′ + 0,2 P′ − 1,5 Q′	−226 − 72 m′ − 1,2 P′ − 1,8 Q′
27	−613 − 210 m′ − 2,9 P′ − 7,7 Q′	+260 + 40 m′ + 0,1 P′ − 1,5 Q′	−206 − 96 m′ − 1,1 P′ − 1,9 Q′
36	−564 − 255 m′ − 2,7 P′ − 7,8 Q′	+232 + 16 m′ − 0,0 P′ − 1,5 Q′	−186 − 111 m′ − 1,0 P′ − 1,9 Q′
45	−502 − 281 m′ − 2,5 P′ − 7,7 Q′	+207 − 8 m′ − 0,1 P′ − 1,5 Q′	−167 − 116 m′ − 1,0 P′ − 2,0 Q′
54	−459 − 280 m′ − 2,4 P′ − 7,7 Q′	+187 − 28 m′ − 0,1 P′ − 1,5 Q′	−150 − 111 m′ − 0,9 P′ − 1,9 Q′
63	−423 − 251 m′ − 2,3 P′ − 7,6 Q′	+171 − 45 m′ − 0,2 P′ − 1,5 Q′	−136 − 92 m′ − 0,9 P′ − 1,9 Q′
72	−398 − 198 m′ − 2,2 P′ − 7,5 Q′	+159 − 56 m′ − 0,2 P′ − 1,6 Q′	−126 − 66 m′ − 0,8 P′ − 1,9 Q′
81	−368 − 127 m′ − 2,2 P′ − 7,4 Q′	+151 − 56 m′ − 0,2 P′ − 1,6 Q′	−119 − 36 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
90	−349 − 54 m′ − 2,2 P′ − 7,4 Q′	+148 − 48 m′ − 0,2 P′ − 1,6 Q′	−114 − 2 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
99	−338 + 19 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+145 − 36 m′ − 0,2 P′ − 1,5 Q′	−110 + 26 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
108	−335 + 78 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+143 − 17 m′ − 0,2 P′ − 1,5 Q′	−109 + 48 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
117	−331 + 117 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+143 + 4 m′ − 0,2 P′ − 1,5 Q′	−108 + 61 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
126	−327 + 132 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+141 + 26 m′ − 0,3 P′ − 1,5 Q′	−107 + 66 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
135	−323 + 140 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+138 + 42 m′ − 0,3 P′ − 1,5 Q′	−106 + 63 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
144	−317 + 126 m′ − 2,1 P′ − 7,3 Q′	+132 + 53 m′ − 0,3 P′ − 1,5 Q′	−103 + 51 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
153	−307 + 96 m′ − 2,0 P′ − 7,3 Q′	+122 + 57 m′ − 0,3 P′ − 1,5 Q′	− 98 + 36 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
162	−292 + 61 m′ − 2,0 P′ − 7,4 Q′	+110 + 51 m′ − 0,4 P′ − 1,5 Q′	− 92 + 20 m′ − 0,8 P′ − 1,8 Q′
171	−273 + 32 m′ − 2,0 P′ − 7,4 Q′	+ 96 + 38 m′ − 0,4 P′ − 1,5 Q′	− 85 + 6 m′ − 0,7 P′ − 1,9 Q′
180	−250 + 14 m′ − 1,9 P′ − 7,3 Q′	+ 79 + 18 m′ − 0,5 P′ − 1,5 Q′	− 76 − 4 m′ − 0,7 P′ − 1,9 Q′
189	−226 + 1 m′ − 1,9 P′ − 7,2 Q′	+ 63 − 3 m′ − 0,5 P′ − 1,5 Q′	− 66 − 11 m′ − 0,7 P′ − 1,8 Q′
198	−201 − 4 m′ − 1,8 P′ − 7,1 Q′	+ 47 − 24 m′ − 0,5 P′ − 1,6 Q′	− 56 − 14 m′ − 0,7 P′ − 1,7 Q′
207	−176 − 4 m′ − 1,8 P′ − 7,0 Q′	+ 31 − 40 m′ − 0,5 P′ − 1,7 Q′	− 48 − 14 m′ − 0,7 P′ − 1,7 Q′
216	−153 − 2 m′ − 1,7 P′ − 6,8 Q′	+ 18 − 51 m′ − 0,6 P′ − 1,9 Q′	− 40 − 12 m′ − 0,7 P′ − 1,6 Q′
225	−134 − 1 m′ − 1,7 P′ − 6,6 Q′	+ 6 − 57 m′ − 0,6 P′ − 2,0 Q′	− 33 − 11 m′ − 0,7 P′ − 1,6 Q′
234	−120 − 1 m′ − 1,7 P′ − 6,4 Q′	− 2 − 57 m′ − 0,6 P′ − 2,2 Q′	− 27 − 9 m′ − 0,7 P′ − 1,5 Q′
243	−112 − 0 m′ − 1,8 P′ − 6,2 Q′	− 7 − 53 m′ − 0,6 P′ − 2,2 Q′	− 24 − 6 m′ − 0,7 P′ − 1,4 Q′
252	−111 − 1 m′ − 1,8 P′ − 6,0 Q′	− 8 − 45 m′ − 0,5 P′ − 2,3 Q′	− 24 − 3 m′ − 0,7 P′ − 1,3 Q′
261	−115 − 1 m′ − 1,9 P′ − 5,7 Q′	− 4 − 35 m′ − 0,5 P′ − 2,5 Q′	− 24 + 1 m′ − 0,8 P′ − 1,2 Q′
270	−127 + 3 m′ − 2,0 P′ − 5,5 Q′	− 4 − 21 m′ − 0,4 P′ − 2,6 Q′	− 29 + 6 m′ − 0,8 P′ − 1,2 Q′
279	−150 + 11 m′ − 2,1 P′ − 5,3 Q′	+ 17 − 5 m′ − 0,3 P′ − 2,8 Q′	− 38 + 12 m′ − 0,9 P′ − 1,1 Q′
288	−186 + 22 m′ − 2,3 P′ − 5,1 Q′	+ 37 + 14 m′ − 0,2 P′ − 2,9 Q′	− 51 + 18 m′ − 0,9 P′ − 1,0 Q′
297	−236 + 37 m′ − 2,5 P′ − 4,9 Q′	+ 65 + 35 m′ − 0,1 P′ − 3,0 Q′	− 70 + 25 m′ − 1,0 P′ − 0,9 Q′
306	−300 + 52 m′ − 2,7 P′ − 4,8 Q′	+102 + 56 m′ − 0,0 P′ − 3,0 Q′	− 93 + 32 m′ − 1,1 P′ − 0,8 Q′
315	−383 + 69 m′ − 2,9 P′ − 4,8 Q′	+144 + 73 m′ + 0,1 P′ − 3,0 Q′	−123 + 37 m′ − 1,2 P′ − 0,8 Q′
324	−479 + 84 m′ − 3,2 P′ − 4,9 Q′	+194 + 86 m′ + 0,3 P′ − 3,0 Q′	−158 + 39 m′ − 1,2 P′ − 0,9 Q′
333	−576 + 85 m′ − 3,4 P′ − 5,1 Q′	+244 + 94 m′ + 0,4 P′ − 2,8 Q′	−193 + 34 m′ − 1,3 P′ − 1,1 Q′
342	−661 + 74 m′ − 3,6 P′ − 5,5 Q′	+287 + 96 m′ + 0,6 P′ − 2,6 Q′	−224 + 25 m′ − 1,4 P′ − 1,2 Q′
351	−722 + 44 m′ − 3,6 P′ − 6,2 Q′	+315 + 93 m′ + 0,5 P′ − 2,3 Q′	−249 + 9 m′ − 1,4 P′ − 1,4 Q′
360	−744 − 9 m′ − 3,5 P′ − 6,7 Q′	+324 + 87 m′ + 0,4 P′ − 2,0 Q′	−261 − 16 m′ − 1,3 P′ − 1,6 Q′

FIGURE 5.5 – 40 systèmes de 3 équations aux 3 inconnues m', P', Q' obtenus en faisant varier ε' avec un pas de 9° et en regroupant pour chaque valeur de ε' les 18 équations (4.17) sous la forme (5.4). Les mêmes équations, calculées avec TRIP, se trouvent à la page précédente (ce tableau provient de *Herschel* p. 183)

5.2.3.2 Détermination d'une longitude de l'époque ε' acceptable

Le Verrier se demande ensuite au n° 113 « si, pour des valeurs convenables et admissibles, attribuées à m', P', Q', on peut réduire ces trois erreurs à devenir inférieures aux erreurs des observations, pour une même valeur de ε' ».
Il examine ces 3 'erreurs' pour chacune des 40 valeurs de ε' et il constate qu'au moins une des

trois erreurs ne peut être rendue petite, sauf pour des valeurs de ε' comprises entre 243° et 252°, ou en élargissant un peu, entre 234° et 261°, ce qui sera confirmé par la table 5.2.
Voici comment il vérifie l'impossibilité : par exemple pour $\varepsilon' = 0°$, l'erreur dans la première équation (après division par 4, pour cause de somme de quatre années regroupées) est

$$-186 - 2.3\,m' - 0.9\,P' - 1.7\,Q'$$

« On réduira cette erreur à la plus petite valeur possible, en négligeant le terme en m', en supposant [18] $P' = -15''$ et $Q' = -10''$; elle ne s'abaissera cependant ainsi qu'à $-155''$, résultat tout à fait inadmissible » (*Herschel* p. 184).
Et il procède ainsi, destructivement, pour toutes les valeurs, sauf pour $\varepsilon' = 243°$ et $\varepsilon' = 252°$.
Par contre, pour montrer qu'une valeur est acceptable, par exemple $\varepsilon' = 252°$, il choisit $m' = 0.8$, $P' = -15''$ et $Q' = -10''$ et en reportant dans les équations, il ne restera que les erreurs suivantes :

$$\text{en 1758 : } -6''\text{ ; en 1690 } -13''\text{ ; en 1747 : } -2''$$

Il procède ainsi, par tâtonnements, pour essayer de réduire au maximum les écarts théoriques ; il constate que, partant de 0°, les écarts, grands au départ, diminuent assez régulièrement pour devenir « très petits pour $\varepsilon' = 243°$ ou $\varepsilon' = 252°$ avant d'augmenter à nouveau à partir de 270° ».
Il peut conclure (*Herschel* p. 185−186) :

> **Qu'il n'y a dans l'écliptique qu'une seule région dans laquelle on puisse placer la planète perturbatrice, de manière à rendre compte des mouvements d'Uranus et que la longitude moyenne de cette planète devait être, au 1er janvier 1800, de 243° à 252°.**
> C'est déjà, si je ne me trompe, une grande présomption en faveur de la vérité de l'hypothèse que nous avons faite d'une planète perturbatrice, qu'on ne puisse lui assigner qu'une seule place dans l'écliptique. En disant que le problème n'est susceptible que d'une solution, j'entends qu'il n'y a pas deux régions distinctes du ciel que l'on puisse choisir à volonté pour y placer l'astre troublant à une époque déterminée.

Le Verrier doit être soulagé d'obtenir un tel résultat, qui était loin d'être gagné d'avance. En effet, d'une part les perturbations exercées par Neptune sur Uranus sont relativement faibles et d'autre part, la résolution d'un problème inverse – trouver la cause à partir des effets produits – n'avait jamais été accomplie auparavant, du moins pour un problème d'une telle ampleur. Un spécialiste comme Airy, consulté par le révérend Hussey sur cette question, lui répondra (lettre du 23 novembre 1834, reproduite dans [Airy, 1846]) :

> If we are certain that there were any extraneous action, I doubt much the possibility of determining the place of the planet which produced it. I am sure it could not be done till the nature of the irregularity was well determined from several successive revolutions.

Le Verrier n'a pas résolu complètement ses 40 systèmes de 3 équations ; il a seulement sélectionné les valeurs de ε', pour lesquelles le système associé admettait une solution physique acceptable, i.e. $0 < m' < 3$; $|P'| < 20''$ et $|Q'| < 15''$: ce sont des ordres de grandeur d'encadrement, pas des inégalités strictes.
J'ai calculé, à l'aide de TRIP, les solutions des 40 systèmes de la table 5.1. Les solutions, données table 5.2, peuvent changer de façon assez importante par rapport à celles des systèmes déterminés par Le Verrier (écrits fig. 5.5) du fait de petits écarts numériques dans les coefficients et de quelques simplifications, mais les ordres de grandeur et les rapports sont respectés. Par exemple, la solution avec les coefficients de Le Verrier pour la valeur $\varepsilon' = 45°$ est (360.5, −44329, 1170), alors que je trouve (208.1, -25038, 628).

18. Encore une fois, c'est toute la subtilité d'avoir choisi ces paramètres, qu'il peut précisément borner.

TABLE 5.2 – On a placé dans cette table les solutions des 40 systèmes de la table 5.1 (formés comme ceux de la fig. 5.5), solutions calculées par les moindres carrés à l'aide de TRIP. Comme l'a constaté Le Verrier, les seules valeurs a priori acceptables sont $\varepsilon' = 234°,\ 243°,\ 252°,\ 261°$, car ce sont les seules valeurs de ε' pour lesquelles les solutions vérifient sensiblement les 3 critères physiques : $0 < m' < 3$; $|P'| < 20$; $|Q'| < 20$

ε'	m'	P'	Q'
0°	−6.4	+30	−113
9°	−9.4	+371	−170
18°	−14.0	+1011	−233
27°	−21.4	+2126	−292
36°	−42.5	+4929	−378
45°	+208.1	−25038	+628
54°	+24.3	−2690	−83
63°	+12.1	−1080	−116
72°	+8.4	−479	−122
81°	+7.1	−140	−127
90°	+7.1	+129	−136
99°	+8.8	+458	−161
108°	+15.7	+1217	−241
117°	−921.1	−85404	+10289
126°	−13.9	−1336	+85
135°	−7.1	−635	+7
144°	−5.1	−369	−20
153°	−4.3	−214	−34
162°	−4.1	−102	−45
171°	−4.6	+1	−57

ε'	m'	P'	Q'
180°	−7.0	+153	−84
189°	−58.8	+2254	−596
198°	+5.7	−274	+36
207°	+2.3	−113	+2
216°	+1.3	−57	−9
225°	+0.8	−28	−13
234°	+0.7	−12	−16
243°	**+0.6**	−4	**−17**
252°	**+0.8**	**+1**	**−19**
261°	+1.4	+8	−22
270°	+4.1	+54	−39
279°	−10.4	−266	+53
288°	−3.2	−131	+8
297°	−2.3	−131	+1
306°	−2.1	−145	−4
315°	−2.1	−163	−9
324°	−2.3	−180	−16
333°	−2.7	−190	−27
342°	−3.4	−180	−45
351°	−4.5	−124	−72

5.2.3.3 Confirmation des valeurs de ε' comprises entre 234° et 270°

On rappelle que Le Verrier a obtenu cet intervalle (234°−270°) pour ε' en combinant les 18 équations (4.17) en 3 équations (5.4), d'où la nécessité de revenir au point de départ, c'est-à-dire de reprendre chacune des 18 équations de départ pour les 5 valeurs de ε' sélectionnées (234°, 243°, 252°, 261°, 270°) et d'examiner leurs résidus individuels ; voici son plan d'action (*Herschel*, n° 115) :

> Il m'a suffi, pour rejeter une immense étendue du ciel, pour assigner la région de l'écliptique dans laquelle la planète cherchée doit être placée, de considérer les erreurs des positions moyennes d'Uranus, ainsi que je l'ai expliqué dans le n° 104. Mais pour s'assurer si l'on peut effectivement représenter les observations par l'action perturbatrice d'une planète, dont la longitude moyenne serait comprise entre 234° et 270°, il est indispensable de considérer, non plus les erreurs moyennes, mais toutes les erreurs individuelles qui ont pour expression les premiers membres des relations du n° 82. Je suivrai la même marche que je viens d'employer ; seulement, au lieu de calculer directement les coefficients des équations moyennes, je formerai séparément ceux des équations individuelles.

Pour les 5 valeurs sélectionnées pour ε', Le Verrier reporte [19] les valeurs trouvées précédemment pour $(m'h',\ m'l')$ dans les 18 équations de condition (4.17) : il obtient des équations fonction de $m',\ P',\ Q'$ explicitement, et de $(\alpha,\ \varepsilon')$ implicitement, dont deux sont écrites à la figure 5.6 (*Herschel*, p. 190).

19. Les manipulations matricielles nécessitées par ces calculs se trouvent au § 4.4.4 et à l'annexe p. 477.

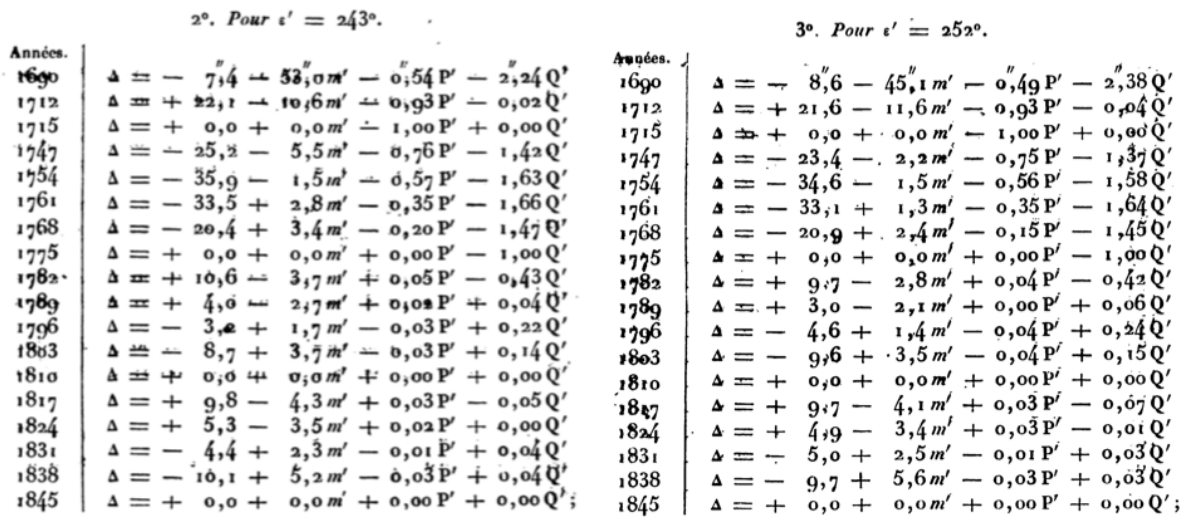


FIGURE 5.6 – Erreurs en longitude pour les 18 observations (4.17) avec $\varepsilon' = 243°$ à gauche et $\varepsilon' = 252°$ à droite, après report des expressions de $m'h'$ et $m'l'$.

et voici ce que je trouve avec TRIP ; les écarts avec Le Verrier sont faibles :

Équations de condition pour $\varepsilon' = 243°$									$\Delta =$
1690	−	7.5	−	52.8	m'	−	0.54 P'	−	2.25 Q'
1712	+	22.5	−	10.9	m'	−	0.93 P'	−	0.02 Q'
1715	−	0.0	+	0.0	m'	−	0.00 P'	−	0.00 Q'
1747	−	24.5	−	5.1	m'	−	0.74 P'	−	1.44 Q'
1754	−	36.1	−	0.8	m'	−	0.56 P'	−	1.64 Q'
1761	−	34.4	+	3.7	m'	−	0.35 P'	−	1.68 Q'
1768	−	20.9	+	4.0	m'	−	0.15 P'	−	1.46 Q'
1775	+	10.2	−	3.6	m'	+	0.05 P'	−	0.42 Q'
1789	+	3.3	−	2.5	m'	+	0.02 P'	+	0.05 Q'
1782	+	10.2	−	3.6	m'	+	0.05 P'	−	0.42 Q'
1796	−	4.6	+	2.2	m'	−	0.03 P'	+	0.23 Q'
1803	−	8.9	+	4.0	m'	−	0.04 P'	+	0.14 Q'
1810	+	0.0	−	0.0	m'	+	0.00 P'	−	0.00 Q'
1817	+	10.4	−	4.5	m'	+	0.03 P'	−	0.05 Q'
1824	+	5.0	−	3.4	m'	+	0.02 P'	−	0.01 Q'
1831	−	5.0	+	2.4	m'	−	0.02 P'	+	0.03 Q'
1838	−	10.4	+	5.5	m'	−	0.03 P'	+	0.03 Q'
1845	+	0.0	−	0.0	m'	+	0.00 P'	−	0.00 Q'

Équations de condition pour $\varepsilon' = 252°$									$\Delta =$
1690	−	8.4	−	44.9	m'	−	0.51 P'	−	2.38 Q'
1712	+	22.3	−	11.9	m'	−	0.93 P'	−	0.04 Q'
1715	−	0.0	+	0.0	m'	−	0.00 P'	−	0.00 Q'
1747	−	23.4	−	1.9	m'	−	0.76 P'	−	1.35 Q'
1754	−	35.1	−	1.0	m'	−	0.58 P'	−	1.57 Q'
1761	−	33.8	+	2.0	m'	−	0.36 P'	−	1.63 Q'
1768	−	20.6	+	2.7	m'	−	0.15 P'	−	1.44 Q'
1775	−	0.0	+	0.0	m'	−	0.00 P'	−	0.00 Q'
1782	+	10.1	−	2.9	m'	+	0.05 P'	−	0.43 Q'
1789	+	3.3	−	2.2	m'	+	0.02 P'	+	0.05 Q'
1796	−	4.6	+	1.7	m'	−	0.03 P'	+	0.23 Q'
1803	−	8.8	+	3.4	m'	−	0.04 P'	+	0.15 Q'
1810	+	0.0	−	0.0	m'	+	0.00 P'	+	0.00 Q'
1817	+	10.3	−	4.4	m'	+	0.03 P'	−	0.06 Q'
1824	+	5.0	−	3.7	m'	+	0.02 P'	−	0.01 Q'
1831	−	4.9	+	2.2	m'	−	0.02 P'	+	0.04 Q'
1838	−	10.3	+	6.0	m'	−	0.03 P'	+	0.03 Q'
1845	+	0.0	−	0.0	m'	+	0.00 P'	+	0.00 Q'

Le Verrier constate (*Herschel*, n° 121) que les coefficients de m' dans ces équations sont souvent trop petits pour donner une valeur fiable de ce paramètre. Il repousse donc la recherche de la valeur de m' après l'utilisation d'un plus grand nombre d'observations géocentriques d'Uranus. Il reporte les valeurs[20] $m' = 1$, $P' = -15''$ et $Q' = 10''$ (*Herschel*, p. 190) dans les équations (fig. 5.6) pour $\varepsilon' = 252°$. Les erreurs se réduisent (*Herschel*, n° 122) à :

Résidus ($''$) obtenus par Le Verrier							
date	Δ	date	Δ	date	Δ	date	Δ
1690	−23	1761	−10	1789	0	1817	+6
1712	+24	1768	−2	1796	−5	1824	+1
1715	+15	1775	+10	1803	−7	1831	−3
1747	−1	1782	+10	1810	0	1838	−4
1754	−12					1845	0

La valeur $-12''$ pour 1754 le chagrine un peu, mais il fait remarquer que cette erreur peut être réduite à $-2''$ en introduisant les erreurs $R' = S' = -3''$.

20. Assez arbitraires, obtenues par tâtonnements pour rester dans la limite des erreurs d'observation.

Avec les moindres carrés et mes équations, voici les résidus que j'obtiens, en prenant comme inconnues seulement P' et Q' (tableau de gauche), puis en prenant comme inconnues (P', Q', R', S') (tableau de droite). Les résultats sont notablement différents de ceux de Le Verrier, car Le Verrier *choisit* pour chacun des 5 systèmes à tester un triplet (m', P', Q') qui donne des résidus faibles pour le système des 3 'erreurs' associé à ε', alors que je *résous* exactement ces systèmes (5.5).

Résidus dans les 18 équations de condition par TRIP pour $\varepsilon' = 252°$ avec P', Q'							
date	Δ	date	Δ	date	Δ	date	Δ
1690	+5	1761	+1	1789	0	1817	−7
1712	−9	1768	−10	1796	+8	1824	−2
1715	0	1775	0	1803	+9	1831	+4
1747	+1	1782	−16	1810	0	1838	+6
1754	+7					1845	0

Résidus dans les 18 équations de condition par TRIP pour $\varepsilon' = 252°$ avec P', Q', R', S'							
date	Δ	date	Δ	date	Δ	date	Δ
1690	+2	1761	+4	1789	0	1817	−6
1712	+1	1768	0	1796	+3	1824	+2
1715	0	1775	0	1803	+4	1831	+6
1747	−7	1782	−8	1810	0	1838	−2
1754	+2					1845	0

Toujours soucieux de la précision de l'expression, Le Verrier reprend (n° 122) :

> On voit de quel intérêt il était d'introduire dans cette discussion les erreurs possibles des observations, ou pour parler plus exactement, les petites différences qu'on pouvait admettre sans scrupule, entre les observations et une théorie qui n'a pas encore reçu toute la perfection que nous lui donnerons plus tard.

Et de conclure avec un grand soulagement (toujours au n° 122, *Herschel*)

> **Qu'on peut représenter toutes les observations d'Uranus au moyen de l'action perturbatrice d'une planète, dont la longitude moyenne était, au 1er janvier 1800, de 252°.**

Voici le commentaire de Tisserand [Tisserand, 1889] : « La partie la plus difficile du problème est maintenant résolue ; il n'y a plus qu'à perfectionner la solution... ».
Le 'perfectionnement' va néanmoins nécessiter des calculs longs et complexes !

On rappelle encore une fois que c'est un grand soulagement pour Le Verrier, car le succès n'était pas garanti à l'avance ; l'existence d'une planète perturbatrice n'était au départ qu'une hypothèse parmi d'autres, et des spécialistes, comme Airy par exemple, étaient très sceptiques sur la faisabilité d'un tel calcul (voir la remarque d'Airy au 5.2.3.2).
On peut cependant tempérer la déclaration précédente de Le Verrier en disant qu'il a simplement montré que les 18 équations (4.16) qu'il a formées au n° 81 pouvaient recevoir une solution acceptable ; mais il ne faut pas oublier que Le Verrier a sélectionné au départ 279 observations, qui donnent lieu à 279 équations de condition ; est-ce que ces 279 équations de condition sont satisfaites ? Le Verrier doit vraisemblablement penser que les combinaisons d'équations qu'il a formées sont bien représentatives de l'ensemble des données, représentativité que l'on a déjà constatée dans un contexte voisin à la figure 4.20 (c).
Ce premier succès est un encouragement très fort à poursuivre les calculs.

5.2.4 Essai de détermination de la longitude de l'époque à partir de la masse de la planète perturbatrice

5.2.4.1 Objectif

En fait, avant d'effectuer les calculs présentés au paragraphe précédent, Le Verrier détermine dans les manuscrits (cahier n° 4) une expression (équation (5.4)) de m' (masse de la planète

inconnue) en fonction de ε' (longitude de l'époque de Neptune), par l'intermédiaire des coefficients $a,\ a',\ ...,\ c',\ c''$ apparaissant dans les équations (5.4) écrites fig. 5.4 et il veut déterminer les valeurs de ε' qui rendent l'expression m' positive.
Après un calcul extrêmement laborieux, car il s'étend sur une vingtaine de pages des manuscrits, mais tout à fait remarquable, car il invente des méthodes pour déterminer des valeurs approchées des zéros d'un polynôme de degré 10, il obtiendra une localisation beaucoup trop large (voir paragraphe suivant) pour servir à une localisation, même approximative, de la planète inconnue. Selon Biot [Biot, 1847b], ce semi-échec stoppera momentanément ses recherches (voir aussi l'aveu de Le Verrier, p. 175 de *Herschel* et reproduit au § 5.2.4.4).

5.2.4.2 Calculs effectués par Le Verrier

On décrit maintenant les calculs qui permettent à Le Verrier d'obtenir une expression de m' en fonction de $x = \tan \frac{\varepsilon'}{2}$.
Le Verrier part des 18 équations (4.17) du n° 82 (reproduites fig. 4.17), dans lesquelles il va faire [21] $P = Q = R = S = 0$ dans un premier temps ; il regroupe, comme indiqué précédemment, ces 18 équations pour former le système de 3 équations écrit fig. 5.3 ou fig. 5.4, aux inconnues $m',\ m'l',\ m'h'$; il y détermine l'expression littérale de m' :

$$m' = \frac{d(b'c'' - c'b'') + d'(cb'' - bc'') + d''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')} \tag{5.4}$$

Il donne p. 168−169 de *Herschel* les expressions [22] des coefficients $a,\ b, ...,\ c''$ comme combinaisons linéaires de $\sin\varepsilon'$, $\sin 2\varepsilon'$, $\sin 3\varepsilon'$, $\cos\varepsilon'$, $\cos 2\varepsilon'$, $\cos 3\varepsilon'$.
Il pose ensuite $x = \tan \frac{\varepsilon'}{2}$ pour se ramener à des fractions rationnelles, et il exprime les coefficients $a,\ ..,\ c''$ à l'aide de x, valeurs qu'il reporte dans l'expression de m', écrite à l'équation (5.4).
Rappelons que cela implique d'exprimer $\cos\varepsilon'$, $\cos 2\varepsilon'$, $\cos 3\varepsilon'$ en fonction de x, de reporter ces valeurs dans les 9 coefficients $a,\ a', ...,\ c',\ c''$, et de former la fraction rationnelle m' : travail tout à fait rebutant à faire à la main ; on ne peut qu'être admiratif devant la capacité des savants de l'époque, Laplace, Le Verrier, Delaunay, Tisserand... à manipuler, sans erreur, des expressions algébriques aussi complexes.
Il obtient ainsi une fraction rationnelle à l'inconnue x pour m' : $m' = \frac{N}{D}$ où N est un polynôme de degré 4, dont il montre - en utilisant [23] « le théorème de M. Sturm » – qu'il n'a aucune racine réelle et que par conséquent il garde un signe fixe (négatif).
D est un polynôme de degré 10, dont il détermine les 4 zéros réels par des itérations. Le calcul, par approximations successives, qui couvre une quinzaine de pages dans ses manuscrits est comme

21. On rappelle que $P,\ Q,\ R,\ S$ représentent respectivement les erreurs d'observation sur la longitude héliocentrique d'Uranus en 1715, 1775, 1810 et 1845. Ceci revient à considérer que les observations à ces dates étaient parfaitement exactes ; cette hypothèse n'a d'influence que sur le numérateur de la fraction m', qui reste négatif ; donc le signe de m' n'est pas affecté par ce choix.

22. Dans ses manuscrits, les premiers calculs (page 2 du cahier n° 4), portant sur $A',\ H',\ L'$ sont clairs et bien détaillés, reposant sur des formules algébriques données explicitement (*Herschel*, p. 163) ; par contre, le passage (page 3 du cahier n° 4) de ces valeurs à celles de $a,\ b, ...,\ c$" n'est pas détaillé du tout : on ne voit aucun intermédiaire de calcul ; on passe ainsi abruptement des valeurs de la page 2 à celles de la page 3. Les pages étant pour une fois numérotées (par Le Verrier lui-même), on peut difficilement invoquer une page manquante, mais c'est l'impression laissée par cet enchaînement. Les calculs étant faits à la main, on peut d'habitude repérer les étapes successives à l'aide des valeurs numériques progressivement accumulées.

23. C'est ainsi que Le Verrier présente son calcul p. 172 de *Herschel* et cahier n° 4, p. 125.
Charles Sturm (1803−1855) était un collègue de Le Verrier à la Sorbonne (à partir de 1846) ; il enseignait la mécanique. La méthode de Sturm est un algorithme qui permet de déterminer le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme P sur un intervalle donné ; on construit d'abord une suite de polynômes $(P_i)_{0\leq i\leq m}$, avec $P_0 = P$; si on appelle $\sigma(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $(P_0(x), P_1(x)..., P_m(x))$, le nombre de racines réelles de P dans l'intervalle $[a, b]$ est $\sigma(a) - \sigma(b)$.

d'habitude remarquable : en effet, voici table 5.3 la comparaison [24] entre les valeurs des zéros de D trouvées par Le Verrier [25] (1ère ligne) et celles fournies par Maple (en partant exactement des mêmes coefficients que Le Verrier) (2e ligne) ; l'accord est parfait.
J'ai ajouté les valeurs que j'obtenais en reprenant l'ensemble des calculs avec TRIP et Maple (voir le détail du calcul au § D.4).

TABLE 5.3 – Valeurs de ε' qui annulent le dénominateur de la fraction m'

Résolution par Le Verrier	96°40′	189°40′	263°6′	358°41′
Équation de LV résolue avec Maple	96°40′	189°39′	263°5′	358°41′
Calcul complet avec TRIP+Maple (§ 5.2.4.3)	96°33′	186°31′	225°5′	358°17′

Comme m' doit être positif, Le Verrier conclut que ε' doit être compris entre 96°40′ et 189°55′ ou bien entre 263°8′ et 358°41′. Malheureusement la valeur – 240°17′ – qu'il va trouver dans la deuxième approximation ne se situe pas dans cet intervalle ! (*Herschel*, p. 175) ; il attribuera cet écart à des équations dont les coefficients sont évanescents [26], et il signale (p. 175) que ces difficultés l'ont longtemps bloqué et perturbé, ce que confirme Biot ([Biot, 1847c] p. 36).
Comme les calculs faits avec Maple avec une précision de 10^{-20} donnent pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus par Le Verrier, il faut imputer cette incohérence à la méthode qui a conduit à ces 3 équations (5.4), méthode faisant intervenir des regroupements, des incertitudes dans les coefficients, liées aux incertitudes sur les observations et des systèmes mal conditionnés.
Pour plus de détails sur ce calcul de m' et le découragement de Le Verrier qui s'en est suivi, voir les paragraphes 5.2.4.4 p. 186 et 12.2 p. 412 de la thèse.
Ensuite, Le Verrier reprend dans ses manuscrits le calcul de m' avec des valeurs non nulles pour P, Q, R, S (p. 101 du cahier n° 4 des manuscrits), mais il obtient des expressions tellement compliquées qu'il ne peut pas les exploiter et il abandonne le calcul.

5.2.4.3 Calculs effectués avec TRIP

En fait, avec le même point de départ que Le Verrier, c'est-à-dire les 18 équations (4.16) du n° 81, les valeurs des coefficients trouvées avec TRIP pour les équations (5.4) diffèrent légèrement de celles obtenues par Le Verrier, du fait des erreurs d'arrondi. Par exemple, pour le coefficient a qui intervient dans la formule donnant m' (*Herschel*, p. 169 et équation (5.4)), Le Verrier obtient :

$$a = 305.4 \sin\varepsilon' + 312.3 \sin 2\varepsilon' + 53.5 \sin 3\varepsilon' + 437.0 \cos\varepsilon' - 361.0 \cos 2\varepsilon' - 140.0 \cos 3\varepsilon'$$

et j'obtiens (avec Maple) :

$$a = 306.7 \sin\varepsilon' + 312.0 \sin 2\varepsilon' + 54.9 \sin 3\varepsilon' + 437.0 \cos\varepsilon' - 358.2 \cos 2\varepsilon' - 139.7 \cos 3\varepsilon'$$

et de même pour les 8 autres coefficients, soit un écart qui dépasse rarement 1%, mais qui va modifier assez sensiblement les valeurs des zéros du dénominateur D.
J'ai fait le calcul en deux temps : dans un premier temps, je détermine à partir d'une routine TRIP et de macros déjà écrites les expressions des coefficients a, b, ..., c'' en fonction de ε'. À partir de là, je poursuis dans un deuxième temps de deux manières (tout à fait équivalentes pour le tracé du graphe de $1/m'$) :

— Je reporte [27] ces expressions dans Maple pour réaliser les calculs algébriques : changement $x = \tan\frac{\varepsilon'}{2}$, que Le Verrier a effectué à la main ! À partir de la fraction rationnelle obtenue,

24. Baghdady [Baghdady, 1980] reprend les calculs à sa manière, mais se trompe dans ses formules : il obtient 92°09' au lieu de 96°40' par exemple.
25. À partir d'un zéro x du polynôme D, la valeur correspondantes de ε' s'obtient par $\varepsilon' = 2\arctan x$.
26. Ou bien en termes modernes, système mal conditionné.
27. Voir la feuille de calcul Maple p. 491 en annexe.

je détermine ses zéros et son signe et je trace les variations de $1/m'$ en fonction de ε'.

— Je continue avec TRIP par un traitement numérique en faisant un balayage pour ε', sans traitement algébrique, et je trace aussi les variations de $1/m'$ en fonction de ε'.

Dans les deux cas, on obtient les valeurs de m' en fonction de ε'. On peut alors tracer $\frac{1}{m'}$ (m' n'est pas bornée) en fonction de ε' en prenant comme unité l'inverse de la masse réelle de Neptune. Par exemple, le maximum de 0.25 correspond à une masse égale à 4 fois la masse réelle de Neptune. Le tracé se trouve à la figure 5.7.

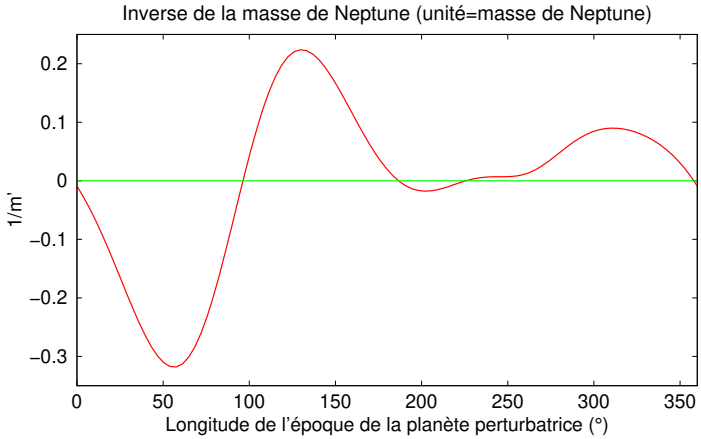


FIGURE 5.7 – Variations de $\frac{1}{m'}$ en fonction de ε', obtenues à partir de la formule (5.4) page 184, en utilisant un traitement numérique à l'aide de TRIP. La seule valeur un peu crédible pour ε' serait $\varepsilon' = 135°$, mais la masse correspondante de la planète serait supérieure à 4 fois celle de Neptune, ce qui n'est pas acceptable. Le problème vient de la méthode utilisée, qui est très sensible aux incertitudes provenant des observations.

À partir de ce graphe, on peut déterminer les valeurs de ε' qui rendent m' positif. On trouve que ε' doit appartenir à l'intervalle $96°33' - 186°31'$ ou bien à $225°5' - 358°17'$. L'intervalle, ainsi calculé, est plus étendu que celui trouvé par Le Verrier (voir table 5.3) et surtout il contient la valeur définitive de ε' trouvée par Le Verrier, à savoir 240°17', ce qui aurait grandement rassuré Le Verrier, car sa valeur finale aurait appartenu au domaine possible ; mais, de toutes façons, les valeurs correspondantes de m' ($m' > 4$) ne sont pas très réalistes, car beaucoup trop grandes, comme Le Verrier l'a présenté dans l'analyse préliminaire de sa recherche (p. 171 de la thèse). Le Verrier sera amené à élaborer une autre méthode pour déterminer m', voir chapitre suivant.

5.2.4.4 Utilité du calcul effectué par Le Verrier pour essayer de déterminer la masse

Pourquoi Le Verrier a-t-il inclus ce calcul [signe de m'] dans *Herschel*, calcul qui finalement ne lui a pas servi et qui l'a découragé pendant une longue période ?
Il ne faut pas oublier que Le Verrier a écrit *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel*, à partir de ses manuscrits, mais une fois la découverte de Neptune effectuée. Il savait donc que ce calcul avait été en fin de compte inutile ; il aurait pu facilement l'omettre de la rédaction d'*Herschel*. On peut imaginer plusieurs explications :
– Le Verrier s'était beaucoup investi pour ce calcul et cela lui aurait peut-être coûté de passer complètement sous silence tout ce travail ;
– Biot ([Biot, 1847b] rappelle que Le Verrier n'a pas pu conclure un premier calcul pour déterminer m' (voir § 5.2.2) et voici comment il interprète ce deuxième épisode infructueux :

> il fallait prendre une autre voie ; et tous les calculs effectués dans celle-ci, avec tant de peine, étaient inutiles. M. Le Verrier aurait pu les supprimer sans inconvénient pour lui-même, n'apprenant d'ailleurs rien à quoi on ne pût s'attendre. Toutefois, il faut lui savoir gré de les avoir conservés. On a souvent lieu de regretter que les auteurs de découvertes ne laissent pas voir les oscillations de leurs tentatives. Rien ne serait plus curieux à étudier, et il y aurait presque autant à apprendre dans leurs mécomptes que dans leurs succès définitifs.

– Le Verrier veut faire partager son expérience (malheureuse) ; il écrit page 175 de *Herschel* :

> Longtemps j'ai été arrêté dans mes recherches par cette difficulté [tomber sur une masse négative pour la bonne valeur de la longitude ε']. Aussi croirai-je faire une chose utile, en insistant encore sur cette partie de la question ; elle est très propre à montrer, par ses détails, combien sont délicats certains points des recherches numériques ; combien il est souvent plus pénible d'arriver à une connaissance rigoureuse de la vérité en raisonnant sur des nombres entachés des erreurs des observations, qu'en discutant des symboles algébriques susceptibles de représenter les données de la question avec une exactitude absolue, et de se prêter à toutes les restrictions.

On ne peut qu'admirer la lucidité de Le Verrier face à des situations numériques contradictoires. Il le prouve ici avec son échec sur le calcul de m' à partir d'une formule théorique inattaquable (équation (5.4)), échec dû aux erreurs d'arrondi, aux incertitudes sur les observations et peut-être aux groupements effectués. Le Verrier aura l'occasion de montrer à de nombreuses reprises sa virtuosité à établir des expressions algébriques considérables, par exemple en formant le développement à l'ordre 7 de la fonction perturbatrice, développement qui remplit les pages 258 à 330 du premier tome des Annales de l'Observatoire de Paris [Le Verrier, 1855c].

5.2.4.5 Conclusions hâtives de calculs numériques. Importance de petits coefficients

On a vu que Le Verrier aboutissait à une impasse en exploitant la formule théorique pour m'. On reprend ce qu'il dit au n° 112 de *Herschel* :

> Revenons aux valeurs de m', données dans le n° 110. Si nous excluons les valeurs négatives de la masse, et les valeurs positives qui sont trop considérables [...], nous serons conduits à admettre que la valeur de ε' qui convient au problème, est nécessairement comprise entre 108° et 162° d'une part, ou bien entre 297° et 333° d'autre part. Or, en examinant les erreurs que la théorie laisse dans les positions de la planète en 1690 et 1747, pour toutes valeurs que nous venons d'indiquer, on reconnaît que le calcul diffère toujours de l'observation, d'une quantité trop forte pour qu'on puisse l'attribuer à une erreur des observations ; en sorte que la conséquence [...] serait qu'il est impossible de représenter la marche d'Uranus au moyen de l'action perturbatrice de la nouvelle planète.
> Hâtons-nous de répéter que les conclusions auxquelles nous arriverions par cette discussion [impossibilité de représenter la marche d'Uranus] peuvent bien n'être pas l'expression de la vérité. Les motifs que nous avons déjà exposés recevront une nouvelle force par la remarque suivante. Imaginons que nous reprenions toute la discussion précédente [valeurs de ε' qui rendent $m' > 0$], en négligeant les deux inégalités suivantes :

$$\delta v = 2''.9\, m' \sin(21^g.66 + 3\varepsilon' - 9^g.2333\, t) \quad ; \quad \delta v = 1''.9\, m' \sin(213^g.88 + \varepsilon' + 1^g.6832\, t) \tag{5.5}$$

> ces deux perturbations sont si faibles, qu'elles semblent pouvoir être omises [...]. Or, il n'en n'est rien ; [...] tous les détails de la solution sont différents dans les deux cas. Les erreurs de la théorie en 1690 sont, contre toute vraisemblance, complètement changées par l'omission de ces deux petits termes.

C'est une affirmation a priori étonnante ; j'ai fait les calculs en omettant ces deux petits termes : le changement ne concerne que le coefficient de m' dans les équations de condition ; ce coefficient est effectivement changé (surtout en valeur relative) dans l'erreur de 1690 ; on examine les conséquences de ces changements un peu plus loin, après la remarque de Biot.

La remarque de Le Verrier, citée plus haut et provenant de *Herschel* (n° 112), ne figure pas sous cette forme dans les manuscrits ; il faut lire ses manuscrits avec beaucoup d'attention pour imaginer ce qui a pu se passer. Voici ce que l'on peut raisonnablement reconstituer comme enchaînement.

Le Verrier commence le calcul de la perturbation exercée par une planète extérieure, à partir de la formule théorique de la *Mécanique céleste*, formule recopiée au § 5.1 et il retient les termes suivants pour les coefficients de δv :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = &+ 18'',5 \sin(-3^{s},0778t + 207^{s},22 + \varepsilon') \\
&+ 29,5 \sin(-6,1555t + 214,44 + 2\varepsilon') \\
&+ 2,9 \sin(-9,2333t + 21,66 + 3\varepsilon') \\
&+ 1,9 \sin(+1,6832t + 213,88 + \varepsilon') \\
&+ 17,0 \sin(-1,3945t + 221,10 + 2\varepsilon') \\
&+ 24,4 \sin(-4,4723t + 28,32 + 3\varepsilon');
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = &+ 43'' \cos(+1,6832t + \varepsilon') \\
&- 122 \cos(-1,3945t + 207,22 + 2\varepsilon') \\
&- 930 \cos(-4,4723t + 14,44 + 3\varepsilon');
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = &- 43'' \sin(+1,6832t + \varepsilon') \\
&+ 122 \sin(-1,3945t + 207,22 + 2\varepsilon') \\
&+ 930 \sin(-4,4723t + 14,44 + 3\varepsilon').
\end{aligned}
$$

FIGURE 5.8 – Termes retenus par Le Verrier pour la perturbation exercée sur la longitude d'Uranus par la planète extérieure : $\delta v = Am' + Hm'h' + Lm'l'$. On constate la présence dans l'expression de A des deux petits termes mentionnés par Le Verrier à l'équation (5.5)

Le Verrier semble avoir fait deux calculs pour résoudre les équations de condition. Il est difficile de savoir dans quel ordre ces deux calculs ont été faits, car les manuscrits ne sont ni datés, ni paginés. Voici ce que l'on peut imaginer comme scénario vraisemblable :

1) Le Verrier ne tient pas compte des deux petits termes dans le calcul de A (pour gagner un peu de temps).

2) Il constate que les intervalles sélectionnés par la condition $m' > 0$, rendent impossible la correction des irrégularités dans le mouvement d'Uranus par l'action d'une planète extérieure.

3) Il reprend alors les calculs avec les deux petits termes et constate qu'il y a de grandes différences dans les valeurs trouvées pour m' ; malheureusement, il tombe encore sur une impossibilité d'expliquer les irrégularités d'Uranus par l'action d'une planète extérieure.

Ce scénario a l'avantage d'expliquer pourquoi Le Verrier a fait deux calculs voisins.

Voici ce que dit Biot [Biot, 1847a] au sujet de la remarque de Le Verrier :

> Or, [Biot vient de rappeler la petitesse de ces deux expressions] M. Le Verrier dit qu'après cette omission, les valeurs de l'époque, qui se présentent comme admissibles, dans les épreuves numériques faites sur l'expression de la masse, deviennent toutes différentes de ce qu'elles étaient précédemment, et donnent aussi, dans la représentation des observations, des résidus d'erreurs tout autres, quoique pareillement intolérables. [...] Mais cela ne semble pas prouver que ces deux inégalités si petites fussent réellement indispensables à conserver pour arriver à l'évaluation de la masse par l'appréciation immédiate de ses effets numériques, comme M. Le Verrier le fait plus tard. [...] Je soumets ce doute [nécessité de la présence de ces deux termes] à ceux qui étudieront son travail.

Le Verrier n'est pas très explicite sur les calculs qui seraient modifiés ; il dit simplement « Imaginons que nous reprenions toute la discussion précédente, en négligeant les deux inégalités écrites plus haut ».

Qu'entend-il par "toute la résolution précédente" ? On peut penser soit à la résolution des 40 systèmes de 3 équations (5.4), soit au calcul de la masse.

Pour la résolution des 40 systèmes (fig. 5.5), je pense pouvoir modérer le jugement de Le Verrier : en omettant ces deux termes, les résultats partiels changent de façon importante, mais le résultat global – et essentiel – demeure : la zone où devait se trouver la planète perturbatrice au 1/1/1800 reste dans la même partie du ciel : 243° − 252°.

Par contre, pour le calcul de la masse, les résultats sont notablement changés, comme on le constate dans la table suivante où l'on a reporté les valeurs trouvées pour la masse par Le Verrier ; deux jeux de valeurs : LV1 (avec les petits termes) ne figurant que dans les manuscrits (cahier n° 4) et pas dans *Herschel* et LV2 (sans) au n° 110 de *Herschel* et j'ai rajouté les résultats (avec, puis sans les deux petits termes) que l'on obtenait avec TRIP.

TABLE 5.4 – Valeurs trouvées pour m' : de gauche à droite, par TRIP avec les deux petits termes, par TRIP sans ces deux petits termes, un premier jeu de valeurs de Le Verrier (LV1, avec) et un deuxième jeu de valeurs de Le Verrier (LV2, sans). Comme annoncé par Le Verrier, les divers résultats sont notablement différents les uns des autres

ε'	Avec	Sans	LV1	LV2
0	−6.9	−6.0	−7.2	
9	−10.1	−9.1		
18	−14.9	−13.6	−4.1	
27	−22.8	−18.2		
36	−45.5	−22.2	−2.8	
45	+202	−29.5		
54	+25.3	−68.7	−2.5	
63	+12.8	+73.8		
72	+8.8	+22.6	−2.7	
81	+7.5	+14.7		
90	+7.6	+13.2	−5.1	
99	+9.4	+15.7		18
108	+17.0	+32.0	17	4.3

117	−415	−59.4		2.8
126	−14.4	−13.3	4.0	2.4
135	−7.5	−7.3		2.3
144	−5.4	−5.1	2.8	2.6
153	−4.5	−4.1		3.3
162	−4.4	−3.7	2.6	4.7
171	−5.0	−3.9		8.4
180	−7.6	−5.0	3.2	
189	−84.6	−13.7		
198	+5.9	+7.6	11	
207	+2.4	+2.3		
216	+1.3	+1.2	−5.3	
225	+0.9	+0.8		
234	+0.7	+0.6	−2.8	

ε'	Avec	Sans	LV1	LV2
243	+0.7	+0.6		
252	+0.9	+0.8	−3.0	
261	+1.5	+1.3		
270	+4.5	+3.1	40	40.0
279	−9.9	−91.6		14.4
288	−3.3	−4.2	3.3	8.6
297	−2.4	−2.6		6.4
306	−2.2	−2.2	3.7	5.8
315	−2.2	−2.1		5.6
324	−2.4	−2.2	9.4	5.7
333	−2.8	−2.5		6.8
342	−3.6	−3.1	−35	9.0
351	−4.8	−4.1		16.4

5.3 Aboutissement de cette première recherche : formule pour la longitude vraie

Le but des calculs précédents était de déterminer les éléments de la planète qui trouble Uranus. Le plus important était ε', dont Le Verrier a déterminé une valeur approchée (252°), mais ε' n'est que la longitude moyenne au 1/1/1800. Ce paramètre ne suffit pas pour une découverte visuelle ; il doit fournir une position héliocentrique (ou géocentrique) vraie au 1/1/1847. Pour cela, puisque Le Verrier n'a pas cherché une orbite circulaire, il lui faut connaître e' et ϖ'. Comme 252° est une valeur amenée à évoluer, il va anticiper [28] un ajustement éventuel de cette valeur en posant $\varepsilon' = 252 + 9\,\mathcal{C}$. Pour une valeur fixée de $\mathcal{C}$, les coefficients $a,\ b, ..,\ d''$ du système (5.4) sont connus, car en plus il choisit [29] ici $P' = Q' = 0$. Il résout les deux dernières équations du système (5.4) par rapport à $m'h'$ et $m'l'$.

$$m'h' = \frac{\begin{vmatrix} d' - a'm' & c' \\ d'' - a''m' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}} \qquad m'l' = \frac{\begin{vmatrix} b' & d' - a'm' \\ b'' & d'' - a''m' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

28. C'est ce qu'il avait fait dans son mémoire sur les variations séculaires des éléments des planètes [Le Verrier, 1839a] où il avait donné un formulaire incluant d'éventuels ajustements des masses des planètes.

29. Ce n'est pas dit explicitement dans les manuscrits. On examinera un peu plus loin ce qui se passe quand on ajuste aussi P' et Q'.

ce qui conduit à des expressions de la forme $m'h' = \alpha_v + \beta_v m'$ et $m'l' = \alpha'_v + \beta'_v m'$ pour des constantes $\alpha_v,\ \alpha'_v,\ \beta_v,\ \beta'_v$.
Soit λ' la longitude moyenne au 1/1/1847 : $\lambda' = \varepsilon' + n'\,47$.
La longitude héliocentrique vraie au 1/1/1847 est [30] (au premier ordre pour l'équation du centre)

$$v' = \lambda' + 2e'\sin(\lambda' - \varpi') = \lambda' + 2e'\cos\varpi'\sin\lambda' - 2e'\sin\varpi'\cos\lambda' = \lambda' + 2\left(\frac{\alpha_v}{m'} + \beta_v\right)\sin\lambda' - 2\left(\frac{\alpha'_v}{m'} + \beta'_v\right)\cos\lambda' \tag{5.6}$$

On constate que v' peut s'écrire

$$v' = A_v + \frac{B_v}{m'} \tag{5.7}$$

où A_v et B_v sont des fonctions de $\mathcal{C}$. Il reste à déterminer les expressions numériques de A_v et de B_v.
Pour cela, Le Verrier fait le calcul de v' pour 5 valeurs de $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} = \pm 2,\ \pm 1,\ 0$. Il a donc 5 valeurs numériques pour A_v et B_v et il fait un développement limité à l'ordre 4 pour chacune de ces deux fonctions. Il trouve que A_v est quasi linéaire et il ne garde donc que sa partie linéaire et il tronque B_v à l'ordre 2. Il trouve :

$$v' = 314.5 + 12.5\,\mathcal{C} + \tfrac{1}{m'}\left(20.82 - 10.79\,\mathcal{C} - 1.14\,\mathcal{C}^2\right) \tag{5.8}$$

J'ai fait le calcul à partir de mes programmes TRIP et je trouve un résultat voisin, à savoir

$$v' = 313.5 + 12.3\,\mathcal{C} + \tfrac{1}{m'}\left(20.82 - 9.98\,\mathcal{C} - 1.15\,\mathcal{C}^2\right) \tag{5.9}$$

On peut représenter la famille de courbes dans des limites raisonnables [31] pour $(\mathcal{C}, m')$, à savoir $1 \le m' \le 2$ et $-2 \le \mathcal{C} \le 2$. Il s'agit en fait d'un faisceau linéaire de courbes ; il est donc normal que toutes les courbes passent par un même point. J'ai tracé fig. 5.9 ce que l'on trouve.
Pour affirmer que les valeurs de v' restent dans l'intervalle $325° \pm 10°$, Le Verrier se contente [32] de calculer les valeurs pour $m' = 1$, puis $m' = 2$ et $\mathcal{C} = \pm 2$ et de constater que ces 4 valeurs sont bien dans l'intervalle indiqué.
Le Verrier ne donne pas plus de détails sur les paramètres de la planète inconnue, car ce n'est pas utile à ce moment du calcul. Il aurait pu le faire : calculer ε' pour les 5 valeurs de $\mathcal{C}$, en déduire pour chacune de ces valeurs a, a', a'', ..., d', d'', puis α_v, α'_v, β_v, β'_v et $m'h'$ ainsi que $m'l'$; on détermine alors e' et ϖ' par $e' = \frac{\sqrt{(m'h')^2 + (m'l')^2}}{m'}$ et $\varpi' = \mathrm{atan2}(l', h')$ pour ces 5 valeurs de $\mathcal{C}$, ce qui permet de former un développement limité de e' et de ϖ' en fonction de $\mathcal{C}$.

30. Le Verrier rajoute la précession : $53''.154 * 47 = 0.74$ grades.
31. On rappelle que l'unité de masse est 1/10 000 de masse solaire ; la valeur finale trouvée par Le Verrier sera $m' = 1.07$, ce qui correspond à peu près à deux fois la masse réelle de Neptune.
32. Calculs dans le cahier n° 4, p. 223. Il est bien évident que Le Verrier ne va pas tracer le faisceau de courbes, travail ingrat et pénible, sans outil de calcul moderne.

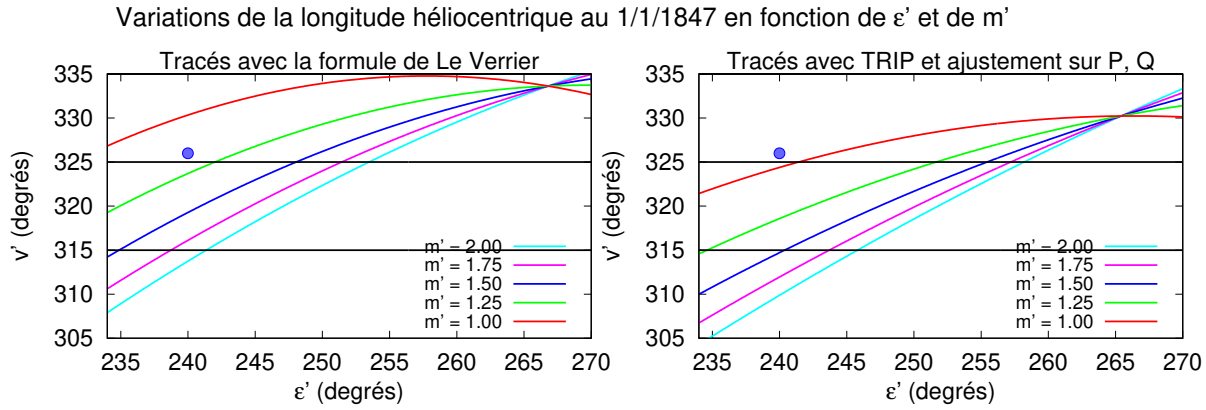


FIGURE 5.9 – Valeurs de la longitude héliocentrique de Neptune au 1/1/1847 selon la formule de Le Verrier (équation (5.8)) pour différentes valeurs de la masse. On constate bien que cette longitude reste dans l'intervalle $325° \pm 10°$ (pour les 3 premières valeurs de m'), comme l'a annoncé Le Verrier. Sur le graphe de gauche, le système (5.4) est résolu avec $P = Q = 0$ et sur le graphe de droite, on a ajusté P et Q par les moindres carrés. Le disque bleu représente la position finale trouvée par Le Verrier pour le couple (ε', v').

5.4 Prolongements : résultats pour d'autres valeurs de α

5.4.1 Bilan des calculs précédents

Le Verrier utilise essentiellement 0.5 comme valeur du rapport α des demi-grands axes de la planète inconnue et d'Uranus ; il n'élargira (un peu) sa recherche à d'autres rapports qu'à la fin du cahier n° 4 et dans l'approximation finale au début du cahier n° 5. Par exemple, à la fin du cahier n° 4, il reprend les calculs pour $\alpha = 0.51$, et ces calculs s'étendent sur 54 pages (voir la table des matières des manuscrits de Le Verrier § E). On peut aussi penser que Le Verrier avait l'intention de tester de nombreuses valeurs de α, puisqu'à la fin du cahier n° 2, il avait calculé les coefficients de Laplace, indispensables pour ses équations de condition, pour α variant de 0.40 à 0.60 avec un pas de 0.01. On peut imaginer deux explications (valables probablement toutes les deux) :

— la première, évidente, est que les calculs pour une valeur donnée de α sont extrêmement longs et que les calculs pour différentes valeurs de α sont indépendants les uns des autres, et donc à refaire en intégralité, ce qui représente une masse colossale de travail ;

— la deuxième est que, ayant trouvé une solution satisfaisante a priori pour $\alpha = 0.5$, il se contente d'exploiter cette solution, en essayant de l'améliorer.

C'est un peu ce que déclare Le Verrier en préambule à sa deuxième approximation, (*Herschel*, p. 197) :

> J'ai supposé dans une première approximation, que le grand axe de l'orbite de la nouvelle planète était précisément double du grand axe de l'orbite d'Uranus. Si je n'étais pas parvenu à expliquer ainsi les inégalités du mouvement de cette dernière planète, il n'eût pas fallu [33] pour cela conclure que l'action perturbatrice d'un nouveau corps n'était pas susceptible de représenter les anomalies observées. On aurait dû essayer de résoudre le problème pour d'autres valeurs du rapport des moyennes distances, en se tenant, à cet égard, dans les limites que nous avons indiquées ; mais nous avons été débarrassés de ce soin, puisque nous avons reconnu qu'on peut satisfaire convenablement à toutes les équations en adoptant *un demi*

33. Malgré sa formation initiale, Le Verrier ne fait pas un raisonnement de chimiste !

> pour la valeur de ce rapport. Toutefois, ce nombre ne peut être considéré que comme une première approximation...

Il est donc intéressant de voir ce que donne sa méthode si on l'applique à d'autres valeurs de α. Pour les raisons qui viennent d'être avancées plus haut, aucun des calculs qui suivent ne figure dans les manuscrits de Le Verrier ou dans *Herschel*. Le but essentiel de la recherche qui suit est de déterminer *la longitude optimale ε' de l'époque* pour prédire ensuite la position au 1/1/1847, et examiner comment cette position varie avec α.

5.4.2 Stratégies possibles

N'étant plus limité par la pénibilité des calculs, il est possible d'envisager au moins trois approches :

1. Reprendre exactement la démarche de Le Verrier i.e. fixer une valeur pour α ; choisir une valeur de ε' avec un pas[34] de 3° ; reprendre les 18 équations de condition (4.16) ; en utiliser 4 pour exprimer les 4 corrections des éléments d'Uranus ($\delta n,\ \delta e,\ \delta\varepsilon,\ e\delta\varpi$) en fonction des 5 autres paramètres : $m',\ m'h',\ m'l',\ P',\ Q'$; reporter ces valeurs dans les 14 équations non utilisées ; regrouper ces équations quatre par quatre pour former un système de 3 équations aux inconnues $m',\ m'h',\ m'l',\ P',\ Q'$; utiliser les deux dernières équations pour exprimer $m'h'$ et $m'l'$ en fonction des trois autres variables ($m',\ P',\ Q'$) ; reporter ces valeurs dans la première équation du groupe de 3 ainsi que dans l'équation de 1690 et celle de 1747 ; arrivés à cette étape :
   - continuer comme Le Verrier i.e. examiner si ce système admet une solution acceptable, ou bien (légère variante) résoudre ce système de trois équations aux trois inconnues $m',\ P',\ Q'$; examiner si la solution est acceptable i.e. $0.5 < m' < 4$, $|P'| < 15$ et $|Q'| < 10$; retenir ε' si c'est le cas ; passer à la valeur suivante de ε'.
   - Reporter dans les 18 équations (4.17) et noter les résidus individuels.
2. Reprendre la démarche du 1) jusqu'à la résolution (comprise) de ($m'h',\ m'l'$) ; reporter les valeurs trouvées dans les 18 équations (4.16) de départ et résoudre ce système de 18 équations par les moindres carrés et examiner si la solution obtenue est physiquement acceptable.
3. Choisir une valeur pour α ; pour chaque valeur de ε', partir du système de 18 équations (4.16) ; le résoudre par les moindres carrés ; examiner si la solution est acceptable ; faire le bilan.

Et bien sûr, dans chaque cas, recommencer avec une nouvelle valeur de α.
Pour chacune des 3 démarches on peut :

- soit sélectionner la valeur de ε' qui minimise les résidus dans les 18 équations (4.16) et qui sera qualifiée d'optimale ;
- soit sélectionner toutes les valeurs de ε' qui fournissent des solutions acceptables.

On ne peut encore qu'admirer la trouvaille de Le Verrier : avoir choisi comme variables principales $m',\ P'$ et Q' dont il connaît a priori les bornes ; ce qui n'était pas le cas avec les corrections elliptiques, non bornées a priori. On rappelle que l'unité de masse est le 1/10000 de la masse solaire, la masse réelle du vrai Neptune étant de l'ordre de 0.5.

34. Le Verrier avait choisi un pas de 9°, comme compromis entre précision et longueur des calculs ; il ne faut pas oublier que l'on cherche une première approximation pour ε' ; une précision excessive n'est donc pas nécessaire à ce niveau, mais il est intéressant de voir comment évoluent les solutions acceptables ; pour cela on choisit ici un pas de 3°.

Enfin, c'est le but ultime, dans les 3 cas, à partir d'une solution complète (α, ε', m', $m'h'$, $m'l'$), déterminer la longitude vraie de la planète perturbatrice à toute date, en particulier au 1/1/1847, valeur qui permet de tester la qualité de la prédiction.
Les solutions optimales sont données au § 5.4.4 ; les solutions admissibles sont données dans le § D.5, p. 493 de l'annexe.

5.4.3 Comparaison des solutions optimales pour des valeurs de α qui donnent des solutions acceptables par au moins deux méthodes

Quand on fait les calculs, on constate les choses suivantes :

— Si l'on n'effectue aucun filtrage, de nombreuses solutions n'ont aucun sens physique : masse trop grande ou négative, excentricité excessive, erreurs d'observation en 1715 et 1775 trop élevées... Il faut donc effectuer un filtrage pour ne conserver que les solutions qui sont acceptables d'un point de vue physique ; on a par exemple filtré par la condition $0.1 < m' < 4$. Quand on cherche la solution optimale, le filtrage choisi est $e' < 0.2$. Quand on conserve toutes les solutions acceptables, cette condition laisse passer trop de solutions pour la deuxième et la troisième méthode : pour la deuxième méthode, on a filtré par $e' < 0.15$ et pour la troisième par $e' < 0.12$.

— On remarque que pour certaines valeurs de α, il n'y a pas de solution acceptable [35].

— Pour $\alpha > 0.6$, il apparaît des petits dénominateurs dans les expressions algébriques et en conséquence, soit il n'y a pas de résultats, soit les résultats sont peu réalistes.

— On constate aussi que les solutions aux équations de condition, en particulier ε', dépendent assez sensiblement de la façon dont ces équations sont résolues. Par contre, par le jeu de l'excentricité et de la longitude du périhélie, la longitude héliocentrique vraie [36] ℓ'_{47} au 1/1/1847 en dépend peu, ce qui est le point essentiel pour la démarche entreprise.

J'ai placé table 5.5 ce que l'on obtient pour des valeurs de α pour lesquelles au moins deux des méthodes précédentes donnent des solutions acceptables.

TABLE 5.5 – Comparaison des solutions optimales obtenues par au moins deux méthodes. Les coordonnées sont dans l'écliptique et équinoxe moyen J2000

méthode	1	2	3	1	2	3
α	ε' (°)			ℓ'_{47} (°)		
0.50	258	264	189	329	330	272
0.51	264	264		332	333	
0.52	264	261	264	336	335	336
0.53	267	255	258	340	337	339
0.54	267	252	252	344	340	344
0.55		246	243		341	346
0.56		243	240		341	344

On constate que l'on reste dans 'la même région du ciel', selon la formule de Le Verrier, surtout pour la longitude vraie au 1/1/1847. On rappelle que pour $\alpha = 0.50$, Le Verrier avait trouvé $\varepsilon' \in [243°, 261°]$ et $\ell'_{47} = 325° \pm 10°$.

35. Il y a bien sûr des solutions algébriques, mais elles ne satisfont pas aux critères imposés : on peut avoir $m' < 0$ par exemple.
36. On rappelle que la valeur correcte pour ℓ'_{47} est 330° pour l'équinoxe J2000.

5.4.4 Solutions optimales avec un balayage pour α

On donne dans les tables suivantes les solutions optimales pour les valeurs de α qui admettent au moins une solution acceptable avec le filtrage indiqué en haut de chaque table. On donne dans ces tables la solution complète pour la planète inconnue : (α, ε', m', $m'h'$, $m'l'$), la longitude héliocentrique vraie ℓ'_{47} au 1/1/1847 ainsi que l'excentricité e' associée, les paramètres (P, Q) (pour les deux premières méthodes) et enfin pour tester la qualité de la solution le résidu global (moyenne quadratique dans les 18 équations de départ, une fois que l'on a reporté les valeurs des inconnues).

TABLE 5.6 – Solutions optimales obtenues par 3 méthodes

Solutions optimales avec la première méthode $P_{max} = 20$, $Q_{max} = 25$, $e'_{max} = 0.35$									
α	ε'	ℓ'_{47}	m'	P	Q	$m'h'$	$m'l'$	e'	res
0.49	219°	314°	0.89	−6	−25	−0.07	−0.18	0.22	45.9
0.50	258°	329°	1.14	4	−21	−0.11	0.21	0.21	26.8
0.51	264°	332°	1.70	5	−17	−0.01	0.24	0.14	19.2
0.52	264°	336°	1.65	−1	−13	−0.02	0.23	0.14	16.4
0.53	267°	340°	2.01	−2	−14	0.04	0.23	0.12	18.1
0.54	267°	344°	2.03	−14	−13	0.02	0.22	0.11	23.9
0.65	54°	161°	0.52	5	−20	0.03	−0.08	0.16	48.3
0.66	66°	208°	0.27	2	−4	0.08	−0.03	0.33	20.7
0.67	225°	334°	0.39	−2	−17	−0.00	0.02	0.05	26.1
0.68	228°	356°	0.25	9	−10	−0.02	−0.05	0.20	11.7

Solutions optimales avec la deuxième méthode $P_{max} = 16$, $Q_{max} = 24$, $e'_{max} = 0.2$									
α	ε'	ℓ'_{47}	m'	P	Q	$m'h'$	$m'l'$	e'	res
0.48	207°	277°	1.95	12	−19	0.00	−0.04	0.02	58.2
0.49	210°	294°	1.31	−1	−24	0.03	−0.18	0.14	46.7
0.50	264°	330°	1.78	−2	−20	−0.01	0.24	0.13	25.5
0.51	264°	333°	1.71	0	−16	−0.01	0.24	0.14	18.4
0.52	261°	335°	1.41	3	−14	−0.05	0.21	0.15	15.8
0.53	255°	337°	1.08	6	−12	−0.12	0.15	0.17	15.1
0.54	252°	340°	0.99	8	−11	−0.13	0.11	0.17	15.1
0.55	246°	341°	0.87	9	−10	−0.13	0.04	0.16	15.7
0.56	243°	341°	0.84	9	−9	−0.12	0.02	0.14	17.0
0.57	237°	337°	0.81	10	−9	−0.09	−0.02	0.12	19.5
0.58	234°	334°	0.80	10	−8	−0.07	−0.03	0.10	23.3
0.59	228°	328°	0.79	12	−7	−0.04	−0.04	0.07	29.2
0.60	222°	322°	0.75	15	−2	−0.01	−0.04	0.06	36.7
0.66	228°	352°	0.27	14	−11	−0.02	−0.04	0.17	16.5
0.67	228°	354°	0.26	12	−10	−0.02	−0.05	0.19	13.2
0.68	225°	349°	0.26	15	−14	−0.01	−0.05	0.18	17.3

Solutions optimales avec la troisième méthode $e'_{max} = 0.23$							
α	ε'	ℓ'_{47}	m'	$m'h'$	$m'l'$	e'	res
0.48	3°	67°	0.95	0.02	−0.03	0.04	24.1
0.49	183°	251°	1.71	0.13	0.07	0.09	11.6
0.50	189°	272°	0.64	0.14	−0.04	0.22	12.2
0.52	264°	336°	1.03	−0.03	0.20	0.20	10.4
0.53	258°	339°	0.83	−0.09	0.16	0.22	8.9
0.54	252°	344°	0.71	−0.13	0.10	0.23	9.0
0.55	243°	346°	0.60	−0.13	0.01	0.22	9.7
0.56	240°	344°	0.60	−0.11	−0.01	0.19	11.0
0.57	237°	343°	0.58	−0.09	−0.03	0.17	13.0
0.58	231°	338°	0.53	−0.06	−0.05	0.15	15.6
0.59	225°	333°	0.45	−0.03	−0.06	0.15	19.1
0.60	216°	324°	0.36	0.01	−0.06	0.16	23.5
0.61	294°	387°	0.31	0.04	0.05	0.20	34.0
0.65	45°	147°	0.31	0.01	−0.05	0.16	18.4
0.66	51°	163°	0.32	0.02	−0.04	0.14	11.9
0.67	54°	171°	0.30	0.03	−0.04	0.15	10.9

Convenons que la valeur $\varepsilon' = 258°$ pour $\alpha = 0.5$ dans le premier tableau peut surprendre dans un premier temps ; en fait, à l'issue de sa première approche, Le Verrier n'avait pas retenu une valeur optimale pour ε', il s'était contenté d'un encadrement $243° - 261°$, et la valeur 258° est bien dans cet intervalle.
On voit que les solutions à ces systèmes d'équation dépendent assez fortement de la méthode de résolution. Par contre pour la tranche $0.50 - 0.60$, la position prédite au 1/1/1847 dépend relativement peu de la méthode et du rapport des demi-grands axes. Ainsi, en utilisant la même méthode que Le Verrier, on aurait assez bien localisé la planète inconnue avec une large tranche de valeurs de α.
Il y a peu de solutions acceptables dans la tranche $0.60 - 0.66$, du fait de la présence de petits dénominateurs dans les expressions algébriques des perturbations : en effet pour $\alpha = 0.64$, $\tilde{\gamma} \simeq 0.5$, d'où les valeurs importantes pour les fractions comportant au dénominateur $(1 - 2\tilde{\gamma})$ ou $(1 - 2\tilde{\gamma})^2$. Pour ces valeurs de α, on constate plutôt un basculement de ℓ'_{47} vers les valeurs $150 - 160°$, décalées [37] de la valeur correcte d'environ 180°. Du fait du choix initial, $\alpha = 0.5$, qui entraîne $\tilde{\gamma} \simeq 0.33$, Le Verrier était plutôt attentif aux dénominateurs en $(1 - 3\tilde{\gamma})^k$.
Pour les solutions acceptables (voir annexe, § D.5 p. 493), on constate que les méthodes 1 et 2 donnent des résultats assez cohérents avec des valeurs pour ℓ'_{47} de l'ordre de $330{-}340°$. Par contre, la méthode 3 donne des résultats bien peu cohérents. C'est encore une fois le flair de Le Verrier d'avoir choisi la bonne stratégie pour exploiter ses équations.

5.5 Recherche d'orbites circulaires en adaptant les calculs de Le Verrier

Adams, dans sa recherche de la planète qui perturbe Uranus, a fait plusieurs tentatives de complexité croissante (voir chap. 10), en commençant par la recherche d'une orbite circulaire.
Le Verrier a voulu trouver, en une seule approche, une orbite définitive, donc elliptique. Aurait-il notablement simplifié ses calculs s'il avait cherché dans un premier temps une orbite circulaire ? En fait pas énormément : dans ses équations de condition, ajustées en y faisant $e' = 0$, il aurait eu à déterminer 5 variables au lieu de 7.
On reprendra en détail l'étude de la recherche d'orbites circulaires au chapitre 8 à l'aide de INPOP [Fienga, 2019], puis au chapitre 10 à l'occasion du premier calcul effectué par Adams en 1843, calcul qui testait l'existence d'une orbite circulaire pour une planète troublante située au double de la distance d'Uranus. Enfin, on rassemblera l'ensemble de ces résultats partiels à la fin du chapitre 11 et on montrera, en s'appuyant sur la méthode utilisée par Adams, que les équations de condition écrites pour $e' = 0$ n'auraient pas permis de déterminer un rapport des demi-grands axes optimal.
On va détailler dans les paragraphes suivants les résultats que l'on obtiendrait pour la reherche d'une orbite circulaire en s'appuyant sur les 18 équations de condition héliocentriques de Le Verrier (4.17), puis sur les 279 équations, mises sous forme géocentrique.

5.5.1 Utilisation de conditions portant sur la longitude héliocentrique

J'ai refait les calculs de Le Verrier pour α variant [38] de 0.5 à 0.6 avec un pas de 0.01 en utilisant les 18 équations héliocentriques (4.17) de Le Verrier adaptées en y faisant $e' = 0$.

37. On retrouvera ce minimum secondaire pour la longitude optimale, décalé de 180°, dans les résidus quand on fera appel à INPOP au chapitre 8, en particulier en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings.
38. Il est inutile de considérer des valeurs plus élevées, car les calculs se dégradent fortement du fait de la présence de petits dénominateurs.

TABLE 5.7 – Paramètres obtenus avec TRIP pour une orbite circulaire en s'appuyant sur les 18 équations de condition héliocentriques de Le Verrier (4.17), modifiées en y faisant $e' = 0$

α	ε' (°)	$\delta\varepsilon$	δn ($''$)	δe ($''$)	$e\delta\varpi$ ($''$)	$1/m'$	ℓ'_{47} (°)	rés (as)
0.50	208	16	−0.17	17.3	−49.7	6308	279	64
0.51	209	19	−0.16	15.8	−46.9	6771	282	60
0.52	211	22	−0.15	17.0	−46.9	7229	287	55
0.53	212	27	−0.13	17.2	−48.9	7767	290	51
0.54	214	33	−0.12	19.6	−52.0	8261	294	47
0.55	215	42	−0.10	21.0	−56.7	8859	297	44
0.56	216	55	−0.08	23.0	−63.0	9490	300	40
0.57	217	75	−0.05	25.9	−71.6	10142	304	38
0.58	217	109	−0.01	29.9	−83.9	10802	307	36
0.59	217	170	0.03	32.2	−102.0	11643	309	37
0.60	216	293	−0.01	25.5	−128.9	12960	310	43

L'optimum se produit pour $\alpha = 0.58$, mais on est assez loin de la valeur correcte (327°) pour la longitude héliocentrique vraie (ℓ'_{47}) au 1/1/1847. Et les résultats ne sont pas réalistes quand on se rapproche de la valeur exacte 0.63, du fait des petits dénominateurs.
Et voici, fig. 5.10 ce que l'on obtient graphiquement.

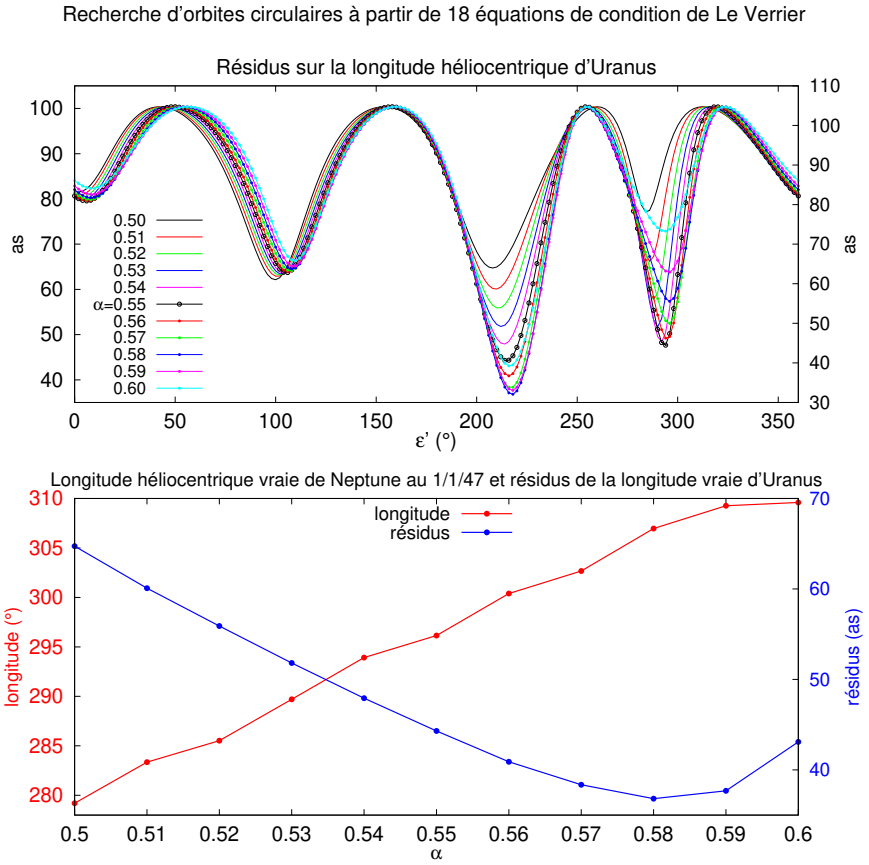


FIGURE 5.10 – En haut, résidus sur la longitude héliocentrique d'Uranus quand on cherche une orbite circulaire pour Neptune, en adaptant la méthode de Le Verrier, en faisant $e' = 0$. En bas, longitude héliocentrique vraie au 1/1/1847 en utilisant les 18 équations de condition (4.16) mises sous forme héliocentrique. Cette longitude se situe entre 280 et 310°, assez loin de la valeur exacte 327°. On a tracé sur le même graphe les résidus minimaux de l'observable d'Uranus.

5.5.2 Utilisation de conditions portant sur la longitude géocentrique

On va faire les mêmes constatations si l'on utilise les 279 équations de Le Verrier mises cette fois sous forme géocentrique. Mais l'amplitude des valeurs pour la longitude vraie est plus faible.

TABLE 5.8 – Paramètres pour une orbite circulaire en s'appuyant sur les 279 équations géocentriques prises individuellement

α	$\varepsilon'(^\circ)$	$\delta\varepsilon(''')$	$\delta n(''')$	$\delta e(''')$	$e\delta\varpi(''')$	$1/m'$	$\ell'_{47}(^\circ)$	rés$(''')$
0.50	227	10	−0.07	47.6	−32.5	5184	298	132
0.51	225	14	−0.03	39.7	−36.6	5638	298	124
0.52	224	18	−0.01	36.3	−39.8	6127	300	119
0.53	224	23	0.00	35.8	−43.0	6625	302	116
0.54	224	29	0.02	36.2	−47.0	7170	304	116
0.55	224	37	0.03	37.2	−52.0	7788	306	120
0.56	223	50	0.04	36.4	−58.4	8634	307	129
0.57	222	68	0.03	35.2	−65.2	9807	309	145
0.58	220	91	−0.04	30.4	−71.1	11916	309	173
0.59	214	113	−0.25	14.0	−70.1	17098	305	211
0.60	198	105	−0.68	−15.4	−52.2	30414	292	250

Et voici, fig. 5.11, ce que l'on obtient graphiquement

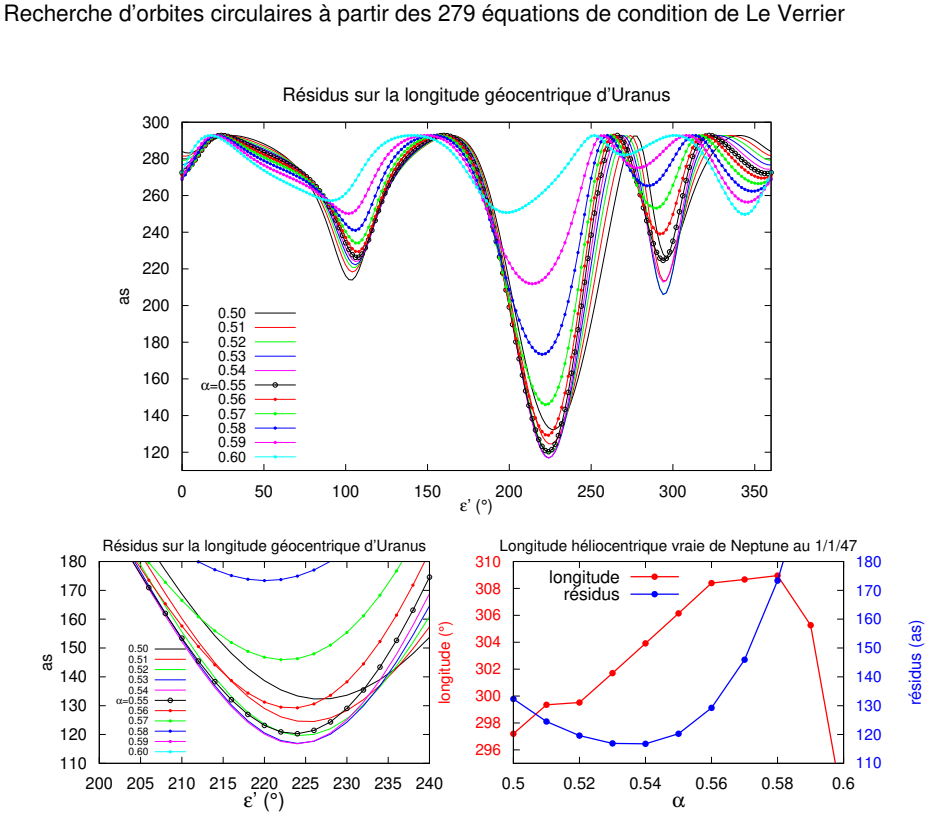


FIGURE 5.11 – En haut, résidus sur la longitude géocentrique d'Uranus quand on résout les 279 équations géocentriques (fig. 4.13), prises individuellement. En bas, à gauche, agrandissement des minima et à droite, longitude géocentrique vraie au 1/1/1847 en utilisant les 279 équations de condition mises sous forme géocentrique, avec $e' = 0$. Cette longitude se situe entre 297 et 309°, assez loin de la valeur exacte 327°. On a tracé aussi les résidus minimaux de l'observable d'Uranus ; ces résidus sont plus forts que dans le cas précédent, car ils portent sur 279 équations de condition et non sur 18

Chapitre 5 : enchaînements pour localiser la planète perturbatrice

Deuxième méthode

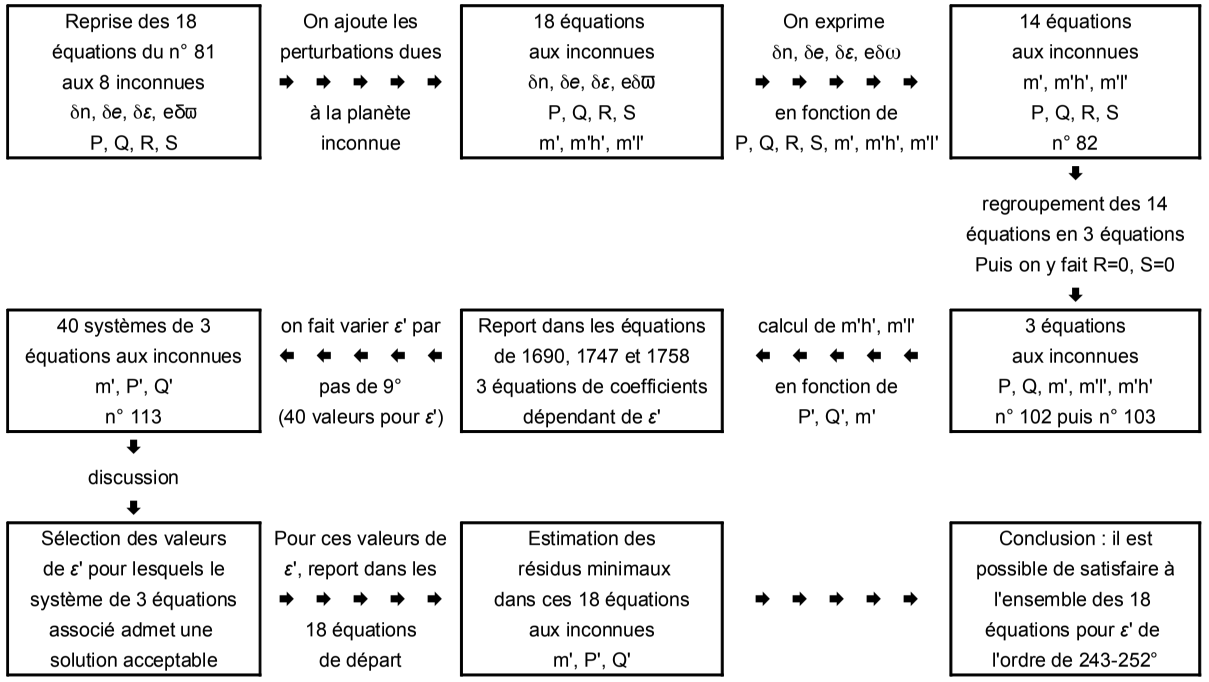


FIGURE 5.12 – Enchaînement des différentes manipulations d'équations permettant de donner une première localisation de la planète perturbatrice

Chapitre 6

APPROXIMATION FINALE

Objectifs

Présentation Après avoir obtenu dans une première approche une première localisation de la planète perturbatrice au 1/1/47 ($\ell'_{47} = 325° \pm 10°$), Le Verrier essaie d'affiner cette localisation en augmentant le nombre d'équations de condition. On détaille ses calculs et on examine ses conclusions, qui sont correctes, à part une erreur dans l'interpolation finale (section 6.2).
On examine ensuite l'accusation portée par Peirce, qui qualifie la découverte de Neptune par Galle et d'Arrest de 'Happy accident' et on montre que cette accusation semble infondée (section 6.3).
Enfin, on examine la thèse effectuée par Baghdady en 1980 sur les calculs de Le Verrier pour constater que cette thèse est très incomplète et comporte plusieurs erreurs (section 6.4).

Sommaire

6.1 Position du problème **201**
6.1.1 Rappel des calculs effectués par Le Verrier 201
6.1.2 Options envisagées pour les calculs ultérieurs 201
6.1.3 Bilan des calculs précédents 202
6.2 Mise en œuvre de l'approximation finale **202**
6.2.1 Point de départ des calculs 202
6.2.2 Organisation du calcul 203
6.2.3 Résolution des équations de condition (TAB 6.2) 212
6.2.4 Découverte 222
6.2.5 Erreur de calcul de Le Verrier 225
6.2.6 Conséquence du passage de C_t à Σ 226
6.2.7 Compléments sur les positions calculées et observées de Neptune 227
6.2.8 Illustration graphique 229
6.2.9 Estimation du diamètre apparent de la planète perturbatrice 230
6.2.10 Estimation de l'inclinaison de la planète perturbatrice sur l'orbite d'Uranus 231
6.2.11 Importance de la carte de Bremiker pour la découverte visuelle 233
6.2.12 Encadrements déterminés par Le Verrier pour les paramètres elliptiques de Neptune. Formation des enceintes 235
6.3 Réactions américaines qui ont suivi la découverte de Neptune **240**
6.3.1 La planète découverte par Galle n'est pas celle calculée par Le Verrier 240

6.3.2 Discussion de l'accusation de Peirce "Happy accident" . . . 242
6.3.3 Déclarations successives de Peirce au sujet de Neptune . . . 244
6.4 Analyse critique du travail fait par Baghdady dans sa thèse . . . **246**
6.4.1 Contenu de la thèse . . . 246
6.4.2 Première solution dans la première approximation . . . 246
6.4.3 Deuxième solution dans la première approximation . . . 246
6.4.4 Deuxième approximation . . . 247
6.4.5 Prolongements . . . 247
6.4.6 Conclusions . . . 249

6.1 Position du problème

6.1.1 Rappel des calculs effectués par Le Verrier

On rappelle les enchaînements déjà effectués par Le Verrier pour prévoir la position de la planète qui perturbe Uranus ; (Le Verrier fait lui-même partiellement ce retour en arrière au n° 123 de *Herschel*) :
– il a déterminé les perturbations des éléments elliptiques d'Uranus causées par Jupiter et Saturne, et il en a déduit l'expression en fonction du temps de la perturbation de la longitude vraie d'Uranus et celle du rayon vecteur causées par ces deux planètes ;
– à partir de ces résultats, il a établi des éphémérides héliocentriques (v, λ), puis géocentriques (G, b) et enfin des tables de coordonnées équatoriales ($\mathring{a}$, D) pour Uranus.
– il a comparé ces coordonnées équatoriales calculées aux coordonnées équatoriales observées à certaines époques (s'étalant de 1690 à 1845) et il en a déduit les écarts $\delta\mathring{a}$ en ascension droite et les écarts δD en déclinaison à chacune de ces époques.
– ensuite il en a déduit les écarts pour les coordonnées écliptiques géocentriques (G, b) à l'aide des formules

$$\delta G = P_g\,\delta\mathring{a} - Q_g\,\delta D \quad ; \quad \delta b = -R_g\,\delta\mathring{a} + S_g\,\delta D \tag{6.1}$$

(P_g, Q_g, R_g, S_g étant des coefficients facilement calculables, voir formulaire p. 259).
– il connaît les expressions théoriques de la perturbation δv de la longitude héliocentrique (voir fig. 5.1) et de la perturbation δr du rayon vecteur (voir la remarque sur l'expression littérale de δr au paragraphe 6.2.2.1), perturbations exercées par une planète extérieure à Uranus.
A partir de là deux stratégies possibles :

1. déterminer numériquement les perturbations 'observées' Δv de la longitude héliocentrique à partir de la formule $\delta G = \alpha_g \Delta v - \beta_g \delta r$; mais il faut soit connaître δr, qui n'est pas une donnée d'observation, soit ne conserver que les observations aux dates d'opposition, époques auxquelles on a $\beta_g = 0$ et on résout alors les équations de condition *héliocentriques*.
2. déterminer la perturbation théorique δG de la longitude géocentrique (en fonction de m', $m'h'$, $m'l'$) par cette même formule $\delta G = \alpha_g\,\delta v - \beta_g\,\delta r$, à partir des expressions des perturbations théoriques de δv et δr et former alors les équations de condition *géocentriques*.

Le Verrier a utilisé la première méthode lors de la première approximation (§ 5.2.3) : pour cela, il n'a retenu que les oppositions aux époques modernes et il a négligé δr aux époques anciennes, en considérant que ces observations (fortuites) d'Uranus étaient a priori moins précises que les observations modernes.

6.1.2 Options envisagées pour les calculs ultérieurs

Comme, pour cette deuxième approximation, Le Verrier veut plus de précision et plus d'observations, il va utiliser la deuxième méthode ainsi que des observations lors de quadratures.
C'est ce qu'il écrit p. 197 de *Herschel* :

> J'ai fondé mes premières recherches sur la considération des erreurs héliocentriques des Tables d'Uranus : c'est à dire que, depuis 1781 jusqu'en 1845, je n'ai employé que les observations faites dans les oppositions ; par là, les équations de condition ont été plus faciles à former, mais on s'est trouvé privé de l'avantage qu'il y eût à faire concourir les observations des quadratures d'Uranus à la détermination des constantes de la nouvelle théorie. Quant aux observations antérieures à 1781, elles n'ont pas toutes été faites au moment précis de l'opposition. La théorie pouvait donc, à ces époques, être en défaut par une double cause, soit par l'incertitude de la longitude, soit par l'inexactitude du rayon vecteur d'Uranus...

> Dans ce but, nous aurons recours aux équations de condition que nous avons formées dans le n° 78 [et reproduites figure 4.13], entre les erreurs géocentriques des Tables et les corrections des éléments de l'orbite d'Uranus. Nous compléterons ces équations en ajoutant à leurs premiers membres les perturbations de la longitude géocentrique d'Uranus, dues à l'action de la nouvelle planète...

On voit la construction cohérente de Le Verrier, qui enrichit progressivement des matériaux déjà utilisés, ce qui allège notablement les temps de calcul. On peut se reposer la question : est-ce que ces enchaînements étaient prévus dès le début de la recherche de la planète inconnue ? Ou bien sont-ils apparus comme une nécessité au fur et à mesure que les calculs progressaient ?

6.1.3 Bilan des calculs précédents

Dans l'approximation précédente, s'appuyant sur les équations (fig. 5.5), Le Verrier a obtenu comme ordre de grandeur pour la longitude ε' de l'époque $243°-252°$ et ce, en prenant comme valeur du rapport des demi-grands axes 0.5 et en utilisant pour la recherche de cette longitude optimale un balayage sur ε' avec un pas de 9°. Il est bien conscient que ce résultat n'est qu'une première approximation, mais qui le conforte dans sa démarche (*Herschel*, n° 126) ; on renvoie à la déclaration de Le Verrier mentionnée p. 191, concernant le choix assez arbitraire de 0.5. Il poursuit cette déclaration de la façon suivante :

> Toutefois, ce nombre [0.5] ne peut être considéré que comme une première approximation. Nous cherchons ici quelle correction on doit lui faire subir pour représenter l'ensemble des observations d'Uranus avec la plus grande précision possible. Tous les éléments de l'orbite de la nouvelle planète auront alors été déterminés par la théorie, et sans aucune hypothèse arbitraire.

On doit nuancer cette dernière affirmation : Le Verrier va faire seulement une recherche **locale** autour du couple (0.51, 252°) ; mais ce couple est peut-être seulement voisin d'un minimum local, et il est peut-être loin du minimum absolu ; rappelons que la valeur exacte de α est 0.636, valeur qui ne peut pas être atteinte par une recherche locale. Mais on verra au chapitre 8 que la position prédite au 1/1/1847 dépend finalement assez peu [1] du rapport des demi-grands axes.

6.2 Mise en œuvre de l'approximation finale

6.2.1 Point de départ des calculs

Le Verrier reprend donc les calculs à partir de la première approximation trouvée. Pour cela il pose

$$\frac{a}{a'} = \alpha = 0.51 + 0.02\gamma \qquad \varepsilon' = 252° + 18°\mathcal{C} \qquad \gamma \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } \mathcal{C} \in \{-1, 0, 1\} \tag{6.2}$$

Pour le rapport des demi-grands axes, il s'appuie donc sur la valeur 0.51, qu'il a utilisée à la fin du cahier n° 4, et non sur la valeur 0.50 avec laquelle il a obtenu son résultat préliminaire, (p. 198 de *Herschel*) :

> Différentes circonstances m'ayant porté [...] à refaire une portion des calculs compris dans la troisième partie de ce travail [la première approximation], en supposant le rapport des moyennes distances des deux planètes égal, non plus à 0.50, mais à 0.51, je reconnus que la seconde hypothèse était plus précise que la première.

1. L'explication de cette constatation, faisant appel à INPOP, est l'objet essentiel du chapitre 8 de cette thèse.

Effectivement, à la fin du cahier n° 4, Le Verrier refait pour $\alpha = 0.51$ une "portion" des calculs qu'il a faits pour $\alpha = 0.50$: 50 pages de calcul pour 0.51 contre 74 pour 0.50, et les calculs pour 0.51 s'arrêtent brutalement à la fin de ce cahier n° 4, sans véritable aboutissement, et l'hypothèse de manuscrits perdus semble peu probable. Mais ni dans *Herschel*, ni dans les manuscrits, il ne dit pourquoi l'hypothèse 0.51 lui semble plus précise que l'hypothèse 0.50.

En fait, pour les calculs effectifs, il ne retient que les 6 combinaisons suivantes parmi les 9 possibles.

cas n°	1	2	3	4	5	6
γ	-1	0	0	0	1	1
$\mathcal{C}$	0	-1	0	1	-1	0

Pourquoi ces 6 combinaisons ? Le Verrier en donne une justification a posteriori dans *Herschel* (p. 198) :

> Dans la solution à laquelle nous arriverons en définitive, γ sera à très-peu près égal à 1, et $\mathcal{C}$ sera compris entre 0 et -1 ; en sorte que les valeurs particulières des fonctions... assurent... l'exactitude de la marche des expressions algébriques approchées auxquelles nous parviendrons.

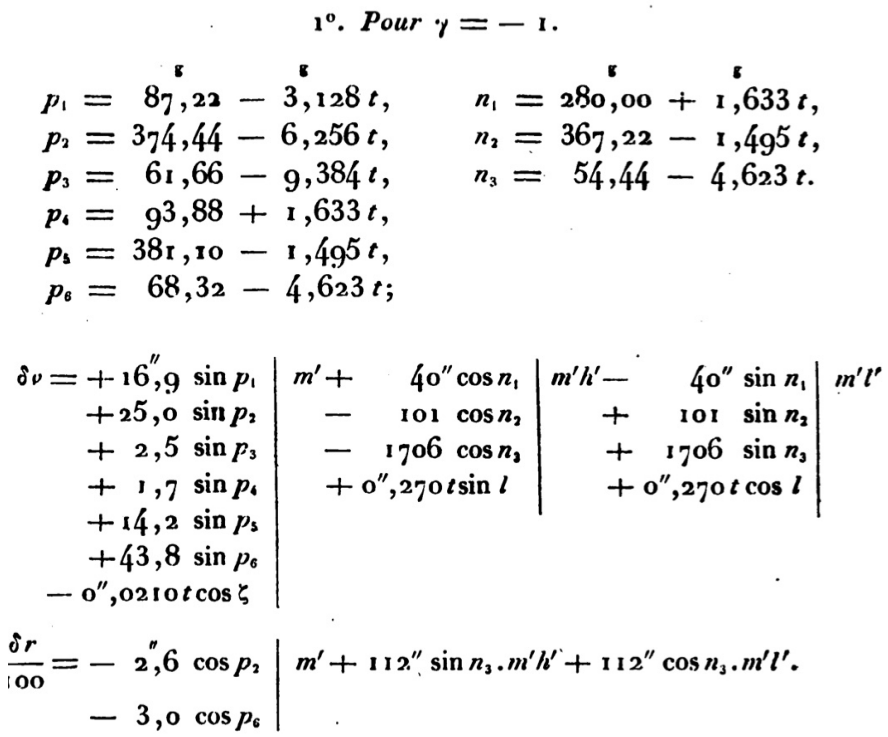
Mais c'est seulement une justification a posteriori. On peut avancer d'autres raisons : Le Verrier mènera de front les calculs pour les différentes valeurs du couple $(\gamma, \mathcal{C})$ en utilisant des expressions quadratiques en $(\gamma, \mathcal{C})$ pour les coefficients de ses équations ; or, un polynôme quadratique de 2 variables dépend de 6 coefficients, d'où la nécessité de se limiter à 6 couples $(\gamma, \mathcal{C})$. Le Verrier doit peut-être penser que les corrections sur (α, ε') vont en sens contraire : en effet, si γ augmente, le moyen mouvement augmente aussi et pour arriver à une position donnée au 1/1/1847, il faut alors que la longitude de l'époque diminue, d'où l'élimination des couples (1,1) et $(-1,-1)$; d'autre part, Le Verrier doit peut-être penser [2] que γ doit être plutôt positif, d'où l'élimination de $(-1,1)$.

6.2.2 Organisation du calcul

6.2.2.1 Calcul des perturbations de la longitude héliocentrique

Le Verrier commence par calculer, pour les 3 valeurs retenues pour α (0.49, 0.51 et 0.53), la perturbation de la longitude héliocentrique exercée par la planète perturbatrice, à partir de l'expression théorique donnée au n° 94 de *Herschel*, et au début du cahier n° 4 et reproduite à la figure 5.1. Il donne aussi l'expression de δr. On a reproduit figure 6.1 les expressions obtenues pour $\gamma = -1$, i.e. $\alpha = 0.49$.
Le Verrier ne donne que le résultat numérique final pour le rayon vecteur, sans aucun calcul intermédiaire ; l'expression littérale de δr ne figure ni dans *Herschel*, ni dans les manuscrits pour Neptune ; elle figure partiellement dans le cinquième volume manuscrit Ms 1063 consacré à Mercure (datant de 1842). Pourtant, il a dû utiliser cette expression pour obtenir les valeurs données à la page 200 de *Herschel* (et reproduites figure 6.1). Est-ce que les expressions théoriques ont disparu ? C'est possible, car s'il avait vraiment écrit les formules théoriques pour δr dans ses manuscrits, elles se seraient retrouvées dans *Herschel*, au même titre que les formules pour la longitude mais cette absence de formule théorique pour δr reste étonnante.

2. Mais il n'y a pas d'indications en ce sens dans les manuscrits, à part le fait qu'il indique que la valeur 0.51 est plus précise que 0.50, mais il n'en donne aucune justification.



1°. *Pour* $\gamma = -1$.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 87,22 - 3,128\,t, & n_1 &= 280,00 + 1,633\,t,\\
p_2 &= 374,44 - 6,256\,t, & n_2 &= 367,22 - 1,495\,t,\\
p_3 &= 61,66 - 9,384\,t, & n_3 &= 54,44 - 4,623\,t.\\
p_4 &= 93,88 + 1,633\,t,\\
p_5 &= 381,10 - 1,495\,t,\\
p_6 &= 68,32 - 4,623\,t;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
\delta v = +16'',9 \sin p_1 & m' + 40'' \cos n_1 & m'h' - 40'' \sin n_1 & m'l' \\
\quad +25,0 \sin p_2 & \quad - 101 \cos n_2 & \quad + 101 \sin n_2 & \\
\quad + 2,5 \sin p_3 & \quad - 1706 \cos n_3 & \quad + 1706 \sin n_3 & \\
\quad + 1,7 \sin p_4 & \quad + 0'',270\, t \sin l & \quad + 0'',270\, t \cos l & \\
\quad +14,2 \sin p_5 & & & \\
\quad +43,8 \sin p_6 & & & \\
- 0'',0210\, t \cos \zeta & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{\delta r}{100} = - 2'',6 \cos p_2 & m' + 112'' \sin n_3 . m'h' + 112'' \cos n_3 . m'l'. \\
\quad - 3,0 \cos p_6 &
\end{array}
$$

FIGURE 6.1 – Perturbation théorique sur la longitude héliocentrique et le rayon vecteur d'Uranus crées par la planète perturbatrice pour $\gamma = -1$, i.e. $\alpha = 0.49$ et $\varepsilon' = 252°$ (*Herschel* p. 200)

Comme l'a signalé [3] Baghdady [Baghdady, 1980], l'expression théorique de δr peut être trouvée dans Somerville [Somerville, 1836] ; c'est la formule que j'ai utilisée pour faire mes calculs. Elle est reproduite à l'équation (7.5) au chapitre 7.

Le Verrier examine ensuite les perturbations du second degré en les excentricités de la longitude héliocentrique moyenne, dont voici l'expression théorique, donnée au n° 92 de *Herschel*.

$$
\begin{aligned}
\delta l = & \frac{3B\alpha e^2 n^2}{10000''(3n'-n)^2} m' \sin(3l' - l - 2\varpi) \\
& + \frac{3C\alpha e n^2}{10000''(3n'-n)^2} m' e' \sin(3l' - l - \varpi - \varpi') \\
& + \frac{3D\alpha n^2}{10000''(3n'-n)^2} m' e'^2 \sin(3l' - l - 2\varpi').
\end{aligned}
$$

FIGURE 6.2 – Terme de degré 2 selon les excentricités de la perturbation de la longitude vraie, dont Le Verrier doit tenir compte dans cette approximation finale (B, C, D sont des coefficients ne dépendant que de α)

3. Baghdady signale des écarts importants entre les valeurs utilisées par Le Verrier et celles qu'il a trouvées lui-même à partir des formules de Somerville (voir § 7.2.2).

Voici ce qu'il en dit (*Herschel*, p. 201) :

> L'expression de la seule perturbation du second ordre dont il soit nécessaire de tenir compte a été donnée au n° 92 [reproduite fig. 6.2]. Elle renferme un terme proportionnel à m', un autre proportionnel à $m'e'$; un troisième, enfin, proportionnel à $m'e'^2$. Le terme proportionnel à m' ne changeant rien à la forme des équations de condition, n'apporte aucune nouvelle difficulté théorique ; je l'ai cependant négligé, parce que son coefficient est assez petit pour qu'on puisse confondre l'effet de ce terme avec le moyen mouvement, relativement à la période d'observation que nous possédons. Le terme en $m'e'$, ne dépendant que de $m'h'$ et $m'l'$, ne complique pas non plus la forme des équations : c'est, d'ailleurs, le plus considérable des trois. Il a été nécessaire de tenir compte du terme en t^2, qu'on obtient par le développement de cette partie [la partie trigonométrique] de l'inégalité. Quand au terme en $m'e'^2$, il ajouterait de grandes difficultés à la résolution des équations, s'il était nécessaire de le conserver ; mais, d'après ce que la première approximation du problème nous a appris de la petitesse de e', on peut s'assurer que le coefficient de cette troisième partie de l'inégalité est assez petit pour qu'on puisse encore confondre son effet avec le moyen mouvement. Par ce moyen, les équations du problème continueront à être linéaires par rapport à m', $m'h'$ et $m'l'$; et nous n'aurons plus, pour compléter les perturbations, qu'à ajouter à la longitude héliocentrique les termes suivants :

$$\begin{aligned}
&1^{\circ}.\ \text{Pour } \gamma = -1 \text{ et } 6 = 0, && \delta v = -0'',00526\, t^2 m'h' + 0'',00751\, t^2 m'l' ;\\
&2^{\circ}.\ \text{Pour } \gamma = 0 \text{ et } 6 = -1, && \delta v = -0,01056\, t^2 m'h' + 0,00018\, t^2 m'l' ;\\
&3^{\circ}.\ \text{Pour } \gamma = 0 \text{ et } 6 = 0, && \delta v = -0,00606\, t^2 m'h' + 0,00865\, t^2 m'l' ;
\end{aligned}$$

FIGURE 6.3 – Terme de degré 2 en l'excentricité retenu par Le Verrier dans l'expression de δv pour 3 valeurs du couple $(\gamma, \mathcal{C})$; Le Verrier a développé le terme en sinus, écrit à la figure 6.2, limité au degré 2 du temps (*Herschel*, p. 202)

On peut encore une fois admirer la puissante analyse théorique du problème faite par Le Verrier avant de se lancer dans les calculs.

6.2.2.2 Calcul des perturbations de la longitude géocentrique

À partir des expressions algébriques précédentes de δv et de δr, Le Verrier donne les valeurs numériques des coefficients de m', $m'h'$ et $m'l'$ dans l'expression de la longitude héliocentrique, du rayon vecteur et de la longitude géocentrique pour les 114 dates du tableau écrit au n° 78 (tableau reproduit à la figure 4.13 et dans lequel il a déjà fait la moyenne d'observations voisines parmi les 279 observations de départ), et ce pour les 6 valeurs du couple $(\gamma, \mathcal{C})$. Les tableaux de valeurs numériques pour les coefficients de m', $m'h'$ et $m'l'$ s'étendent sur 18 pages (p. 203−220 de *Herschel*).
Pour passer des coefficients de δv et de δr à ceux de δG, Le Verrier s'appuie sur la formule (4.9)

$$\delta G = \alpha_g(t)\, \delta v - \beta_g(t)\, \delta r$$

J'ai reproduit figure 6.4 le début de la première page des coefficients de m', $m'h'$ et $m'l'$ dans l'expression de δG correspondant au couple (-1,0).

TABLE 6.1 – Coefficients numériques de m', $m'h'$ et $m'l'$ dans les expressions de la longitude héliocentrique, du rayon vecteur et de la longitude géocentrique obtenus avec TRIP pour le couple $(-1,0)$. On trouve des valeurs très voisines de celles de Le Verrier, données à la figure 6.4

époque	coefficient de m' dans			coefficient de $m'h'$ dans			coefficient de $m'l'$ dans		
	δv	$\frac{\delta r}{100}$	δG	δv	$\frac{\delta r}{100}$	δG	δv	$\frac{\delta r}{100}$	δG
1690.98	+12.8	+3.6	+13.9	+1311	+68	+1377	+1162	−89	+1197
1712.25	+71.1	−4.4	+73.2	−1075	+91	−1103	+1528	+66	+1608
1715.27	+65.7	−4.8	+68.0	−1353	+74	−1406	+1275	+84	+1351
1715.33	+65.5	−4.8	+66.4	−1358	+74	−1384	+1270	+84	+1333
1750.79	−65.5	+1.2	−66.7	+352	−108	+336	−1570	−32	−1614
1750.92	−65.3	+1.2	−64.3	+365	−107	+336	−1567	−32	−1557
1753.92	−58.8	+1.9	−58.3	+701	−98	+677	−1428	−55	−1440
1756.74	−49.4	+2.5	−51.6	+984	−85	+1025	−1230	−74	−1298
1764.04	−14.7	+3.8	−13.7	+1474	−36	+1449	−498	−106	−518
1769.00	+13.0	+4.3	+14.3	+1560	+4	+1591	+100	−112	+75

1°. *Pour* $\gamma = -1$ *et* $\mathcal{C} = 0$.

époques des observations.	COEFFICIENTS DE m' dans les perturbations de			COEFFICIENTS DE $m'h'$ dans les perturbations de			COEFFICIENTS DE $m'l'$ dans les perturbations de		
	la longitude héliocentrique.	la centième partie du rayon.	la longitude géocentrique.	la longitude héliocentrique.	la centième partie du rayon	la longitude géocentrique.	la longitude héliocentrique.	la centième partie du rayon.	la longitude géocentrique.
1690,98	+ 12″,8	+ 4″,4	+ 14″,1	+1312″	+ 68″	+1381″	+1165″	− 89″	+1202″
1712,25	+ 70,8	− 0,2	+ 73,9	−1074	+ 91	−1103	+1527	+ 66	+1607
1715,27	+ 65,6	− 1,6	+ 69,3	−1357	+ 75	−1435	+1277	+ 84	+1348
1715,33	+ 65,4	− 1,6	+ 67,4	−1362	+ 74	−1393	+1271	+ 84	+1337
1750,79	− 65,4	+ 0,9	− 66,9	+ 352	− 108	+ 337	−1570	− 31	−1618
1750,92	− 65,2	+ 1,0	− 64,0	+ 367	− 107	+ 336	−1566	− 33	−1549
1753,92	− 58,7	+ 2,3	− 57,7	+ 703	− 97	+ 675	−1426	− 55	−1429
1756,74	− 49,3	+ 3,4	− 51,6	+ 985	− 84	+1028	−1230	− 73	−1297
1764,04	− 14,8	+ 5,2	− 13,5	+1474	− 36	+1450	− 497	− 106	− 517
1769,00	+ 13,2	+ 5,3	+ 14,7	+1562	+ 4	+1596	+ 101	− 112	+ 77

FIGURE 6.4 – Début des tables donnant les coefficients numériques de m', $m'h'$ et $m'l'$ dans les expressions des perturbations de la longitude héliocentrique, du rayon vecteur et de la longitude géocentrique pour le couple $(\gamma, \mathcal{C}) = (-1, 0)$ (*Herschel*, p. 203). Pour obtenir les coefficients géocentriques, Le Verrier s'appuie sur la formule $\delta G = \alpha_g \delta v - \beta_g \delta r$

Pourquoi Le Verrier fait-il ces transformations qui nécessitent $114 \times 6 \times 9$ calculs s'étalant sur 18 pages ? On a donné les raisons plus haut : il a une plus grande précision, car il tient compte de la correction du rayon vecteur et il dispose de plus d'observations, puisqu'il peut utiliser les observations aux quadratures, en plus des seules observations aux oppositions.

6.2.2.3 Formation des équations de condition

Le Verrier peut maintenant passer à la formation complète des équations de condition géocentriques (*Herschel*, n° 131) :

> L'expression complète de la perturbation de la longitude géocentrique [exercée par une planète extérieure], à une époque déterminée, se compose de la réunion des trois termes en m', $m'h'$ et $m'l'$ dont les coefficients sont inscrits dans les tableaux que nous venons de former [voir fig. 6.4]. Nous compléterons, par l'addition de ces termes, les premiers membres des équations de condition qui, dans le n° 78 [représentées fig. 4.13], correspondent à chaque groupe des observations faites à une même époque. Ces équations sont en nombre tel, que si nous les conservions toutes séparément, les calculs suivants seraient d'une trop grande prolixité : mais nous n'y gagnerions rien sous le rapport de l'exactitude. Il vaut mieux substituer à ces équations d'autres conditions moyennes, correspondant chacune à un petit nombre d'observations peu distantes entre elles, eu égard à la lenteur du mouvement d'Uranus.
> Le tableau suivant des nouvelles conditions [voir fig. 6.5], au nombre de trente-trois, indiquera suffisamment quelles sont celles des équations du n° 78 qui ont été groupées ensemble. Il est bien entendu qu'en prenant la moyenne de plusieurs équations, on a fait entrer chacune d'elles dans le calcul, proportionnellement au nombre d'observations sur lequel elle était fondée.

Au n° 131, il commence donc par rassembler les 114 équations du n° 78 (§ 4.13), afin de faire la moyenne de paquets d'observations proches dans le temps, le nombre total de paquets étant 33 ; mais pourquoi avoir choisi 33 ? Les groupements sont dans une large mesure assez arbitraires ; en examinant la répartition, il semblerait que l'intention était que chaque groupement contienne environ 10 observations, soit 26 groupements pour les observations modernes et 7 pour les observations anciennes, qu'il est plus difficile de regrouper, car réparties de façon très irrégulière : 26+7=33 ; comme le dit Le Verrier, les groupements effectués peuvent facilement se deviner en comparant le tableau de la figure 6.5 avec la liste du n° 78 (reproduite fig. 4.13).
Le Verrier voulait sûrement augmenter de façon significative le nombre d'équations de condition par rapport à sa première approche : il passe de 18 à 33 équations, mais il ne voulait pas que ce nombre devienne excessif, afin de ne pas rendre les calculs ultérieurs trop pénibles, car il sait qu'il doit faire des manipulations du type moindres carrés (voir encadré 13, p. 211).

Il sépare la formation des équations de condition en deux temps :

> Les termes en $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$ et le terme *connu* [O−C], obtenus dans le calcul resteront les mêmes pour les différentes valeurs de γ et de $\mathcal{C}$; au contraire, les expressions des perturbations [dues à la planète inconnue] varieront suivant les hypothèses faites sur γ et $\mathcal{C}$. Pour éviter un double emploi, je commencerai par présenter la partie invariable des équations, en y désignant par les symboles [1], [2], [3],...., les expressions variables des perturbations (fig. 6.5). Je donnerai ensuite les valeurs numériques de ces symboles pour les différents systèmes de valeurs de γ et $\mathcal{C}$ [fig. 6.6].

Chaque équation contient donc la correction apportée par l'ajustement des éléments elliptiques d'Uranus, partie indépendante de $(\gamma, \mathcal{C})$, et la perturbation exercée par la planète extérieure, partie dépendant du couple $(\gamma, \mathcal{C})$.
Et il y a en tout 6 systèmes de 33 équations ; un système de ce type sera nommé (TAB 6.2) par la suite. Le système pour le couple $(0, -1)$ est représenté à la table 6.2.
On a reproduit fig. 6.5, la partie 'invariable' des 33 nouvelles équations de condition, obtenues par Le Verrier en faisant les groupements indiqués dans les équations du n° 78 de *Herschel* (équations reproduites fig. 4.13) et la moyenne de ces groupements.

ÉPOQUES.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
1690	1	1,019 $\delta\varepsilon$ −111,09 δn − 1,986 δe +0,538 $e\delta\varpi$ − 65″,9 + [1] = 0
1712—1715	4	1,152 $\delta\varepsilon$ − 98,45 δn − 0,033 δe − 2,213 $e\delta\varpi$ − 66,5 + [2] = 0
1750	2	0,924 $\delta\varepsilon$ − 45,42 δn +0,793 δe +1,736 $e\delta\varpi$ + 35,3 + [3] = 0
1753—1756	2	0,933 $\delta\varepsilon$ − 41,62 δn +0,194 δe +1,910 $e\delta\varpi$ + 33,4 + [4] = 0
1764	1	0,913 $\delta\varepsilon$ − 32,83 δn − 0,909 δe +1,652 $e\delta\varpi$ + 21,2 + [5] = 0
1768—1769	8	0,948 $\delta\varepsilon$ − 29,36 δn − 1,475 δe +1,264 $e\delta\varpi$ + 8,2 + [6] = 0
1771	1	0,996 $\delta\varepsilon$ − 27,93 δn − 1,788 δe +0,953 $e\delta\varpi$ + 11,9 + [7] = 0
1781—1782	10	1,051.8 $\delta\varepsilon$ − 18,576 δn − 1,987.3 δe − 0,622.0 $e\delta\varpi$ − 17,17 + [8] = 0
1783—1784	9	1,056.1 $\delta\varepsilon$ − 16,680 δn − 1,881.2 δe − 0,891.1 $e\delta\varpi$ − 20,59 + [9] = 0
1785—1788	10	1,089.4 $\delta\varepsilon$ − 14,357 δn − 1,696.5 δe − 1,270.2 $e\delta\varpi$ − 23,87 + [10] = 0
1789—1790	11	1,094,2 $\delta\varepsilon$ − 11,024 δn − 1,337.3 δe − 1,652.6 $e\delta\varpi$ − 29,03 + [11] = 0
1791—1792	10	1,111.0 $\delta\varepsilon$ − 9,015 δn − 1,070.7 δe − 1,866.0 $e\delta\varpi$ − 27,89 + [12] = 0
1793—1794	9	1,118.2 $\delta\varepsilon$ − 6,614 δn − 0,727.9 δe − 2,034.8 $e\delta\varpi$ − 30,87 + [13] = 0
1795—1797	9	1,146.7 $\delta\varepsilon$ − 4,223 δn − 0,383.7 δe − 2,178.2 $e\delta\varpi$ − 31,86 + [14] = 0
1797—1801	9	1,154.3 $\delta\varepsilon$ + 0,090 δn + 0,266.2 δe − 2,205.0 $e\delta\varpi$ − 32,20 + [15] = 0
1802—1804	11	1,144.9 $\delta\varepsilon$ + 3,247 δn + 0,739.5 δe − 2,085.3 $e\delta\varpi$ − 34,25 + [16] = 0
1804—1806	10	1,146.4 $\delta\varepsilon$ + 6,284 δn + 1,146.8 δe − 1,903.6 $e\delta\varpi$ − 35,33 + [17] = 0
1807—1808	12	1,123.7 $\delta\varepsilon$ + 8,732 δn + 1,456.1 δe − 1,635.1 $e\delta\varpi$ − 35,05 + [18] = 0
1809—1810	10	1,115.9 $\delta\varepsilon$ + 10,947 δn + 1,688.9 δe − 1,381.6 $e\delta\varpi$ − 36,66 + [19] = 0
1811—1813	11	1,070.5 $\delta\varepsilon$ + 13,171 δn + 1,870.3 δe − 0,967.8 $e\delta\varpi$ − 37,19 + [20] = 0
1813—1815	11	1,079.5 $\delta\varepsilon$ + 15,484 δn + 2,011.2 δe − 0,703.2 $e\delta\varpi$ − 37,07 + [21] = 0
1816—1817	9	1,051.7 $\delta\varepsilon$ + 17,543 δn + 2,067.4 δe − 0,322.0 $e\delta\varpi$ − 33,89 + [22] = 0
1818—1820	12	1,051.0 $\delta\varepsilon$ + 20,452 δn + 2,100.5 δe + 0,094.2 $e\delta\varpi$ − 32,49 + [23] = 0
1821—1823	9	1,027.8 $\delta\varepsilon$ + 23,132 δn + 1,998.2 δe + 0,550.4 $e\delta\varpi$ − 27,40 + [24] = 0
1824—1827	11	1,005.6 $\delta\varepsilon$ + 26,057 δn + 1,772.8 δe + 1,008.7 $e\delta\varpi$ − 25,19 + [25] = 0
1828—1830	11	0,966.0 $\delta\varepsilon$ + 28,906 δn + 1,374.9 δe + 1,424.1 $e\delta\varpi$ − 7,52 + [26] = 0
1833—1835	9	0,961.7 $\delta\varepsilon$ + 34,221 δn + 0,676.6 δe + 1,870.4 $e\delta\varpi$ + 27,91 + [27] = 0
1835—1836	10	0,930.2 $\delta\varepsilon$ + 33,880 δn + 0,594.7 δe + 1,829.1 $e\delta\varpi$ + 30,61 + [28] = 0
1837—1838	11	0,938.8 $\delta\varepsilon$ + 35,882 δn + 0,345.1 δe + 1,912.4 $e\delta\varpi$ + 45,72 + [29] = 0
1839—1840	10	0,945.6 $\delta\varepsilon$ + 38,081 δn + 0,065.6 δe + 1,957.5 $e\delta\varpi$ + 63,09 + [30] = 0
1841—1842	9	0,941.4 $\delta\varepsilon$ + 39,658 δn − 0,195.6 δe + 1,940.1 $e\delta\varpi$ + 76,98 + [31] = 0
1842—1844	9	0,927.3 $\delta\varepsilon$ + 40,292 δn − 0,352.7 δe + 1,886.9 $e\delta\varpi$ + 86,40 + [32] = 0
1844—1845	8	0,951.0 $\delta\varepsilon$ + 42,818 δn − 0,600.9 δe + 1,872.8 $e\delta\varpi$ +105,65 + [33] = 0

FIGURE 6.5 – Partie 'invariable' des 33 équations de condition géocentriques, dépendant des corrections à faire subir aux éléments elliptiques d'Uranus. Cette partie invariable est la même pour les 6 systèmes de 33 équations associés aux 6 valeurs du couple $(\gamma, \mathcal{C})$. On rappelle que les 279 équations de départ ont été regroupées en 114 équations dans un premier temps, puis, ici, en 33. L'expression de la partie variable ([1], [2], ..., [33]) est donnée fig. 6.6

On a placé fig. 6.6 les parties variables des équations de condition obtenues par Le Verrier pour deux couples $(\gamma, \mathcal{C})$.

1°. *Pour* $\gamma = -1$, $\mathcal{C} = 0$.	2°. *Pour* $\gamma = 0$, $\mathcal{C} = -1$.
$[1] = +14'',1\,m' + 1381''\,m'h' + 1202''\,m'l'$	$[1] = +39'',8\,m' - 583''\,m'h' + 707''\,m'l'$
$[2] = +70,0\,m' - 1342\,m'h' + 1410\,m'l'$	$[2] = +14,6\,m' - 841\,m'h' - 317\,m'l'$
$[3] = -65,5\,m' + 337\,m'h' - 1584\,m'l'$	$[3] = -24,6\,m' + 489\,m'h' - 143\,m'l'$
$[4] = -54,7\,m' + 852\,m'h' - 1363\,m'l'$	$[4] = -4,0\,m' + 487\,m'h' + 67\,m'l'$
$[5] = -13,5\,m' + 1450\,m'h' - 517\,m'l'$	$[5] = +34,8\,m' + 301\,m'h' + 404\,m'l'$
$[6] = +14,8\,m' + 1575\,m'h' + 79\,m'l'$	$[6] = +51,0\,m' + 125\,m'h' + 548\,m'l'$
$[7] = +31,3\,m' + 1571\,m'h' + 459\,m'l'$	$[7] = +58,4\,m' - 4\,m'h' + 619\,m'l'$
$[8] = +72,3\,m' + 794\,m'h' + 1497\,m'l'$	$[8] = +52,0\,m' - 477\,m'h' + 551\,m'l'$
$[9] = +75,4\,m' + 589\,m'h' + 1592\,m'l'$	$[9] = +46,0\,m' - 541\,m'h' + 502\,m'l'$
$[10] = +78,2\,m' + 288\,m'h' + 1710\,m'l'$	$[10] = +36,9\,m' - 636\,m'h' + 427\,m'l'$
$[11] = +76,4\,m' - 103\,m'h' + 1742\,m'l'$	$[11] = +23,6\,m' - 717\,m'h' + 304\,m'l'$
$[12] = +74,1\,m' - 353\,m'h' + 1734\,m'l'$	$[12] = +14,7\,m' - 762\,m'h' + 219\,m'l'$
$[13] = +68,9\,m' - 624\,m'h' + 1669\,m'l'$	$[13] = +3,9\,m' - 793\,m'h' + 114\,m'l'$
$[14] = +62,7\,m' - 891\,m'h' + 1595\,m'l'$	$[14] = -7,8\,m' - 823\,m'h' + 14\,m'l'$
$[15] = +46,6\,m' - 1288\,m'h' + 1325\,m'l'$	$[15] = -25,8\,m' - 817\,m'h' - 173\,m'l'$
$[16] = +33,3\,m' - 1523\,m'h' + 1054\,m'l'$	$[16] = -36,6\,m' - 778\,m'h' - 309\,m'l'$
$[17] = +19,2\,m' - 1707\,m'h' + 772\,m'l'$	$[17] = -45,5\,m' - 731\,m'h' - 432\,m'l'$
$[18] = +7,4\,m' - 1799\,m'h' + 480\,m'l'$	$[18] = -49,8\,m' - 655\,m'h' - 531\,m'l'$
$[19] = -2,8\,m' - 1858\,m'h' + 222\,m'l'$	$[19] = -52,6\,m' - 588\,m'h' - 610\,m'l'$
$[20] = -13,5\,m' - 1819\,m'h' - 122\,m'l'$	$[20] = -52,6\,m' - 464\,m'h' - 684\,m'l'$
$[21] = -22,6\,m' - 1820\,m'h' - 370\,m'l'$	$[21] = -52,7\,m' - 391\,m'h' - 745\,m'l'$
$[22] = -30,5\,m' - 1718\,m'h' - 665\,m'l'$	$[22] = -49,8\,m' - 272\,m'h' - 787\,m'l'$
$[23] = -38,4\,m' - 1584\,m'h' - 995\,m'l'$	$[23] = -44,9\,m' - 141\,m'h' - 831\,m'l'$
$[24] = -44,2\,m' - 1330\,m'h' - 1303\,m'l'$	$[24] = -37,2\,m' + 20\,m'h' - 838\,m'l'$
$[25] = -47,2\,m' - 971\,m'h' - 1577\,m'l'$	$[25] = -27,8\,m' + 199\,m'h' - 807\,m'l'$
$[26] = -46,5\,m' - 478\,m'h' - 1749\,m'l'$	$[26] = -16,9\,m' + 386\,m'h' - 714\,m'l'$
$[27] = -43,7\,m' + 280\,m'h' - 1816\,m'l'$	$[27] = -7,7\,m' + 630\,m'h' - 522\,m'l'$
$[28] = -41,3\,m' + 348\,m'h' - 1745\,m'l'$	$[28] = -6,1\,m' + 625\,m'h' - 487\,m'l'$
$[29] = -40,3\,m' + 588\,m'h' - 1700\,m'l'$	$[29] = -5,6\,m' + 687\,m'h' - 411\,m'l'$
$[30] = -38,7\,m' + 840\,m'h' - 1608\,m'l'$	$[30] = -6,1\,m' + 741\,m'h' - 321\,m'l'$
$[31] = -36,9\,m' + 1046\,m'h' - 1473\,m'l'$	$[31] = -7,4\,m' + 769\,m'h' - 228\,m'l'$
$[32] = -35,2\,m' + 1157\,m'h' - 1353\,m'l'$	$[32] = -8,7\,m' + 772\,m'h' - 167\,m'l'$
$[33] = -35,1\,m' + 1343\,m'h' - 1228\,m'l'$	$[33] = -11,1\,m' + 801\,m'h' - 81\,m'l'$

FIGURE 6.6 – Expression de la partie variable de la perturbation due à la planète inconnue pour chacune des 33 équations de condition géocentriques ; ici pour les couples $(-1,0)$ et $(0,-1)$. On retrouve dans le tableau de gauche les coefficients de la figure 6.4 pour la longitude géocentrique.

TABLE 6.2 – 33 équations de condition obtenues avec TRIP pour $\gamma = 0$ et $\mathcal{C} = -1$. En comparant aux tableaux fig. 6.5 et fig. 6.6, on constate des valeurs très voisines. La barre verticale sépare la partie 'fixe' (à gauche) de la partie 'variable' (à droite)

(1)	$1.017\ \delta\varepsilon$	$-110.89\ \delta n$	$-1.984\ \delta e$	$+0.539\ e\delta\varpi$	$+39.6\ m'$	$-583\ m'h'$	$+706\ m'l'$	$=$	65.9
(2)	$1.146\ \delta\varepsilon$	$-97.94\ \delta n$	$-0.045\ \delta e$	$-2.202\ e\delta\varpi$	$+14.0\ m'$	$-841\ m'h'$	$-309\ m'l'$	$=$	66.5
(3)	$0.922\ \delta\varepsilon$	$-45.34\ \delta n$	$+0.792\ \delta e$	$+1.734\ e\delta\varpi$	$-24.4\ m'$	$+487\ m'h'$	$-143\ m'l'$	$=$	-35.3
(4)	$0.932\ \delta\varepsilon$	$-41.59\ \delta n$	$+0.196\ \delta e$	$+1.910\ e\delta\varpi$	$-4.0\ m'$	$+486\ m'h'$	$+66\ m'l'$	$=$	-33.4
(5)	$0.912\ \delta\varepsilon$	$-32.80\ \delta n$	$-0.909\ \delta e$	$+1.649\ e\delta\varpi$	$+34.7\ m'$	$+301\ m'h'$	$+404\ m'l'$	$=$	-21.2
(6)	$0.948\ \delta\varepsilon$	$-29.35\ \delta n$	$-1.473\ \delta e$	$+1.265\ e\delta\varpi$	$+51.2\ m'$	$+125\ m'h'$	$+548\ m'l'$	$=$	-8.2
(7)	$0.995\ \delta\varepsilon$	$-27.91\ \delta n$	$-1.788\ \delta e$	$+0.953\ e\delta\varpi$	$+58.6\ m'$	$-5\ m'h'$	$+618\ m'l'$	$=$	-11.9
(8)	$1.052\ \delta\varepsilon$	$-18.58\ \delta n$	$-1.987\ \delta e$	$-0.622\ e\delta\varpi$	$+52.1\ m'$	$-478\ m'h'$	$+551\ m'l'$	$=$	17.17
(9)	$1.056\ \delta\varepsilon$	$-16.68\ \delta n$	$-1.881\ \delta e$	$-0.891\ e\delta\varpi$	$+46.1\ m'$	$-542\ m'h'$	$+502\ m'l'$	$=$	20.59
(10)	$1.090\ \delta\varepsilon$	$-14.36\ \delta n$	$-1.697\ \delta e$	$-1.271\ e\delta\varpi$	$+37.0\ m'$	$-636\ m'h'$	$+427\ m'l'$	$=$	23.87
(11)	$1.094\ \delta\varepsilon$	$-11.02\ \delta n$	$-1.337\ \delta e$	$-1.652\ e\delta\varpi$	$+23.5\ m'$	$-716\ m'h'$	$+303\ m'l'$	$=$	29.03
(12)	$1.111\ \delta\varepsilon$	$-9.02\ \delta n$	$-1.071\ \delta e$	$-1.865\ e\delta\varpi$	$+14.7\ m'$	$-762\ m'h'$	$+217\ m'l'$	$=$	27.89
(13)	$1.119\ \delta\varepsilon$	$-6.62\ \delta n$	$-0.728\ \delta e$	$-2.037\ e\delta\varpi$	$+4.0\ m'$	$-795\ m'h'$	$+113\ m'l'$	$=$	30.87
(14)	$1.147\ \delta\varepsilon$	$-4.22\ \delta n$	$-0.386\ \delta e$	$-2.179\ e\delta\varpi$	$-7.8\ m'$	$-825\ m'h'$	$+14\ m'l'$	$=$	31.86
(15)	$1.155\ \delta\varepsilon$	$+0.09\ \delta n$	$+0.265\ \delta e$	$-2.205\ e\delta\varpi$	$-25.7\ m'$	$-819\ m'h'$	$-172\ m'l'$	$=$	32.20
(16)	$1.145\ \delta\varepsilon$	$+3.24\ \delta n$	$+0.740\ \delta e$	$-2.084\ e\delta\varpi$	$-36.5\ m'$	$-780\ m'h'$	$-310\ m'l'$	$=$	34.25
(17)	$1.146\ \delta\varepsilon$	$+6.28\ \delta n$	$+1.147\ \delta e$	$-1.903\ e\delta\varpi$	$-45.5\ m'$	$-732\ m'h'$	$-432\ m'l'$	$=$	35.33
(18)	$1.124\ \delta\varepsilon$	$+8.74\ \delta n$	$+1.455\ \delta e$	$-1.638\ e\delta\varpi$	$-50.1\ m'$	$-657\ m'h'$	$-530\ m'l'$	$=$	35.05
(19)	$1.116\ \delta\varepsilon$	$+10.94\ \delta n$	$+1.689\ \delta e$	$-1.383\ e\delta\varpi$	$-53.1\ m'$	$-588\ m'h'$	$-611\ m'l'$	$=$	36.66
(20)	$1.071\ \delta\varepsilon$	$+13.17\ \delta n$	$+1.871\ \delta e$	$-0.969\ e\delta\varpi$	$-53.0\ m'$	$-464\ m'h'$	$-685\ m'l'$	$=$	37.19
(21)	$1.079\ \delta\varepsilon$	$+15.48\ \delta n$	$+2.011\ \delta e$	$-0.704\ e\delta\varpi$	$-53.0\ m'$	$-392\ m'h'$	$-745\ m'l'$	$=$	37.07
(22)	$1.046\ \delta\varepsilon$	$+17.53\ \delta n$	$+2.060\ \delta e$	$-0.303\ e\delta\varpi$	$-49.5\ m'$	$-266\ m'h'$	$-786\ m'l'$	$=$	33.89
(23)	$1.051\ \delta\varepsilon$	$+20.45\ \delta n$	$+2.100\ \delta e$	$+0.093\ e\delta\varpi$	$-45.0\ m'$	$-142\ m'h'$	$-833\ m'l'$	$=$	32.49
(24)	$1.028\ \delta\varepsilon$	$+23.13\ \delta n$	$+1.998\ \delta e$	$+0.549\ e\delta\varpi$	$-37.1\ m'$	$+18\ m'h'$	$-839\ m'l'$	$=$	27.40
(25)	$1.005\ \delta\varepsilon$	$+26.05\ \delta n$	$+1.773\ \delta e$	$+1.007\ e\delta\varpi$	$-27.6\ m'$	$+197\ m'h'$	$-808\ m'l'$	$=$	25.19
(26)	$0.965\ \delta\varepsilon$	$+28.89\ \delta n$	$+1.374\ \delta e$	$+1.422\ e\delta\varpi$	$-16.7\ m'$	$+385\ m'h'$	$-715\ m'l'$	$=$	7.52
(27)	$0.962\ \delta\varepsilon$	$+34.25\ \delta n$	$+0.678\ \delta e$	$+1.871\ e\delta\varpi$	$-7.9\ m'$	$+630\ m'h'$	$-524\ m'l'$	$=$	-27.91
(28)	$0.929\ \delta\varepsilon$	$+33.84\ \delta n$	$+0.593\ \delta e$	$+1.827\ e\delta\varpi$	$-6.3\ m'$	$+624\ m'h'$	$-488\ m'l'$	$=$	-30.61
(29)	$0.938\ \delta\varepsilon$	$+35.84\ \delta n$	$+0.345\ \delta e$	$1.910\ e\delta\varpi$	$-5.9\ m'$	$+687\ m'h'$	$-412\ m'l'$	$=$	-45.72
(30)	$0.943\ \delta\varepsilon$	$+37.95\ \delta n$	$+0.074\ \delta e$	$+1.953\ e\delta\varpi$	$-6.2\ m'$	$+738\ m'h'$	$-323\ m'l'$	$=$	-63.09
(31)	$0.941\ \delta\varepsilon$	$+39.64\ \delta n$	$-0.195\ \delta e$	$+1.939\ e\delta\varpi$	$-7.4\ m'$	$+769\ m'h'$	$-228\ m'l'$	$=$	-78.98
(32)	$0.926\ \delta\varepsilon$	$+40.25\ \delta n$	$-0.352\ \delta e$	$+1.886\ e\delta\varpi$	$-8.7\ m'$	$+771\ m'h'$	$-167\ m'l'$	$=$	-86.40
(33)	$0.951\ \delta\varepsilon$	$+42.80\ \delta n$	$-0.600\ \delta e$	$+1.872\ e\delta\varpi$	$-11.1\ m'$	$+801\ m'h'$	$-81\ m'l'$	$=$	-105.65

Méthode des moindres carrés (encadré 13)

Gauss a imaginé les grandes lignes de cette méthode dès 1795 (à l'âge de 18 ans !), mais la publication complète de son travail n'a été faite qu'en 1809. La méthode a été retrouvée indépendamment par Legendre en 1805, et publiée à cette date. La première utilisation de la méthode a servi à retrouver l'orbite de Cérès, qui avait été perdue après sa première découverte par Piazzi en 1801. ([Gauss, 1809], [Chabert, 1989] et Rossana Tazzioli dans les Génies de la Science n° 36).
Il s'en suivra une polémique, car Gauss déclare qu'il utilise cette méthode dès 1795 ; à quoi Legendre répond [Samueli, 2019]

> Il n'est aucune découverte qu'on ne puisse s'attribuer en disant qu'on avait trouvé la même chose quelques années auparavant ; mais si on n'en fournit pas la preuve en citant le lieu où on l'a publiée, cette assertion devient sans objet et n'est plus qu'une chose désobligeante pour le véritable auteur de la découverte...

Cette polémique n'est pas sans rappeler celle entre Le Verrier et Adams : Adams avait effectué ses calculs avant Le Verrier, mais il n'avait rien publié.

La méthode des moindres carrés s'utilise principalement pour des systèmes linéaires, ce que l'on suppose par la suite ; appelons n le nombre d'équations et p le nombre d'inconnues avec $n \geq p$ et même dans la pratique $n \gg p$. Le système peut s'écrire symboliquement $AX = B$ où A est une $(n,p)-$matrice et B un $n-$vecteur. La solution par les moindres carrés est donnée par $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$; X_0 est la valeur de X qui minimise $\|AX - B\|^2$ quand X prend toutes les valeurs possibles ; autrement dit, X_0 est la meilleure approximation quadratique du système $AX = B$.

La formule précédente est une formule théorique. Voyons comment on procède en pratique. Notons $(x_1, x_2, ..., x_p)$ les inconnues et $A = [a_{ij}]$. Pour appliquer la méthode des moindres carrés, on commence par former p équations $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ de la façon suivante : pour i fixé, on multiplie chaque équation du système par le coefficient de x_i dans cette équation et (E_i) est la somme de ces n équations ainsi transformées, ce qui peut se symboliser par

$$(E_i)\qquad \begin{array}{l|l} a_{1i} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{2i} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ & \qquad\qquad ..... \\ a_{ni} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{ni}x_i + ... + a_{np}x_p = b_n \end{array}$$

$$\text{soit}\quad (E_i)\quad \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{k1}\Big)x_1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{k2}\Big)x_2 + ... + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kp}\Big)x_p = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_k$$

On résout ensuite le système de Cramer formé par les p équations (E_i).

Pour obtenir (E_i), il faut faire $n(p+1)$ multiplications (et des additions, que l'on néglige car on considère qu'elles sont effectuées beaucoup plus rapidement) et donc $p(p+1)n$ multiplications pour les p équations (E_i).
Si l'on applique ce décompte à la résolution du système des 279 équations de Le Verrier comportant 7 inconnues linéaires par les moindres carrés, on doit effectuer de l'ordre de 16 000 multiplications. On comprend facilement pourquoi Le Verrier hésite à appliquer la méthode des moindres carrés sur le système complet et dans sa forme standard.
Suite page suivante.

Méthode des moindres carrés (suite) (encadré 13)

Adaptation de la méthode des moindres carrés par Le Verrier
Cependant Le Verrier sait, par expérience, que la méthode des moindres carrés est la plus sûre et la plus précise. Voici comment il va l'adapter pour obtenir l'équation (E_i) : il appelle k la ligne où se trouve le plus grand coefficient a_{ji} en valeur absolue ; pour tout j entre 1 et n, il pose $\alpha_j = 10\frac{a_{ji}}{a_{ki}}$, nombre qu'il arrondit à la valeur entière la plus proche s'il est en valeur absolue supérieur à 2 et sinon il l'arrondit à sa première décimale. Il multiplie alors les différentes équations du système par $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ en faisant toutes ces multiplications de tête, ce qui accélère grandement les calculs, puisqu'il n'a pas à faire appel à une table de logarithmes et (E_i) est la somme de ces n équations modifiées. Et il recommence cette opération pour chaque valeur de i.
En plus, afin de faciliter l'interpolation, il prépare les calculs en recopiant les multiples de 1 à 10 de chaque équation du système, comme on peut le voir sur l'exemple de la fig. 6.7, et ces 10 équations s'obtiennent en fait par additions successives et non par multiplications.

6.2.3 Résolution des équations de condition (TAB 6.2)

6.2.3.1 Organisation des calculs

Le Verrier ne peut pas appliquer la méthode des moindres carrés sous sa forme standard, car elle implique des calculs monstrueux si on les effectue à la main (voir encadré 13, p. 211). Cependant, d'expérience, il sait que c'est la méthode la plus précise, quasi incontournable. Il se fixe donc comme objectif la détermination la plus précise possible de la valeur de m' en adaptant, au mieux du calcul mental, la méthode des moindres carrés. Voici comment il envisage le calcul (p. 226 de *Herschel*) :

> Après différentes tentatives infructueuses pour tirer de ces équations [TAB 6.2], non seulement les valeurs les plus précises des inconnues qu'elles renferment, mais encore *les limites dans lesquelles doivent rester comprises les inconnues*, pour que la théorie puisse représenter les observations, j'ai été conduit à reconnaître qu'il était indispensable, comme dans ma première solution, de commencer par éliminer six des inconnues que les équations donnent très nettement en fonction de la masse, savoir : les quatre inconnues dont dépend l'orbite d'Uranus, et les inconnues $m'h'$ et $m'l'$. Lorsqu'on substituera les valeurs des variables, ainsi calculées, dans les premiers membres des équations de condition, ces premiers membres ne se réduiront pas, en général, identiquement à zéro, mais bien à des fonctions du premier degré par rapport à m'. Ce sera sur ces expressions qu'on pourra déterminer à la fois la valeur la plus précise de m' qui puisse se déduire des observations, et les limites supérieures et inférieures dans lesquelles cette masse doit nécessairement être comprise [en vue de la formation des enceintes (voir § 6.2.12)].
>
> Il nous faut donc d'abord déduire des trente-trois conditions précédentes, six équations propres à fournir les valeurs de $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$, $m'h'$, $m'l'$ en fonction de m'. Je suivrai, pour cet objet, la méthode des moindres carrés, sinon dans toute sa rigueur, du moins avec une approximation suffisante pour en conserver l'esprit. L'emploi de cette méthode est, dans le cas actuel, tellement long et pénible, que je ne me suis décidé à en faire usage qu'après m'être convaincu qu'aucune marche plus simple [4] ne conduirait à un résultat satisfaisant ; mais, en même temps que je recourais à ce moyen extrême, j'ai simplifié les calculs en réduisant les multiplicateurs à être, en général, des nombres entiers (voir encadré 13, p. 211).

Simplification des coefficients multiplicateurs successifs donc, afin d'effectuer, très vraisemblablement, les multiplications de tête et ainsi éviter le recours à la table de logarithmes.

4. Effectivement, il y a dans les manuscrits (cahier n° 5) beaucoup de calculs essayés, sans aboutir, avant qu'il ne se décide à utiliser sa variante des moindres carrés.

Le Verrier a 6 systèmes de 33 équations à étudier (un pour chaque valeur du couple $(\gamma, \mathcal{C})$). Il va les résoudre séparément. Mais pour examiner les résidus, il va essayer de ne pas faire 6 fois le même [5] calcul ; pour cela il va inventer une démarche originale pour gérer globalement les résidus.
L'ensemble de la démarche peut être divisé en 7 étapes :

1. Combiner les 33 équations sélectionnées au n° 131 de *Herschel* (système (TAB 6.2)) pour former, en appliquant sa variante des moindres carrés (voir encadré 13 p. 211 et la description donnée par Le Verrier au §6.2.3.2), 6 équations, dites intermédiaires, qui vont permettre d'éliminer 6 des 7 inconnues (i.e. toutes sauf m'). On notera (FIG. 6.8) le système formé par ces 6 équations intermédiaires, système obtenu donc en appliquant la variante des moindres carrés.
2. Résoudre les 6 équations du système (FIG. 6.8) pour exprimer $\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$, $m'h'$, $m'l'$ en fonction de m'.
3. Reporter ces expressions dans les 33 équations de condition (TAB 6.2) : on obtient ainsi un système de 33 équations linéaires en m'.
4. Pour chaque équation i $(1 \leq i \leq 33)$, il a 6 versions du premier membre, de la forme $g_{ij}m' + h_{ij}$ en fonction des 6 couples $j = (\gamma, \mathcal{C})$ retenus.
5. Voici comment Le Verrier envisage de passer [6] de 6 systèmes d'équations (FIG. 6.8) à un seul système d'équations algébriques, dépendant du couple $(\gamma, \mathcal{C})$ (*Herschel*, p. 230) :

   > L'ensemble de ces 6 systèmes (FIG. 6.8) pourra être représenté par des fonctions entières et du second ordre en γ et $\mathcal{C}$, fonctions qu'il sera très facile de former au moyen de leurs 6 valeurs particulières (*Herschel*, n° 135).

   Ainsi pour chaque valeur de $i \in [\![1, 33]\!]$, il détermine 2×6 coefficients $(a_{ik})_{1\leq k\leq 6}$ et $(b_{ik})_{1\leq k\leq 6}$ tels que (l'argument $[j]$ correspond symboliquement au cas n° j) :

$$\forall\, i, j \in [\![1, 33]\!] \times [\![1, 6]\!] \qquad \begin{cases} g_{ij} = \left(a_{i1} + a_{i2}\gamma + a_{i3}\mathcal{C} + a_{i4}\gamma^2 + a_{i5}\gamma\mathcal{C} + a_{i6}\mathcal{C}^2\right)[j] \\ h_{ij} = \left(b_{i1} + b_{i2}\gamma + b_{i3}\mathcal{C} + b_{i4}\gamma^2 + b_{i5}\gamma\mathcal{C} + b_{i6}\mathcal{C}^2\right)[j] \end{cases}$$

   On retiendra (abstraction de la variable j)

$$\begin{cases} g_{i\_} = a_{i1} + a_{i2}\gamma + a_{i3}\mathcal{C} + a_{i4}\gamma^2 + a_{i5}\gamma\mathcal{C} + a_{i6}\mathcal{C}^2 \\ h_{i\_} = b_{i1} + b_{i2}\gamma + b_{i3}\mathcal{C} + b_{i4}\gamma^2 + b_{i5}\gamma\mathcal{C} + b_{i6}\mathcal{C}^2 \end{cases}$$

6. Ensuite, pour chaque valeur de j, il forme la somme $\Sigma_j(m')$ des 33 carrés des premiers membres [7] du système (TAB 6.2).

$$\forall j \in [\![1, 6]\!] \qquad \Sigma_j(m') = \sum_{i=1}^{33} (g_{ij}m' + h_{ij})^2 \tag{6.3}$$

   il abstrait alors la variable j en posant

$$C_t(\_\,, m') = \sum_{i=1}^{33} (g_{i\_}\, m' + h_{i\_})^2 \tag{6.4}$$

5. Chaque calcul est déjà pénible en soi : il consiste à faire la somme des carrés des premiers membres des 33 équations (TAB 6.2), dépendant linéairement de m'.
6. Les calculs pour passer d'une représentation à l'autre ne sont pas dans les manuscrits, mais ils ne présentent aucune difficulté.
7. En fait, il attribue un poids 1/4 à la première observation de 1690, 1/2 aux 6 suivantes (de 2 à 7) et enfin 1 aux plus récentes, ce qui est écrit p. 233 de *Herschel* et dans le cahier n° 5, p. 10.

On a donc

$$\forall j \in [\![1,6]\!] \quad C_t(j,m') = \Sigma_j(m') \tag{6.5}$$

mais C_t fait intervenir $(\gamma, \mathcal{C})$ à l'ordre 4, ce qui est ingérable. Le Verrier préfère [8] procéder comme précédemment i.e. considérer les 6 expressions particulières de Σ_j, que l'on notera $\lambda_j m'^2 + \mu_j m' + \nu_j$, pour les 6 valeurs particulières de j et trouver 18 coefficients $(x_k, y_k, z_k)_{1\le k\le 6}$ tels que

$$\forall j \in [\![1,6]\!] \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_j &=& \left(x_1 + x_2\gamma + x_3\mathcal{C} + x_4\gamma^2 + x_5\gamma\mathcal{C} + x_6\mathcal{C}^2\right)[j] \\ \mu_j &=& \left(y_1 + y_2\gamma + y_3\mathcal{C} + y_4\gamma^2 + y_5\gamma\mathcal{C} + y_6\mathcal{C}^2\right)[j] \\ \nu_j &=& \left(z_1 + z_2\gamma + z_3\mathcal{C} + z_4\gamma^2 + z_5\gamma\mathcal{C} + z_6\mathcal{C}^2\right)[j] \end{array} \right.$$

En fait, on peut court-circuiter le premier calcul en groupant les deux décompositions précédentes, en observant que

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{33} g_{ij}^2 \qquad \mu_j = 2\sum_{i=1}^{33} g_{ij}h_{ij} \qquad \nu_j = \sum_{i=1}^{33} h_{ij}^2.$$

7. Ensuite, il pose :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma(\gamma, \mathcal{C}, m') &=& \left(x_1 + x_2\gamma + x_3\mathcal{C} + x_4\gamma^2 + x_5\gamma\mathcal{C} + x_6\mathcal{C}^2\right) m'^2 \\ &+& \left(y_1 + y_2\gamma + y_3\mathcal{C} + y_4\gamma^2 + y_5\gamma\mathcal{C} + y_6\mathcal{C}^2\right) m' \\ &+& \left(z_1 + z_2\gamma + z_3\mathcal{C} + z_4\gamma^2 + z_5\gamma\mathcal{C} + z_6\mathcal{C}^2\right) \end{array}$$

Σ est une approximation [9] de la somme C_t des carrés des 33 premiers membres de (TAB 6.2) car

$$\forall j \in [\![1,6]\!] \qquad \Sigma(j, m') = \Sigma_j(m') = C_t(j, m') \tag{6.6}$$

et il va déterminer le minimum de Σ par dérivation et interpolation linéaire.

6.2.3.2 Coefficients utilisés pour éliminer toutes les inconnues autres que *m'*

On détaille maintenant les différents points de la méthode décrite aux paragraphes précédents. Il y a 6 situations à gérer ; pour chaque couple $(\gamma, \mathcal{C})$, Le Verrier fait 6 combinaisons linéaires des 33 équations pour former les 6 équations intermédiaires en suivant sa variante des moindres carrés ; les 4 premières combinaisons privilégient les coefficients de $\delta\varepsilon$, puis de δn, $e\delta\varpi$ et enfin de δe dans (TAB 6.2) ; comme les coefficients de ces 4 combinaisons font intervenir uniquement la partie 'invariable' des équations, ils sont identiques pour les 6 couples $(\gamma, \mathcal{C})$ et ces coefficients multiplicatifs sont donnés, pour chacune des quatre premières équations intermédiaires, dans la table 6.3. Enfin, pour chaque couple $(\gamma, \mathcal{C})$, il y a 2 combinaisons spécifiques pour les 2 dernières équations intermédiaires, avec des coefficients dépendant de ceux de $m'h'$ et $m'l'$ dans (TAB 6.2).
Voici comment Le Verrier choisit les coefficients pour appliquer sa méthode des moindres carrés (n° 132 de *Herschel*) :

> Considérons, par exemple, l'équation relative à $\delta\varepsilon$. Elle se composerait, dans la méthode rigoureuse, de la somme de trente-trois équations de condition, multipliées respectivement par des nombres qu'on obtiendrait en formant, dans chaque équation, le produit de l'inconnue qu'on considère par le nombre des observations, et par le nombre qui exprime l'exactitude relative attribuée à ces différentes observations. J'ai divisé tous ces multiplicateurs par un même nombre, de manière que le plus grand d'entre eux devînt égal à 10 unités, et je n'ai ensuite tenu compte, en général, que de ces unités, ou au plus des dixièmes, quand le multiplicateur était au-dessous de deux ; pour la première équation seulement, j'ai dû conserver les centièmes.

8. Baghdady [Baghdady, 1980] dit que Σ est la troncature de C_t à l'ordre 2, ce qui n'est pas le cas.
9. La véritable somme des carrés des premiers membres est C_t, polynôme de degré 4 ; Σ et C_t coïncident en seulement 6 points, ce qui pose des problèmes de représentativité, discutés au § 6.2.6.

C'est ainsi qu'il explique la façon dont il va regrouper les 33 équations (TAB 6.2) pour former les 6 équations du système (FIG. 6.8). Le moins que l'on puisse dire, c'est que – pour une fois – ses explications ne sont pas limpides. Tant que l'on n'a pas lu son manuscrit, et examiné les valeurs numériques, il est difficile de savoir vraiment ce qu'il veut faire !
En fait, le but est de ne faire, autant que possible, que des multiplications par des coefficients compris entre 0 et 10, entiers ou comportant au plus une décimale. Pour cela, il forme sur une feuille auxiliaire les multiples de 1 à 10 de chaque équation (voir un exemple de disposition fig. 6.7) et il peut ensuite facilement déterminer le produit de cette équation par le coefficient choisi, par simple lecture si ce coefficient est un entier, ou en procédant à une interpolation sinon. Voir plus de détails dans l'encadré 13, p. 211.
À la table 6.3, on a listé les coefficients retenus par Le Verrier pour former les quatre premières équations du système (FIG. 6.8), coefficients valables pour les 6 couples $(\gamma, \mathcal{C})$.

TABLE 6.3 – Table donnant les coefficients pour former, à partir de combinaisons des 33 équations (TAB 6.2) avec les coefficients indiqués, les 4 premières équations intermédiaires qui vont contribuer à former le système (FIG. 6.8) pour déterminer les 6 inconnues non principales en fonction de m'. Ces coefficients sont utilisés pour les 6 couples $(\gamma, \mathcal{C})$ retenus par Le Verrier.

éq.	1	2	3	4
[1]	0.05	−0.2	−0.06	0.02
[2]	0.9	−3	−0.0	−1.1
[3]	0.4	−0.6	0.2	0.4
[4]	0.4	−0.6	0	0.5
[5]	0.2	−0.2	−0.1	0.2
[6]	1.5	−1.6	−1.3	1.2
[7]	0.2	−0.2	−0.2	0.1
[8]	8	−5	−8	−2
[9]	7	−4	−7	−3
[10]	8	−4	−7	−6
[11]	9	−3	−6	−8

éq.	1	2	3	4
[12]	9	−2	−4	−8
[13]	8	−1.7	−2	−8
[14]	8	−1.1	−1.5	−9
[15]	8	0	1	−9
[16]	10	1	3	−10
[17]	9	1.8	5	−9
[18]	10	−9	2	7
[19]	9	3	7	−6
[20]	9	4	8	−5
[21]	9	4	9	−3
[22]	7	4	8	−1.3

éq.	1	2	3	4
[23]	10	6	10	0.5
[24]	7	5	7	2
[25]	9	7	8	5
[26]	8	8	6	7
[27]	7	8	2	8
[28]	7	9	2	8
[29]	8	10	1.6	10
[30]	7	10	0.9	9
[31]	6	9	−0.8	8
[32]	6	10	−1.9	8
[33]	6	9	−2	7

Pour les deux dernières équations, il utilise des coefficients spécifiques à chacun des 6 cas, coefficients dont les valeurs sont données dans les manuscrits (cahier n° 5, p. 6).
Ensuite, comme indiqué aux points 3) et 4), il résout pour chaque valeur du couple $(\gamma, \mathcal{C})$ le système correspondant (FIG. 6.8) par rapport aux 6 inconnues autres que m' et il reporte les expressions obtenues dans les 33 équations de condition. Il obtient pour chaque valeur de $j = (\gamma, \mathcal{C})$ un système de 33 équations linéaires en m', de la forme $g_{ij}m' + h_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq 33$.

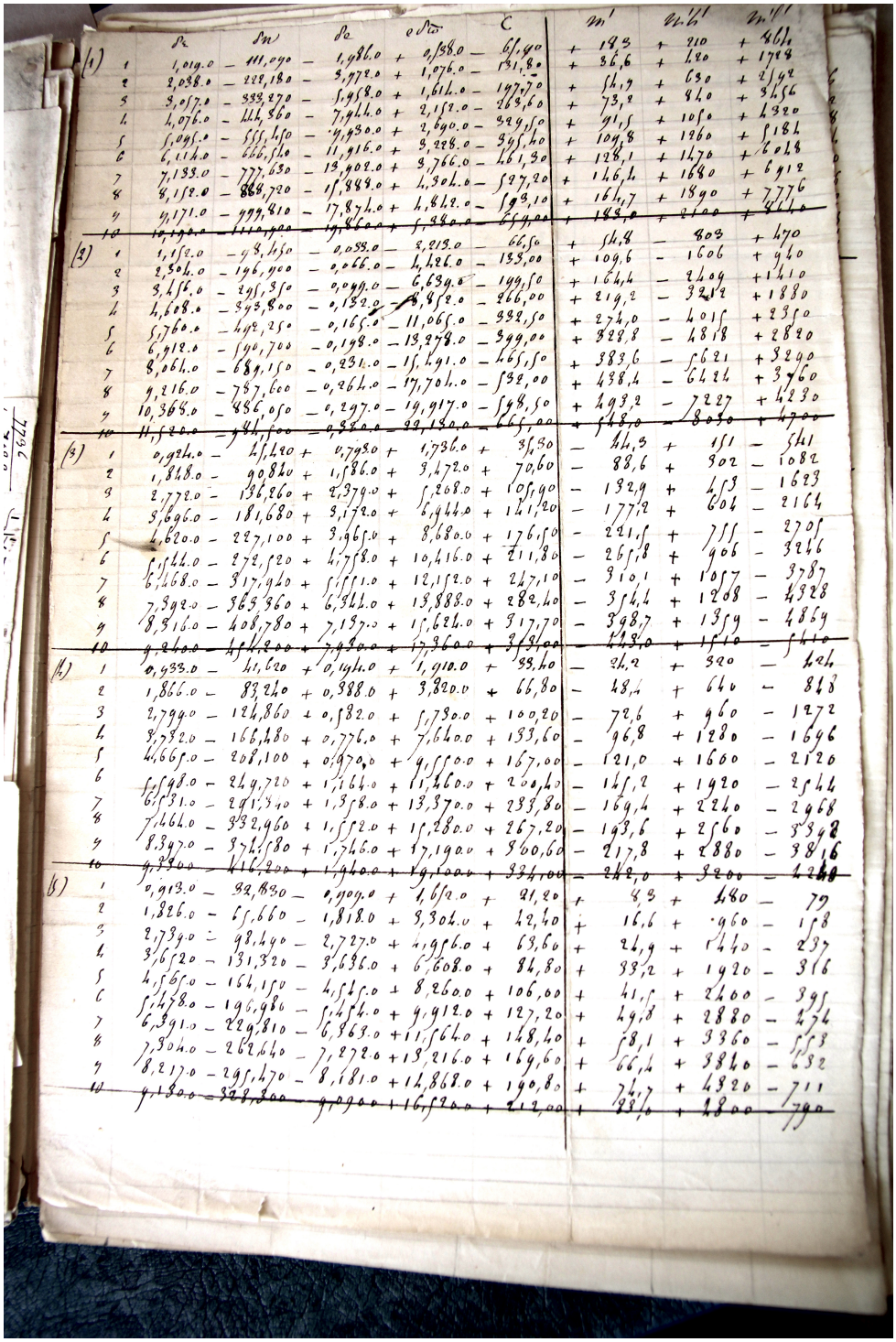
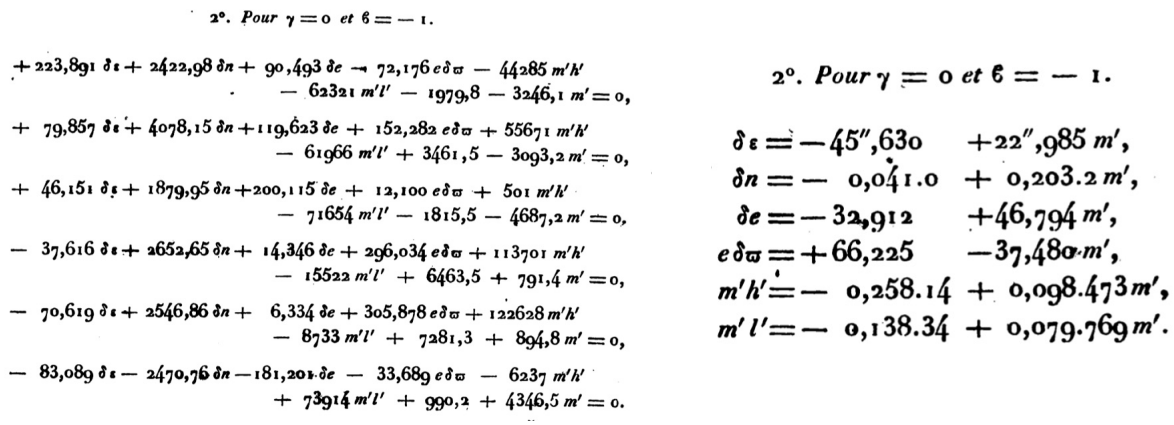


FIGURE 6.7 – Table d'équations de condition en vue d'utilisation pour les interpolations. Il y a ici 5 équations de condition ((1), (2),..., (5)). Le Verrier multiplie les premiers membres de ces 5 équations par les 10 premiers entiers. Ensuite, pour appliquer la méthode des moindres carrés, Le Verrier, comme il le dit lui-même (voir page 226 de *Herschel* ou page 214 de la thèse), s'arrange pour multiplier ces équations par un facteur à deux chiffres significatifs au plus, facteur compris entre 0 et 10, et il doit faire ces multiplications et interpolations de tête. Il évite ainsi les recours, fastidieux, à la table de logarithmes (extrait du cahier n° 6 p. 87)

6.2.3.3 Exemple numérique : $\gamma = 0$ et $\mathcal{C} = -1$

À titre d'exemple, on détaille les calculs précédents pour $(\gamma, \mathcal{C}) = (0, -1)$. On peut comparer les résultats obtenus par TRIP (table 6.4) avec ceux obtenus par Le Verrier (fig. 6.8), les deux calculs n'utilisant pas tout à fait les mêmes expressions ; en particulier Le Verrier utilise un développement au degré 2 [du temps] dans la perturbation faisant intervenir le degré 2 des excentricités au lieu de l'expression trigonométrique exacte (voir fig. 6.3). On constate des petits écarts pour les 'grandes' valeurs de t.



2°. *Pour* $\gamma = 0$ *et* $\mathcal{C} = -1$.

$+223{,}891\,\delta\varepsilon + 2422{,}98\,\delta n + 90{,}493\,\delta e - 72{,}176\,e\delta\varpi - 44285\,m'h' - 62321\,m'l' - 1979{,}8 - 3246{,}1\,m' = 0,$

$+79{,}857\,\delta\varepsilon + 4078{,}15\,\delta n + 119{,}623\,\delta e + 152{,}282\,e\delta\varpi + 55671\,m'h' - 61966\,m'l' + 3461{,}5 - 3093{,}2\,m' = 0,$

$+46{,}151\,\delta\varepsilon + 1879{,}95\,\delta n + 200{,}115\,\delta e + 12{,}100\,e\delta\varpi + 501\,m'h' - 71654\,m'l' - 1815{,}5 - 4687{,}2\,m' = 0,$

$-37{,}616\,\delta\varepsilon + 2652{,}65\,\delta n + 14{,}346\,\delta e + 296{,}034\,e\delta\varpi + 113701\,m'h' - 15522\,m'l' + 6463{,}5 + 791{,}4\,m' = 0,$

$-70{,}619\,\delta\varepsilon + 2546{,}86\,\delta n + 6{,}334\,\delta e + 305{,}878\,e\delta\varpi + 122628\,m'h' - 8733\,m'l' + 7281{,}3 + 894{,}8\,m' = 0,$

$-83{,}089\,\delta\varepsilon - 2470{,}76\,\delta n - 181{,}201\,\delta e - 33{,}689\,e\delta\varpi - 6237\,m'h' + 73914\,m'l' + 990{,}2 + 4346{,}5\,m' = 0.$

2°. *Pour* $\gamma = 0$ *et* $\mathcal{C} = -1$.

$\delta\varepsilon = -45'',630 + 22'',985\,m',$

$\delta n = -0{,}04\,1.0 + 0{,}203.2\,m',$

$\delta e = -32{,}912 + 46{,}794\,m',$

$e\delta\varpi = +66{,}225 - 37{,}480\,m',$

$m'h' = -0{,}258.14 + 0{,}098.473\,m',$

$m'l' = -0{,}138.34 + 0{,}079.769\,m'.$

FIGURE 6.8 – À gauche, équations 'intermédiaires' obtenues par Le Verrier pour éliminer les inconnues non principales dans le cas n° 2. À droite, la résolution en fonction de la variable m'. Les coefficients sont voisins de ceux trouvés avec TRIP, qui se trouvent à la table 6.4.

TABLE 6.4 – Système formé par les 6 premiers membres des 6 équations intermédiaires obtenues à partir des 33 équations de (TAB 6.2) par 6 combinaisons linéaires dont les coefficients sont donnés à la table 6.3 pour les 4 premières équations et dans les manuscrits pour les deux dernières équations et qui permettent de calculer les inconnues non principales en fonction de m'. La solution de ce système est donnée dans le tableau du bas. On retrouve le même ordre de grandeur que Le Verrier (fig. 6.8), mais avec quelques différences non négligeables

Premiers membres des équations de condition trouvées avec TRIP dans le cas n° 3 : $\gamma = 0$, $\mathcal{C} = -1$													
$+223.80$	$\delta\varepsilon$	$+2421.3$	δn	$+90.50$	δe	-72.19	$e\delta\varpi$	-3256	m'	-44422	$m'h'$	-62471	$m'l'$	-1986
$+79.79$	$\delta\varepsilon$	$+4074.1$	δn	$+119.72$	δe	$+152.18$	$e\delta\varpi$	-3102	m'	$+55615$	$m'h'$	-62075	$m'l'$	$+3455$
$+46.10$	$\delta\varepsilon$	$+1878.1$	δn	$+200.31$	δe	$+12.22$	$e\delta\varpi$	-4696	m'	$+458$	$m'h'$	-71775	$m'l'$	-1832
-37.65	$\delta\varepsilon$	$+2650.3$	δn	$+14.47$	δe	$+295.91$	$e\delta\varpi$	$+792$	m'	$+113722$	$m'h'$	-15547	$m'l'$	$+6459$
-70.64	$\delta\varepsilon$	$+2544.5$	δn	$+6.47$	δe	$+305.74$	$e\delta\varpi$	$+896$	m'	$+122663$	$m'h'$	-8736	$m'l'$	$+7232$
-83.02	$\delta\varepsilon$	-2469.8	δn	-181.17	δe	-33.72	$e\delta\varpi$	$+4357$	m'	-6186	$m'h'$	73976	$m'l'$	$+994$

$\delta\varepsilon$	$=-$	39.76	$+\ 22.41$	m'
δn	$=-$	0.22	$+\ 0.197$	m'
δe	$=-$	29.21	$+\ 45.526$	m'
$e\delta\varpi$	$=+$	55.79	$-\ 37.57$	m'
$m'h'$	$=-$	0.2224	$+\ 0.098$	m'
$m'l'$	$=-$	0.130	$+\ 0.075$	m'

Ensuite, il détermine les 6 inconnues autres que m' en fonction de m' (partie droite de la figure 6.8, à comparer au petit tableau, table 6.4) et il reporte ces valeurs dans les 33 équations de départ (TAB 6.2) : il obtient un système de 33 équations linéaires en m'.

6.2.3.4 Passage à la représentation quadratique

Comme indiqué au point 5), Le Verrier commence par déterminer ce que deviennent les équations (TAB. 6.2), une fois que les 6 inconnues autres que m' ont été éliminées et qu'elles ont été regroupées sous forme quadratique. Voici le début de ce système.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & +42'',8 +52'',10\gamma + 2'',006 - 9'',60\gamma^2 + 5'',10\mathcal{C}^2 - 1'',7\gamma\mathcal{C} \\
& +(-52,8 -23,15\gamma +30,3\mathcal{C} - 0,85\gamma^2 + 9,6\mathcal{C}^2 +11,4\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(2)\quad & +25,7 -17,20\gamma +18,4\mathcal{C} + 6,6\gamma^2 - 7,1\mathcal{C}^2 -21,3\gamma\mathcal{C} \\
& +(- 8,7 - 2,45\gamma + 0,00\mathcal{C} + 1,35\gamma^2 + 3,00\mathcal{C}^2 - 0,6\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(3)\quad & - 0,8 -15,65\gamma + 2,4\mathcal{C} + 5,55\gamma^2 -19,5\mathcal{C}^2 -14,0\gamma\mathcal{C} \\
& +(- 6,5 + 7,8\gamma + 2,3\mathcal{C} + 0,70\gamma^2 + 4,9\mathcal{C}^2 - 1,5\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(4)\quad & - 5,5 - 5,5\gamma - 0,35\mathcal{C} + 1,00\gamma^2 -17,15\mathcal{C}^2 -10,1\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 1,8 + 5,65\gamma - 0,3\mathcal{C} - 5,35\gamma^2 - 2,3\mathcal{C}^2 - 7,2\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(5)\quad & - 6,2 + 9,15\gamma - 3,05\mathcal{C} - 6,65\gamma^2 -10,15\mathcal{C}^2 - 3,3\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 2,7 + 1,3\gamma - 2,3\mathcal{C} + 2,6\gamma^2 + 1,6\mathcal{C}^2 + 1,0\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(6)\quad & - 7,0 +11,55\gamma - 3,65\mathcal{C} - 8,65\gamma^2 - 6,35\mathcal{C}^2 - 0,8\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 4,6 - 1,00\gamma - 1,05\mathcal{C} + 3,40\gamma^2 + 0,95\mathcal{C}^2 + 1,5\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(7)\quad & + 5,1 +11,25\gamma - 3,65\mathcal{C} - 7,55\gamma^2 - 3,85\mathcal{C}^2 + 1,6\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 3,5 - 1,60\gamma - 0,35\mathcal{C} + 3,70\gamma^2 + 1,55\mathcal{C}^2 + 2,3\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(8)\quad & + 2,2 + 2,75\gamma - 2,15\mathcal{C} - 2,05\gamma^2 + 2,35\mathcal{C}^2 + 3,8\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 0,6 - 0,90\gamma + 0,55\mathcal{C} + 0,60\gamma^2 - 0,05\mathcal{C}^2 + 0,5\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(9)\quad & + 1,0 + 1,00\gamma - 1,45\mathcal{C} - 0,80\gamma^2 + 2,55\mathcal{C}^2 + 2,8\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 0,0 - 0,50\gamma + 0,60\mathcal{C} + 0,60\gamma^2 + 0,00\mathcal{C}^2 + 1,2\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(10)\quad & + 0,5 - 0,75\gamma - 1,20\mathcal{C} + 0,55\gamma^2 + 2,00\mathcal{C}^2 + 2,1\gamma\mathcal{C} \\
& +(- 0,6 - 0,05\gamma + 0,40\mathcal{C} - 0,05\gamma^2 + 0,00\mathcal{C}^2 + 0,7\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(11)\quad & - 2,5 - 1,60\gamma - 0,55\mathcal{C} + 1,20\gamma^2 + 1,15\mathcal{C}^2 + 0,8\gamma\mathcal{C} \\
& +(- 0,6 + 0,40\gamma - 0,30\mathcal{C} - 0,60\gamma^2 + 0,00\mathcal{C}^2 + 0,4\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(12)\quad & - 0,8 - 1,35\gamma + 0,05\mathcal{C} + 1,75\gamma^2 + 0,65\mathcal{C}^2 + 0,7\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 0,1 + 0,75\gamma - 0,90\mathcal{C} - 0,65\gamma^2 - 0,10\mathcal{C}^2 + 0,2\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(13)\quad & - 3,3 - 0,85\gamma + 0,35\mathcal{C} + 1,85\gamma^2 + 0,05\mathcal{C}^2 + 0,2\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 0,7 + 0,85\gamma - 1,15\mathcal{C} - 0,55\gamma^2 - 0,25\mathcal{C}^2 - 0,4\gamma\mathcal{C})m' = 0, \\
(14)\quad & - 3,6 - 0,75\gamma + 0,80\mathcal{C} + 1,85\gamma^2 - 0,90\mathcal{C}^2 - 0,9\gamma\mathcal{C} \\
& +(+ 0,5 + 0,70\gamma - 1,00\mathcal{C} - 0,60\gamma^2 - 0,00\mathcal{C}^2 - 0,4\gamma\mathcal{C})m' = 0,
\end{aligned}
$$

FIGURE 6.9 – Système de 33 équations linéaires en m' et quadratique en $(\gamma, \mathcal{C})$ obtenu à partir du système (TAB 6.2), par élimination des 6 variables autres que m' à l'aide des formules données à la figure (6.8) dans le tableau de droite ou à la table 6.4 et après mise sous forme quadratique. On n'a retenu dans cette figure que les 14 premières équations.

Ensuite, il aborde le point 6) et comme indiqué plus haut, on peut court-circuiter une décomposition et se contenter de déterminer les 3 trois familles (x, y, z).
On rappelle que dans le $\sum_{i=1}^{33}$, le premier terme est affecté du coefficient 1/16 (ou 0.1/16 si l'on en croit les manuscrits, voir plus loin au § 6.2.6). On obtient 3 systèmes, de même matrice U :

$$\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_4 = \sum_{i=1}^{33} g_{i1}^2 \\
x_1 - x_3 + x_6 = \sum_{i=1}^{33} g_{i2}^2 \\
x_1 = \sum_{i=1}^{33} g_{i3}^2 \\
x_1 + x_3 + x_6 = \sum_{i=1}^{33} g_{i4}^2 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = \sum_{i=1}^{33} g_{i5}^2 \\
x_1 + x_2 + x_4 = \sum_{i=1}^{33} g_{i6}^2
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
y_1 - y_2 + y_4 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i1} h_{i1} \\
y_1 - y_3 + y_6 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i2} h_{i2} \\
y_1 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i3} h_{i3} \\
y_1 + y_3 + y_6 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i4} h_{i4} \\
y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i5} h_{i5} \\
y_1 + y_2 + y_4 = \sum_{i=1}^{33} 2 g_{i6} h_{i6}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
z_1 - z_2 + z_4 = \sum_{i=1}^{33} h_{i1}^2 \\
z_1 - z_3 + z_6 = \sum_{i=1}^{33} h_{i2}^2 \\
z_1 = \sum_{i=1}^{33} h_{i3}^2 \\
z_1 + z_3 + z_6 = \sum_{i=1}^{33} h_{i4}^2 \\
z_1 + z_2 - z_3 + z_4 - z_5 + z_6 = \sum_{i=1}^{33} h_{i5}^2 \\
z_1 + z_2 + z_4 = \sum_{i=1}^{33} h_{i6}^2
\end{cases}
\qquad
U = \begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

On résout ces trois systèmes, ce qui permet de former la fonction Σ définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\Sigma(\gamma, \mathcal{C}, m') = {} & \left(x_1 + x_2\gamma + x_3\mathcal{C} + x_4\gamma^2 + x_5\gamma\mathcal{C} + x_6\mathcal{C}^2\right) m'^2 \\
& + \left(y_1 + y_2\gamma + y_3\mathcal{C} + y_4\gamma^2 + y_5\gamma\mathcal{C} + y_6\mathcal{C}^2\right) m' \\
& + \left(z_1 + z_2\gamma + z_3\mathcal{C} + z_4\gamma^2 + z_5\gamma\mathcal{C} + z_6\mathcal{C}^2\right)
\end{aligned}$$

et dont l'expression (fig. 6.10) trouvée par Le Verrier se situe p. 233 de *Herschel* et p. 85 du cahier n° 6.

$$\begin{aligned}
\Sigma = {} & + \quad 644{,}40 - 337{,}27\gamma + 34{,}336 + 99{,}42\gamma^2 + 42{,}506^2 + 32{,}50\gamma 6 \\
& - m' \left\{ 600{,}20 - 17{,}29\gamma - 121{,}886 - 41{,}97\gamma^2 - 186{,}26^2 - 108{,}98\gamma 6 \right\} \\
& + m'^2 \left\{ 184{,}63 + 70{,}18\gamma - 54{,}906 + 12{,}30\gamma^2 - 48{,}90^2 - 11{,}58\gamma 6 \right\}.
\end{aligned}$$

FIGURE 6.10 – Expression trouvée par Le Verrier pour la fonction Σ, qui représente une approximation de la somme des carrés des 33 premiers membres des équations de condition (TAB 6.2), une fois que l'on a éliminé toutes les variables autres que m' et qu'on les a mises sous forme quadratique (p. 233 de *Herschel*).

En reprenant exactement les coefficients de Le Verrier pour les 33 équations linéaires en m' données p. 231−233 de *Herschel*, je trouve quasiment les mêmes coefficients pour Σ, aux erreurs d'arrondi près, donc Le Verrier ne s'est pas trompé en faisant la somme des carrés des premiers membres de ses 33 équations de condition.
En reprenant avec TRIP l'ensemble des calculs, je trouve (équation (6.7)) une expression apparentée, mais avec des différences importantes sur certains coefficients. Ces écarts proviennent d'une part des petites différences existant dans les 6 systèmes de 6 équations (un exemple est donné à la figure 6.8), différences dues probablement aux coefficients multiplicatifs utilisés par Le Verrier pour résoudre ses équations, car ces coefficients ne sont pas toujours bien signalés dans les manuscrits.

$$\begin{aligned}\Sigma = \quad & 649.2 - 344.4\gamma + 72.5\mathcal{C} + 92.7\gamma^2 - 26.9\mathcal{C}^2 - 66.0\gamma\mathcal{C} \\ & - m'(609.0 - 28.0\gamma - 148.7\mathcal{C} - 42.9\gamma^2 - 183.3\mathcal{C}^2 - 43.1\gamma\mathcal{C}) \\ & + m'^2(190.2 + 65.8\gamma - 57.9\mathcal{C} + 7.3\gamma^2 - 55.4\mathcal{C}^2 + 5.3\gamma\mathcal{C})\end{aligned} \tag{6.7}$$

$\Sigma(j, m')$ représente, rappelons-le, la valeur exacte de la somme des carrés des premiers membres des 33 équations (TAB 6.2) pour chacune des 6 valeurs particulières de $j = (\gamma, \mathcal{C})$ et il convient maintenant de déterminer le triplet $(\gamma, \mathcal{C}, m')$ rendant cette fonction Σ minimale. La démarche n'est pas vraiment justifiable d'un point de vue théorique : en effet il y a deux fonctions : la vraie somme C_t des carrés des 33 équations (de degré 4), et la fonction Σ (quadratique) ; ces deux fonctions coïncident en 6 points seulement. Voici ce que dit Le Verrier (*Herschel*, n° 136) :

> Si nous exécutions effectivement le développement algébrique des carrés de l'expression du n° 135 [dont le début est donné fig. 6.9], nous tomberions sur des fonctions du quatrième degré en γ et $\mathcal{C}$, qui seraient très compliquées. On peut en retrancher, sans grande erreur [10], les termes du troisième et du quatrième degré ; mais alors il sera plus exact de recourir aux valeurs particulières qu'acquièrent les fonctions pour les différents états que nous avons attribués ci-dessus aux variables γ et $\mathcal{C}$, de former les carrés des valeurs particulières, et d'en déduire les fonctions du second degré en γ et $\mathcal{C}$ qui les représentent. C'est ainsi qu'a été obtenue la fonction Σ dont nous avons besoin.

En fait, on devrait chercher les extrema de C_t, qui n'ont aucune raison de coïncider avec ceux de Σ, ce que l'on va constater un peu plus loin (voir § 6.2.6).

6.2.3.5 Détermination des paramètres de Neptune

On cherche donc les minima de cette fonction Σ, i.e. les points où les 3 dérivées partielles s'annulent.

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma} = 0 \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\mathcal{C}} = 0 \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial m'} = 0 \tag{6.8}$$

Les deux premières équations sont linéaires en $(\gamma, \mathcal{C})$ et la troisième est quadratique.
Le Verrier résout les deux premières équations par rapport à γ et $\mathcal{C}$ et reporte les valeurs dans le premier membre – qu'il appelle [11] N_Σ et qui ne dépend que de m' – de la troisième équation. Il donne à m' dans N_Σ trois valeurs : $m' = 0.9$; $m' = 1$ et $m' = 1.1$.
Il trouve respectivement les valeurs suivantes : $N_\Sigma = -20.691$, $N_\Sigma = -8.624$ et $N_\Sigma = 3.204$.
Il en conclut que la bonne valeur de m' est comprise entre 1 et 1.1 ; il fait alors une interpolation linéaire pour obtenir ce qu'il appelle la 'véritable solution'.

10. Ce n'est pas vraiment correct, car γ sera de l'ordre de 1 ; on n'est pas dans le cadre d'un développement limité.
11. Une expression de N_Σ est donnée à la figure 6.15.

$$\boxed{\begin{array}{rcr} m' & = & 1.072714 \\ \gamma & = & 1.02925 \\ \mathcal{C} & = & -0.65030 \end{array}} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\begin{array}{rcr} \alpha & = & 0.530585 \\ \varepsilon' & = & 240°17' \end{array}}$$

On peut quand même être surpris – connaissant la précision maladive du calculateur et sa science du calcul numérique – du nombre excessif de décimales accordé au résultat de cette interpolation [12]. Il sait très bien que de nombreuses simplifications ont été effectuées et que la prédiction de la position de la planète perturbatrice ne peut pas avoir cette précision. Cela donnera évidemment des armes à ses futurs détracteurs.

Pages 234−235 de *Herschel*, Le Verrier complète ses calculs pour obtenir les autres caractéristiques de Neptune : en reportant les valeurs qu'il vient de trouver pour $(m', \gamma, \mathcal{C})$ dans les équations antérieures (dont un exemple est donné à la figure (6.8)) ; il trouve

$$h' = -0.104\,37 \text{ et } l' = 0.026\,21 \text{ et donc } e' = \sqrt{h'^2 + l'^2} = 0.107\,61 \text{ et}$$
$$\varpi' = \operatorname{atan2}(h', l') = 284°5'48''$$

Il prédit la longitude héliocentrique vraie v' au 1/1/1847 par la formule

$$v' = \lambda' + 2e' \sin(\lambda' - \varpi') = \lambda' + 2h' \sin\lambda' - 2l' \cos\lambda' = 326°32' \tag{6.9}$$

où λ' est la longitude moyenne au 1/1/1847, soit $\lambda' = \varepsilon' + n'47 = 318°47'\,4''$.
L'ensemble des valeurs prédites par Le Verrier a été rassemblé à la table 6.5.
Les valeurs données par Le Verrier ne peuvent pas avoir la précision affichée, en particulier ϖ', qui est un paramètre très sensible aux incertitudes. Avec les coefficients de l'équation (6.7), je trouve des valeurs sensiblement différentes de celles de Le Verrier :

$\gamma = 0.6704$	$\mathcal{C} = -0.7183$	$m' = 1.2180$	$\varepsilon' = 239°4'$	$\ell'_{47} = 322°02'$

TABLE 6.5 – Valeurs des éléments de la planète inconnue ; les valeurs trouvées par Le Verrier sont données p. 234−235 de *Herschel* et les valeurs admises aujourd'hui sont prises de [Simon, 1973] et de Miriade. Le plan de référence est l'écliptique moyen J1800

Paramètre	Valeurs de Le Verrier	Valeurs réelles
Masse (1/10000 $\odot$)	$\frac{10000}{9322} = 1.072$	$\frac{10000}{19\,418} = 0.515$
Rapport des axes : α	0.530585	0.6382
Demi-grand axe : a'	36.1539	30.10
Période : T' (ans)	217.387.	164.75
Excentricité : e'	0.107 61	0.008 99
Longitude de l'époque (ε')	240°17′	225°07′
Longitude du périhélie : ϖ'	284°5′48″	45°56′
Rayon vecteur r' au 1/1/47	33.06	30.01
Inclinaison relative	$> 4°38'$	1°30′
Longitude vraie ℓ'_{47} au 1/1/47	326°32′	327°33′

12. La précision d'une interpolation linéaire entre a et b est de l'ordre de $\frac{(b-a)^2}{8} M_2$ (où M_2 est un majorant de la dérivée seconde) et ne peut guère dépasser ici 10^{-3}.

6.2.3.6 Comparaison de la théorie obtenue avec les observations

Le Verrier examine ensuite la qualité de la théorie qu'il vient d'élaborer (*Herschel* n° 142) :

> Les éléments attribués ici à la planète troublante sont ceux avec lesquels on représente le mieux les observations d'Uranus. Le tableau qui suit présente la comparaison de la nouvelle théorie avec les observations. On verra que la précision est aussi grande qu'on peut le désirer, et supérieure même à celle qu'offrent les théories de la plupart des planètes connues.

DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.	DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.
1781—1782	+ 2″,3	1813—1815	— 0″,9
1783—1784	+ 0,1	1816—1817	+ 0,4
1785—1788	— 1,2	1818—1820	+ 0,4
1789—1790	— 3,4	1821—1823	+ 0,9
1791—1792	+ 0,3	1824—1827	— 5,4
1793—1794	— 0,5	1828—1830	— 2,2
1795—1797	— 1,0	1835	— 0,8
1797—1801	+ 0,9	1835—1836	+ 2,3
1802—1804	+ 0,8	1837—1838	+ 2,5
1804—1806	+ 0,8	1839—1840	+ 2,2
1807—1808	+ 2,1	1841—1842	— 0,2
1808—1810	+ 0,8	1842—1844	— 0,4
1811—1813	— 0,5	1844—1845	— 0,3

FIGURE 6.11 – Moyenne des écarts $C - O$ entre les positions d'Uranus calculées par Le Verrier à l'aide de sa nouvelle théorie et les positions observées

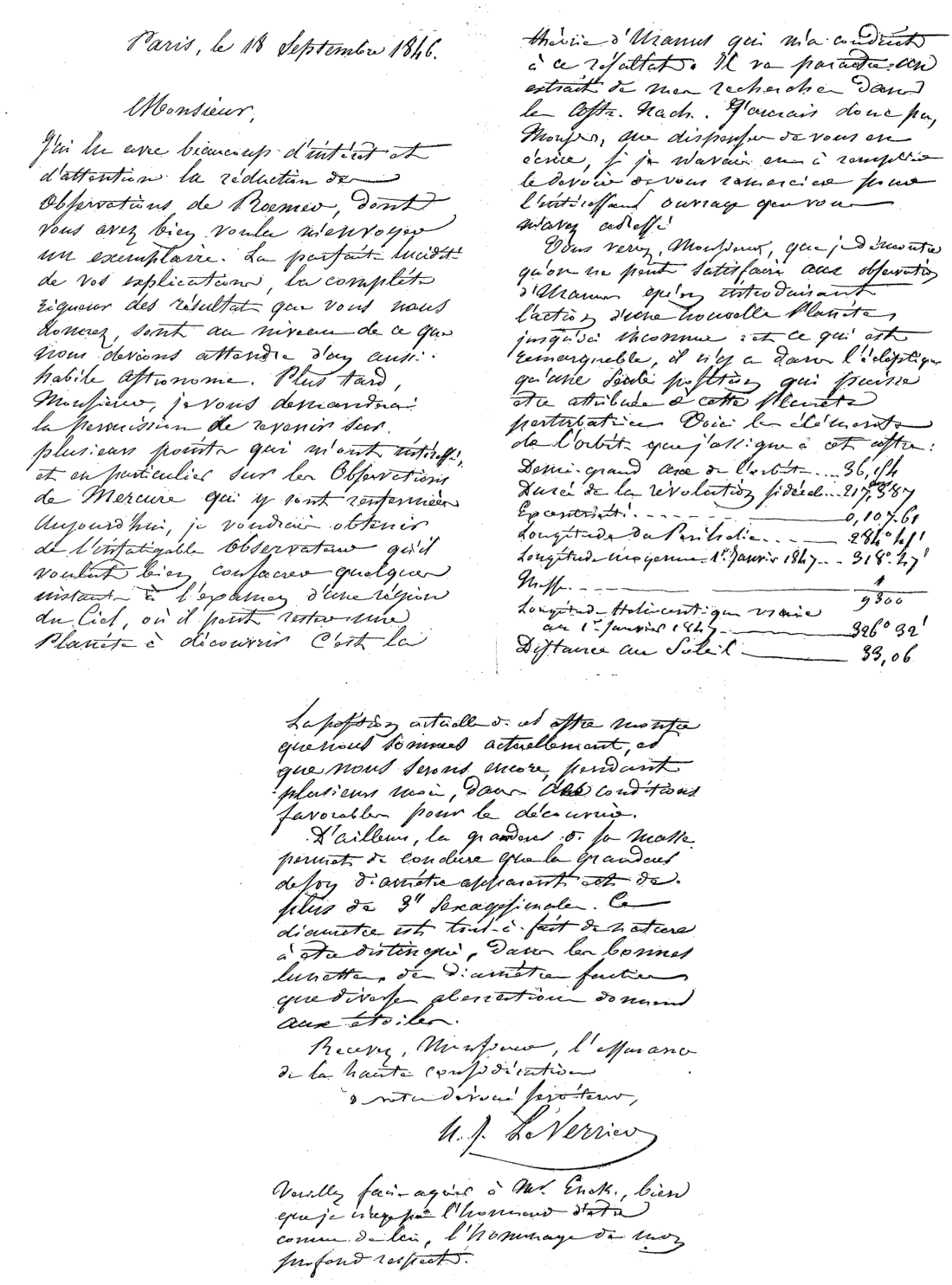
Les observations anciennes sont aussi bien représentées (à part la première observation de Flamsteed), avec des écarts $C - O$ restant en deçà des erreurs d'observation admises.

1690. Une observation *unique* de Flamsteed.	— 19″,9
1712 et 1715. Quatre observations *concordantes* faites par Flamsteed.	+ 5,5
1750. Deux observations de Lemonnier.	— 7,4
1753 et 1756. Deux observations *très-précises* faites par Mayer et Bradley.	— 4,0
1764. Une observation faite par Lemonnier.	+ 4,9
1768 et 1769. Huit observations faites par Lemonnier. . . .	+ 3,7

FIGURE 6.12 – Moyenne des écarts $C - O$ pour les observations anciennes ; les écarts restent inférieurs aux erreurs d'observation admises

6.2.4 Découverte

Ne disposant pas de lunette et ne désirant pas faire lui-même les recherches, et de plus, confronté à l'inertie de ses collègues de l'Observatoire de Paris, Le Verrier contacte des collègues à l'étranger, en particulier Johann Galle à l'Observatoire de Berlin. Il prend comme prétexte pour contacter celui-ci le remerciement pour l'envoi de sa thèse [Galle, 1845], envoi effectué l'année précédente. Il en profite pour lui demander d'examiner une zone particulière du ciel, « où il peut rester une planète à découvrir » (fig 6.13).



Paris, le 18 Septembre 1846.

Monsieur,

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt et d'attention la réduction des Observations de Roemer, dont vous avez bien voulu m'envoyer un exemplaire. La parfaite lucidité de vos explications, la complète rigueur des résultats que vous nous donnez, sont au niveau de ce que nous devions attendre d'un aussi habile Astronome. Plus tard, Monsieur, je vous demanderai la permission de revenir sur plusieurs points qui m'ont intéressé, et en particulier sur les Observations de Mercure qui y sont renfermées. Aujourd'hui, je voudrais obtenir de l'infatigable Observateur qu'il voulût bien consacrer quelques instants à l'examen d'une région du Ciel, où il peut rester une Planète à découvrir. C'est la théorie d'Uranus qui m'a conduit à ce résultat. Il va paraître un extrait de mes recherches dans les Astr. Nach. J'aurais donc pu, Monsieur, me dispenser de vous en écrire, si je n'avais eu à remplir le devoir de vous remercier pour l'intéressant ouvrage que vous m'avez adressé.

Vous verrez, Monsieur, que je démontre qu'on ne peut satisfaire aux observations d'Uranus qu'en introduisant l'action d'une nouvelle Planète jusqu'ici inconnue : et ce qui est remarquable, il n'y a dans l'écliptique qu'une seule position qui puisse être attribuée à cette Planète perturbatrice. Voici les éléments de l'orbite que j'assigne à cet astre :

Demi-grand axe de l'orbite	36,154
Durée de la révolution sidérale	217,387
Excentricité	0,107.61
Longitude du Périhélie	284°45'
Longitude moyenne 1er Janvier 1847	318°47'
Masse	1 / 9300
Longitude Héliocentrique vraie au 1er Janvier 1847	326°32'
Distance au Soleil	33,06

La position actuelle de cet astre montre que nous sommes actuellement, et que nous serons encore, pendant plusieurs mois, dans des conditions favorables pour le découvrir.

D'ailleurs, la grandeur de sa masse permet de conclure que la grandeur de son diamètre apparent est de plus de 3" sexagésimales. Ce diamètre est tout-à-fait de nature à être distingué, dans les bonnes lunettes, des diamètres factices que diverses aberrations donnent aux étoiles.

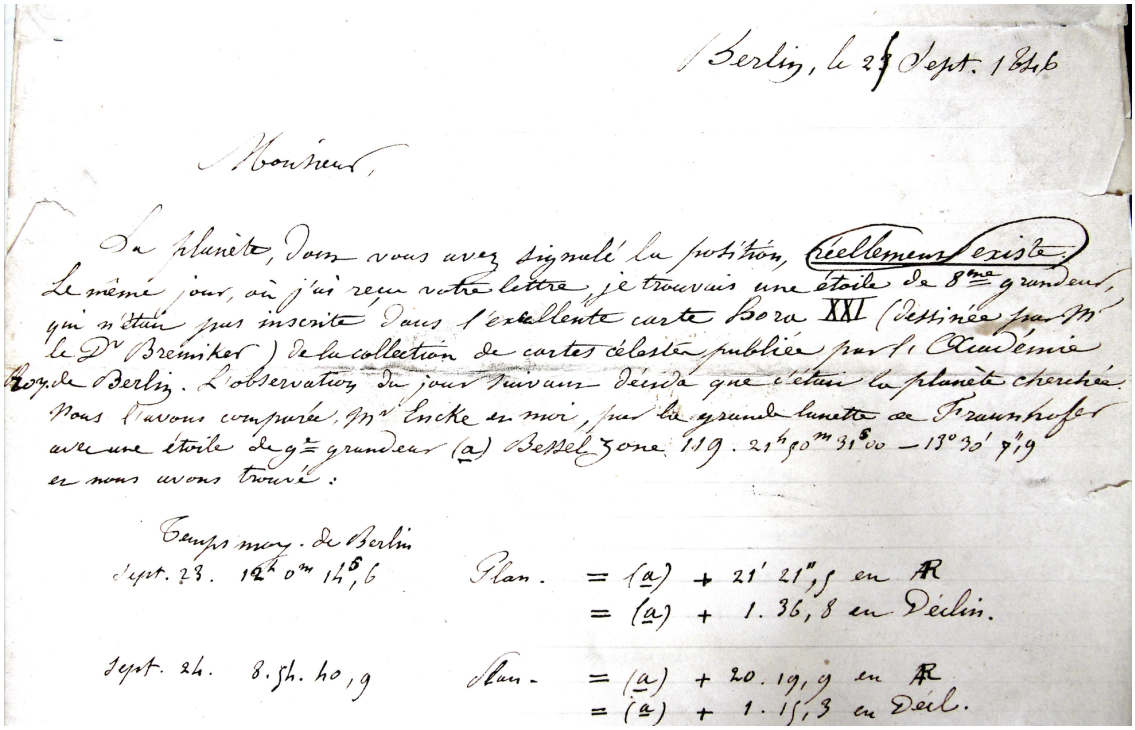
Recevez, Monsieur, l'assurance de la haute considération de votre dévoué serviteur,

U. J. Le Verrier

Veuillez faire agréer à Mr Enck., bien que je n'aie pas l'honneur d'être connu de lui, l'hommage de mon profond respect.

FIGURE 6.13 – Lettre de Le Verrier à Galle, datée du 18 septembre 1846, pour lui demander d'examiner une région du ciel où « il peut rester une planète à découvrir » (2 dernières lignes du bloc en haut à gauche). Il prend comme prétexte le remerciement pour l'envoi de sa thèse (consacrée aux réductions d'observations faites par Rømer), envoi qui datait d'un an ! (Lettre publiée dans le *centenaire de la naissance de Le Verrier* par l'Institut de France [Institut de France, 1911], p. 16). On peut, au passage, constater qu'il n'est pas toujours facile de déchiffrer l'écriture de Le Verrier

Il contacte aussi Otto Struve à l'Observatoire de Poulkovo, mais la lettre de Le Verrier à Struve arrivera après la découverte visuelle. Struve écrira à Le Verrier une lettre de remerciements et de félicitations (lettre du 4/10/1846 dans le dossier Ms 1072 de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris). On connaît la (belle) fin de l'histoire :



Berlin, le 23 Sept. 1846

Monsieur,

La planète, dont vous avez signalé la position, réellement existe.
Le même jour, où j'ai reçu votre lettre, je trouvais une étoile de 8me grandeur, qui n'était pas inscrite dans l'excellente carte Hora XXI (dessinée par Mr le Dr Bremiker) de la collection de cartes célestes publiée par l'Académie Roy. de Berlin. L'observation du jour suivant décida que c'était la planète cherchée. Nous l'avons comparée, Mr Encke et moi, par la grande lunette de Fraunhofer avec une étoile de 9e grandeur (a) Bessel Zone 119. 21h 50m 31s,00 – 13° 30' 7",9 et nous avons trouvé :

Temps moy. de Berlin
Sept. 23. 12h 0m 14s,6 Plan. = (a) + 21' 21",5 en AR
= (a) + 1. 36,8 en Déclin.

Sept. 24. 8. 54. 40,9 Plan. = (a) + 20. 19,9 en AR
= (a) + 1. 15,3 en Décl.

FIGURE 6.14 – Début de la réponse de Johann Gottfried Galle à la demande de recherche de Le Verrier (dossier n° 1 du manuscrit Ms 1063 (27) de l'Observatoire de Paris) : « La planète dont vous avez signalé la position, réellement existe » ; l'écriture est celle de Le Verrier, car c'est une copie de la lettre originale qu'il a faite en vue d'être insérée dans le manuscrit de *Herschel*. La lettre originale a été partiellement reproduite dans [Danjon, 1946a]. La fin de la lettre de Galle a été reproduite au § A.6 de l'annexe.

À partir de la position observée par Galle, Le Verrier déduit la position au 1/1/1847 ; l'écart [13] entre cette position héliocentrique calculée et la position qu'il avait indiquée dans le compte-rendu à l'Académie des sciences le 31 août 1846, est évalué [14] à $\boxed{0°52'}$.
Ainsi la position correcte était à moins d'un degré de la position prédite (voir cependant plus loin, § 6.2.5). En fait, le seul paramètre qui corresponde précisément à la réalité est v' (et dans une moindre mesure ε'), et heureusement, car c'était le plus important pour la découverte visuelle. Les autres paramètres sont très éloignés de la réalité (voir table 6.9).
Redisons-le, la valeur trouvée par Le Verrier pour ε' n'est absolument pas le fruit du hasard : c'est une bonne valeur, liée assez largement à l'hypothèse initiale $\alpha = 0.5$, mais ce n'est pas la meilleure solution au problème posé par les perturbations non résolues d'Uranus, puisque cette valeur $\alpha = 0.5$ est assez arbitraire et de nombreuses autres valeurs de α auraient conduit à des localisations voisines (et éventuellement meilleures), ce que l'on a déjà constaté au paragraphe 5.4.4 et que l'on confirmera au chapitre 8 de la thèse, avec des calculs s'appuyant sur INPOP.

13. Gapaillard [Gapaillard, 2015] conteste cette façon d'évaluer l'erreur finale. Il aurait souhaité un écart en longitudes géocentriques et non héliocentriques ; c'est en fait ce que fait Le Verrier au début du cahier n° 7 en évaluant l'écart géocentrique à 54′, mais il ne publiera que la valeur 52′.

14. Voir dans les Compléments (§ 6.2.7) le détail du calcul.

6.2.5 Erreur de calcul de Le Verrier

En fait, quand Le Verrier a fait son calcul de dérivée, il s'est initialement trompé sur la position de m' dans chacune des sous-expressions de $\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}$, ce que l'on voit sur son manuscrit (fig. 6.15) : m', en deuxième position, est raturé et récrit en première position dans chacune des parenthèses.

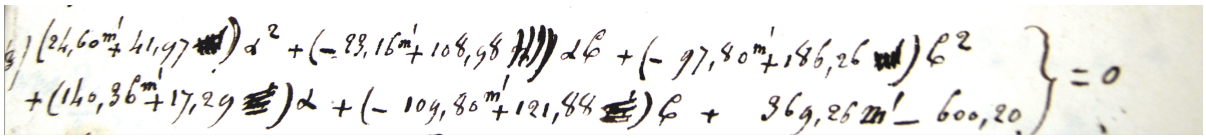


FIGURE 6.15 – *Dérivée partielle de Σ par rapport à m' (cahier n° 6) ; on voit la position initiale de m' dans chaque sous-expression, position corrigée dans un deuxième temps. Sur le manuscrit, γ s'appelle α.*

La disposition des calculs sur les manuscrits suggère que Le Verrier a fait le calcul complet pour les 3 valeurs de m', puis a fait son calcul d'interpolation. À un moment donné (combien de temps après ces premiers calculs ?), Le Verrier s'est aperçu de son erreur, l'a corrigée sur le manuscrit et dans la version imprimée, mais il a gardé les résultats de ses calculs faits avec la version erronée de $\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}$; en conséquence, les valeurs numériques [15] de $\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}$ pour $m' = 0.9$ et $m' = 1.1$ sont fausses [16].

TABLE 6.6 – Valeurs numériques de $\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}$ pour $m' = 0.9,\ 1$ et 1.1

m'	0.9	1	1.1
$\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}(m')$ par Le Verrier (version primitive)	-20.691	-8.624	3.204
$\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}(m')$ par la version corrigée	-46.23	-8.624	25.47

En conséquence aussi, l'interpolation finale doit être aussi corrigée :

TABLE 6.7 – Interpolation entre $m' = 1$ et $m' = 1.1$ pour déterminer le zéro de $\frac{\partial\Sigma}{\partial m'}$

Résultat de l'interpolation finale entre $m' = 1$ et $m' = 1.1$					
	γ	$\mathcal{C}$	m'	ε'	ℓ'_{47}
Valeurs trouvées par Le Verrier	1.029 25	$-0.650\,30$	1.072 714	240°17′	326°32′
Valeurs trouvées avec la version corrigée	1.074 98	$-0.668\,75$	1.025 29	239°58′	326°13′

La valeur finale de ε' aurait dû être 239° 58' (= 252 − 0.66875*18) au lieu de 240° 17' et celle de α aurait dû être $\alpha = 0.5315$ (= 0.51 + 1.07498*0.02) au lieu de 0.530 585.

L'écart avec la position héliocentrique exacte de Neptune était en fait 1°11′ et non 52′.

La différence entre ces deux valeurs n'est pas énorme, mais il n'est plus possible de dire que Le Verrier a prédit la position de la planète perturbatrice à ***moins*** de 1° de la position exacte.

15. L'unité pour la masse est le dix-millième de la masse solaire ; $m' = 1$ correspond à 1.94 fois la masse réelle de Neptune.

16. Pour $m' = 1$ la valeur est bien sûr correcte.

En fait Σ a trois minima [17] (voir table 6.8).
Les deux dernières valeurs de m' ne sont pas physiquement crédibles et Le Verrier ne les évoque pas. En plus, le minimum absolu de Σ est bien obtenu pour la valeur 1.024.

TABLE 6.8 – Liste de toutes les valeurs de m' minimisant Σ

Valeur de m' minimisant Σ	1.024	2.871	4.550
Écart entre prédiction et observation	−1°11’	24°45	−36°40’

6.2.6 Conséquence du passage de C_t à Σ

On a vu que pour son approximation finale, Le Verrier devait chercher le minimum de la fonction C_t représentant la somme des carrés des 33 premiers membres de ses équations de condition, une fois que ceux-ci ont été mis sous forme de polynômes quadratiques. En conséquence, cette fonction C_t est un polynôme du quatrième degré en γ et $\mathcal{C}$. Déterminer le minimum d'une telle fonction est un problème très difficile. Le Verrier remplace donc la fonction C_t par une fonction quadratique Σ, qui coïncide avec elle en 6 points, et seulement 6 points. Il commente cette substitution au n° 136 de *Herschel* et on a reproduit son commentaire au § 6.2.3.4 : la justification est un problème lié à une difficulté d'ordre mathématique.
Sans surprise, les minima de la fonction C_t sont très différents de ceux de Σ : les 3 valeurs de m' qui minimisent C_t sont 0.72, 0.79 et 0.95, ce qui confirme que la recherche des extrema de C_t n'est pas équivalente à celle des extrema de Σ. Le Verrier le sait sans aucun doute, mais passe rapidement sur ce problème théorique, car la détermination des minima de C_t est un problème beaucoup trop complexe pour l'époque. Il doit cependant penser que les solutions à ces deux problèmes ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre, mais il n'a aucun moyen de le vérifier.
D'autre part, Le Verrier ne fait pas exactement la somme des carrés des 33 équations de condition : il introduit des coefficients multiplicateurs pour minimiser l'importance des observations anciennes. Les coefficients annoncés ne sont pas les mêmes dans *Herschel* et dans les manuscrits. Par exemple, le coefficient pour l'observation de Flamsteed vaut 1/16 dans *Herschel* et 0.1/16 dans les manuscrits.
Dans le tableau suivant, j'ai pris quelques triplets minimisant soit Σ, soit C_t et j'ai déterminé les valeurs correspondantes de a', ε' et ℓ'_{47} (longitude vraie de Neptune au 1/1/1847).

Valeurs qui minimisent C_t ou Σ et valeurs correspondantes des paramètres de Neptune						
Fonction \ Paramètre	γ	$\mathcal{C}$	m'	a'	ε'	ℓ'_{47}
Σ avec coefficients de LV	1.076	−0.669	1.024	36.09	240.0	327.0
Σ avec coefficients LV 2e minimum	−0.735	0.724	2.872	38.72	265.0	328.2
Mes valeurs pour Σ avec coef 0.1/16	0.670	−0.718	1.218	36.64	239.1	325.4
Mes valeurs pour Σ avec coef 1/16	0.695	−0.533	0.992	36.61	242.4	328.8
C_t minimum absolu	1.162	−1.025	0.952	35.97	233.5	325.2
C_t 2e minimum	1.450	−0.309	0.790	35.58	246.4	340.6
C_t 3e minimum	1.596	−0.133	0.725	35.39	249.6	346.5

17. La première valeur, 1.024, est obtenue ici par un balayage fin alors que celle de Le Verrier, 1.025 29, est obtenue par interpolation linéaire, ce qui confirme bien les limites de l'interpolation linéaire et l'impossibilité de donner des résultats avec 6 chiffres significatifs exacts.

Le Verrier a eu beaucoup d'intuition pour choisir les bons coefficients pour placer la planète à environ 1°, mais on reste dans les 5 premiers cas du tableau page précédente à moins de 2° de la bonne valeur. Encore une fois, la situation physique des deux astres, qui induit des verrouillages, comme la conjonction de 1822, réduit de manière mécanique les écarts entre position réelle et position prédite, un peu avant et un peu après cette date (voir plus de détails au § 8.8).

Les coefficients affectés aux observations anciennes sont assez arbitraires, et finalement pas très justifiés car, par exemple, l'observation de Flamsteed est très précise. Et le choix de ces coefficients a une influence non négligeable sur la solution finale.

Dans son mémoire, Le Verrier se focalise sur les paramètres de la planète inconnue, ce qui est tout à fait compréhensible, mais ses équations de condition fournissent aussi les corrections à apporter aux éléments d'Uranus, corrections qui permettent d'améliorer la théorie d'Uranus, ce qui était le but initial de tous ces calculs.

6.2.7 Compléments sur les positions calculées et observées de Neptune

6.2.7.1 Positions apparentes le jour de la découverte

	Coordonnées au moment de la découverte (23/9/1846)			
	Équatoriales		Écliptiques	
	$\mathring{\alpha}$	D	longitude géo	longitude hélio
Galle (Observation)	328° 19′ 16″	−13° 24′ 8″		
LV (calcul d'après Galle)			325° 53′	326° 52′
Miriade (INPOP)	328° 19′ 25″	−13° 24' 12"	325° 52′ 45″	326° 57′ 4″

Longitude héliocentrique vraie de Neptune au 1/1/1847		
Le Verrier (3e mémoire)	LV d'après l'observation de Galle	Miriade
326° 32′	327° 24′	327° 33′
327°24′ - 326°32′=0°52′ ; les fameuses 52′ : moins de 1 degré et sans l'erreur finale : 327°24′ - 326°13′=1°11′ : plus de 1 degré		

6.2.7.2 Détail des calculs de positions

Voici les données numériques : celles de Le Verrier tirées de son dernier mémoire sur Uranus, et en comparaison celles obtenues dans [Simon, 1994] et Miriade.

Conclusions de Le Verrier dans le mémoire de 31 août 1846		
	Le Verrier (31/8)	Miriade
Longitude moyenne au 1/1/1800 : ε'	240° 17' 41"	225° 07' 30"
Précession	0° 39' 20"	0°39' 20"
Mouvement sidéral en 47 ans	77° 50' 3"	102°42'
Longitude moyenne au 1/1/1847	318° 47' 4"	328° 18' 50"

Le rattrapage pour la longitude vraie au 1/1/1847 se fait par l'intermédiaire de l'équation du centre, trop élevée du fait de la trop grande valeur de l'excentricité et de la valeur très erronée de la longitude du périhélie (décalage de près de 180°). On voit table 6.9 que plusieurs valeurs sont difficilement comparables. Les valeurs modernes proviennent de Miriade et de [Simon, 1994].

TABLE 6.9 – Calculs pour obtenir la longitude héliocentrique le 1/1/1847

Détail de la prédiction de Le Verrier pour le 1/1/1847		
	Le Verrier	Modernes
Longitude du périhélie au 1/1/1800	284° 5′ 48″	45° 19′
Précession en 47 ans	0° 39′ 20″	0° 39′ 20″
Longitude du périhélie au 1/1/1847	284° 45′ 8″	45° 56′ 20″
Anomalie moyenne au 1/1/47	34° 1′ 56″	281° 59′ 20″
Équation du centre	7° 44′ 40″	−1° 3′ 35″
Longitude héliocentrique au 1/1/47 prédite par LV (le 31/8/46)	326° 32′	327° 33′
Longitude héliocentrique au 1/1/47 déduite par LV de l'observation de Galle	327° 24′	

Passage des positions du jour de la découverte aux positions au 1/1/47		
	Le Verrier	Miriade
Longitude géocentrique conclue le 23/9/46	325° 53′	325°53′
Réduction au lieu héliocentrique	0° 59′	1° 4′
Longitude héliocentrique au 23 septembre 46	326° 52′	326° 57′
Mouvement sidéral en 0.275 ans	0° 32′	0° 36′
Longitude héliocentrique au 1/1/47 déduite par LV de l'observation de Galle	327° 24′	327° 33′
Longitude prédite au 1/1/47 dans le CRAS du 31/8/1846	326° 32′	
Différence	52’	1° 1′

Avec les distances au Soleil trouvées par Le Verrier, sa correction héliocentrique (de 59’) est correcte, mais avec les distances réelles, elle aurait dû être de 1°4′ et l'écart entre la prédiction et la position héliocentriques aurait été de 1°1′. Le détail de ce calcul est donné dans le tableau du bas de la table 6.9.

6.2.8 Illustration graphique

Les calculs rassurent et consolident des affirmations, mais un dessin aide l'interprétation. Le tracé suivant (fig. 6.16) a été fait en utilisant les données numériques de Le Verrier (en rouge), en particulier la masse qu'il avait trouvée ainsi que les valeurs modernes pour Uranus et Neptune (en rose et en bleu respectivement). Les forces gravitationnelles exercées par Neptune sur Uranus sont représentées (en rouge) à différentes époques ; les forces exercées par le vrai Neptune sur Uranus aux mêmes époques sont représentées en bleu. Il s'agit de forces différentielles :

$$\vec{F}_{\text{hélio}} = \vec{F}_{N\to U} - \vec{F}_{N\to S} \tag{6.10}$$

soit, force exercée par Neptune sur Uranus − force exercée par Neptune sur le Soleil
Les forces exercées par le Neptune de Le Verrier sont à peu près dans la bonne direction, mais un peu trop fortes en intensité [18].

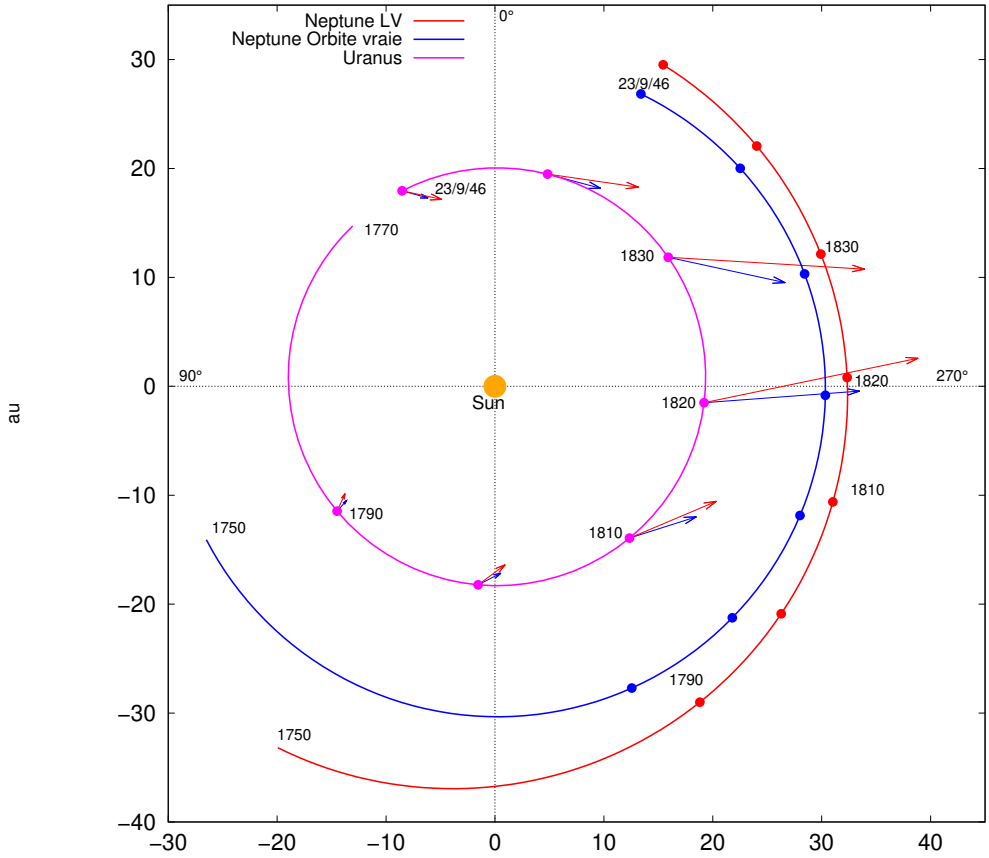


FIGURE 6.16 – Forces exercées par Neptune sur Uranus selon Le Verrier (en rouge) comparées aux forces réelles (en bleu). Il s'agit en fait de forces de marée (différentielles, voir le texte), ce qui explique que la flèche rouge issue de (1830, Uranus) ne passe pas exactement par (1830, Neptune), ce qui serait le cas avec l'action gravitationnelle directe. L'unité de force est arbitraire, adaptée à l'échelle du tracé. Les directions des forces sont assez bonnes, mais les intensités sont un peu fortes. L'unité sur les deux axes est l'unité astronomique (au). On peut constater la grande différence dans les intensités des forces au moment de la conjonction et loin de cette conjonction, en 1790 par exemple : le rapport des intensités de ces forces est de l'ordre de 9.

18. Il existe un tracé du même type dans la présentation donnée par Danjon à la SBA en 1946 à l'occasion du centenaire de la découverte de Neptune [Danjon, 1946b].

On imagine assez bien l'accélération exercée par Neptune sur Uranus avant la conjonction (les longueurs des flèches sont proportionnelles à l'intensité de la force exercée), suivie du ralentissement après la conjonction.
Bouvard n'a pas eu beaucoup de chance, car il n'a utilisé que les observations de 1781−1821, période pendant laquelle, Uranus était constamment accéléré par Neptune !
Pour poursuivre la comparaison graphique, on a tracé à la figure 11.3 sur un même graphe les orbites trouvées par Le Verrier et Adams et celle du vrai Neptune.

6.2.9 Estimation du diamètre apparent de la planète perturbatrice

Les calculs de Le Verrier pour localiser la planète qui trouble Uranus ont été des calculs de mécanicien céleste ; une fois la position théorique prédite pour la planète, Le Verrier se met à la place des futurs observateurs, en essayant de deviner l'apparence que pourrait avoir cette planète (*Herschel*, p. 236 et troisième mémoire présenté à l'académie [Le Verrier, 1846c]).

> L'opposition de la planète a eu lieu le 19 août dernier. Nous sommes donc actuellement à une époque [31 août] très favorable pour la découvrir...
> Examinons quels sont actuellement, au moment de l'opposition, le diamètre apparent et l'éclat relatif de la planète cherchée.
> On sait qu'à une distance égale à dix-neuf fois la distance de la Terre au Soleil, le disque d'Uranus apparaît sous un angle de 4 secondes sexagésimales. La masse de cette dernière planète [Uranus] est connue ; elle est deux fois et demi environ plus faible que celle de la nouvelle planète. Ces données, jointes aux précédentes [les valeurs qu'il vient de trouver pour Neptune], nous suffiraient pour calculer le diamètre apparent du nouvel astre si nous connaissions le rapport de sa densité à celle d'Uranus. [Nous admettrons] que sa densité est égale à celle d'Uranus. Nous trouverons ainsi, qu'au moment de l'opposition, la nouvelle planète devra être aperçue sous un angle de $3''.3$ [...]
> En supposant que le pouvoir réfléchissant de la surface de la nouvelle planète soit le même que celui de la surface d'Uranus, son éclat spécifique actuel serait le tiers environ de l'éclat spécifique dont jouit Uranus quand il se trouve dans sa distance moyenne au Soleil. Ces conditions physiques me semblent promettre que non seulement on pourra apercevoir la nouvelle planète dans de bonnes lunettes, mais encore qu'on la distinguera par l'amplitude de son disque ; que son apparence ne sera pas réduite à celle d'une étoile. C'est un point fort important.

Le Verrier envoie un message essentiel aux observateurs : rechercher un disque dans la zone indiquée et ne pas perdre son temps à « observer toutes les petites étoiles situées dans la région du ciel qu'on doit explorer et constater dans l'une d'entre elles un mouvement propre. Ce travail serait long et pénible » (*Herschel* p. 237).

Challis [19], le directeur de l'Observatoire de Cambridge, chargé par Airy de rechercher la planète inconnue, ne suivra pas ce conseil dans un premier temps, car il n'avait pas eu accès au mémoire de Le Verrier datant du 31 août [Sheehan, 2021] et il commencera à former une carte de la région à étudier incluant toutes les étoiles jusqu'à la magnitude 11, travail de très longue haleine ; il passera plusieurs fois sur Neptune, les 4 et 12 août notamment, sans noter la présence d'un disque. Il ne commencera à chercher un disque apparent dans la zone sélectionnée qu'à partir du 29 septembre 1846, mais c'était trop tard : la planète avait déjà été vue à Berlin 6 jours auparavant (informations provenant de [Challis, 1846a]).

19. James Challis (1803−1861), professeur de physique et d'astronomie à Saint John's. Il succéda à Airy à la direction de l'Observatoire de Cambridge en 1835.

6.2.10 Estimation de l'inclinaison de la planète perturbatrice sur l'orbite d'Uranus

6.2.10.1 Calculs de Le Verrier

Le Verrier, après avoir prédit les éléments de la planète qui trouble Uranus, essaye d'estimer, dans la cinquième partie de *Herschel*, l'inclinaison de l'orbite de cette planète sur celle d'Uranus. Il connaît les écarts entre latitudes observées et latitudes calculées pour les observations retenues [20]. Il écrit ses équations de condition, qui ont la même structure que les équations de condition pour la longitude, soit

Forme de l'équation de condition portant sur la latitude héliocentrique à l'instant t

$$\underbrace{A_\phi(t)\,\delta\phi + B_\phi(t)\,\sin\phi\,\delta\theta}_{\text{ajustement des éléments d'Uranus}} + \underbrace{C_\phi(\alpha,\,\varepsilon',\,t)\,p' + D_\phi(\alpha,\,\varepsilon',\,t)\,q'}_{\text{perturbation exercée par la planète inconnue}} = \underbrace{O-C}_{\text{écart}}$$

avec les notations suivantes : θ : longitude du nœud ascendant d'Uranus, ϕ : inclinaison de l'orbite d'Uranus sur l'écliptique ; $p' = \tan\phi'\sin\theta'$, $q' = \tan\phi'\cos\theta'$ où ϕ' et θ' sont mesurés relativement à l'orbite d'Uranus et non par rapport à l'écliptique.
Les coefficients $A_\phi(t)$ et $B_\phi(t)$ sont des fonctions des éléments elliptiques d'Uranus et du temps ; $C_\phi(\alpha,\varepsilon',t)$ et $D_\phi(\alpha,\varepsilon',t)$ sont des fonctions du rapport des demi-grands axes, du temps et de la longitude ε' de l'époque de la planète troublante.
Les $O-C$ en latitude sont assez faibles, ne dépassant guère $10''$, comme on le constate sur le tableau suivant (fig. 6.17).

ANNÉES.	ERREURS THÉORIQ. en latitude.	ANNÉES.	ERREURS THÉORIQ. en latitude.	Σ
1782,4	+ 2,″9	1824,4	− 7,″0	− 4,″1
1784,1	+ 3,4	1826,1	− 7,7	− 4,3
1786,8	+ 3,5	1828,8	− 8,1	− 4,6
1790,1	+ 2,9	1832,1	− 9,1	− 6,2
1791,9	+ 4,1	1833,9	− 9,9	− 5,8
1794,0	+ 5,8	1836,0	−10,4	− 4,6
1796,3	+ 5,4	1838,3	−10,0	− 4,6
1800,2	+ 7,3	1842,2	−10,7	− 3,4
1802,9	+ 7,6	1844,9	− 9,9	− 2,3

FIGURE 6.17 – Erreurs $O-C$ entre latitudes calculées et latitudes observées. Σ représente ici la somme des deux $O-C$ se trouvant sur la même ligne, et c'est un test pour Le Verrier : si les erreurs théoriques pouvaient être uniquement attribuées à l'inexactitude des éléments d'Uranus, les erreurs en latitude devraient être égales et de signes contraires, à 42 ans d'intervalle, et donc Σ devrait être égal à 0, ce qui n'est pas le cas (*Herschel*, p. 250)

Voici ce que Le Verrier apprend de la lecture de ce tableau :

> Si les erreurs théoriques pouvaient être uniquement attribuées à l'inexactitude des éléments d'Uranus, les erreurs en latitude devraient être égales et de signes contraires, à 42 ans d'intervalle. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, ainsi qu'on peut s'en convaincre à l'inspection de la Table précédente [table 6.17]. Les nombres de la quatrième colonne sont bien de signe contraire à ceux qui leur correspondent sur la même ligne dans la seconde colonne ; mais ils ne sont pas

20. Il n'y en a que 260, car certains observateurs n'ont noté que l'ascension droite. On rappelle qu'à une certaine époque, la lecture de l'ascension droite et la lecture de la déclinaison se faisaient sur deux instruments distincts (voir encadré 9 p. 132 et § B.1 de l'annexe).

> égaux en valeur absolue. On trouve dans la dernière colonne, sous le signe Σ, la valeur de l'écart. Elle est petite ; mais, si l'on remarque qu'elle a été déduite à chaque époque d'un grand nombre d'observations, et qu'elle conserve toujours le même signe, on ne pourra douter qu'elle n'accuse la présence de l'astre troublant. On en déduira quelques renseignements sur la position de l'orbite.

Le Verrier établit [21] 33 équations de condition portant sur la latitude, en se servant des regroupements déjà utilisés. Il utilise sa variante de la méthode des moindres carrés (voir encadré 13, p. 211) pour former un système (6.18) de quatre équations aux inconnues $\delta\theta,\ \sin\phi\,\delta\theta,\ p',\ q'$.
Il essaie de résoudre ce système de 4 équations, et après élimination, il obtient une équation de la forme $ap' + b = 0$ où a et b sont des constantes numériques, très petites par rapport aux coefficients de départ ; il pense donc que ces valeurs sont entachées d'erreurs relatives importantes et donc que p' n'est pas bien défini.
Cela est très étonnant, car le système 4×4 est raisonnablement conditionné (conditionnement de 4419) et on trouve :

$$\delta\theta = -6''.95 \qquad \sin\phi\,\delta\theta = -1''.18 \qquad p' = 0.00537 \qquad q' = -0.08276$$

ce qui conduit à

$$\phi' = \arctan\sqrt{p'^2 + q'^2} = 4^\circ\,44' \tag{6.11}$$

Le Verrier se limite donc aux 3 premières équations de condition et les utilise pour résoudre $\delta\phi,\ \sin\theta\,\delta\phi$ et q' en fonction de p' (fig. 6.18).
On voit que q' est une fonction linéaire de p', donc il obtient pour $p'^2 + q'^2$ un polynôme du second degré, dont il détermine le minimum min et il dit que l'inclinaison de l'orbite de la planète inconnue sur Uranus est au moins de $\arctan\sqrt{min}$, soit $4^\circ\,37'$.

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\delta\varphi & = & -\ 7'',052 \quad + \ 19,18\,p' \\
\sin\varphi\,\delta\theta & = & -\ 1,220 \quad + \ 5,655\,p' \\
q' & = & -\ 0,081.97 \ - \ 0,157.24\,p' \\
\text{Latit. hélioc.} & & \\
\text{au 1}^{\text{er}}\text{ janvier 1847.} & = & 111' - 2570' \times p'.
\end{array}\right.$$

FIGURE 6.18 – Système obtenu par Le Verrier en appliquant partiellement la méthode des moindres carrés à ses 33 équations de condition portant sur la latitude et résolu ici par rapport à p'

On peut aussi résoudre les 4 équations aux 3 inconnues $\delta\phi,\ \sin\phi\,\delta\theta,\ q'$ en fonction de p' à l'aide des moindres carrés et reprendre le calcul précédent ; on trouve presque la même valeur.
On rappelle que l'inclinaison relative de Neptune sur Uranus est $1^\circ\,30'$. Pourquoi obtient-on un tel décalage ?
Vu les vérifications effectuées dans la thèse pour la longitude, on peut être quasiment sûr que Le Verrier n'a pas fait d'erreurs dans la formation de ses équations de condition pour la latitude. Il faudrait donc chercher la cause dans les données d'observation, qui sont des nombres faibles, inférieurs à $11''$.
Pour cela, on introduit un bruit aléatoire sur les données et on programme la résolution du système bruité avec la matrice du système (6.18).
Ensuite on répète un grand nombre de fois cette résolution, en faisant varier le bruit.
Voici ce que l'on observe :

21. Je n'ai pas essayé de reproduire ces équations ; il suffirait d'adapter la démarche déjà effectuée à propos de la longitude, mais le calcul est très long ; j'ai donc repris le système de quatre équations de Le Verrier, issues des moindres carrés.

Avec un bruit de 10% du signal, on obtient des valeurs très dispersées pour l'inclinaison :
Avec une série de 1 000 000 de calculs, les valeurs pour ϕ' oscillent entre $1° 30'$ et $83°$!
Avec un bruit de seulement 1%, les valeurs de ϕ' s'étalent entre $4° 30'$ et $23°$.
Un erreur relative de 10% pour des mesures de l'ordre de $10''$ est très vraisemblable.
On peut donc attribuer la mauvaise estimation de Le Verrier aux très faibles valeurs des données (moins de $11''$), et donc très imprécises en valeurs relatives. Mais, comme d'habitude, les calculs de Le Verrier sont tout à fait corrects, malgré le caractère discordant du résultat.

6.2.10.2 Attitude d'Adams concernant l'évaluation de l'inclinaison

Adams [Adams, 1847] déclare avoir essayé à plusieurs reprises de trouver des valeurs approchées pour la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite, en adaptant ses calculs faits pour la longitude. Pour l'inclinaison, il trouve successivement (valeurs citées par Sampson [Sampson, 1904]) : $7°31'$, $12°30'$ et $23°51'$; il avoue que les résultats ne sont pas satisfaisants et ne peuvent être validés et il attribue cet échec à une trop grande sensibilité du résultat par rapport aux données.

> The perturbations of the latitude are, in fact, exceedingly small, and during the comparatively short period of three-fourths of a revolution, are nearly confounded with the effects of a constant alteration in the inclination and the position of the node of Uranus, so that very small errors in the observations may entirely vitiate the result.

C'est exactement ce qui se passe ; Adams a été un peu plus prudent que Le Verrier. On peut attribuer cette différence d'attitude à la différence de caractère entre les deux hommes.

6.2.11 Importance de la carte de Bremiker pour la découverte visuelle

Neptune n'a pas été vraiment recherché activement à Paris. La raison invoquée par Arago est l'absence de carte pour la région cible. Un procès verbal du Bureau des Longitudes, en date du 12 août, fait état de recherches infructueuses, entreprises à Paris vraisemblablement à l'instigation d'Arago ; le compte rendu du Bureau des Longitudes, comme on peut le constater à la fig. 6.19 est assez laconique. Notons qu'à cette date, Le Verrier n'a pas encore présenté son dernier mémoire.

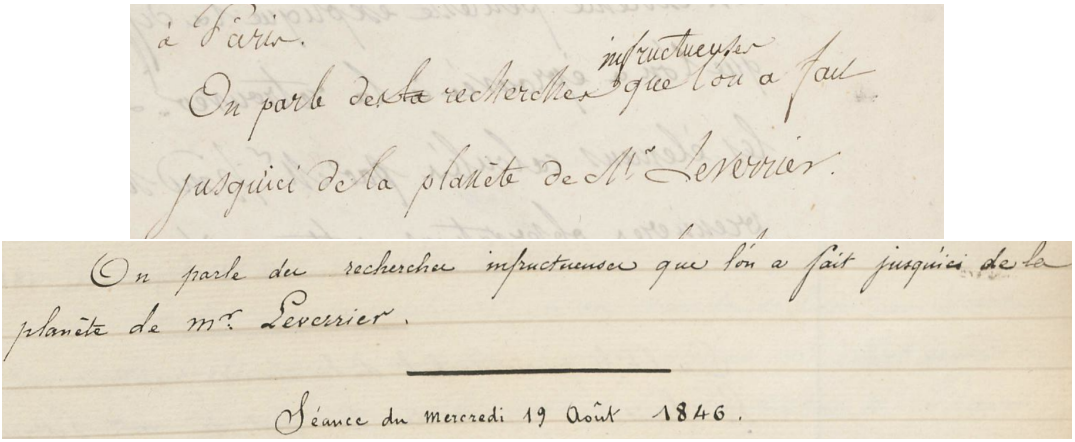


FIGURE 6.19 – Mention d'une recherche visuelle de la planète Le Verrier à l'Observatoire de Paris lors de la séance du 12 août 1846 du Bureau des Longitudes (brouillon et copie au propre) "Séance du 12 août 1846", 1846-08-12, Les procès-verbaux du Bureau des Longitudes, consulté le September 26, 2023, http://purl.oclc.org/net/bdl/items/show/2861

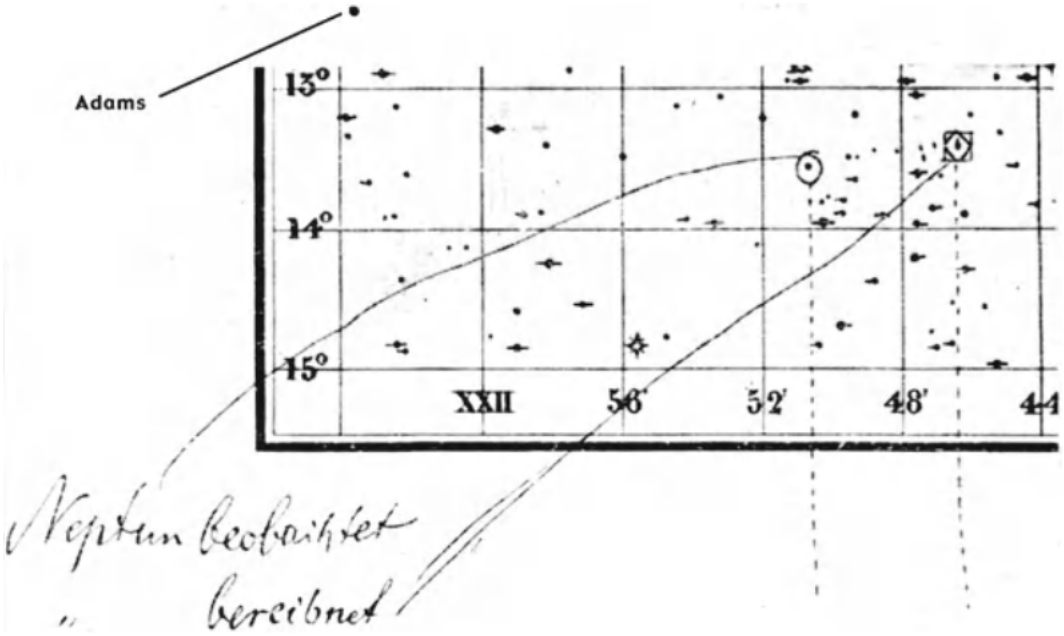


FIGURE 6.20 – Extrait de la carte Hora XXI établie par le docteur Bremiker, où sont indiquées [vraisemblablement par Galle] la position prédite par Le Verrier (Neptun bereibnet) et la position réelle de Neptune (Neptun beobachtet). L'écart angulaire est de l'ordre de 4mn de temps, soit de l'ordre de 60' d'arc, ce qui correspond assez bien au calcul de Le Verrier : 52′ en arrière. La position prédite par Adams est aussi indiquée, à environ 2°30′ devant le vrai Neptune (voir aussi fig. 11.3)

Effectivement, Encke, le directeur de l'Observatoire de Berlin, a insisté sur l'importance de la carte Hora XXI de Bremiker (voir fig. 6.20). Dans sa lettre à Le Verrier datant du 28 septembre 1846, il déclare (en toute franchise et honnêteté) qu'il aurait un peu attendu, après la lecture du troisième mémoire de Le Verrier, avant de lancer éventuellement une recherche visuelle, s'il n'y avait pas eu la demande personnelle adressée à Galle ; ensuite il félicite Le Verrier pour sa brillante découverte, et enfin il ajoute : [Encke, 1846]

> Il y a eu beaucoup de bonheur dans notre recherche : la carte académique de Mr Bremiker, qui, peut-être, n'est pas encore arrivée à Paris, mais que je ferai expédier tout à l'heure, comprend justement, près de sa limite inférieure, le lieu que vous avez désigné. Sans cette circonstance infiniment favorable, sans une carte où l'on pût être sûr de trouver les étoiles fixes jusqu'à la dixième grandeur, je ne crois pas qu'on eût trouvé la planète. Vous verrez vous-même, en observant cet astre, que le diamètre est beaucoup trop faible pour attirer l'attention, même quand on l'examine avec un grossissement assez fort. Je vous suis donc personnellement très obligé d'avoir démontré le prix qu'une telle carte peut avoir dans des recherches scientifiques.

En comparaison, Challis, ne pensant pas disposer de carte de la zone, avait entrepris de faire un relevé systématique de la zone cible jusqu'à la magnitude 11, et ce faisant, il avait enregistré à plusieurs reprises Neptune, sans naturellement reconnaître sa nature planétaire ! [Challis, 1846a].

6.2.12 Encadrements déterminés par Le Verrier pour les paramètres elliptiques de Neptune. Formation des enceintes

À la fin de la quatrième partie de *Herschel* et à partir de la page 135 du cahier n° 6, Le Verrier procède à des encadrements sur les valeurs des paramètres de Neptune :

> Je passe à la détermination des limites entre lesquelles on peut faire varier chacun des éléments ci-dessus déterminés, sans cesser de représenter les observations[...] Reprenons la position que nous avons déterminée plus haut pour la planète troublante. Nous pourrons écarter notablement l'astre de cette position dans une direction déterminée, située dans l'écliptique, et continuer de satisfaire aux observations d'Uranus[...] Et toutefois, à mesure que nous nous éloignerons de la première position, les observations seront moins bien représentées ; et nous arriverons, dans la direction que nous avons suivie, à un point de l'écliptique au delà duquel on ne pourra placer la planète troublante sans introduire entre la théorie et les observations des différences inadmissibles. La suite des points analogues, situés dans toutes les directions autour de la première position, formera une enceinte en dedans de laquelle l'astre cherché sera de toute nécessité renfermé. En menant à cette enceinte deux tangentes extrêmes par le Soleil, on connaîtra deux longitudes entre lesquelles il suffira de chercher la nouvelle planète. Mais le tracé de l'enceinte est fort compliqué ; je vais exposer d'abord, d'une manière générale, comment je suis arrivé à l'effectuer.

La démarche est assez subtile : il part de ses 33 équations de condition (fig. 6.9), qui sont fonction [22] de γ, $\mathcal{C}$, m' ; il fixe des erreurs maximales pour ses données d'observation : $25''$ pour l'observation de Flamsteed, $5''$ pour les observations modernes par exemple. Il augmente progressivement la période de révolution de Neptune (ou de façon équivalente le demi-grand axe) ; pour une valeur donnée de cette période, il reprend les 33 équations de condition (fig. 6.9), et il fait varier les paramètres $\mathcal{C}$ et m' par un balayage simultané ; il détermine la première équation de condition [23] qui vérifie "équation de condition=±tolérance limite", ce qui donne une relation entre m' et $\mathcal{C}$, puisque cette équation ne fait intervenir que m' et $\mathcal{C}$; mais si $(m', \mathcal{C})$ décrit cette ligne, il se peut qu'une autre équation dépasse la tolérance d'observation ; il considère cette équation qui fournit une deuxième ligne limite ; cette deuxième ligne limite ne peut pas être conservée en entier, car une autre équation peut dépasser la tolérance ; il la considère et obtient une troisième ligne limite ; il obtient ainsi un polygone curviligne dans le plan $(\mathcal{C}, m')$ dans lequel doivent se trouver les bonnes valeurs. Comme la longitude vraie v' et le rayon vecteur r' ne dépendent que de ce couple $(\mathcal{C}, m')$, Le Verrier trace plutôt le polygone curviligne dans le plan (v', r'). Il refait la même démarche en augmentant la valeur de la période : il obtient un polygone plus petit et il continue à augmenter la période jusqu'à ce que le polygone se réduise à un point : cela donne la limite supérieure de la période ou de a. Il fait de même en diminuant la période à partir de la valeur optimale initiale et il obtient une limite inférieure pour a. C'est ainsi qu'il obtient l'encadrement $35.04 < a < 37.9$. La mise en pratique par Le Verrier de cette démarche très laborieuse n'est pas entièrement convaincante : les différents polygones ne semblent pas inclus les uns dans les autres : (fig. 6.21).

22. Quadratiques en $(\gamma, \mathcal{C})$ et linéaires en m'.

23. Cette condition n'est pas facile à tester ; il fait un échantillonnage pour $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} = -0.7, -0.6, ..., 0.5$ par exemple ; pour chaque valeur de $\mathcal{C}$ il résout les 2 inégalités du premier degré en m' : équation<tolérance_max et équation> −tolérance_max ; il conserve $\mathcal{C}$ si l'intervalle délimité par ces deux conditions sur m' est non vide et sinon il élimine cette valeur de $\mathcal{C}$; il obtient une enveloppe supérieure pour m' : $m'_{max} = \psi(\mathcal{C})$ ainsi qu'une enveloppe inférieure : $m'_{min} = \phi(\mathcal{C})$; comme r' et v' s'expriment à l'aide de $(a_n, \varepsilon', h', l', m')$, soit aussi bien à l'aide de $(\gamma, \mathcal{C}, m')$, on obtient une équation paramétrique d'une partie de l'enceinte ; Le Verrier construit cette courbe à l'aide de quelques points. Normalement, il faudrait refaire ce calcul pour chacune des 33 équations et ne conserver que le domaine intérieur à chacun des 33 domaines individuels. Naturellement, Le Verrier ne sélectionne que quelques équations pour faire sa discussion et limiter les calculs, ce qui doit modifier sensiblement les résultats, comme on le voit à la fig. 6.21.

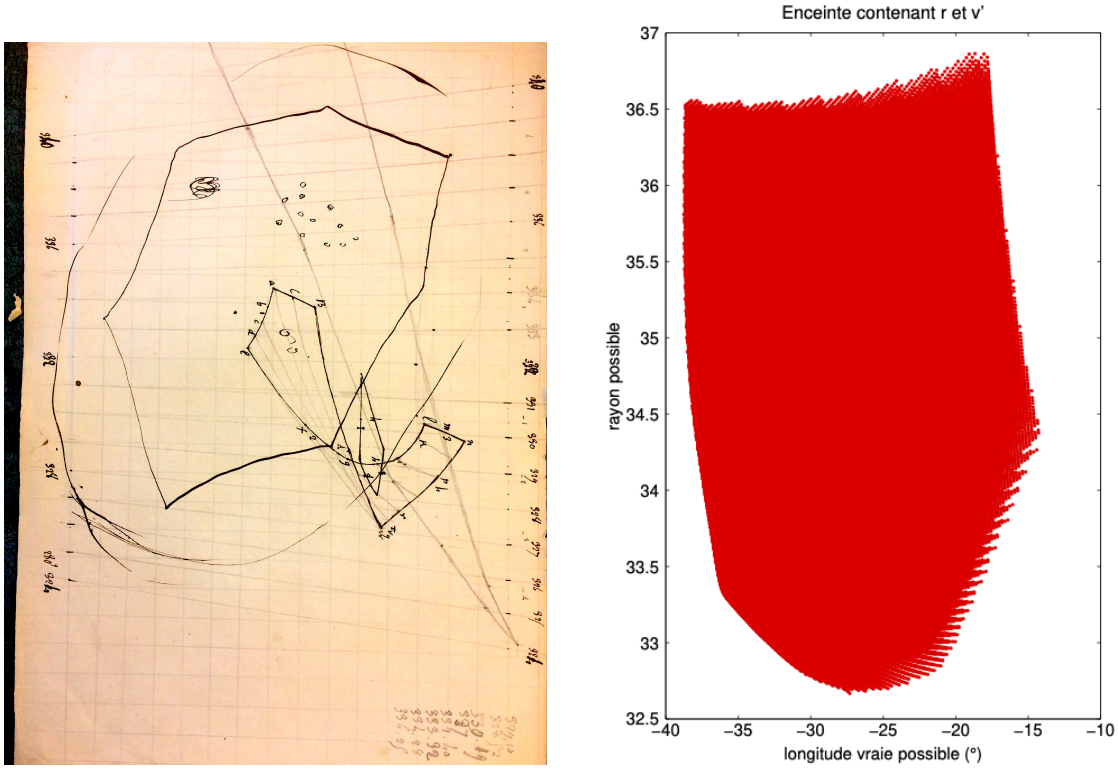


FIGURE 6.21 – À gauche, quelques enceintes dessinées par Le Verrier dans le plan (r', v') ; on ne reconnaît pas très bien ce qu'il a voulu tracer. À droite, ensemble de valeurs du couple (v', r') au 1/1/1847 pour lesquels les 33 équations de condition de Le Verrier (fig 6.9) restent en dessous des tolérances assignées par Le Verrier aux différentes observations. Voir dans la table 6.10 les comparaisons entre les différents résultats. La tolérance est ici 25, 15, 10, 5 (La définition du mot 'tolérance' est donnée dans la légende de la table 6.11). À gauche, l'axe des longitudes est en ordonnées et celui du rayon vecteur est en abscisses. Notons que Le Verrier n'incluera pas son tracé dans *Herschel*. Il se trouve sur une feuille séparée à la fin du cahier n° 6 ; était-il peu satisfait du résultat ?

Après des considérations générales, Le Verrier entre dans des détails un peu plus techniques : (*Herschel*, p. 242)

> Pour entrer dans les détails de la solution dont je viens de tracer la marche d'une manière générale, attribuons à α, et par suite à γ, une valeur particulière. La longitude v' et le rayon vecteur r' ne renferment plus d'autres variables que $\mathcal{C}$, h' et l'. Mais comme ces deux dernières, savoir h' et l', sont elles-mêmes des fonctions de $\mathcal{C}$ et m', on voit qu'on pourra poser $v' = f(\mathcal{C}, m')$, $\quad r' = \phi(\mathcal{C}, m')$.
> S'il existait entre $\mathcal{C}$ et m' une condition particulière, on pourrait éliminer ces deux variables ; il resterait entre v' et r' une équation qui représenterait une courbe continue. En exprimant que les erreurs des premiers membres des équations du n° 135 ne dépassent pas les limites qui ont été fixées ci-dessus, on tombera effectivement sur des relations entre $\mathcal{C}$ et m' ; relations qui conduiront ainsi au tracé des courbes continues, dont la réunion constitue le contour polygonal correspondant à la valeur déterminée de α.

La démarche est astucieuse, mais très laborieuse quand on la fait à la main : les calculs de Le Verrier couvrent une soixantaine de pages à la fin du cahier n° 6, mais là encore, le calcul est faussé, car il part de valeurs initiales très éloignées des valeurs réelles. À partir de valeurs locales, valables autour du couple $(0.51, 252°)$, il essaie de faire des évaluations globales, qui ne peuvent pas aboutir correctement.

J'ai repris ce problème, mais en procédant à un balayage simultané sur γ, $\mathcal{C}$, m' et en ne retenant que les triplets qui satisfont aux 33 limites dans les observations : les deux résultats sont confrontés à la figure 6.21 ; les deux diagrammes sont difficilement superposables.
La définition du mot 'tolérance' est donnée dans la légende de la table 6.11.
À la table 6.10, on a donné les encadrements obtenus par Le Verrier à partir de ses 33 équations de condition. On donne aussi les encadrements obtenus par TRIP avec un balayage systématique sur ces mêmes équations, les valeurs finales trouvées par Le Verrier ainsi que les valeurs optimales obtenues par TRIP, i.e. les valeurs qui minimisent les résidus quadratiques des 33 équations.

TABLE 6.10 – Encadrement des paramètres par Le Verrier et valeurs optimales pour la tolérance 25, 15, 10, 5 adoptée par Le Verrier

éléments de Neptune / Valeurs calculées	a'	ε'	v'	r'	m'
Intervalles obtenus par Le Verrier	35.04−37.9		321−335°		
Intervalles obtenus par TRIP	35.6−37.8	230−242°	321−345°	33.2−38.3	0.61−1.1
Valeurs finales données par Le Verrier	36.1	240°	327°	33.06	1.07
Valeurs optimales par TRIP	35.6	235°	324°	35.3	1.02

On constate que l'encadrement obtenu avec TRIP pour a' est cohérent avec le résultat de Le Verrier, mais la valeur correcte, 30.11, est très éloignée de l'intervalle de confiance. Cela prouve que Le Verrier ne s'est pas trompé dans ses calculs, mais aussi que des données locales – les 33 équations (fig. 6.9) ont été formées avec l'hypothèse $\alpha = 0.51$ – ne peuvent pas donner de bons résultats globaux.
À la figure 6.22, on a représenté les différentes enceintes lorsque l'on élargit la tolérance dans les équations de condition. On constate, sans surprise, que les tailles des enceintes augmentent avec la tolérance.
Par contre, on peut être étonné des amplitudes du rayon vecteur, qui peuvent atteindre 20−45 *au* alors que l'amplitude sur le demi-grand axe est beaucoup plus faible : cela tient au fait que l'excentricité peut varier dans des proportions considérables : de 0.03 à 0.96.

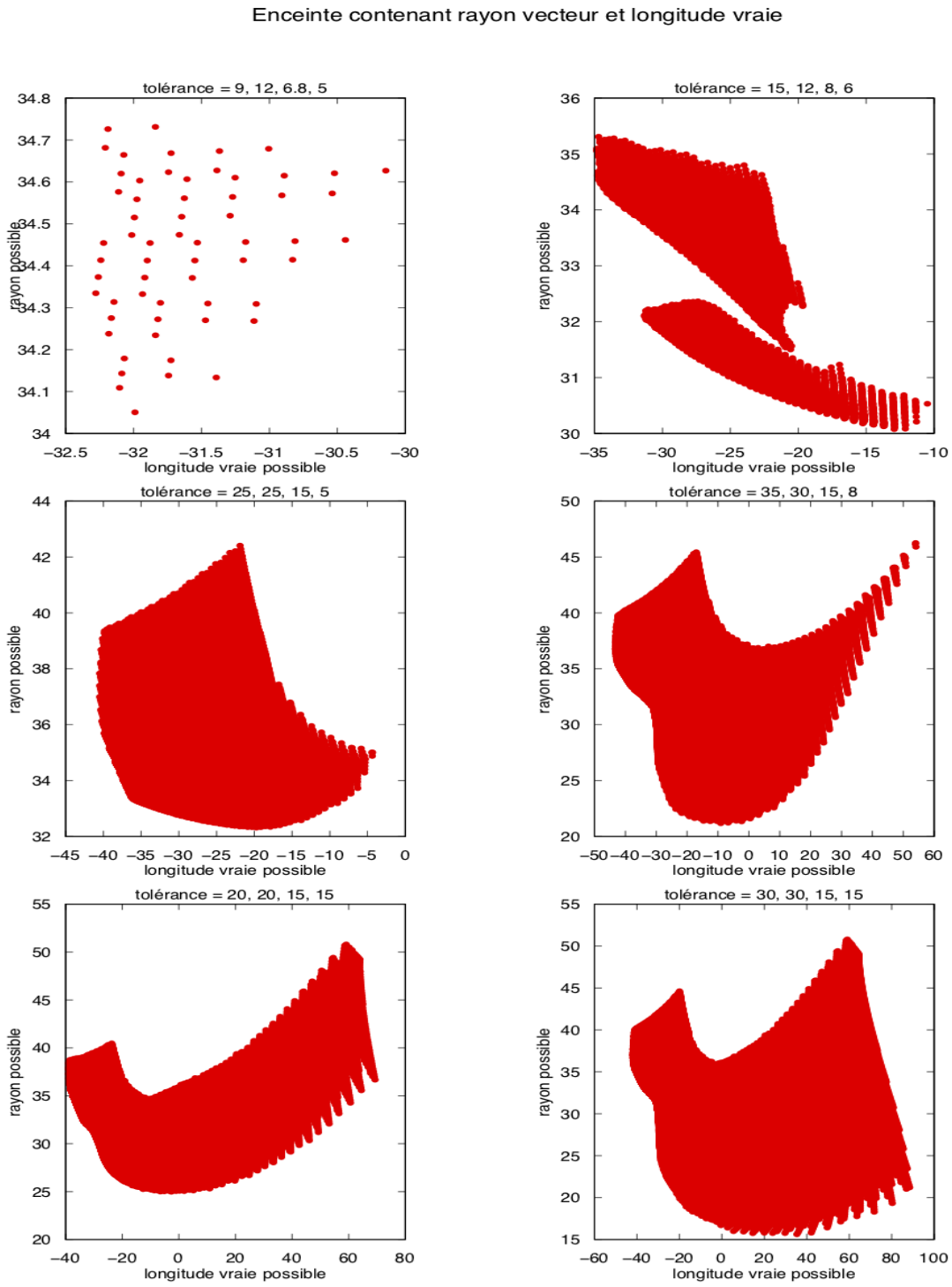


FIGURE 6.22 – Enceintes où se trouvent les couples (v', r') (longitude vraie, rayon vecteur au 1/1/1847) admissibles en fonction des tolérances retenues pour les équations de condition ; la portée des diverses tolérances est indiquée à la légende de la table 6.11. La position correcte de Neptune $(-33°, 30.6)$ n'appartient à aucune de ces enceintes ! Avec le premier jeu, très restrictif, de paramètres (en haut, à gauche), la valeur de la longitude héliocentrique est correcte : $-31\overset{\circ}{.}5 = 328\overset{\circ}{.}5$; par contre la valeur du rayon vecteur, 34.4, est assez éloignée de la valeur correcte, 30.6. Le décalage tient au fait que les équations de condition ont été établies pour $\alpha = 0.51$ et elles ne peuvent pas donner de valeurs entièrement satisfaisantes pour la valeur réelle de α, qui est $\alpha = 0.63$, trop éloignée de la valeur retenue par Le Verrier.

Le principe du calcul avec TRIP est très simple : faire un balayage sur le triplet $(\gamma, \mathcal{C}, m')$; pour chaque valeur du triplet, on examine si chaque premier membre des 33 équations de condition (fig. 6.9) est inférieur en valeur absolue à la tolérance accordée ; si c'est le cas, on calcule les valeurs de (v', r') pour ce triplet et on allume le pixel correspondant dans le plan (v', r'). On note le résidu dans les équations et les valeurs optimales retenues pour les paramètres sont celles qui minimisent les résidus.
Le Verrier, dans sa justification aux attaques de Babinet [Le Verrier, 1848a], indique que les intervalles de variation des éléments de Neptune sont théoriques, car il a fixé des tolérances assez arbitraires pour les observations : par exemple 25″ pour celle de 1690 et 5″ pour les observations modernes. Il dit que ces seuils pourraient être relevés sans qu'on puisse contester ; il annonce que l'excentricité et la longitude du périhélie peuvent varier dans de très grandes proportions quand on accroît la tolérance, ce que l'on constate aisément. Par contre, il annonce aussi de grandes variations pour le demi-grand axe (et par ricochet pour la masse), ce qui est moins vrai. On donne, table 6.11, les valeurs optimales des paramètres en fonction des tolérances retenues (en as). On constate qu'à part le premier cas, qui laisse peu de marge, les valeurs optimales de ε' et de v' varient peu.

Table 6.11 – Paramètres optimaux de Neptune en fonction de la tolérance accordée aux observations, obtenus avec TRIP en minimisant les résidus des 33 équations de condition. La première valeur des tolérances est la tolérance pour l'observation de Flamsteed, la deuxième pour les équations (2), (3), (5) et (7), la troisième valeur pour les équations (4) et (6) et enfin la quatrième valeur pour toutes les observations modernes.

Éléments réalisant les résidus minimaux						
tolérance	9,12,6.8,5	15,12,8,6	25,25,15,5	35,30,15,8	20,20,15,15	30,30,15,15
a'_{opt}	35.8	35.4	34.5	34.3	34.7	34.3
ε'_{opt}	235.6	246.6	247.3	246.4	248.0	246.4
v'_{opt}	328.1	338.5	346.4	346.5	343.5	346.5
r'_{opt}	34.6	31.7	35.0	36.4	33.6	36.4
m'_{opt}	0.91	0.85	0.72	0.70	0.80	0.70

Observations normales (encadré 14)

Une planète n'est pas observée à des dates fixes. Par contre pour comparer avec les éphémérides, il est commode d'avoir une date de référence simple, par exemple le 5 janvier à 0 h. Voici le principe du calcul.
Soit t le temps, avec comme origine le 5 janvier à 0 h. Pour le but cherché, on note les positions de la planète α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, les 3, 4, 5, 6, 7 janvier à des heures non choisies t_3, t_4, t_5, t_6, t_7. Puis on ajuste un polynôme $P(t)$ du second degré tel que $P(t_i) \simeq \alpha_i$ pour $i = 3, 4, 5, 6, 7$; on résout ce système par les moindres carrés et on adopte comme position de la planète le 5 janvier à 0h la valeur $P(0)$, valeur qui est appelée position (observée) **normale**.
Bien sûr, le schéma précédent peut être adapté à différentes situations.
Notons que le principe de ce calcul est aussi utilisé pour déterminer la date exacte de conjonction ou d'opposition d'une planète.
Voir un exemple de position normale à la fin du § 6.2.12, en haut de la page suivante.

NORMAL PLACES OF NEPTUNE.

No. of place.	t Date, 1846 yrs. Mean Time, Greenwich.	α Obs. Geo. lon.	hh No. of obs.	δ Obs. Geo. lat.	$h'h'$ No. of obs.	$\Delta\alpha$ Obs. — Eph.	$\Delta\delta$ Obs.—Eph.
	d.	° ′ ″		° ′ ″		″	″
1	215.5670	327 9 49.34	1	− 0 31 36.24	1	— 16.75	— 0.63
2	223.5441	326 57 9.04	1	44.09	1	— 7.27	— 1.03
3	270.5	325 46 25.82	16	57.99	16	— 1.02	+ 0.84
4	276.5	39 54.23	13	56.14	13	+ 0.27	+ 1.51
5	282.5	34 16.11	13	56.09	13	+ 1.12	+ 0.03

FIG. 6.23 *Début du tableau des observations retenues par Peirce pour prouver que la découverte de Neptune par Galle était un "Happy accident"*

Exemple de position normale.
Voici ci-contre, le début des observations utilisées par Peirce pour montrer l'incompatibilité des déclarations de Le Verrier ; voir § 6.3. Les deux premières observations sont celles de Challis des 4 et 12 août durant sa recherche visuelle de Neptune, observations fortuites et uniques, ne pouvant pas être 'normalisées' ; les autres sont des moyennes d'observations multiples (16, 13, 13...), pouvant être normalisées ; on voit que l'heure de référence choisie est minuit.

6.3 Réactions américaines qui ont suivi la découverte de Neptune

À l'annonce de la découverte de la nouvelle planète, la première réaction en Amérique est enthousiaste. Mais rapidement, Walker [24] [Walker, 1847a] découvre que Neptune a été observé en tant qu'étoile par Lalande les 8 et 10 mai 1845 [25]. Cette observation permet à Walker d'établir une orbite plus précise pour Neptune, presque circulaire, mais cette orbite est très différente de celle prédite par Le Verrier ou Adams. Le mathématicien B. Peirce [26] porte successivement plusieurs jugements 'définitifs' et contradictoires sur la situation.
On essaie de retracer le fil de ces déclarations, dans cette saga un peu compliquée. L'historique est très bien décrit dans [Hubbell, 1992], qui reprend les affirmations successives que Peirce a déclarées dans [Peirce, 1847a], [Peirce, 1847b], [Peirce, 1847c] et [Peirce, 1848].
J'ai extrait de cet historique ce qui concerne plus directement Le Verrier.

6.3.1 La planète découverte par Galle n'est pas celle calculée par Le Verrier

La découverte de Neptune par Le Verrier, "au bout de sa plume", selon le mot d'Arago, suscite un enthousiasme international immédiat. Mais rapidement, surviennent les polémiques au sujet de la priorité de la découverte et du nom à donner à la planète. Ces polémiques ont été très bien étudiées [27] par ailleurs et ne seront pas reprises ici ; voir cependant la polémique avec Babinet au chapitre 13, polémique qui porte sur les valeurs des éléments elliptiques obtenues par Le Verrier pour Uranus.
En octobre 1846, W. Lassell [28], basé à Liverpool, découvre Triton [Lassell, 1846], le plus gros satellite de Neptune. Cette découverte permet de déterminer la masse de Neptune, qui se trouve être 2 fois plus petite que celle annoncée par Le Verrier et 3 fois plus petite que celle annoncée par Adams. La découverte de l'observation de Lalande permet à Walker (et Adams) de déterminer une orbite plus précise pour Neptune et l'on constate alors que les paramètres nouvellement

24. S. C. Walker (1805−1853), initialement actuaire, puis astronome américain attaché à l'US Observatory.
25. Le calcul effectué par Walker pour montrer l'identité de l'étoile notée par Lalande les 8 et 10 mai 1795 et Neptune n'est pas toujours facile à suivre, en particulier son calcul pour déterminer la valeur la plus probable de l'excentricité, calcul qui repose sur une formule non justifiée (et qui semble inventée pour la circonstance) pour cette excentricité. Notons aussi que Petersen (1804−1854) avait fait à cette même date la même découverte à l'Observatoire d'Altona.
26. Benjamin Peirce (1809−1880), professeur de mathématiques et de physique à Harvard.
27. [Gould, 1850], [Grosser, 1962], [Alexander, 1965], [Moore, 1988], [Standage, 2000], [Lequeux, 2009], [Sheehan, 2021],...
28. William Lassell (1799−1880), brasseur de profession et astronome amateur avec un équipement supérieur à celui de nombreux observatoires publics (un télescope de 60 cm entre autres, fabriqué par lui-même), comme Greenwich ou Paris. Voir une représentation de son instrument au § B.2.

trouvés n'ont pas beaucoup de rapport avec ceux annoncés par Le Verrier ou Adams. Benjamin Peirce essaie d'analyser les causes de ces désaccords. Il envoie un message[29] à l'Académie des sciences américaine donnant deux raisons pour expliquer ces divergences et son contenu est publié sous la forme suivante [Peirce, 1847a] :

> **Première raison :** [Peirce dit que dans les formules que Le Verrier utilise pour la perturbation exercée par une planète extérieure] « Le Verrier retained only the inequality from $(3n' - n)$, which was suited to the mean distance 38 ».

Il suffit d'observer les formules utilisées par Le Verrier (notées $P^{(2)}$, $M^{(2)}$ et $N^{(2)}$ par Le Verrier, p. 155−157 de *Herschel*) pour constater que ce n'est pas exact : Le Verrier fait intervenir aussi l'inégalité associée à $2n' - n$, mais avec la valeur qu'il a choisie pour le rapport des demi-grands axes (0.5), ce terme n'est pas prépondérant. Par contre, Peirce a raison de dire que les valeurs des coefficients avec les paramètres utilisés par Le Verrier et Adams sont très éloignées des valeurs de ces mêmes coefficients obtenues avec les paramètres réels de Neptune : la comparaison numérique des coefficients intervenant dans les perturbations de la longitude avant et après la découverte visuelle est effectuée au § 11.2.1.

> **Deuxième raison :** From these data [observations of Neptune from 1/8/46 to 7/1/47], without any hypothesis in regard to the character of the orbit, he [Peirce] has arrived at the conclusion, that THE PLANET NEPTUNE IS NOT THE PLANET TO WHICH GEOMETRICAL ANALYSIS HAD DIRECTED THE TELESCOPE ; that its orbit is not contained within the limits of space which have been explored by geometers searching for the source of the disturbances of Uranus ; and that its discovery by Galle must be regarded as a HAPPY ACCIDENT.

Voici l'argumentation de Peirce, qui reprend deux déclarations de Le Verrier figurant dans *Herschel* p. 240 (ce sont 1. et 2.) ; Peirce déclare que les 3 affirmations suivantes sont globalement incompatibles :

1. La distance moyenne de la planète doit être comprise entre 35 et 37.9 *au*, ce qui correspond à des révolutions sidérales comprises entre 207 et 233 ans.
2. Il n'y a qu'une seule région dans laquelle la planète perturbatrice doit être placée avec une longitude moyenne au 1/1/1800 comprise[30] entre 243° et 252°.
3. L'orbite satisfait aux observations[31] regroupées entre le 1/8/46 et le 7/1/47 par Walker et Peirce.

Peirce prétend par exemple que si l'on retient la première affirmation, alors la longitude moyenne doit être distante d'au moins 40° des limites données par la deuxième assertion. Et de même, si l'on respecte la valeur de la longitude moyenne, alors la période de révolution ne peut pas dépasser 170 ans. Malheureusement, Peirce n'a pas publié le détail de ses calculs.

29. Le message est lu au cours d'une séance par le président de l'Académie des sciences américaine, d'où l'utilisation de la 3e personne pour citer Peirce.

30. C'est effectivement une affirmation de Le Verrier (*Herschel*, p. 185), mais en fait, il la tempère rapidement : il énonce (*Herschel* p. 193) que la « longitude de la planète était, au 1er janvier 1800, de 252° », et il ajoute : « on reconnaît qu'on peut diminuer cette longitude jusqu'à 243°, ou même un peu au-dessous ; qu'on peut, au contraire, l'augmenter jusqu'à 261° et au delà, mais sans qu'elle puisse s'élever cependant jusqu'à 270° ». On voit donc que Peirce a fait une lecture très sélective et très orientée de *Herschel*.

31. 110 observations de Neptune provenant de différents observatoires et regroupées dans le document de Peirce autour de 16 dates, ce qui représente 16 observations 'normales' i.e. obtenues par moyennes et interpolation ; un aperçu est donné à la figure 6.23.

6.3.2 Discussion de l'accusation de Peirce "Happy accident"

Cette affirmation de Peirce (impossibilité de satisfaire simultanément les conditions précédentes 1., 2. et 3.) paraît à première vue étonnante. Il me semble que cette déclaration de Peirce n'est pas correcte, ce que je vais essayer de prouver, et ce constat d'erreur, concernant un mathématicien aussi chevronné, serait très surprenant. Une explication 'psychologique' est esquissée en fin de section.
Pour prouver la non validité de l'affirmation de Peirce, on commence par examiner s'il existe des orbites circulaires pour lesquelles on a simultanément $243° \leq \varepsilon' \leq 252°$ et $207 \leq T \leq 233$, et qui aboutissent à une longitude héliocentrique vraie (ℓ'_{47}) au 1/1/1847 voisine de $327\overset{\circ}{.}5$, valeur de la longitude héliocentrique vraie de Neptune à cette date ; et pour cela, on procède à un balayage avec un pas de 1 pour T et pour ε'. On donne table 6.12 les couples (T, ε') satisfaisant à l'ensemble de ces conditions.

TABLE 6.12 – Paramètres d'orbites circulaires satisfaisant aux conditions de Peirce

T	ε'	ℓ'_{47}
216	248	327.0
208	245	327.0
213	247	327.1
210	246	327.2
227	252	327.2
224	251	327.2

T	ε'	ℓ'_{47}
221	250	327.2
218	249	327.3
207	245	327.4
215	248	327.4
226	252	327.5
223	251	327.5
212	247	327.5
220	250	327.6

T	ε'	ℓ'_{47}
217	249	327.6
209	246	327.6
214	248	327.7
211	247	327.8
219	250	327.9
222	251	327.9
225	252	327.9

On montre fig. 6.24 la répartition de ces couples sur un graphe, T en abscisses et ε' en ordonnées ; un ajustement quadratique des résultats a été réalisé.

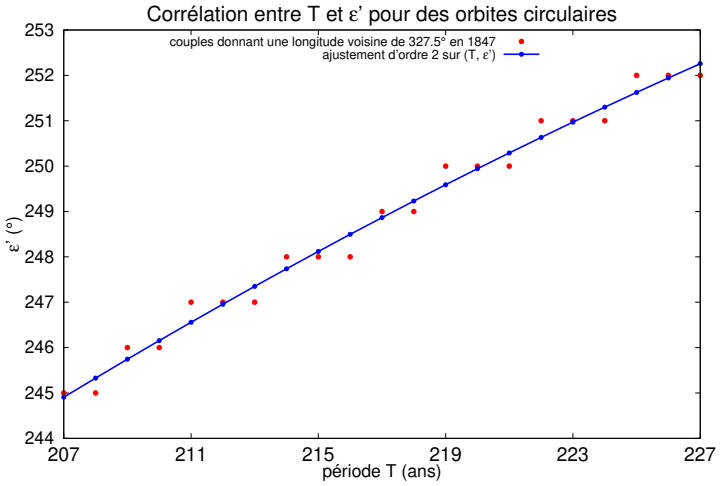


FIGURE 6.24 – Couples (T, ε') conduisant à une orbite circulaire satisfaisant aux critères de Peirce, avec une longitude vraie au 1/1/1847 voisine de $327\overset{\circ}{.}5$. J'ai ajusté une relation entre les paramètres T et ε' pour ces orbites circulaires. On constate que ε' est une fonction croissante de T, ce qui est tout à fait logique.

On voit qu'il y a de très nombreux jeux de valeurs qui conduisent à une valeur acceptable pour ℓ'_{47}. Avec ces jeux de valeurs, les écarts avec les observations de Peirce ne peuvent être que faibles, ce que l'on va vérifier maintenant en élargissant un peu la recherche.

Comment donc vérifier ces écarts plus précisément ? Il 'suffit' de programmer des orbites avec un temps de révolution compris entre 207 et 233 ans, une longitude moyenne au 1/1/1800 comprise entre 243° et 252°, compléter avec quelques excentricités associées à quelques valeurs de la longitude du périhélie en gardant – pour ne pas compliquer excessivement – une orbite inclinée comme le véritable Neptune et calculer alors les écarts avec les positions observées par Peirce.
Le principe du calcul est le suivant : INPOP calcule avec la plus grande exactitude les positions de chaque planète aux dates de Peirce à partir des données initiales fournies par INPOP pour les 7 premières planètes et celles attribuées arbitrairement par la programmation à Neptune. On détermine alors le résidu quadratique entre les positions de Neptune données par INPOP, et les observations de Peirce.
Avec les positions "exactes" de Neptune, données par INPOP, contenant en particulier les véritables caractéristiques de Neptune, je trouve un résidu de 5 as.
Avec les éléments donnés par Peirce [Peirce, 1847a] dans son message (Hypothèse III), je trouve un résidu de 4880 as. Peirce avait établi 9 équations de condition pour corriger les éléments de son Hypothèse III, mais la façon dont ces équations avaient été établies est difficilement compréhensible. Après correction, il avait constaté un résidu de $4''.21$, mais cette valeur semble bien peu réaliste.
Avec les valeurs trouvées par Le Verrier pour les paramètres de Neptune, on trouve un écart de 9413 as, soit environ $2°30'$, écart important, mais qui reste dans des limites raisonnables pour une recherche visuelle.
J'ai programmé les calculs à l'aide d'INPOP en prenant successivement pour Neptune les paramètres suivants :

ε' (°)	T (ans)	e'	ϖ'	i'	Ω'
$243-252$	$207-233$	0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.05,	$k\,45°$ $0 \le k \le 7$	$1°47'$	131°
avec un pas de 1		0.07, 0.09, 0.11, 0.13, 0.15			

Pour chaque ensemble de données, je calcule les résidus quadratiques avec les observations données par Peirce. Voici les paramètres qui conduisent à des résidus inférieurs à 250 as.

Table 6.13 – Éléments elliptiques de Neptune conduisant à des écarts quadratiques inférieurs à 250 as avec les observations de Peirce (les résidus sont en as et les angles en degrés)

T	ε'	e'	ϖ'	res
207	247	0.02	315	191
207	247	0.01	180	241
208	246	0.02	270	193
208	245	0.03	270	215
208	252	0.07	0	206
208	247	0.01	270	215
208	248	0.00	0	250
209	245	0.03	225	231
209	246	0.09	315	182
209	247	0.05	315	174
210	252	0.03	45	227
210	245	0.15	315	187
210	249	0.01	135	226
210	246	0.11	315	174
211	248	0.01	225	229
211	252	0.05	0	173
212	250	0.02	135	239

T	ε'	e'	ϖ'	res
213	248	0.07	315	185
213	251	0.02	0	208
213	249	0.03	315	225
213	245	0.05	270	212
213	248	0.03	180	247
214	252	0.03	0	224
214	248	0.02	225	249
214	249	0.02	180	244
214	247	0.13	315	99
215	250	0.02	315	228
216	248	0.03	270	224
216	249	0.02	270	226
217	250	0.05	315	190
217	249	0.09	315	143
217	253	0.03	0	240
217	251	0.01	315	229
218	246	0.05	225	250
218	248	0.15	315	106
218	245	0.07	270	215

T	ε'	e'	ϖ'	res
219	251	0.01	270	239
219	252	0.00	0	245
220	250	0.09	315	239
220	251	0.05	315	221
221	249	0.15	315	146
221	246	0.07	270	210
223	243	0.11	270	230
224	247	0.07	270	231
224	251	0.11	315	215
224	250	0.15	315	202
226	244	0.11	270	236
227	252	0.11	315	248
227	248	0.07	270	232
227	251	0.15	315	179
229	245	0.11	270	211
230	249	0.07	270	244
230	252	0.15	315	123

Quelle conclusion peut-on tirer de ces résultats ?

On voit qu'en choisissant bien les paramètres, on peut obtenir des résidus compris entre 100 et 180 as, c'est-à-dire compris entre $1'40$ et $3'$. Rappelons qu'avec les éléments de Peirce (Hypothèse III) on obtenait un résidu de l'ordre de $1°30'$.
Peirce prétendait que si l'on choisissait une longitude dans les limites données par Le Verrier, la période ne pourrait pas dépasser 170 ans et si l'on choisissait la période dans les limites indiquées par Le Verrier, la longitude de l'époque serait en défaut de 40° au moins. On peut donc conclure que les affirmations de Peirce sont excessives et que l'on peut satisfaire [32] raisonnablement (avec une erreur inférieure à $3'$) les 3 conditions envisagées par Peirce avec les encadrements sur T et ε' donnés par Le Verrier.
Compte tenu des résultats précédents, la découverte de Neptune par Galle ne peut donc pas être considérée comme un HAPPY ACCIDENT.

On va voir au paragraphe suivant le manque de cohérence dans les propos de Peirce et le peu de confiance qu'on peut leur accorder. La constatation que l'on vient de faire – objection non valide de Peirce au sujet du 'happy accident' – s'inscrit dans ce cadre et n'est donc pas surprenante.

6.3.3 Déclarations successives de Peirce au sujet de Neptune

Ce qui suit est principalement extrait de [Hubbell, 1992], qui s'appuie sur des déclarations successives de Peirce publiées dans les numéros suivants de *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* : [Peirce, 1847a], [Peirce, 1847b], [Peirce, 1847c] et [Peirce, 1848].
On a vu au paragraphe précédent la première réaction de Peirce [après la publication de l'orbite trouvée par Walker], qualifiant la découverte de Neptune par Galle de 'Happy accident' ; il avait aussi annoncé dans le même article que la durée de révolution de Neptune était très vraisemblablement le double de celle d'Uranus [Peirce, 1847a].
Cependant, dans une réponse à Jared Sparks (futur directeur de Harvard), il rend un hommage à Le Verrier, hommage probablement sincère (de mathématicien à mathématicien), malgré les réserves formulées précédemment.

> I would not have you suppose that I am disposed to contest in the least the greatness of Le Verrier's genius. I have studied his writings [*Herschel*] with infinite delight, and am ready to unite with the whole world in doing homage to him as the first geometer of the age, and as founder of a wholly new department of *Invisible Astronomy*

Dans [Peirce, 1847b], Peirce déclare que le problème des perturbations d'Uranus, abordé selon les méthodes de Le Verrier et d'Adams, admet 3 solutions : le Neptune de Galle et deux positions supplémentaires situées à $\pm 120°$ de Neptune ; mais il précise que ce ne sont que des solutions théoriques. Les a-t-il vraiment trouvées par le calcul ? Avec les expérimentations effectuées dans le chapitre 8, en particulier à l'examen de la figure 8.2, aucun indice pour un triplet de solutions n'est mis en évidence.
Peirce déclare aussi qu'il ne peut pas concilier l'orbite de Neptune [actualisée par Walker] avec le fait qu'il [Neptune] soit la cause principale des irrégularités dans le mouvement d'Uranus, autrement dit, que Neptune n'est pas la bonne solution au problème d'Uranus.
À la vue de nouveaux éléments [éléments V] de l'orbite de Neptune déterminés par Walker, il annule sa déclaration précédente, selon laquelle la période de révolution de Neptune serait exactement le double de celle d'Uranus.
Peirce produit dans [Peirce, 1847c] les expressions analytiques des perturbations de la longitude et du rayon vecteur de Neptune exercées par Jupiter, Saturne et Uranus, expressions qui s'étendent sur plusieurs pages.

32. Rappelons qu'il ne s'agit pas d'un calcul précis d'éphéméride, mais de donner des paramètres raisonnables permettant de localiser une planète inconnue à un instant donné.

L'évaluation de la masse de Neptune par Peirce, à partir de l'observation de Triton, était erronée dans un premier temps – moitié seulement de la masse d'Uranus – et Peirce avait déclaré aussitôt que Neptune ne pouvait pas expliquer les perturbations d'Uranus. Malgré de nouvelles mesures, plus précises de la masse, il maintient ce jugement jusqu'au 4 avril 1848 où il déclare [Peirce, 1848] que, contrairement à ses déclarations précédentes, Neptune peut complètement expliquer les irrégularités d'Uranus ! Malgré ce changement radical d'opinion, il écrit [Peirce, 1848] p. 338 :

> Neptune is not the planet designated by geometry, although it is a perfect solution of the problem which analysis had undertaken to investigate, and had readily solved, but in a form radically different from the actual solution of nature

Finalement, il déclare donc publiquement que Neptune permet d'expliquer les irrégularités d'Uranus ! Et il accorde que Neptune rentre dans les limites [actualisées] prédites par Le Verrier.
On peut donc constater les revirements spectaculaires d'opinion de Peirce, revirements qui lui ont été reprochés au sein même de la communauté scientifique américaine.
En effet, certains scientifiques contemporains de Peirce le décrivaient comme "hot tempered and hasty" et dans l'épisode Neptune, "Peirce was characteristically carried away and overstated his case" (cité par [Hubbell, 1992] p. 270).

Il faut aussi replacer le problème dans la situation scientifique de l'époque où la recherche américaine commençait à se développer et à chercher son indépendance vis-à-vis de l'Europe, d'où peut-être certaines réactions excessives de Peirce et d'autres, comme celles de Loomis ou de Gould.
En conlusion, dans [Hubbell, 1992] p. 283, on peut lire (texte légèrement adapté) :
Le géologiste J. Dana considérait que : « Peirce's "hasty" publication of his results on Neptune was a "national calamity" ».
Et l'article de Hubbell et Smith conclut :

> Peirce's rush left him open to criticism on more than one occasion. In claiming, for example, that Lassell's early observations of Triton led to a mass for Neptune that was the "final blow to the most magnificient structure which human genius has ever created", Peirce was overreaching somewhat.

On peut donc oublier en grande partie les interventions de Peirce, qui n'ont pas eu de suites durables. Et pour conclure sur ce "happy accident", on peut citer ([Sheehan, 2021] p. 331) :

> The timing of the two geometers [Le Verrier et Adams] was certainly impeccable in the sense that they carried out their computations at just that particular epoch (before and after the 1822 conjunction) when errors in the assumed orbital semi-major axis and eccentricity of the unknown perturber had the least possible spoiling effect on their predictions of its position on the geocentric sky.

And concerning the german discoverers

> Galle and d'Arrest had been incredibly lucky. The latter had been rather like a first-time fisherman told exactly where to fish who on casually casting out his line hauls in a whale. Loomis was exactly right [saying that Galle made an unexpected easy conquest]. The discovery of Neptune was very much a “happy accident”—just not so much for the reasons that Peirce had thought it.

6.4 Analyse critique du travail fait par Baghdady dans sa thèse

6.4.1 Contenu de la thèse

Mohamed Baghdady a effectué sa thèse [Baghdady, 1980] sur les calculs de Le Verrier pour Neptune en 1980 sous la direction de C. J. Brookes, qui lui-même, avait effectué une thèse portant sur les calculs d'Adams [Brookes, 1969] ; les deux thèses ont été effectuées à l'université d'Aston.
Baghdady commence par un bref historique de la découverte de Neptune.
Puis il se propose d'examiner si Le Verrier a été chanceux dans son travail, car les éléments qu'il a donnés pour Neptune dans son troisième mémoire sont très éloignés des valeurs réelles, à part la donnée essentielle : la longitude vraie au 1/1/1847.
Baghdady ne reprend pas du tout la première partie du travail de Le Verrier, celle consistant en l'élaboration du formulaire des perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus, ni la formation des éphémérides héliocentriques et géocentriques d'Uranus et il ne reprend pas non plus les trois démonstrations de Le Verrier, montrant qu'il est impossible d'ajuster les éléments d'Uranus afin de concilier toutes les observations disponibles d'Uranus.
En fait, Baghdady ne reprend qu'une petite partie des calculs de la première et de la deuxième approche.
Par contre, comme prolongement des calculs de Le Verrier, il s'interroge sur l'influence qu'aurait pu avoir la date des calculs sur la prédiction de la position de Neptune. En ce sens, il reprend une idée développée par Brookes dans sa propre thèse (voir l'analyse de la thèse faite par Brookes au § 10.4).
Il faut aussi noter que Baghdady ne mentionne jamais les manuscrits de Le Verrier, ce qui laisse à penser qu'il n'a pas eu accès à ceux-ci et qu'il a écrit sa thèse seulement à partir de *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel*.
D'autre part, sa thèse ne comporte aucun graphe, ce qui rend difficile l'interprétation de nombreux résultats.

6.4.2 Première solution dans la première approximation

Baghdady rappelle d'abord les expressions analytiques des perturbations exercées par une planète extérieure sur une planète intérieure, expressions données par exemple par Pontécoulant [Pontécoulant, 1829]. Il détermine les expressions numériques des coefficients de ces expressions pour un rapport des demi-grands axes égal à 0.5 (choix de Le Verrier et d'Adams).
Baghdady reprend la première méthode de résolution de Le Verrier, qui s'appuie sur 8 équations de condition correspondant à des intervalles de temps espacés de 14 ans. Il suit la démarche de Le Verrier et trouve $m' = 2.02$, alors que Le Verrier trouve 2.11 et moi 1.99 (voir § 5.2.2).
Rappelons que par les moindres carrés, on trouve $m' = 2.30$.

6.4.3 Deuxième solution dans la première approximation

Baghdady reprend les 18 équations (4.16) de Le Verrier, sans refaire [33] les calculs et il reprend aussi sans calcul l'expression de m' sous la forme $m' = \frac{N}{D}$ où N et D sont les expressions trouvées par Le Verrier (voir § 5.2.4.2). Il détermine les zéros de D par une méthode basée sur l'algorithme d'Euclide ; il trouve des résultats légèrement différents de Le Verrier. J'ai repris les calculs par deux méthodes : à l'aide de Maple en effectuant la transformation $x = \tan \frac{\varepsilon'}{2}$ et par un balayage numérique : je confirme les résultats trouvés par Le Verrier et les imprécisions de Baghdady.
Il ne résout pas les 40 systèmes (5.4) écrits par Le Verrier pour déterminer la valeur optimale de

33. J'ai refait les calculs et les coefficients de Le Verrier sont très exacts.

ε' ; il se contente de reprendre la conclusion de Le Verrier pour $\varepsilon' = 252°$. Il donne un tableau de valeurs pour $(m',\ m'h',\ m'l')$ en fonction des 40 valeurs de ε', tableau peu utile pour la suite. Il recalcule les "erreurs" de chacune des 18 équations pour $\varepsilon' = 234°,\ 243°,\ 252°,\ 261°,\ 270°$. Il trouve des résultats très voisins de ceux de Le Verrier et des miens. Il reprend la constatation de Le Verrier, qui montre que les 18 erreurs sont rendues faibles en choisissant $m' = 1$, $P' = -15''$ et $Q' = -10''$ pour $\varepsilon' = 252°$. Baghdady ne donne pas les solutions pour les autres valeurs de ε' ; il se contente de reprendre la conclusion finale de Le Verrier : « the observations could be represented by means of the disturbing action of a planet, whose mean longitude of epoch should lie in the vicinity of 252° ». Il termine en disant que la longitude héliocentrique de cette planète troublante serait de l'ordre de 325° le 1/1/1847, sans vraiment détailler le calcul ; et Le Verrier lui-même n'avait pas détaillé son calcul dans *Herschel* ; j'ai détaillé ce calcul au § 5.3, et Biot l'avait fait dans [Biot, 1847b].

6.4.4 Deuxième approximation

Baghdady reprend les valeurs données par Le Verrier et refait certains calculs de Le Verrier, mais pas tous. Il confirme les valeurs pour les coefficients de la perturbation de la longitude, mais trouve des différences importantes pour les coefficients de la perturbation du rayon vecteur, différences qu'il attribue à l'oubli d'un facteur dépendant de α ; j'ai moi-même trouvé des valeurs correctes pour certains coefficients de Le Verrier, mais pas pour tous : voir § 7.2.2. Baghdady reprend les termes du deuxième degré par rapport aux excentricités. Par contre, il recopie purement et simplement les 33 équations (fig. 6.9) pour les 6 valeurs du couple $(\gamma,\ \mathcal{C})$). Il recopie aussi les équations de condition, ainsi que leurs solutions partielles. Il recopie l'expression de la fonction Σ, en cherche les extrema, mais ses valeurs sont assez éloignées des valeurs correctes, car il a utilisé les expressions (fautives) de Le Verrier, sans refaire les calculs. Baghdady utilise ses valeurs, erronées, pour donner la longitude héliocentrique au 1/1/1847 : 326°21', qui n'est donc pas à retenir. Il recopie les écarts entre positions calculées et positions observées, en utilisant les valeurs trouvées par Le Verrier.
On est donc très loin d'une reprise généralisée des calculs [34], et donc loin d'une confirmation de la qualité du travail de Le Verrier.

6.4.5 Prolongements

6.4.5.1 Variantes utilisées par Baghdady

Baghdady reprend les calculs de la deuxième approximation avec quelques modifications :

— Il utilise les expressions théoriques de δv avec 4 termes $(1 \leq i \leq 4)$; il obtient $v' = 328°57'$.

— Il ajoute en plus des termes précédents les termes de degré 2 selon les excentricités : il obtient $v' = 326°6'$.

— Baghdady détermine ensuite quelles auraient été les prédictions au 1/1/1847 si Le Verrier avait choisi un rapport des demi-grands axes allant de 0.49 à 0.60, tout en gardant la même démarche. Il donne les résultats sans aucun détail ; il semblerait (le texte n'est pas très explicite) qu'il ait utilisé dans un premier temps les 279 équations prises individuellement et dans un deuxième temps les 114 équations regroupées par Le Verrier. Mais comment ces résultats ont-ils été obtenus ? En utilisant, comme Le Verrier, la fonction Σ et une interpolation, ou bien directement par la résolution du système des équations de condition

34. Il faut dire, à sa décharge, que les outils de calculs étaient à son époque rudimentaires, et les calculs de Le Verrier extrêmement longs. Mais Brookes, 11 ans avant lui, avait su refaire, en utilisant l'unique ordinateur de son université, l'essentiel des calculs d'Adams. Une confirmation supplémentaire que les calculs d'Adams sont plus faciles à programmer que ceux de Le Verrier.

(fig. 6.9) par les moindres carrés ? Les valeurs trouvées par Baghdady pour la longitude vraie au 1/1/1847 sont reportées dans la table 6.14 et elles varient sensiblement avec la valeur de α.

TABLE 6.14 – Valeurs trouvées par Baghdady pour la longitude héliocentrique vraie au 1/1/47 en fonction du rapport des demi-grands axes, en utilisant soit les 279 observations de Le Verrier, soit les 114 regroupées par Le Verrier

a	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60	Neptune
279 équations	330	325	323	325	330	335	338	343	346	354	359	3	327
114 équations	331	325	323	325	331	336	340	345	347	360	2	7	327

— Enfin, il utilise l'expression de δv avec 6 termes ($1 \leq i \leq 6$) et il semblerait qu'il ait fait ces calculs en s'appuyant sur le couple (0.53, 234°) et non sur (0.51, 252°) et la valeur trouvée pour v' à partir de ce calcul est 327°40′, soit à 16′ de la valeur exacte ! (voir un commentaire au paragraphe suivant).

Vu l'absence complète de justifications détaillées dans sa thèse, on peut s'interroger sur la validité d'un tel résultat, un peu miraculeux ! Quoiqu'il en soit, que ce calcul ait été réellement effectué, ou simplement imaginé (par une interpolation par exemple), cette affirmation n'a pas guère de sens, car le résultat d'un calcul avec autant d'intermédiaires dépend beaucoup de nombreux facteurs : moindres carrés stricts ou moindres carrés approchés, nombre de termes dans les développements théoriques, regroupement d'équations, interpolations dans les données... Un faible écart au final n'est pas nécessairement un signe de meilleure précision ; l'amélioration apparente peut n'être due qu'à des approximations qui se compensent.

6.4.5.2 Vérification des affirmations de Baghdady

Baghdady prétend donc qu'en augmentant le nombre de termes retenus dans le développement de δv, on obtient pour v' des valeurs encore plus proches des valeurs réelles ([Baghdady, 1980], p. 103). J'ai refait les calculs en variant le nombre de termes dans les développements théoriques, tout en suivant la démarche de Le Verrier ; les résultats ne confirment pas les annonces de Baghdady : ils reposent sur des minima très plats pour les résidus, qui entraînent une large incertitude sur les paramètres. En particulier, ils conduisent à des valeurs très fortes pour l'excentricité. L'affirmation de Baghdady n'est donc a priori pas validée.

6.4.5.3 Prédictions pour d'autres époques de découverte

Baghdady détermine ensuite ce qu'auraient donné les prédictions si les calculs avaient été effectués à des dates s'étalant de 1810 à 1845. Il trouve par exemple que la position en 1830 n'aurait pas pu être localisée à moins de 10° de la position réelle. Je ne trouve pas un tel résultat, mais les méthodes utilisées sont très différentes, voir § 8.6 pour des résultats concernant les prédictions en fin de calcul, selon cette date de fin de calcul.
Dans sa dernière partie, Baghdady compare les prédictions de Le Verrier et d'Adams, avec les calculs effectués par Brookes et par lui. Encore une fois, de telles comparaisons sont assez vaines, sachant que les calculs ont été faits avec de multiples options. On doit être modeste quant à la précision du résultat final, quand on mesure l'abîme entre les valeurs prédites pour l'orbite de Neptune et les valeurs réelles, hormis, bien sûr, la position au 1/1/1847.
On peut aussi comparer les valeurs numériques des coefficients des équations de condition évaluées avec les valeurs finales de Le Verrier et celles de ces mêmes équations avec les valeurs réelles des éléments elliptiques de l'orbite de Neptune ; le calcul est fait au § 11.2, et les écarts entre les deux jeux de valeurs doivent interroger sur le véritable impact de certaines équations.

6.4.6 Conclusions

Il y a des idées intéressantes, provenant souvent de C. Brookes, qui avait fait le même travail que lui pour les calculs d'Adams. Mais, malgré les annonces initiales, beaucoup de calculs n'ont pas été refaits. Baghdady se contente souvent de recopier les valeurs trouvées par Le Verrier, notamment dans le calcul de l'approximation finale. Ce faisant, il passe à côté de certaines erreurs de Le Verrier – l'interpolation finale, par exemple – et il rend son travail peu crédible.
Son travail comporte aussi quelques erreurs, par exemple quand il propose une méthode pour résoudre une équation du 10e degré ou quand il calcule les coefficients des perturbations du rayon vecteur. La thèse de Baghdady ne comporte que 120 pages, écrites avec des très gros caractères et des lignes très espacées. Il est impossible de faire un travail complet en si peu d'espace.
Dans la thèse de Brookes, on est sûr que tous les calculs d'Adams ont été refaits, car Brookes reporte dans sa thèse tous les résultats utiles. Dans celle de Baghdady, il y a des annonces, mais pas toujours les calculs confirmant ces annonces ; en conséquence, on est en droit de mettre en doute certaines affirmations de Baghdady.
À la décharge de Baghdady, on peut rappeler que
1) Les ordinateurs en 1980 n'étaient pas encore très performants.
2) Les calculs de Le Verrier sont beaucoup plus difficiles à programmer que ceux d'Adams.

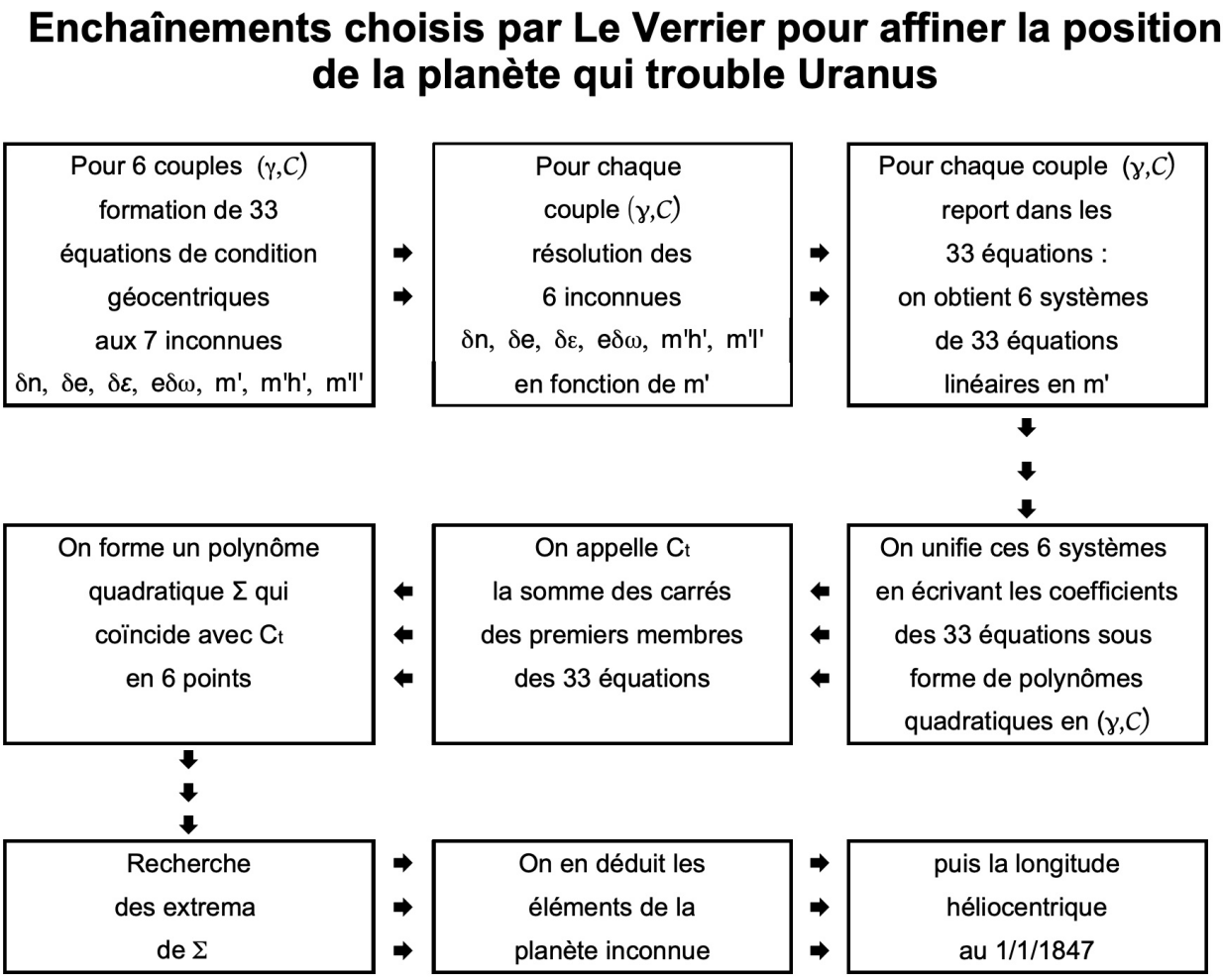


FIGURE 6.25 – Enchaînements pour affiner la position de la planète perturbatrice à partir de 6 systèmes de 33 équations de condition géocentriques (fig. 6.2). On constate la substitution de C_t, polynôme de degré 4 en $(\gamma, \mathcal{C})$, par Σ, polynôme quadratique, pour de simples difficultés mathématiques. Mais le passage de C_t à Σ ne peut pas être complètement justifié théoriquement (§ 6.2.6), et cette constatation – bien sûr connue et assumée par Le Verrier – ne l'empêche pas de donner une solution – 'la meilleure solution' – avec 6 chiffres significatifs.

Troisième partie

AU DELÀ DES CALCULS DE LE VERRIER

Chapitre 7

RAYON VECTEUR

Objectifs

Présentation Les calculs de Le Verrier reposent essentiellement sur les perturbations de la longitude, héliocentrique ou géocentrique, d'Uranus. Le Verrier obtient des valeurs pour les éléments d'Uranus et de Neptune qui corrigent la quasi totalité des écarts entre positions calculées et positions observées d'Uranus. Est-ce que ces nouvelles valeurs établissent un ordre parfait ? Dans l'esprit d'Airy, cela signifie : « est-ce que la correction sur la longitude corrige aussi les erreurs du rayon vecteur ? ». C'est la question que pose avec insistance Airy, d'abord à Adams ([Airy, 1846], n° 12), qui ne répond pas, car il considérait la question comme "triviale", dira-t-il plus tard, puis à Le Verrier ([Airy, 1846], n° 13), qui affirme que ses corrections de l'excentricité et de la longitude du périhélie corrigent aussi les erreurs du rayon vecteur.
On essaiera dans un premier temps d'interpréter la réponse de Le Verrier à Airy (section 1).
On examinera ensuite comment on obtient la perturbation du rayon vecteur (section 2).
Airy avait affirmé que le rayon vecteur dans la théorie de Bouvard était « considerably too small » [Airy, 1846] ; on examine à la section 3 comment Airy est arrivé à cette conclusion, et on montrera qu'il faut fortement relativiser cette affirmation. On en profitera pour essayer de préciser comment on peut définir la notion de "correction du rayon vecteur".
Ensuite, on reprendra la méthode de Lai, Lam, Young [Lai, 1990], en l'adaptant au rayon vecteur (section 4).
Pour déterminer la position de Neptune, Le Verrier a résolu un problème inverse (voir encadré 1, p. 4), en s'appuyant sur la longitude ; on adapte ici (section 5) sa méthode, en s'appuyant cette fois sur le rayon vecteur : on obtiendra des résultats encourageants, mais moins convaincants qu'avec la longitude.

Sommaire

7.1 Interprétation de la réponse de Le Verrier à G. B. Airy **254**
7.1.1 Réponse de Le Verrier à Airy 254
7.1.2 Interprétation de la réponse de Le Verrier 254
7.2 Perturbations du rayon vecteur **255**

7.2.1 Effet sur le rayon vecteur d'une correction des éléments elliptiques d'Uranus 255
7.2.2 Formule théorique pour la perturbation du rayon vecteur créée par une planète extérieure 256
7.2.3 Correction finale du rayon vecteur 257
7.3 Comment définir la correction du rayon vecteur ? 259
7.3.1 Détermination de l'erreur théorique sur le rayon vecteur 259
7.3.2 Traitement du rayon vecteur par Airy 259
7.3.3 Qu'est-ce que l'erreur sur le rayon vecteur ? 263
7.4 Modèle de Lai, Lam, Young 263
7.4.1 Présentation du modèle LLY pour la longitude 264
7.4.2 Étude du rayon vecteur 265
7.4.3 Mise en évidence de t_0 ou Ω_2 ou (t_0, Ω_2) par la méthode de Lai Lam Young 268
7.4.4 Décalage entre la perturbation directe exercée par Neptune sur Uranus et la perturbation résiduelle observée 272
7.5 Problème inverse pour le rayon vecteur en adaptant la méthode utilisée par Le Verrier 273
7.5.1 Objectif, données 273
7.5.2 Équations de condition 273
7.5.3 Résultats 276
7.6 Conclusions 277

7.1 Interprétation de la réponse de Le Verrier à G. B. Airy

On rappelle que le rayon vecteur d'une planète (P) à un instant t est la longueur du vecteur $\overrightarrow{SP}$, où S et P désignent respectivement la position du Soleil et celle de la planète (P) à l'instant t. Donc, contrairement à son appellation, 'rayon vecteur' est interprété, à l'époque de Le Verrier, comme un nombre, et non comme un vecteur.

7.1.1 Réponse de Le Verrier à Airy

Le Verrier affirme dans sa lettre du 28 juin 1846 adressée à Airy, (lettre reproduite dans [Airy, 1846], n° 14) que les nouveaux éléments qu'il vient de trouver pour Uranus corrigent aussi le rayon vecteur :

> La comparaison des positions d'Uranus... dans les oppositions et les quadratures... montre que le rayon de la planète, calculé par les tables en usage, est très inexact. Cela n'a pas lieu dans mon orbite, telle que je l'ai déterminée ; il n'y a pas plus d'erreur dans les quadratures que dans les oppositions.
> Le rayon est très bien calculé dans mon orbite... Il faut remarquer que l'orbite d'Uranus a été calculée par M. Bouvard sur des positions de la planète qui n'étaient pas des *positions elliptiques*, puisqu'on n'avait pas pu avoir égard aux perturbations produites par la planète inconnue. Cette circonstance a nécessairement rendu les éléments de l'orbite faux, et c'est à l'erreur de l'excentricité et à l'erreur de la longitude du périhélie [1] qu'il faut attribuer l'erreur actuelle du rayon vecteur d'Uranus. Il résulte de ma théorie que l'excentricité donnée par M. Bouvard doit être augmentée, et qu'il en est de même de la longitude du périhélie ; deux causes qui contribuent... à augmenter le rayon vecteur [2]. Je ne transcris pas ici les valeurs de ces accroissements, parce que je ne les ai pas encore avec toute la rigueur précise, mais je les aurai rectifiés avant un mois...
> Je me bornerai à ajouter que la position en quadrature, déduite en 1844 des deux oppositions qui la comprennent, au moyen de mes formules, ne diffère de la position observée que de $0''.6$; ce qui prouve que l'erreur du rayon vecteur est entièrement disparue [3].

Dans l'ensemble des manuscrits, on ne voit nulle part les corrections sur le rayon vecteur, ni aucun calcul pouvant mener à une telle conclusion. D'autre part, s'il y a une coïncidence en 1844, ce dont on ne peut douter, cela ne signifie pas qu'il y ait coïncidence à toute date ; pour une fois, Le Verrier raisonne plus en physicien qu'en mathématicien.
Pourtant Baghdady [Baghdady, 1980] affirme p. 47 de sa thèse : « For completeness, we also compare the perturbations in the radius vector, included by Le Verrier in his research ». Ce n'est pas exactement le cas, à moins qu'il ne fasse allusion qu'aux quelques valeurs mentionnées au § 7.2.2.
Je vais essayer d'expliquer comment Le Verrier a pu formuler une telle conclusion [Le rayon est très bien calculé dans mon orbite]. La démarche que je suggère est une interprétation personnelle, à partir des quelques indices donnés par Le Verrier dans la citation précédente.

7.1.2 Interprétation de la réponse de Le Verrier

Voici une façon possible de reconstituer la démarche de Le Verrier [4] :

1. Cette affirmation est confirmée par le calcul des corrections à apporter aux éléments d'Uranus, voir § 7.2.3.
2. En effet, en considérant uniquement le terme principal, on a : $\frac{\partial r}{\partial e} = -a \sin\zeta$; $\frac{\partial r}{\partial \varpi} = -ae\cos\zeta$ et à l'époque considérée ($\simeq 1840$), on a $\zeta \simeq 200°$, ce qui assure effectivement la positivité des dérivées partielles à cette époque ; mais ζ augmente avec le temps et la situation ne sera pas la même 20 ou 30 ans plus tard, ce que l'on découvre à la figure 7.3 où δr est positif à partir de 1870.
3. Ce calcul ne figure malheureusement pas dans les manuscrits.
4. Certaines formules utiles aux calculs se trouvent au paragraphe 7.3.2.1, mais elles ne sont pas indispensables ici.

Les données sont les coordonnés équatoriales ($\mathring{a}$, D) observées d'Uranus au 279 dates retenues par Le Verrier (*Herschel* p. 129−135). On compare avec les valeurs lues sur les tables, et on détermine les erreurs en ascension droite $\Delta\mathring{a}$ et en déclinaison ΔD, valeurs qui peuvent être considérées aussi comme des données du problème. On commence par déterminer les coordonnées géocentriques (G, b) d'Uranus à l'aide des formules classiques de changement de coordonnées (formulaire au 7.3.2.1).

Pour la justification de la correction du rayon vecteur, tout repose sur la formule qui relie l'erreur de la longitude géocentrique ΔG à l'erreur de la longitude héliocentrique Δv et à celle du rayon vecteur d'Uranus Δr (vu les faibles inclinaisons[5], $\Delta r_1 = \Delta r$ et $\Delta v_1 = \Delta v$).

$$\Delta G = \alpha_g \, \Delta v - \beta_g \, \Delta r \tag{7.1}$$

avec les valeurs suivantes, les notations étant celles du § 4.2.2.4 :

$$\alpha_g = \frac{r_1}{\Delta_1} \cos(G - v_1) \qquad \beta_g = \frac{\sin(G - v_1)}{\Delta_1} \tag{7.2}$$

Que se passe-t-il à l'opposition d'Uranus ? On a $G = v_1$ et donc $\beta_g = 0$ et $\Delta G = \alpha_g \, \Delta v$.

Avec ses nouvelles valeurs pour les éléments d'Uranus, Le Verrier trouve que les écarts entre longitude observée et longitude calculée sont (presque) annulés au moment des oppositions ; il doit penser que ses corrections Δv et ΔG sont correctes pour toute position. Aussi, quand il se place à la quadrature où β_g est non nul, il doit considérer que puisque ΔG et Δv sont corrects, Δr doit être correct. Mais on ne voit jamais de vérification directe pour le rayon vecteur dans les manuscrits, faute de données d'observation pour Δr.

Si telle est la démarche de Le Verrier, la précision en est très limitée car ΔG et $\alpha_g \Delta v$ sont des nombres très voisins et donc leur différence $\beta_g \Delta r$ est sûrement entachée d'une erreur relative importante ; en conséquence Δr doit être entaché d'erreurs importantes, car en plus, β_g est petit (< 0.003). Faute de documents pertinents, l'affirmation de Le Verrier reste encore à justifier de façon certaine.

Attitude d'Adams : Adams ne répond pas à la demande d'Airy formulée dans sa lettre du 5 novembre 1845 [Airy, 1846], n° 12 ; Adams dira plus tard que la question d'Airy était triviale ([Smart, 1947] p. 25). En fait, Craig Waff a découvert des brouillons inachevés de réponses à Airy au sujet du rayon vecteur, brouillons dans lesquels Adams essayait de fournir une explication pour le rayon vecteur, sans être totalement convaincant, montrant ainsi que la question n'était pas si triviale (tout cela est bien détaillé dans [Sheehan, 2021] p. 145).

7.2 Perturbations du rayon vecteur

7.2.1 Effet sur le rayon vecteur d'une correction des éléments elliptiques d'Uranus

On examine d'abord la modification du rayon vecteur d'Uranus due à des corrections apportées sur ses éléments elliptiques ; en différenciant la fonction r, on obtient :

$$\delta r = M_g(t) \, e \, t \, \delta n - M_g(t) \, e \, \delta\varepsilon + M_g(t) \, e \, \delta\varpi + N_g(t) \, \delta e \tag{7.3}$$

où $M_g = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ et $N_g = \frac{\partial r}{\partial e}$ (notations de Le Verrier, explicitées § 4.3.1.1).

On voit donc qu'il n'y a en fait que 3 paramètres indépendants[6] : δn, δe et $\delta(\varepsilon - \varpi)$ i.e. $\delta\zeta$ avec ζ anomalie moyenne au 1/1/1800.

5. On rappelle que v_1 et r_1 sont les paramètres rapportés à l'écliptique (r_1 : rayon accourci).
6. Contrairement aux équations de condition pour la longitude, qui comportent 4 variables indépendantes.

7.2.2 Formule théorique pour la perturbation du rayon vecteur créée par une planète extérieure

Pour établir ses équations de condition géocentriques, Le Verrier calcule la perturbation théorique (δG) exercée par une planète extérieure sur la longitude géocentrique d'Uranus à partir des perturbations théoriques de la longitude héliocentrique (δv) et du rayon vecteur (δr) en s'appuyant sur la formule

$$\delta G = \alpha_g\, \delta v - \beta_g\, \delta r \tag{7.4}$$

où α_g et β_g sont donnés à l'équation (4.9).
On examine dans ce qui suit comment on obtient l'erreur théorique sur le rayon vecteur.
Le Verrier donne l'expression théorique qu'il utilise pour calculer la perturbation δv exercée par une planète extérieure (§ 5.2.1), mais il ne donne pas l'expression qu'il utilise pour calculer δr : elle ne figure ni dans *Herschel*, ni dans les manuscrits [7]. Pourtant, il donne au début du cahier n° 4, p. 73 et dans *Herschel*, p. 200 cette perturbation δr sous forme numérique pour 3 valeurs [8] de α (0.49, 0.51 et 0.53), mais sans détailler les calculs. Ces expressions numériques ont déjà été utilisées au § 6.2.2.1.
J'ai prélevé les expressions théoriques de δr dans [9] la *Mécanique céleste* de Laplace :

$$\frac{\delta r}{a} = -\frac{m'}{6}\alpha^2\frac{db^{(0)}_{1/2}}{d\alpha} - m'fe\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - m'f'e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi') + \frac{m'}{2}\sum_i C_i\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+m'e\sum_i D_i\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi] + m'e'\sum_i E_i\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'] \tag{7.5}$$

avec des sommes étendues à tous les entiers non nuls, positifs ou négatifs et avec par exemple

$$C_i = \frac{n^2}{n^2 - i^2(n'-n)^2}\left(\frac{2n}{n-n'}\,\alpha\, b^{(i)}_{1/2}(\alpha) + \alpha^2\frac{db^{(i)}_{1/2}}{d\alpha}(\alpha)\right) \tag{7.6}$$

où n désigne le moyen mouvement annuel d'Uranus, n' celui de la planète perturbatrice et $b^{(i)}_{1/2}(\alpha)$ un coefficient de Laplace. Et on a des formules analogues pour D_i et E_i.
Quand il utilise l'expression théorique de δv, Le Verrier fait varier i de 1 à 3. Par contre, pour δr, il ne garde [10] que C_2, D_3 et E_3, qui sont les valeurs les plus élevées respectivement des fonctions $i \to C_i$, $i \to D_i$ et $i \to E_i$; la prépondérance de E_3 est très nette, celle de D_3 l'est beaucoup moins.
On peut imaginer qu'il n'est pas nécessaire que δr soit connu avec une grande précision, car pour le but cherché – la valeur de δG – δr, qui est déjà une petite quantité, est multiplié par β_g, qui est un facteur essentiellement petit [11].
Après plusieurs vérifications, j'ai constaté que les valeurs numériques de Le Verrier pour ces coefficients n'étaient pas toutes correctes, ce qu'avait déjà observé avant moi Baghdady ([Baghdady, 1980] p. 49) ; il avait suggéré que Le Verrier avait peut-être oublié un facteur dépendant de α. Voici, table 7.1, les valeurs (en as) que j'ai obtenues à partir des formules de Laplace ; j'ai mis entre parenthèses les valeurs utilisées par Le Verrier.

7. En fait, elle figure partiellement dans le manuscrit du premier mémoire sur Mercure, ms 1063 (tome 4).
8. Et dans les manuscrits, il donne aussi l'expression pour $\alpha = 0.55$.
9. J'ai vérifié que cette formule donnait le même résultat que les formules numériquement équivalentes, mais pas formellement identiques, de Pontécoulant [Pontécoulant, 1829] et Tisserand [Tisserand, 1880].
10. C'est ce que l'on observe sur les formules numériques données par Le Verrier dans *Herschel* (*Herschel* p. 201) ou dans les manuscrits (cahier n° 5).
11. La longitude héliocentrique et la longitude géocentrique d'Uranus sont en permanence voisines, du fait du grand éloignement d'Uranus du Soleil et donc $\beta_g = \frac{\sin(G-v_1)}{\Delta_1}$ est petit : au plus égal à 0.003 ua^{-1}.

TABLE 7.1 – Valeurs numériques de certains coefficients du développement théorique de δr avec TRIP en utilisant les formules de Laplace ; on a noté, entre parenthèses, les valeurs trouvées par Le Verrier

	$\alpha = 0.49$			$\alpha = 0.51$			$\alpha = 0.53$		
j	C_j	D_j	E_j	C_j	D_j	E_j	C_j	D_j	E_j
-4	-0.1	-0.0	0.0	-0.1	-0.0	0.0	-0.2	-0.0	0.1
-3	-0.4	-0.0	0.1	-0.5	-0.1	0.1	-0.6	-0.1	0.1
-2	-2.8	-0.2	0.2	-3.9	-0.2	0.2	-5.5	-0.3	0.3
-1	1.1	0.1	0.3	1.3	0.1	0.4	1.5	0.1	0.4
1	1.1	-0.1	1.3	1.3	-0.1	1.6	1.5	-0.2	1.9
2	$-2.8\,(-2.6)$	-0.2	3.5	$-3.9\,(-4.3)$	-0.3	4.6	$-5.5\,(-6.1)$	-0.4	6.1
3	-0.4	$-0.8\,(-3)$	160 (112)	-0.5	$-0.5\,(-1.9)$	62 (76)	-0.6	$-0.4\,(-1.6)$	45 (56)
4	-0.1	-0.0	-3.5	-0.1	-0.0	-5.2	-0.2	-0.0	-7.8

Les valeurs données par Baghdady sont correctes pour E_j, mais pas pour C_j ni pour D_j.
Comme on ne peut pas contrôler le détail des calculs effectués par Le Verrier, il est difficile de savoir à quel niveau se situent les erreurs. Mais il est difficile d'imaginer que Le Verrier ait pu se tromper ; il a peut-être suivi une voie moins classique [12] que Laplace ou Pontécoulant.

7.2.3 Correction finale du rayon vecteur

À la fin de la deuxième approche, Le Verrier donne les valeurs finales des éléments qu'il a trouvées pour la planète troublante (reproduites p. 220). Par contre, il ne précise pas les corrections qu'il faudrait apporter aux éléments d'Uranus pour réduire les résidus en longitude. J'ai donc prolongé les calculs de Le Verrier du chapitre 6 en déterminant les expressions quadratiques (table 7.2) de $\delta\varepsilon$, δn, δe et $e\delta\varpi$.

TABLE 7.2 – Expressions quadratiques des éléments elliptiques d'Uranus, obtenues en prolongeant le calcul fait par Le Verrier pour la deuxième approche (voir chapitre 6). Puis, je donne les valeurs numériques de ces expressions en reportant les valeurs finales de γ, $\mathcal{C}$, m' trouvées par Le Verrier au § 6.2.3.5

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon} = -33.3 + 4.8\,\mathcal{C} - 7.3\,\mathcal{C}^2 - 19.157\,\gamma - 1.4\,\gamma^2 + 0.7\,\gamma\,\mathcal{C} + (6.2 - 15.4\,\mathcal{C} + 1.3\,\mathcal{C}^2 + 10.265\,\gamma - 13.8\,\gamma\,\mathcal{C} + 2.9\,\gamma^2)m'$$

$$\boldsymbol{\delta e} = -23.0 - 0.01\,\mathcal{C} - 9.8\,\mathcal{C}^2 + 33.9\,\gamma - 3.7\,\gamma\,\mathcal{C} - 25.3\,\gamma^2 + (48.4 - 6.0\,\mathcal{C} - 7.6\,\mathcal{C}^2 - 13.8\,\gamma - 16.1\,\gamma\,\mathcal{C} + 0.8\,\gamma^2)m'$$

$$\boldsymbol{\delta n} = -0.24 - 0.05\,\mathcal{C} + 0.14\,\mathcal{C}^2 + 0.17\,\gamma + 0.28\,\gamma\,\mathcal{C} - 0.10\,\gamma^2 + (0.12 - 0.15\,\mathcal{C} - 0.07\,\mathcal{C}^2 + 0.05\,\gamma - 0.03\,\gamma\,\mathcal{C} + 0.01\,\gamma^2)m'$$

$$\boldsymbol{e\delta\varpi} = 51.4 - 2.9\,\mathcal{C} + 11.8\,\mathcal{C}^2 - 16.9\,\gamma + 13.4\,\gamma\,\mathcal{C} + 0.8\,\gamma^2 + (-2.6 + 31.3\,\mathcal{C} - 3.5\,\mathcal{C}^2 - 3.6\,\gamma + 1.0\,\gamma\,\mathcal{C} + 2.7\,\gamma^2)m'$$

et numériquement, avec les valeurs finales de Le Verrier pour γ, $\mathcal{C}$ et m' (voir p. 220) :

$$\delta\varepsilon = -18''.74\,;\ \delta e = 33''.32\,;\ \delta n = 0''.03\,;\ e\delta\varpi = 4''.68$$

On constate, comme le déclare Le Verrier dans sa lettre à Airy du 28 juin 1846 ([Airy, 1846], n° 14), que les plus grosses corrections doivent porter sur e et ϖ ;

$$\delta\varpi = \frac{e\delta\varpi}{e} = \frac{4.68}{0.1072} = 43''.67\ ;\quad \delta e = 33''.32$$

et elles sont positives, ce qui a pour effet d'augmenter le rayon vecteur, car on a vu, note 4.2, que les dérivées partielles de r par rapport à e et ϖ étaient positives vers 1840.
En reportant toutes les valeurs numériques précédentes dans l'expression théorique de δr, on peut déterminer les corrections à apporter au rayon vecteur, corrections qui cumulent correction

12. Par contre, j'ai comparé les expressions numériques de la perturbation de la longitude héliocentrique obtenues par Le Verrier avec celles données par les formules de Laplace ou de Pontécoulant : elles sont numériquement équivalentes.

due aux modifications apportées aux éléments d'Uranus et perturbation due à l'influence de la planète extérieure ; cette correction globale sera notée `correction` Σ.
On note ray_LV le rayon d'Uranus calculé à partir des formules de Le Verrier, une fois qu'il a ajouté les perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur le rayon d'Uranus, mais avant de se lancer dans la recherche d'une planète inconnue. On note ray_B le rayon vecteur d'Uranus calculé à partir des formules de Bouvard.
On indique au § 7.3.1 comment déterminer le rayon vrai, ray_vrai. La valeur exacte du rayon vecteur était bien sûr inconnue de Le Verrier ; il n'a ajusté que la longitude.
Sur la partie gauche de la figure 7.1, on a tracé l'écart entre ray_LV et ray_vrai (valeurs 'exactes' du rayon), ainsi que l'écart entre ray_B et ray_vrai [13]. On a ajouté les corrections du rayon vecteur obtenues à partir des valeurs des paramètres minimisant Σ et celles obtenues en minimisant C_t, corrections appelées respectivement `correction` Σ et `correction` C_t. Sur la partie droite de la figure 7.1, on a tracé les écarts entre $ecart\_LV = ray\_LV - ray\_vrai$ et `correction` Σ d'une part et les écarts entre $ecart\_Bouvard = ray\_B - ray\_vrai$ et `correction` Σ d'autre part.

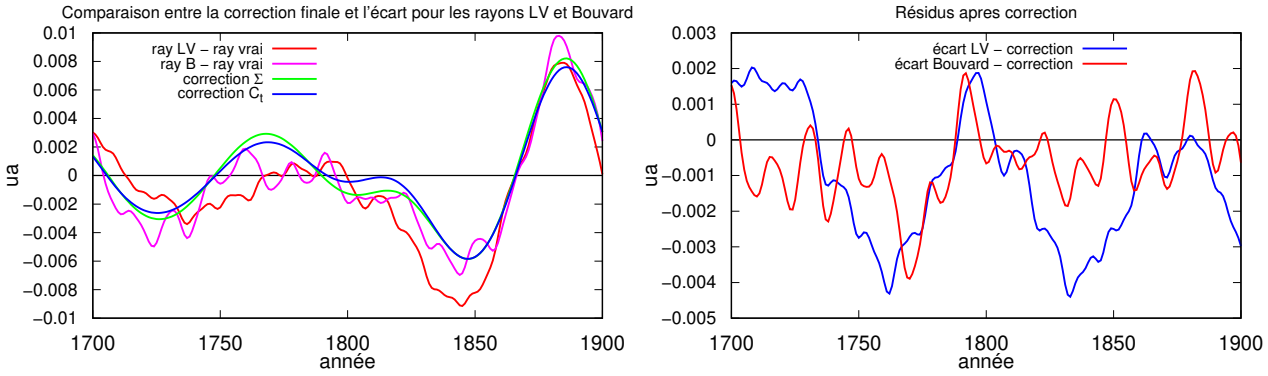


FIGURE 7.1 – (À gauche) En rouge, l'écart entre le rayon vecteur ray_LV calculé avec les formules de Le Verrier (celles établies avant la découverte de la planète inconnue) et la valeur exacte du rayon vecteur (déterminée par INPOP, voir paragraphe suivant). Idem avec Bouvard (ray_B) en rose. En bleu, correction δr à apporter au rayon vecteur en reportant dans l'expression théorique de δr (correction due aux corrections des éléments d'Uranus + perturbation due à la planète extérieure) les valeurs finales trouvées par Le Verrier en minimisant la fonction Σ ; cette correction est notée `correction` Σ. En vert idem, mais avec les valeurs finales pour les paramètres trouvés en minimisant la véritable somme des carrés, i.e. la fonction C_t (voir fin du chapitre 6), correction appelée `correction` C_t. Ces différentes courbes ne se superposent pas, mais elles ont des allures générales voisines, ce qui permet de dire que les corrections apportées à la longitude corrigent en bonne partie les erreurs sur le rayon vecteur.
(À droite) Différence entre l'écart $ecart\_LV = ray\_LV - ray\_vrai$ et `correction` Σ et idem avec $ecart\_Bouvard$.

Ces différentes courbes (partie gauche de la fig.7.1) ne se superposent pas, mais elles ont des allures générales voisines. Avec cette similitude d'apparence dans les 4 graphes, on peut dire que les corrections sur la longitude corrigent aussi (approximativement) les erreurs du rayon vecteur.

On peut donc confirmer à Airy que la nouvelle théorie d'Uranus, basée sur la correction de la longitude, corrige aussi l'essentiel des erreurs du rayon vecteur.

13. On a repris ces deux graphes à la figure 7.3 en ajoutant les résultats d'Airy.

7.3 Comment définir la correction du rayon vecteur ?

7.3.1 Détermination de l'erreur théorique sur le rayon vecteur

On a facilement accès aux écarts $O - C$ entre les positions observées et les positions calculées (par les tables de Bouvard) d'Uranus. Par contre, il ne semble pas exister de sources équivalentes pour le rayon vecteur. Le rayon vecteur n'est pas une donnée brute d'observation.
L'affirmation d'Airy [14] « it appears [...] that the tabular radius is considerably too small » repose sur les données de 4 années seulement et ces données sont partiellement discutables (voir § 7.3.2.1).
Pour avoir les écarts sur le rayon vecteur, on peut faire appel à INPOP, l'intégrateur planétaire numérique de l'IMCCE [Fienga, 2019], en procédant de la façon suivante :
1) On lance INPOP normalement pour accéder aux positions cartésiennes héliocentriques d'Uranus à des dates données ; soit Pos la liste de ces positions. On peut alors calculer le rayon vecteur pour chacune de ces dates ; soit ray_vrai l'ensemble des valeurs des rayons vecteurs aux dates choisies.
2) On 'supprime' Neptune, i.e. on met sa masse à 0. On lance alors INPOP, qui donne les positions Pos' d'Uranus en l'absence de Neptune ; on ajuste par une dizaine d'itérations les paramètres d'Uranus pour réduire les écarts entre les deux séries précédentes Pos et Pos'. On obtient en fin de calcul l'orbite d'Uranus qui minimise les écarts entre positions calculées et positions observées d'Uranus. On calcule les rayons vecteurs aux dates choisies dans cette position finale ; soit ray_cor la liste de ces valeurs ; ray_vrai joue le rôle de C et ray_cor celui de O.
La perturbation résiduelle exercée par Neptune sur le rayon d'Uranus est $\Delta r_{Inpop} = ray\_cor - ray\_vrai$. Le calcul a été fait pour 5000 dates régulièrement espacées de 1680 à 1850. Le graphe est tracé ci-contre.

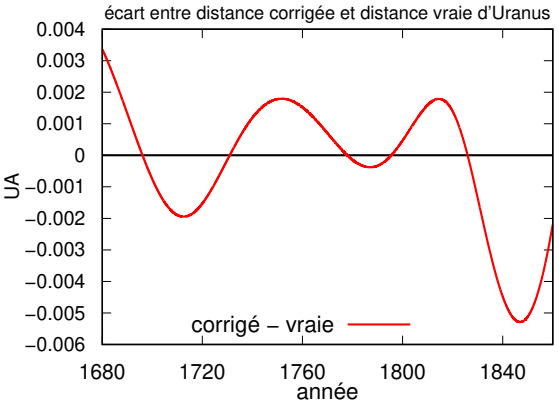


Fig. 7.2 *Écart Δr_{Inpop} après suppression de Neptune entre le rayon corrigé et le rayon exact d'Uranus*

7.3.2 Traitement du rayon vecteur par Airy

Quelles informations pouvons-nous obtenir de l'article de 1838 d'Airy sur le rayon vecteur ?

7.3.2.1 Détail du calcul fait par Airy

Airy [Airy, 1838] donne des relations entre les corrections du rayon vecteur et les corrections des longitudes héliocentriques et géocentriques obtenues à partir de données d'observations d'Uranus pendant 4 années consécutives : 1833 à 1836 : elles sont reproduites au bas de la page suivante. Comment exploite-t-il ces relations ?
Les données sont les coordonnés équatoriales $(\mathring{\alpha}, D)$ observées d'Uranus. À partir de ces lectures sur les instruments méridiens et de leur comparaison avec les tables, Airy détermine les erreurs en ascension droite $\Delta\mathring{\alpha}$ et en déclinaison ΔD, erreurs qui peuvent être considérées aussi comme des données du problème.
Il commence par déterminer les coordonnées géocentriques (G, b) d'Uranus à l'aide des formules suivantes (ω_e désigne l'obliquité de l'écliptique) :

14. Lettre d'Airy à Le Verrier datant du 26 juin 1846 [Airy, 1846], n° 13. Airy arrive à cette conclusion après avoir travaillé sur les données de 4 années seulement : 1833 : 1836. Les calculs d'Airy seront repris au § 7.3.2.1.

$$\tan G = \cos\omega_e \tan\mathring{\alpha} + \frac{\sin\omega_e \tan D}{\cos\mathring{\alpha}} \qquad \sin b = \cos\omega_e \sin D - \sin\omega_e \cos D \sin\mathring{\alpha} \tag{7.7}$$

Il en déduit l'erreur en longitude et en latitude géocentriques par les formules suivantes [15] :

$$\Delta G = P_g\,\Delta\mathring{\alpha} + Q_g\,\Delta D \quad ; \quad \Delta b = R_g\,\Delta\mathring{\alpha} + S_g\,\Delta D \tag{7.8}$$

avec les valeurs suivantes [16] pour les facteurs $P_g,\ Q_g,\ R_g,\ S_g$:

$$P_g = \frac{\cos D\cos S_\phi}{\cos b} \qquad Q_g = \frac{\sin S_\phi}{\cos b} \qquad R_g = -\cos D\sin S_\phi \qquad S_g = \cos S_\phi \tag{7.9}$$

où S_ϕ est l'angle de phase, déterminé par

$$\cos S_\phi = \frac{\cos\omega_e - \sin b\sin D}{\cos b\cos D} \qquad \sin S_\phi = \frac{\sin\omega_e\cos G}{\cos D} \tag{7.10}$$

Il utilise ensuite les expressions qui permettent de relier l'erreur de la longitude géocentrique à l'erreur de la longitude héliocentrique Δv et à celle du rayon vecteur d'Uranus Δr.

$$\Delta G = \alpha_g\,\Delta v - \beta_g\,\Delta r \tag{7.11}$$

avec les valeurs suivantes, D_{UT} désignant ici la distance Uranus-Terre.

$$\alpha_g = \frac{r}{D_{UT}}\cos(G - v_1) \quad \beta_g = \frac{\sin(G - v_1)}{D_{UT}} \tag{7.12}$$

et Airy utilise cette relation sous la forme (ΔG est connu et le premier membre implicite est Δv) :

$$[\Delta v =]\frac{1}{\alpha_g}\,\Delta G - \frac{\beta_g}{\alpha_g \sin 1''}\,\Delta r \tag{7.13}$$

Airy retient 6 relations de ce type pour 6 jours de chacune des années 1833-1836 (5 seulement en 1834), qui sont reproduites ci-contre. Mais ce ne sont pas des équations, puisque les deux inconnues Δv, premier membre implicite, et Δr, n'en sont pas vraiment, car leur valeur change d'une relation à l'autre.

Normal Tabular Errors of Uranus in Heliocentric Longitude.

1833	day 215	+ 32″63	+ 90″ x ∂R
	235	+ 33,13	— 90 x ∂R
	265	+ 31,03	— 333 x ∂R
	279	+ 32,00	— 418 x ∂R
	295	+ 32,24	— 484 x ∂R
	323	+ 31,54	— 505 x ∂R
1834	day 229	+ 37,87	+ 3 x ∂R
	258	+ 37,28	— 255 x ∂R
	283	+ 38,23	— 417 x ∂R
	312	+ 39,15	— 507 x ∂R
	336	+ 39,61	— 489 x ∂R
1835	day 215	+ 45,46	+ 165 x ∂R
	232	+ 45,48	+ 21 x ∂R
	255	+ 44,79	— 183 x ∂R
	293	+ 44,81	— 438 x ∂R
	326	+ 44,37	— 500 x ∂R
	337	+ 45,53	— 488 x ∂R
1836	day 203	+ 53,66	+ 290 x ∂R
	236	+ 52,62	+ 12 x ∂R
	256	+ 52,32	— 165 x ∂R
	285	+ 51,69	— 380 x ∂R
	307	+ 51,52	— 476 x ∂R
	327	+ 52,66	— 503 x ∂R

The means for each year are as follows

1833,	day 29	+ 32″10	— 290″ x ∂R
1834,	day 24	+ 38,43	— 333 x ∂R
1835,	day 26	+ 45,07	— 237 x ∂R
1836,	day 29	+ 52,41	— 204 x ∂R

Par contre, Airy fait l'hypothèse que Δr varie peu sur une année et peut donc être considéré comme constant sur une année donnée. Airy essaie de déterminer la variation de l'erreur sur la longitude héliocentrique Δv au cours de chaque année.
Les années seront numérotées 1 (1833), 2 (1834), 3 (1835) et 4 (1836).
Airy commence par faire la moyenne de ces relations sur chaque année, moyenne que l'on notera $DvmoyA$ pour l'année A. Par exemple $Dvmoy1 = 32''.10 - 290''\Delta r$. Il calcule ensuite la moyenne des rangs des jours sur chaque année A : JmA ; par exemple $Jm1 = 268.6$.
Pour 1833 il choisit comme variation de l'erreur sur la longitude héliocentrique $Dvmoy2 - Dvmoy1$ avec un espacement de $(Jm2 - Jm1) + 365$ jours. On note $Dvm1$ cette variation.

15. Les notations sont celles utilisées par Airy ; ne pas confondre le coefficient S_g et l'angle de phase S_ϕ ;
16. Les valeurs numériques de ces facteurs sont publiées avec les observations de Greenwich [Pond, 1835].

Pour 1834, il choisit $Dvm2 = Dvmoy3 - Dvmoy1$ sur une période de $(Jm3 - Jm1) + 2 * 365$ jours.
Pour 1835, il choisit $Dvm3 = Dvmoy4 - Dvmoy2$ sur une période de $(Jm4 - Jm2) + 2 * 365$ jours.
Pour 1836, il choisit $Dvm4 = Dvmoy4 - Dvmoy3$ sur une période de $(Jm4 - Jm3) + 365$ jours.
Si on note DvJ l'erreur en longitude héliocentrique le jour J d'une année A, on la remplace par l'estimation linéaire à partir des données précédentes, à savoir $DvmoyA + DvmA * \frac{J-JmA}{NA}$.
On peut résumer les indications d'Airy avec les notations précédentes :

Signification des notations pour refaire les calculs d'Airy	
JmA	moyenne des rangs des jours d'observation de l'année A
NA	nombre de jours entre la moyenne de l'année A et la suivante $N1 = (Jm2 - Jm1) + 365$ (à adapter selon les indications d'Airy)
$DvmoyA$	moyenne de l'erreur en longitude pour l'année A
$DvmA$	variation de l'erreur de la longitude au cours de l'année A
$Dv(J)$	erreur en longitude un certain jour J (donnée d'Airy)
$Dv(J)$ à remplacer par	$DvmoyA + DvmA * \frac{J-JmA}{NA}$

Exemple pour la première date (jour 215 de 1833) :

J	$Jm1$	$Jm2$	$N1$	$Dv(J)$	$Dvmoy1$	$Dvm1$
215	268.6	283.6	365+(283.6−268.6)=380	$32.63 + 90\Delta r$	$32.10 - 290\Delta r$	$6.33 - 43\Delta r$

la nouvelle valeur de $Dv(J)$ pour $J = 215$ est donc

$$Dv(J) = (32.10 - 290\,\Delta r) + (215 - 268.6) * (6.33 - 43\,\Delta r)/380 = 31.20 - 284\,\Delta r \qquad (7.14)$$

Il considère ces expressions $Dv(J)$ comme les expressions correctes, fiables.
Enfin, il forme pour chaque jour la différence entre l'ancienne valeur et la nouvelle, soit pour l'exemple

$$(32.63 + 90\,\Delta r) - (31.20 - 284\,\Delta r) = 1.43 + 374\,\Delta r \qquad (7.15)$$

Et il égale cette quantité à 0. Il fait ce travail pour chacune des 23 données.
Enfin, on résout ces équations de condition pour chaque année en faisant la moyenne, comme Airy, ou mieux, par les moindres carrés. On peut aussi résoudre par les moindres carrés l'ensemble des 23 équations.
J'ai traité les 4 groupes d'équations (1833, 34, 35, 36) séparément, puis globalement par les moindres carrés ; les résultats ne sont pas loin de ceux trouvés par Airy, sauf pour 1834. Voici les résultats :

TABLE 7.3 – Corrections ΔR par Airy et par les moindres carrés

année	1833	1834	1835	1836	toutes les années
Airy	−0.00533	0.00074	−0.00405	−0.00483	−0.00377
moindres carrés	−0.00467	−0.000054	−0.00412	−0.00488	−0.00397

Comme Airy le dit lui-même, les corrections devraient varier en douceur d'une année à l'autre : la valeur pour 1834 (0.00074) et donc les données pour cette année semblent douteuses ; Airy

est sûr[17] de ne pas avoir fait d'erreur de calcul : il met en avant l'utilisation par le Nautical Almanac de valeurs erronées pour le rayon vecteur d'Uranus en 1834.

7.3.2.2 Jugement sur les conclusions données par Airy

Airy conclut de ce calcul que les tables de Bouvard donnent pour le rayon vecteur des valeurs trop courtes ; cette affirmation est effectivement correcte pour la période 1800−1875, mais pas après cette date.
En fait, la période de 4 ans retenue par Airy est beaucoup trop courte pour projeter des comportements sur une période très étendue. Il aurait fallu appliquer la méthode sur une tranche beaucoup plus longue, ce que l'on va faire au paragraphe suivant.

7.3.2.3 Prolongement des calculs d'Airy

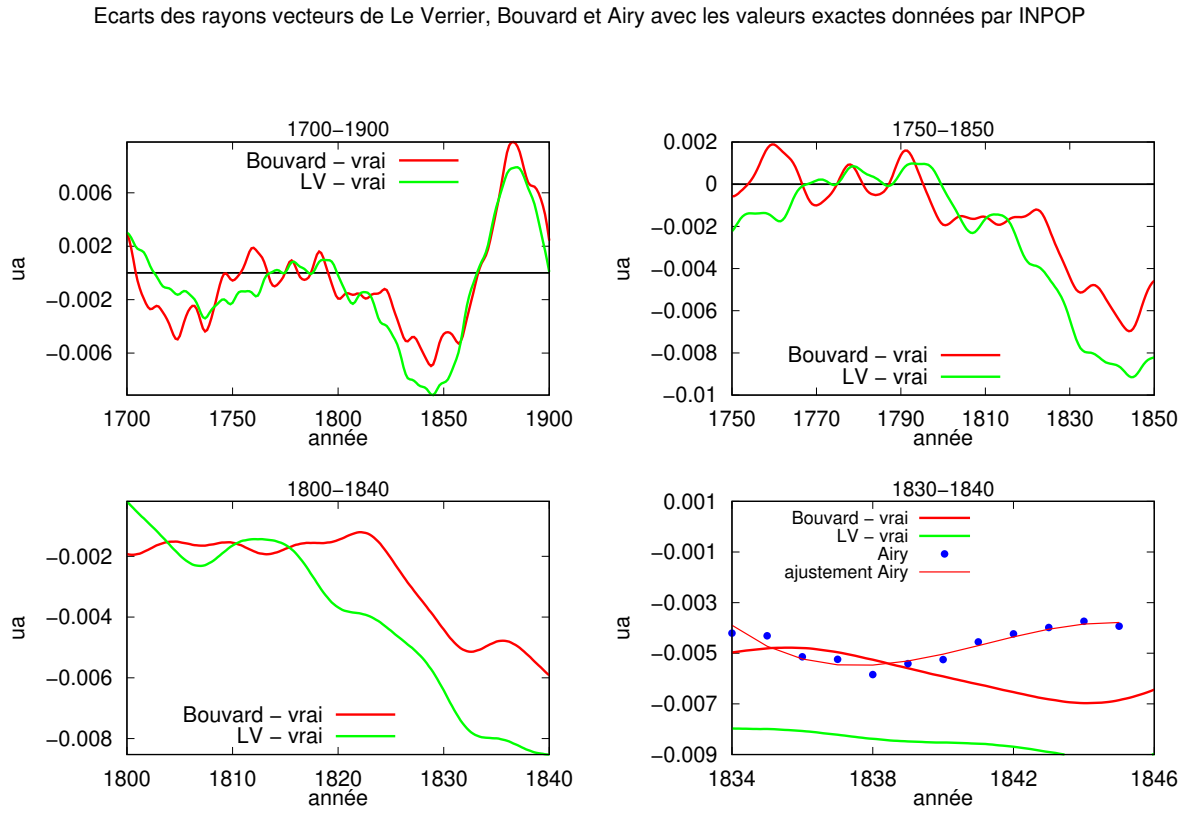


FIGURE 7.3 – Airy avait estimé l'erreur δr sur le rayon vecteur pour les années 1833−1836 [Airy, 1838]. J'ai repris exactement la même méthode de calcul qu'Airy pour la tranche 1834−1845, mais en faisant une moyenne sur 3 années consécutives afin de lisser les variations de δr

Airy n'a fait le calcul de δr que pour la tranche 1833−1836, du moins pour la partie publiée ; pourtant, Greenwich a publié chaque année dans son recueil d'observations annuel le type de données utilisé par Airy et ce, de 1837 à 1845. Après cette date, les connaissances ont évolué – découverte de Neptune – et les données ne peuvent plus être utilisées dans le même contexte, vu les modifications importantes apportées à l'orbite d'Uranus. On peut constater qu'il y avait une bonne concordance entre les écarts calculés par Airy pour la période 1833−1836 et les écarts

17. C'est lui qui le dit dans l'article de référence : « It is not any error in my computation », et en termes de calcul, il est aussi fiable que Le Verrier ; on peut donc le croire sur paroles.

aux mêmes dates entre le rayon vrai et le rayon Bouvard. On peut examiner si ce bon accord se maintient au delà de 1836. J'ai donc refait au § 7.3.2.1 exactement le même calcul qu'Airy pour chacune des années de la tranche 1837−1846. Malheureusement, les valeurs trouvées pour δr chaque année sont assez dispersées et sont éloignées de l'écart entre le rayon Bouvard et le rayon vrai. Est-ce que les données utilisées par Airy ne sont pas fiables, comme n'étaient pas fiables les données pour 1834 ? Pour limiter la dispersion, j'ai pris la moyenne des résultats sur trois années consécutives. La dispersion a diminué, mais on s'éloigne de l'écart $ray\_B - ray\_vrai$, comme on peut le voir à la figure 7.3.

7.3.3 Qu'est-ce que l'erreur sur le rayon vecteur ?

Mais le problème principal demeure : que peut-on appeler la correction du rayon vecteur ?
Dans son article, Airy semble traiter Δr comme un sous-produit de la correction de la longitude géocentrique, comme un auxiliaire algébrique et non comme une entité géométrique indépendante. Il n'est donc pas surprenant qu'il se soit concentré sur l'interdépendance entre la longitude et le rayon vecteur.
Airy ne semble pas utiliser les formules de Bouvard pour le rayon vecteur, ce qui est quelque peu étrange. Airy définit Δr comme un excédent de la quantité tabulaire sur la quantité observée, mais il ne semble pas du tout le traiter comme tel. Et que signifie 'rayon observé ' ? Comment observer la distance d'Uranus au Soleil, qui n'est pas une donnée immédiate d'observation ?

Je peux voir au moins 3 types de rayon vecteur (voir § 7.3.1) :
- Le rayon donné par les éphémérides officielles, comme INPOP : ray_vrai.
- Lorsque Neptune n'était pas connu, l'orbite d'Uranus était ajustée en réduisant les écarts entre la longitude observée et la longitude calculée par les tables. On peut utiliser les résultats donnés par INPOP, une fois que nous avons mis la masse de Neptune à 0 et ajusté les éléments d'Uranus : ray_cor.
- Le rayon calculé en utilisant strictement les tables de Bouvard : ray_B.

On a tracé l'écart $ray\_cor - ray\_vrai$ à la figure 7.2.
Dans ces conditions, que pouvons-nous appeler erreur sur le rayon vecteur ? Puisque nous pouvons considérer ray_cor comme partiellement observé, on peut utiliser $ray\_B - ray\_cor$ ou mieux $ray\_B - ray\_vrai$.
On trouve figure 7.3 le graphe pour cette deuxième option (en rouge) ; on a ajouté la même différence avec les formules de Le Verrier et on a placé les 12 points calculés sur la période 1833−1846 en appliquant la méthode d'Airy.
On voit que la différence $ray\_B - ray\_vrai$ n'est pas constamment négative, comme semble le suggérer Airy. Les valeurs trouvées en appliquant la méthode d'Airy (en bleu) sont initialement comparables avec les écarts obtenus en utilisant les formules de Bouvard, puis s'en écartent nettement. Les différences entre les valeurs de Le Verrier et les valeurs réelles sont également dessinées (en vert), mais sont assez éloignées des valeurs d'Airy.

7.4 Modèle de Lai, Lam, Young

Lai, Lam et Young (LLY par la suite) ont publié en 1990 un article intéressant pour modéliser l'action de Neptune sur Uranus [Lai, 1990]. Ils proposent un mécanisme fondé sur un système différentiel linéaire d'ordre 2 non dissipatif. Même si le schéma est volontairement simplifié, il permet d'une certaine façon d'expliquer qualitativement et en partie quantitativement l'action de Neptune sur Uranus. Je présente de façon succincte la méthode que LLY ont adoptée pour la longitude et j'adapte ensuite leur démarche au rayon vecteur (un complément de ces calculs se trouve au § 9.4).

7.4.1 Présentation du modèle LLY pour la longitude

7.4.1.1 Équations du mouvement

On suppose que les trajectoires non perturbées d'Uranus et de Neptune sont des cercles de rayons respectifs R_1 et R_2, décrits avec des vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 et situés dans l'écliptique. L'origine des temps est la date de la conjonction [18] de 1822, notée t_0 ; on se décale à l'origine t_0 en posant $\tau = t - t_0$; l'axe des abscisses est choisi pour porter le Soleil, Uranus et Neptune à l'instant t_0.
On note $(\rho_1(\tau),\, \phi_1(\tau))$ les coordonnées polaires d'Uranus dans le mouvement perturbé ; les coordonnées non perturbées sont $(R_1,\, \Omega_1\tau)$. On posera pour le mouvement perturbé

$$\rho_1(\tau) = R_1 + u(\tau) \qquad \phi_1(\tau) = \Omega_1\tau + \frac{v(\tau)}{R_1} \tag{7.16}$$

Après simplification et linéarisation [19], le mouvement perturbé peut être décrit par le système différentiel

$$\ddot{u} - 2\Omega_1\dot{v} - 3\Omega_1^2 u = \varepsilon F_r \tag{7.17}$$

$$\ddot{v} + 2\Omega_1\dot{u} = \varepsilon F_\phi \tag{7.18}$$

avec $\varepsilon = \frac{Gm_2}{R_2^2} = 4\pi^2\frac{m_2}{MR_2^2}$ et F la force gravitationnelle exercée par Neptune sur Uranus.
Le système homogène peut s'écrire matriciellement

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_1 & 3\Omega_1^2 & 0 \\ -2\Omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ u \\ v \end{bmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \dot{X} = AX \tag{7.19}$$

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2(\lambda^2+\Omega_1^2)$, donc A admet pour valeurs propres 0 à l'ordre 2 et $\pm\imath\Omega_1$ à l'ordre 1 ; en conséquence, le système différentiel est non dissipatif.

7.4.1.2 Solutions du système

La solution générale associée à la valeur propre 0 est (avec les notations de LLY)

$$u = -\tfrac{2}{3}\alpha_1 \qquad v = \alpha_1\Omega_1\tau + \alpha_2 \tag{7.20}$$

et celle pour la fréquence Ω_1 est

$$u = -\tfrac{1}{2}\alpha_3\cos\Omega_1\tau + \tfrac{1}{2}\alpha_4\sin\Omega_1\tau \qquad v = \alpha_3\sin\Omega_1\tau + \alpha_4\cos\Omega_1\tau \tag{7.21}$$

La solution générale du système homogène dépend donc de 4 constantes arbitraires.
Solution particulière du système complet
La force F exercée par Neptune sur Uranus est une fonction périodique de pulsation $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. On calcule les coefficients du développement en série de Fourier de F_r et F_ϕ en utilisant des sommes de Riemann. F_r est une fonction paire et F_ϕ une fonction impaire.

$$F_r = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n\,\Omega\,\tau \qquad F_\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\,\Omega\,\tau \tag{7.22}$$

18. C'est à dire l'instant où le Soleil, Uranus et Neptune sont alignés dans cet ordre.
19. Pour plus de détails, voir l'article de Lai, Lam, Young [Lai, 1990].

Puis, on détermine une solution particulière de l'équation complète avec u paire et v impaire, chacune de période $2\pi/\Omega$. En les développant en série de Fourier :
$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos n\,\Omega\,\tau$, $v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \sin n\,\Omega\,\tau$, on trouve :

$$u_n = \frac{n\Omega a_n - 2\Omega_1 b_n}{n\Omega(\Omega_1^2 - n^2\Omega^2)} \qquad v_n = \frac{-2n\Omega\Omega_1 a_n + (3\Omega_1^2 + n^2\Omega^2)b_n}{n^2\Omega^2(\Omega_1^2 - n^2\Omega^2)} \tag{7.23}$$

On constate que le coefficient v_2 est de deux ordres de grandeur supérieur aux autres ; on retiendra donc uniquement $\tau \to \varepsilon v_2 \sin 2\Omega\tau = -\gamma \sin 2\,\Omega\,\tau$ avec $\gamma = 890''$, comme partie impaire d'une solution particulière du système complet.

Observations
Lai, Lam et Young utilisent 22 observations rapportées par Lodge [Lodge, 1905]. On peut aussi utiliser les données de Le Verrier ou bien celles d'Adams, ce qui change peu le résultat qualitatif, mais ce qui montre la sensibilité aux données.

Solution complète
Les données sont les écarts historiques $O_{LV} - C$ sur la longitude héliocentrique d'Uranus, étalés de 1690 à 1845 ; cet écart observationnel en longitude sera noté $\Delta\phi$: $\Delta\phi = O_{LV} - C$. Conformément au modèle précédent, l'écart théorique est la somme d'une solution inhomogène (ou particulière) et de la solution homogène la plus générale, soit, en se limitant à l'harmonique 2 et en sachant que γ est positif

$$\Delta\phi_{\text{th}} = -\gamma \sin 2\Omega\tau + \beta_1\Omega_1\tau + \beta_2 + \beta_3 \sin \Omega_1\tau + \beta_4 \cos \Omega_1\tau \tag{7.24}$$

On détermine les coefficients $(\beta_i)_{1\le i\le 4}$ par les moindres carrés en minimisant l'écart quadratique entre $\Delta\phi$ et $\Delta\phi_{\text{th}}$ sur les données d'observation (au nombre d'une vingtaine). On retrouve les graphes tracés dans l'article de référence, graphes qui approchent très bien les données sur la période d'observation ; ces graphes sont tracés à la fig. 9.9 de la thèse.

7.4.2 Étude du rayon vecteur

On adapte maintenant la méthode de LLY, qui porte sur la longitude, à l'étude du rayon vecteur. Lors de la publication de leur article, Lai, Lam et Young n'avaient pas appliqué leur démarche au rayon vecteur, car ils ne disposaient pas de données historiques pour les perturbations du rayon vecteur, alors que l'on en disposait pour la longitude.
J'ai repris leur méthode en créant de façon artificielle des données observationnelles pour le rayon.

7.4.2.1 Comment observe-t-on le rayon vecteur et ses perturbations ?

L'affirmation d'Airy [20] « it appears [...] that the tabular radius is considerably too small » [Airy, 1838] repose sur les données de 4 années seulement et ces données sont partiellement discutables (voir § 7.3.2.1).
Les données sur le rayon sont indispensables si l'on veut examiner la dépendance entre les perturbations de la longitude et celles du rayon vecteur. À défaut de disposer de données historiques, on peut utiliser l'une ou l'autre des deux démarches suivantes :

- **Méthode proposée par Kenneth Young dans son Project brief du 27/9/2019**
Kenneth Young [Sheehan, 2021] résout le problème direct pour la longitude, comme il est fait

20. Affirmation reprise dans la lettre d'Airy à Le Verrier datant du 26 juin 1846. Airy arrive à cette conclusion après avoir travaillé sur les données de 4 années seulement : 1833−1836. Les calculs d'Airy sont refaits au paragraphe 7.3.2.1 p. 259.

dans l'article de LLY i.e. il détermine par les moindres carrés les valeurs de $(\beta_i)_{1\leq i\leq 4}$ qui minimisent $(\Delta\phi - \Delta\phi_{th})^2$, puis il pose $\alpha_{i,0} = R_1 * \beta_i$ et il décide que la valeur de la perturbation résiduelle du rayon vecteur à tout instant τ est :

$$\Delta r1(\tau) = u(\tau) + \tfrac{2}{3}\alpha_{1,0} - \tfrac{\alpha_{3,0}}{2}\cos(\Omega_1\tau) + \tfrac{\alpha_{4,0}}{2}\sin(\Omega_1\tau) \qquad \text{(Méthode 1)} \qquad (7.25)$$

où u a la signification de l'article : perturbation directe de Neptune sur le rayon vecteur d'Uranus ; ainsi, $\Delta r1$ est l'équivalent du $\Delta\phi_{th}$ de l'article. On dira que $\Delta r1$ est simulé par le modèle LLY et par les données historiques sur la longitude.
Pour coller davantage au modèle de $\Delta\phi$, on peut utiliser la version suivante (on rappelle que u_2 est supérieur de deux ordres de grandeur aux autres termes du développement de u) :

$$\Delta r2(\tau) = u_2\cos(2\Omega\tau) + \tfrac{2}{3}\alpha_{1,0} - \tfrac{\alpha_{3,0}}{2}\sin(\Omega_1\tau) + \tfrac{\alpha_{4,0}}{2}\cos(\Omega_1\tau) \qquad \text{(Méthode 2)} \qquad (7.26)$$

On testera ces deux modèles, que l'on qualifiera de simulés par l'ajustement de la longitude.

- **Utilisation de INPOP**

On a vu au § 7.3.1 que l'on pouvait simuler un écart $O-C$ entre rayon 'observé' et rayon 'calculé'. On a noté Δr_{Inpop} un tel écart, qui est concrètement, dans le calcul fait ici avec INPOP, un tableau de 5000 valeurs à des dates comprises entre 1680 et 1850.
On notera Δr_{LV} l'extrait du tableau Δr_{Inpop} aux dates (il y en a 18) de Le Verrier.
À la figure 7.3, on avait tracé l'écart entre le rayon ray_LV calculé à partir des formules de Le Verrier et le rayon vrai ray_vrai, ainsi que l'écart entre le rayon ray_B calculé par les formules de Bouvard et le rayon vrai (la discussion est faite au § 7.3.2.1).

7.4.2.2 Ajustement du rayon vecteur, problème direct

On note $(\tau_j)_{1\leq j\leq n}$ les dates d'observation de Le Verrier (d'Adams [Adams, 1847] ou bien de Lodge [Lodge, 1905]) ; n étant de l'ordre de 18 à 25 et on suppose désormais connues les perturbations résiduelles $(\Delta r1(\tau_j))$ et $(\Delta r2(\tau_j))$ à ces dates d'observation, qui sont des tableaux de n=18 à 25 valeurs, déterminées par l'une des deux méthodes précédentes (donc déterminées à partir des perturbations de la longitude). On se place ainsi dans des conditions voisines de la recherche de Neptune, qui s'appuyait sur un nombre réduit [21] d'observations.
On utilisera les deux méthodes (1 et 2), et on se limitera ici aux données de Le Verrier (fig. 4.16), les deux autres données menant à des résultats très voisins. On rappelle que Δr_{Inpop} est un tableau connu contenant environ 5000 valeurs. Dans ce contexte, on ne s'intéresse pas à la longitude [22] et la fonction u de l'article [23] est supposée connue (c'est le problème direct). Si on prend comme données la famille $(\Delta r1[\tau_j])$, et si on choisit la méthode 1, on doit déterminer les coefficients $(\alpha_i)_{i=1,3,4}$ de la solution homogène en résolvant par les moindres carrés le système

$$-\tfrac{2}{3}\alpha_1 - \tfrac{\alpha_3}{2}\cos(\Omega_1\tau_j) + \tfrac{\alpha_4}{2}\sin(\Omega_1\tau_j) = \Delta r1[\tau_j] - u(\tau_j) \qquad 1\leq j\leq n \qquad (7.27)$$

Par construction même, la solution, exacte !, est $(\alpha_{i,0})$; le prolongement naturel de ces données est donc $\Delta r1$. De même, si l'on prend $(\Delta r2[\tau_j])$ comme données d'observation, le prolongement naturel par la méthode 2 est $\Delta r2$.
On trace sur la figure 7.4 les graphes de $\Delta r1$ et de $\Delta r2$ ainsi que les points qui ont permis de construire ces deux courbes et on compare ces graphes à Δr_{Inpop}, qui peut être considéré comme la solution exacte.

21. 279 observations pour Le Verrier, qui seront regroupées ensuite par paquets de 18 ou 33 ; beaucoup moins pour Adams, 21, une fois les regroupements effectués.
22. $\Delta\phi$ n'a servi que pour déterminer $\Delta r1$ par la première méthode et $\Delta r2$ par la deuxième.
23. On rappelle que u est la perturbation sur le rayon dans le modèle de Lai, Lam et Young.

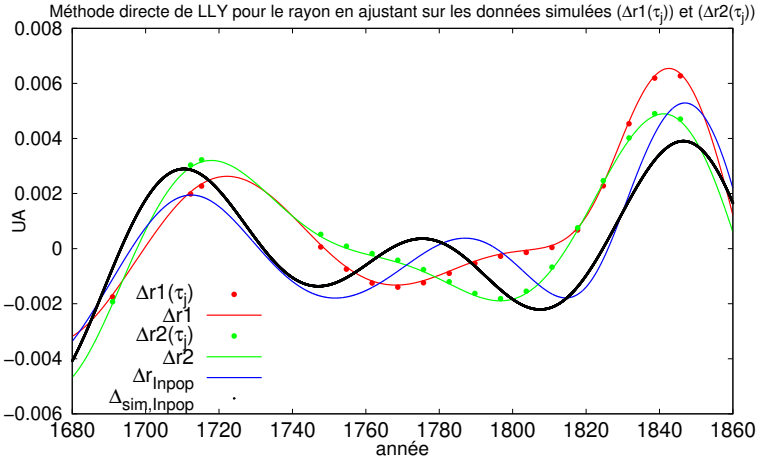


FIG. 7.4 *Problème direct.* $\Delta r1$ *et* $\Delta r2$ *: corrections sur le rayon vecteur obtenues à partir de corrections indirectes sur la longitude ;* Δr_{Inpop} *: correction 'observée'.* $\Delta r1$ *et* $\Delta r2$ *suivent dans les grandes lignes les variations de* Δr_{Inpop}*. En noir le tracé,* $\Delta r_{sim,Inpop}$*, obtenu en ajustant sur* Δr_{Inpop}*. On peut conclure que les corrections sur la longitude corrigent l'essentiel du rayon vecteur.*

Voici les significations des codes couleur de la figure 7.4 :
En points rouges ($\Delta r1(\tau_j)$) et en rouge continu son prolongement par la méthode 1 : $\Delta r1$;
En points verts ($\Delta r2(\tau_j)$) et en vert continu son prolongement par la méthode 2 : $\Delta r2$;
En bleu Δr_{Inpop}, qui peut être considéré comme la perturbation résiduelle exacte du rayon vecteur, quand on ne connaît pas l'existence de Neptune et qu'on ajuste les éléments d'Uranus.
En noir, ajustement à l'aide de la méthode 1 sur les valeurs de Δr_{Inpop}.
L'ajustement est moins bon que pour la longitude (voir l'article de LLY ou § 9.4), mais il suit les grandes lignes de la variation de Δr_{Inpop}.
On peut donc répondre à G.B. Airy que la correction sur la longitude corrige aussi en grande partie le rayon vecteur.

7.4.2.3 Ajustement simultané de la longitude et du rayon vecteur, problème direct

Le principe est d'écrire que les corrections du modèle pour le rayon et pour la longitude sont égales aux écarts 'observés'. On obtient alors des systèmes du type suivant (S) aux inconnues α_1, α_2, α_3, α_4 que l'on résout par les moindres carrés, dans lequel γ et δ ont les valeurs initiales : $\gamma = -v_2$ et $\delta = u_2$. La solution est tracée fig. 7.5.

$$(S)\ \begin{cases} \gamma R_1 \sin(2\Omega\tau_j) + \alpha_1\Omega\tau_j + \alpha_2 + \alpha_3 \sin(\Omega_1\tau_j) + \alpha_4 \cos(\Omega_1\tau_j) &=& R_1\,\Delta\phi_{th}[\tau_j] \\ \delta\cos(2\Omega\tau_j) - \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{2}\cos(\Omega_1\tau_j) + \frac{\alpha_4}{2}\sin(\Omega_1\tau_j) &=& \Delta r_{Inpop}[\tau_j] \end{cases} \qquad 1 \le j \le n$$

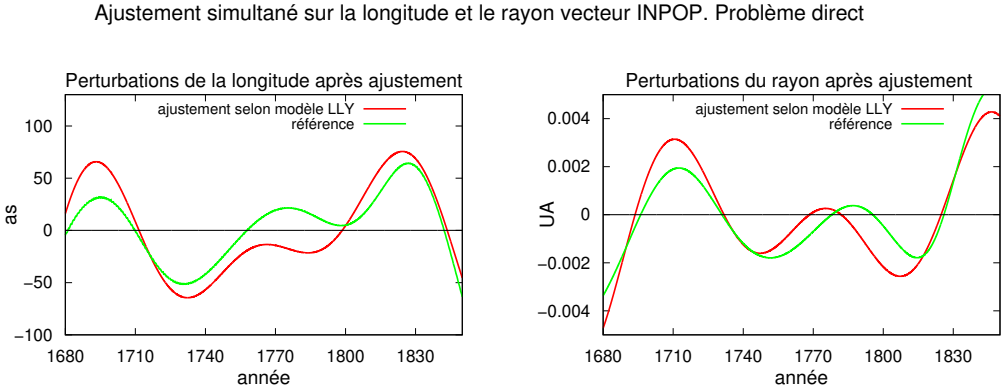


FIGURE 7.5 – Perturbations de la longitude vraie et du rayon vecteur d'Uranus après ajustement sur $\Delta\phi_{th}$ et Δr_{Inpop} à l'aide du modèle LLY étendu au rayon vecteur. La référence pour la longitude est $\Delta\phi_{th}$ et pour le rayon, c'est Δr_{Inpop} (voir § 7.3.1). On a un bon accord

7.4.3 Mise en évidence de t_0 ou Ω_2 ou (t_0, Ω_2) par la méthode de Lai Lam Young

Le problème direct supposait connus t_0 et Ω_2 et on confrontait le modèle LLY aux données historiques. Inversement, on va essayer de retrouver ces paramètres t_0 et/ou Ω_2 à partir de ces données historiques. On va examiner successivement 3 variantes de ce problème :

— Balayage sur le couple (t_0, Ω_2) (§ 7.4.3.1)

— Balayage sur t_0 seul (§ 7.4.3.2)

— Balayage sur Ω_2 seul (§ 7.4.3.3)

Pour mettre en évidence la sensibilité aux données, on utilisera les données relatives à Le Verrier, Adams et Lodge.
Pour la recherche du couple (t_0, Ω_2), la mise en évidence graphique est malaisée : il faudrait un graphe 3D. On se contentera de donner des résultats numériques à la table 7.4.
Par contre, il est plus facile de visualiser la recherche pour un seul paramètre, ce qui sera fait dans les deux pages suivantes.

7.4.3.1 Mise en évidence de (t_0, Ω_2)

Pour le problème direct, on ajustait les paramètres $(\alpha_i)_{1\leq 3}$ à partir des données : t_0, Ω_2, u, v (méthode 1) ou bien à partir de t_0, Ω_2, $u_2 = \delta$, $v_2 = -\gamma$ (méthode 2).
Une façon de poser le problème inverse consiste à minimiser les écarts entre les perturbations observées et les perturbations théoriques, mais contrairement au calcul direct, on ne connaît plus t_0, ni Ω_2. La méthode consiste donc à faire un balayage sur (t_0, Ω_2) ; pour chaque valeur de ce couple,
– déterminer le minimum de $(\Delta r - \Delta r_{th})^2$ quand on ajuste sur le rayon
– déterminer le minimum de $(\Delta\phi - \Delta\phi_{th})^2$ quand on ajuste sur la longitude
– déterminer le minimum de $(\Delta r - \Delta r_{th})^2 + R_1^2(\Delta\phi - \Delta\phi_{th})^2$ quand on ajuste sur le rayon et la longitude.

Puis faire varier le couple (t_0, Ω_2) et conserver la valeur du couple qui minimise les résidus.
La méthode utilisée est la méthode 2 et les données sont les 18 observations de Le Verrier.
Voici les résultats obtenus :

TABLE 7.4 – Valeurs obtenues pour (t_0, Ω_2) par ajustement sur le rayon, la longitude ou les deux simultanément. Pour Ω_2, l'unité est le radian/s.

Ajustement sur →	rayon		longitude		rayon+longitude		Valeurs exactes	
Mise en évidence de →	t_0	Ω_2	t_0	Ω_2	t_0	Ω_2	t_0	Ω_2
Problème inverse	1822	0.0370	1816	0.0320	1818	0.0343	1822	0.03813

On constate que les valeurs trouvées sont très proches des valeurs réelles. La meilleure approche se produit quand on ajuste sur le rayon vecteur.
Lai, Lam et Young avaient trouvé des valeurs légèrement différentes pour ce problème inverse, en ajustant uniquement sur la longitude : $t_0 = 1824.5$ et $\Omega_2 = 0.003622$ rd/s.

7.4.3.2 Mise en évidence de la date d'opposition t_0

On fait varier t_0 en maintenant Ω_2 à sa valeur réelle. Dans les trois cas, on utilise la méthode 2.

1) On ajuste ici sur la longitude seule avec γ fixé ; la date d'opposition apparaît nettement ainsi que la période synodique de 173 ans et le minimum secondaire ; voir fig. 7.6.

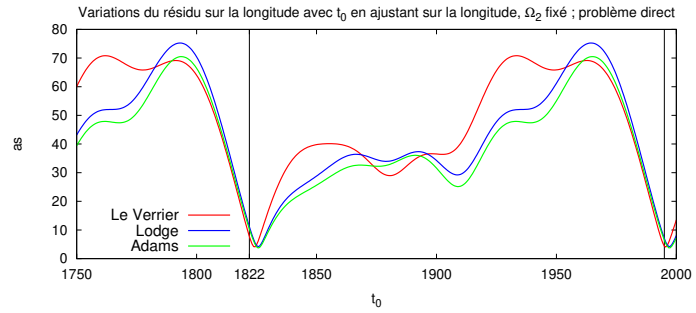


FIGURE 7.6 – Variations des résidus en longitude quand on ajuste la longitude en fonction de la date supposée d'opposition. On voit nettement apparaître la date réelle d'opposition (1822), la période de révolution synodique (173 ans) ainsi que le minimum secondaire décalé de 180°.

2) On ajuste ici sur le rayon vecteur avec δ fixé ; on obtient les mêmes conclusions ; voir fig. 7.7.

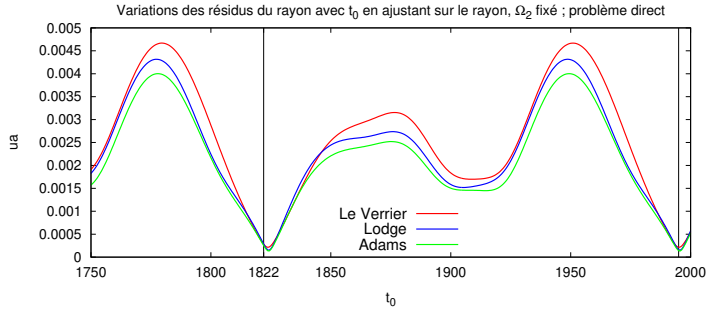


FIGURE 7.7 – Variations du résidu final sur le rayon vecteur quand on ajuste le rayon en fonction de la date supposée d'opposition. On voit nettement apparaître la date réelle d'opposition (1822), la période de révolution synodique (173 ans) ainsi que le minimum secondaire décalé de 180°.

3) On ajuste ici simultanément sur la longitude et sur le rayon vecteur ; le minimum secondaire est beaucoup plus accentué ; on voit apparaître la demi-période synodique 86 ans ; voir fig 7.8.

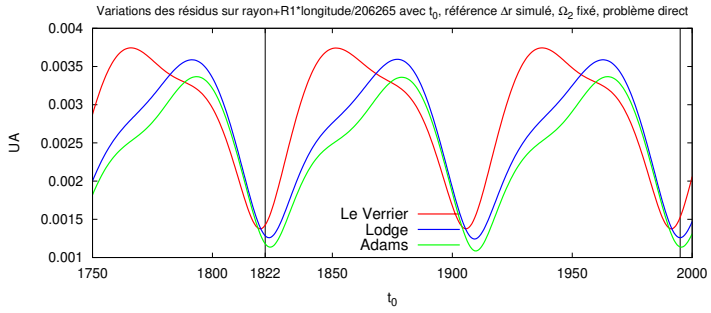


FIGURE 7.8 – Variations du résidu sur le rayon quand on ajuste sur longitude+rayon en faisant varier t_0. On voit nettement les dates d'opposition, et ici le minimum 'secondaire' est très marqué.

7.4.3.3 Mise en évidence de la vitesse angulaire de rotation Ω_2

Ici on fait varier Ω_2 en laissant t_0 à la bonne valeur (1822). On utilise toujours la méthode 2.
1) Quand on fait varier Ω_2 en ajustant sur la longitude, le résidu présente un minimum vers la valeur correcte (0.0381 rd/s), mais ce minimum est peu marqué et très étalé ; voir fig. 7.9.

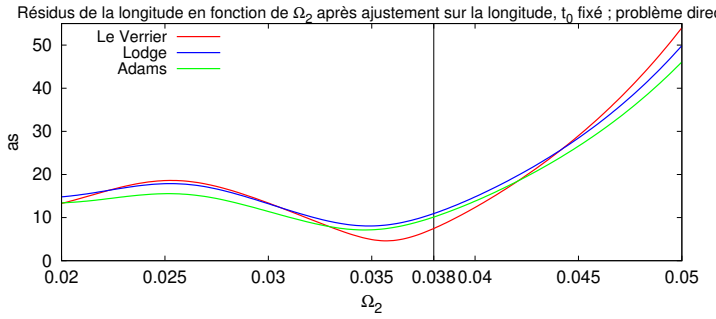


FIGURE 7.9 – Résidus sur la longitude d'Uranus quand on ajuste sur cette longitude en faisant varier la pulsation Ω_2. La ligne noire indique la valeur correcte de Ω_2 (0.0381 rd/s).

2) Quand on ajuste sur le rayon seul, on obtient une valeur précise pour Ω_2 ; voir fig 7.10.

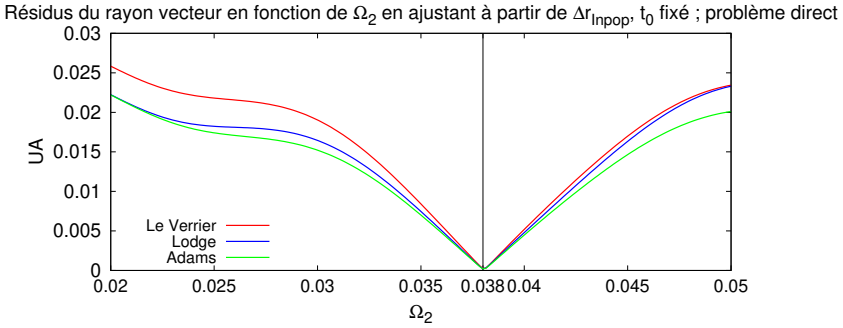


FIGURE 7.10 – Résidus sur le rayon vecteur d'Uranus quand on ajuste sur ce rayon vecteur en faisant varier la pulsation Ω_2. La ligne noire indique la valeur correcte de Ω_2

3) Quand on ajuste sur rayon vecteur + longitude, on obtient une bonne valeur pour Ω_2, voir fig. 7.11.

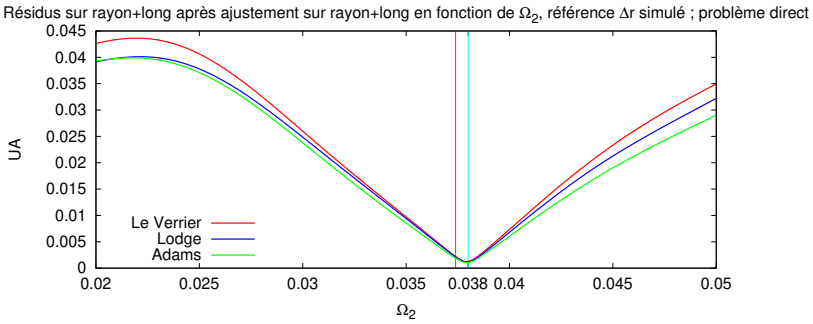


FIGURE 7.11 – Résidus sur le rayon vecteur d'Uranus quand on ajuste sur ce rayon vecteur et sur la longitude d'Uranus en faisant varier la pulsation Ω_2. La ligne rose indique $\Omega_1/2$ et la ligne bleu clair, la valeur correcte de Ω_2 (0.0381 rd/s) .

7.4.3.4 Conclusions pour les divers problèmes inverses

On peut reprendre les conclusions précédentes avec une présentation un peu différente ; les graphes pertinents se trouvent dans les deux pages précédentes.

Relation entre correction de la longitude et correction du rayon vecteur

• Les corrections sur la longitude corrigent l'essentiel des résidus sur le rayon vecteur, ce qui peut être considéré comme une réponse positive à M. Airy.

Ajustements s'appuyant sur le rayon vecteur seul

• Avec le modèle de LLY, on peut retrouver l'essentiel des résidus sur le rayon vecteur par le problème direct, mais il y a des petits décalages.
• Le problème inverse permet d'accéder à des valeurs correctes pour t_0 et Ω_2.
• Le tracé des résidus du rayon en fonction de t_0 permet de mettre en évidence de façon très nette : 1) la date de la conjonction 2) la période de révolution synodique 3) le minimum secondaire correspondant à la bonne position de la conjonction décalée de 180°.
• Les variations des résidus du rayon avec Ω_2 donnent une très bonne valeur pour Ω_2.

En s'appuyant sur la longitude seule

• Avec le modèle LLY, on retrouve les résidus sur la longitude avec une grande précision.
• Le problème inverse permet de déterminer des valeurs correctes de t_0 et de Ω_2, mais il est assez sensible aux données.
• Le balayage sur t_0 permet de déterminer avec précision la date de l'opposition, la période de révolution synodique et le minimum secondaire.
• Le balayage sur Ω_2 donne une valeur approchée, mais avec un minimum peu marqué.

En s'appuyant sur la longitude + rayon vecteur

• On peut assez bien retrouver les résidus de la longitude et du rayon vecteur à l'aide du problème direct, surtout si l'on part des observations correctes issues de INPOP.
• Le problème inverse donne une valeur très précise de Ω_2.
• En faisant varier t_0 seul, on peut déterminer la date de conjonction, mais il y a une ambiguïté avec le minimum 'secondaire' de 1906.
• En faisant varier seulement Ω_2, on obtient une très bonne valeur de ce paramètre.

7.4.4 Décalage entre la perturbation directe exercée par Neptune sur Uranus et la perturbation résiduelle observée

On utilise le modèle LLY pour essayer d'expliquer le décalage entre la perturbation directe exercée par Neptune sur Uranus et la perturbation résiduelle observée. La comparaison graphique est faite au § 11.2.2. Tout ce paragraphe provient de [Lai, 1990].
Soit $\phi_0(a_0, e_0, \tau)$ la valeur de la longitude dans le mouvement képlérien d'Uranus, de demi-grand axe a_0 et d'excentricité e_0. Comme on ne peut pas supprimer l'action de Neptune, on n'a pas accès à a_0 ou e_0. Ce que l'on observe est la longitude perturbée par Neptune

$$\phi = \phi_0(a_0, e_0, \tau) - \gamma \sin 2\Omega\tau \simeq \phi_0(a_0, e_0, \tau) - \gamma \sin \Omega_1\tau \tag{7.28}$$

pendant un intervalle de temps petit par rapport à $T_b \simeq 4300$ ans avec $T_b = \frac{2\pi}{\Omega_b}$ et $\Omega_b = \Omega_1 - 2\Omega_2$.
Le calculateur chargé de corriger l'orbite d'Uranus essaie d'ajuster cette longitude avec une orbite képlérienne $\phi_0(a, e, \tau)$. En termes d'accroissements ($\Delta a = a - a_0$ et $\Delta e = e - e_0$) :

$$\phi_0(a, e, \tau) \simeq \phi_0(a_0, e_0, \tau) + \Delta a \frac{\partial \phi_0}{\partial a}(a_0, e_0, \tau) + \Delta e \frac{\partial \phi_0}{\partial e}(a_0, e_0, \tau) \tag{7.29}$$

Pour simplifier, on garde uniquement Δe (la correction sur Δa est faible) ; on obtient en identifiant [24] l'équation (7.21) et le développement à l'ordre 1 de r : $r \simeq a(1 - e\cos\phi)$: $\alpha_4 \simeq 2R_1\Delta e$ et $\alpha_3 = 0$ puisque $\phi \simeq \Omega_1\tau$ et $a \simeq R_1$, On lit aussi $\varpi \simeq 0$, soit un périhélie dirigé vers la ligne de conjonction. On retrouvera toutes ces conclusions à la fin du chapitre 8, quand il s'agira d'analyser le rôle de la conjonction de 1822.

$$\phi_0(a, e, \tau) = \phi_0(a_0, e_0, \tau) + 2\Delta e \sin \Omega_1\tau \tag{7.30}$$

Et le meilleur ajustement revient à choisir $\Delta e = -\gamma/2 \simeq -2\,10^{-3}$.
La véritable déviation exercée par Neptune est $\phi - \phi_0(a_0, e_0, \tau)$, qui peut atteindre $900''$.
Mais à cause du mode d'ajustement des orbites à partir des écarts observés en longitude, l'écart observé est en fait $\phi - \phi_0(a_0, e_0 - \gamma/2, \tau)$, écart qui est beaucoup plus faible.
La perturbation exercée par Neptune a été rognée par l'attribution d'une excentricité erronée pour le mouvement non perturbé. Il faut donc augmenter la valeur de l'excentricité, ce que Le Verrier avait été conduit à faire.

Avec le traitement numérique (global) d'INPOP, cette interprétation aurait été masquée, et l'on n'aurait obtenu que les valeurs numériques finales.
En résumé, on constate que la perturbation directe exercée par Neptune est d'un ordre de grandeur plus grande que les résidus $O - C$ dans la théorie de Bouvard. Cela tient à la façon de corriger l'orbite d'une planète : on forme des équations de condition qui conduisent à minimiser les $O - C$. Par ce procédé, on attribue à Uranus une orbite de référence qui n'est pas la bonne, avec une excentricité et une longitude du périhélie incorrectes. Pendant un temps limité, le mouvement perturbé ressemble à un mouvement képlérien non perturbé obtenu en modifiant (de façon incorrecte) l'excentricité. La 'confusion' tient au fait que les données sur Uranus couvrent une toute petite partie de la période T_b. Avec une durée d'observation de l'ordre de T_b, on aurait pu mettre en évidence l'action réelle de Neptune.
L'interprétation proposée par LLY explique une bonne partie des irrégularités observées dans les mouvements d'Uranus. Il faudrait probablement la compléter en tenant compte d'une correction de la longitude du périhélie ; mais il serait alors difficile de dissocier les corrections à effectuer sur l'excentricité de celles à effectuer sur la longitude du périhélie ; c'est un peu le problème auquel sera confronté Le Verrier pour l'explication de l'avance du périhélie de Mercure, voir § 12.1.5.2.

24. C'est ainsi que s'expriment LLY ; en fait, pour pouvoir faire l'identification indiquée, il faut remplacer pendant le court intervalle de temps choisi, l'orbite circulaire d'Uranus par une orbite circulaire de rayon $R_1(1+e_0)$.

7.5 Problème inverse pour le rayon vecteur en adaptant la méthode utilisée par Le Verrier

7.5.1 Objectif, données

Le Verrier a prédit la place de la planète qui perturbait Uranus à partir d'équations de condition portant sur la longitude, héliocentrique puis géocentrique. Pourquoi n'utilise-t-il pas le même type d'équations, mais portant cette fois sur le rayon vecteur ? Il y a une raison très simple : le rayon vecteur n'est pas une donnée immédiate d'observation, contrairement à l'ascension droite ou à la déclinaison. Les corrections 'observées' du rayon vecteur proviennent [25] des corrections observées de la longitude géocentrique, combinées à des corrections estimées de la longitude héliocentrique.
Alors comment obtenir un ensemble de perturbations du rayon vecteur ? On a vu que l'on pouvait fabriquer des données sur le rayon vecteur en utilisant le modèle de Lai, Lam et Young (§ 7.4.2.1 p. 265) ou bien en utilisant INPOP ; on utilisera ici plutôt cette deuxième option.
Le principe du calcul est le même que pour les perturbations de la longitude : on écrit que la perturbation théorique du rayon [26] est égale à la perturbation calculée par INPOP à diverses dates. Le Verrier a utilisé des stratégies élaborées pour déterminer la position optimale de la planète perturbatrice au 1/1/1800, mais ici, on procédera de façon beaucoup plus basique : on choisira une centaine [27] "d'observations" régulièrement réparties entre 1680 et 1850 et on utilisera directement la résolution des équations de condition par les moindres carrés [28] à partir des perturbations sur le rayon vecteur fournies par INPOP, sans passer par une résolution partielle et sélective, comme l'avait fait Le Verrier à plusieurs reprises pour les équations de condition portant sur la longitude.

7.5.2 Équations de condition

On examine la perturbation sur le rayon vecteur d'Uranus due à des corrections apportées sur ses éléments elliptiques :

$$\delta r = M_h(t)\, e\, t\, \delta n - M_h(t)\, e\, \delta\varepsilon + M_h(t)\, e\, \delta\varpi + N_h(t)\, \delta e \tag{7.31}$$

où $M = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ et $N = \frac{\partial r}{\partial e}$ (notations de Le Verrier, voir § 4.3.1.1).
On a déjà observé au § 7.2.1 qu'il n'y a en fait que 3 paramètres indépendants [29] : δn, δe et $\delta(\varepsilon - \varpi)$ i.e. $\delta\zeta$ avec ζ anomalie moyenne au 1/1/1800.
On ajoute la perturbation exercée par la planète extérieure de masse m', d'excentricité e' et de longitude du périhélie ϖ', à savoir [Pontécoulant, 1829] :

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{2}\sum_i C_i \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - m' f e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - m' f' e' \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+m'\sum_i D_i \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] + m'\sum_i E_i \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'] \tag{7.32}$$

25. C'est du moins ainsi qu'Airy procède pour la discussion du rayon vecteur [Airy, 1838]. On rappelle qu'il disposait de δG, qu'il estimait δv par des séries de moyennes et qu'il en déduisait la valeur de δr par la formule $\delta G = \alpha_g \delta v - \beta_g \delta r$ (voir § 7.3.2.1 p. 259).
26. Obtenue par exemple par les formules de Laplace dans la *Mécanique céleste*.
27. On testera l'influence du nombre d'observations : 25, 50, 100, 500, 5000.
28. Cette approche avait donné des résultats très instructifs quand on avait utilisé les moindres carrés uniquement sur les observations anciennes, puis uniquement sur les observations modernes et enfin sur l'ensemble des observations ; voir § 4.4.2.
29. Contrairement aux équations de condition pour la longitude, qui comportent 4 variables indépendantes.

C_i est donné au § 7.2.2 et plus généralement, tous les coefficients sont donnés dans la *Mécanique céleste* [Laplace, 1802] ou dans la *Théorie analytique du système du monde* [Pontécoulant, 1829], et l'on fait varier [30] i de 1 à 3.
Dans les équations de condition complètes, il y a donc 3+3=6 inconnues visibles [31] :
$\delta n,\ \delta\varepsilon,\ \delta\zeta,\ m',\ m'h',\ m'l'$ et deux 'cachées' : le rapport α des demi-grands axes et la longitude moyenne ε' de la planète perturbatrice au 1/1/1800, qui interviennent de façon compliquée.

On choisit un certain nombre de valeurs de α ; pour une valeur de α fixée, on fait varier la longitude initiale ε' avec un pas donné (typiquement 1 ou 2°) ; on résout l'ensemble des équations de condition par les moindres carrés, et on évalue le résidu sur le rayon vecteur. Le but est de déterminer la valeur de ε' qui minimise ces résidus. Mais comme la méthode suit strictement les moindres carrés, il n'y a aucune sélection physique dans les solutions : en conséquence, de nombreuses solutions n'ont aucun sens physique, avec une masse négative [32] ou une excentricité supérieure à 1. On a donc filtré les solutions par la condition [33] $m' > 0.4$ (i.e. $m' > 0.4\, m_{Nep}$).
Avec ce filtrage, on obtient des tronçons séparés pour les graphes ; typiquement il y a un intervalle [34] autour de 240° et un autre autour de 20°.
Le tracé des différents graphes pour les différentes valeurs de α retenues est effectué à la figure 7.12.
Par clarté, on a tracé les variations des résidus sur le rayon vecteur en ne gardant que le tronçon autour de 240° (qui contient le minimum absolu des résidus) ; on a ajouté les variations de l'excentricité et enfin les variations de la masse, sur ces mêmes intervalles, en fonction de la longitude initiale de la planète perturbatrice.
On constate que, pour toute valeur de α, le minimum des résidus sur le rayon vecteur se produit dans la zone 210°−240° pour ε', qui est voisine de la zone sélectionnée par Le Verrier (234°−252°) par la résolution de ses équations de condition en longitude.
On constate que le minimum des résidus se produit quand $\alpha = 1/1.55$ pour une valeur de ε' égale à 220° ; on lit alors la masse correspondante : 0.9 (masses de Neptune) et l'excentricité correspondante : 0.03, ensemble de valeurs proches des valeurs réelles. Avec ces valeurs, on obtient 324°.5 pour la longitude vraie au 1/1/1847, valeur pas très éloignée de la valeur réelle. La méthode de Le Verrier aurait donc pu aboutir en s'appuyant sur le rayon vecteur, à condition d'avoir des données sur le rayon.
Pour $\alpha = 1/1.95$, on trouve $\varepsilon' \simeq 230°$, $m' = 1.8$, $e' = 0.19$, valeurs qui sont apparentées à celles trouvées par Le Verrier.
Les calculs ont été refaits avec 500 puis avec 25 observations également réparties entre 1680 et 1850, et ils conduisent à des résultats quasi identiques.

30. On rappelle que Le Verrier n'avait retenu dans ses calculs que C_2, D_3 et E_3.
31. On rappelle que $h' = e' \cos \varpi'$ et $l' = e' \sin \varpi'$.
32. C'est la situation à laquelle Le Verrier avait été confronté lors de sa première solution, situation qui l'avait déstabilisé pendant plusieurs semaines, selon Biot ; voir § 5.2.4.
33. On rappelle que l'unité pour le calcul est la masse du Soleil, mais les résultats seront donnés en masses rapportés à la masse réelle de Neptune.
34. La largeur des intervalles de validité varie avec α ; voir la figure 7.12.

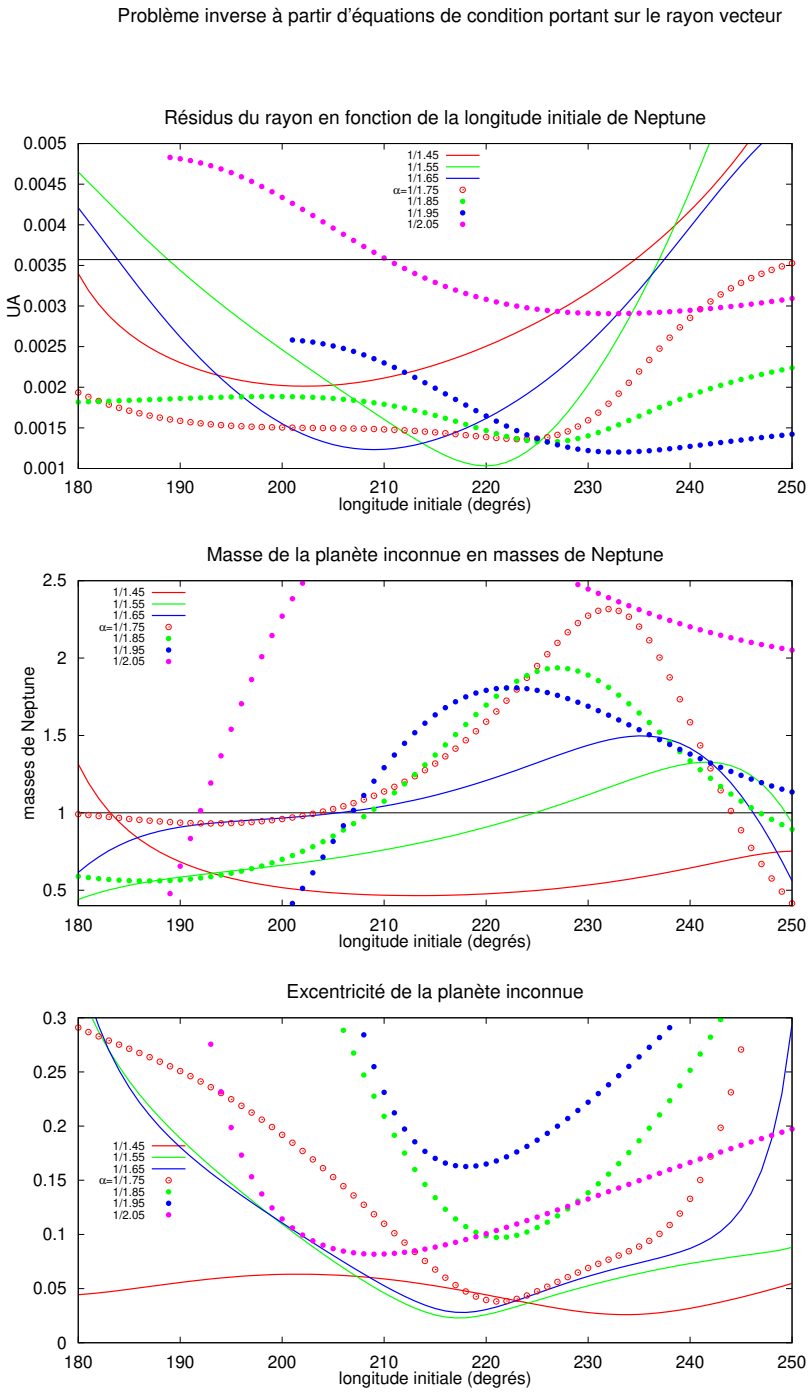


FIGURE 7.12 – Résolution des équations de condition portant sur le rayon vecteur pour divers rapports des demi-grands axes, en fonction de la longitude initiale (ε') de la planète perturbatrice. En haut, on a tracé les résidus (en au) sur le rayon vecteur, au milieu la masse de la planète troublante en masses de Neptune et en bas l'excentricité. On constate que les minima des résidus pour α plus petit que 1/1.75 sont assez plats.
On a filtré par les conditions $m' > 0.4$ et $\varepsilon' \in [180°, 250°]$. Le minimum absolu des résidus se produit pour $\alpha = 1/1.55$, avec $\varepsilon' = 220°$, $m' = 0.9$ et $e' = 0.03$, valeurs pas très éloignées des valeurs réelles.

7.5.3 Résultats

On fait varier $1/\alpha$ entre[35] 1.45 et 2.05 avec un pas de 0.1 ; pour chaque valeur de α, on détermine la longitude optimale ε' de la planète troublante au 1/1/1800, l'excentricité et la longitude du périhélie correspondantes, ce qui permet d'estimer la longitude vraie de la planète troublante au 1/1/1847. Ces résultats sont donnés à la table 7.5. Pour comparaison, on donne dans la dernière colonne les valeurs réelles des paramètres.

TABLE 7.5 – Valeurs des paramètres de la planète perturbatrice pour le problème inverse portant sur le rayon vecteur

Valeurs des paramètres de la planète perturbatrice au minimum des résidus								Valeurs exactes
$1/\alpha$	1.45	1.55	1.65	1.75	1.85	1.95	2.05	1.57
ε'	202°	220°	209°	224°	226°	233°	232°	225°
e'	0.06	0.03	0.06	0.04	0.11	0.25	0.14	0.009
ϖ'	312°	117°	277°	323°	275°	233°	205°	45°
m' (en masses de Neptune)	0.50	0.91	1.03	1.87	1.93	1.60	2.39	1
ℓ'_{47} (longitude vraie au 1/1/47)	318°	324°	307°	309°	313°	335°	316°	327°

On a tracé fig. 7.13 les variations de la longitude optimale de l'époque et de la longitude vraie au 1/1/1847 de la planète perturbatrice pour les 7 rapports des demi-grands axes avec des données (50 en tout) également réparties sur l'intervalle $1680-1850$.
On observe que, comme pour les équations de condition portant sur la longitude, la longitude moyenne au 1/1/1800 et la longitude vraie au 1/1/1847 dépendent relativement peu du rapport des demi-grands axes.
Pour $\alpha = 1/1.55$, valeur correcte, la planète aurait été localisée à moins de 3° de la position exacte, et la planète aurait été localisée à moins de 10° pour toute valeur du rapport des demi-grands axes (sauf pour le rapport 1/1.65 où des petits dénominateurs doivent perturber les résultats).
On constate qu'au fur et à mesure que l'on augmente α (à partir de 1.85), l'excentricité a tendance à augmenter, ainsi que la longitude du périhélie, effets qui ont tendance à rapprocher le périhélie de la planète perturbatrice de la position correcte à la conjonction, car la longitude d'Uranus au moment de la conjonction est 273°, tout ceci ayant pour effet de réduire la distance entre Uranus et Neptune au moment de la conjonction : on généralisera ce comportement [attraction de la conjonction de 1822] au § 8.8. On constate aussi, phénomène déjà constaté et facile à expliquer, que la masse de la planète perturbatrice a tendance à augmenter avec la distance au Soleil.

35. On utilise ces valeurs un peu décalées, car le calcul pour 1.6 conduit à une erreur.

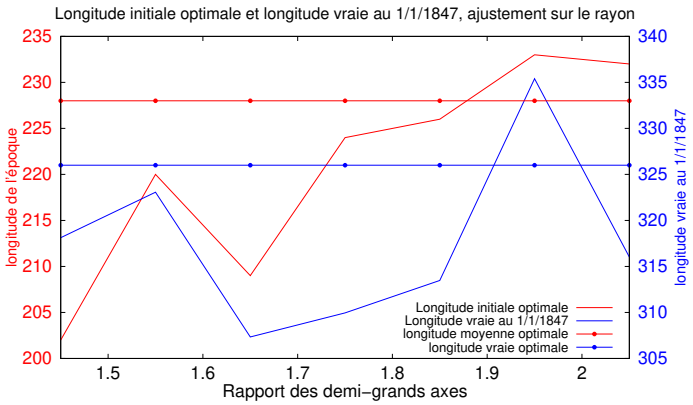


Figure 7.13 – Longitude moyenne optimale au 1/1/1800 (en rouge) et longitude vraie au 1/1/1847 (en bleu) avec les valeurs de référence dans des couleurs correspondantes. La planète aurait été localisée à moins de 10° de la position réelle pour α compris entre $\frac{1}{2.05}$ et $\frac{1}{1.55}$. La petite anomalie pour $\alpha = 1/1.65$ est vraisemblablement due à la présence de petits dénominateurs. Pour ce calcul, on dispose de 50 données 'd'observation' équitablement réparties.

7.6 Conclusions

Dans ce chapitre on a répondu positivement à l'interrogation pressante d'Airy :

À la figure 7.1, on a constaté que la nouvelle théorie d'Uranus, construite par Le Verrier, obtenue en corrigeant les erreurs de longitude, corrigeait aussi l'essentiel des erreurs du rayon vecteur, ce qui est une réponse positive à G. B. Airy

On a montré que l'on pouvait faire la même constatation en utilisant la méthode LLY.
On a montré aussi que l'on pouvait raisonnablement localiser la planète qui perturbe Uranus, à partir d'un problème inverse portant sur le rayon vecteur, à condition de disposer d'un ensemble d'erreurs portant sur ce rayon vecteur, mais on a constaté qu'il n'existait pas de tel ensemble historique.

Chapitre 8

RÉSULTATS OBTENUS AVEC INPOP

Objectifs

Dans ce chapitre, on oublie (presque) complètement Le Verrier, ou du moins, on oublie les méthodes qu'il a utilisées : il ne sera pas question d'équations de condition. On reste toujours au XIXe siècle, avec les connaissances de l'époque, mais en disposant de l'outil INPOP ! (voir une brève description de INPOP au § 0.4). On connaît les 279 observations O_{LV} retenues par Le Verrier – sous la forme historique, avec des erreurs éventuelles d'observation – aux dates $\mathcal{E}$, sous la forme ($\mathring{\alpha}$, D)=(ascension droite, déclinaison).
À la section 1, on tente d'expliquer les irrégularités d'Uranus, en essayant de localiser une éventuelle planète qui troublerait Uranus.
À la section 2, on met en évidence l'influence de la masse de la planète perturbatrice sur cette localisation.
À la section 3, on examine l'influence de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique.
À la section 4, on examine ce qui se passerait si on affectait à la planète perturbatrice une excentricité de 0.1.
À titre d'exercice d'école, à la section 5, on détermine les résultats obtenus en choisissant comme paramètres initiaux pour la planète perturbatrice les paramètres finaux trouvés par Le Verrier.
À la section 6, on examine ce qui se serait passé si les calculs s'étaient arrêtés antérieurement à 1846.
À la section 7, on utilise l'algorithme de Metropolis-Hastings (algorithme MCMC) pour essayer de déterminer les éléments de l'orbite de Neptune, sans aucune connaissance préalable sur sa localisation.
Enfin, à la section 8, on met en évidence le rôle déterminant joué par la conjonction de 1822.

Sommaire

8.1 Localisation de la planète qui trouble Uranus **281**
8.1.1 Établissement du contexte planétaire au 1/1/1800 281
8.1.2 Première localisation de la planète perturbatrice 282
8.1.3 Amélioration de cette première solution 285

8.1.4 Valeurs finales des paramètres . . . 287
8.1.5 Incertitudes sur les résultats . . . 287
8.1.6 Algorithme informel pour déterminer les paramètres optimaux de Neptune . . . 288
8.2 Influence de la masse de Neptune . . . 290
8.2.1 Détermination de la longitude au moment de la découverte, avec une masse double de celle d'Uranus . . . 290
8.2.2 Ajustement sur la masse avec une excentricité nulle . . . 291
8.2.3 Ajustement sur la masse pour $e' = 0.1$ et 6 valeurs pour ϖ' . . . 292
8.3 Influence de l'inclinaison de l'orbite . . . 293
8.4 Influence de l'excentricité . . . 294
8.4.1 Présentation des calculs effectués dans cette section . . . 294
8.4.2 Résidus selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes . . . 294
8.4.3 Résidus minimaux selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes . . . 298
8.4.4 Longitudes moyenne et vraie en fonction du rapport des excentricités . . . 299
8.5 Calculs avec les paramètres trouvés par Le Verrier . . . 300
8.6 Influence de la date des calculs . . . 301
8.6.1 Cas d'une excentricité nulle . . . 301
8.6.2 Cas $e' = 0.1$ et $\varpi' = 270°$ . . . 304
8.6.3 Calculs avec ajustement sur les 7 paramètres de Neptune . . . 306
8.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 308
8.7.1 Principe de l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 309
8.7.2 Objectifs visés en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings . . . 310
8.7.3 Recherche d'orbites circulaires pour Neptune . . . 310
8.7.4 Recherche d'orbites elliptiques pour Neptune . . . 313
8.7.5 Détermination de la masse de Neptune . . . 315
8.7.6 Évolutions simultanées des 7 paramètres de Neptune . . . 318
8.7.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings avec des observations modernes 'exactes' . . . 326
8.8 Importance de la date de conjonction héliocentrique d'Uranus et de Neptune . . . 327
8.8.1 Cas d'orbites circulaires pour Neptune . . . 327
8.8.2 Cas d'orbites elliptiques . . . 328
8.8.3 Rôle de l'excentricité dans le placement de Neptune . . . 332
8.8.4 Analyse de Tisserand . . . 333
8.8.5 Conclusion. Bilan du rôle important joué par la conjonction de 1822 . . . 334

8.1 Localisation de la planète qui trouble Uranus

Écarts $O-C$. Observable. Résidu (encadré 15)

Le paramètre que l'on retient pour former les $O-C$ (= observés - calculés), et que l'on appellera par la suite **observable**, peut être la longitude vraie d'Uranus, ou bien sa longitude moyenne, ou mieux la combinaison ascension droite + déclinaison.
Pour Le Verrier, l'observable est essentiellement la longitude vraie (héliocentrique ou géocentrique), mais parfois aussi l'ascension droite. Pour Adams, c'est la longitude moyenne.
Avec INPOP, on utilisera aussi la longitude héliocentrique (ou géocentrique), mais le plus souvent l'observable sera l'ascension droite ($\mathring{\alpha}$), combinée à la déclinaison (D), ce qui sera noté symboliquement $[\mathring{\alpha} : D]$; si on dispose de n observations aux époques $(t_i)_{1\leq i\leq n}$, le vecteur $O-C$ aura $2n$ composantes et le **résidu** est l'écart quadratique entre O et C, i.e.

$$\text{résidu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathring{\alpha}_O(t_i) - \mathring{\alpha}_C(t_i))^2 + (D_O(t_i) - D_C(t_i))^2}{2n}}$$

Dans certains cas, on considérera des résidus algébriques, qui sont les valeurs numériques prises par les premiers membres d'un système d'équations résolu par les moindres carrés, quand on reporte la solution dans ces premiers membres. Le système est parfaitement résolu si tous les résidus algébriques sont nuls, ce qui, bien sûr, ne se produit jamais pour les problèmes de mécanique céleste, qui sont toujours entachés d'erreurs d'observation. Voir aussi encadré 13, p. 211.

Il faut prendre garde au fait que les observations retenues par Le Verrier sont en coordonnées apparentes de la date. Pour les comparer aux éphémérides successives, il faudra faire les réductions nécessaires, voir le détail à l'encadré 9 p. 132 et [Kaplan, 1989] ; on utilise aussi des routines SOFA (voir quelques détails sur SOFA au § 0.4)

8.1.1 Établissement du contexte planétaire au 1/1/1800

Dans ce chapitre, on utilise de façon intensive INPOP, le logiciel de calcul des éphémérides de l'IMCCE, mis au point par Agnès Fienga et Jacques Laskar ([Fienga, 2019] et voir § 0.4.4).

Les connaissances astronomiques sous-jacentes sont celles du milieu du XIXe siècle : le Système solaire a pour limite Uranus, on connaît peu d'astéroïdes et bien sûr, on ne connaît pas la relativité générale. Pour pouvoir comparer nos résultats avec les données de Le Verrier, on commence par déterminer, à l'aide d'INPOP, les positions de tous les objets du Système solaire, au 1/1/1800, dans l'ICRF [1], et en particulier celles des 7 planètes connues à l'époque de Le Verrier. On vérifie les positions trouvées au 1/1/1800 en lançant INPOP avec ces positions dans les paramètres initiaux pour le retour en 2000 et on constate que l'on retombe pratiquement sur les valeurs initiales (celles de 2000).
Une fois cette opération effectuée, on utilisera, par la suite, une version simplifiée d'INPOP correspondant aux connaissances de l'époque : Système solaire limité à Uranus et pas de relativité générale...
Et on ajoutera une huitième planète, que l'on appellera par commodité Neptune, et dont on fixera initialement les éléments elliptiques en fonction des buts recherchés. Rappelons dans l'encadré 16, p. 282 les contraintes liées à l'utilisation de INPOP :

1. Pour l'ICRF, voir § 0.4.6

Nombre de paramètres initiaux à imposer pour la planète troublante (encadré 16)

Pour faire ses calculs, Le Verrier et Adams n'avaient eu qu'à fixer a priori le demi-grand axe de la planète inconnue, et à choisir une trajectoire dans l'écliptique (J1800), les autres paramètres étant déterminés par leurs calculs. Avec INPOP, il faut fixer **tous** les paramètres initiaux de toutes les planètes, en particulier ceux – inconnus ! – de la planète perturbatrice, afin de pouvoir effectuer l'intégration numérique complète du système différentiel géré par INPOP. Il faut ensuite programmer l'ajustement d'un certain nombre de ces paramètres, selon une démarche qui est présentée à la table 8.3. Le problème est : comment choisir les paramètres initialement imposés à Neptune ? On donne des éléments de réponse dans les paragraphes suivants.

8.1.2 Première localisation de la planète perturbatrice

8.1.2.1 Impossibilité de concilier observations et prédictions des positions d'Uranus en l'absence de Neptune

On met ici la masse de Neptune à 0, ce qui signifie que le vrai Neptune n'existe pas, qu'il n'y a pas de huitième planète. Avec cette nouvelle configuration, on lance INPOP (version simplifiée) afin de déterminer les positions des 7 planètes principales, en particulier celles C (ascensions droites, déclinaisons) d'Uranus, aux dates $\mathcal{E}$ retenues par Le Verrier. On constate qu'il y a des écarts importants avec les positions observées O_{LV} d'Uranus à ces mêmes dates. On essaie de réduire ces écarts. Pour cela, on programme l'utilisation d'INPOP (voir le détail de la programmation table 8.3) afin d'ajuster les paramètres d'Uranus en vue de réduire les écarts $O_{LV} - C$. On constate qu'il n'est pas possible de réduire complètement ces écarts en ajustant seulement les éléments d'Uranus : il reste un résidu quadratique global de 13 as, ce qui est largement au-dessus des erreurs d'observation admises. Quelle est la cause d'un tel résidu ?
On a vu que, historiquement, il avait été avancé plusieurs causes possibles, évoquées au début du chapitre 5. On retient, ici aussi, comme cause possible, la présence d'une planète extérieure à Uranus, planète que l'on va essayer de localiser.

8.1.2.2 Impossibilité de localiser la planète perturbatrice en un seul calcul

On fait donc l'hypothèse que le résidu de 13 as dans la position d'Uranus est dû à l'action d'une planète extérieure. Mais on n'a aucune idée a priori de l'endroit où une telle planète peut se trouver. Si pour la localiser, il suffit d'une valeur approchée de sa longitude à un instant donné (ce qui sera le cas pour le vrai Neptune), pour le calcul de sa position, il faut déterminer les éléments orbitaux de cette planète.
L'utilisation d'INPOP exige que le logiciel connaisse tous les paramètres du système, y compris ceux de la planète inconnue (voir encadré 16, p. 282) !
On peut imaginer de fixer des valeurs complètement arbitraires à ces paramètres, puis d'espérer les ajuster avec INPOP en essayant de réduire les $O - C$ d'Uranus ; cette approche brutale ne fonctionne pas : les calculs divergent très rapidement. Il faut donc fractionner les calculs et procéder par étapes successives.
Par contre, on verra (§ 8.7.1) que l'on obtient, sans connaissance préalable, des résultats partiellement exploitables en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings.

8.1.2.3 Stratégie adoptée

Voici, après de nombreux essais, comment nous allons procéder.
Une première étape sera de déterminer une orbite circulaire située dans l'écliptique J1800. Par

orbite circulaire dans l'écliptique, on entend une orbite dont les éléments elliptiques osculateurs, rapportés à l'écliptique J1800, vérifient $h' = k' = p' = q' = 0$, mais cela ne signifie pas que l'orbite réelle soit un vrai cercle, ni que cette orbite reste toujours exactement dans cet écliptique.
D'autre part, il faut fixer une masse à cette planète perturbatrice. Comme il n'y a aucun indice pour cette masse, on choisit dans un premier temps la masse d'Uranus, mais il faudra faire évoluer cette masse dans les calculs ultérieurs.
Il faut préciser la valeur α du rapport entre le demi-grand axe de la planète perturbatrice et celui d'Uranus. À l'aide de la 'loi' de Bode (voir encadré 12, p. 168), on pourrait estimer (comme l'ont fait Le Verrier et Adams dans un premier temps) que la planète perturbatrice se trouve en moyenne au double de la distance d'Uranus, et donc on choisirait $\alpha = 2$ dans un premier temps. En fait, on va choisir une série de valeurs de α (et donc de a') entre 1.3 et 2.2 avec un pas de 0.1. Après avoir fait une première série de calculs, on constate que la zone intéressante se situe en fait vers 1.6 et on rajoute alors quelques valeurs pour α autour de 1.6.
Par contre, on n'a aucune idée a priori de la position de la huitième planète sur son orbite. On va donc procéder à un balayage complet sur la longitude ε' de l'époque, avec un pas de 1°.

8.1.2.4 Variations des résidus en fonction de la longitude de l'époque

Le principe est le suivant : pour chaque triplet (a', m', ε'), on lance INPOP (simplifié) pour ajuster les éléments elliptiques d'Uranus afin de réduire les $O_{LV} - C$; on retient la valeur du résidu correspondant après l'ajustement et on note $\varepsilon'_{min}(\alpha, m')$ la valeur de ε' conduisant au minimum de ces résidus ; la façon de procéder à cet ajustement est détaillée à la table 8.3.

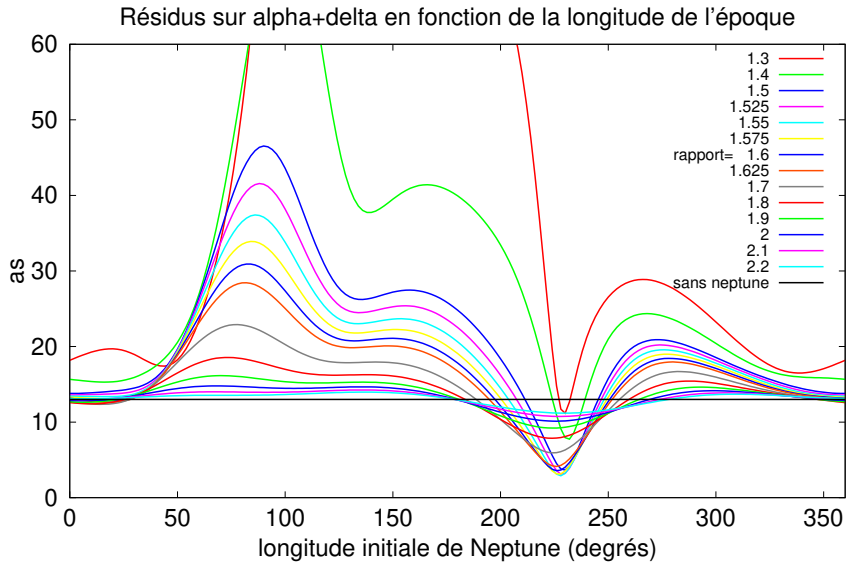


FIGURE 8.1 – Résidus sur l'observable ($[\mathring{a} : D]$) d'Uranus selon la position initiale de Neptune. On observe que les minima des différentes courbes se produisent dans une zone restreinte. Pour $\alpha = 1.3$, le maximum se situe vers 160 as et pour $\alpha = 1.4$, c'est de l'ordre de 80 as. Quand on ajuste sans Neptune (masse mise à 0), il reste, après ajustement, un résidu de l'ordre de 13 as. On utilise les valeurs trouvées par ce premier calcul pour former le graphe de la figure 8.2.

On a tracé fig. 8.1 les résidus trouvés pour l'observable en fonction de ε' pour chacune des 14 valeurs choisies pour α et fig. 8.2, on trace les variations de ε'_{min}.
On constate que tous les minima se produisent autour de $\varepsilon' = 225°$ pour toute valeur de α.
On s'efforcera de prouver à la section 8 que cette stabilité des résultats est en grande partie liée à la conjonction de 1822, en s'appuyant, pour une part, sur l'analyse faite par Tisserand.

8.1.2.5 Longitude optimale en fonction du rapport des demi-grands axes

Pour la valeur choisie de m' ($m' = m_{Ura}$), on trace (en haut) le graphe de ε'_{min} (valeur de ε' qui minimise les résidus de l'observable d'Uranus pour une valeur de α donnée) en fonction de α, ce qui est fait à la figure 8.2. On trace sur le même graphe les résidus correspondants.
On constate que le minimum des résidus se produit pour $\alpha = 1.525$; on a alors $\varepsilon'_{min} = 226°$.
Sur le graphe du bas, on trace les longitudes vraies à la date de la découverte en fonction de α.
On constate que l'on tombe sur la bonne localisation (disque bleu) pour la bonne valeur de α.

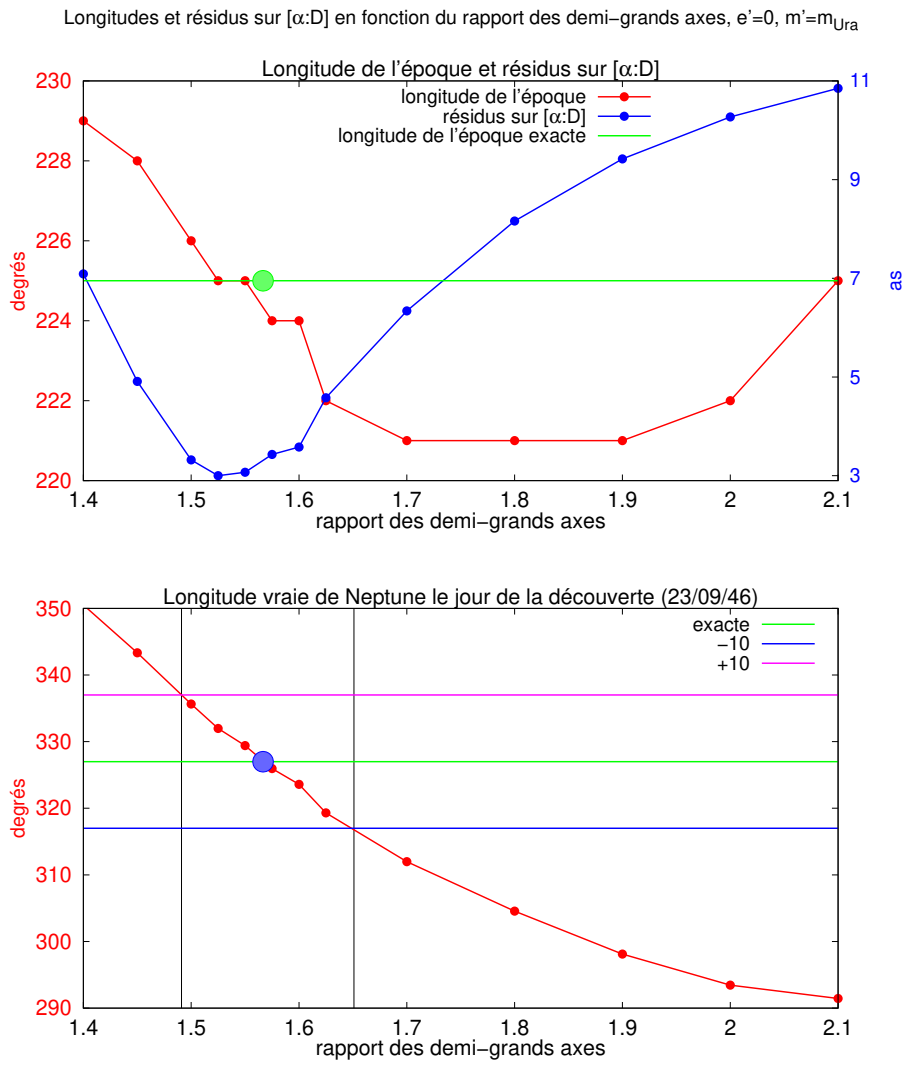


FIGURE 8.2 – En haut, longitude de l'époque qui minimise les résidus et résidus correspondants en fonction du rapport des demi-grands axes. En bas, longitude héliocentrique vraie de Neptune au moment de la découverte en fonction du rapport des demi-grands axes. On a imposé ici $m' = m_{Ura}$. On aurait trouvé la planète à moins de 10° de la position correcte (rond bleu) en choisissant le rapport des demi-grands axes compris entre 1.49 et 1.65. On rappelle que ce calcul est fait avec une excentricité nulle pour la planète perturbatrice. La bonne valeur de α (1.57) donne une bonne valeur (225°) de la longitude de l'époque (rond vert) ainsi qu'une bonne valeur (327°) de la longitude vraie (rond bleu) le jour de la découverte. Cette bonne prédiction tient en grande partie au fait que l'orbite du vrai Neptune est quasi circulaire.

8.1.3 Amélioration de cette première solution

On essaie d'améliorer en deux temps les résultats partiels précédents. Pour chaque valeur retenue pour a', on part du triplet $(a', \varepsilon'_{min}(a', m'), m')$ (ici $m' = m_{Ura}$), puis :
1) on ajuste les éléments d'Uranus et $(a', \varepsilon', m', p', q')$ de Neptune.
2) partant des valeurs finales trouvées au 1), on ajuste les 6+7 éléments elliptiques d'Uranus et de la planète perturbatrice.
On rappelle qu'il est indispensable de scinder l'approche en plusieurs étapes, sous peine de divergence rapide des calculs. Voici le résultat que l'on obtient pour la première étape :

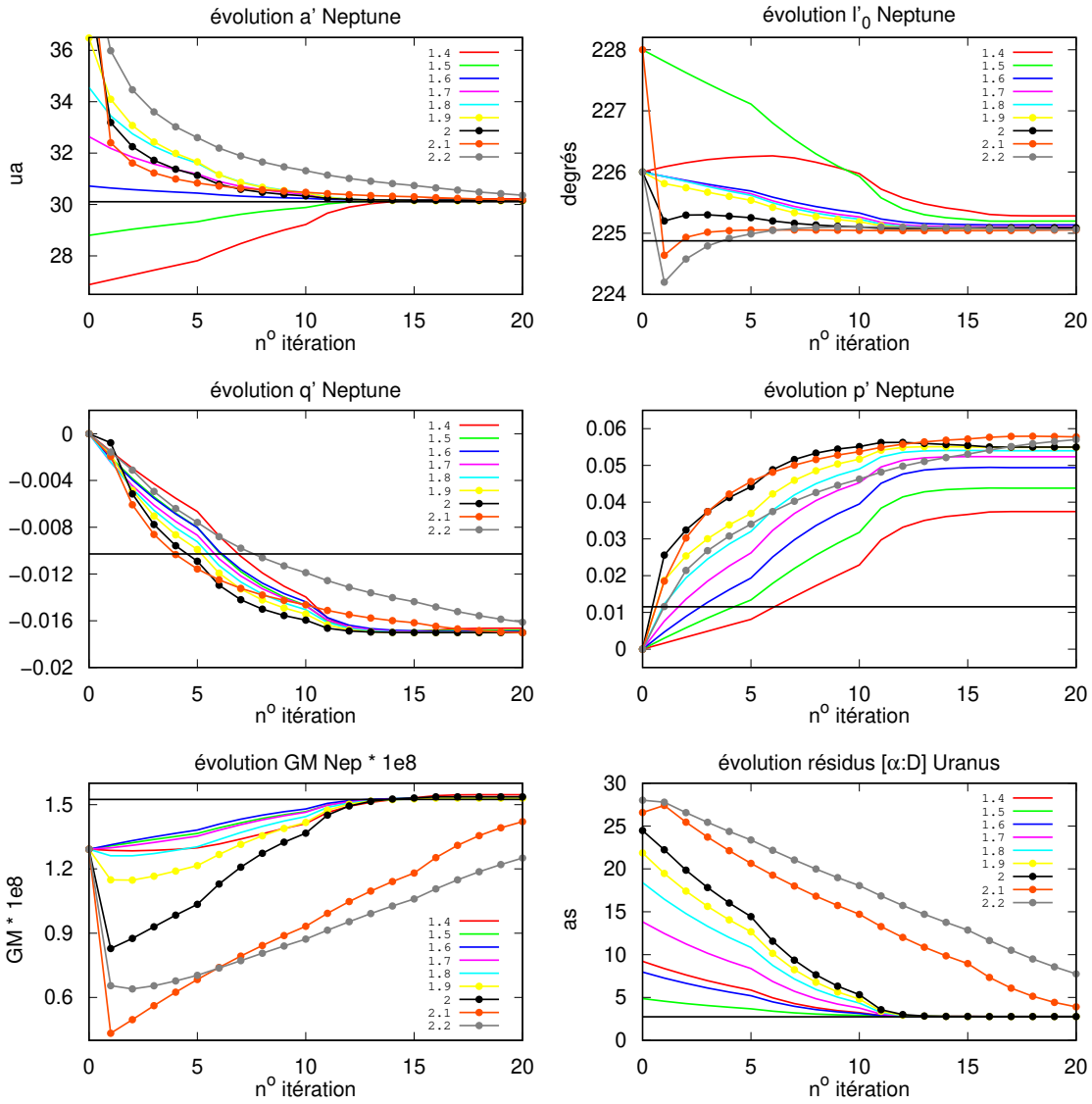


FIGURE 8.3 – Évolution des éléments elliptiques (relatifs à l'écliptique) a', l'_0, q', p', Gm' de Neptune en partant de 9 valeurs différentes du demi-grand axe, en fonction du nombre d'itérations. On constate la très bonne convergence générale ; la valeur de p' n'est pas encore bien stabilisée, mais elle le sera à l'étape suivante, voir la figure 8.4. Les valeurs de départ du calcul étaient celles obtenues après un premier ajustement du ε' de Neptune. La valeur de départ pour la masse était dans tous les cas la masse d'Uranus et celle de (p', q') était dans tous les cas $(0, 0)$. Les valeurs de référence sont tracées en noir.

Et voici ce que l'on obtient après la deuxième étape.

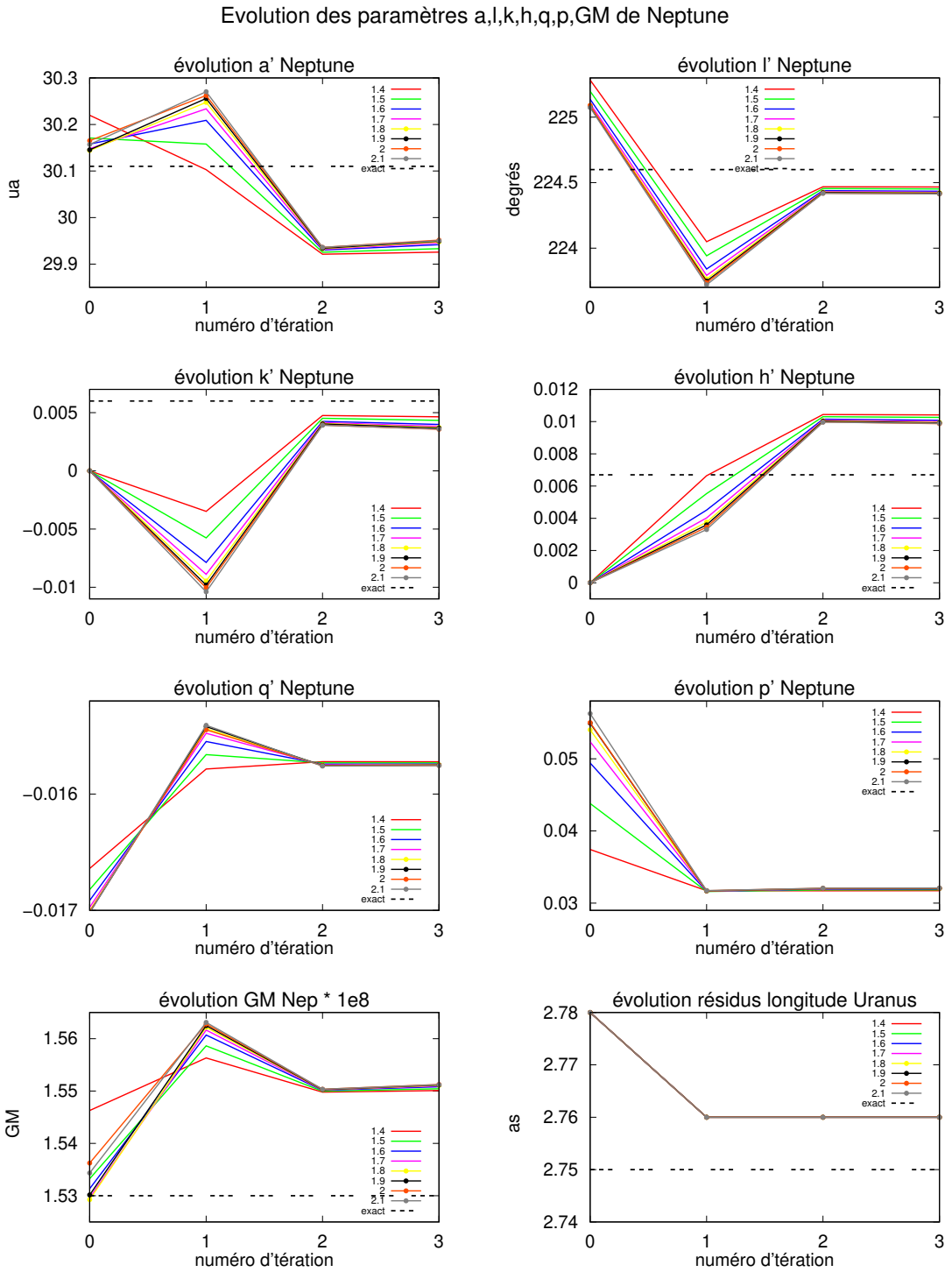


FIGURE 8.4 – Évolution des éléments de Neptune (relatifs à l'écliptique) au fil des itérations successives quand on ajuste en plus des éléments d'Uranus les a', l', k', h', q', p' et Gm' de Neptune. Les valeurs de départ étaient celles obtenues en fin d'itération dans le calcul précédent, après ajustement de 5 éléments de Neptune, et ces valeurs se lisent à la figure 8.3 : on rappelle qu'il est impossible de faire les ajustements simultanément et arbitrairement sur les 13 éléments (sauf si l'on part de valeurs quasi exactes), car alors les calculs divergent rapidement.

8.1.4 Valeurs finales des paramètres

On a placé dans la table 8.1 les valeurs finales, à la date du 1/1/1800, que l'on vient de déterminer, d'une part pour les éléments elliptiques de Neptune relatifs à l'ICRF et d'autre part pour ceux relatifs à l'écliptique et l'équinoxe moyen J1800.

TABLE 8.1 – Valeurs finales des paramètres de Neptune quand on ajuste les 6 éléments elliptiques d'Uranus ainsi que les 7 de Neptune. Sur les deux premières lignes, le plan de référence est l'ICRF, et sur les deux dernières, c'est l'écliptique, équinoxe moyen J1800. Les valeurs 'exactes' pour l'écliptique sont tirées de [Simon, 1994] et ont été actualisées pour le 1/1/1800 ; elles ont été converties en données dans l'ICRF à l'aide de routines SOFA (§ 0.4.6)

Valeurs finales des éléments elliptiques de Neptune au 1/1/1800 après ajustements pendant 16 itérations												
Paramètres		a'	l'_0	k'	h'	q'	p'	e'	ϖ'	i'	Ω'	Gm'
ICRF	INPOP	29.95	227.°95	0.0030	0.0101	0.186	0.0320	0.0105	73.°6	21°8	9.°7	1.548e-8
	Exact	30.11	227.°64	0.0060	0.0067	0.193	0.0117	0.0090	48.°3	22°3	3.°5	1.524e-8
Eclip	INPOP	29.95	224.°41	0.0036	0.0099	-0.0157	0.0321	0.0105	70.°0	4.°1	116°	1.548e-8
	Exact	30.11	224.°58	0.0063	0.0064	-0.0099	0.0120	0.0090	45.°3	1.°8	129°	1.524e-8

On constate la bonne estimation du demi-grand axe, de la longitude de l'époque, de l'excentricité et même de la longitude du périhélie, paramètre sensible, vu la faible excentricité.
On trouve pour l'inclinaison i' sur l'ICRF $\sin\frac{i'}{2} = \sqrt{0.186 * *2 + 0.032 * *2} = 0.1889$, ce qui donne $i' = 21.°8$, et l'inclinaison par rapport à l'écliptique 4°1. On trouve aussi $e' = 0.0105$, à comparer avec la valeur réelle 0.0090 et $\varpi' = 73.°6$, à comparer avec la valeur correcte, $48.°3$. On obtient avec les valeurs finales de la table 8.1 la valeur suivante pour la longitude héliocentrique vraie apparente de Neptune le jour de la découverte : $\boxed{327°41'}$ – à comparer à $327°24'$ – ce qui est excellent. **Avec INPOP, on aurait donc localisé Neptune à 17′ près.**

8.1.5 Incertitudes sur les résultats

Quel degré de confiance peut-on accorder aux valeurs trouvées pour les éléments elliptiques de Neptune ?
Pour répondre à cette question, on va estimer les incertitudes formelles de chaque paramètre ajusté. Pour cela, on se place en fin d'itération, une fois que les paramètres se sont bien stabilisés. Soit J la matrice jacobienne i.e. la matrice des dérivées de l'observable (ici c'est $[\mathring{\alpha} : D]$) par rapport aux divers paramètres à faire évoluer ; J est une $(n, p)-$matrice où n est le nombre d'équations de condition et p le nombre de paramètres à faire évoluer. On forme la matrice de variances-covariances des paramètres ([Pelat, 2002], [Manche, 2011]) :

$$Cov(J) = [\sigma_{ij}] = \sigma^2({}^tJJ)^{-1} \tag{8.1}$$

où σ^2 est la variance des résidus dont une estimation est fournie par

$$\sigma^2 = \frac{\|(O_{LV} - C) - JX_0\|^2}{n - p} \tag{8.2}$$

avec X_0 la solution par les moindres carrés de l'équation $JX = (O_{LV} - C)$ et C la valeur calculée pour les positions d'Uranus en fin d'itération.
De la matrice des variances-covariances, on déduit les erreurs formelles $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$ sur les paramètres ajustés, erreurs dont les carrés sont les éléments de la diagonale de $Cov(J)$.
Si on suppose une répartition gaussienne des résidus, alors l'estimation de chaque paramètre i suit la loi de Gauss de variance σ_i^2.

On a placé dans la table 8.2 les valeurs des incertitudes formelles σ_i sur les éléments elliptiques d'Uranus et de Neptune, quand on ajuste a', l', Gm', puis a', l', q', p', Gm' et enfin a', l', k', h', q', p', Gm'.

On vérifie que les valeurs 'exactes' sont bien dans l'intervalle de confiance.
On constate que les incertitudes augmentent quand on augmente le nombre de paramètres ajustés. On voit par exemple que les valeurs finales de h' et k' n'ont pas de signification : les incertitudes sont 8 fois plus grandes que les valeurs correctes. C'est ce qui s'est produit pour Le Verrier, qui avait trouvé $e' = 0.102$ contre 0.0090 pour la valeur réelle et $\varpi' = 284°$ contre 45°.

TABLE 8.2 – Incertitudes formelles σ_i sur les les éléments elliptiques d'Uranus et de Neptune quand on ajuste les 6 éléments d'Uranus et tour à tour 3, puis 5 et enfin 7 éléments de Neptune.

Incertitudes formelles sur les éléments d'Uranus						
Ajustement de Uranus + ↓	$a(ua)$	$l(as)$	k	h	q	p
a', l', Gm'	2.0e-05	0.4	1.3e-06	1.3e-06	6.2e-07	5.9e-07
a', l', q', p', Gm'	2.0e-05	0.4	1.4e-06	1.4e-06	7.7e-07	7.5e-07
a', l', k', h', q', p', Gm'	7.5e-05	0.5	3.4e-06	1.5e-06	7.7e-07	7.5e-07

Incertitudes formelles sur les éléments de Neptune							
Ajustement de Uranus + ↓	$a'(ua)$	$l'(as)$	k'	h'	q'	p'	Gm'
a', l', Gm'	0.19	112					6.0e-10
a', l', q', p', Gm'	0.19	154			0.0033	0.0024	6.1e-10
a', l', k', h', q', p', Gm'	1.7	230	0.069	0.04	0.0034	0.0024	9.2e-10
Valeurs 'exactes' en 1800	30.1	225°	0.0088	0.0068	-0.010	0.011	1.52e-8

8.1.6 Algorithme informel pour déterminer les paramètres optimaux de Neptune

On a représenté table 8.3 le schéma de l'algorithme utilisé pour obtenir la longitude de l'époque optimale de la planète troublante quand on impose une excentricité nulle pour cette planète troublante. On utilisera systématiquement les positions dans l'ICRF au 1/1/1800.
Le but de l'algorithme est de déterminer pour une valeur de α donnée les valeurs des résidus en fonction de ε' (fonction notée `res`), puis la valeur de ε' qui minimise cette fonction `res`, valeur notée `long_min`(α).
Cet algorithme sera utilisé tout au long de ce chapitre, en l'étoffant selon les besoins, en ajoutant une boucle supplémentaire pour un paramètre que l'on voudrait faire évoluer, par exemple e'.
Le tracé de la fonction `res` obtenu à partir de cet algorithme est représenté fig. 8.1. Le tracé des fonctions `long_min` et `res_min` est fait à la figure 8.2.

TABLE 8.3 – Algorithme pour déterminer les résidus de l'observable d'Uranus en fonction de la longitude de l'époque de Neptune (c'est la fonction `res`) pour un rapport α des demi-grands axes donné ; on peut alors déterminer la valeur de la longitude de l'époque optimale pour placer Neptune sur l'écliptique pour ce rapport α (c'est la valeur de la fonction `long_min` en α) et on détermine aussi la valeur `min` du résidu final (c'est la valeur de la fonction `res_min` en α). Puis, on fait varier le rapport des demi-grands axes.

---

6 premières planètes ← positions dans l'ICRF au 1/1/1800
| pour un compteur k variant entre 0 et 8 faire
| | $\alpha \leftarrow 1.4 + 0.1k$ # rapport des demi-grands axes a_{Nep}/a_{Ura}
| | $a' \leftarrow \alpha * 19.18$; # demi-grand axe de Neptune
| | $k' \leftarrow 0$; $h' \leftarrow 0$; # excentricité nulle pour Neptune
| | $q' \leftarrow 0$; $p' \leftarrow 0$ # position dans l'écliptique pour Neptune
| | $\mu = GM_{Sun} + GM_{Nep}$ # Masse de Neptune = Masse d'Uranus, par défaut
| | Pour j de 0 à 180 faire
| | | $\varepsilon' \leftarrow 2 * j$
| | | $l' \leftarrow \varepsilon'$ longitude moyenne de Neptune au 1/1/1800, équinoxe moyen 1800
| | | # Coordonnées cartésiennes de Neptune dans l'écliptique et équateur moyen 1800 au 1/1/1800
| | | ell_to_xyz($a'l'h'k'q'p'$, μ, X_ecl)
| | | # Coordonnées cartésiennes de Neptune dans l'ICRF avec %iauEcm06 (routine SOFA)
| | | $X\_eq = R(X\_ecl)$
| | | (xyz_to_ell(X_eq, μ, $a'l'k'h'q'p'$) # Éléments elliptiques de Neptune dans l'ICRF.
| | | $U \leftarrow U_0$ (U_0 éléments orbitaux d'Uranus en usage, à améliorer)
| | | pour un compteur variant entre 1 et nb faire
| | | | • on lance INPOP, on obtient des positions C (pour calculées) d'Uranus aux époques $\mathcal{E}$.
| | | | • on forme la matrice jacobienne J i.e. la matrice des dérivées partielles de l'observable par rapport aux 6 éléments orbitaux d'Uranus.
| | | | • on résout par les moindres carrés l'équation $J\,dU = O - C$ à l'inconnue dU, dU représentant les corrections à effectuer sur les éléments orbitaux d'Uranus.
| | | | • on corrige les éléments orbitaux d'Uranus : $U \leftarrow U + dU$.
| | | res(ε') = $\|O - C\|_2$
| | $min \leftarrow$ minimum de la fonction res ; ε'_{min}= imin(min)
| | long_min(α) = ε'_{min} ; res_min(α)=min
| $k \leftarrow k + 1$

Pour accélérer les calculs, on peut ne former la matrice jacobienne que lors des 2 ou 3 premières itérations.
Au passage, on utilise quelques routines SOFA (§ 0.4.6) : pour la date, pour le passage de l'écliptique à l'ICRF, pour la précession...

8.2 Influence de la masse de Neptune

8.2.1 Détermination de la longitude au moment de la découverte, avec une masse double de celle d'Uranus et une excentricité nulle pour la planète perturbatrice

Les calculs précédents ont été faits en affectant arbitrairement à Neptune la masse d'Uranus, et ces calculs ont été résumés à la figure 8.2.
Pour un premier test sur l'influence de la masse, on reprend une partie des calculs précédents en imposant pour Neptune une masse double de celle d'Uranus. Sur la figure 8.5, on a tracé dans le graphe supérieur la longitude de l'époque optimale de la planète perturbatrice et les résidus correspondants et dans le graphe du bas, la longitude vraie correspondante le jour de la découverte (23/9/46). La bonne valeur de cette longitude est obtenue pour un demi-grand axe plus élevé que dans le cas précédent, ce qui est tout à fait cohérent avec une masse imposée plus élevée : en première approximation, m' varie comme a'^3, ou mieux comme $(a' - a_{Ura})^3$. Pour plus de détails sur cette dépendance, voir § 9.3.3.

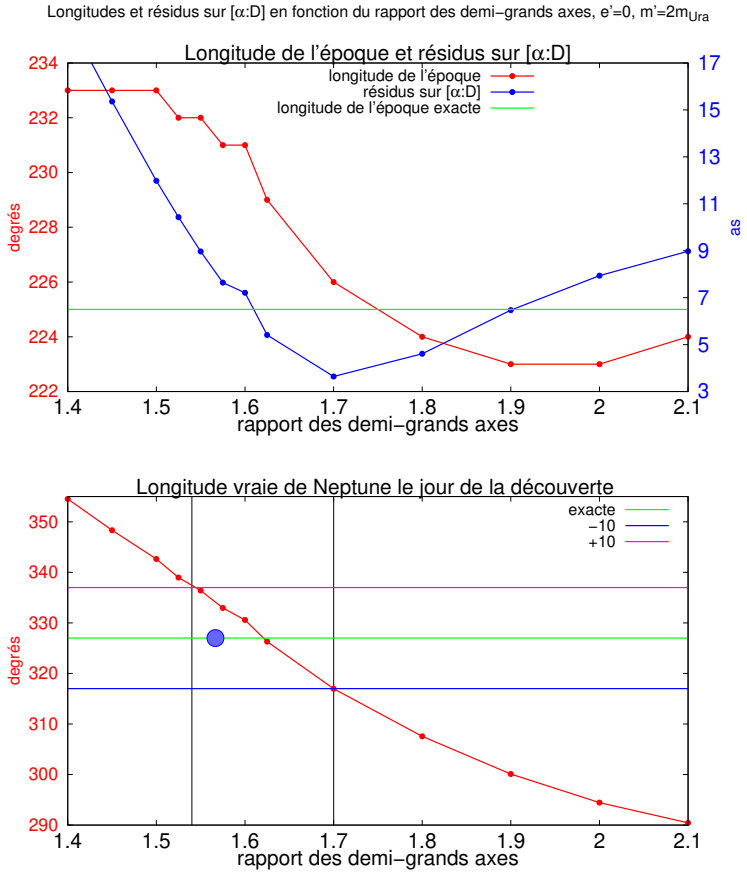


FIGURE 8.5 – En haut, longitude optimale de l'époque de la planète perturbatrice et résidus correspondants sur $[\mathring{\alpha} : D]$ d'Uranus en fonction du rapport des demi-grands axes. En bas, longitude héliocentrique vraie apparente de Neptune au moment de la découverte. On a imposé ici $m' = 2m_{Ura}$. On aurait trouvé la planète à moins de 10° de la position correcte (disque bleu) en choisissant le rapport des demi-grands axes compris entre 1.54 et 1.70. La bonne valeur de la position à la découverte aurait été obtenue ici pour un rapport égal à 1.62, valeur plus élevée que la valeur réelle (1.57), ce qui est cohérent avec une valeur plus élevée choisie pour la masse. On rappelle que ce calcul a été fait avec une excentricité nulle.

8.2.2 Ajustement sur la masse avec une excentricité nulle

On adapte l'algorithme de la table 8.3 pour examiner comment évolue la masse optimale de la planète perturbatrice quand on fait varier la valeur de son demi-grand axe.
On fige tous les paramètres de Neptune à part sa masse et sa longitude de l'époque ; en particulier on fixe $e' = 0$ et $i' = 0$. Pour chaque valeur α du rapport des demi-grands axes, on fait varier la longitude (ε') de l'époque avec un pas de 2° ; pour chaque valeur de cette longitude, on ajuste les paramètres d'Uranus ainsi que la masse de Neptune pendant une dizaine d'itérations. On note le résidu final de l'observable d'Uranus ainsi que la valeur de la masse de Neptune en fin d'itération. Ensuite, on détermine la longitude de l'époque ε'_α de Neptune qui minimise les résidus de l'observable et on note la masse GM_Nep_α correspondant à cette valeur de ε'. On a tracé les deux graphes $\alpha \to \varepsilon'_\alpha$ et $\alpha \to GM\_Nep_\alpha/GM\_exact$ à la figure 8.6.
À partir de ces données ponctuelles, on essaie d'ajuster une formule pour cette dernière fonction GM_Nep. Après essais, on a choisi une fonction du type $\alpha \mapsto a(\alpha - b)^c$. L'ajustement par gnuplot donne $b = 0.873$ et $c = 2.47$, valeur voisine de la valeur attendue, comme on peut le mesurer avec l'étude faite par Rawlins [Rawlins, 1970] et reprise au § 9.3.3

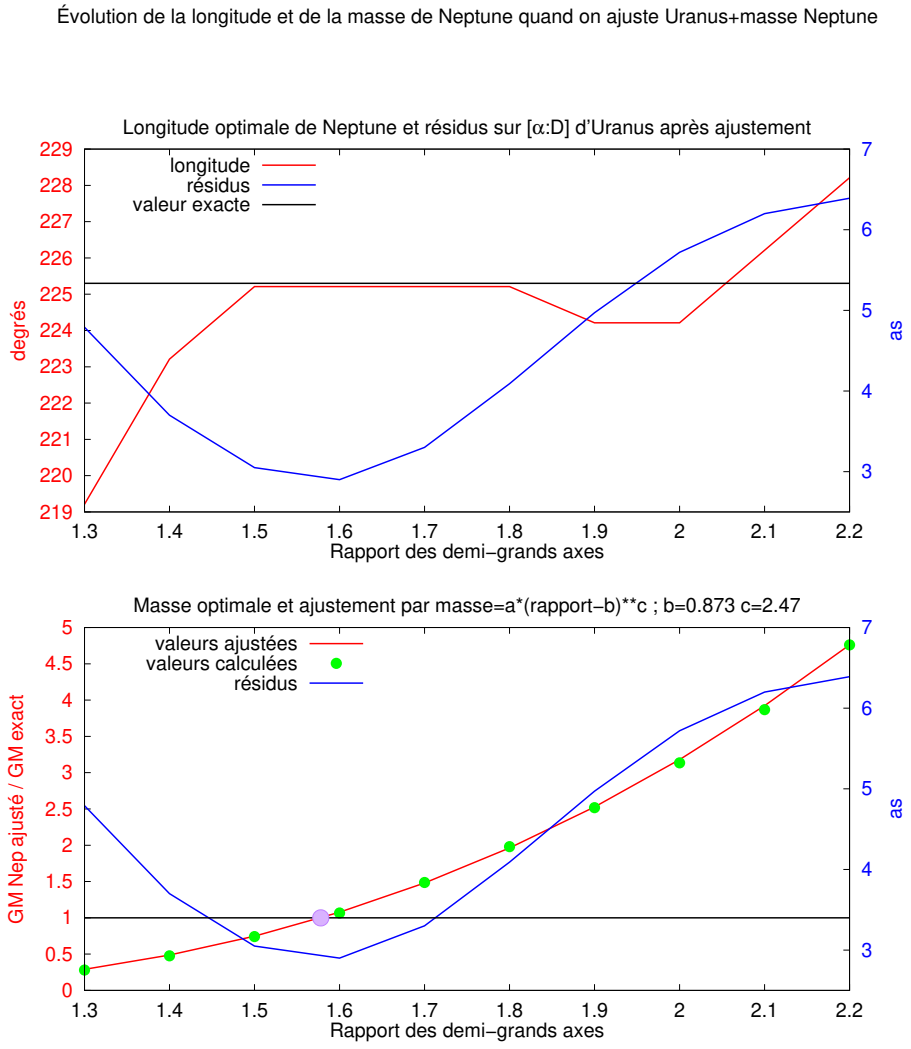


Figure 8.6 – Ajustement des éléments d'Uranus et de la masse de Neptune. (En haut) longitude de l'époque optimale et résidu sur $[\mathring{\alpha} : D]$ d'Uranus correspondant. (En bas) masses correspondantes et ajustement par une fonction puissance de ces valeurs. L'exposant trouvé, 2.47, est assez proche de la valeur attendue, 2.59 (voir § 9.3.3). On a reporté aussi sur les deux graphes les variations (en bleu) des résidus de l'observable en fonction du rapport des demi-grands axes. Encore une fois, avec la bonne valeur du rapport (1.57), on trouve la bonne valeur de la masse (disque violet).

8.2.3 Ajustement sur la masse pour $e' = 0.1$ et 6 valeurs pour ϖ'

On a refait ici les mêmes calculs qu'au § 8.2.2 mais avec $e' = 0.1$; il faut alors choisir des valeurs pour la longitude ϖ' du périhélie. Les résultats sont rassemblés à la fig. 8.7 ci-dessous ; on obtient des résultats voisins des calculs précédents (avec $e' = 0$), mais qui doivent être interprétés en tenant compte de cette longitude du périhélie ; l'interprétation est donnée dans la légende de cette figure 8.7.

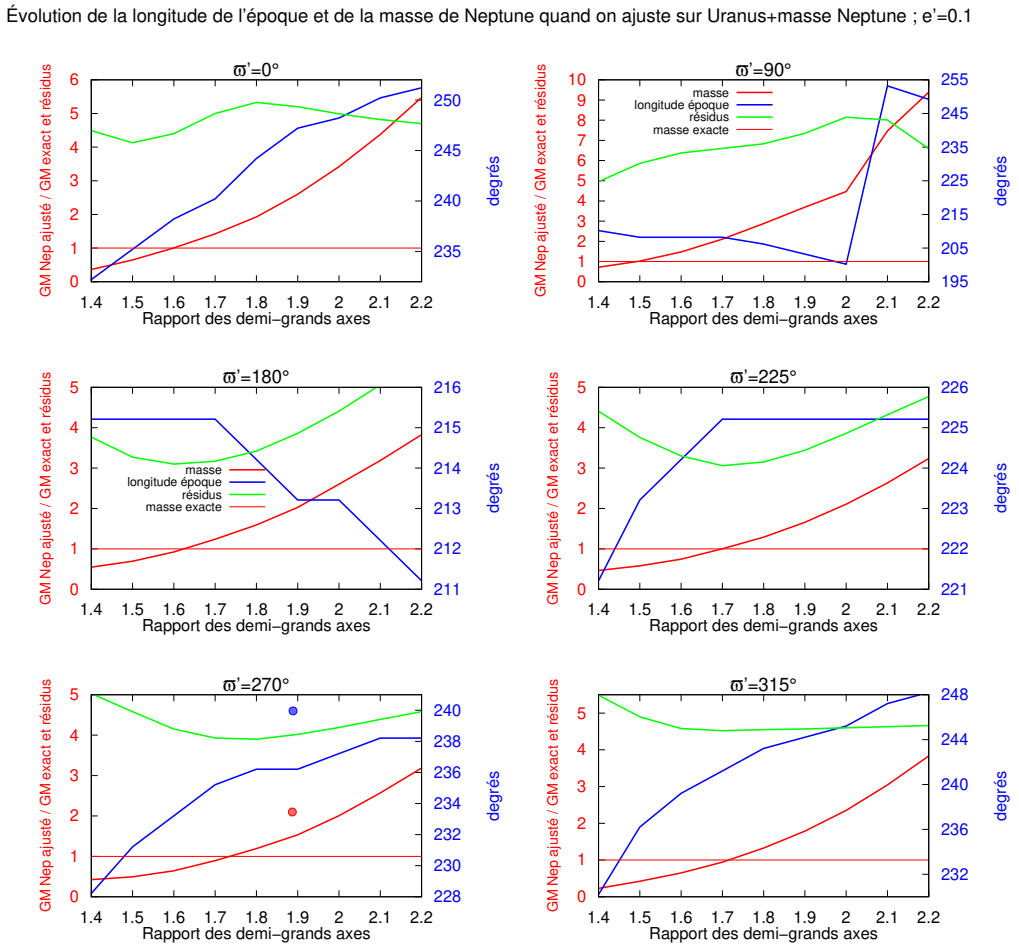


FIGURE 8.7 – On examine ici comment évolue la masse de Neptune quand on ajuste les paramètres d'Uranus et la masse de Neptune avec l'excentricité de Neptune fixée arbitrairement à 0.1. Il faut donc imposer une valeur pour la longitude du périhélie : on a choisi 6 valeurs pour ϖ'. Les valeurs des résidus (en as) se lisent aussi sur l'échelle de gauche (en rouge), échelle qui sert pour la masse. Il faut savoir qu'au moment de la conjonction de 1822, la longitude d'Uranus – et par suite aussi celle de Neptune – valait 273°.
Voici comment interpréter ces tracés, en particulier comment justifier l'amplitude de variation de la masse ?
Avec $\varpi' = 90°$, Neptune se trouverait près de son aphélie au moment de la conjonction Soleil-Uranus-Neptune de 1822 et pour attirer convenablement Uranus, il faudrait une masse assez importante, d'où la croissance rapide du graphe (0.8−9.5) ; pour $\varpi' = 270°$, Neptune se trouverait vers son périhélie au moment de la conjonction de 1822 et la masse nécessaire pour tirer Uranus serait moindre (amplitude de 3 seulement). Le point bleu pour $\varpi' = 270°$ correspond à peu près au couple (α, ε') trouvé par Le Verrier et le point rouge correspond à (α, m') trouvé par Le Verrier ; leur ordre de grandeur est assez cohérent.

8.3 Influence de l'inclinaison de l'orbite

Les calculs précédents ont été effectués en plaçant systématiquement la planète perturbatrice dans l'écliptique. On va imposer maintenant des inclinaisons à cette planète perturbatrice : 5°, 11°, 17°. Il faut fixer des valeurs pour la longitude Ω' du nœud ascendant ; on en choisit 4 : $\Omega' = k\,90°$ avec $k \in [0:3]$. On a choisi ici $e' = 0$ et on a fixé $\alpha = 1.6$, arbitrairement.
Voici ce que l'on obtient pour les résidus successifs. On constate que les minima restent localisés dans la zone 210°−230°.

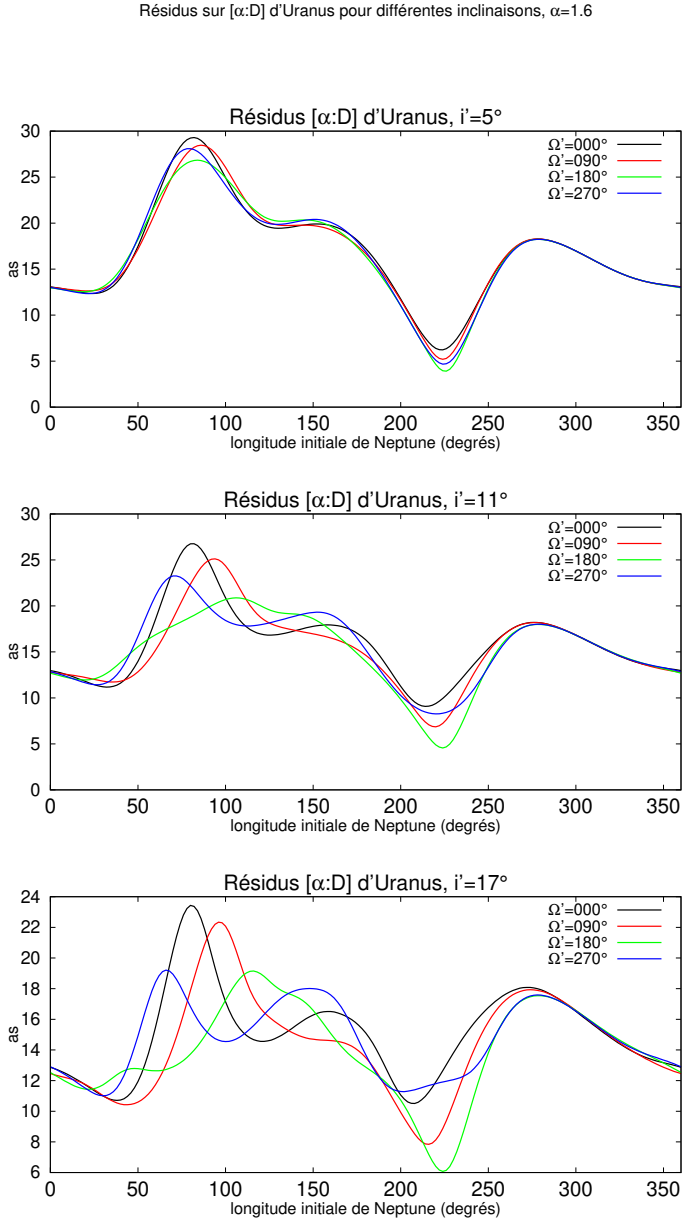


FIGURE 8.8 – Résidus de l'observable d'Uranus $[\mathring{\alpha} : D]$ quand on fait varier l'inclinaison de l'orbite de la planète perturbatrice. On a choisi 4 valeurs pour Ω'. Dans tous les cas, le minimum des résidus se produit pour $\varepsilon' \simeq 210° - 230°$. On rappelle que la valeur correcte de Ω' est 131°, ce qui est assez cohérent avec les tracés : résidus minimum obtenus pour $\Omega' \in [90°, 180°]$. On rappelle que pour ce calcul on a choisi $\alpha = 1.6$ et $e' = 0$; on rappelle aussi que l'on n'ajuste que les éléments d'Uranus

8.4 Influence de l'excentricité

8.4.1 Présentation des calculs effectués dans cette section

On examine dans les deux paragraphes suivants l'influence de l'excentricité e' en la fixant successivement à plusieurs valeurs arbitraires ; il faut alors choisir une valeur pour la longitude ϖ' du périhélie et modifier l'algorithme de la page 289 en posant [2] $k' = e' \cos \varpi'$ et $h' = e' \sin \varpi'$.
Pour les 3 graphes qui suivent, on a utilisé les valeurs suivantes pour l'excentricité et la longitude du périhélie :

$$e' = 0,\ 0.03,\ 0.06,\ 0.09,\ 0.12 \quad \text{et} \quad \varpi' = k\,45° \quad 0 \leq k \leq 7.$$

L'algorithme de la page 289 s'adapte sans difficulté en introduisant deux boucles supplémentaires, une pour l'excentricité et une autre pour la longitude du périhélie. On remarquera que le calcul fait avec $e' = 0$ est à refaire 8 fois pour chaque valeur de e', soit en tout 32 fois [3].
On a tracé fig. 8.9, fig. 8.10 et fig. 8.11, les résultats obtenus quand on choisit successivement les rapports des demi-grands axes égaux à 1.6, 1.8 et 2.0. On représente, pour chaque valeur de α, les variations sur une circonférence complète pour ε'.
On constate que le minimum des résidus est atteint dans tous les cas dans l'intervalle [210° : 250°], ce qui montre une bonne stabilité de ce paramètre vis à vis de l'excentricité et du rapport des demi-grands axes.
Les calculs ont été faits aussi pour $\alpha = 1.5$, 1.7 et 1.9, mais les tracés n'ont pas été représentés pour ne pas surcharger inutilement. Par contre, les valeurs numériques trouvées pour ces 3 paramètres sont utilisées pour la construction de la figure 8.12.
À la figure 8.12, on reprend l'ensemble des résultats obtenus pour les 6 valeurs de α (de 1.5 à 2.0 avec un pas de 0.1), en traçant les minima des résidus en fonction de α et de e'.

Au §8.4.4, on utilise les résultats obtenus au §8.4.2 pour tracer les valeurs des longitudes moyennes et vraies en fonction de e' et de ϖ' pour 3 valeurs de α : 1.6, 1.8 et 2.0. On examine quel aurait été le meilleur choix de (e', ϖ') pour chacune de ces valeurs de α.

À titre d'exercice d'école, on terminera cette section en choisissant pour les éléments initiaux de Neptune les éléments finaux trouvés par Le Verrier. D'un point de vue logique, ce calcul ne prouve rien, sauf s'il aboutissait à un résultat contradictoire, ce qui n'est pas le cas. Mais il conforte dans la fiabilité du calcul de Le Verrier.

On rappelle que dans toute cette section, on n'ajuste que les éléments d'Uranus, à partir de valeurs fixées arbitrairement pour les éléments de la planète troublante, afin de déterminer, par un balayage systématique, la longitude moyenne initiale de la planète troublante qui minimise les résidus sur l'observable d'Uranus.

8.4.2 Résidus selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes

On examine successivement dans les pages suivantes les cas $\alpha = 1.6$, 1.8, 2.0 associés à différentes excentricités et à différentes valeurs de la longitude du périhélie.
Dans les 3 cas, on trace les résidus obtenus sur une circonférence complète pour ε'.

2. On rappelle que Le Verrier pose $l' = e' \cos \varpi'$; on utilisera la notation moderne, k', pour éviter la confusion avec la longitude moyenne ℓ'.
3. Le calcul complet prend environ une semaine pour chaque valeur de α.

Voici ce que l'on obtient pour un rapport des demi-grands axes égal à 1.6 :

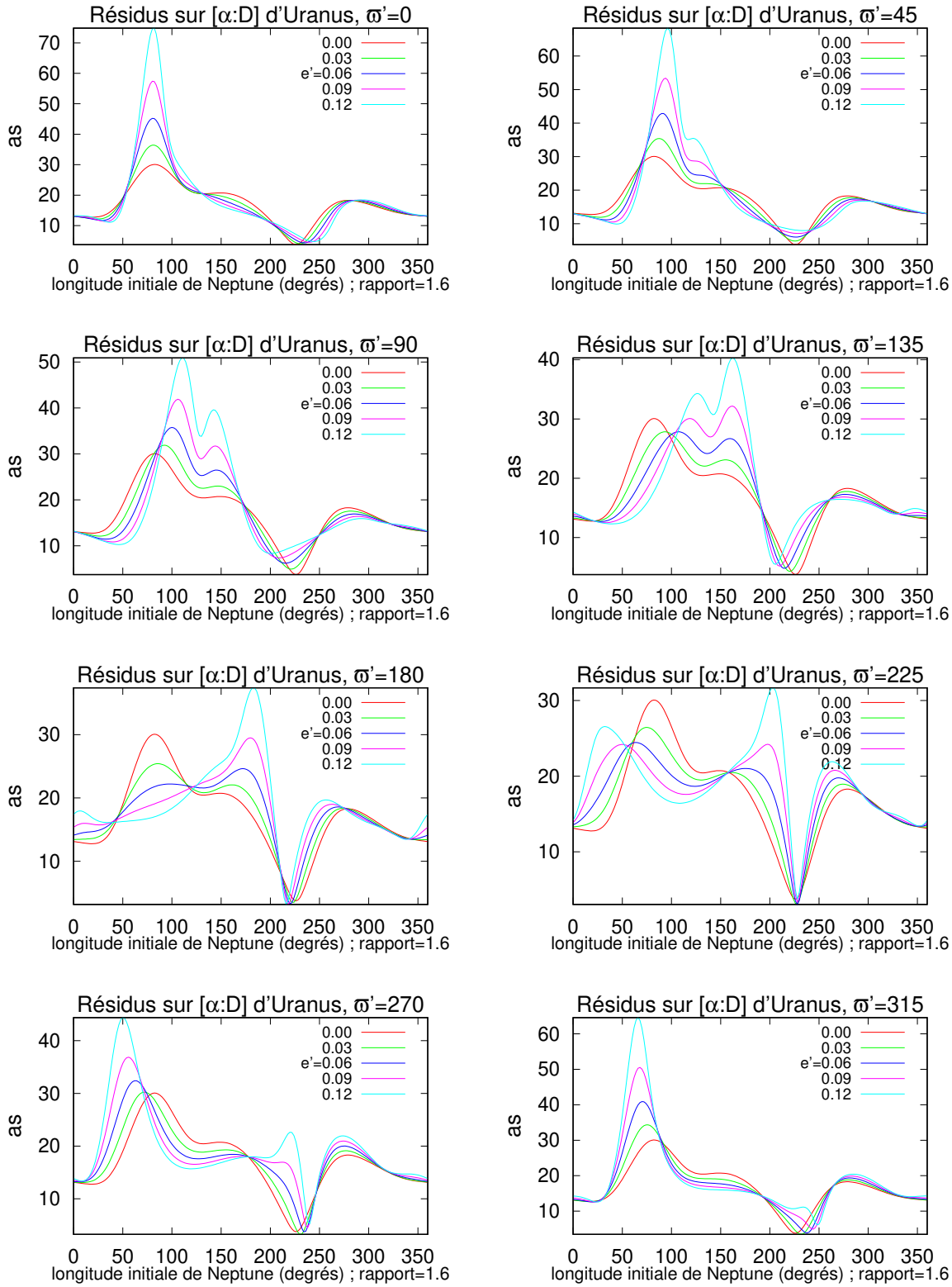


FIGURE 8.9 – Résidus de l'observable [å : D] d'Uranus pendant un balayage sur la longitude moyenne de Neptune avec 8 valeurs pour ϖ' et 5 valeurs pour l'excentricité e' et $\alpha = 1.6$ (rapport des demi-grands axes). Dans tous les cas, le minimum reste voisin de 225°

Voici ce que l'on obtient pour un rapport des demi-grands axes égal à 1.8 :

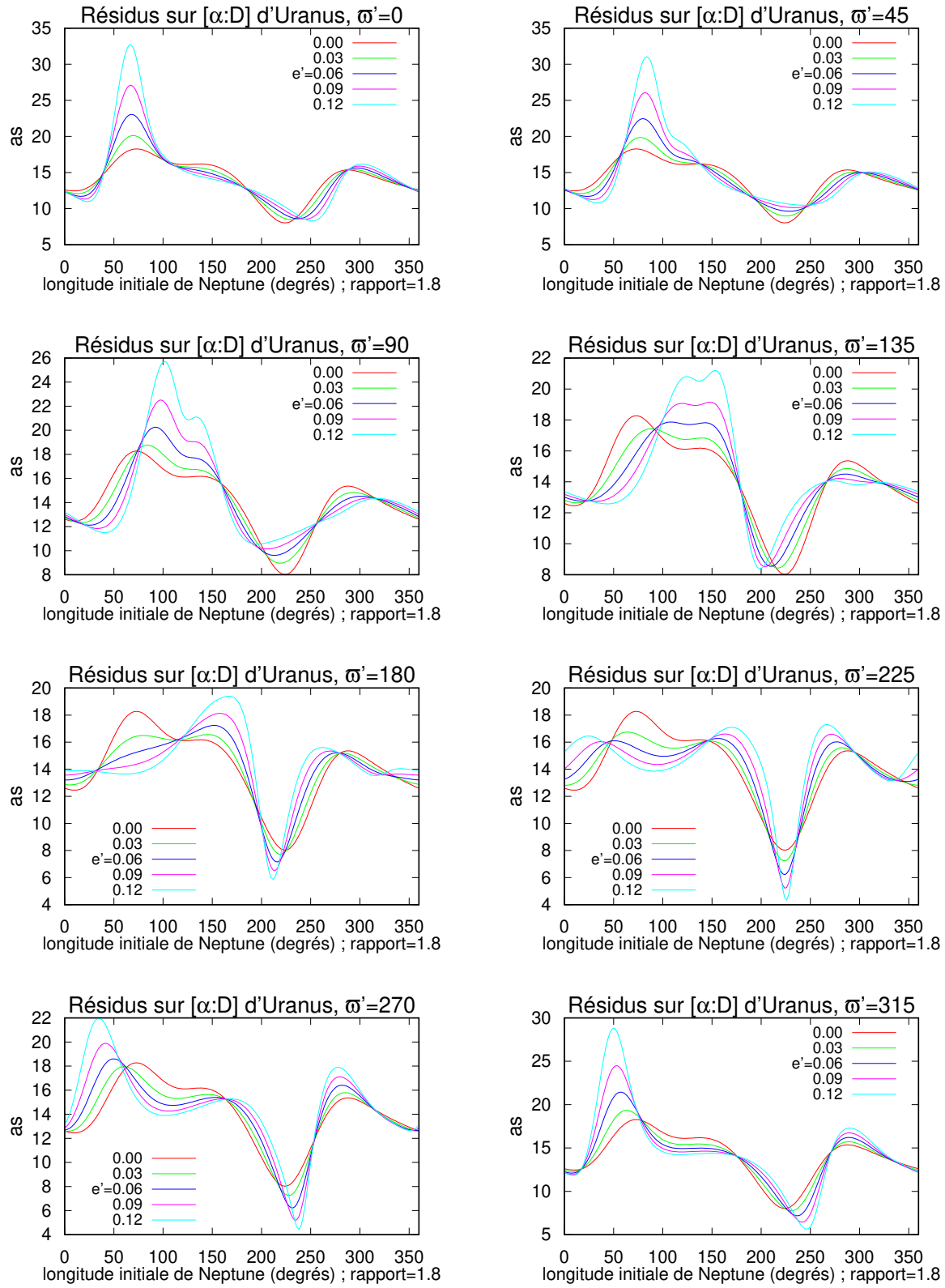


FIGURE 8.10 – Résidus de l'observable $[\mathring{\alpha} : D]$ d'Uranus pendant un balayage sur la longitude initiale de Neptune avec 8 valeurs pour ϖ', 5 valeurs pour l'excentricité e' et $\alpha = 1.8$.

Voici ce que cela donne pour un rapport des demi-grands axes égal à 2.0

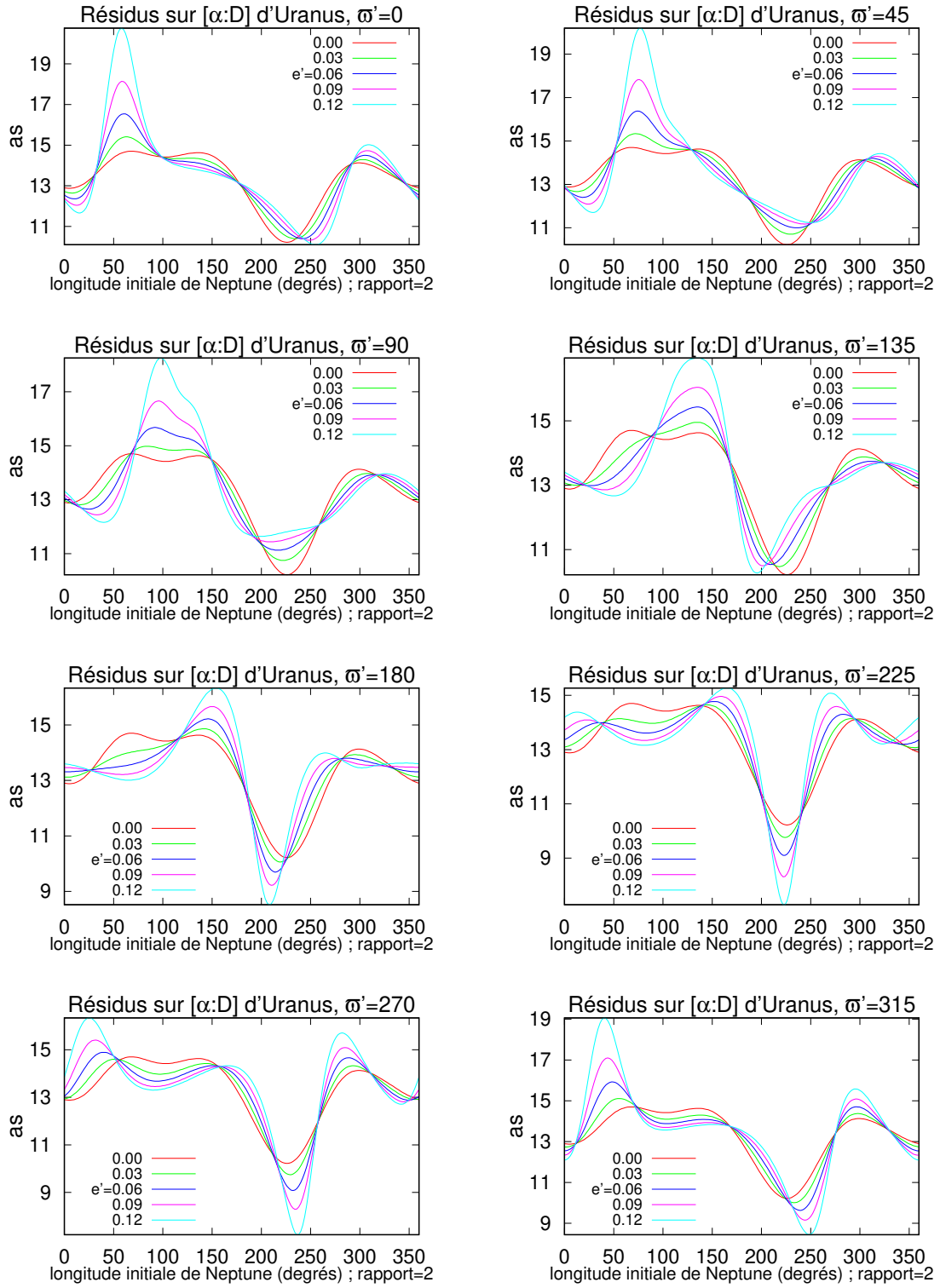


FIGURE 8.11 – Résidus de l'observable $[\mathring{a} : D]$ d'Uranus pendant un balayage sur la longitude initiale de Neptune avec 8 valeurs pour ϖ', 5 valeurs pour l'excentricité e' et $\alpha = 2.0$. Avec ce rapport élevé (2.0), on constate que le minimum pour 270° s'obtient avec l'excentricité la plus élevée, observation qui sera justifiée à la fin de ce chapitre, au § 8.8

8.4.3 Résidus minimaux selon l'excentricité et le rapport des demi-grands axes

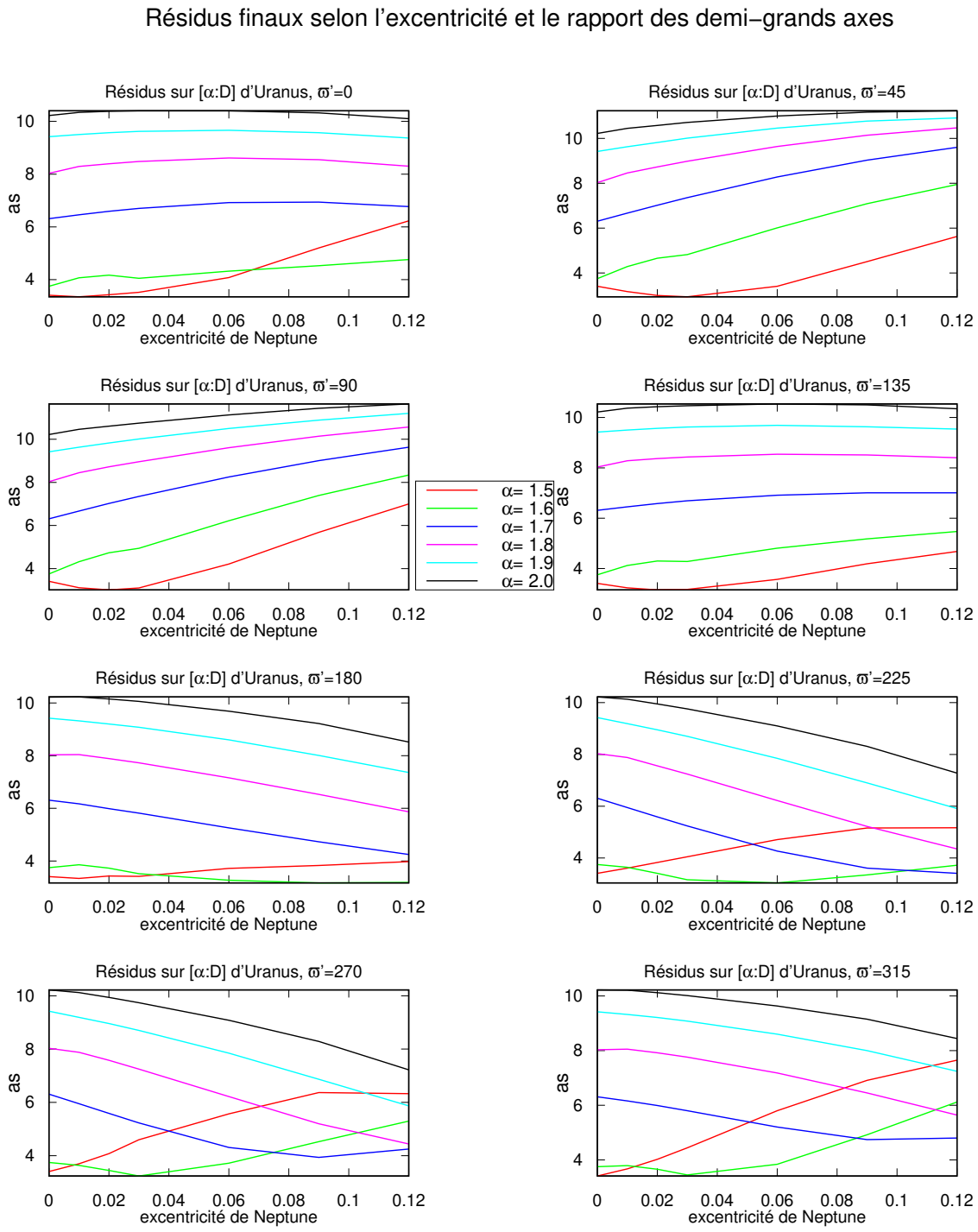


FIGURE 8.12 – On reprend, avec une présentation différente, les résultats des calculs précédents, à savoir les résidus minimaux sur $[\mathring{a} : D]$ d'Uranus selon les valeurs du rapport α des demi-grands axes, de l'excentricité et de la longitude ϖ' du périhélie de Neptune. On voit par exemple que pour $\alpha \in [1.7, 2.0]$, les résidus diminuent à condition d'augmenter l'excentricité et de placer le périhélie entre 225° et 315°, ce qui correspond assez bien à la direction de la conjonction héliocentrique de 1822, qui vaut 273°. Voir la discussion complète au § 8.8.

8.4.4 Longitudes moyenne et vraie en fonction du rapport des excentricités

On utilise les résultats du § 8.4.2 pour représenter les longitudes de l'époque optimales de Neptune (graphe de gauche), ainsi que les valeurs correspondantes de la longitude vraie le jour de la découverte (à droite) pour 3 valeurs de α, $\alpha = 1.6$, 1.8, 2.0 et 5 valeurs de l'excentricité, ainsi que 8 valeurs de la longitude du périhélie.

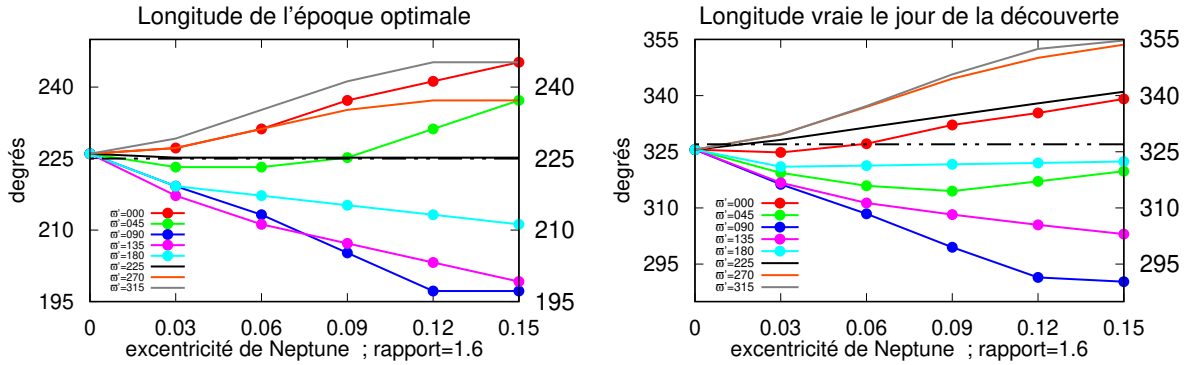


FIGURE 8.13 – Longitude de l'époque optimale et longitude vraie au 23/9/46 de Neptune en fonction des éléments imposés initialement pour Neptune (a', e', i', ϖ'), avec ici $\alpha = 1.6$. On serait tombé à moins de 5° de la position réelle pour toute valeur de ϖ', à condition de choisir e' suffisamment petit.

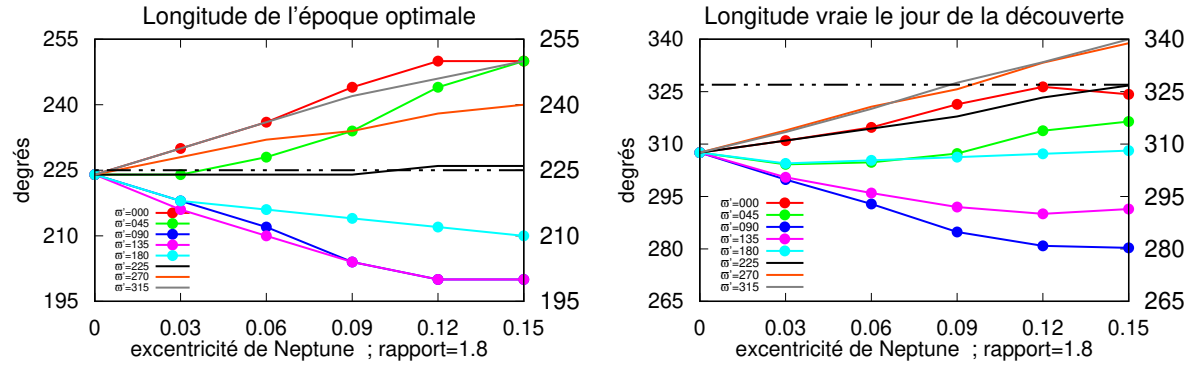


FIGURE 8.14 – Longitude de l'époque optimale et longitude vraie au 23/9/46 de Neptune en fonction des éléments imposés initialement pour Neptune (a', e', i', ϖ'), avec ici $\alpha = 1.8$. Les valeurs de Le Verrier $\alpha = 1.88$, $e' = 0.107$, $\varpi' = 284°$ et longitude vraie le jour de la découverte=327° sont très bonnes, à partir d'évaluations visuelles que l'on peut faire en interpolant ces graphes (entre les lignes continues rouge et grise).

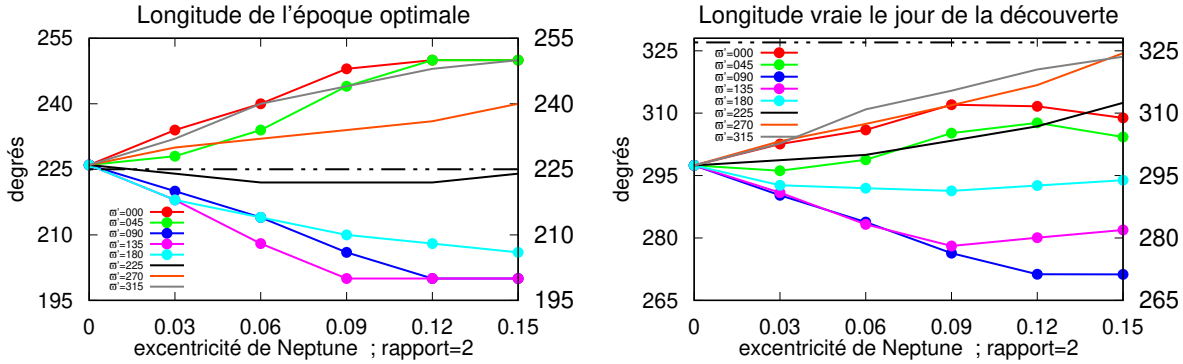


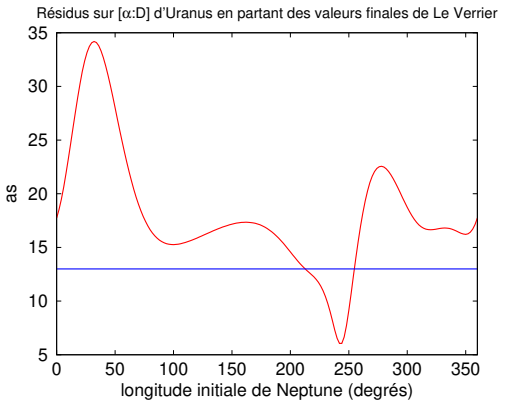
FIGURE 8.15 – Longitude de l'époque optimale et longitude vraie au 23/9/46 de Neptune en fonction des éléments imposés initialement pour Neptune (a', e', i', ϖ'), avec ici $\alpha = 2.0$. Avec tous les choix possibles de paramètres, on tombe à plus de 5° de la position correcte. Le choix, lié à la loi de Bode, de $\alpha = 2$ était très malheureux pour Neptune, mais il était impossible de le savoir avant la découverte visuelle.

Sur les graphes précédents, on constate que pour $\alpha = 1.6$, la valeur $e' \simeq 0$ est largement privilégiée, ce qui correspond à une orbite quasi circulaire, qui est en fait une très bonne approximation de l'orbite du vrai Neptune.
Pour $\alpha = 1.8$ l'excentricité $e' = 0.10$ est privilégiée associée à $\varpi' = 225°$ ou $\varpi' = 270°$ et pour $\alpha = 2.0$, c'est $e' = 0.15$, associée aussi à $\varpi' = 225°$ ou $\varpi' = 270°$: on verra que cela correspond à placer le périhélie de Neptune à une position proche de la position correcte à la conjonction de 1822. On complétera cette discussion au § 8.8.

8.5 Calculs avec les paramètres trouvés par Le Verrier

On examine ici ce que deviennent les calculs en choisissant comme paramètres initiaux pour Neptune les valeurs finales trouvées par Le Verrier. Bien sûr, ces calculs ne prouvent rien, sauf s'ils conduisaient à des contradictions, ce qui n'est pas le cas ; mais la cohérence avec les résultats de Le Verrier est rassurante.

Figure 8.16 – Résidus de l'observable d'Uranus quand on fixe les éléments de Neptune aux valeurs finales trouvées par Le Verrier dans sa deuxième approximation. On fait varier la longitude de l'époque de Neptune et on ajuste les éléments d'Uranus. On constate que le minimum des résidus se produit pour la longitude 243°, ce qui n'est pas très loin des 240°17' trouvés par Le Verrier, mais lui, au cours de son calcul avait **déterminé** pour les éléments de Neptune les valeurs que l'on a **choisies** ici pour les valeurs de départ de Neptune : c'est une sorte de vérification en partant de la solution, ce qui, d'un point de vue purement logique, ne prouve pas grand chose en cas de non contradiction. La ligne bleue à 13 as représente le résidu final sur l'observable quand on ajuste les éléments d'Uranus en l'absence totale de Neptune (masse mise à 0).



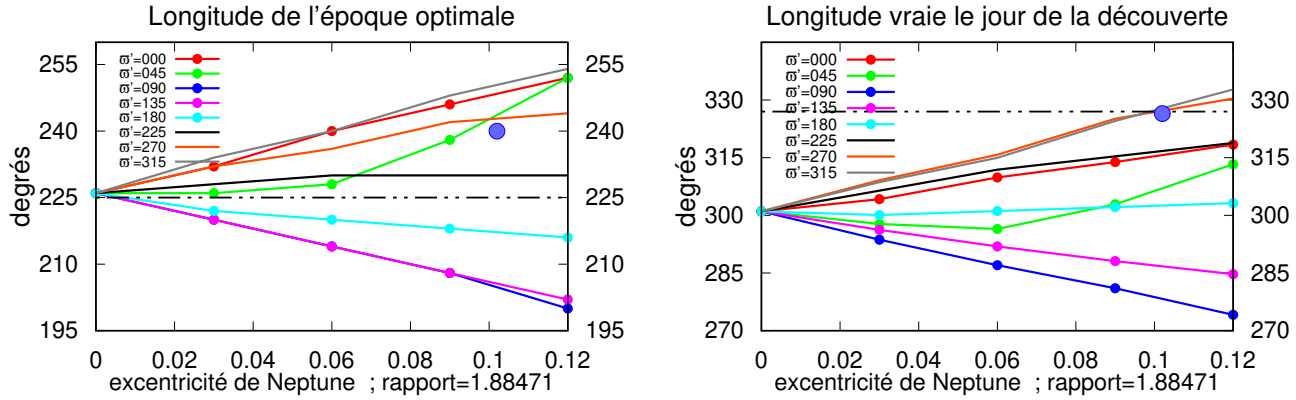


FIGURE 8.17 – A gauche : longitude optimale de l'époque ; à droite : longitude vraie correspondante de Neptune le jour de la découverte. Les calculs ont été faits avec la valeur finale trouvée pour α par Le Verrier : 1.88471, en ajustant, comme dans les calculs précédents, les paramètres d'Uranus. On constate que le point de Le Verrier ($e' = 0.102$, $\varpi' = 284°$, $\varepsilon' = 240°$, en bleu) est cohérent avec le graphe de gauche et de même pour la longitude vraie le jour de la découverte ($e' = 0.102$, $\varpi' = 284°$, $v' = 327°$, en bleu). On n'obtient donc pas de contradiction, ce qui est rassurant, même si cette constatation n'a aucun pouvoir logique.

8.6 Influence de la date des calculs

La conjonction Soleil-Uranus-Neptune s'est produite fin 1821 (6/10/21), mais la littérature sur le sujet (Lyttleton [Lyttleton, 1960], Brown [Brown, 1931], Tisserand [Tisserand, 1880]...) a surtout retenu l'expression 'conjonction de 1822'. Comme l'influence de Neptune n'est vraiment sensible que pendant 25 ans avant et après le passage à la conjonction, Le Verrier a donc eu la chance de bénéficier de l'effet de l'attraction de Neptune sur Uranus pendant sa série d'observations. Que se serait-il passé si Le Verrier avait achevé ses calculs en 1820 ou 1830 par exemple ?
Il suffit de reprendre les calculs programmés en limitant les données à la date voulue, et pour cela on néglige le temps de calcul ! Pour chaque date, on évalue la précision de la localisation de la planète perturbatrice que l'on obtiendrait si on limitait les observations à cette date.
Il est impossible d'être complet ; voici les situations envisagées :

- Le cas d'une excentricité nulle : § 8.6.1
- Le cas $e' = 0.1$ et $\varpi' = 270°$: § 8.6.2
- En procédant à un ajustement des 7 paramètres de Neptune : § 8.6.3

8.6.1 Cas d'une excentricité nulle

On calcule les résidus finaux de l'observable d'Uranus quand on fait les calculs en 1810, 1815, 1820, 1825, 1830, 1835, 1840, 1845, en imposant une excentricité nulle pour Neptune.
Dans tous les cas, la courbe de résidus présente deux minima locaux : un vers 50° et un autre vers 230°. Le minimum absolu est, selon la date, le premier ou le deuxième ; les deux minima sont décalés d'environ 180°, fait que l'on retrouvera avec l'algorithme de Metropolis-Hastings.
Dans le tracé de la figure 8.18, la partie gauche représente les minima absolus de la longitude optimale de l'époque et les résidus correspondants de l'observable ; dans la partie droite, on n'a retenu que les minima (éventuellement relatifs) situés aux environs de 230° et les résidus correspondants.

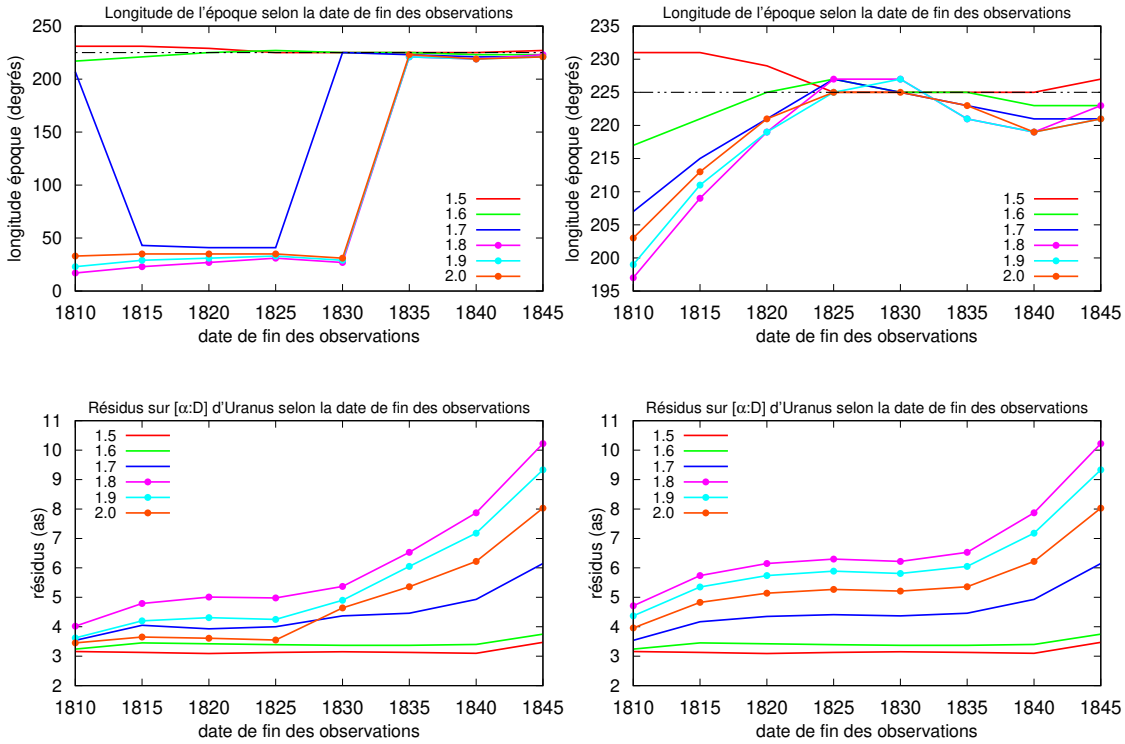


FIGURE 8.18 – Dans la partie gauche, on a tracé la longitude de l'époque optimale (en haut) et les résidus correspondants sur l'observable d'Uranus (en bas) en fonction du rapport des demi-grands axes et de la date de fin des observations. A droite, même chose, mais on ne prend en compte que le minimum (éventuellement relatif) de la longitude de l'époque situé au voisinage de 230°. L'augmentation des valeurs des résidus dans les graphes du bas vient en partie de l'augmentation du nombre d'observations, qui va avec l'allongement de la date de fin de ces observations. On constate une grande dispersion des valeurs pour une découverte en 1810 et un regroupement de ces mêmes valeurs à partir de 1825. On rappelle que les calculs ont été faits avec une excentricité nulle pour Neptune.

On va reprendre, page suivante, les résultats précédents en les organisant selon le rapport des demi-grands axes.

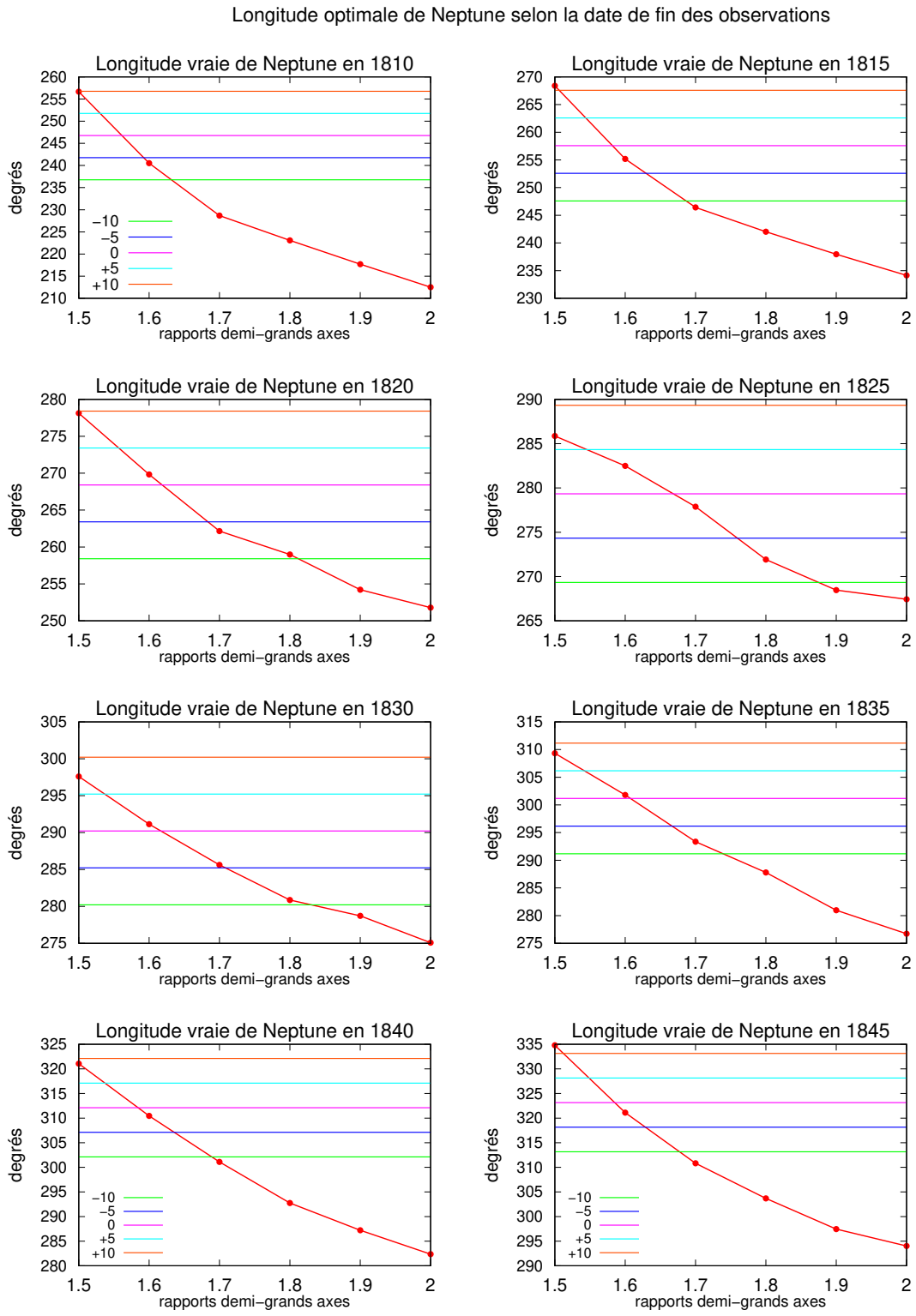


FIGURE 8.19 – Longitude vraie de Neptune au moment de la fin des observations selon le rapport des demi-grands axes, avec $e' = 0$. On a tracé une bande à $\pm 5°$ et une autre à $\pm 10°$ autour de la valeur correcte pour mettre en évidence la zone de valeurs de α qui aurait pu conduire à la découverte le jour de la fin des observations. On constate, par exemple, que cette zone est large en 1825 et plus resserrée en 1845. La valeur correcte est dans tous les cas tracée en rose. On précise à la page suivante les intervalles pour α où cette détection aurait été possible.

En s'appuyant sur les graphes précédents, on a tracé les intervalles où doit se trouver le rapport des demi-grands axes de Neptune et d'Uranus pour placer la planète perturbatrice à ±5° (graphe de gauche) ou bien à ±10° (graphe de droite).

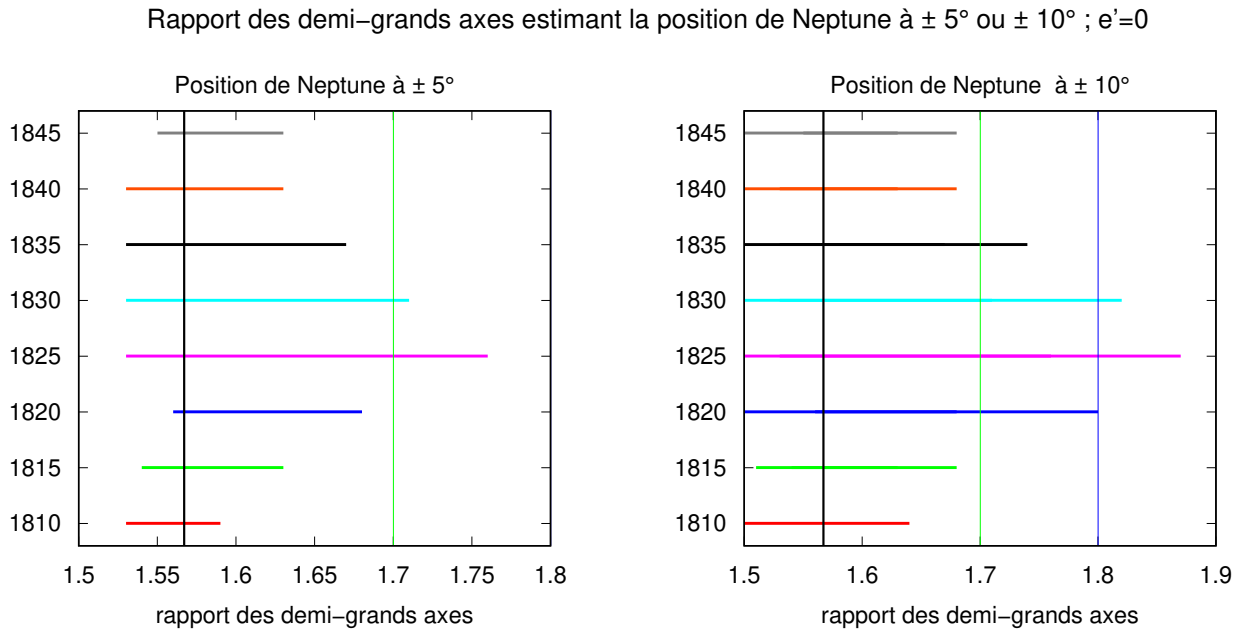


FIGURE 8.20 – Intervalles où doit se trouver le rapport des demi-grands axes pour localiser la planète perturbatrice à ±5° (à gauche) ou à ±10° (à droite) de la position réelle. On rappelle que les calculs sont faits avec une excentricité nulle : $e' = 0$. On constate que la zone de détection est 'en soufflet', avec un maximum vers 1825.

8.6.2 Cas $e' = 0.1$ et $\varpi' = 270°$

On a tracé figure 8.21 l'écart entre la longitude vraie le jour de la fin des calculs et la longitude calculée à cette date en fonction de cette même date de fin des calculs. Sur les mêmes graphes, on a tracé les résidus de l'observable d'Uranus. En interpolant entre les différents graphes, on constate que l'écart en longitude est voisin de 0 en 1845 quand $\alpha = 1.85$, ce qui correspond assez bien aux valeurs trouvées par Le Verrier, valeurs que l'on rappelle : $\alpha = 1.88$, $e' = 0.107$, $\varpi' = 284°$.

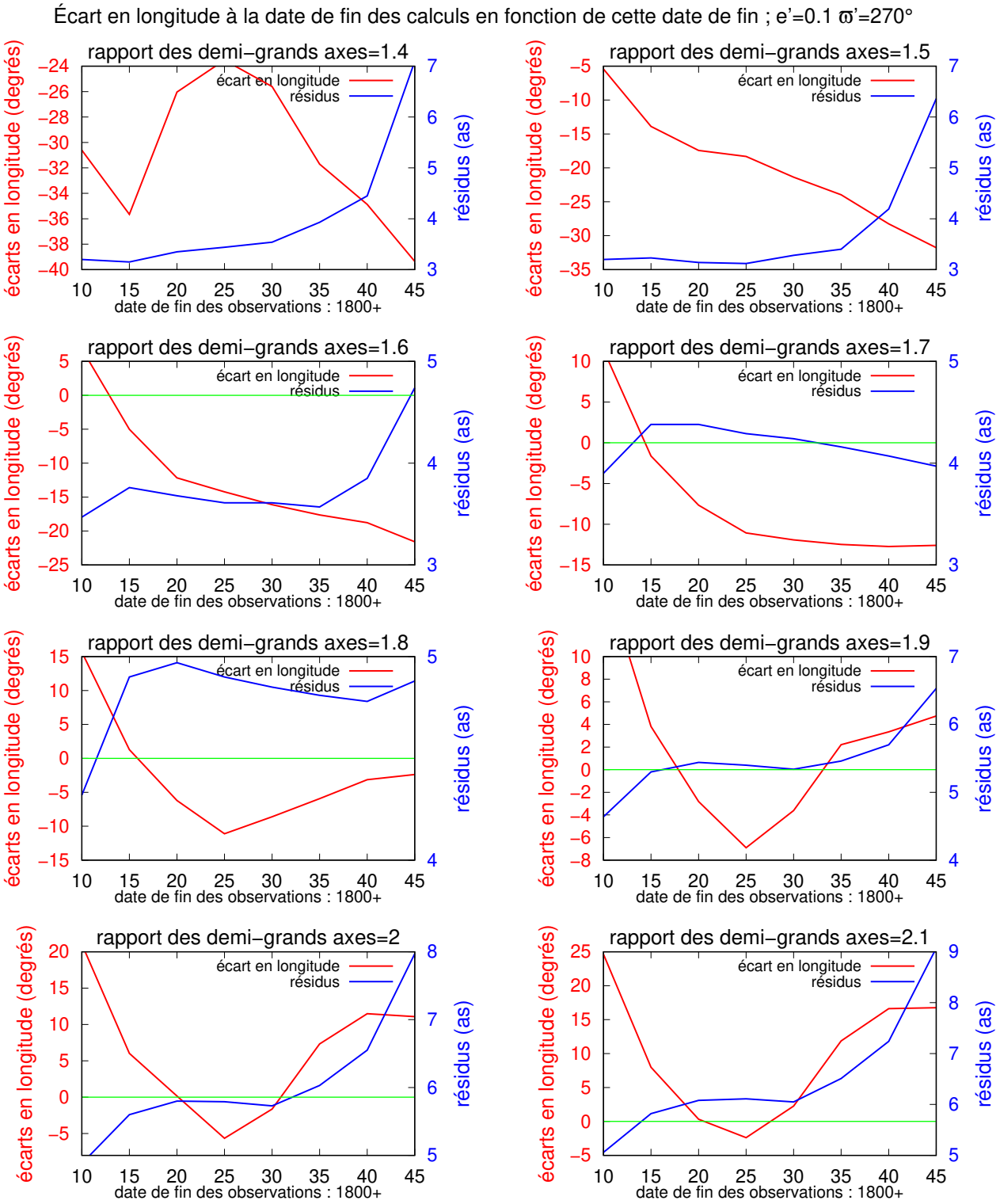


FIGURE 8.21 – Écarts en longitude (longitude exacte - longitude calculée, toutes les deux le jour de la fin des observations) et résidus de l'observable d'Uranus selon la date de fin des observations et le rapport des demi-grands axes. On constate, en interpolant graphiquement, que l'écart $O_{LV} - C$ en 1845 est voisin de 0 pour un rapport des demi-grands axes égal à 1.85, ce qui est assez proche de ce qu'a trouvé Le Verrier (1.88), et ce qui s'explique par le fait que l'on ait choisi pour faire ces tracés pour e′ et ϖ' des valeurs proches de celles trouvées par Le Verrier

On regroupe les résultats précédents (pour $e' = 0.1$ et $\varpi' = 270°$, fig. 8.21) sur une même figure (fig. 8.22) : les écarts en longitude vraie à la fin des observations sont dans le graphe du haut et les résidus correspondants sont dans celui du bas.

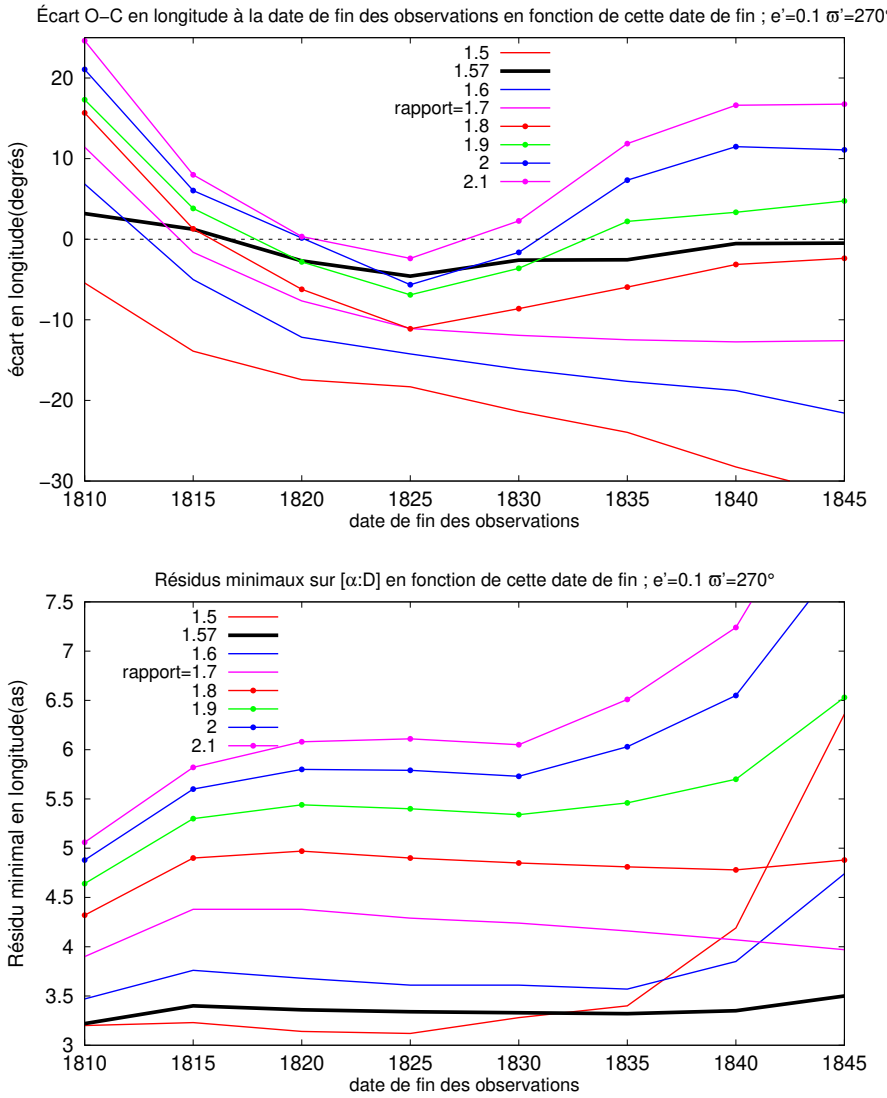


FIGURE 8.22 – Écart entre la position exacte à la date de fin des observations et la position calculée à cette même date (en haut). Résidus correspondants en bas. Le trait noir épais correspond aux valeurs correctes des paramètres : rapport des demi-grands axes, excentricité, longitude du périhélie ; ce jeu de valeurs aurait permis de localiser Neptune à moins de 4° pour toute date de fin des observations (figure du haut), et ce, en minimisant les résidus (figure du bas). Cette constatation est plutôt rassurante

8.6.3 Calculs avec ajustement sur les 7 paramètres de Neptune

On a vu (fig. 8.4) que quand on ajustait les 7 éléments de Neptune, les calculs convergeaient vers un ensemble de valeurs largement indépendant de la valeur initiale de a'. On part de ce jeu de valeurs [4] et on ajuste les paramètres de Neptune en limitant les observations à 1810 puis

4. Si on partait de valeurs trop éloignées des valeurs exactes, les calculs divergeraient rapidement.

1815, 1820, 1825, 1830, 1835, 1840 et enfin 1845. Concrètement, cela revient à faire les calculs précédents (ceux du § 8.4), mais à partir d'un nombre réduit d'observations. Le résultat principal pour chaque option est la longitude de l'époque de Neptune et accessoirement son demi-grand axe. Les résultats des calculs sont reportés fig. 8.23.

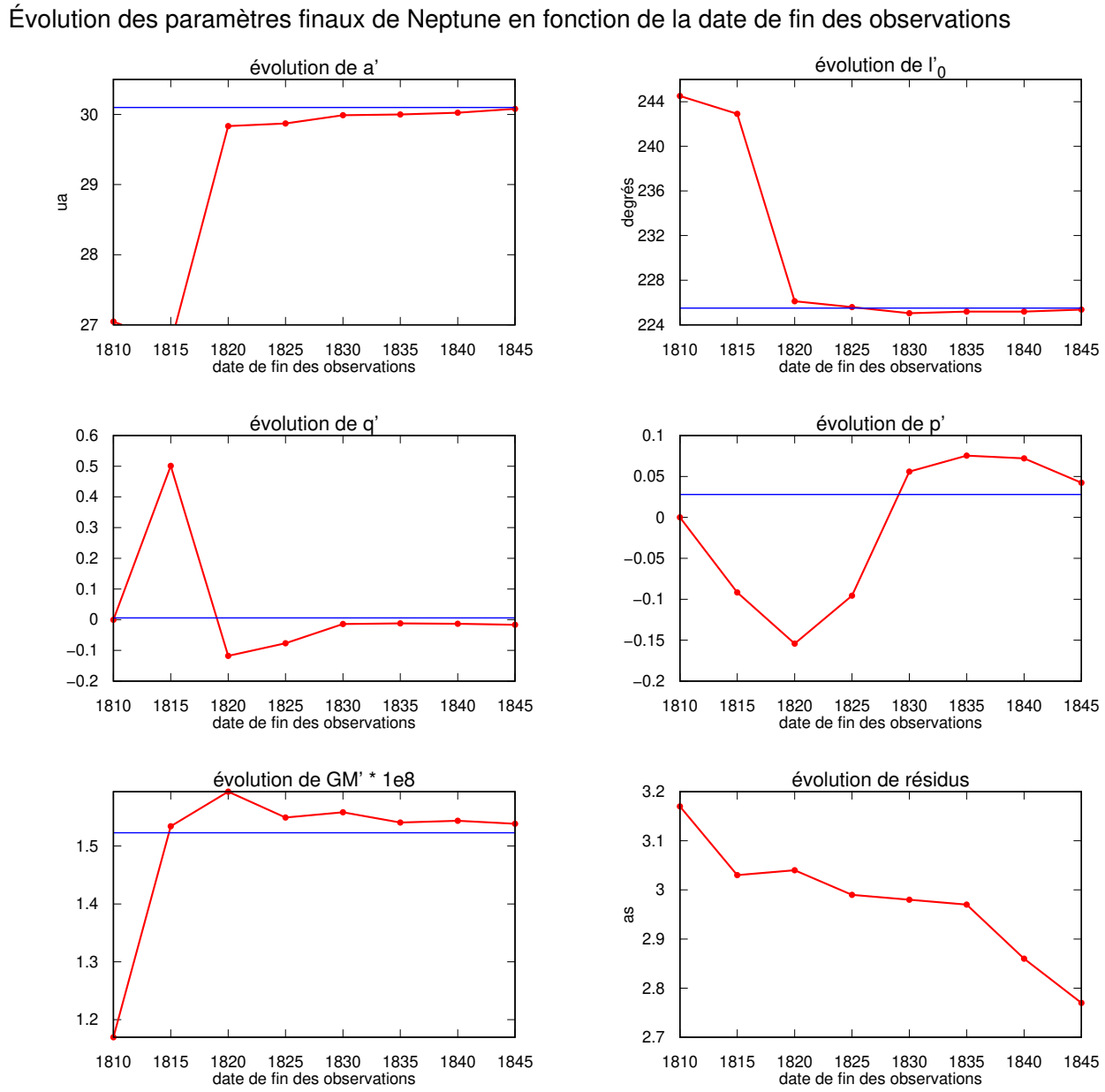


FIGURE 8.23 – En partant des valeurs finales (convergentes) trouvées pour Neptune au paragraphe 8.4 et en ajustant les paramètres d'Uranus ainsi que a', l', q', p', GM' de Neptune, voici les valeurs que l'on trouve pour les éléments elliptiques de Neptune en fonction de la date de la fin des observations. Une certaine stabilisation des valeurs des paramètres se produit à partir de 1820. Il n'est pas possible d'ajuster sur h' et k', car alors les calculs divergent très rapidement ; voir table 8.2 pour une explication sur la sensibilité dans l'évaluation des paramètres h' et k'

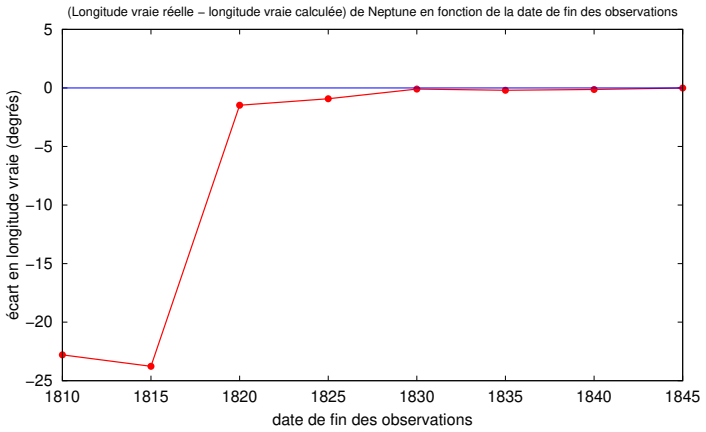


Figure 8.24 – À partir des valeurs que l'on vient d'obtenir pour la longitude moyenne optimale de Neptune, et des valeurs exactes pour h' et k' (que l'on ne peut pas ajuster, sous peine de divergence des calculs), on détermine la longitude vraie de Neptune à la fin des observations (i.e. en 1810, 1815...1845) et on la soustrait de la valeur correspondante donnée par Miriade. Il semblerait que, contrairement à ce qu'avait annoncé Brookes dans son analyse des calculs d'Adams [Brookes, 1972], il soit possible de prédire avec une assez bonne précision la position de la planète perturbatrice à partir de 1820. Mais Brookes avait utilisé les expressions analytiques des perturbations, alors qu'ici on utilise INPOP.

8.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings

Dans les calculs précédents, on attribuait des valeurs, le plus souvent arbitraires, aux éléments de Neptune et on faisait évoluer ces valeurs pour essayer de réduire les $O_{LV} - C$ de la longitude d'Uranus en ajustant les éléments d'Uranus et éventuellement certains éléments de Neptune. On a vu au chapitre 6 et au § 8.1.2.1 que l'on ne pouvait pas faire évoluer tous les paramètres de Neptune simultanément, sous peine de divergence rapide des calculs. On avait donc procédé par étapes successives, chaque étape (sauf la première) ayant pour point de départ le point d'arrivée de la précédente :

– détermination (par un balayage) d'une valeur approximative pour ε' ;
– ajustement de a', ε', q', p', m' ;
– ajustement des 6 paramètres elliptiques et de la masse de Neptune

En procédant ainsi, on avait obtenu comme valeurs finales pour les paramètres de Neptune, des valeurs très proches des valeurs réelles (voir table 8.1). On va essayer de retrouver de telles valeurs en appliquant l'algorithme de Metropolis-Hastings, qui est un alogorithme MCMC (Markov Chain Monte Carlo) ; les indications sur le fonctionnement de l'algorithme viennent principalement de [Newman, 1999]. Et pour simplifier, les éléments de Neptune sont notés dans cette section a, ε..., sans apostrophe.

8.7.1 Principe de l'algorithme de Metropolis-Hastings

Algorithme de Métropolis-Hastings (encadré 17)

En statistique, l'algorithme de Metropolis-Hastings est une méthode MCMC (**M**arkov **C**hain **M**onte **C**arlo) dont le but est d'obtenir un échantillonnage aléatoire d'une distribution de probabilité.
Plus formellement, étant donné une distribution de probabilité π sur un univers Ω, cet algorithme permet de construire une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire est π. Il permet ainsi de tirer aléatoirement un élément de Ω selon la loi π.
Un point essentiel de l'algorithme de Metropolis-Hastings est qu'il ne nécessite que la connaissance de π à une constante multiplicative près.
L'algorithme de Metropolis–Hastings (comme d'autres méthodes MCMC) est généralement utilisé pour l'échantillonnage de distributions multi-dimensionnelles, en particulier lorsque le nombre de dimensions est élevé ; dans ce cas, on peut utiliser un échantillonnage de Gibbs (voir encadré 18, p. 318).

Principe de l'algorithme de Metropolis-Hastings
On choisit, en fonction du problème étudié, une loi de probabilité *symétrique* $f(x, x')$ pour passer, selon cette loi, d'un point x de Ω à un autre point x' de Ω ; on a donc $f(x, x') = f(x', x)$.
On part d'une position x_0 ; à partir de ce point, on va construire pas à pas une chaîne aléatoire $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ (n 'grand') de la façon suivante :

– on suppose x_i connu
– à partir de x_i, on tire aléatoirement un point x' de Ω, selon la loi de probabilité f.
– ensuite, on tire aléatoirement un nombre η compris entre 0 et 1

- Si $\eta \leq \frac{\pi(x')}{\pi(x_i)}$, on accepte x' et on pose $x_{i+1} = x'$
- Si $\eta > \frac{\pi(x')}{\pi(x_i)}$, on rejette x', et on tire un autre point x' selon la loi de probabilité f.

Interprétation
L'algorithme peut être interprété intuitivement de la manière suivante : à chaque itération, on tente de se déplacer dans l'espace des états possibles, le déplacement pouvant être accepté ou rejeté. Le taux d'acceptation, $\frac{\pi(x')}{\pi(x_i)}$, indique à quel point le nouvel état est probable, étant donné l'état actuel, et selon la distribution π.
Si l'on cherche à se déplacer vers un état plus probable que l'état actuel, on a $\frac{\pi(x')}{\pi(x_i)} > 1 > \eta$, donc le déplacement est accepté.
Si l'on cherche à se déplacer vers un état moins probable que l'état actuel, alors le déplacement peut être rejeté et le rejet est d'autant plus probable que la chute relative de densité de probabilité π est élevée.
Par conséquent, la marche tend à visiter préférentiellement les régions de l'espace des états où la densité π est élevée, mais elle peut visiter transitoirement des régions de moindre densité.

Pour le problème de Neptune, le but sera de construire une chaîne de points, dont les derniers auront une probabilité élevée de localiser correctement la planète.

8.7.2 Objectifs visés en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings

On commence par chercher des orbites circulaires dans l'écliptique : pour cela, il suffit de déterminer a et ε. On cherchera ensuite des orbites elliptiques au § 8.7.4. Pour ces deux recherches, on choisira pour la masse de Neptune celle d'Uranus.
On fera ensuite varier la masse à partir du § 8.7.5.
Dans tous les cas (il y en a 4 en tout), on déterminera, à partir des résultats finaux, la longitude vraie probable au 1/1/47, **et on examinera si les résultats de l'algorithme de Metropolis-Hastings auraient permis de découvrir Neptune le 1/1/47**.
Les notations sont celles utilisées à l'encadré 17, p. 309.
Dans les tracés des graphes qui suivent, les valeurs de référence pour les paramètres (a, ε, m...), quand elles peuvent figurer sur les graphes, sont tracées en pointillés.

8.7.3 Recherche d'orbites circulaires pour Neptune

On commence par rechercher des orbites circulaires. L'univers est ici l'ensemble des couples (a, ε) possibles.
On dispose des 279 observations historiques O_{LV} aux époques retenues par Le Verrier.
Pour une configuration donnée $x = (a, \varepsilon, 0, 0, 0, 0, m')$ des éléments orbitaux de Neptune relatifs à l'écliptique, on lance INPOP, qui donne les positions C d'Uranus aux dates de Le Verrier ; on choisira pour loi de probabilité $\boxed{\pi(x) \propto \exp(-k\|O_{LV} - C\|)}$
où k est une constante positive à ajuster une fois pour toutes et on a vu que la connaissance de la loi de probabilité à une constante multiplicative près suffisait.
Première loi de déplacement
On se donne un nombre [5] d, qui représentera un ordre de grandeur de la longueur des déplacements entre deux itérations. Le déplacement élémentaire (passage de x à x') est choisi de la façon suivante :

$$a' = a + d\cos\theta\,;\ \varepsilon' = \varepsilon + 15\,d\sin\theta$$

où θ est un angle aléatoire compris entre 0 et 2π (ε est mesuré en degrés).
Ce choix de déplacement fait que la probabilité de passer de x à x' est la même que celle de x' à x, condition essentielle pour appliquer l'algorithme de Metropolis-Hastings.
On part d'un couple arbitraire $x_0 = (a_0, \varepsilon_0)$; on applique l'algorithme de Metropolis-Hastings à partir de cette valeur, c'est à dire que l'on construit une chaîne (x_i) de longueur typique 1000. Les premiers points peuvent être loin des valeurs exactes et on espère que les derniers seront proches de ces valeurs exactes. Pour tester cela, on prend la moyenne $\bar{x}$ des 500 dernières valeurs de a, ε et res dans les différentes chaînes construites (il y en a ici 64 en tout).
On a reporté table 8.4 les résultats obtenus pour ces différentes moyennes en fonction du point de départ (a_0, ε_0).
On constate que la valeur moyenne de a dépend peu de la valeur initiale du couple (a_0, ε_0) : elle est comprise entre 29 et 31 *au*. La valeur moyenne pour ε est soit de l'ordre de 43°, soit voisine de la valeur correcte 227° ; ces deux valeurs diffèrent d'environ 180°, ce qui ne doit pas être un hasard. Les résidus finaux sont faibles ($\simeq 4.5$ as) quand la valeur moyenne de ε est la valeur correcte, 227°, et les résidus sont plus élevés ($\simeq 29$ as) quand la valeur moyenne de ε est décalée de 180°. Donc, l'ambiguïté entre les deux positions peut être facilement levée : le bon résultat se lit dans les colonnes 180°, 225°, 270° et est $\boxed{29.2, 227\overset{\circ}{.}5}$.
On constate aussi que si l'on part assez loin de la bonne valeur, le nombre de rejets est faible et la chaîne est formée assez rapidement, alors que si l'on part près de la valeur correcte, le taux de rejets est beaucoup plus important et la chaîne est longue à se former.

5. À ajuster éventuellement, à partir du comportement observé du programme ; j'ai essayé $d = 0.25$, $d = 0.5$, $d = 1$. Les résultats ne changent pas beaucoup d'un choix à l'autre.

TABLE 8.4 – Résultats pour la recherche d'orbites circulaires pour Neptune en fonction du point de départ. On a testé 8×8 chaînes partant de 8×8 couples initiaux (a_0, ε_0)

Moyenne des valeurs du demi-grand axe (au)								
a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
28	30.4	30.4	30.8	30.4	29.2	29.2	29.2	30.9
30	30.6	30.3	31.3	30.7	29.1	29.2	29.2	30.9
32	31.1	31.0	31.1	30.8	29.2	29.2	29.1	29.3
34	30.7	30.6	30.7	31.2	29.2	29.2	29.2	29.3
36	31.2	30.9	31.3	30.8	29.2	29.2	29.1	29.4
38	30.8	30.8	31.0	31.0	29.1	29.3	29.2	29.2
40	31.6	31.7	31.3	31.4	29.3	29.1	29.2	29.1
42	33.0	32.1	31.9	32.4	29.2	29.3	29.2	29.1

Moyennes des valeurs de la longitude de l'époque (°)								
a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
28	43.0	43.0	42.6	44.0	227.6	227.6	227.5	43.1
30	43.3	43.5	43.5	43.5	228.0	227.6	227.4	43.2
32	42.8	43.0	43.9	42.5	227.6	227.6	227.9	227.3
34	43.1	43.5	43.1	42.2	227.6	227.5	227.4	227.3
36	42.6	43.1	42.0	43.0	227.5	227.4	227.7	227.1
38	42.9	42.8	42.9	42.5	227.8	227.2	227.3	227.6
40	43.2	42.5	42.0	42.9	227.3	227.8	227.6	227.8
42	45.5	43.9	43.7	44.1	227.5	227.3	227.6	226.3

Moyennes des valeurs des résidus (″)								
a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
28	29.3	29.4	29.2	29.2	4.6	4.7	4.6	29.1
30	29.2	29.2	29.2	29.1	4.6	4.6	4.6	29.1
32	29.2	29.2	29.2	29.2	4.6	4.5	4.5	4.5
34	29.2	29.2	29.1	29.1	4.5	4.7	4.5	4.6
36	29.2	29.2	29.1	29.2	4.5	4.6	4.5	4.8
38	29.2	29.2	29.1	29.2	4.4	4.8	4.6	4.6
40	29.2	29.2	29.2	29.2	4.7	4.4	4.6	4.4
42	29.8	29.4	29.3	29.5	4.6	4.5	4.5	4.6

Deuxième loi de déplacement

La loi précédente a l'inconvénient de faire des déplacements de longueur fixe (moyennant une norme appropriée). Mais en reprenant les calculs avec d'autres valeurs pour d (plus grandes ou plus petites), on obtient les mêmes conclusions, c'est-à-dire essentiellement ce comportement binaire vers les deux mêmes valeurs.

Pour confirmer cette stabilité des conclusions, on a repris les calculs précédents en s'appuyant maintenant sur une loi normale. On choisit la loi normale $\mathcal{N}$ centrée en 0, d'écart-type 1. On choisit les formules de changement de points suivantes :

$$a' = a + \mathcal{N}(0,1) \qquad \varepsilon' = \varepsilon + 15 * \mathcal{N}(0,1)$$

On constate le même comportement, à savoir essentiellement deux couples terminaux, les mêmes que dans le calcul précédent, mais les valeurs numériques dans les différentes chaînes sont un tout petit peu plus étalées.

Ainsi, en se limitant à des orbites circulaires, on obtiendrait pour la planète perturbatrice une longitude au 1/1/47 d'environ 334°, à 7° de la valeur réelle.

On aurait pu prédire une orbite circulaire très proche de l'orbite réelle, et un positionnement raisonnable sur cette orbite sans aucune connaissance préalable sur les paramètres de l'orbite

On a représenté sur la partie gauche de la figure 8.25 les points d'une chaîne particulière partant de la valeur $(28, 225°)$; la moyenne $(\bar{a}, \bar{\varepsilon})$ des valeurs des points (a, ε) de la chaîne (en bleu sur le dessin) est proche de la valeur exacte (point vert).
À droite, on a représenté les valeurs finales en fonction des points de départ : on constate que si l'on part d'une longitude proche de la valeur exacte, on reste 'près' de cette valeur ; par contre, si l'on part d'une valeur 'éloignée' de cette valeur exacte, on tombe sur une valeur finale pour ε décalée d'environ 180° de la valeur exacte.

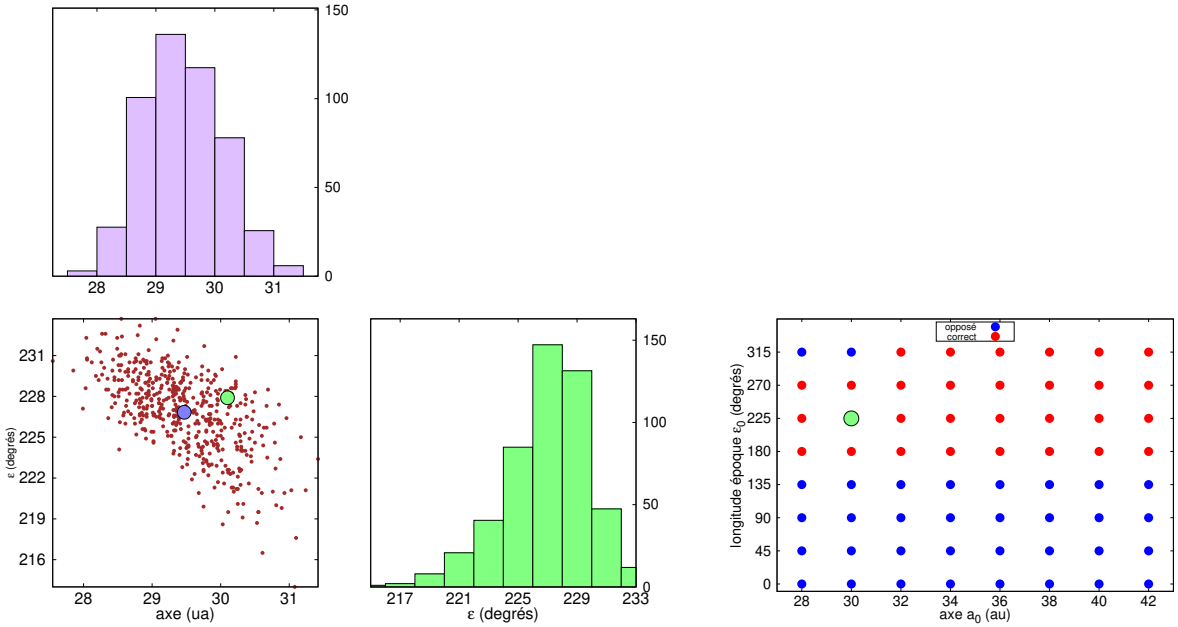


FIGURE 8.25 – À gauche, on a représenté les différents points d'une chaîne de Markov approchant une distribution de la densité de probabilité proportionnelle à $\exp(-k\|O - C\|)$, partant de $(28\,au, 225°)$. Le point bleu a pour coordonnées $(a_{moy}, \varepsilon_{moy})$ où a_{moy} est la moyenne des valeurs de a sur la chaîne et ε_{moy} celle des valeurs de ε sur cette même chaîne. Le point vert représente la position correcte de Neptune.
On a tracé aussi les histogrammes de répartition pour a et pour ε.
Dans la table 8.4, on constate qu'il n'y a essentiellement que deux couples terminaux dans les chaînes de Metropolis-Hastings : $(30\,au, 43°)$ et $(30\,au, 227°)$. On a reporté ces résultats sur le graphe de droite : pour chaque point de départ d'une chaîne, on a reporté le point d'arrivée de la chaîne : le bon, $(30\,au, 227°)$, en rouge ou celui décalé de 180°, en bleu ; le disque vert correspond à la position correcte de Neptune.

8.7.4 Recherche d'orbites elliptiques pour Neptune

On va chercher maintenant des orbites elliptiques dans l'écliptique. Pour cela, on fait varier simultanément les 4 éléments suivants de Neptune : a, ε, k, h. Le principe est exactement le même que pour les orbites circulaires.
Pour passer de $x = (a, \varepsilon, k, h)$ à $x' = (a', \varepsilon', k', h')$, on doit choisir une loi de probabilité $f(x, x')$ sur l'ensemble Ω de ces quadruplets : on choisit ici de passer d'un point $x = (a, \varepsilon, k, h)$ à un point $x' = (a', \varepsilon', k', h')$ en utilisant les formules suivantes :

$$a' = a + d_1 \cos\theta_1 \; ; \; \varepsilon' = \varepsilon + 10\, d_1 \sin\theta_1 \; ; \; h' = h + d_2 \cos\theta_2 \; ; \; k' = k + d_2 \sin\theta_2$$

où d_1 et d_2 sont deux nombres à choisir et θ_1 et θ_2 sont deux angles aléatoires compris entre 0 et 2π. L'acceptation ou le rejet se fait en comparant le taux d'acceptation $\frac{\pi(x')}{\pi(x)}$ à un nombre aléatoire η compris entre 0 et 1.
Les valeurs de départ pour h et k seront dans tous les cas : $h_0 = k_0 = 0$.
On a représenté dans la figure suivante la chaîne que l'on obtient quand on part d'une valeur voisine d'une valeur correcte, ici $(30\, au, 180°)$.

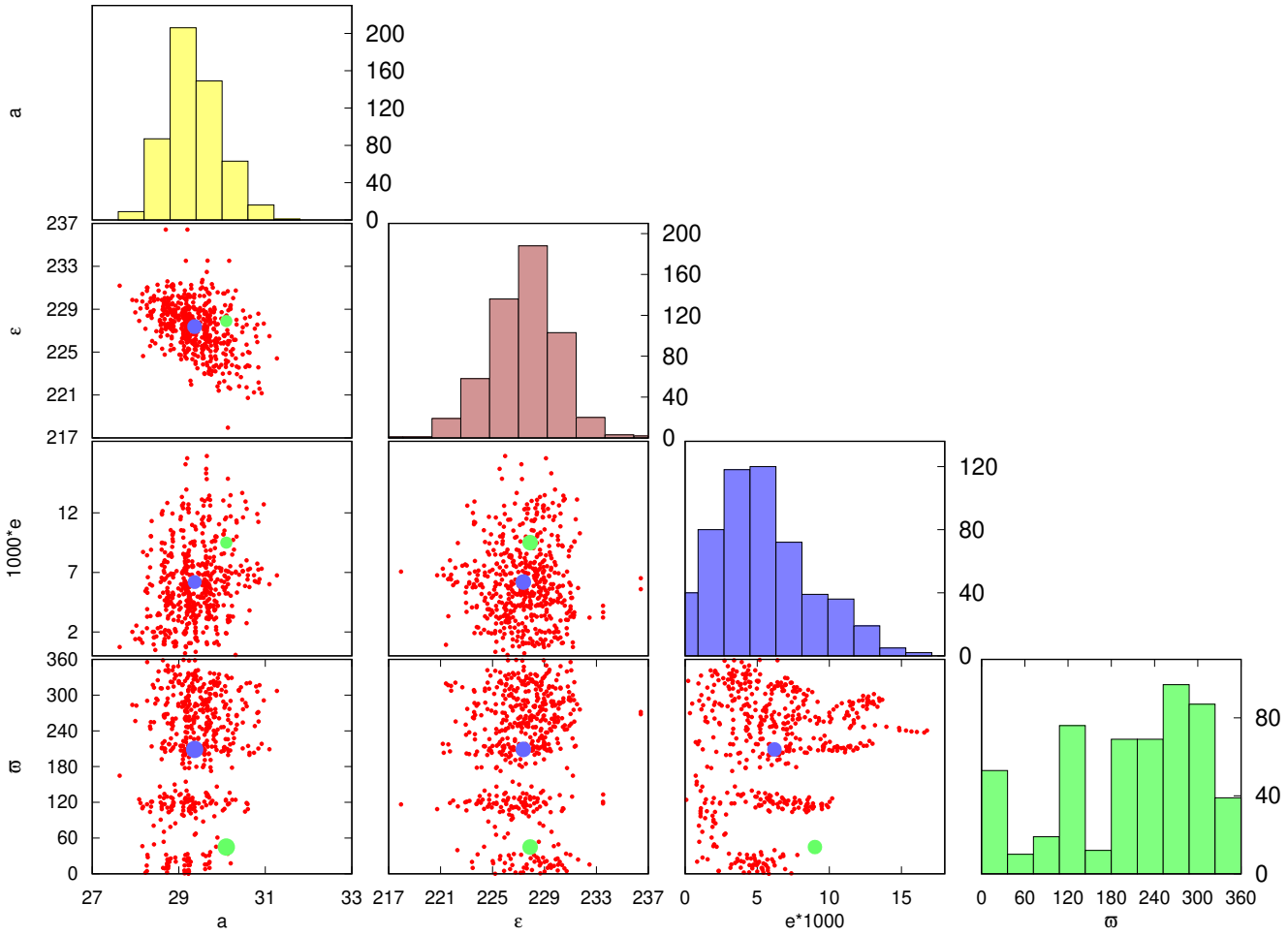


FIGURE 8.26 – Valeurs des paramètres trouvés dans une chaîne Metropolis-Hastings en partant de $a_0 = 30\, au$ et $\varepsilon_0 = 180°$, qui sont des valeurs proches des valeurs correctes. Les 4 paramètres concernés sont a, ε, e et ϖ. On a tracé les variations conjointes de ces paramètres pris deux à deux, ainsi que des histogrammes pour chacun des 4 paramètres. Les valeurs finales pour a, ε et e (en bleu) sont relativement proches des valeurs correctes (en vert) ; par contre, la valeur finale de ϖ ($\simeq 220°$) est très éloignée de la valeur correcte (45°).

Et voici, dans les tables suivantes, les valeurs moyennes des 4 paramètres, ainsi que celles des résidus, pour les 40 chaînes construites à partir des 40 départs choisis (a_0, ε_0). On retrouve assez systématiquement une valeur correcte pour le demi-grand axe : $\simeq 30-33$ *au*, ainsi qu'un résultat binaire pour la longitude de l'époque : $\simeq 44°$ ou $\simeq 227°$. Les valeurs de l'excentricité sont assez regroupées, mais globalement un peu fortes : on rappelle que la valeur correcte de l'excentricité est 0.0094 ; les valeurs pour la longitude du périhélie sont très dispersées et éloignées de la valeur correcte, qui est 45°. Ces tableaux servent à construire les graphes de la figure 8.27.

Moyennes des valeurs des demi-grands axes (au)

a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
27	33.3	33.6	33.2	34.0	29.3	29.3	29.4	33.2
30	33.4	33.9	33.1	33.0	29.4	29.3	29.5	33.0
33	32.9	33.1	32.9	33.1	29.5	29.6	29.5	33.5
36	33.7	33.0	32.7	33.1	29.5	29.3	29.4	33.3
39	33.4	33.3	33.2	33.3	29.5	29.5	29.5	33.4

Moyennes des valeurs des longitudes ε

a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
27	43	43	43	47	226	226	226	44
30	44	46	43	44	227	226	226	43
33	44	45	44	46	227	227	227	45
36	44	43	43	43	227	226	226	46
39	45	46	45	45	225	227	227	44

Moyennes des valeurs des résidus

a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
27	30.0	30.2	30.0	30.5	4.4	4.5	4.6	30.0
30	30.1	30.2	29.9	29.9	4.6	4.4	4.7	29.9
33	29.9	30.0	29.8	30.0	4.6	4.7	4.5	30.1
36	30.1	29.9	30.0	30.0	4.6	4.5	4.5	30.0
39	30.1	30.2	30.0	30.2	4.6	4.7	4.6	30.0

Valeurs finales des longitude du périhélie

a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
27	277	276	279	267	191	167	190	273
30	266	275	274	260	209	168	195	270
33	271	253	274	255	203	225	202	269
36	273	269	260	271	218	169	189	268
39	257	253	249	261	193	206	210	263

Valeurs finales des excentricités

a_0 \ ε_0	0	45	90	135	180	225	270	315
27	0.030	0.037	0.030	0.049	0.009	0.008	0.017	0.028
30	0.034	0.035	0.030	0.027	0.005	0.010	0.008	0.026
33	0.028	0.034	0.024	0.031	0.014	0.008	0.009	0.036
36	0.035	0.029	0.031	0.031	0.016	0.010	0.016	0.030
39	0.033	0.037	0.034	0.035	0.022	0.015	0.013	0.031

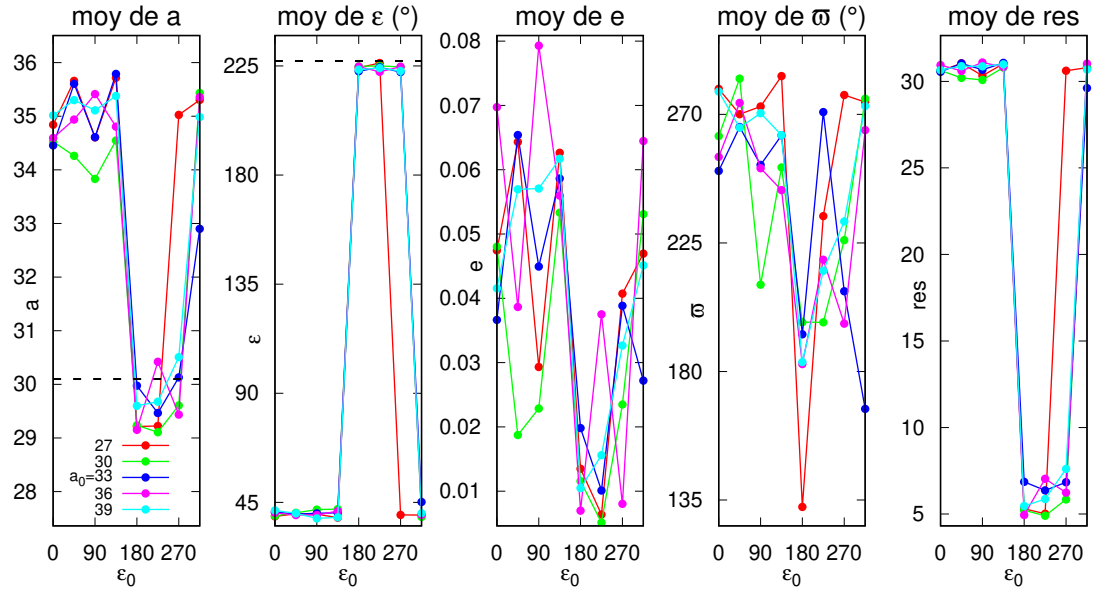


FIGURE 8.27 – Valeurs moyennes des paramètres a, ε, e, ϖ, *res* sur les différentes chaînes (il y en a 40 en tout) en fonction du point de départ (a_0, ε_0) ; la valeur de ε_0 se lit en abscisse et a_0 se lit dans la légende des graphes (légende identique pour les 5 graphes). Les graphes sont construits à partir des valeurs numériques écrites dans les tableaux se trouvant en haut de page

On constate un effet binaire sur a et ε lié au point de départ (a_0, ε_0) et surtout à ε_0 ; cet effet se voit aussi sur e et ϖ, mais est un peu plus étalé. Quand on part d'une valeur correcte pour ε_0, les valeurs finales pour e sont proches des valeurs réelles.
En s'appuyant sur le graphe des résidus, les valeurs correctes pour ε_0 sont $180°, 225°$ et $270°$. On en déduit les valeurs vraisemblables pour les 4 paramètres étudiés :

$$a = 29.5\,au\,;\ \varepsilon = 224°\,;\ e = 0.01\,;\ \varpi = 225°$$

ce qui donne une longitude vraie au 1/1/47 de 330.7° à 3° de la bonne valeur.

8.7.5 Détermination de la masse de Neptune

À partir de maintenant, on fait varier aussi la masse, de façon aléatoire, en faisant attention à ce qu'elle ne prenne pas de valeurs négatives.
On applique donc l'algorithme en faisant varier (a, ε, m) ; pour cela, on choisit ici le changement de points défini par : $a' = a + d_1 \cos\theta_1$; $\varepsilon' = \varepsilon + 10\,d_1 \sin\theta_1$; $m' = m + d_2 \sin\theta_2$
où d_1 et d_2 sont des constantes à choisir convenablement [6] et θ_1 et θ_2 sont deux angles aléatoires.
On maintient pendant les calculs h, k, q, p à zéro.

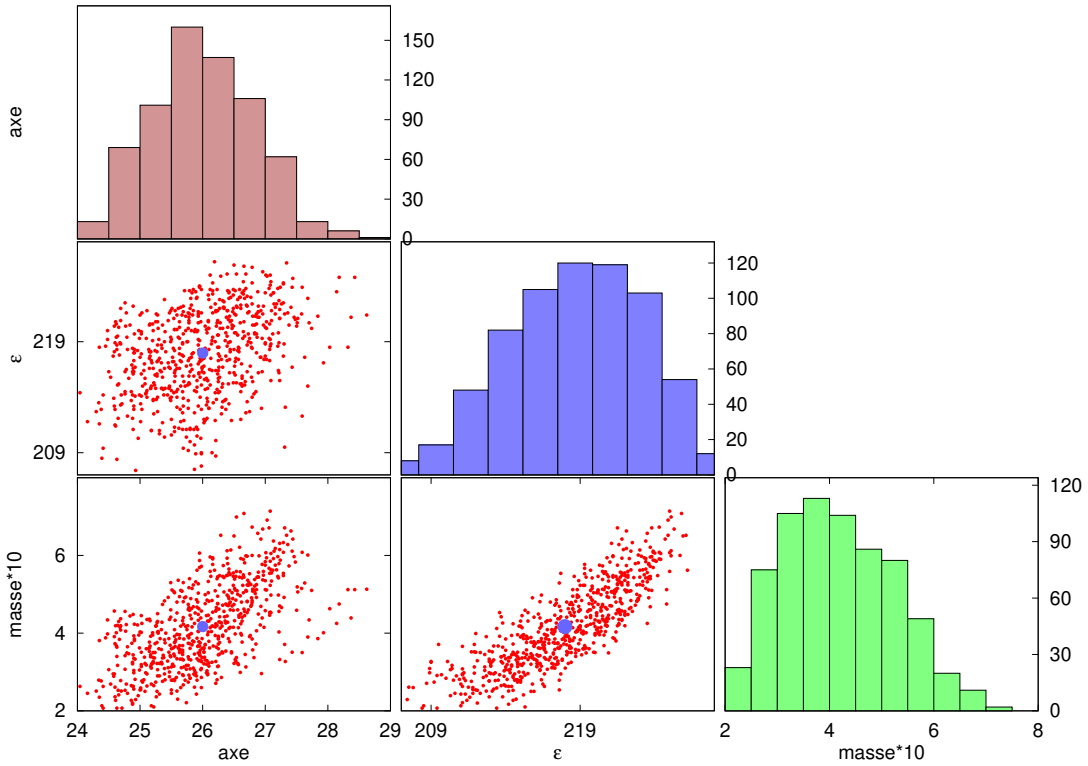


FIGURE 8.28 – Évolution des 3 paramètres : a, ε, m ; quand on part de valeurs assez proches des valeurs réelles : $a_0 = 33$, $\varepsilon_0 = 225°$ et $m_0 = 1.7\,m_{Ura}$, on tombe sur des valeurs finales (en bleu) pas très éloignées des valeurs correctes, mais nettement plus étalées que dans le cas précédent et globalement trop faibles pour a et m (4 dans le graphe en bas à gauche signifie en fait $0.4m_{Ura}$)

On a représenté à la figure 8.28 les points d'une chaîne partant de valeurs assez proches des valeurs réelles, à savoir $a_0 = 33\,au$, $\varepsilon_0 = 225°$ et $m_0 = 1.7\,m_{Ura}$. Les valeurs finales (en bleu) ne sont pas trop éloignées des valeurs réelles.
D'une manière générale, on peut faire pour cette recherche le même constat que dans les deux cas précédents : pour tout triplet de départ $(a_0, \varepsilon_0, m_0)$, on tombe sur une valeur finale raison-

6. On constate une augmentation très forte des rejets si l'on augmente beaucoup d_1 et d_2.

nablement correcte pour a : le plus souvent comprise entre 25 et 31 au ; on obtient le plus souvent un résultat binaire pour la valeur finale de ε : 45° ou 227°. La valeur finale de la masse est trop faible et dispersée, avec une moyenne 0.45 m_{Ura}, comparée à la valeur correcte 1.17 m_{Ura}, mais cohérente avec la valeur de a, globalement trop faible aussi, et m est une fonction croissante de a, comme on le voit en bas à gauche de la figure 8.28. On rappelle, en utilisant par exemple INPOP (fichier astrocst.t) ou bien [Berthier, 2021], que la bonne valeur pour m est 11.7 (c'est à dire 1.17 fois la masse d'Uranus).
On a confirmé la persistance des conclusions précédentes en modifiant les valeurs de d_1 et d_2 puis en adoptant une loi de probabilité basée sur des lois normales.

Sur les graphes suivants, on a représenté les valeurs moyennes des paramètres (a, ε, m) sur les différentes chaînes (il y en a 150 en tout), calculées en fonction du point de départ (a_0, ε_0, m_0). On retrouve un effet binaire sur ε ; la valeur de a est souvent respectée, mais globalement un peu faible ; en corrélation, la masse est aussi globalement trop faible.

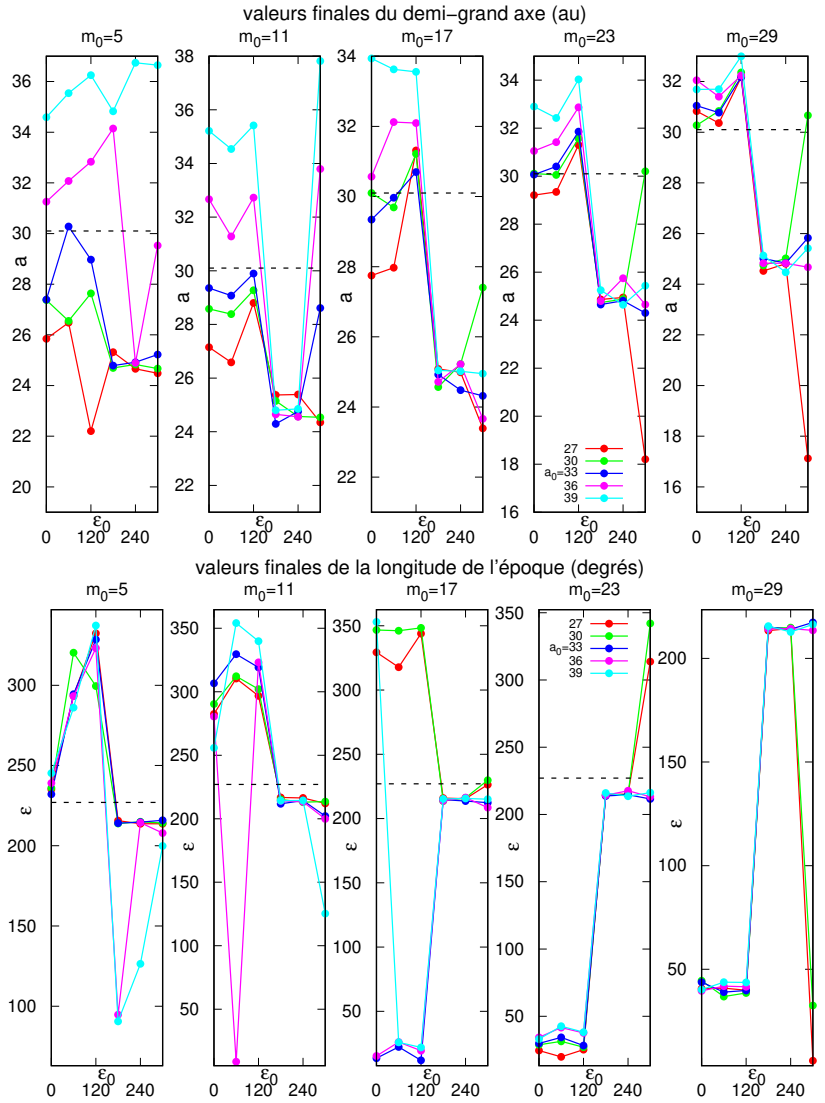


FIGURE 8.29 – Valeurs finales de a (en haut) et ε (en bas) en fonction du point de départ (a_0, ε_0, m_0) de la chaîne : ε_0 se lit en abscisse, a_0 sur la légende et m_0 au-dessus du graphe

On constate l'effet binaire sur la variable ε, en particulier sur les 3 derniers graphes du bas.

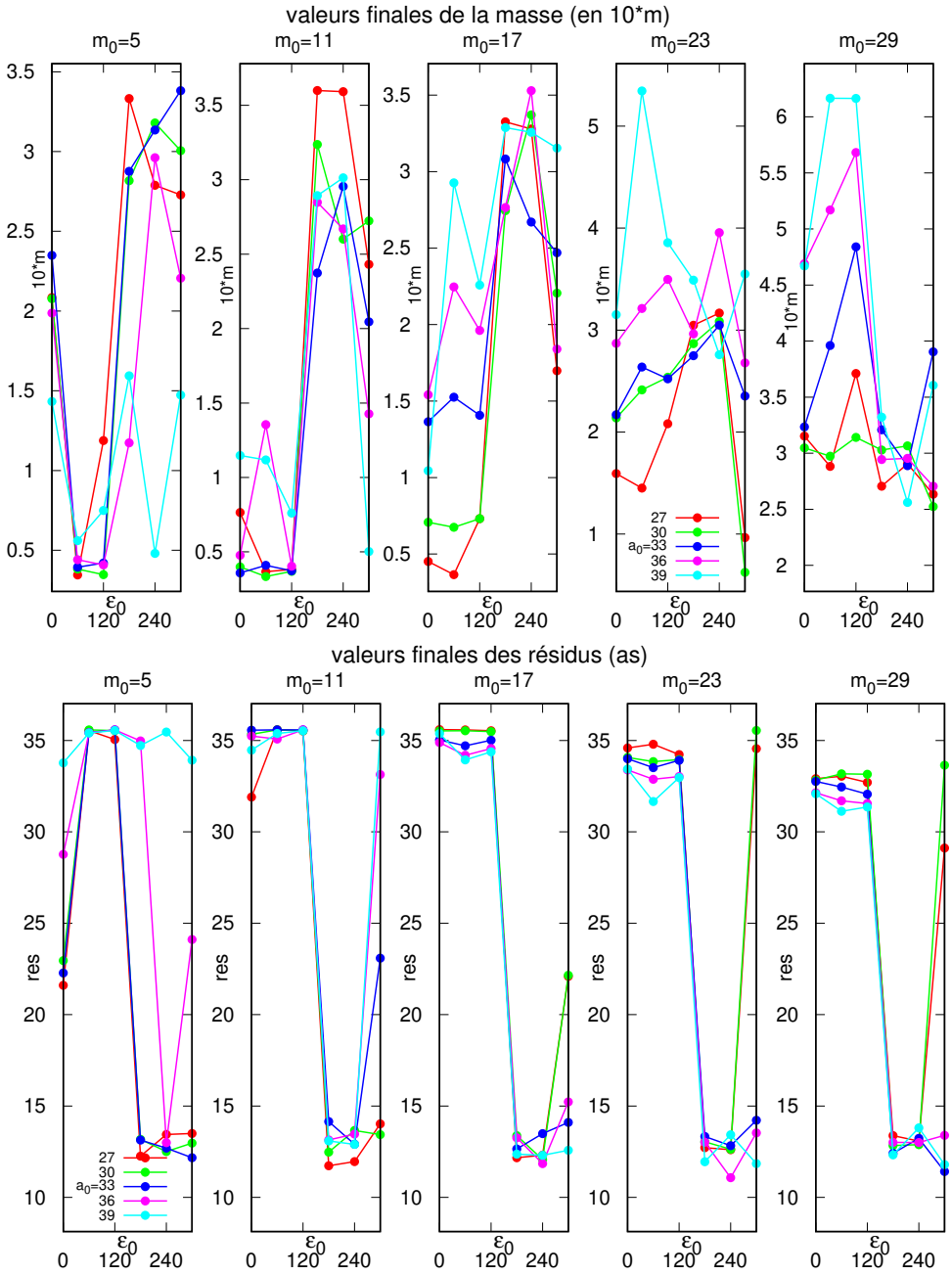


FIGURE 8.30 – Valeurs finales des paramètres m (en haut) et des résidus (en bas) en fonction du point de départ (a_0, ε_0, m_0) de la chaîne. Les valeurs finales de m sont trop faibles (la valeur correcte est 11.7), associées à des valeurs de a globalement trop faibles aussi (voir figure précédente) ; on le voit surtout pour $\varepsilon_0 = 180°$ et $\varepsilon_0 = 240°$, qui sont près des valeurs correctes

À l'aide du graphe des résidus, on lit que les bonnes valeurs pour ε_0 sont 180°, 240° et éventuellement 300°. Les valeurs vraisemblables pour les paramètres étudiés se lisent sur les graphes pour ces valeurs de ε_0 :

$$a = 25\,au\,;\ \varepsilon = 215°\,;\ m = 0.3 m_{Ura}\,;$$

valeurs qui sont assez éloignées des valeurs réelles, mais cohérentes entre elles : toutes les trois sensiblement trop faibles.
Avec ces valeurs, la longitude vraie au 1/1/47 serait de 350°, ce qui est nettement trop fort.

8.7.6 Évolutions simultanées des 7 paramètres de Neptune

Échantillonnage de Gibbs (encadré 18)

Quand on applique l'algorithme de Metropolis-Hastings, pour un univers possédant un grand nombre N de paramètres, le passage de x_i à x' (voir encadré 17, p. 309) peut être trop brutal. Dans l'échantillonnage de Gibbs, les composantes sont modifiées les unes après les autres selon le schéma suivant :
– On part d'une valeur x_i ayant n composantes $x_{i,j}$
– On considère la composante $x_{i,j}$ que l'on change aléatoirement en $x'_{i,j}$; on note x'_i le point obtenu à partir de x_i en faisant passer sa j-ème composante de $x_{i,j}$ à $x'_{i,j}$.
– On applique le test de rejet pour le passage de x_i à x'_i
– Si le test est réussi, on pose $x_{i+1} = x'_i$ et on reprend le calcul à la composante $j+1$ de x_{i+1}
– Si le test échoue, on reprend le calcul avec la composante j de x_i.

Le code pour Gibbs est donc très voisin du précédent mais, au lieu d'effectuer le test de rejet à chaque changement de point dans la chaîne, on effectue ce test à chaque changement de coordonnée. On multiplie ainsi le nombre de tests de rejets par N, ce qui peut rallonger de façon significative l'exécution complète de l'algorithme. C'est le cas pour la recherche de Neptune, car il faut lancer INPOP à chaque opération, et calculer les résidus associés, ce qui prend une trentaine de secondes ; le nombre de tests est de l'ordre de $1000 \times 7 \times 3$, en prenant un taux d'acceptation égal à 1/3, ce qui donne un temps de calcul d'une centaine d'heures ; de plus, ce calcul doit être répété pour tous les triplets $(a_0, \varepsilon_0, m_0)$ retenus, soit ici 150 ; comme ces différents calculs sont heureusement indépendants les uns des autres et ne nécessitent chacun qu'un seul cœur, on peut les lancer ensemble sur une machine de l'IMCCE, capable d'effectuer 72 calculs en parallèle.

8.7.6.1 Quelques considérations sur l'organisation de l'algorithme

Dans les paragraphes suivants, on va faire évoluer les 7 paramètres de Neptune, simultanément ; la façon de faire évoluer ces paramètres a un impact certain sur les résultats ; quand le nombre de paramètres à faire évoluer est élevé, on peut utiliser un échantillonnage de Gibbs, qui permet de construire une chaîne de façon plus souple ; ce mode d'échantillonnage est décrit dans l'encadré 18, mais ne sera utilisé qu'au § 8.7.6.5.
Pour tester la stabilité des conclusions que l'on va tirer vis-à-vis de la méthode choisie, on utilisera deux lois de probabilité dans l'univers Ω : une avec une distance "fixe" entre deux éléments successifs de la chaîne et une autre basée sur la loi normale. Et pour comparaison, on construira d'abord des chaînes sans utiliser l'algorithme de Gibbs, puis en l'utilisant, soit en tout 4 façons de passer d'un point à un autre.
On fait aussi plusieurs essais pour déterminer des paramètres judicieux dans la loi de probabilité f. On constate dans tous les cas le même type de comportement, en particulier une augmentation importante et inattendue de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique lorsque l'on part d'un triplet un peu éloigné de la valeur réelle, inclinaison qui peut aller jusqu'à 32° : la valeur de i reste faible pendant plusieurs centaines d'itérations, puis augmente assez rapidement et reste à des valeurs élevées jusqu'à la fin des calculs et c'est la valeur de q qui augmente de façon importante. Par contre, si l'on part de valeurs proches des valeurs réelles, la valeur finale de l'inclinaison est raisonnable : de 0° à 4° si l'on n'utilise pas l'échantillonnage de Gibbs, mais elle peut atteindre des valeurs élevées si on utilise l'échantillonnage de Gibbs.
D'une manière générale, quand on part d'un jeu de valeurs 'éloigné' des valeurs réelles, les valeurs finales sont aussi éloignées des valeurs réelles et les résidus sont élevés.

8.7.6.2 Exemples de chaînes quand on fait évoluer les 7 paramètres de Neptune

Chaîne partant de valeurs éloignées des valeurs réelles

On choisit ici $a_0 = 39\,au$, $\varepsilon_0 = 60°$ et $m_0 = 0.5\,m_{Ura}$.

Cette chaîne aboutit à des valeurs décalées d'environ 180° pour la longitude de l'époque. La valeur de a est globalement trop élevée et en corrélation avec celle de m, trop élevée aussi. La valeur de e est aussi trop élevée, ce qu'on expliquera au chapitre 8. La valeur de i est de façon étonnante très élevée aussi et cette valeur élevée est difficilement explicable.

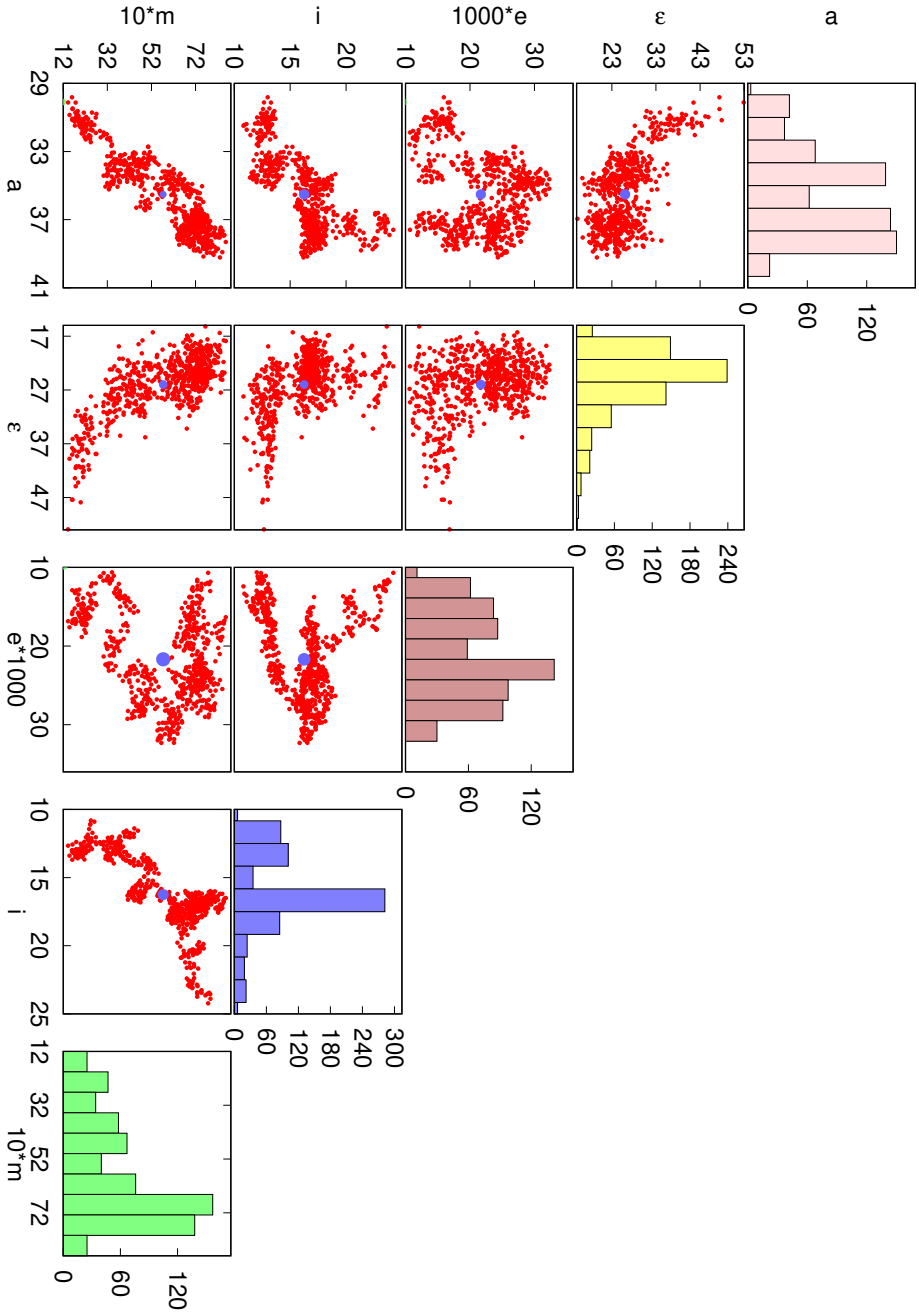


FIGURE 8.31 – Chaîne partant de valeurs éloignées des valeurs réelles, $a_0 = 39\,au$, $\varepsilon_0 = 60°$ et $m_0 = 5\,(= 0.5 m_{Ura})$ et aboutissant à une valeur incorrecte de ε ; la valeur de l'inclinaison est très surprenante

Chaîne obtenue en partant d'un jeu de valeurs proche des valeurs reélles
On choisit ici $a_0 = 31\,au$, $\varepsilon_0 = 240°$ et $m_0 = 17$, soit $m_0 = 1.7 m_{Ura}$
On constate que les valeurs moyennes (points bleus) sont raisonnablement proches des valeurs réelles (points verts), en particulier la valeur de i, contrairement à la situation précédente.

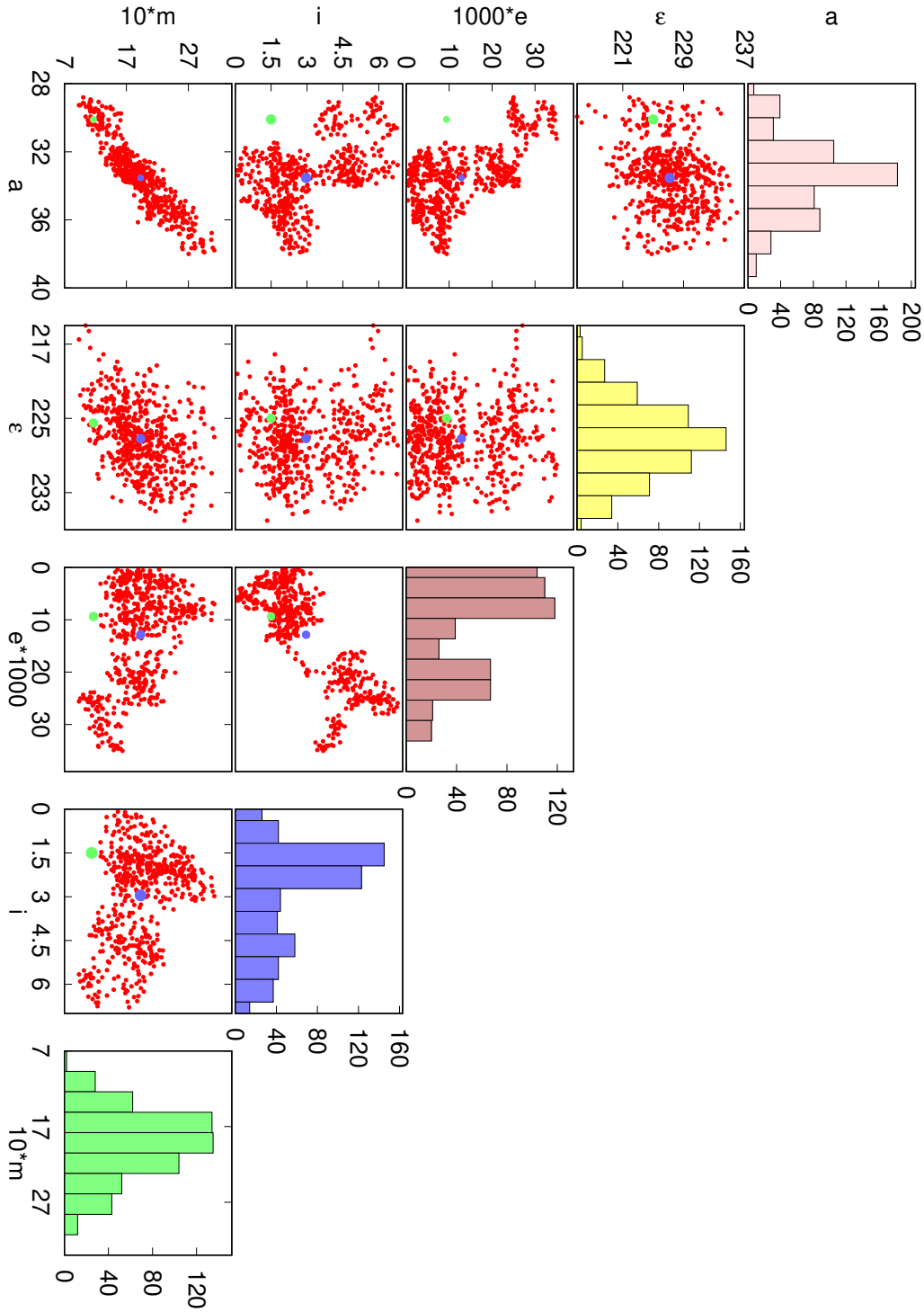


FIGURE 8.32 – Chaîne obtenue à partir d'un départ proche des valeurs réelles : $a_0 = 31\,au$, $\varepsilon_0 = 240°$ et $m_0 = 17$ ($= 1.7\,m_{Ura}$), sans utiliser l'échantillonnage de Gibbs

8.7.6.3 Répartition des moyennes des paramètres dans les différentes chaînes en fonction des paramètres initiaux

On commence avec le demi-grand axe et la longitude de l'époque.

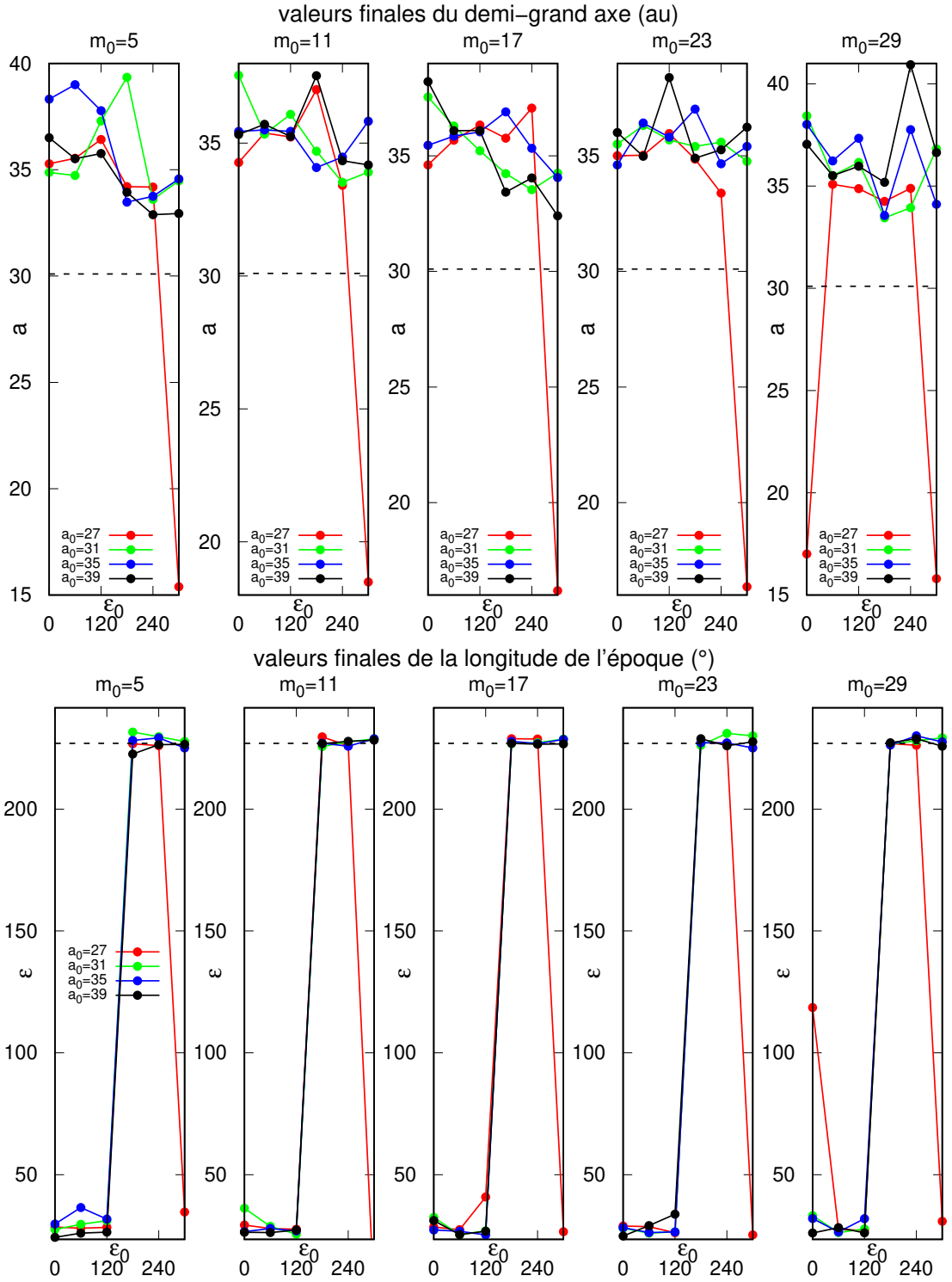


FIGURE 8.33 – Évolution de l'axe (en haut) et de la longitude de l'époque (en bas) en fonction des paramètres de départ. ε_0 se lit en abscisse, a_0 en légende et m_0 dans le titre. On constate une répartition binaire pour la longitude de l'époque vers 38° ou 225°

On peut aussi observer comment se répartissent les moyennes des paramètres e et m dans la chaîne en fonction des paramètres initiaux.

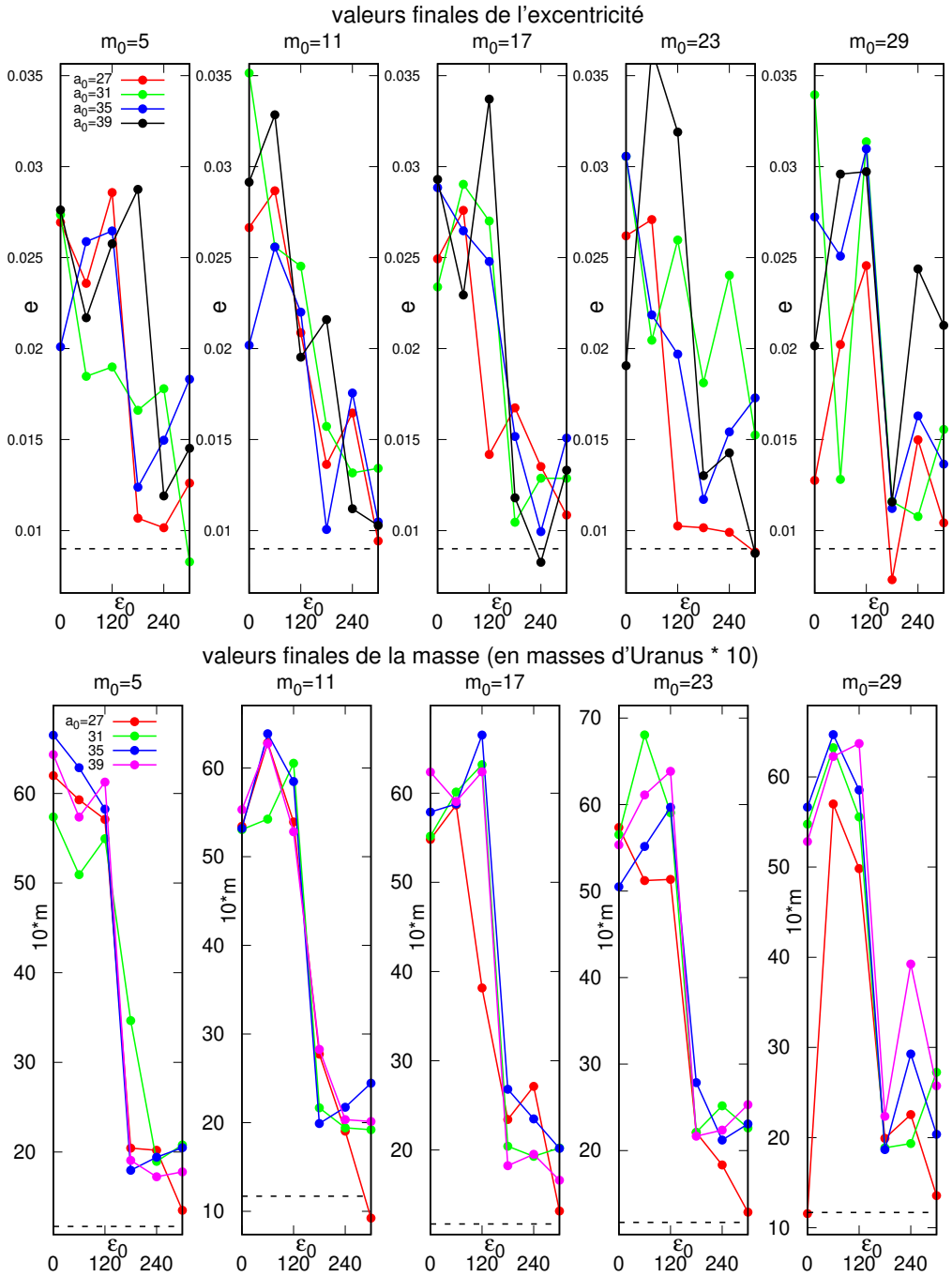


FIGURE 8.34 – Évolution de l'excentricité (en haut) et de la masse (*10 en bas, en masses d'Uranus) en fonction des paramètres de départ. ε_0 se lit en abscisse, a_0 dans la légende et m_0 dans le titre. On constate que la valeur de la masse est beaucoup trop élevée quand la valeur initiale de ε est trop éloignée de la valeur réelle, mais en cohérence avec une valeur globalement trop élevée pour a, comme on le voit à la figure 8.33

On représente à la fig. 8.35 l'évolution de l'inclinaison et de ϖ en fonction du triplet de départ $(a_0, \varepsilon_0, m_0)$.

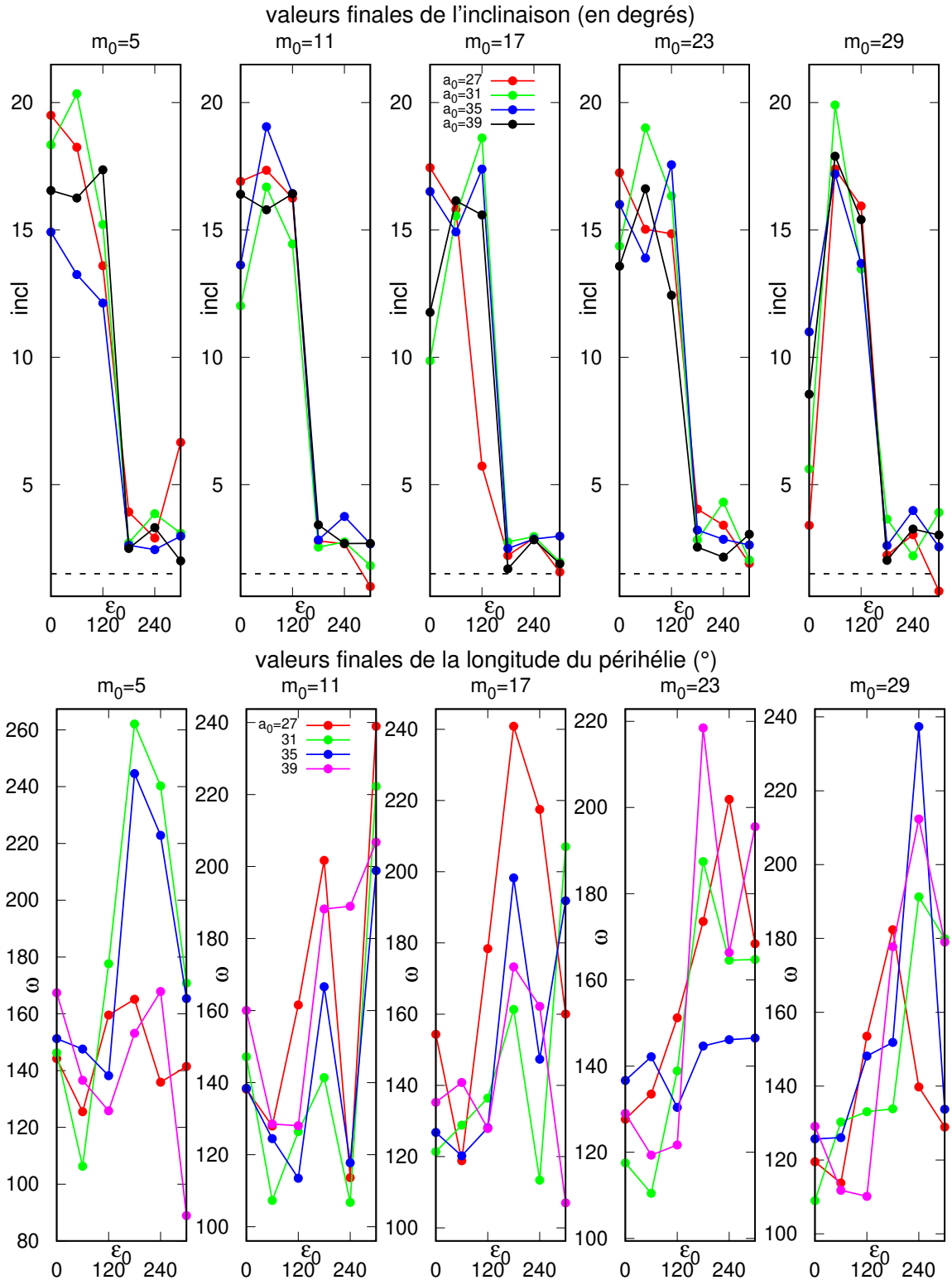


FIGURE 8.35 – Évolution de l'inclinaison et de la longitude du périhélie en fonction des valeurs de départ (a_0, ε_0, m_0). On constate ici aussi une répartition quasi binaire pour l'inclinaison, mais des valeurs très dispersées pour la longitude du périhélie.

On n'a pas reproduit les graphes concernant Ω, car les valeurs trouvées sont très dispersées et Ω n'est pas très utile pour la suite, puisque l'orbite est proche de l'écliptique.

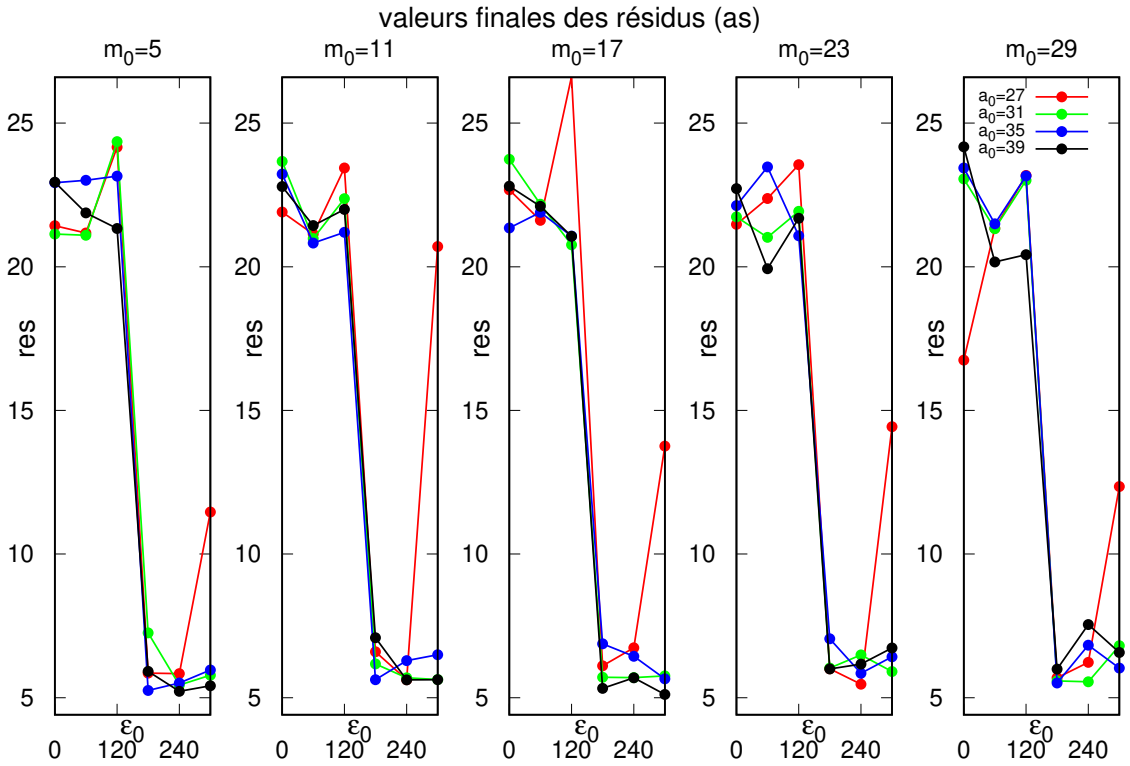


FIGURE 8.36 – Évolution des résidus sur l'observable d'Uranus en fonction des valeurs de départ (a_0, ε_0, m_0). On constate ici aussi une répartition quasi binaire.

8.7.6.4 Résultat final pour une recherche portant sur les 7 paramètres de Neptune

En s'appuyant sur les valeurs obtenues pour les résidus, on peut estimer que les bonnes valeurs pour ε_0 sont 180° et 240°. On lit alors les valeurs vraisemblables pour les paramètres :

$$\boxed{a \simeq 34\,au\,;\,\varepsilon \simeq 227° : e \simeq 0.12\,;\,m \simeq 2m_{Ura} \text{ et } i \simeq 2°}$$

ce qui donne un ensemble tout à fait raisonnable et cohérent.

Et on constate que ce jeu de valeurs est proche de celui trouvé par Le Verrier !

Prédiction : on peut commencer par une estimation pour la longitude moyenne au 1/1/1847 :

$$\lambda = 227 + 2 * \pi * (\tfrac{1}{34})^{\frac{3}{2}} * 47 * \tfrac{180}{\pi} = 312.^{\circ}5$$

En prenant pour ϖ une moyenne des valeurs que l'on peut lire sur les graphes pour $\varepsilon_0 = 180°$ et $\varepsilon_0 = 240°$, moyenne que l'on peut estimer à environ 180°, on trouverait, en tenant compte de l'excentricité, pour la longitude vraie au 1/1/47 :

$$\ell = \lambda + 2e\sin(\lambda - \varpi) \simeq 324°$$

Ainsi, sans aucune connaissance préalable, on localiserait à 3° près la planète perturbatrice en appliquant l'algorithme de Metropolis-Hastings.

Mais l'orbite obtenue est assez éloignée de l'orbite réelle ; en fait, comme on vient de le constater, elle est, de façon étonnante, proche de l'orbite trouvée par Le Verrier.

Pour la recherche visuelle, il faudrait prévoir une petite marge pour la déclinaison, qui doit être très faible, puisque l'inclinaison sur l'écliptique est de l'ordre de 2°.

8.7.6.5 Utilisation de l'échantillonnage de Gibbs

On examine une chaîne obtenue par un échantillonnage de Gibbs, à partir de valeurs favorables : $a_0 = 32\,au$, $\varepsilon_0 = 240°$ et $m_0 = 17$ (=$1.7\,m_{Ura}$).

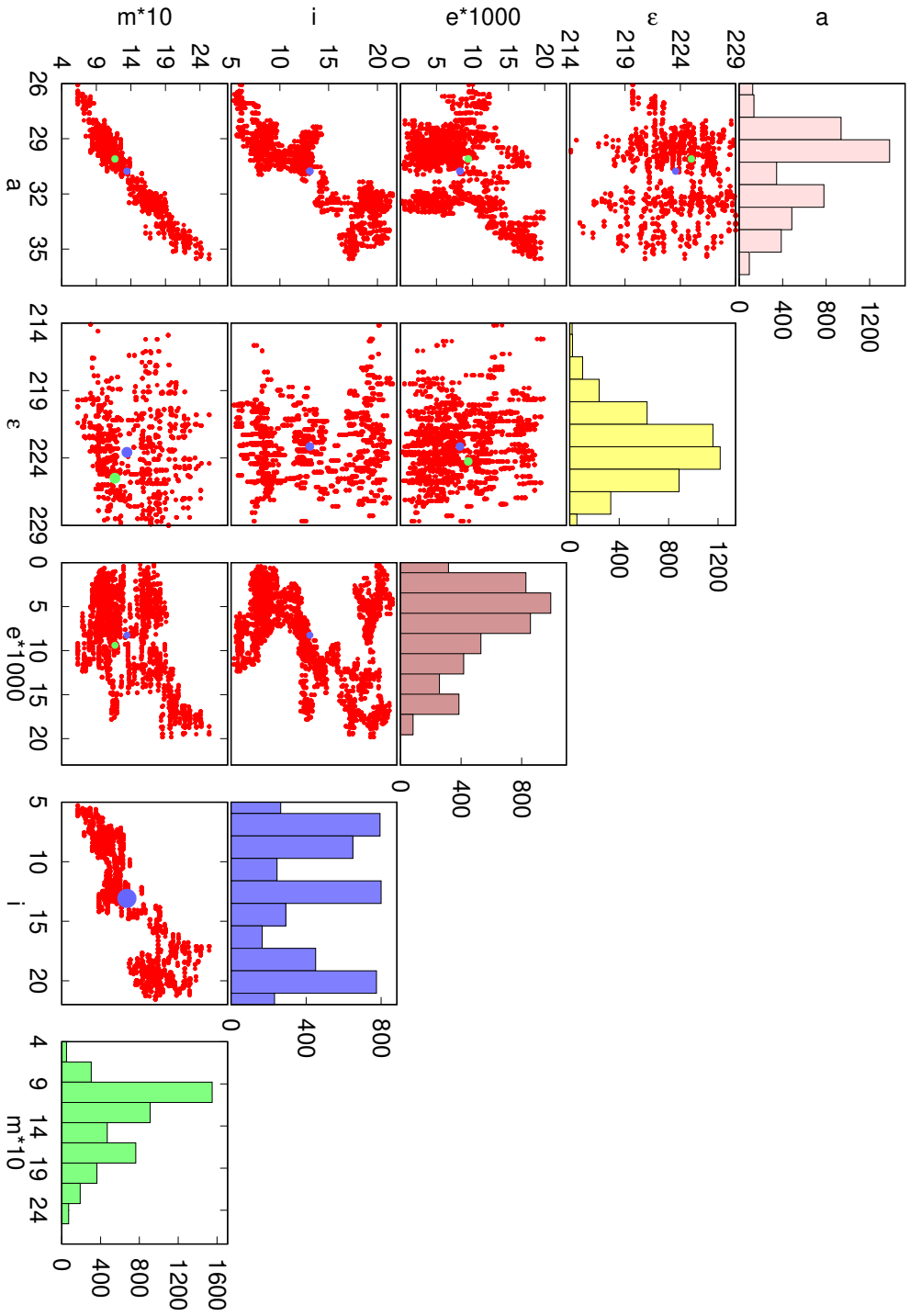


FIGURE 8.37 – On a représenté une chaîne obtenue en s'appuyant sur un échantillonnage de Gibbs, à partir de valeurs favorables : $a_0 = 32\,au$, $\varepsilon_0 = 240°$ et $m_0 = 17$. La répartition des valeurs est plus dispersée que sans échantillonnage de Gibbs, donc moins exploitable. Le choix de l'échantillonnage de Gibbs ne semble donc pas adapté dans le cas de la recherche de Neptune

8.7.6.6 Commentaires sur l'ensemble des calculs effectués avec l'algorithme de Métropolis-Hastings

En reprenant l'ensemble des résultats obtenus dans cette section, on peut constater que, plus le nombre de paramètres à faire évoluer est grand (c'était dans l'ordre 2, 4, 3 et 7), plus la dispersion des valeurs finales est élevée. En particulier, la recherche de m semble perturber les valeurs retournées pour les autres paramètres. On avait été amené à faire le même genre de constatations [7] avec l'évaluation des incertitudes formelles sur les valeurs finales des paramètres de Neptune au § 8.2. On a vu aussi que l'utilisation de l'échantillonnage de Gibbs n'améliorait pas la précision des prédictions.

8.7.7 Utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings avec des observations modernes 'exactes'

On pourrait imaginer que l'effet binaire rencontré dans les calculs précédents pourrait être dû aux incertitudes sur les données d'observations retenues par Le Verrier. En fait non : si l'on part de données 'exactes' fournies par INPOP, par exemple sur la tranche 1900−2100, on retrouve ce même effet binaire sur la longitude de l'époque en appliquant l'algorithme de Metropolis-Hastings portant sur les 7 paramètres de Neptune. Mais on peut, comme dans le cas précédent, facilement trancher entre les deux valeurs finales en s'appuyant sur les valeurs des résidus.
On peut prédire une position pour Neptune à 2° près.

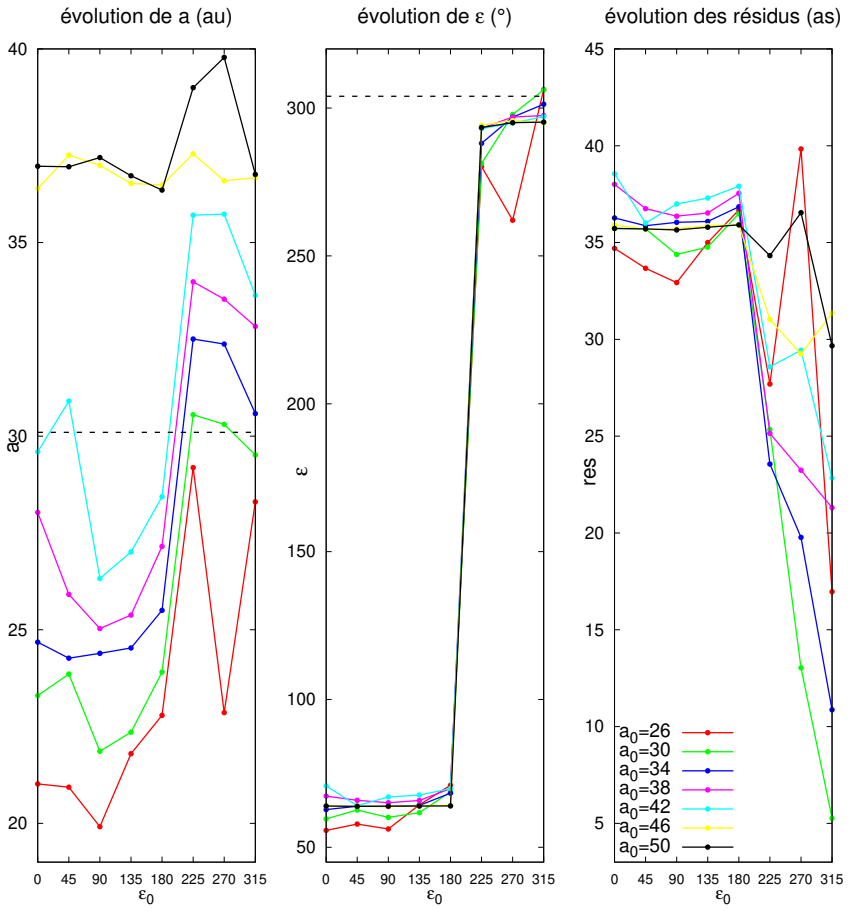


Figure 8.38 – Moyennes des valeurs de a, ε, res sur les différentes chaînes pendant une recherche d'orbites circulaires s'étalant sur la période 1900−2100. Pour les bonnes valeurs (courbe verte par exemple), le résidu est presque nul. On remarque un effet binaire sur la longitude de l'époque. La bonne valeur est 306°

7. Mais avec l'utilisation de INPOP, l'évaluation de la masse était très précise.

8.8 Importance de la date de conjonction héliocentrique d'Uranus et de Neptune

L'objectif principal de Le Verrier était de déterminer les éléments elliptiques de la planète perturbatrice au 1/1/1800 ; les valeurs trouvées, bien qu'elles soient très éloignées des valeurs réelles – à part la longitude de l'époque – l'ont néanmoins conduit à placer Neptune à environ 1 degré de la position réelle, comme on le voit à la figure 11.3.
Comment expliquer ce très bon résultat avec des valeurs finales aussi éloignées de la réalité ? Le détail du calcul de la position au 23/9/46 est donné au chapitre 6 (table 6.9) : on y constate les compensations introduites par la forte excentricité et la valeur très erronée de la longitude du périhélie. Ces compensations ne sont sûrement pas fortuites, les deux paramètres étant largement corrélés avec la longitude commune au moment de la conjonction héliocentrique Soleil-Uranus-Neptune, comme on l'a déjà constaté à plusieurs reprises.

Dans cette section, on va essayer de mettre en évidence le rôle essentiel joué par la conjonction de 1822 ; on rappelle que cette conjonction a eu lieu en fait le 6 octobre 1821, mais la littérature sur le sujet (Lyttleton [Lyttleton, 1960], Brown [Brown, 1931], Tisserand [Tisserand, 1880]...) a retenu la date de 1822, confusion légère, mais néanmoins étonnante de la part de mathématiciens-astronomes habitués à la plus grande précision numérique.
Le Verrier a eu la chance que cette date (1822) appartienne à l'intervalle 1690−1845, contenant toutes ses observations. Bouvard n'a pas eu la même chance : sa série d'observations se termine en 1821 par une accélération régulière du mouvement d'Uranus, du fait du rapprochement d'Uranus vers Neptune. On examine d'abord le cas d'orbites circulaires pour Neptune au § 8.8.1, puis on prend le cas d'orbites elliptiques au § 8.8.2.

8.8.1 Cas d'orbites circulaires pour Neptune

On commence par examiner le cas d'une orbite circulaire pour Neptune (i.e. $e' = 0$) pour 8 valeurs de α et pour une masse de Neptune égale à celle d'Uranus.

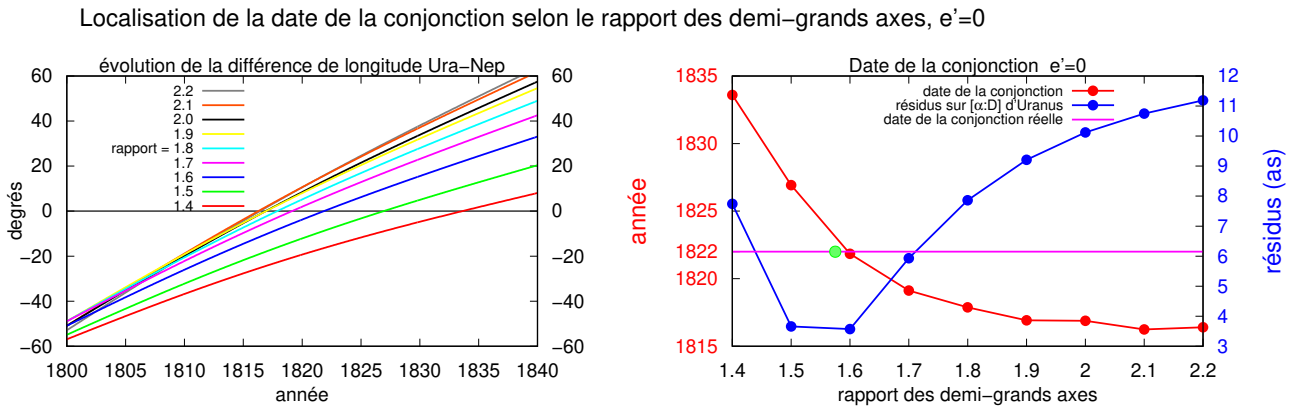


FIGURE 8.39 – (À gauche) Écart entre la longitude vraie d'Uranus et la longitude vraie de Neptune pendant la période 1800−1840 en fonction du rapport des demi-grands axes. L'excentricité de Neptune a été fixée à 0. On en déduit la date de la conjonction ainsi que le résidu sur l'observable d'Uranus à cette date. (À droite) On trace les variations de cette date de conjonction en fonction du rapport des demi-grands axes. On constate que l'on tombe sur une bonne valeur, 1822, pour la bonne valeur, 1.57, du rapport des demi-grands axes (disque vert).

Principe du calcul : Pour chaque valeur de α, on fait varier la longitude de l'époque ε' avec un pas de 2°. Pour chaque valeur de ε', on ajuste les paramètres d'Uranus pour minimiser les

écarts ($O_{LV} - C$) entre position observée et position calculée d'Uranus ; on sélectionne ensuite la longitude de l'époque de la planète troublante qui donne un résidu minimal pour l'observable d'Uranus. On peut alors calculer, à partir de cette longitude, l'écart entre les longitudes vraies de Neptune et d'Uranus et ainsi déterminer la date de la conjonction ; le tracé de l'écart est fait fig. 8.39 (graphe de gauche) et celui de la date de conjonction comme fonction de α est fait dans le graphe de droite de cette même figure ; on a tracé aussi la courbe des résidus.
On constate que le résidu minimal se produit au voisinage de la valeur correcte du rapport des demi-grands axes (1.57) et que l'on tombe sur la bonne valeur de la date de conjonction, c'est-à-dire fin 1821, pour cette valeur de α. On va montrer dans le paragraphe suivant que l'on doit faire des constatations du même ordre pour des orbites elliptiques.

8.8.2 Cas d'orbites elliptiques

On choisit 3 valeurs pour α : $\alpha = 2.0, 1.8, 1.6$.
Il y aura donc 3 représentations, pour les 3 valeurs de α retenues, chaque représentation comportant 3 graphes dont la signification est donnée un peu plus bas.
Le principe est le suivant : pour chacune de ces 3 valeurs de α, on teste 5 valeurs de e',

$$e' = 0.03,\ 0.06,\ 0.09,\ 0.12,\ 0.15$$

et pour chaque valeur de e', on teste 8 valeurs de ϖ', $\varpi' = k\,45°$, $k = 0 : 7$.
Pour chaque valeur du triplet (α, e', ϖ'), on fait varier ε' avec un pas de 2°. Une fois ces 4 paramètres fixés, on lance INPOP, qui ajuste uniquement les éléments d'Uranus ; on note le résidu final pour l'observable d'Uranus. Ensuite, on sélectionne la longitude de l'époque de Neptune ε' qui conduit au résidu minimal. On détermine, à l'aide du fichier `astrocst.t` d'INPOP associé, les éléments elliptiques d'Uranus et de Neptune correspondants à ce minimum. À partir de ces éléments, on peut évaluer la différence de longitude vraie entre Uranus et Neptune sur la période 1810−1845 et en déduire la date de la conjonction.
Pour chacune des 3 valeurs de α (2.0, 1.8, 1.6), on trace une figure (fig. 8.40, 8.41 et 8.42 respectivement) comportant chacune 3 graphes dont voici la signification :
Sur le graphe du haut, on a tracé les dates de la conjonction en fonction de ϖ' pour les 5 excentricités retenues.
Sur le graphe intermédiaire, on a tracé la distance qui sépare Uranus de Neptune **à cette date de conjonction** ainsi que les anomalies vraies en fonction de ϖ' à cette même date.
Enfin, sur le graphe du bas, on a reporté le résidu minimal toujours en fonction de ϖ'.

C'est ce dernier graphe qui va permettre d'interpréter les résultats.

Prenons d'abord le graphe correspondant à $\alpha = 2.0$ (fig. 8.40) ; on voit que le résidu minimal se produit pour ϖ' de l'ordre de 250° et que ce résidu minimal est d'autant plus faible que e' est plus grand ; on lit aussi que pour cette valeur de ϖ', l'anomalie vraie de Neptune est proche de 0, ce qui signifie que Neptune, à la conjonction, est proche de son périhélie ; et la date de la conjonction est voisine de 1820.
Les constatations sont très voisines pour $\alpha = 1.8$: la conjonction se produit quand Neptune est proche de son périhélie. La solution la plus proche de celle qu'avait trouvée Le Verrier ($e' = 0.107$ et $\varpi' = 285°$) est intermédiaire entre la courbe en rose et celle en bleu : on voit que la date de la conjonction est voisine de 1819 et que Neptune est très proche de son périhélie.
Pour $\alpha = 1.6$, les conclusions sont moins nettes, car le minimum est plus étalé, ce qui est assez naturel pour une orbite réelle quasi circulaire.

On a dessiné les trois figures que l'on vient de présenter, fig. 8.40, fig. 8.41 et fig. 8.42, sur les trois pages suivantes.

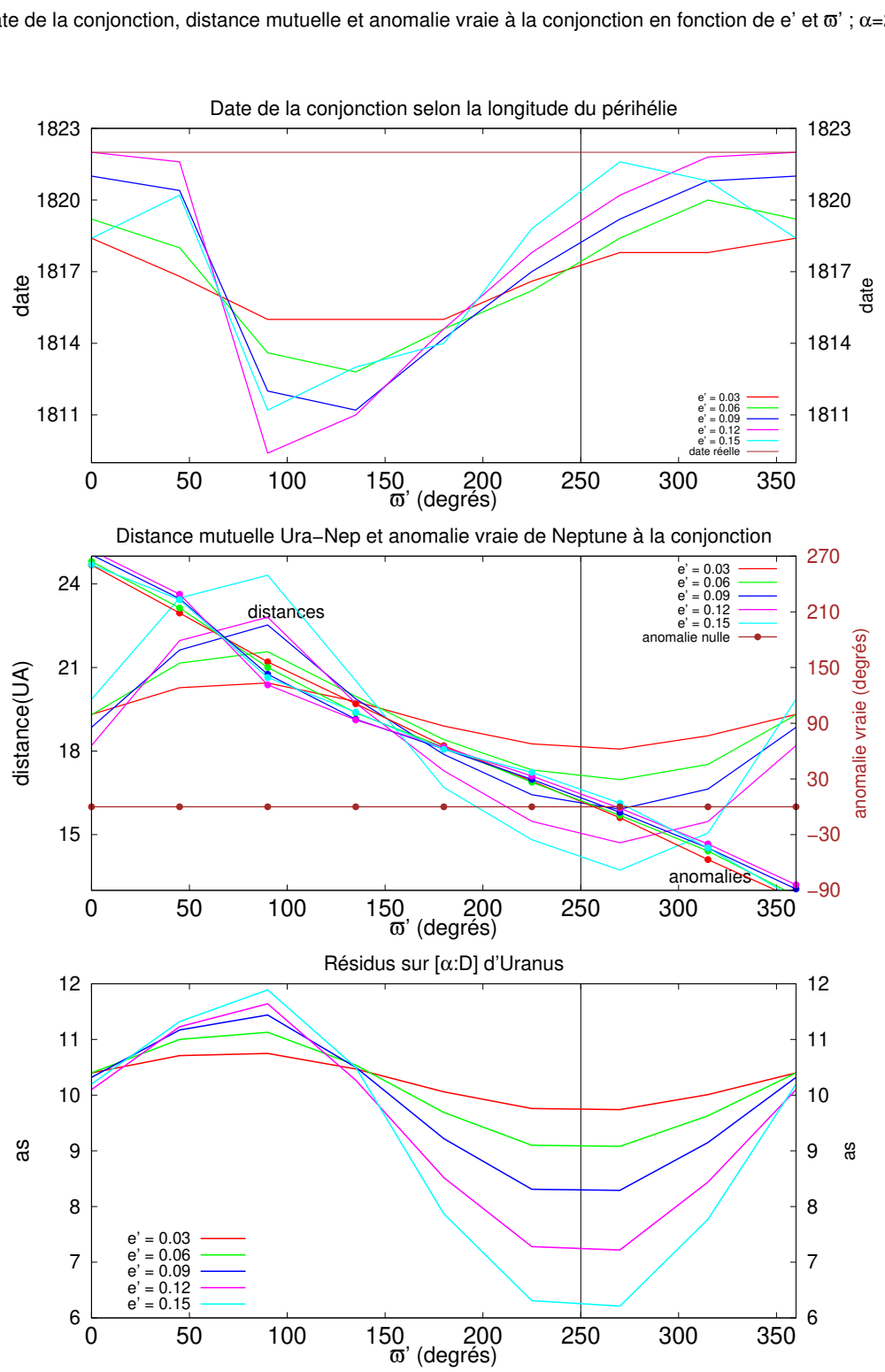


FIGURE 8.40 – Relation entre date de conjonction et position du périhélie de Neptune pour un rapport des demi-grands axes égal à 2.0. (En haut) date de la conjonction en fonction de la longitude du périhélie de Neptune. (Au milieu) distance entre Uranus et Neptune au moment de la conjonction, et en lignes-points les courbes d'anomalie vraie de Neptune au moment de la conjonction. (En bas) résidus sur l'observable d'Uranus en fonction de la longitude du périhélie de Neptune.

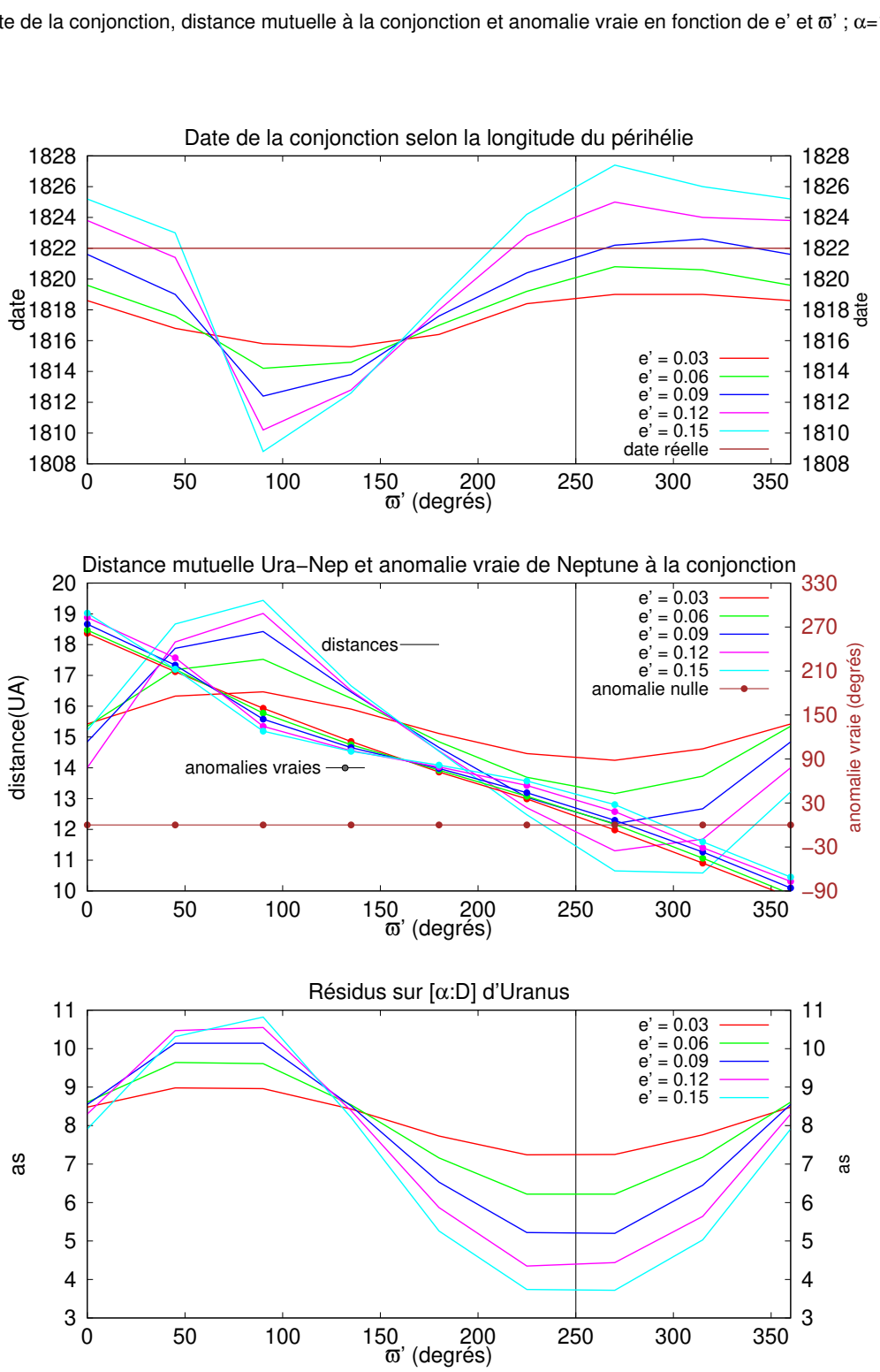


FIGURE 8.41 – Relation entre date de conjonction et position du périhélie de Neptune pour un rapport des demi-grands axes égal à 1.8. (En haut) date de la conjonction en fonction de la longitude du périhélie de Neptune. (Au milieu) distance entre Uranus et Neptune au moment de la conjonction, et en lignes-points les courbes d'anomalie vraie de Neptune au moment de la conjonction. (En bas) résidus sur l'observable d'Uranus en fonction de la longitude du périhélie de Neptune.

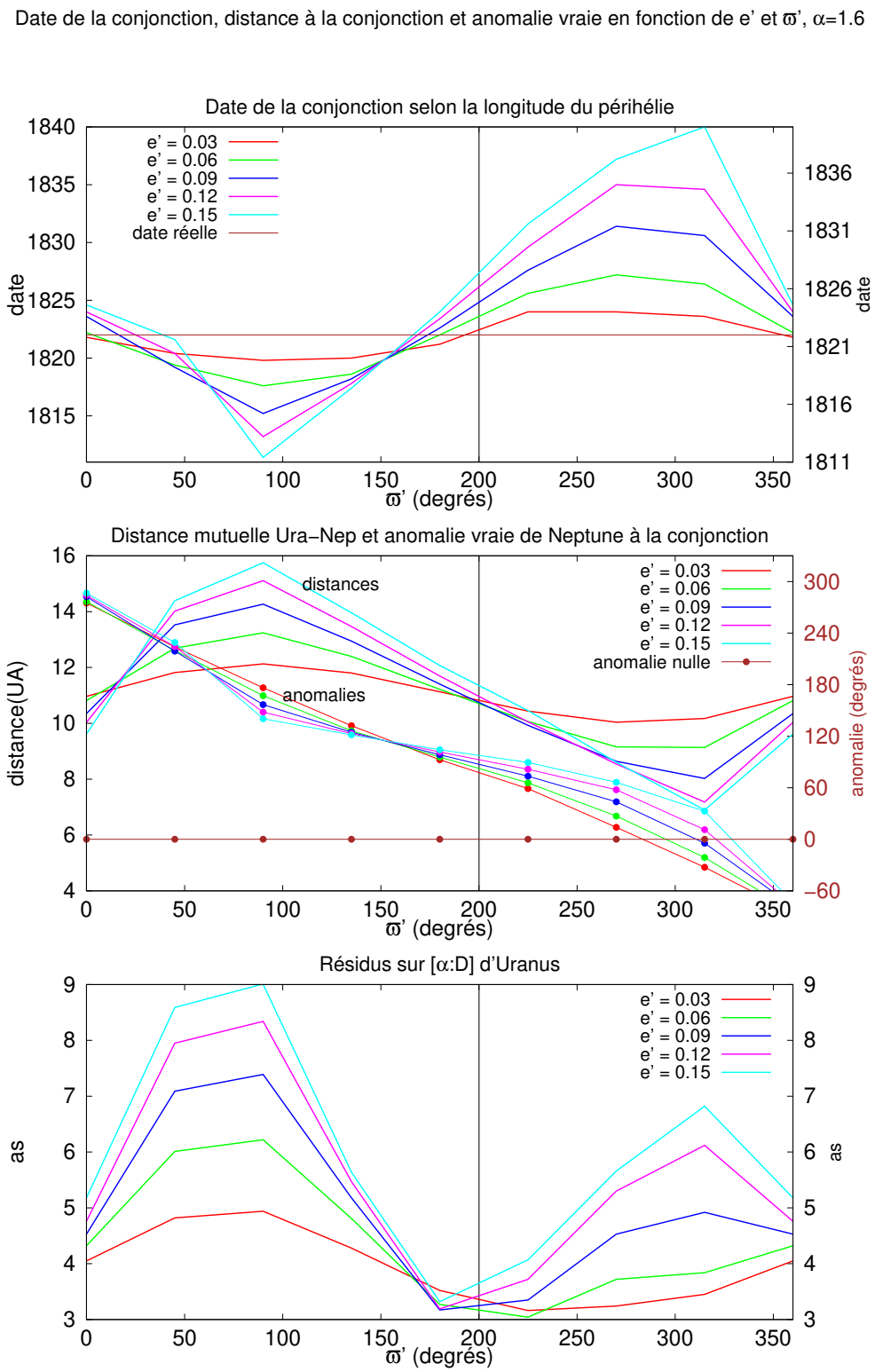


FIGURE 8.42 – Relation entre date de conjonction et position du périhélie de Neptune pour un rapport des demi-grands axes égal à 1.6. (En haut) date de la conjonction en fonction de la longitude du périhélie de Neptune. (Au milieu) distance entre Uranus et Neptune au moment de la conjonction, et en lignes-points les courbes d'anomalie vraie de Neptune au moment de la conjonction. (En bas) résidus sur l'observable d'Uranus en fonction de la longitude du périhélie de Neptune. Le minimum des résidus est moins marqué que dans les deux cas précédents, car $\alpha = 1.6$ correspond à une orbite quasi circulaire

8.8.3 Rôle de l'excentricité dans le placement de Neptune

Sur ces différentes représentations, on constate (figure du bas) que si le demi-grand axe est trop élevé (cas $\alpha = 1.8$ ou $\alpha = 2.0$), l'excentricité de Neptune correspondant au résidu minimal augmente, Neptune se place, au moment de la conjonction, près de son périhélie, car l'anomalie vraie est proche de 0 (figure du milieu) et le périhélie tend à se placer près de la bonne position de Neptune en 1822 (273°), ce qui rapproche considérablement les deux planètes à cette date, et ce qui compense en grande partie la valeur excessive donnée initialement au demi-grand axe de Neptune. Ainsi, avec les valeurs les plus proches de celles trouvées par Le Verrier, la distance à la conjonction tombe à 14 *au*, alors que la valeur correcte est 11.5.

En anticipant un peu, on peut constater que le 'scenario' qui vient d'être décrit – augmentation de l'excentricité et placement de Neptune près de son périhélie au moment de la conjonction – s'est effectivement produit au cours du calcul III fait par Adams (voir chap. 10) : avec une valeur élevée de α égale à 2 (comme Le Verrier), Adams a abouti à une excentricité élevée (0.19) et à une longitude du périhélie égale à 248°. Le commentaire fait par Sampson [Sampson, 1904] dans son analyse globale des 6 calculs successifs faits par Adams est :

> In the latter theories [III−VI] as contrasted with the first two, the improvement due to introducing an eccentricity is very noticeable ; not because the eccentricity and perihelion as determined were correct, but because their introduction permitted the equations to rectify to some degree the excessive value assumed for the mean distance, by placing perihelion in the region of the planets's motion which was under review, and thereby sensibly increasing its motion for that portion.

On retrouvera des appréciations semblables à la fin du chapitre au § 8.8.5.

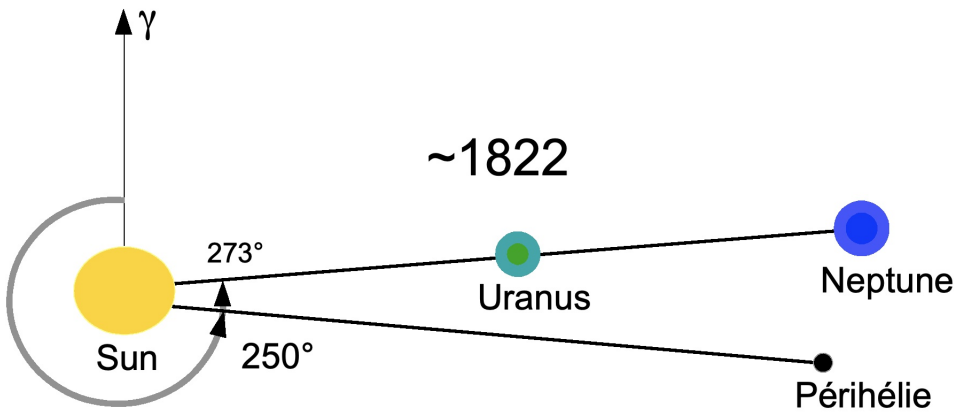


FIGURE 8.43 – Résumé de l'action de la conjonction de 1822 sur la position de Neptune. Rappelons que la valeur 250° pour la longitude du périhélie est très erronée (la valeur correcte est 45°) ; elle permet de compenser la valeur excessive attribuée initialement au demi-grand axe de Neptune

8.8.4 Analyse de Tisserand

Dans le chapitre XXIII du tome 1 de son traité de *Mécanique céleste* [Tisserand, 1880], Tisserand analyse les calculs effectués par Le Verrier pour localiser Neptune :

> On se demanda comment des éléments aussi éloignés de la vérité [ceux donnés par Le Verrier dans son troisième mémoire à l'Académie] avaient permis de représenter les perturbations d'une manière satisfaisante, et de fixer aussi exactement la position de la planète.

Voici comment il poursuit :

> Remarquons d'abord que les perturbations d'Uranus par Neptune sont surtout sensibles aux environs de la conjonction : mettons 20 ans avant et 20 ans après environ. Les conjonctions arrivent à peu près tous les 171 ans ; la dernière a eu lieu en 1822, la précédente en 1651. Donc, dans la période comprise entre la première observation de Flamsteed (1690) et le commencement du siècle actuel [1801], l'action de la planète perturbatrice a été presque négligeable. Il suffit donc de voir comment les éléments de Le Verrier représentent la position de Neptune, à partir de 1800.

Tisserand donne ensuite un tableau de valeurs qui montre que l'écart en longitude entre la valeur déduite des données de Le Verrier et la valeur exacte pour la période 1800−1860 ne dépasse pas ±5.5° ; l'erreur sur le rayon vecteur ne dépasse pas 15%.

	Neptune.		Le Verrier.	
Dates.	v.	r.	v.	r.
1800.....	226°. 4′	30,3	231°.34′	33,6
1810.....	247.20	30,3	251.10	32,8
1820.....	268.52	30,2	271.28	32,4
1830.....	290.31	30,1	292. 8	32,3
1840.....	312.17	30,1	312.36	32,6
1850.....	334.12	30,0	332.25	33,3
1860.....	356.14	29,9	351.17	34,3

FIGURE 8.44 – Positions calculées par Tisserand pour justifier la bonne qualité de la solution de Le Verrier

Walker a fait un calcul semblable et a trouvé les valeurs suivantes (valeurs (en degrés), rapportées par Le Verrier dans son article du CRAS de 1848 [Le Verrier, 1848c]) :

> Les dernières positions (ci-contre) ont été empruntées à M. Walker pour qu'on ne puisse pas me soupçonner d'avoir rien fait pour obtenir un écart plus petit. Voici les minimes écarts de ma théorie. Il en résulte que *pendant soixante-cinq ans*, ma théorie, déduite de considérations indirectes, assigne à Neptune une suite de positions qui ne diffèrent jamais des positions obtenues au moyen de l'orbite directe que d'un *cinquante-cinquième* au plus de la circonférence du cercle.

Écarts (degrés)	
1857	+4°.0
1847	+1.0
1837	−0.7
1827	−2.0
1817	−3.1
1807	−4.5
1797	−6.6

Revenons à Tisserand, qui conclut son analyse par ces mots :

> Les forces perturbatrices calculées auront donc des directions très voisines des directions réelles, seulement les intensités seront trop faibles ; mais ce défaut sera compensé en partie par la valeur trop forte trouvée par Le Verrier pour la masse de Neptune.
> C'est ainsi qu'une combinaison convenable des éléments, dont chacun est très erroné, peut

> représenter presque exactement le lieu héliocentrique de Neptune et les perturbations d'Uranus, pendant tout l'intervalle de temps *limité*[8] où ces perturbations ont été sensibles, et satisfaire par suite aux conditions du problème.

On peut corriger une partie du propos de Tisserand : avec les valeurs trouvées par Le Verrier pour Neptune, en particulier la masse – double de la masse réelle – les forces exercées par le Neptune de Le Verrier sont plus fortes que celles exercées par le vrai Neptune, comme on le voit à la figure 6.16, mais les directions de ces forces sont effectivement assez bonnes, ce qui permet d'aboutir à la bonne localisation finale.

8.8.5 Conclusion. Bilan du rôle important joué par la conjonction de 1822

En conclusion, le paramètre critique dans la recherche de Neptune est la date de la conjonction Soleil-Uranus-Neptune (qui est en fait fin 1821), affirmation qui est confirmée par les méthodes de simplification proposées par les successeurs de Le Verrier comme Brown [Brown, 1931] ou Lyttleton [Lyttleton, 1960] (voir chapitre 9).

8.8.5.1 Déclarations historiques sur le rôle de la conjonction de 1822

Ce rôle attracteur de la conjonction de 1822 avait été déjà observé par les divers astronomes-mathématiciens qui se sont penchés sur les calculs de Le Verrier ou d'Adams. On peut citer dans l'ordre chronologique Tisserand, Sampson, Danjon et Littlewood.

Tisserand ([Tisserand, 1880] chap. XXIII) avait abouti à la conclusion suivante :

> La loi empirique de Bode a donné une valeur très peu exacte de a' : 38 au lieu de 30 ; le calcul, avec sa logique inflexible, va au plus pressé ; il assigne à l'orbite de Neptune une forme elliptique très prononcée, où le périhélie est dirigé à très peu près suivant la ligne de conjonction de 1822, ce qui corrige en grande partie l'erreur provenant de la valeur inexacte assignée à a', en rapprochant Neptune du Soleil, à l'époque de la conjonction, presque à la distance voulue, 32.4 au lieu de 30.2, la forte valeur pour m' a fait le reste.

(En fait, Le Verrier avait placé Neptune à une distance de 33.06 au 1/1/47).

Sampson avait formulé la conclusion suivante :

> It may be remembered that his [Adam's] position of the apse and the value of the eccentricity, which at first seemed confirmed by a close agreement with Le Verrier's results, were proved by susbsequent observations to be equally astray, and represent nothing except the effort of the mechanical process of solution to compensate the excessive value attributed to the mean distance.

Et voici ce qu'écrit Danjon, de manière très réaliste [Danjon, 1946b] :

> Il est clair que les résultats du calcul ne pouvaient avoir la précision que Le Verrier leur attribuait. Seule, la date de conjonction d'Uranus et de la planète troublante pouvaient être déduite assez exactement de la grandeur des perturbations, et sur ce point, l'erreur ne dépassait pas un an et demi. On pouvait, avec une hypothèse raisonnable sur la valeur du moyen mouvement, en déduire la longitude de la planète troublante à une époque peu éloignée de celle de la conjonction, et il n'en fallait pas davantage pour assurer la découverte optique du nouvel astre. Mais c'était pousser l'ambition un peu loin que d'assigner des limites aux éléments déduits de la théorie des perturbations.

8. Mise en italique de Tisserand.

Pour ce qui concerne la précision avec laquelle Le Verrier donne ses résultats, rappelons par exemple que Le Verrier avait annoncé dans son troisième mémoire une longitude du périhélie de $284° 4' 48''$ alors que sa valeur correcte est de l'ordre de 42°.
Pour les encadrements donnés par Le Verrier à la fin de son troisième mémoire, voir ce qui a été dit au § 6.2.12.

Et pour conclure, le mot de la fin pour Littlewood, qui a trouvé une jolie formule ([Littlewood, 1953] p. 126) pour décrire la logique des calculs (mise en gras ajoutée) :

> He [Adams] would have been wrong by 30° in 1780 if the orbit were circular, and so the angular velocity uniform. But faced with a wrong [value of] a', the method responded **gallantly** by putting up a large eccentricity (1/8), and assigning perihelion to the place of conjunction.

8.8.5.2 Bilan des calculs modernes

Je confirme donc les conclusions précédentes valables en l'étendant à un large ensemble de valeurs de α : les calculs conduisent systématiquement à assigner à Neptune une forte excentricité et à le placer près de son périhélie au moment de la conjonction pour compenser la valeur excessive du demi-grand axe attribuée initialement à Neptune.

Une façon de résumer ces simulations avec INPOP est :

pour un large éventail de valeurs attribuées initialement à Neptune, on aurait obtenu en fin de calculs une localisation raisonnable de Neptune vers 1822, grâce à l'effet attracteur de la conjonction de 1822, et par conséquent la localisation ne pouvait pas être très mauvaise vingt ans après.

On est maintenant en mesure de répondre aux questions initiales posées au § 0.1.1.
Méthodes de calcul de Le Verrier et Adams : équations de condition.

Erreurs : Adams a fait quelques calculs théoriquement discutables ; Le Verrier n'a quasiment pas commis d'erreurs.

Quelle est la part de chance ? En fait, être né au bon moment !

En effet, 1845 marque la fin d'une action intense de Neptune sur Uranus, action qui a fortement augmenté les $O - C$ et qui a déclenché des recherches d'explications ; Adams et Le Verrier étaient jeunes et disponibles à ce moment-là pour faire les calculs ; ils ont aussi été aidés par la configuration physique favorable du système qui, une fois posées les bonnes équations, devait conduire inexorablement à une position raisonnablement correcte au moment de la recherche visuelle. Voir aussi le commentaire de Sheehan au § 6.3.3.

On peut conclure cette étude en disant que Le Verrier et Adams ont fait tous les deux un travail tout à fait admirable et même à peine croyable concernant Le Verrier, vu la densité de ses calculs, effectués en à peine un an.

Cependant les calculs de Le Verrier sont longs, inutilement longs ? On va examiner dans le chapitre suivant des méthodes proposées par des successeurs de Le Verrier pour raccourcir les calculs conduisant à la localisation de Neptune.

Chapitre 9

SIMPLIFICATIONS DE LA MÉTHODE ADOPTÉE PAR LE VERRIER

Objectifs

Présentation Dans la première section, on examine quelques critiques que l'on peut formuler sur la méthode employée par Le Verrier et on présente l'intérêt de déterminer avec moins de calculs la longitude de l'époque de Neptune (c'est à dire la longitude moyenne au 1/1/1800).
Puis, on énumère quelques méthodes proposées par des successeurs de Le Verrier, méthodes qui sont censées permettre d'accéder plus efficacement à cette longitude.
Dans les deux sections suivantes (2 et 3), on examine en détail les méthodes proposées par Liais [Liais, 1865], Brown [Brown, 1931] et Lyttleton [Lyttleton, 1960]. On constatera que chacune de ces méthodes présente un point faible, plus ou moins marqué, et donc qu'aucune de ces méthodes n'est entièrement satisfaisante.
À la section 4, on reprend rapidement la méthode proposée en 1990 par Lai, Lam et Young [Lai, 1990], qui modélise l'action de Neptune sur Uranus à l'aide de deux oscillateurs linéaires couplés.

Sommaire

9.1 Méthodes proposées pour simplifier les calculs de Le Verrier . . . **338**
9.1.1 Commentaires sur les calculs effectués par Le Verrier . . . 338
9.1.2 Méthodes imaginées pour raccourcir la détermination de la date de la conjonction . . . 338
9.2 Méthode de Liais . . . **341**
9.3 Méthode de Brown et de Lyttleton pour la prévision de la date de conjonction . . . **342**
9.3.1 Méthode de Brown . . . 342
9.3.2 Méthode de Lyttleton . . . 347
9.3.3 Gestion de la pseudo résonance . . . 353
9.4 Reprise des calculs de Lai, Lam, Young . . . **355**
9.4.1 Problème direct pour la longitude . . . 355
9.4.2 Problème inverse pour la longitude et le rayon . . . 356

9.1 Méthodes proposées pour simplifier les calculs de Le Verrier

9.1.1 Commentaires sur les calculs effectués par Le Verrier

Les calculs de Le Verrier sont très méthodiques, mais très longs et parfois inutilement compliqués [1]. On examinera en détail au chapitre 12 les critiques que l'on peut formuler sur les méthodes choisies par Le Verrier pour effectuer ses calculs.
On rappelle que Le Verrier a obtenu le paramètre essentiel pour la découverte - la longitude ε' de l'époque - par un balayage de 9° en 9°, ce qui nécessite la résolution de 40 systèmes d'équations à 3 inconnues. Il est tentant d'inventer une méthode qui fournirait cette longitude avec moins de calculs.
Historiquement, plusieurs méthodes pour simplifier les calculs de Le Verrier voient progressivement le jour ; elles reposent essentiellement sur un raccourci permettant de déterminer la date de conjonction Soleil-Uranus-Neptune, et ainsi connaître la position de la planète perturbatrice à cette date, puisqu'à cette date on a $v' \simeq v$ et v est connu par les tables d'Uranus.
Avoir un raccourci pour la date d'opposition permet donc de court-circuiter toute la première approche de Le Verrier, qui représente une très grosse partie de la recherche [2].
On va examiner les raccourcis proposés par ces divers astronomes-mathématiciens, mais on va constater qu'aucune des méthodes proposées n'est pleinement convaincante.

9.1.2 Méthodes imaginées pour raccourcir la détermination de la date de la conjonction

9.1.2.1 Méthode de J. Herschel

Dans son livre [3] *Outlines of Astronomy* [Herschel, 1849], sir John Herschel prétend qu'en examinant la courbe des perturbations dans la longitude d'Uranus, on peut déceler l'époque de la conjonction. L'argumentation n'est pas très claire, le dessin qui accompagne la justification est très peu lisible et cette argumentation sera contestée [4] par Sampson [Sampson, 1904] dans les termes suivants :

> By a simple graphical method, the errors of Uranus are cleared of errors of mean motion, apse, and eccentricty, and there remains an unexplained residuum, which mounts slowly to a maximum about 1822 and then rapidly diminishes. The conclusion is drawn that Uranus arrived at conjunction with the disturbing planet about 1822 ; and this was the case. Plausible as this argument seems, it is entirely baseless. For the maximum of perturbations depending on the eccentricities has no relation to conjunction, and the others which depend upon the differences of the mean motions alone are of the nature of forced oscillations, and conjunction is not their maximum or stationary position, but their position of most rapid change.

1. À un endroit (p. 174 de *Herschel*), Le Verrier est amené à rechercher des valeurs numériques pour les racines d'un polynôme du dixième degré, ce qu'il fait avec une grande précision, mais malheureusement pour lui, ce résultat n'est pas exploitable par la suite. Le Verrier dit (p. 175 de *Herschel*) "qu'il a été longtemps arrêté par cette difficulté." D. Rines [Rines, 1912] mentionne un arrêt de 3 mois dans ses travaux, ce qui paraît tout à fait surprenant, vu la relative courte durée des calculs (à peine un an) et le volume énorme de ces calculs ; mais cette affirmation est confirmée par Biot [Biot, 1847b], qui a bien connu Le Verrier.
2. Cahier n° 4 des manuscrits, 280 pages de calculs denses.
3. p. 536 de ce livre.
4. Brown fait une remarque voisine ; voir § 9.3.1.

9.1.2.2 Méthode de Liais

Liais [5] [Liais, 1865] a avancé qu'en examinant la courbe des perturbations d'Uranus, on pouvait deviner la date de la conjonction (1822), mais la prédiction est plus facile à faire, une fois la découverte effectuée, surtout, comme il le fait, en sélectionnant dans la masse de données, uniquement les éléments qui étayent cette prédiction. Voir le détail de l'argumentation § 9.2 p. 341.

9.1.2.3 Méthode de Fleury

L.L. Fleury [Fleury, 1891], physicien, a repris en 1891 les calculs de Le Verrier de la façon suivante [6] : Fleury résout une sélection d'équations de condition portant sur la tranche 1690−1850 pour déterminer les corrections à apporter aux éléments elliptiques d'Uranus ; il reporte ces valeurs dans les équations de condition et constate l'existence d'un pic [7] dans la tranche 1820−1825 ; il en conclut que la conjonction a eu lieu en 1822.48 ! Avec un demi-grand axe de 38.8 (résultant de l'application de la loi de Bode), il montre que la conjonction précédente aurait eu lieu en 1693, ce qui n'est pas possible au vu des écarts O-C ; il écrit :

> Il est facile de voir que cette valeur de 38.8 est trop forte. Puisque la distance de 38.8 est trop grande et que la distance de la planète inconnue est supérieure à celle d'Uranus, il en résulte que la vraie distance doit se rapprocher de la moyenne des deux chiffres, moyenne qui est 28.99.

Pourquoi la moyenne ? et avec ce 'raisonnement', comment oser donner deux décimales ? Comment un physicien peut-il procéder ainsi ? Le travail de Fleury, venant d'un physicien, est inacceptable ; Lantier et Lamotte, qui reprennent la démarche [Lantier, 1977] sont un peu plus excusables, car ce sont des historiens, mais ils auraient dû se méfier d'une telle précision, sans aucun fondement. L'argumentation de Fleury est aussi simpliste que celle de Babinet de 1848 [Babinet, 1848], et mérite d'être très vite oubliée.

9.1.2.4 Méthode de Brown

Brown [8] [Brown, 1931] donne une méthode s'appuyant sur une étude graphique des perturbations, pour localiser la date de la conjonction. Il précise aussi que, si l'on peut [9] déterminer assez précisément le produit $m'(\frac{a}{a'})^3$ de la masse de la planète troublante par le cube du rapport des demi-grands axes, il est difficile de séparer les deux facteurs, ce qui conforte l'argumentation de Le Verrier [Le Verrier, 1848c] en réponse à l'attaque de Babinet [Babinet, 1848] (voir § 13.3). Brown affirme aussi que la longitude de l'époque de la planète troublante dépend peu du rapport des demi-grands axes, ce que confirme notre étude faite avec INPOP (voir chapitre 8). La méthode de Brown est présentée au § 9.3.1.

5. Emmanuel Liais (1826−1900) ; il travaille à l'Observatoire de Paris jusqu'en 1858, puis il part pour le Brésil, où il deviendra directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro, après avoir été chassé de l'Observatoire de Paris par Le Verrier.

6. Fleury a décrit sa démarche dans un article de la société mathématique de Cherbourg [Fleury, 1891] et cette description a été reprise dans le livre de Levert, Lamotte et Lantier [Lantier, 1977], qui sont des historiens, et non des scientifiques.

7. Je constate effectivement un tel pic, voir fig. 4.20 (a), mais il faut pour cela avoir au préalable ajusté les éléments d'Uranus sur la période 1690−1800.

8. Ernest William Brown (1866−1936) ; mathématicien et astronome anglais, qui a passé la majorité de sa carrière aux États Unis (il acquiert la nationalité américaine en 1923). Auteur d'une importante théorie de la Lune.

9. L'argumentation est tentante, mais les calculs ne permettent pas une telle affirmation ; voir § 9.3.1.5.

9.1.2.5 Méthode de Littlewood

Littlewood [10] [Littlewood, 1953] a proposé en 1953 une méthode simplifiée pour la recherche de Neptune dans *Mathematical Miscellany*. Son idée sera reprise par Lyttleton [Lyttleton, 1960], voir le paragraphe suivant.

9.1.2.6 Méthode de Lyttleton

Lyttleton [11] [Lyttleton, 1958] s'est inspiré de Littlewood [Littlewood, 1953] pour élaborer une méthode permettant de localiser la planète perturbatrice : cette méthode consiste à déterminer la date de la conjonction héliocentrique avec Uranus et ajuster une orbite circulaire, ce qui réduit le nombre d'inconnues à 3, à comparer avec les 9 paramètres retenus par Le Verrier. Il [Lyttleton, 1960] reprend en 1960 sa démarche en la détaillant et en se limitant explicitement à la seule [12] prédiction de la position de la planète perturbatrice à une date donnée.

> What is the simplest theoretical approach and minimum amount of calculation that could have led to the discovery of the planet ?

Et il conclut :

> It turns out that a considerable range of assumed mean distance for Neptune would predict the position for discovery within, say, ±15° of longitude without further calculation.

Voir le détail des calculs au § 9.3.2.

9.1.2.7 Observations de Brookes

Brookes [Brookes, 1970] a avancé que le calcul proposé par Lyttleton ne pouvait pas aboutir en se limitant à des orbites circulaires, et il a découvert un certain nombre d'incohérences dans les calculs de Lyttleton, incohérences que je retrouve aussi (voir plus loin au § 9.3.2).
Par ailleurs, Brookes [Brookes, 1969] examine dans sa thèse l'effet [13] du changement de la distance de la planète troublante ainsi que l'effet du changement de la date de calcul sur la prévision de la position de la planète troublante [14], ce que j'ai fait aussi avec INPOP à la fin du chapitre 8 (§ 8.6, p. 301).

9.1.2.8 Méthode de Lai, Lam et Young

Lai, Lam et Young [Lai, 1990] ont expliqué la marche d'Uranus comme résultant de deux actions : une dépendant de la masse et de la distance de Neptune, l'autre dépendant de l'écart entre deux orbites képlériennes, mettant au cœur du problème la quasi-résonance 1 : 2 entre Uranus et Neptune. Plus techniquement, ils schématisent le mouvement perturbé d'Uranus par l'action de deux oscillateurs couplés, l'un libre, l'autre forcé. Au cours de leur travail, ils résolvent le problème direct ainsi que le problème inverse posé par les perturbations d'Uranus. Voir le détail des calculs au § 7.4 et au § 9.4.

10. John Edensor Littlewood (1885−1977) ; mathématicien anglais, qui a beaucoup travaillé sur l'hypothèse de Riemann.
11. Raymond Lyttleton (1911−1995) ; mathématicien britannique, qui s'est intéressé à l'astronomie théorique.
12. En fait, il pense montrer que l'on peut aussi préciser le demi-grand axe de la planète troublante.
13. Baghdady [Baghdady, 1980] reprend aussi cette analyse dans le cadre de sa thèse sur les calculs de Le Verrier.
14. Brookes [Brookes, 1969], dans le cadre d'une thèse (présentée à la fin du chapitre 10), a repris l'ensemble des calculs d'Adams en vue de la découverte de Neptune (voir chap. 10).

9.2 Méthode de Liais

Voici un résumé des arguments développés par Liais dans *Espace céleste et la nature tropicale* [Liais, 1865].

1. Les perturbations ne sont pas sensibles pendant toute la révolution d'Uranus, puisque Bouvard a trouvé un long intervalle (depuis 1690 jusqu'à la fin du dix-huitième siècle) où le mouvement de celui-ci pouvait être regardé comme exactement elliptique, à part l'influence des planètes connues. L'action de la planète perturbatrice n'est donc appréciable que vers son plus grand rapprochement d'Uranus, c'est à dire vers la conjonction.
2. Comme les observations modernes sont celles qui ne se prêtent pas à être représentées par une ellipse exacte, c'est pendant leur durée qu'a eu lieu la conjonction.
3. En 1822, se sont produits les plus grands écarts [15] et un changement de signe dans les différences $(O - C)$, d'où il résulte que la conjonction a dû se faire vers cette époque.
4. L'action de la force perturbatrice ne devient sensible que vingt-cinq ans environ avant et après la conjonction.

Il combine ensuite les remarques précédentes de la façon suivante :

> Cela posé, remarquons que, de 1690 à 1800 environ, les deux planètes ont été toujours éloignées, puisque le mouvement d'Uranus a été exactement elliptique. A partir de la deuxième date, elles se sont rapprochées, et il y a eu conjonction en 1822. Or, la position de 1690, étant représentée par la même orbite elliptique que les positions du dix-huitième siècle, la conjonction a eu lieu en dehors de l'époque de perturbation qui, d'après les observations modernes, s'étend jusqu'à vingt-cinq ans du plus grand rapprochement. Donc, en 1690, il y avait au moins vingt-cinq ans que la conjonction était passée, et, par suite, ce phénomène n'a pu avoir lieu depuis 1665. L'intervalle des années 1665 et 1822 est de cent cinquante-sept ans. Ainsi les conjonctions sont au moins séparées par ce nombre d'années.
> Comme la période de la révolution d'Uranus est de quatre-vingt-quatre ans, il est facile de voir qu'un intervalle de cent cinquante-sept années entre les conjonctions correspond à une durée de cent quatre-vingt-un ans pour la révolution de la planète perturbatrice.
> Or, d'après la loi de Kepler [...] la révolution de cent quatre-vingt-un ans correspond à une distance moyenne égale à trente-deux fois celle de la Terre au Soleil.
> Les travaux de Bouvard permettaient, comme on le voit par ce qui précède, de reconnaître immédiatement que la planète perturbatrice était à une distance moyenne du Soleil moindre que trente-deux fois le rayon de l'orbite terrestre.
> Il était donc facile [16], a priori, de s'assurer que la loi empirique de Bode ou loi de Titius, qui aurait donné pour distance trente-huit fois et huit dixièmes celle de la Terre au Soleil, n'était pas applicable dans ce cas.

Il montre ensuite que la distance doit être au moins 28 *au* ; ce qui conduit à une longitude comprise entre 325° et 335° au 1er janvier 1847.
Commence alors la charge sur Le Verrier (alors que Adams est relativement épargné) :

> M. Le Verrier prit la question en simple calculateur, sans s'élever aux considérations générales sur la nature du problème, comme l'eût certainement fait Arago, dans les travaux duquel perce toujours le coup d'œil du génie.
> La complication des formules lui fit perdre entièrement de vue la nature du sujet ; il introduisit [17] des indéterminées dans ses équations pour parvenir à les simplifier, et substitua ensuite

15. C'est en partie vrai, mais il y a aussi des écarts importants vers 1750, suivis aussi d'un changement de signe, voir fig. 2.2.
16. Facile à dire après coup, surtout quand on peut faire le tri dans les données.
17. C'est justement là une des grandes subtilités du calcul de Le Verrier [introduction des variables P, Q, R, S] (voir équation 4.16) ; ou bien Liais n'a pas compris cette subtilité, ou bien il fait semblant de ne pas la comprendre.

> à ces indéterminées des valeurs arbitraires, sans s'apercevoir qu'il ne devait plus trouver ultérieurement dans son analyse que ce qu'il y mettait...
> L'étude de la planète découverte est donc venue confirmer les travaux de Bouvard, contredire ceux de M. Le Verrier et la planète théorique de ce dernier, près de la position de laquelle a été trouvé Neptune, n'existe pas et est venue se ranger dans les fictions.
> Aujourd'hui, les recherches de ce calculateur ne méritent plus d'être citées que comme un des exemples les plus remarquables des erreurs auxquelles on s'expose lorsqu'on se lance aveuglément dans l'analyse avant de s'être rendu compte de toutes les conditions du problème, avant de s'assurer si on comprend celles-ci dans les formules.

Et le coup de grâce final :

> En résumé, nous devons donc conclure que c'est à Alexis Bouvard que revient l'honneur de la découverte géométrique de Neptune dans les limites du possible, et à Galle, celui de la découverte optique, de la vraie découverte du même corps céleste.

Liais dénigre à Le Verrier tout mérite dans la découverte de Neptune, qu'il attribue à Galle et à Bouvard. Ce jugement est grandement lié au fait que Le Verrier a licencié Liais de l'Observatoire de Paris en 1858 [Véron, 2016].

9.3 Méthode de Brown et de Lyttleton pour la prévision de la date de conjonction

Ces deux méthodes ont pour but une détermination rapide de la date de conjonction Soleil-Uranus-Planète perturbatrice. Elles sont partiellement graphiques et utilisent toutes deux l'identité algébrique suivante :

$$\sin(x - \tfrac{\pi}{3}) - \sin x + \sin(x + \tfrac{\pi}{3}) = 0 \tag{9.1}$$

9.3.1 Méthode de Brown

9.3.1.1 Calculs préliminaires

Brown commence par étudier quelques problèmes théoriques. Il considère d'abord un signal de la forme

$$f(t) = p + qt + \sum C \sin(at + b) \tag{9.2}$$

où p, q, a, b, C... sont des constantes. Il considère un entier n (à choisir convenablement plus tard) et il forme alors la fonction ϕ définie par

$$\phi(t) = f(t+n) + f(t-n) - f(t) = p + qt + \sum C\,(1 - 4\sin^2\tfrac{an}{2})\,\sin(at + b) \tag{9.3}$$

Dans cette transformation – passage de f à ϕ –, que l'on notera $\mathcal{T}$ par la suite, p et q sont inchangés et le terme de fréquence a est multiplié par $1 - 4\sin^2\frac{na}{2}$.
Brown se place dans le cas où l'une des fréquences, notons-la a_0, est d'une part connue et d'autre part telle qu'il existe un entier [18] n vérifiant $a_0 n = \frac{\pi}{3}$. Le terme de fréquence a_0 disparaît alors de la fonction ϕ et le terme de fréquence a est multiplié par $1 - 4\sin^2\frac{a}{a_0}\frac{\pi}{6}$.
Si a est voisin de a_0 : $a = a_0(1 + k)$, alors le terme de fréquence a est approximativement multiplié par $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}ka_0 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}(a - a_0)$. Ceci est particulièrement avantageux si le coefficient de $\sin(at + b)$ est de la forme $\frac{C}{a^2 - a_0^2}$, comme cela peut être le cas après intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre : le passage de f à ϕ permet d'absorber la quasi-résonance quand $a \simeq a_0$.

18. Brown parle d'un entier n, mais le caractère entier de n ne semble pas indispensable à ce niveau.

9.3.1.2 Perturbation de la longitude

La perturbation directe de la longitude vraie due à l'action d'une planète extérieure est de la forme suivante (en négligeant les excentricités) :

$$\delta v_{ext} = m'(-A_1 \sin D + A_2 \sin 2D + A_3 \sin 3D + ...) \quad \text{avec} \quad D = nt + \varepsilon - n't - \varepsilon'. \tag{9.4}$$

et avec des coefficients A_i dépendant uniquement du rapport des demi-grands axes et dont les expressions sont données dans la *Mécanique céleste* de Laplace [Laplace, 1802].
Les formules théoriques montrent que si $n > 2n'$, tous les coefficients A_i sont positifs. Brown trace les graphes de δv_{ext} pour différentes valeurs du rapport des demi-grands axes ; contrairement à une opinion couramment répandue – dixit Brown – le maximum de δv_{ext} n'a pas lieu à la conjonction [19] où $D = 0$, mais plutôt près de l'opposition, du moins quand le rapport des demi-grands axes est inférieur à 0.6.
Il appelle ϕ_{ext} la transformée de δv_{ext} par $\mathcal{T}$; ϕ_{ext} est de la même forme que δv_{ext}, à savoir

$$\phi_{ext}(t) = \mathcal{T}(\delta v_{ext}) = -m'(B_1 \sin D + B_2 \sin 2D + B_3 \sin 3D + ...) \tag{9.5}$$

Il trace les courbes ϕ_{ext}, en tant que fonction de D (et non de t) sur l'intervalle $[0 : 360°]$ pour différentes valeurs du rapport α des demi-grands axes et Brown déclare que, pour une large tranche de valeurs de α, ces courbes ont des allures voisines et présentent toutes leurs extrema au voisinage de $D = \pm 40°$, sachant que la conjonction est à $D = 0°$ et que la révolution synodique est représentée par 360° ; en conséquence, il retient que le maximum de ϕ_{ext} est décalé d'environ $-\frac{1}{9}$ (=-40/360) de la durée de la révolution synodique.

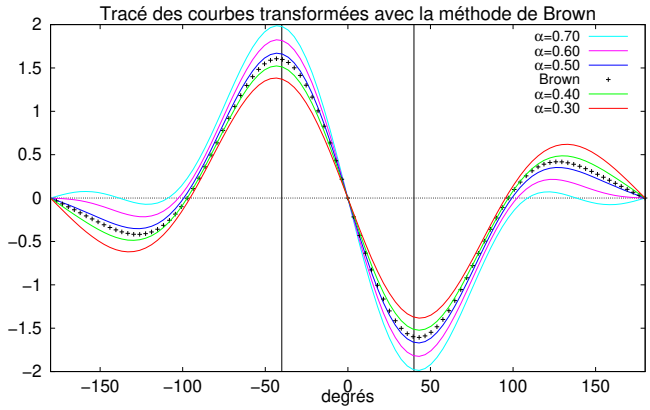


FIGURE 9.1 – Tracé de fonctions ϕ_{ext} normalisées (voir le texte) pour différentes valeurs de α. On a tracé aussi une courbe avec les coefficients trouvés par Brown. On constate que toutes ces courbes ont des allures très voisines, largement indépendantes de α. On constate aussi que la courbe trouvée par Brown (pour $\alpha = 0.475$, en croix) rentre dans la même famille. On retient que le maximum de ces courbes a lieu vers $-40°$.

Je ne trouve pas exactement les mêmes valeurs que Brown pour les coefficients B_i. J'ai tracé fig 9.1 les fonctions ϕ_{ext} pour différentes valeurs de α ; en fait, on trace, comme Brown, des courbes normalisées à savoir $-(\frac{B_1}{B_2} \sin D + \sin 2D + \frac{B_3}{B_2} \sin 3D)$, et j'ai utilisé mes valeurs pour les coefficients B_i ; j'ai tracé aussi la courbe pour $\alpha = 0.475$ avec les coefficients trouvés par Brown. Comme indiqué par lui, toutes ces courbes ont des allures très voisines et surtout des maxima effectivement situés à $-40°$ de la conjonction, ce qui est le résultat principal utilisé par Brown pour la détermination de la date de conjonction Uranus-Neptune.

19. Ne pas oublier qu'il s'agit de trajectoires circulaires, donc les longitudes vraies et moyennes coïncident.

9.3.1.3 Correction des éléments elliptiques d'Uranus

Ici on choisit pour a_0 la fréquence d'Uranus, $a_0 = \frac{2\pi}{84}$; en posant $n = 14$, on a $na_0 = \frac{\pi}{3}$.
On dispose des perturbations résiduelles sur la longitude d'Uranus, une fois que l'on a soustrait les actions de Jupiter et de Saturne aux dates de Le Verrier ou d'Adams. Brown ajuste à la main une fonction f_{obs} passant près de ces perturbations [20], et il en prend la transformée ϕ_{obs} par $\mathcal{T}$ en la construisant point par point ; ϕ_{obs} est donc définie ici par la formule suivante et elle est tracée à la figure 9.2 :

$$\phi_{obs}(t) = f_{obs}(t-14) + f_{obs}(t+14) - f_{obs}(t) \tag{9.6}$$

Quand on essaie de corriger les éléments elliptiques d'Uranus, soumis à l'action d'une planète extérieure, la perturbation totale en longitude vraie est donnée au premier degré des excentricités par

$$\delta v_{tot} = \delta\varepsilon + t\,\delta n + 2\sin\zeta\,\delta e - 2\cos\zeta\, e\,\delta\varpi + \delta v_{ext} \tag{9.7}$$

où ζ est l'anomalie moyenne d'Uranus et δv_{ext} la perturbation créée par la planète inconnue et dont l'expression est donnée à l'équation (9.4). On applique la transformation $\mathcal{T}$ à δv_{tot} avec $n = 14$. La transformation permet d'éliminer δe et $e\,\delta\varpi$, ce qui est un des buts de la transformation, et la fonction transformée est de la forme

$$\phi_{tot}(t) = \mathcal{T}(\delta\, v_{tot}) = \delta\varepsilon + t\delta n + \phi_{ext}(t) \tag{9.8}$$

où $\phi_{ext} = \mathcal{T}(\delta v_{ext})$.
On doit écrire ensuite que $\phi_{tot}(t_j) = \phi_{obs}(t_j)$, pour les 21 observations aux temps $(t_j)_{1\le j\le n_t}$ d'Adams ; ces équations font intervenir 3 inconnues visibles : $\delta\varepsilon$, δn, m' et deux cachées : α et ε'. On peut faire un balayage sur ces variables (surtout ε') et examiner les résidus dans ces équations de condition afin de sélectionner la valeur optimale de ε' ; mais alors, on retrouve la démarche, longue et laborieuse, suivie par Le Verrier. Brown va donc essayer d'avoir rapidement un ordre de grandeur pour ε' et ensuite il va essayer d'améliorer cette première estimation.

9.3.1.4 Application de la méthode de Brown à la recherche de Neptune

Brown estime que la partie linéaire $\delta\varepsilon + t\delta n$ de ϕ_{tot} ne change pas beaucoup l'allure de la courbe ; en particulier, elle ne doit pas trop décaler son maximum, ce qui revient à étudier ϕ_{ext} au lieu de ϕ_{tot}.
J'ai tracé fig. 9.2, à partir des données de Le Verrier et d'Adams, la courbe des perturbations résiduelles de la longitude géocentrique d'Uranus, prolongée par interpolation linéaire. J'ai tracé aussi sur le même graphe les transformées correspondantes par $\mathcal{T}$; pour comparer, j'ai ajouté la courbe trouvée par Brown ; ces trois dernières courbes se ressemblent ; Brown dit que la comparaison de ces courbes avec celles de la figure 9.1 montre qu'elles *peuvent* [21] représenter le même phénomène. Il y a une incertitude, car la transformée des résidus couvre à peine la moitié de la révolution synodique. Cependant, si on fait cette hypothèse, i.e. si on convient de superposer les deux types de courbes (fig. 9.1 et fig. 9.2), on peut observer que le maximum a eu lieu vers [22] 1806 (en prenant la moyenne des deux courbes Adams et Le Verrier) ; comme on l'a vu au paragraphe précédent, la date de la conjonction doit être décalée de 1/9 de la révolution synodique ; avec le choix de Le Verrier ($\alpha = 0.5$), la révolution synodique est d'environ 135 ans, ce qui donne un décalage de 15 années, soit 1821 (=1806+135/9) pour la date de la conjonction.

20. Brown utilise les données d'Adams, et dit que le résultat serait sensiblement le même avec les données de Le Verrier, ce qui n'est pas tout à fait le cas, voir fig. 9.2.
21. C'est Brown qui met les italiques.
22. Brown annonce 1810 pour sa courbe.

Avec la valeur correcte de la révolution synodique, 171 ans, cela donne un décalage de 19 ans et une date de conjonction voisine de 1825.
Ainsi, avec des moyens élémentaires, et dans une large étendue de valeurs de α, on peut accéder à une valeur raisonnable de la conjonction : 1821−1825, alors que la valeur correcte est fin 1821.
Brown essaye ensuite d'améliorer cette valeur de ε'.

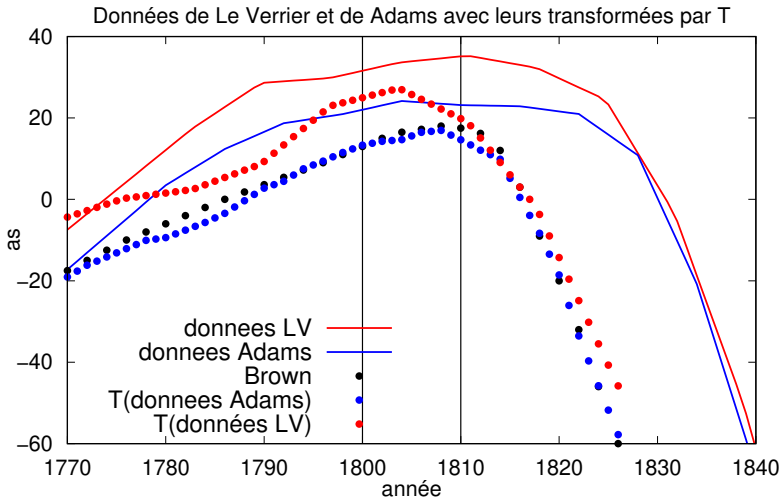


FIGURE 9.2 – On a tracé les résidus en longitude héliocentrique avec les données d'Adams (en trait continu bleu) et de Le Verrier (en trait continu rouge) ; c'est la fonction f_{obs} ; on a tracé ensuite leurs transformées par la fonction $\mathcal{T}$; les deux tracés ont une allure commune, assez voisine de celle de Brown (qui a dû lisser un peu ses valeurs, et son tracé colle plus au tracé d'Adams, ce qui est normal). Il identifie le maximum de ces courbes à la partie maximale de ses fonctions ϕ, tracées fig. 9.1. Il retient que le maximum de sa courbe se produit au voisinage de 1810 ; avec les données de Le Verrier c'est vers 1804 et avec celles d'Adams, c'est vers 1808. Et il en déduit que la date de la conjonction se situe vers 1822−1825

9.3.1.5 Amélioration de l'estimation de ε'

Brown reprend, à partir de l'expression utilisée par Adams, l'expression de ϕ_{ext}, qu'il complète et met sous la forme

$$\phi_{ext} = -m'B_2\left(\frac{B_1}{B_2}\sin D + \sin 2D + \frac{B_3}{B_2}\sin 3D + \frac{B'}{B_2}\sin(2D-\zeta)\right) \tag{9.9}$$

Il envisage une variation de la date de conjonction, ou, ce qui est équivalent, une variation de ε'. La variation correspondante de ϕ_{ext} est

$$\delta\phi_{ext} = m'B_2\left(\frac{B_1}{B_2}\cos D + 2\cos 2D + 3\frac{B_3}{B_2}\cos 3D + 2\frac{B'}{B_2}\cos(2D-\zeta)\right)\delta\varepsilon' \tag{9.10}$$

Il considère alors l'équation

$$\delta\varepsilon + t\delta n - m'B_2\left(\frac{B_1}{B_2}\sin D + \sin 2D + \frac{B_3}{B_2}\sin 3D + \frac{B'}{B_2}\sin(2D-\zeta)\right) \tag{9.11}$$

$$+m'B_2\left(\frac{B_1}{B_2}\cos D + 2\cos 2D + 3\frac{B_3}{B_2}\cos 3D + 2\frac{B'}{B_2}\cos(2D-\zeta)\right)\delta\varepsilon' = \phi_{obs}(t) \tag{9.12}$$

aux 4 inconnues $\delta\varepsilon$, δn, $m'B_2$ et $m'B_2\delta\varepsilon'$, à satisfaire pour les 21 valeurs de t. Brown affirme que les rapports B_i/B_2 dépendent peu de α, ce qui donne une correction $\delta\varepsilon'$ assez largement indépendante de ce rapport α. Brown obtient [23] une date de conjonction comprise entre 1830 et 1840, ce qui est un peu moins bien qu'à l'issue de la première approximation.
Brown conclut que l'on peut trouver une date commune raisonnable pour la conjonction pour un large ensemble de valeurs de α et à partir de là, la position réelle en 1846 dépend peu du rapport des demi-grands axes. Autrement dit, on peut obtenir un résultat correct [24] avec des données qui peuvent être incorrectes.
Il se demande ensuite si on peut avoir une estimation de α ; il dit que l'inconnue la plus forte est $m'B_2$, ou ce qui revient un peu au même $m'A_2$. Or, Brown dit que A_2 contient $(n'/n)^2$ en facteur, soit $(a/a')^3$, ce qui n'est pas vraiment le cas. Il en déduisait que seul, le rapport m'/a'^3 était connu et que toute tentative d'estimation de a' contenait aussi une estimation de m'. Ce dernier résultat est connu et naturel, mais la démarche de Brown semble ici sans véritable fondement.

9.3.1.6 Conclusion sur la méthode de Brown

Voici comment Brown commente son calcul :

> It may be objected that the method I have adopted is not the same as the methods of Leverrier and Adams. The answer is that, since my method is merely a particular grouping of the equations of condition which enables me to obtain a first approximation to the place of the planet with but little calculation, it is necessarily equivalent to theirs. It should not, however, give final results with the same accuracy for most of the unknowns, the possible exception being the date of conjunction.

Autrement dit, il déclare que sa méthode n'est qu'une variante de celle de Le Verrier et il demande un peu d'indulgence pour la précision du résultat final, à part pour la date de la conjonction.
Le but de Brown (et d'autres) est intéressant : trouver un raccourci pour une première localisation de la planète qui perturbe Uranus. Par contre, la méthode est discutable sur certains points ; au delà des calculs algébriques, la méthode repose sur des invariances vis à vis du rapport des demi-grands axes : invariance des formes des graphes des fonctions ϕ_{ext}, invariance de la position du maximum de ces courbes par rapport à la conjonction et quasi-invariance des rapports B_i/B_2 : invariances qui ne sont pas toujours absolument convaincantes.
Brown ne donne pas toutes les valeurs numériques et je ne suis pas toujours d'accord [25] avec toutes celles qu'il donne dans son article. Enfin, il déclare que A_2 contient comme facteur $(n'/n)^2$, ce qui n'est pas le cas d'une manière naturelle.
En conclusion, il y a de nombreux points contestables [26] dans la démarche de Brown. D'autre part, il est difficile d'imaginer que l'on puisse inventer une telle approche lors d'une première recherche. C'est clairement le fait – louable – d'un chercheur, qui essaie de simplifier un calcul effectué et résolu par un autre chercheur.
C'est une démarche constante en mathématiques ; quand un théorème compliqué (théorème de Fermat-Wiles par exemple) est démontré par un calcul compliqué, d'autres chercheurs vérifient dans un premier temps si la démonstration est correcte et, dans un deuxième temps, essaient de la simplifier.

23. Il ne précise pas la valeur qu'il a trouvée.
24. Brown mentionne le passage de la solution I d'Adams à sa solution II : en réduisant de 3% la valeur du demi-grand axe de la planète inconnue, Adams trouve des changements notables dans la correction des éléments elliptiques d'Uranus, dans l'excentricité et la longitude du périhélie, mais peu de changement dans la date de conjonction : 1823.5 avec la solution I et 1825 avec la solution II.
25. Lyttleton [Lyttleton, 1960] fait la même remarque, car il ne retrouve pas un grand nombre de valeurs numériques annoncées par Brown.
26. Ce qui est étonnant de la part de quelqu'un d'aussi expérimenté dans le calcul numérique.

9.3.2 Méthode de Lyttleton

9.3.2.1 Données du problème

Lyttleton part des données retenues par Adams (voir plus de détails au chapitre 10, § 10.2.2.1). Adams disposait d'un certain nombre d'écarts entre les positions observées d'Uranus et les positions calculées par éphémérides (celles de Bouvard essentiellement). Adams les a regroupées et interpolées pour aboutir à 21 données régulièrement espacées de 3.032 années juliennes, ce qui représente trois fois la période de révolution synodique d'Uranus. Pour les calculs qui suivent, Lyttleton a besoin de données annuelles. Pour cela, il procède à des interpolations linéaires [27] entre deux écarts espacés de 3 ans. Lyttleton ne détaille pas tout : il dit simplement qu'il remplace les données centrales par un segment de droite et que de part et d'autre de ce segment les ajustements sont évidents ; est-ce à dire que c'est une interprétation graphique ? La façon d'interpoler n'est évidemment pas sans importance pour le résultat final. Voici ce que j'obtiens (figure 9.3) pour la courbe des écarts, en interpolant linéairement les données d'Adams, représentant une fonction que l'on notera δ_A par la suite : à tout instant t, $\delta_A(t)$ représente l'écart entre la longitude vraie exacte d'Uranus $v(t)$ et la longitude calculée $v_E(t)$ sur l'ellipse (E) ajustée aux observations : $\delta_A(t) = v(t) - v_E(t)$.

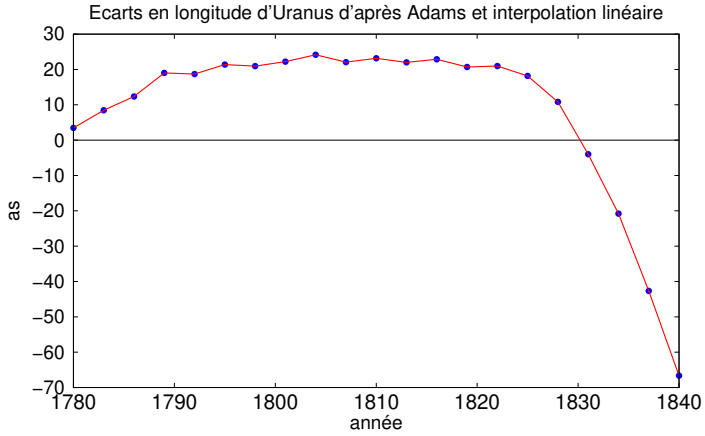


FIGURE 9.3 – Valeurs des perturbations dans la longitude d'Uranus d'après Adams (ronds bleus) et valeurs interpolées linéairement (courbe pleine). L'écart interpolé sera noté δ_A par la suite.

On appelle E_0 l'ellipse osculatrice au moment t_0 de la conjonction, i.e. l'ellipse décrite par Uranus si à l'instant t_0 on supprimait l'action de Neptune et v_0 la longitude qu'aurait Uranus sur cette ellipse. t_0 est l'inconnue principale et E_0 n'est bien sûr pas connue.
Au premier degré selon e, la longitude vraie d'Uranus est donnée par

$$v = \varepsilon + nt + 2e\sin(\varepsilon + nt - \varpi) \tag{9.13}$$

Avec en plus la perturbation due à une planète extérieure, la perturbation totale de la longitude vraie peut s'écrire :

$$\delta v = \delta\varepsilon + t\delta n + 2\delta e\sin(\varepsilon + nt - \varpi) - 2e\,\delta\varpi\cos(\varepsilon + nt - \varpi) + m'P + O(em') \tag{9.14}$$

en négligeant les termes en $O(em')$ comme $e\,\delta n$ ou $e\,\delta\varepsilon$; P (défini à l'équation 9.20) contient des éléments dépendant de la planète perturbatrice comme $h' = e'\sin\varpi'$ ou $k' = e'\cos\varpi'$. Comme les corrections des éléments elliptiques d'Uranus ont pour but d'annuler δv, Lyttleton

27. J'ai essayé des interpolations polynomiales ou bien polynomiales par morceaux, mais elles conduisaient à des résultats moins précis.

en conclut [28] que les corrections à apporter sur δn, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ et δe sont proportionnelles à m' ; en développant alors les lignes trigonométriques, il peut écrire δv sous la forme :

$$\delta v = m'(a + bt + c\sin nt + d\cos nt) \tag{9.15}$$

où a, b, c, d sont des constantes dépendant des éléments elliptiques d'Uranus et de la planète perturbatrice. On rappelle les significations des notations (ce sont celles de Lyttleton) à l'instant t

$v(t)$	Longitude vraie observée d'Uranus
$v_E(t)$	Longitude calculée d'Uranus à partir de la meilleure ellipse E ajustant les observations
$v_0(t)$	Longitude d'Uranus dans l'orbite osculatrice (et inconnue)
$w(t)$	Perturbation de la longitude d'Uranus créée par Neptune depuis l'instant t_0
$\delta_A(t)$	Écart entre longitude observée et longitude calculée : $\delta_A(t) = v(t) - v_E(t)$

On a par définition

$$\delta_A = v - v_E \qquad \text{et} \qquad w = v - v_0$$

On a donc

$$\delta_A = v - v_E = (v_0 - v_E) + (v - v_0) = (v_0 - v_E) + w = \delta v + w \tag{9.16}$$

9.3.2.2 Principe de la méthode

On néglige tous les termes en $O(em')$; comme $v_0 - v_E$ est de l'ordre de m', on peut négliger dans $v_0 - v_E$ tous les termes dépendant de l'excentricité, ce qui revient à supposer (au niveau de cette approximation) que les orbites d'Uranus et de Neptune sont circulaires. Comme t_0 est la date de la conjonction et que les orbites sont circulaires, $v - v_0 = w$ prend des valeurs opposées à des dates symétriques par rapport à t_0 : $w'(t_0 - \tau) = -w(t_0 + \tau)$; donc si on fait la translation $W(\tau) = w(t_0 + \tau)$, la fonction W est impaire. On reporte dans l'équation 9.16 :

$$\delta_A(t) = m'\{a + b(t_0 + \tau) + c\cos(nt_0 + n\tau) + d\sin(nt_0 + n\tau)\} + w(t)$$

que l'on peut récrire sous la forme

$$\delta_A(t_0 + \tau) = A + B(1 - \cos n\tau) + \{C\tau + D\sin n\tau + W(\tau)\} \tag{9.17}$$

Il s'ensuit que

$$\delta_A(t_0 - \tau) = A + B(1 - \cos n\tau) - \{C\tau + D\sin n\tau + W(\tau)\} \tag{9.18}$$

d'où $A = \delta_A(t_0)$ et en faisant la somme des deux précédentes relations, on obtient

$$\delta_A(t_0 + \tau) + \delta_A(t_0 - \tau) = 2\delta_A(t_0) + 2B(1 - \cos n\tau)$$

On définit alors la fonction ρ_L de la variable τ et dépendant du paramètre t_0 par

$$\rho_L(\tau) = \frac{\delta_A(t_0 + \tau) - 2\delta_A(t_0) + \delta_A(t_0 - \tau)}{1 - \cos n\tau} = 2B = \text{constante} \tag{9.19}$$

Cette fonction ρ_L est en fait constante ; on voit alors une méthode pour déterminer la valeur de t_0 : pour une valeur donnée de t_0, on forme la fonction ρ_L associée, puis on étudie son 'caractère de constance', par exemple en formant l'écart-type des valeurs prises par cette fonction ρ_L. On fait ce calcul pour différentes valeurs de t_0 et on sélectionne la valeur de t_0 qui conduit à un

28. C'est un argument physique raisonnable, mais pas un argument mathématique.

écart-type minimal. Bien sûr, pour le véritable mouvement, ρ_L n'est pas tout à fait constante, du fait des simplifications effectuées.

9.3.2.3 Utilisation de la méthode de Lyttleton pour déterminer la date de l'opposition

On utilise les valeurs numériques d'Adams pour les perturbations de la longitude d'Uranus, complétées par interpolation linéaire, comme il a été dit au § 9.3.2.1.
On fixe une valeur de t_0 et on fait varier τ avec un pas de 1 ; on constate rapidement que pour les faibles valeurs de τ, les incertitudes sont trop importantes et les valeurs correspondantes de ρ_L sont instables. Lyttleton commence à $\tau = 6$; après expérimentation, je commence à $\tau = 9$, mais cela ne change pas beaucoup les résultats. On fait varier τ de telle sorte que $t_0 + \tau$ et $t_0 - \tau$ restent dans l'intervalle [1780−1840]. On poursuit alors de 3 façons différentes :
- On calcule la moyenne arithmétique des valeurs de ρ_L, puis on prend l'écart-type.
- On baisse l'importance des petites valeurs de τ en pondérant les valeurs de ρ_L par 1,2,...n (n étant le nombre de valeurs calculées pour ρ_L).
- En fait les valeurs de ρ_L pour les trop grandes valeurs de τ ne sont pas nécessairement plus fiables : on pondère les valeurs de ρ_L par : 1,2,...$n/2$, $n/2 - 1$...2,1 (on dira pondération en soufflet).

On trace figure 9.4 les trois courbes $t_0 \mapsto$ écart-type classique, croissant, en soufflet. On constate la grande similarité de ces trois courbes. On examine les minima : il y a bien un minimum vers 1822−1823, mais il y en a aussi un autre, plus étalé autour de 1795. Lyttleton s'est contenté de tracer les valeurs de ρ_L, uniquement de 1813 à 1828, ce qui ne lui a pas permis de découvrir ce deuxième minimum. La date de l'opposition n'est donc pas accessible de façon sûre à partir des données d'Adams. Il aurait fallu disposer des données beaucoup plus étendues dans le temps pour pouvoir conclure avec plus de netteté. De plus, Lyttleton procède à des simplifications pas toujours justifiées.

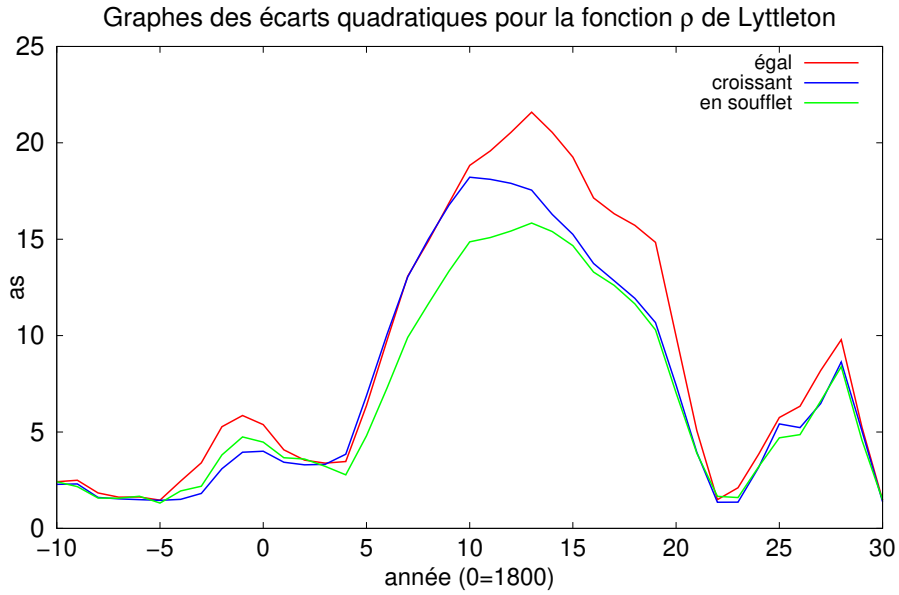


FIGURE 9.4 – Valeurs des écarts quadratiques de la fonction ρ_L en fonction de la date supposée t_0 de la conjonction (en abscisses), avec les trois modes de calcul de la constance. On constate un minimum net vers 1822, mais il y a aussi un minimum, plus plat, vers 1795

9.3.2.4 Utilisation de la méthode de Lyttleton pour le demi-grand axe

Démarche théorique

Lyttleton affirme, qu'une fois déterminée la date de l'opposition, il est possible d'estimer assez facilement le demi-grand axe. La méthode repose sur l'identité trigonométrique [29]

$$\sin(x+\beta)+\sin(x-\beta)-\sin x=(2\cos\beta-1)\sin x$$

qui montre que le premier membre est identiquement nul quand on choisit $\beta = 60°$. La perturbation au degré 1 des excentricités exercée par une planète extérieure de masse m' sur la longitude d'Uranus est de la forme [Tisserand, 1880].

$$P(t)=m'\sum_i F_i\sin\{i(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon\}+m'e\sum_i G_i\sin[\{i(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon\}+nt+\varepsilon-\varpi]$$
$$m'e'\sum_i H_i\sin[\{i(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon\}+n't+\varepsilon'-\varpi'] \tag{9.20}$$

où F_i, G_i et H_i sont des fonctions du rapport $\alpha = a/a'$ des demi-grands axes. Cette expression fait intervenir m', $m'h'$ et $m'l'$ linéairement (après développement des lignes trigonométriques), mais aussi α et ε' et ce, de façon très compliquée. On a vu comment Le Verrier a géré cette situation.

Pour localiser la planète perturbatrice, on sait aussi qu'il faut procéder à deux opérations simultanées : corriger l'orbite d'Uranus et en même temps, déterminer les paramètres de la fonction perturbatrice. La variation de la longitude vraie quand on modifie légèrement les éléments elliptiques est donnée par, ζ désignant l'anomalie moyenne :

$$\delta v=\delta\varepsilon+t\delta n+2\delta e\sin\zeta-2e\delta\varpi\cos\zeta$$

Cette expression conserve la même structure quand on change l'origine des temps, car l'anomalie moyenne ζ est une grandeur intrinsèque ; on peut donc supposer que l'origine des temps est choisie à la date de la conjonction. En développant les lignes trigonométriques, on obtient pour la perturbation totale de la longitude vraie ($P(t)$ est défini à l'équation (9.20))

$$\delta v=\delta\varepsilon+t\delta n+\delta\alpha\sin nt+\delta\beta\cos nt+P(t)$$

où $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ sont des combinaisons linéaires de δe et de $e\delta\varpi$

Il y a une simplification considérable dans $P(t)$ qui tient au fait que $\varepsilon = \varepsilon'$ puisque l'origine des temps se situe à la conjonction héliocentrique d'Uranus et de Neptune et que les orbites sont supposées circulaires. La perturbation due à Neptune se réduit à

$$P(t)=\sum_i F_i\sin i(n-n')t \tag{9.21}$$

si on se limite au degré 0 des excentricités.

On court-circuite ainsi une grande partie des calculs de Le Verrier, puisque l'on connaît t_0.

La période de révolution d'Uranus est de 84.07 années ; en 14 ans, Uranus décrit un arc de 60°, ce qui s'écrit $14n \simeq 60°$. Au lieu de considérer les écarts $\delta v(t) = O - C$ à toutes les dates t disponibles, on formera les combinaisons $\delta v(t+14)+\delta v(t-14)-\delta v(t)$, qui élimineront les

29. On rappelle que Brown [Brown, 1931] a utilisé cette même identité pour déterminer graphiquement la date de la conjonction ; voir § 9.3.1.

termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$.
Dans cette combinaison $\delta\varepsilon + t\delta n$ reste inchangé.
Par contre $P(t) = \sum_i F_i \sin D$ avec $D = i(n - n')t$ se transforme en

$$Q(t) = \sum_i f_i \sin D \qquad \text{avec} \qquad f_i = (2\cos[i(n - n')14°] - 1)\, F_i$$

On forme ensuite les mêmes combinaisons sur les données, à savoir $(\delta_A(t+14)+\delta_A(t-14)-\delta_A(t))$, et on dispose alors des équations de condition $\{(\mathcal{T}(\delta v)[t_j] = \mathcal{T}(\delta_A)[t_j]\ 1 \leq j \leq n_t\}$ aux inconnues $\delta\varepsilon$, δn et m'. On résout ensuite ce système par les moindres carrés et on détermine le résidu quadratique.

Mise en œuvre de la méthode

Voilà donc pour la démarche théorique.
Pour les calculs numériques, on dispose des données d'Adams et de leurs interpolations tracées figure 9.3. Lyttleton a indiqué les valeurs numériques des coefficients F_i puis f_i pour $\alpha =$ 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.70 et $i = 1, 2, 3, 4$. Je trouve un accord parfait avec F_i et f_i pour $i \geq 2$; par contre je trouve des valeurs très différentes pour F_1 et f_1. Lyttleton a aussi détaillé les valeurs numériques pour $\alpha = 0.62689$; je trouve les mêmes valeurs pour f_2, f_3 et f_4, mais pas pour f_1. Notons au passage que, s'il est possible d'interpoler les valeurs des $(f_i)_{i=1:4}$, il est impossible de le faire pour F_2 entre 0.6 et 0.65, car on passe par la résonance 1 : 2 entre Uranus et Neptune, au moment duquel F_2 devient infini.
J'ai refait mes calculs à de nombreuses reprises sans pouvoir expliquer les écarts constatés pour les valeurs de F_1. J'ai relu l'article de Brookes [Brookes, 1970] et j'ai constaté que Brookes aussi n'était pas d'accord avec les coefficients donnés par Lyttleton. Il en donne l'explication : Lyttleton a choisi les valeurs de F_i données par Tisserand ; or l'expression donnée par Tisserand pour F_i n'est pas valable telle quelle pour $i = 1$: il faut corriger la formule si l'on veut tenir compte de l'action indirecte de la planète perturbatrice. J'ai repris les calculs avec la valeur correcte de F_1 et je trouve un résultat très différent de celui trouvé par Lyttleton. En plus, en reprenant les valeurs (erronées) de F_1 données par Lyttleton, on ne trouve pas du tout la courbe qu'il a tracée. Mes deux derniers résultats sont en accord avec ceux trouvés par Brookes. Comment expliquer de telles différences dans les résultats ? Cela fait beaucoup d'erreurs et le minimum mis en évidence par Lyttleton n'existe pas. Je trouve quasiment les mêmes courbes que Brookes. On peut conclure que la méthode de Lyttleton pour déterminer le demi-grand axe n'est pas valide.
La méthode est séduisante, mais ne s'applique pas concrètement. Cela tient aussi au fait que l'on utilise des approximations locales sur des intervalles étendus.

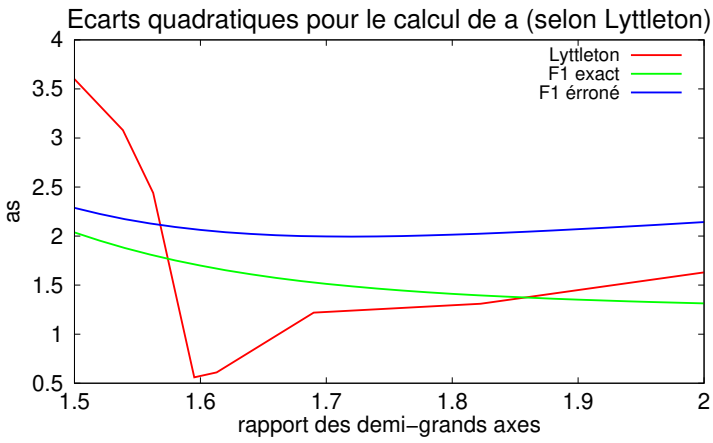


Figure 9.5 – Résidus quadratiques dans le système d'équations $\mathcal{T}(\delta v)[t_j] = \mathcal{T}(\delta_A)[t_j]$ quand on prend les bonnes valeurs pour F_1 (en vert), quand on prend les valeurs incorrectes de F_1 données par Lyttleton (en bleu) et enfin le tracé de Lyttleton lui-même (en rouge) qui ne ressemble à aucun des deux autres et dont il est difficile de savoir d'où viennent les différences. Brookes [Brookes, 1969] a fait les mêmes constations négatives avant moi

9.3.2.5 Méthode de Lyttleton sur un intervalle de temps plus étendu

Lyttleton a limité ses calculs à la tranche 1813−1830, ce qui laisse apparaître un minimum des résidus dans le calcul de la fonction ρ_L en 1822 (voir fig. 9.4). Si on élargit sa fenêtre de calcul (cf. figure 9.6), la conclusion est beaucoup moins évidente.

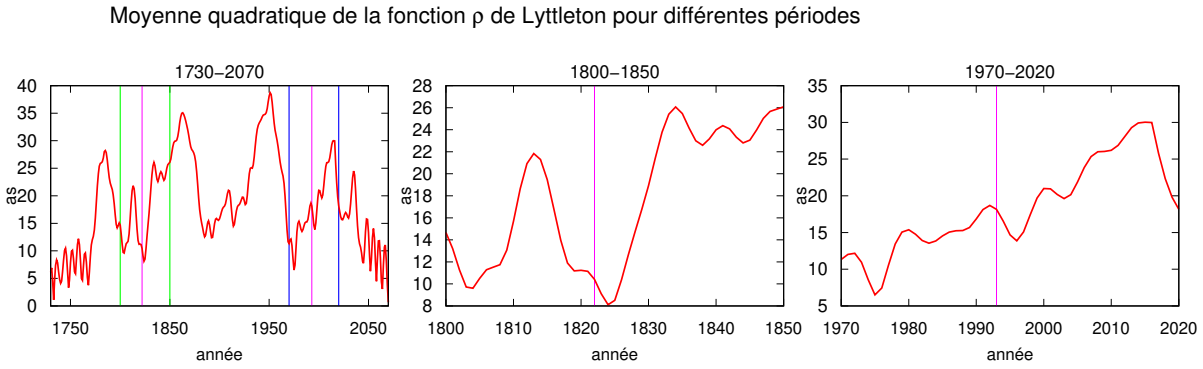


FIGURE 9.6 – À gauche, écarts quadratiques pour la fonction ρ_L de Lyttleton sur la tranche 1730−2070. On observe beaucoup de minima sur cette tranche. Le minimum de 1822 est assez bien détecté, celui de 1993 aussi. Les deux graphes de droite reproduisent les agrandissements aux tranches délimitées (par des traits verts ou bleus) sur le dessin de gauche. Sur le tracé de droite, le minimum de 1993 est décalé. Ces tracés ne prolongent pas exactement celui de la fig. 9.4 car les données d'observation utilisées ici sont celles d'INPOP, alors que pour la fig. 9.4, les données sont celles d'Adams

Pour arriver aux tracés de la fig. 9.6, on a repris les calculs de Lyttleton en utilisant INPOP sur la tranche 1730−2070. Dans le détail, on procède de la façon suivante : on lance INPOP sur cet intervalle et on retient les positions (exactes) d'Uranus. Ensuite on supprime les astéroïdes, la relativité générale, Pluton et surtout Neptune. On relance INPOP : il y a des écarts importants dans la longitude d'Uranus, que l'on corrige en ajustant les éléments d'Uranus ; quand les corrections deviennent insensibles, on note les positions finales d'Uranus et on forme les écarts entre ces dernières et les positions exactes, c'est δ_A. On applique alors la méthode de Lyttleton en formant la fonction ρ_L associée à δ_A et en examinant son degré de constance au moyen d'un écart quadratique. On constate fig. 9.6 qu'il y a un minimum vers 1823, un autre vers 1975, mais il y a beaucoup d'autres minima secondaires en dehors de ces valeurs. On peut donc confirmer que la méthode de Lyttleton n'est pas très fiable pour déterminer avec certitude la date de la conjonction.

9.3.2.6 Conclusions

On vient de voir que la méthode de Lyttleton donne la date de la conjonction si on se limite à une tranche étroite de temps [30] ; mais si on élargit cette tranche, le pronostic est beaucoup moins fiable.
Par contre, la méthode suggérée par Lyttleton pour prédire le demi-grand axe de la planète perturbatrice semble complètement erronée, et ce fait est confirmé par Brookes.

On peut formuler une remarque plus générale : pour déterminer les caractéristiques d'une planète perturbatrice décrivant un cercle dans l'écliptique, il suffit de 3 paramètres : m', a' et ε'.
Pour une orbite non circulaire dans l'écliptique, il en faut 5 : m', $m'h'$, $m'l'$, a' et ε'.

30. Pour être méchant, on pourrait dire : si on connaît la solution !

La méthode proposée par Lyttleton [31] tend à éliminer 2 corrections des éléments elliptiques d'Uranus (δe et $e\delta\varpi$), ce qui laisse 4 inconnues pour une orbite perturbatrice circulaire de taille donnée (δn, $\delta\varepsilon$, m' et ε') et 3 seulement si l'on connaît la date de la conjonction (car alors $\varepsilon' = \varepsilon$). Cette démarche est tout à fait justifiée dans le cadre de calculs faits à la main, mais perd beaucoup d'intérêt pour des calculs programmés. D'autre part, elle nécessite beaucoup de manipulations des données brutes : regroupements, interpolations..., qui ne sont pas sans incidence sur le résultat final. Il est cependant très intéressant de voir ce qu'avaient pu inventer les successeurs de Le Verrier et de mesurer l'impact qu'avaient eu les calculs de celui-ci sur ses contemporains et sur ses successeurs.

Une remarque humoristique : Brookes trouve des erreurs numériques importantes dans le travail de Lyttleton, qui lui-même trouve des erreurs importantes dans le travail de Brown, qui lui-même trouve des erreurs importantes dans le travail de J. Herschel !

Finalement, après examen des 3 tentatives précédentes, il semble difficile de raccourcir significativement les calculs de Le Verrier, quand on ne connaît pas le résultat a priori.

9.3.3 Gestion de la pseudo résonance

On ne propose pas ici une autre approche permettant de raccourcir les calculs de Le Verrier ; on étudie la perturbation observable d'une planète (P) exercée par une autre et on la compare à la perturbation directe, inaccessible, car modifiée par l'ajustement des éléments de (P). L'outil utilisé est la transformation de Brown.

Comme on l'a vu au § 6.3, Peirce a déclaré que la découverte visuelle de Galle était un "Happy accident", sa déclaration s'appuyant sur l'impossibilité à concilier – selon lui – deux résultats (un concernant la période de Neptune et l'autre concernant son demi-grand axe) de Le Verrier avec les observations modernes de Neptune. On a vu aussi, au même endroit, que cette affirmation n'était pas fondée.

Le Verrier avait annoncé pour la planète perturbatrice une distance moyenne de 37 *au*, et Walker avait établi, début 1847, pour l'orbite de Neptune un demi-grand axe de l'ordre de 30.2. Peirce soutint que ce qui avait été fait pour 37 *au* ne pouvait pas s'appliquer à 30 *au*, car entre les deux, pour $a' = 35.3$, on passerait par la résonance 5 : 2 qui perturberait grandement l'action de Neptune sur Uranus. Cette objection a été résolue par Le Verrier [Le Verrier, 1848c].

On examine ici la contribution de D. Rawlins [Rawlins, 1970] visant à détailler l'action d'une éventuelle résonance.

La difficulté dans le problème de l'observation de la perturbation exercée par une planète inconnue est qu'il est impossible a priori de séparer dans la perturbation observée la contribution due à la correction des éléments elliptiques de la planète de la perturbation directe exercée par la planète extérieure. À l'ordre 1, la correction de la longitude vraie résultant de la correction des éléments elliptiques de la planète étudiée est un signal de fréquence celle de la planète perturbée. Il est donc possible d'éliminer ce signal en appliquant à la perturbation $P(t)$ subie par la planète (P) la transformation de Brown i.e.

$$P(t) \longrightarrow Q(t) = P\left(t + \tfrac{60^\circ}{n}\right) + P\left(t - \tfrac{60^\circ}{n}\right) - P(t) \tag{9.22}$$

où n est le moyen mouvement de (P). Si l'on suppose les orbites circulaires, on a

$$P(t) = -m' \sum_{i=0}^{+\infty} F_i \sin iD \qquad \text{avec} \qquad D = (n - n')t + \varepsilon - \varepsilon' \tag{9.23}$$

31. Et aussi par d'autres : John Herschel, Brown..

les F_i étant fonction uniquement du rapport $\alpha = a/a'$ des demi-grands axes, et leur expression théorique est donnée dans [Laplace, 1802] ou [Somerville, 1831].
Si on place l'origine des temps à la conjonction, on a $\varepsilon = \varepsilon'$ et D se réduit à $D = (n - n')t$. On obtient alors

$$Q(t) = -m' \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \sin iD \tag{9.24}$$

avec des f_i se calculant facilement à partir des F_i correspondants.
La singularité de la fonction P ne reflète pas une difficulté physique, mais un inconvénient lié au traitement classique des perturbations planétaires et $Q(t)$ n'a plus la singularité de P.
Au voisinage d'une résonance d'ordre 1 (entiers consécutifs $s - 1$ et s), Rawlins montre que

$$P(t) \sim -m' K_s \frac{1}{1-zs} \sin nt$$

où $z = 1 - \frac{n'}{n} \to \frac{1}{s}$ et K_s est un coefficient ne dépendant que de α. Dans le même temps, il montre que la correction $E(t)$ de la longitude vraie de (P) résultant de la correction des éléments elliptiques de la planète (P) vérifie

$$E(t) \sim m' K_s \frac{1}{1-zs} \sin nt$$

Ainsi, $E(t)$ s'arrange pour compenser la partie de $P(t)$ tendant vers l'infini lors d'une résonance. La singularité sur $P(t)$ n'est donc qu'apparente. Voici ce que dit Rawlins :

> Thus the idea that a resonance must correspond to a separator of discretely differing sorts of disturbances is seen to be illusory. [...] In pratice, given residuals which may be due to an unseen disturber, any attempt at a visual comparison of the shape of the residual curve to a $P(t)$ curve is hopeless, since, if a disturber is present, $P(t)$ will inevitably appear in the observed residuals only in sum with an element-correction curve (of period $2\pi/n$) automatically contrived by the least-squares process.

L'application de la transformation de Brown permet d'obtenir des renseignements sur la nature de la perturbation réelle exercée par la planète extérieure. Rawlins a tracé les variations de $Q(t)/m'$ pour différentes valeurs de α. On constate sur les courbes tracées par Rawlins que le maximum de Q/m' se produit pour une valeur D_m de D proche de $-40°$ et ce pour une large tranche de valeurs de α : c'était l'observation essentielle retenue par Brown pour appliquer sa méthode de détermination de la date de conjonction (§ 9.3.1.2).

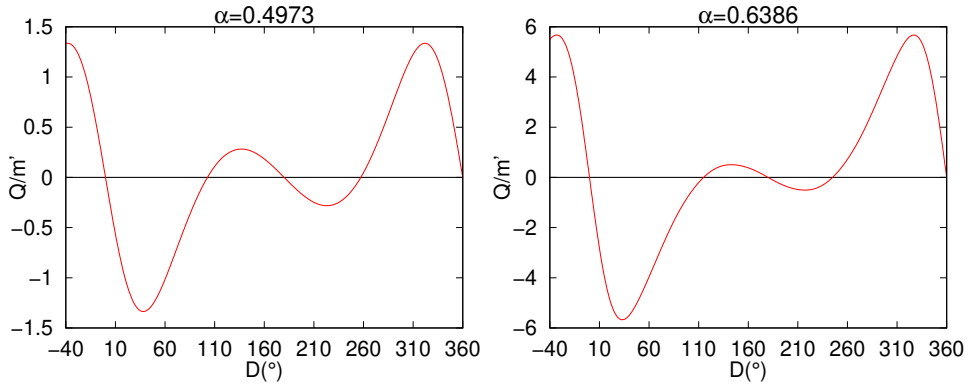


FIGURE 9.7 – Variations de $Q(t)/m'$ pour deux valeurs de α. Q est exprimé en radians et m' est le rapport entre la masse de la planète perturbatrice et celle du Soleil. À gauche le tracé est fait pour $\alpha = 0.4973$ et à droite pour $\alpha = 0.6386$ (tracés effectués avec TRIP)

La courbe des $O - C$ obtenue à la fig. 2.2 semble correspondre à une valeur de α comprise entre 0.4973 et 0.6386 (deux valeurs retenues par Rawlins pour ses tracés et les tracés correspondants sont faits avec TRIP à la figure 9.7).

Rawlins dit que la fraction d'orbite perturbée entre le maximum et la conjonction est $\frac{D_m}{z360}$ (où D_m est l'abscisse du maximum de Q_m), soit 0.187 dans le cas d'Uranus perturbé par Neptune. Comme le maximum de $Q(t)$ a été repéré vers 1806 (fig. 9.2), il en déduit que la conjonction a eu lieu vers $1806 + 0.187 * 84 \simeq 1822$. On peut aussi utiliser l'argument mis en avant par Brown au § 9.3.1, consistant à décaler la date du maximum de 1/9 de la révolution synodique. Dans le graphe de la fig. 9.8, on représente les variations de $\log(Q_m/m')$ en fonction de $\log 1/\alpha$ (a), puis en fonction de $\log u$ (b), et enfin on trace la pente du graphe de $\log(Q_m/m')$ en fonction de $\log u$ (c). Ces différents graphes permettent de mesurer la nature de l'action de la planète perturbatrice. On constate que lorsque α est petit (planète perturbatrice lointaine), la pente de Q_m tend vers -3, ce qui correspond à un effet de marée sur le couple Soleil-Uranus, effet exercé par le champ gravitationnel de Neptune. Quand α tend vers 1, la pente tend vers -2, ce qui correspond à un effet gravitationnel lié à la distance au moment de la conjonction. Quand $\alpha = 0.5$, cas d'une orbite bodéenne, la pente est 2.59 (disque bleu sur la courbe fig. 9.8) ; résultat voisin de celui trouvé (2.47) avec l'ajustement sur la masse effectué avec INPOP au § 8.6.

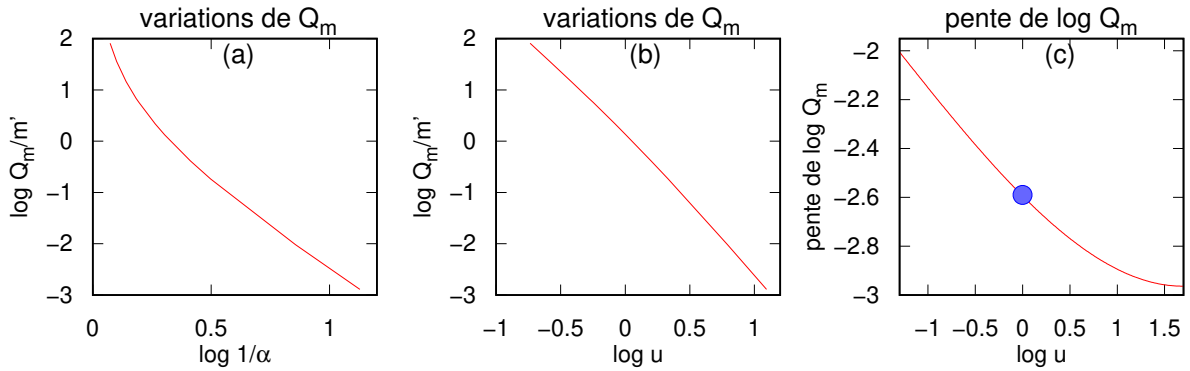


FIGURE 9.8 – Variation de $\log \frac{Q_m}{m'}$ (où Q_m est la valeur maximale de Q) en fonction de $\frac{1}{\alpha}$ (a), de $u = \frac{1}{\alpha} - 1$ (b) et la pente de cette dernière courbe (c)

En utilisant les valeurs de Q_m trouvées pour les différentes valeurs de α et en interpolant entre ces valeurs, on constate que pour exercer une action comparable au vrai Neptune, il faudrait :
– une masse de $4\,m_{Nep}$ à la distance bodéenne.
– une mase de $3.5\,m_{Nep}$ à la distance de Hyp II
– une masse de $3\,m_{Nep}$ à la distance finale de Le Verrier (36.15 au).
Ces valeurs sont un peu élevées par rapport à ce qu'avaient trouvé Le Verrier et Adams.
J'ai essayé ensuite de déterminer la position de Neptune à partir des perturbations exercées sur Uranus en utilisant des équations de conditions filtrées par la transformation de Brown : j'ai essayé avec les données historiques de Le Verrier ainsi qu'avec des valeurs 'exactes' données par INPOP. Le résultat n'est pas très convaincant, probablement parce que la recherche doit porter sur une orbite circulaire, condition pour appliquer la méthode de Brown et donc de Rawlins.

9.4 Reprise des calculs de Lai, Lam, Young

9.4.1 Problème direct pour la longitude

J'ai présenté le modèle de Lai, Lam et Young [Lai, 1990] au § 7.4, à l'occasion de son adaptation au rayon vecteur. Je ne reprends pas la présentation ; j'avais signalé que le modèle expliquait correctement les données observationnelles historiques. Je donne fig. 9.9 les tracés correspondants (les $O-C$) obtenus avec TRIP, pour deux périodes différentes, ce qui permet de voir l'évolution à différentes échelles. C'est le problème direct.

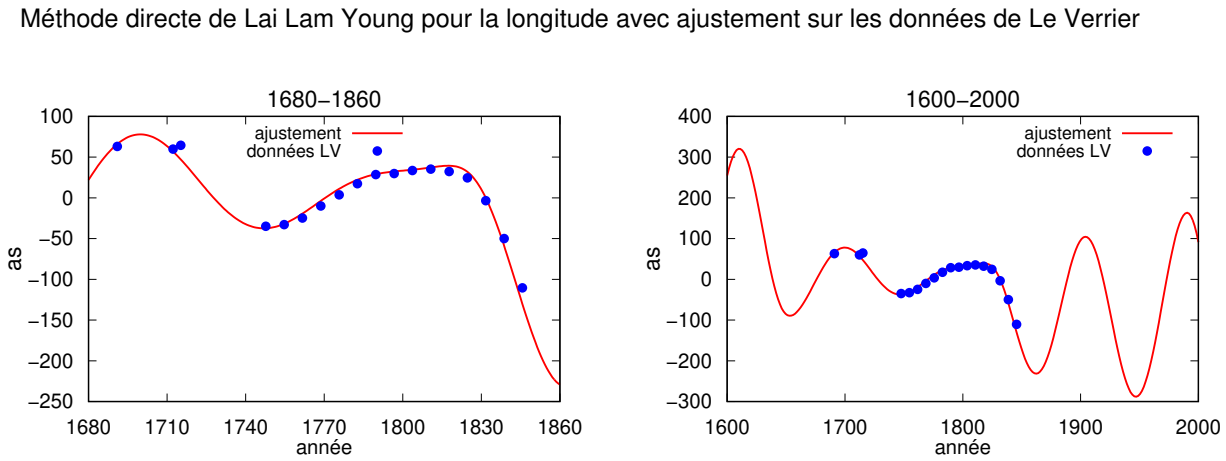


FIGURE 9.9 – Ajustement des paramètres dans le cas du problème direct (Neptune connu) en utilisant le modèle LLY, avec ajustement sur les données de Le Verrier. Les tracés des $O - C$ sont faits en utilisant TRIP. On retrouve les graphes figurant dans l'article de LLY [Lai, 1990]

9.4.2 Problème inverse pour la longitude et le rayon

On a vu aussi au même endroit (§ 7.4) qu'avec ce modèle, en faisant un balayage sur t_0, on pouvait mettre en évidence la date de la conjonction, la période de révolution synodique et le minimum secondaire, voir fig. 7.6. On a vu aussi qu'un balayage sur Ω_2 permettait de trouver la valeur du moyen mouvement de Neptune, voir fig. 7.9.
Le modèle inverse, c'est à dire balayage sur t_0 et Ω_2 débouchant par le tracé pour les valeurs optimales trouvées pour t_0 et Ω_2 est donné à la figure 9.10.
Est-ce que cela signifie que l'on aurait pu facilement trouver Neptune ?
Non, car le modèle repose sur une quasi-résonance d'ordre 2, explicitement représentée dans le modèle LLY, et qui n'était pas du tout naturelle à l'époque de Le Verrier. En effet celui-ci partait sur un rapport des demi-grands axes égal à 2 et donc un rapport des fréquences voisin de 3.

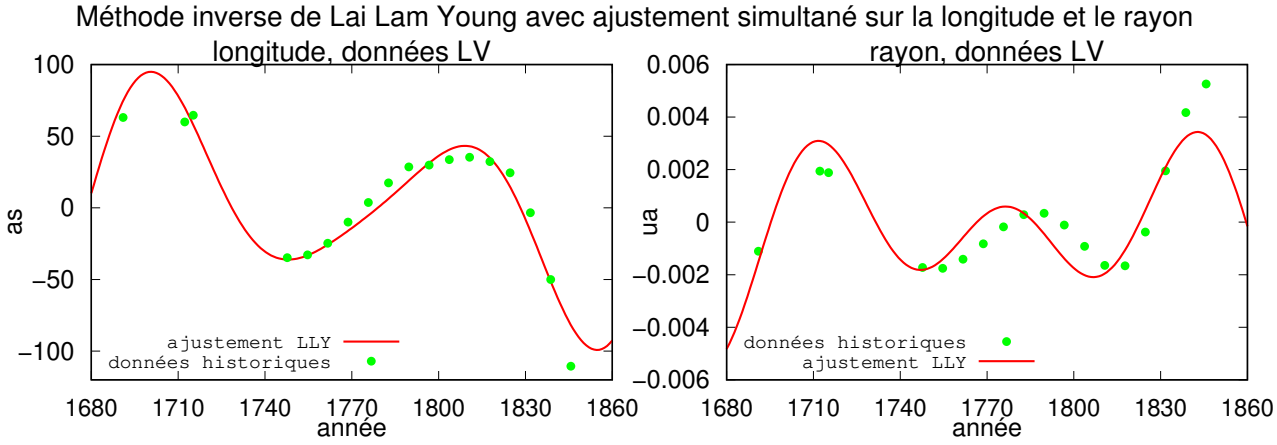


FIGURE 9.10 – Ajustement sur la perturbation de la longitude héliocentrique, avec le modèle LLY pour une quasi-résonance 1 : 2 et les données de Le Verrier, problème inverse. On cherche par un balayage le couple (t_0, Ω_2) qui minimise l'écart quadratique entre les perturbations observées et les perturbations théoriques et on trace les courbes correspondant au couple trouvé. On voit que le modèle LLY approche mieux la longitude que le rayon vecteur

Quatrième partie

CALCULS EFFECTUÉS PAR ADAMS COMPARAISON AVEC CEUX EFFECTUÉS PAR LE VERRIER

Chapitre 10

LES CALCULS EFFECTUÉS PAR ADAMS

Objectifs

Présentation En 1841, Adams forme le vœu d'expliquer les irrégularités du mouvement d'Uranus, une fois qu'il aura obtenu son diplôme universitaire. Entre début 1843 et septembre 1846, il effectue 6 calculs différents et progressifs pour tenter de localiser la planète qui perturbe Uranus.
On présente schématiquement ces différents calculs à la section 1.
On détaille ensuite à la section 2 sa première solution, celle de 1843, dont le résultat, satisfaisant, ("good general agreement"), va l'encourager à affiner sa méthode ; mais on mettra en évidence des insuffisances théoriques dans ce premier calcul.
On examine ensuite à la section 3 le détail de sa sixième (et dernière) solution, et on montre qu'elle n'est pas non plus exempte de critiques. Comme Adams avait commencé à le faire, on examine ensuite les résultats que l'on obtient à partir de divers rapports des demi-grands axes.
Enfin, à la section 4, on présente la thèse effectuée par Brookes en 1969 sur les calculs d'Adams et on compare ses résultats avec ceux obtenus par Adams et par TRIP.

Sommaire

10.1 Les différents calculs d'Adams . . . **359**
10.1.1 Origine du problème . . . 359
10.1.2 Principe des différents calculs d'Adams . . . 360
10.1.3 Résultats obtenus par les différentes méthodes . . . 361
10.1.4 Polémique sur le billet transmis à Airy . . . 362
10.1.5 Publication de la méthode de calcul d'Adams . . . 362
10.2 Détail du calcul d'Adams pour la solution de 1843 . . . **362**
10.2.1 Formation et résolution des équations . . . 363
10.2.2 Prolongements et conclusions . . . 367
10.3 Détail du calcul d'Adams pour l'hypothèse II . . . **369**
10.3.1 Interrogations au sujet de la formule utilisée par Adams pour la correction de la longitude moyenne d'Uranus . . . 370
10.3.2 Observations retenues . . . 371
10.3.3 Forme des équations de condition . . . 372
10.3.4 Traitement des équations modernes . . . 373

10.3.5 Traitement des équations anciennes . . . 375
10.3.6 Résolution des équations . . . 375
10.3.7 Discussion de la méthode d'Adams . . . 376
10.3.8 Valeurs obtenues . . . 377
10.4 Analyse de la thèse de C. J. Brookes . . . **381**
10.4.1 Démarche générale de Brookes . . . 381
10.4.2 Résultats trouvés par Brookes pour différentes dates de calcul . . . 382
10.4.3 Conclusions . . . 385

10.1 Les différents calculs d'Adams

10.1.1 Origine du problème

Les parcours scolaire et universitaire de J. C. Adams ont été très bien décrits par de nombreux auteurs [Grosser, 1962], [Moore, 1988], [Standage, 2000], [Sheehan, 2021] ...
Voici un bref résumé (extrait de [Sheehan, 2021]) : John Couch Adams est né en 1819 à Lidcott Farm en Cornouailles. Il montra dès son plus jeune âge de fortes aptitudes pour les mathématiques, en procédant déjà à des réflexions intérieures avant de mettre les calculs sur le papier. Il s'initia tout seul à l'astronomie en parcourant les quelques livres disponibles chez lui. Il fit aussi des observations avec un astrolabe de marine et des prédictions d'éclipses. Il put s'inscrire à l'université St John de Cambridge grâce à l'octroi d'une bourse. Il y fit d'excellentes études, surtout en mathématiques. Il fut brillamment reçu Senior Wrangler en 1843 et élu membre (fellow) de St John's college. Il enseigna l'astronomie et la géométrie à Cambridge jusqu'à sa mort en 1892. Il prit la direction de l'Observatoire de Cambridge à la mort de Challis en 1861. Il refusa l'anoblissement proposé par la reine Victoria ; il refusa aussi le poste d'astronome royal quand Airy prit sa retraite en 1881. Autant de traits qui montrent la grande modestie d'Adams. Une plaque commémorative a été posée en 1895 à l'abbaye de Westminster, à côté de celle dédiée à Newton.

On extrait maintenant des ouvrages mentionnés plus haut ce qui a un rapport avec la recherche de Neptune.
On connaît l'origine de l'intérêt d'Adams pour Uranus : en juin 1841, il tombe sur le rapport [1] d'Airy : *Report on the Progress in Astronomy*. Dans ce rapport, Airy indique que l'écart entre la position réelle d'Uranus et la position prédite atteint $30''$ en 1832.
Adams écrit le 3 juillet 1841 dans son agenda cette (fameuse) déclaration solennelle :

> Formed a design ... of investigating, as soon as possible, after taking my degree, the irregularities in the motion of Uranus, which are not yet accounted for, in order to find whether they may be attributed to the action of an undiscovered planet beyond it, and, if possible, to determine approximately the elements of its orbit, etc., that would probably lead to its discovery.

William Sheehan – psychiatre de formation – précise [Sheehan, 2021], p. 119

> The second reason for Adams' interest, however, would have been the problem of the motions of Uranus that he now came across, and which was precisely the sort to which his training for the Tripos problems would have prepared him. It says a great deal about Adams' confidence that, even though he might appear to others as absent-minded and diffident, inwardly he was utterly convinced, even at the stage of a junior soph, of his own capabilities.

Comment connaît-on la démarche d'Adams ? Il y a au moins 3 sources principales :

1. Adams lui-même, qui publie [2] ses calculs dans les mémoires de la RAS [Adams, 1847] peu après la découverte visuelle. Mais il détaille beaucoup moins sa démarche que ne le fait Le Verrier.
2. Sampson [3], à qui la veuve d'Adams confie les manuscrits de son mari, à la mort de celui-ci, et qui en fait une analyse approfondie [Sampson, 1904].

1. Rapport publié dans les conclusions du meeting de la British Association for the Advancement of Science, qui s'était tenu à Oxford en 1832.
2. Il lit son mémoire à la séance de la RAS du 13 novembre 1846 et son texte est publié dans les *Monthly Notices* de la RAS de mai 1847.
3. Sampson (1866−1939) est un ancien élève d'Adams, et à ce titre, il connaît bien le mode de fonctionnement d'Adams. Il fut astronome royal d'Écosse de 1910 à 1939.

3. Brookes, auteur d'une thèse datant de 1969 sur les calculs d'Adams [Brookes, 1969]. Ajoutons que Brookes a réuni une partie des résultats de sa thèse dans un article intitulé : *On the prediction of Neptune* [Brookes, 1970], mais dans cet article il utilise parfois des valeurs légèrement différentes de celles qu'il a données dans sa thèse (recalcul ?) ; en cas de désaccord, je donnerai la préférence aux valeurs de l'article.

Les manuscrits d'Adams se trouvent à la bibliothèque du collège Saint John de Cambridge. Les calculs relatifs à la recherche de 1843 ont été reproduits en fac-similé dans l'analyse [4] faite par Sampson [Sampson, 1904]. L'écriture d'Adams, très penchée, n'est pas facile à lire et les calculs sont peu expliqués et ne sont pas toujours placés dans un ordre chronologique, d'où de grandes difficultés à suivre le cheminement d'Adams ; voici ce qu'en pense Sampson [Sampson, 1904] :

> the work is written on both sides of the paper, in no kind of order ; it is not possible to arrange it so as to explain itself, but with a little of trouble almost every detail may be followed.

Pour compliquer un peu plus la lecture de ses manuscrits, Adams n'utilise pas dans ceux-ci les mêmes notations que celles qu'il utilise dans son mémoire.

10.1.2 Principe des différents calculs d'Adams

Les démarches de Le Verrier et d'Adams sont voisines au sens où ils forment tous les deux des équations de condition qui consistent à exprimer que les perturbations théoriques, dépendant des corrections à effectuer sur les paramètres d'Uranus et des éléments inconnus de la planète troublante, sont égales aux perturbations observées. Par contre, les deux démarches diffèrent beaucoup dans le détail des calculs. La démarche d'Adams est plus élégante [5] et plus facile à programmer.

Pour calculer les positions d'Uranus à différentes dates (les C), Adams utilise la table de Bouvard, après avoir rajouté les deux termes manquants signalés par Hansen (§ 7 de son mémoire [Adams, 1847] et § 13.2 de la thèse).

Le Verrier commence par recalculer l'ensemble des perturbations subies par Uranus de la part de Jupiter et de Saturne. Il forme des équations de condition qui lui permettent – assez laborieusement [6] – de prédire en deux temps une position possible pour la planète perturbatrice. Le Verrier présente ses calculs dans quatre mémoires successifs et publie sa démarche [Le Verrier, 1846b] très rapidement après la découverte visuelle.

Adams explore longuement les problèmes dans sa tête [7] avant de conclure rapidement sur le papier. Ses manuscrits comportent surtout des opérations, pas toujours disposées dans un ordre chronologique, et ils sont le plus souvent dépourvus de commentaires.

Adams fait un premier essai en 1843 en schématisant l'orbite d'Uranus par une orbite circulaire dans l'écliptique et en attribuant, a priori, à la planète perturbatrice une orbite circulaire située à deux fois [8] la distance d'Uranus. Ce premier essai lui paraît encourageant [Adams, 1848] :

4. Sampson éclaire beaucoup de calculs et de démarches, mais commet quelques erreurs de référence quand il renvoie aux manuscrits, ce qui ne simplifie pas leur compréhension.

5. Voir une comparaison plus détaillée au § 11.1.

6. Le Verrier part de 18 équations de condition, qu'il regroupe pour former un système de 3 équations dont les coefficients dépendent de la longitude de l'époque de la planète perturbatrice. Il choisit 40 valeurs pour cette longitude, puis examine si les 40 systèmes correspondants peuvent être résolus avec des valeurs physiquement acceptables. Il en déduit une valeur possible, et même **nécessaire** selon lui, pour cette longitude de l'époque. Dans un deuxième temps (deuxième approximation), il affine cette première solution (chapitres 5 et 6).

7. Voir le commentaire de Sampson au § 11.1.

8. Toujours la 'loi' de Bode (voir encadré 12 p. 168). On rappelle que l'on ne peut pas commencer le moindre calcul de recherche tant que l'on n'a pas fixé une valeur pour le rapport des demi-grands axes.

« The result shewed that a good general agreement between theory and observation might be obtained... » et il décide d'affiner sa démarche dès que ses charges scolaires lui en laisseront le temps. Il effectue dans les trois années qui suivent cinq calculs supplémentaires [9], indépendants les uns des autres, en complexifiant progressivement ses équations.
Adams explique partiellement sa démarche mathématique dans la séance de la RAS du 13 novembre 1846 et publie un mémoire dans les *Monthly Notices* [Adams, 1847] de mai 1847.
Le principe des différentes méthodes d'Adams est de résoudre des équations de condition, équations ayant pour inconnues les corrections à apporter aux éléments d'Uranus ainsi que les éléments de la planète perturbatrice. Le traitement pour chaque méthode consiste à effectuer des combinaisons de ces équations afin d'éliminer les corrections à apporter aux éléments d'Uranus et donc de ne conserver comme inconnues que les éléments de la planète inconnue. De façon assez originale, il crée des symétries qui permettent de simplifier grandement ses équations.
Voici table 10.1 les principales caractéristiques de ses différents calculs [Sampson, 1904] :

TABLE 10.1 – Caractéristiques principales des différentes solutions d'Adams [Sampson, 1904]

I	Orbite circulaire pour la planète perturbatrice située à deux fois la distance d'Uranus.
II	Idem, mais tient compte de l'excentricité d'Uranus.
III	Introduit une excentricité pour la planète perturbatrice.
IV	Ajout de deux termes supplémentaires dans la théorie d'Uranus ainsi que deux termes supplémentaires dans la perturbation créée par la planète inconnue.
V	Correction d'une erreur dans les données utilisées pour la solution IV. Cette solution est maintenant connue sous le nom de Hypothèse I.
VI	Calcul voisin du précédent, mais avec $\alpha = \sin 31° = 0.515$. Le traitement algébrique est légèrement simplifié par rapport au précédent. Solution connue maintenant sous le nom de Hypothèse II.

10.1.3 Résultats obtenus par les différentes méthodes

Dans la table 10.2, on a reporté les principaux résultats obtenus par Adams par chacune de ces méthodes. L'unité de masse est la masse du Soleil ; les résultats sont encore tirés de [Sampson, 1904]. L'époque de référence est 1810.328, c'est à dire la date de l'opposition d'Uranus pendant l'année 1810. Pour pouvoir comparer les différentes versions, j'ai rajouté, en extrapolant et en tenant compte de la précession, les longitudes vraies au 23/9/1846, sinon toutes les autres valeurs du tableau proviennent des calculs d'Adams.

TABLE 10.2 – Résultats trouvés pour les différentes versions des calculs d'Adams [Sampson, 1904] ; les 6 valeurs modernes, actualisées pour 1845, sont tirées de Simon [Simon, 1973]

Numéro de solution	I	II	III	IV	V	VI	Neptune
Date (de fin) des calculs	1843	Non datée	28/4/1845	18/9/1845	10/1845	8/1846	
Demi-grand axe	38.4	38.4	38.4	38.4	38.4	37.3	30.1
1/masse	4227	2439	6357	5813	6060	6665	19 300
Excentricité	0 †	0	0.19717	0.1428	0.16103	0.120615	0.0094
Longitude périhélie	–	–	248°	320°	316°	299°	45°
Longitude époque (1810.328)	253°28′	263°16′	271°37′	267°58′	269°25	264°50′	249°58′
Longitude vraie (23/9/46)	309°.2	319°.0	349°.8	324°.9	328°.8	329°.5	327°.4

† Après avoir fait les calculs avec $e' = 0$, Adams reprend ces mêmes calculs pour estimer e' à 0.02543. Le calcul n'est pas vraiment expliqué dans les manuscrits.

9. La cinquième version est essentiellement une correction (des données) de la quatrième [Sheehan, 2021].

On va analyser au § 10.2 la méthode utilisée pour le calcul de 1843 et on comparera les résultats obtenus par TRIP avec ceux obtenus par Adams.
Puis, on détaillera au § 10.3 le calcul effectué pour l'hypothèse II et on comparera les résultats obtenus en utilisant TRIP avec ceux obtenus par Adams et Brookes.

10.1.4 Polémique sur le billet transmis à Airy

Une fois les calculs avec l'hypothèse I effectués, Adams transmet à Challis les éléments trouvés pour la planète troublante. Après de nombreuses péripéties [10], il dépose à Greenwich une version 'slighty revised' de ses résultats à l'intention d'Airy. En fait, ces deux versions sont assez différentes, ce qui a donné naissance à des interprétations variées :
– Rawlins [Rawlins, 1992] prétend que le billet remis à Airy est un faux, écrit après la découverte.
– Norma Foster [Foster, 2014] pense que le billet marqué October 1845 par Airy est en fait celui remis à Challis et que le billet remis à Airy, qui ne différait, selon elle, que par une actualisation de la longitude au 6 octobre 1846 (date de l'opposition), a été perdu.
– William Sheehan [Sheehan, 2021] écrit que la note remise à Challis est en fait le résultat de la version IV, contenant une 'trifling error' et que le billet laissé à Airy est la version V (hypothèse I), qui corrige l'erreur de la version IV, erreur vraisemblablement corrigée pendant son séjour à Lidcott en octobre 1845.

10.1.5 Publication de la méthode de calcul d'Adams

La question de priorité dans la découverte de Neptune tournait autour de la priorité des publications. On sait que Le Verrier a publié des mémoires au fur et à mesure de l'avancée de ses travaux dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (§ 2.1), puis dans *Astronomische Nachrichten* et enfin il reprend, après la découverte visuelle, l'ensemble de ses calculs dans *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* [Le Verrier, 1846a].
On voit donc que Le Verrier a pris le risque d'être contredit par des résultats visuels ultérieurs discordants, ce qui sera partiellement le cas. Mais cela montre, une fois de plus, la grande confiance que Le Verrier avait dans ses calculs.
Adams n'a informé que Challis et Airy de l'avancée de ses travaux, et ce, en leur transmettant des billets ne contenant que les coordonnées prédites pour la planète troublant Uranus (et les résidus), sans détailler la méthode. Apparemment, Adams espérait que ses résultats seraient publiés par Airy. Voici ce que dit Sheehan à ce sujet [Sheehan, 2021] p. 142 :

> He believed that by placing the results of his calculations in Challis's and now Airy's hands, he had effectively "published them," confiding to Adam Sedgwick (Sedgwick to Richarda Airy, 6 December 1846 ; McA 33 :10), "I did think that the Astronomer Royal would have communicated my results among his correspondents – I took all that for granted & I thought it a publication..."

10.2 Détail du calcul d'Adams pour la solution de 1843

Pour sa première tentative [11], Adams essaie [12] d'ajuster une orbite circulaire pour la planète perturbatrice. Il choisit comme rapport des demi-grands axes la valeur 0.5, en s'appuyant sur

10. Très bien décrites dans les ouvrages cités plus haut, au § 10.1.1.
11. Brookes, dans sa thèse, ne reprend pas ce calcul.
12. Cette tentative devait être considéré comme un test de faisabilité par Adams, mais Sampson [Sampson, 1904] déclare que c'est une solution très instructive. En fait, on va constater qu'elle pose de sérieux problèmes de cohérence.

la 'loi' de Bode (voir encadré 12, p. 168) et ses équations de condition portent sur la longitude moyenne d'Uranus. Voici ce que dit Adams dans son mémoire ([Adams, 1847], § 3) :

> ... in 1843, I attempted a first solution of the problem, assuming the orbit to be a circle, with a radius equal to twice the mean distance of Uranus from the Sun... This investigation was founded exclusively on the modern observations... The result shewed that a good general agreement between theory and observation might be obtained.

Comme on va le constater un peu plus loin (table 10.6), Adams obtient une solution qui annule pratiquement les écarts $O-C$, mais, comme on va le constater aussi, ce résultat satisfaisant n'est pas spécifiquement lié à la valeur du rapport choisi, 0.5 ; Adams aurait fait la même constatation, « good general agreement », pour une large gamme de valeurs de α, comme on va le démontrer au § 10.2.2.2.

10.2.1 Formation et résolution des équations

10.2.1.1 Formation des équations de condition

Dans ce calcul de 1843, Adams néglige l'excentricité d'Uranus, ce qui pose des problèmes d'interprétation [13] pour les variables δx_1 et δy_1. En conséquence de ce choix, la correction de la longitude moyenne d'Uranus provoquée par l'ajustement de ses paramètres δn, $\delta\varepsilon$, δx_1, δy_1 est de la forme :

$$\delta\ell_1 = \delta\varepsilon + t\,\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 \tag{10.1}$$

et la perturbation exercée par la planète extérieure sur la longitude moyenne d'Uranus est limitée par Adams à

$$\delta\ell_2 = h_1 \cos nt + h_2 \cos 2nt + k_1 \sin nt + k_2 \sin 2nt \tag{10.2}$$

avec des coefficients h_i, k_i dépendant de α, ε' et m' (l'expression de ces coefficients est donnée dans le formulaire (10.3)).
Pour ce calcul, Adams utilise des $O-C$ étonnants, qui proviennent des données de Bouvard pour les observations jusqu'en 1821, d'observations faites à Greenwich ainsi que d'observations publiées dans *Astronomische Nachrichten* ; voir à ce sujet la remarque sur le jeune Adams au § 10.2.2. Ces $O-C$ ont peu de rapport avec ceux qu'il utilisera pour les calculs suivants. Voir table 10.3 les valeurs utilisées par Adams pour ce calcul de 1843 ; elles proviennent de ses manuscrits, sont en secondes centésimales et ne concernent que les observations modernes. On a tracé dans le graphe de droite les écarts $O-C$ utilisés pour le calcul de 1843 et ceux utilisés par Adams par la suite (en 1845).
Il forme les 21 équations de condition, qui consistent à écrire que la perturbation totale de la longitude $\delta\ell_1 + \delta\ell_2$ est égale au $O-C$ de la même date. Il applique ensuite une variante de la méthode des moindres carrés et les 8 équations obtenues se séparent par symétrie (voulue) en deux groupes :

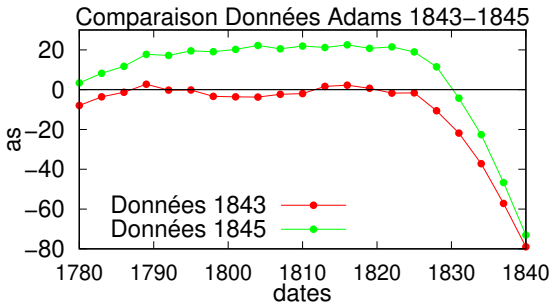
- un premier groupe de 4 équations aux quatre inconnues $\delta\varepsilon$, δx_1, h_1, h_2.
- un deuxième groupe de 4 équations aux quatre inconnues δn, δy_1, k_1, k_2.

Les coefficients des inconnues dans les équations sont calculés avec beaucoup de précision ; par contre, les deuxièmes membres sont moins précis, par exemple -710.2 au lieu de -704.7 ou bien -509.8 au lieu de -504.9, ce qui va avoir une incidence non négligeable sur les résultats finaux. Néanmoins, je trouve avec TRIP des résultats très voisins de ceux d'Adams.

13. Dans le cas général, δx_1 et δy_1 sont fonction de δe et de $e\delta\varpi$; voir équation (10.7). Que devient cette interprétation si l'on néglige l'excentricité d'Uranus ? On doit interpréter ici l'expression formelle de $\delta\ell_1$ sans référence à e ou ϖ.

TABLE 10.3 – Écarts $O-C$ utilisés par Adams pour la solution de 1843 (en secondes centésimales). Ces valeurs sont assez irrégulières, comparées à celles utilisées pour les calculs suivants. On a comparé dans le graphe de droite ces valeurs (converties en sexagésimal) avec celles utilisées par la suite. On verra table 10.5 le changement induit dans la prédiction de la longitude au moment de la découverte par ce changement dans les données initiales

Écarts $O-C$ utilisés pour la solution de 1843					
1780	−24.5	1801	−11.2	1822	−5.4
1783	−11.2	1804	−11.6	1825	−5.0
1786	−4.1	1807	−7.2	1828	−32.8
1789	8.4	1810	−6.2	1831	−67.3
1792	−0.7	1813	5.1	1834	−114.3
1795	−0.5	1816	6.9	1837	−176.5
1798	−10.4	1819	2.0	1840	−243.7



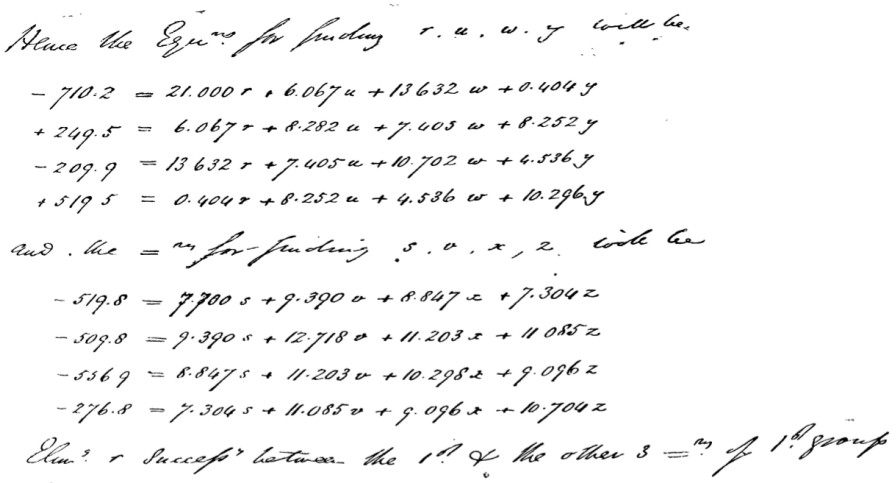


FIGURE 10.1 – Systèmes d'équations obtenus par Adams après séparation du système de 8 équations en 2 systèmes disjoints de 4 équations à 4 inconnues chacun. $\delta\varepsilon$, δn, δx_1, δx_2, h_1, k_1, h_2, k_2 s'appellent ici respectivement r, s, u, v, w, x, y, z (p. 9 des manuscrits d'Adams)

10.2.1.2 Solutions des équations de condition

Dans ses manuscrits, dans lesquels il est difficile de se repérer [14], Adams a noté deux solutions, assez différentes l'une de l'autre et très éloignées de ce que je trouve avec TRIP. Les différences, importantes, sont dues à des systèmes mal conditionnés [15] et les petites erreurs signalées plus haut sur les deuxièmes membres ont entraîné des erreurs importantes sur les solutions. Le deuxième jeu de valeurs semble provenir d'une version affinée de la démarche, où Adams essaie d'attribuer a posteriori une excentricité à la planète perturbatrice. Mais, de façon assez surprenante, ces trois jeux de valeurs assez différents conduisent à des résidus très faibles, moins de $7''$ centésimales, ce qui confirme que le système est mal conditionné. On donnera une explication

14. Voir la remarque de Sampson au § 10.1.2, p. 360.

15. Cela tient aussi au fait qu'au fil des substitutions, les coefficients des équations deviennent petits et perdent de la précision en valeur relative ; d'autant plus qu'Adams, par moments, ne garde que deux chiffres significatifs, indice vraisemblablement d'une volonté d'effectuer seulement un test approximatif et non un calcul définitif.

mathématique de cette constatation au § 10.2.1.5.
Voici table 10.4 les différentes valeurs des inconnues obtenues par Adams et TRIP (elles sont exprimées en secondes centésimales).

TABLE 10.4 – Différentes solutions aux équations de condition données dans les manuscrits et par TRIP (les valeurs sont en secondes centésimales)

inconnue	$\delta\varepsilon$	δx_1	h_1	h_2	δn	δy_1	k_1	k_2
Adams, 1er jeu de valeurs	−201.2	173.7	185.4	−162.5	−2.6	27.8	−118	63.2
Adams, 2ème jeu de valeurs	−158.2	271.5	76.6	−194.7	−3.0	18.4	−107.2	66.7
TRIP	−187	208	148	−174	−83	−727	1233	245

10.2.1.3 Coordonnées de la planète perturbatrice

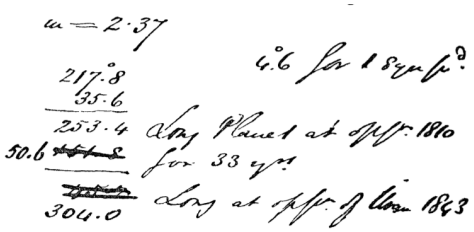
Ensuite, Adams reporte les valeurs numériques précédentes dans les valeurs théoriques [16] des coefficients h_1, h_2, k_1, k_2, à savoir [17]

$$h_1 = m'F_1(\alpha)\cos\theta\ ;\ h_2 = m'F_2(\alpha)\cos 2\theta\ ;\ k_1 = m'F_1(\alpha)\sin\theta\ ;\ k_2 = m'F_2(\alpha)\sin 2\theta \qquad \text{avec } \theta = \varepsilon - \varepsilon' \tag{10.3}$$

Adams combine ces 4 équations deux par deux et il élimine m' entre ces deux équations, ce qui lui donne une équation en θ, à savoir

$$3.01\cos\theta + 2.42\sin\theta + 34.54\cos 2\theta + 12.92\sin 2\theta = 0 \tag{10.4}$$

équation qu'il résout par approximations successives [18]. Il trouve $\theta = -35°33'$. Il en déduit la valeur de $\varepsilon' = \varepsilon - \theta = 217\overset{\circ}{.}8 + 35\overset{\circ}{.}6$, soit $\varepsilon' = 253\overset{\circ}{.}4$. Ensuite il ajoute l'arc parcouru pendant 33 ans, $50\overset{\circ}{.}6$, ce qui donne pour la longitude moyenne (et vraie) à l'opposition de 1843 : $\ell' = 304\overset{\circ}{.}0$.



Sampson signale une erreur, bien visible dans les manuscrits (voir la figure ci-contre) : Adams oublie qu'il a choisi le moyen mouvement sur 3 ans ; il corrige immédiatement cette erreur en divisant l'arc calculé par 3 ($151.8 \to 50.6$). On peut imputer cette étourderie au vif désir d'obtenir le résultat, comme le suggère Sampson, et on peut la rapprocher d'une étourderie commise par Le Verrier à la toute fin de sa deuxième approximation (voir § 6.15).
Si on ramène cette longitude à l'opposition de 1846, on trouve 309°, à comparer avec la valeur réelle 327°. Avec les $O-C$ utilisés par Adams et donnés table 10.3, je trouve (voir table 10.5) à peu près les mêmes résultats qu'Adams, à savoir $\theta = -37\overset{\circ}{.}7$, $\varepsilon' = 254\overset{\circ}{.}9$ et pour la longitude moyenne (et vraie) à l'opposition de 1843 $\ell'_{43} = 305\overset{\circ}{.}5$. La petite différence, 305.5 contre 304.0, peut être due aux approximations numériques d'Adams. Par contre, comme on le voit dans la table 10.4, les valeurs des paramètres intermédiaires sont très différentes [19] de celles trouvées par Adams. Mais encore une fois, on constate la grande stabilité de la longitude vraie au moment de la découverte, même si les intermédiaires sont très loin des valeurs réelles. Il faut aussi noter qu'il

16. Sampson dit qu'Adams a calculé numériquement les coefficients de ces équations par analogie avec l'action de Saturne sur Uranus ; c'est vraiment étonnant, car le calcul direct n'est pas très long.
17. Les coefficients F_i dépendent uniquement de α et sont donnés par Pontécoulant [Pontécoulant, 1829].
18. Remarquons que les 4 équations de la formule (10.3) ne sont pas satisfaites toutes les 4 avec la valeur trouvée pour θ (4 équations et deux inconnues seulement). De plus, si on combine différemment les 4 équations, les solutions pour θ peuvent être très différentes (voir les explications à la fin du paragraphe suivant).
19. Voir une justification mathématique au paragraphe § 10.2.1.5

y a deux solutions[20] pour l'équation en θ, décalées d'environ 180°, qui donnent deux valeurs décalées aussi d'environ 180° pour ε', ce qui s'explique assez bien[21].

TABLE 10.5 – Résultats obtenus par Adams et TRIP, à partir de deux jeux de données $O-C$ différents (les secondes d'arc sont sexagésimales). Pour une valeur de α, il y a en fait deux valeurs possibles pour ε', décalées d'environ 180°.

$O-C$ utilisés	Origine	α	ε' (°)	$1/m'$	ℓ'_{43} (°)	$\delta\varepsilon$ ($''$)	δn ($''$)
$O-C$ utilisés par	Adams	0.50	253.4	4225	304.0	−51.6	88.6
Adams dans ses	TRIP	0.50	254.9	4459	305.5	−60.7	−26.9
son calcul pour 1843	TRIP	0.50	72.9	3456	123.5	−60.7	−26.9
$O-C$ utilisés par Adams	TRIP	0.50	274.5	3742	325.1	68.4	259.9
dans Hypothèse I et II	TRIP	0.50	89.0	2895	139.6	68.4	259.9

ℓ'_{43} désigne la longitude héliocentrique vraie à l'opposition de 1843. On voit qu'avec le deuxième jeu de valeurs pour $O-C$, on a une bonne valeur pour ℓ'_{43}, voir le commentaire au § 10.2.2.1.

10.2.1.4 Résidus dans les équations de condition

Les résidus dans les 21 équations de condition pour $\alpha = 0.5$ trouvés avec TRIP sont donnés à la table 10.6. Les valeurs sont en très bon accord avec celles trouvées par Adams, malgré des intermédiaires très différents.

TABLE 10.6 – Résidus (en secondes sexagésimales) des 21 équations de condition obtenus avec TRIP ; entre parenthèses, les résidus trouvés par Adams, très voisins de ceux trouvés avec TRIP

1780	0.3 (0.4)	1792	−0.6 (−0.6)	1804	−0.2 (−0.2)	1819	−1.3 (−1.5)	1831	0.2 (0.4)
1783	−0.4 (−0.6)	1795	0.7 (0.8)	1807	0.6 (0.6)	1822	−2.3 (−2.4)	1834	0.0 (0.4)
1786	−1.1 (−1.2)	1798	−1.1 (−1.0)	1810	−0.4 (−0.5)	1825	1.9 (1.8)	1837	−0.8 (−0.6)
1789	2.0 (1.9)	1801	−0.3 (−0.4)	1813	1.5 (1.5)	1828	0.3 (0.3)	1840	0.4 (−0.1)
				1816	0.7 (0.6)				

10.2.1.5 Justification mathématique des écarts constatés entre les différentes solutions pour le calcul de 1843

Une petite étude mathématique éclaire la situation apparemment contradictoire constatée aux paragraphes précédents.
Le problème initial posé par Adams conduit à la résolution d'un système linéaire (S) de 21 équations à 8 inconnues, de la forme $ax = b$, en appelant a la $(n,p)-$matrice du système ; posons $m = {}^t\!aa$; la solution de (S) par les moindres carrés est donnée par $x_0 = m^{-1}{}^t\!ab$.
m a deux valeurs propres très faibles ($\simeq$ 1e−5 et 1e−7) et donc un 'quasi-noyau' de dimension 2, ce qui va faire que les solutions approchées de (S) peuvent être très différentes les unes des autres (elles forment un quasi plan affine).
La matrice ${}^t\!a$ est de rang p car $p = \mathrm{rg}\,{}^t\!aa \leq \mathrm{rg}\,{}^t\!a \leq p$.
Soit u un vecteur propre associé à la petite valeur propre λ de m ; comme ${}^t\!a$ est de rang p,

20. Fait que ne signale pas Adams ; l'a-t-il constaté ?
21. Avec des calculs à l'ordre 0, le changement de ε' en $\varepsilon' + \pi$ change $\delta\ell_2$ en $-\delta\ell_2$ et le calcul donne le même résultat qu'avec ε' au changement près de h_i et k_i en $-h_i$ et $-k_i$.

l'application linéaire canoniquement associée à ${}^t a$ est surjective ; il existe donc un $(n,1)-$vecteur v tel que ${}^t av = u$.
La résolution de $ax = b+\lambda v \simeq b$ donne $x = m^{-1}{}^t ab+\lambda m^{-1}{}^t av = x_0+\lambda m^{-1}u = x_0+\lambda\frac{1}{\lambda}u = x_0+u$, vecteur très différent a priori de x_0, mais qui satisfait presque à $ax = b$.
Le conditionnement de la matrice m est de l'ordre de 600 000, ce qui confirme la grande sensibilité aux données, et donc la dispersion des solutions.

10.2.2 Prolongements et conclusions

10.2.2.1 Reprise des calculs avec les $O-C$ de l'hypothèse II

On a placé dans la figure 10.2 les $O-C$ utilisés par Adams pour les hypothèses I et II. Ils ont été comparés graphiquement aux $O-C$ utilisés pour la solution de 1843 à la figure tracée sur la partie droite de la table 10.3.

Ancient Observations.

Year.	Observation—Theory.
1690	+62″·6
1712	+84·5
1715	+67·2
1750	−51·8
1753	−43·2
1756	−50·1
1764	−37·8
1769	−20·5
1771	− 2·4

Modern Observations.

Year.	Observation—Theory.
1780	+ 3″·42
1783	+ 8·19
1786	+11·74
1789	+17·75
1792	+17·22
1795	+19·52
1798	+19·06
1801	+20·24
1804	+22·19
1807	+20·52
1810	+21·89
1813	+21″·19
1816	+22·50
1819	+20·78
1822	+21·50
1825	+18·97
1828	+11·50
1831	− 4·29
1834	−22·63
1837	−46·70
1840	−73·09

These numbers form the basis of the subsequent investigations.

FIGURE 10.2 – $O-C$ utilisés par Adams pour Hyp I et II ; il se trouvent au § 9 de son mémoire

J'ai repris les calculs précédents [22] avec les $O-C$ utilisés par Adams pour les hypothèses I et II (valeurs données dans son mémoire au § 9) et les résultats ont été ajoutés à la table 10.5.
On trouve, avec ce calcul, presque la bonne valeur pour la longitude vraie en 1843 (325°.5 au lieu de 321°). Alors comment expliquer le changement de données de $O-C$? Est-ce que le jeune Adams n'a pas eu accès à des données fiables ou bien a-t-il mal réduit [23] les observations dont il disposait ? On rappelle que, plus tard, Adams a demandé à deux reprises à Airy des données d'observation pour Uranus : la première fois par l'intermédiaire de Challis le 13 février 1844 [Sheehan, 2021] – donc après le calcul de 1843 – et la deuxième fois en août 1845. Pour son premier calcul, Adams ne disposait donc que des observations parcellaires utilisées par Bouvard et celles lues dans *Astronomische Nachrichten* et selon M. Grosser [Grosser, 1962], elles étaient notées sur des bouts de papier, pas toujours bien conservés.

10.2.2.2 Calcul pour 20 valeurs différentes de α

J'ai refait le calcul avec le programme de 1843, et les $O-C$ utilisés par Adams dans son calcul, pour 20 valeurs de α (de 0.49 à 0.68 avec un pas de 0.01) ; pour toutes ces valeurs de α, on retrouve quasiment la même longitude de l'époque et donc la longitude ℓ'_{43} à l'opposition de 1843 change seulement du fait du changement du mouvement moyen, comme on le constate à la table 10.7.

22. Calcul non fait par Adams, qui n'a utilisé que les valeurs de $O-C$ données à la table 10.3.
23. On rappelle qu'il ne détaille pas ses calculs de réduction, et très peu ceux d'interpolation.

TABLE 10.7 – Solutions obtenues avec la première méthode d'Adams pour 20 valeurs de α

α	ε'	$1/m'$	ℓ'_{43}	$\delta\varepsilon$	δn
0.49	255.0	4158	304.1	−62.8	−25.0
0.50	254.9	4459	305.5	−60.7	−26.9
0.51	254.8	4771	306.9	−58.1	−29.0
0.52	254.5	5094	308.2	−55.1	−31.3
0.53	254.4	5438	309.6	−51.5	−33.8
0.54	254.2	5797	311.0	−47.2	−36.7
0.55	254.0	6167	312.4	−42.3	−39.8
0.56	253.8	6559	313.8	−36.4	−43.4
0.57	253.6	6959	315.2	−29.6	−47.4
0.58	253.5	7363	316.7	−21.6	−51.9

α	ε'	$1/m'$	ℓ'_{43}	$\delta\varepsilon$	δn
0.59	253.1	7877	317.9	−12.2	−56.9
0.60	252.9	8302	319.4	−1.3	−62.6
0.61	253.1	8829	321.3	11.6	−69.1
0.62	252.6	9286	322.4	26.7	−76.5
0.63	252.3	9791	323.8	44.5	−90.5
0.64	252.0	10314	325.2	65.2	−94.6
0.65	251.7	10856	326.6	89.8	−105.7
0.66	251.3	11418	328.1	118.8	−118.5
0.67	251.0	11999	329.5	153.3	−133.3
0.68	250.7	12584	330.9	194.2	−150.5

En reportant les paramètres précédents dans les 21 équations de condition, on constate que les résidus sont quasiment identiques à ceux trouvés pour $\alpha = 0.5$, résidus qui sont donnés à la table 10.6. On trace à la figure 10.3 la longitude vraie à l'opposition de 1843 en fonction de α ainsi que les résidus moyens pour chacune des 21 équations de condition (ces résidus ne dépendent pratiquement pas de α).

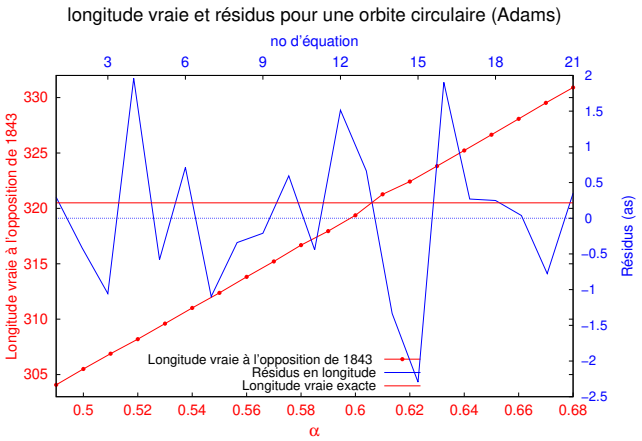


FIGURE 10.3 – Longitude vraie à l'opposition de 1843 pour une orbite circulaire optimale en fonction du rapport des demi-grands axes selon la méthode de 1843. Résidu pour chacune des 21 équations de condition (ce résidu est quasiment le même pour toute valeur de α) ; le n° d'équation se lit sur la ligne du haut

On peut expliquer cette quasi constance de ε' de la façon suivante : dans la première partie de son calcul, Adams détermine les valeurs numériques de h_1, h_2, k_1 et k_2 en résolvant ses équations de condition. Ces 4 nombres ont des expressions théoriques (équation (10.3)) dépendant de m' et de $\theta = \varepsilon - \varepsilon'$ (et de α, mais α est fixé dans le contexte) ; on est donc face à 4 équations à deux inconnues (m' et θ). Adams combine deux à deux les 4 équations, puis élimine m' et forme une équation à la seule inconnue θ (ici équation (10.4)), équation qu'il résout. En reportant dans les 4 équations de départ, on constate qu'elles ne sont pas satisfaites [24]. Or il se trouve qu'en suivant exactement la démarche d'Adams, on tombe sur une équation en θ, qui admet quasiment les mêmes racines pour toute valeur de α ; à partir de là, la valeur de ε' est quasiment la même pour toute valeur de α et la longitude vraie à l'opposition de 1843 ne varie que sous l'influence du moyen mouvement.

24. Adams ne mentionne pas ce fait.

J'ai programmé la résolution des 4 équations précédentes par la méthode de Newton, qui converge, mais, de façon attendue, le couple final ne satisfait pas les 4 équations. Il y a donc une grave incohérence, qui pose le problème de la fiabilité de la démarche et de ses résultats et qui met en lumière la limite de cette méthode, et plus généralement la limite de toute démarche consistant à rechercher des solutions sous forme d'orbites circulaires. On abordera une discussion plus approfondie sur la recherche des orbites circulaires au § 11.3.

10.2.2.3 Conclusions

Ainsi, avec ce modèle très (trop) simple, approximation au degré 0 des excentricités et résolution d'équations de condition, la méthode suivie par Adams aboutit à des incohérences. Il est impossible de sélectionner une valeur optimale pour α : en appliquant la méthode d'Adams, toute valeur (raisonnable) de α conduit à des résidus faibles et donc à des résultats en bon accord – good general agreement – avec les observations, selon la formule d'Adams.
Par contre, la valeur de ε' et, dans une moindre mesure, celle de ℓ'_{43} sont proches des valeurs réelles, mais, comme on l'a vu, cette quasi invariance est fortement liée à la méthode choisie et ne constitue pas a priori une preuve convaincante de la pertinence de cette méthode.

Pour faire apparaître une valeur optimale de α, il faut donc utiliser un modèle plus évolué, **faisant intervenir un plus grand nombre d'inconnues**, ce qui va être fait dans les paragraphes suivants, en appliquant la méthode de l'hypothèse I puis de l'hypothèse II.
Cette constatation va à l'encontre de l'affirmation donnée par Tisserand dans son analyse des calculs de Le Verrier, qui semble suggérer qu'en diminuant progressivement la valeur de a', on aurait mis en évidence une valeur optimale pour α. [Tisserand, 1880]

> Si l'on considère que la valeur réelle de e' est au dessous de $\frac{1}{100}$, on est fondé à penser qu'on serait arrivé par des calculs plus simples à une représentation satisfaisante des observations avec une série d'orbites circulaires dont les rayons auraient été en diminuant de 38 à 30.

Et il y aurait le problème de la discontinuité à 35.5, problème soulevé par Peirce, et pour lequel Le Verrier a fourni une explication très convaincante [Le Verrier, 1848a].
On peut dire aussi, au sujet de cette première tentative d'Adams, que les calculs semblent avoir été faits rapidement, sans la précision et le nombre de chiffres significatifs voulus ; on sent que c'est un essai, à usage personnel [25] afin de tester la faisabilité de la résolution de ce redoutable problème inverse ; c'était l'objectif affiché dans sa déclaration de 1841 : « [in order] to determine *approximately* [26] the elements of the unknown orbit ». Et c'est aussi ce qu'il laisse entendre dans sa conclusion : « The result shewed that a good general agreement between theory and observation might be obtained ».

10.3 Détail du calcul d'Adams pour l'hypothèse II

Les calculs pour l'hypothèse I et l'hypothèse II sont très voisins. Adams part de ses équations de condition, fait plusieurs substitutions d'inconnues afin de réduire ce nombre d'inconnues. En appliquant cette démarche pour le calcul avec l'hypothèse I, il constate qu'il tombe, à un moment donné, sur des équations trop ressemblantes et qu'une étape de substitution peut être omise. C'est ce qu'il fera pour le calcul de l'hypothèse II. Et les résultats numériques obtenus par les deux méthodes sont très voisins. Je vais donc me limiter à présenter le calcul fait pour l'hypothèse II.

25. Et effectivement, Adams ne le publie pas dans son mémoire de 1847.
26. Mise en italique rajoutée.

10.3.1 Interrogations au sujet de la formule utilisée par Adams pour la correction de la longitude moyenne d'Uranus

Adams dit qu'il va travailler avec la longitude moyenne ℓ d'Uranus. Or, il semble – à partir de l'expression qu'il donne pour $\delta\ell$ – utiliser l'expression ([Adams, 1847], § 10).

$$\ell = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{e^2}{4}\sin 2(nt + \varepsilon - \varpi) \tag{10.5}$$

qui correspond plutôt à l'approximation à l'ordre 2 de la longitude *vraie* (et encore, il faudrait un coefficient 5/4 au lieu de 1/4). Il faut donc essayer de justifier cette formule, ce que ne fait pas Adams, ni dans ses manuscrits, ni dans son mémoire.
L'expression de la longitude moyenne est $\ell = \varepsilon + nt$; $\delta\ell$ devrait donc être simplement $\delta\ell = \delta\varepsilon + t\delta n$. Pour tenter de justifier la formule d'Adams, on peut essayer de coller à sa démarche : il dit que la série qui exprime la correction de la longitude moyenne est beaucoup plus convergente [27] que la série qui exprime la correction de la longitude vraie (§ 9 de son mémoire) :

> It is easily seen that the series expressing the correction of the mean longitude in terms of the corrections applied to the elements of the orbit, is more convergent than that which gives the correction of the true longitude, and the same thing is true for the perturbation of the mean longitude, as compared with those of the true.

Cette formule "*It is easily seen*", qui permet de passer sur les détails, ou sur les difficultés, était donc déjà largement en usage à l'époque d'Adams et de Le Verrier ! On peut citer à ce propos une anecdote rapportée par Biot ([Poirier, 2011] p. 18) :

> (Biot avait demandé à Laplace la permission de refaire les calculs de la *Mécanique céleste*.) « Biot vint le voir souvent et il lui signalait les difficultés qu'il rencontrait à la lecture du texte. Une fois, dit-il [Biot], je le [Laplace] vis passer une heure à tâcher de ressaisir la chaîne de raisonnements qu'il avait cachée sous ce mystérieux symbole : *il est aisé de voir* ».

Admettons l'affirmation d'Adams [sur la plus grande convergence de la série qui définit la longitude moyenne] ! En conséquence, il va modifier ses données (les $O-C$), qui portent initialement sur la perturbation de la longitude héliocentrique vraie en les multipliant par le facteur $r^2/a_u b_u$ où r est le rayon vecteur d'Uranus et a_u, b_u les longueurs des axes de l'ellipse képlérienne associée à Uranus. Comme l'équation de condition portant sur la longitude héliocentrique est de la forme $\delta v = O - C$, il conviendrait alors de multiplier le premier membre par ce même facteur, ce que ne précise pas Adams et ce qu'il ne fait pas complètement. En multipliant l'expression de δv par celle de $r^2/a_u/b_u$ – tous les deux développés au degré 2 – j'obtiens un résultat ressemblant, mais pas complètement identique, au $\delta\ell_1$ d'Adams.
Sampson, qui a classé et commenté les manuscrits d'Adams n'a pas évoqué le problème, mais ce n'était pas vraiment son rôle ; il devait mettre de l'ordre dans les manuscrits d'Adams.
Brown [Brown, 1931] fait part de son étonnement [28] quant au choix d'Adams de travailler sur la longitude moyenne, mais il écrit que si l'on adopte cette démarche, il faut alors multiplier les deux membres de l'équation $\delta v = O - C$; il constate qu'Adams n'a pas fait complètement cette correction, puisque le coefficient de $t\,\delta n$ dans l'expression de $\delta\ell$ est 1, alors qu'il devrait être $r^2/a_u b_u$. Voici ce que dit Brown [Brown, 1931] :

> If it [the multiplication by $r^2/a_u b_u$] is applied to both observation and theory, there is no objection to it with one exception, namely, that the corrections to the elements of Uranus,

27. En fait Adams désigne le développement limité au degré 2 des excentricités ; il n'y a pas de série au sens mathématique du terme.
28. Il écrit « The meaning of this process is not clear ».

> which are contained in the observations, are not the same as before. In particular the correction to the mean motion is now given by $t\,\delta n(r^2/a_u b_u)$, instead of by $t\,\delta n$, and this change does not appear to have been made.

En fait, Adams aurait effectué cette correction, si l'on considère que $\delta\ell_1$ c'est approximativement $\delta v\, r^2/a_u/b_u$ (avec l'ambiguïté sur le coefficient 1/4 ou 5/4). Et Brown termine en disant que cette omission n'a probablement pas beaucoup d'incidence sur le résultat final :

> The numerical effect is not very large, but it may have been sufficient to account for the greater deviation of the predicted place than that of Leverrier, particularly as the last residual, which is important, is changed from $-66''.64$ to $-73''.09$. The change may have been taken care of in some other way : Adams does not always give full details.

Lyttleton [Lyttleton, 1960] est surpris aussi du prétraitement des données d'observation par Adams. Il montre que si l'égalité $\frac{r^2}{a_u b_u}\,\delta v = \delta\ell$ est vraie pour une orbite non perturbée – c'est une des façons d'écrire la deuxième loi de Kepler –, elle n'a aucune raison d'être vérifiée pour l'orbite perturbée. Il essaie de trouver – mais c'est peine perdue – une explication proposée par un de ses collègues :

> In the hope of discovering a justification of this procedure, I have referred to a number of dynamical astronomers but without success. Indeed, I have recently found that no less a person than E. W. Brown was puzzled by this step, but in the absence of adequately detailed explanation in Adams' own account of the matter, E. W. Brown contents himself with saying that « the meaning of this process is not clear ».

Brookes dit (p. 27 de sa thèse)

> These residuals were then converted to discrepancies in mean longitude by multiplying each by the factor $r^2/a_u b_u$, a process which is, strictly speaking, valid only in undisturbed motion. However, any error thus introduced is most likely to be far smaller than that produced by the error in r itself[29], and thus should be regarded as only one of several approximations introduced by Adams.

On peut conclure de ces différents éléments que la démarche d'Adams est pour le moins étonnante, mais partiellement explicable avec l'interprétation que je donne pour $\delta\ell_1$:
$\delta\ell_1 \simeq \delta v\, r^2/a_u/b_u$. Mais on peut estimer aussi, avec la caution de Brown, que les résultats sont peu influencés par les transformations effectuées par Adams. On va donc continuer les calculs en utilisant les formules d'Adams, en les considérant comme valides : après tout, il s'agit de reproduire et de tester ses démarches.

10.3.2 Observations retenues

Adams choisit d'utiliser les écarts entre positions prédites par les éphémérides[30] de Bouvard et les positions observées avec un pas de 3 années synodiques, soit 3.0362 années juliennes, valeur qu'il choisit pour l'unité de temps. Pour cela, il doit procéder à des interpolations, car naturellement, les dates d'observation ne sont pas espacées exactement de 3 ans, interpolations qui peuvent avoir un effet non négligeable sur le résultat final. On testera plus loin (§ 10.3.8.4) la sensibilité des résultats aux données, en introduisant un bruit gaussien sur ces données. Les dates d'observation vont de 1780 à 1840 et sont au nombre de 21. Afin de simplifier ses équations (par

29. On rappelle qu'Adams a choisi a priori pour a' une valeur de l'ordre de 37, alors qu'en réalité, elle tourne autour de 30.

30. Corrigées de quelques erreurs et actualisées avec des valeurs plus précises des masses de Jupiter et de Saturne.

symétrie), Adams choisit comme origine des temps la date de l'opposition de 1810, soit 1810.328. Il utilisera aussi les écarts $O-C$ pour les observations anciennes (au nombre de 9), mais il ne peut pas les regrouper en progression temporelle arithmétique, du fait de leur espacement irrégulier dans le temps.

10.3.3 Forme des équations de condition

Adams forme[31] la correction apportée à la longitude moyenne d'Uranus en corrigeant les éléments elliptiques

$$\delta\ell_1 = \delta\varepsilon + 2e^2\delta\varpi + t\,\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 + \cos 2nt\,\delta x_2 + \sin 2nt\,\delta y_2 \quad \text{avec} \tag{10.6}$$

$$\delta x_1 = -2\cos\beta\, e\delta\varpi + 2\sin\beta\,\delta e \quad \delta y_1 = 2\sin\beta\, e\delta\varpi + 2\cos\beta\,\delta e \quad \text{en posant } \beta = \varepsilon - \varpi \tag{10.7}$$

$$\text{et} \quad \delta x_2 = \tfrac{e}{4}(\cos\beta\,\delta x_1 + \sin\beta\,\delta y_1) \quad \delta y_2 = -\tfrac{e}{4}(\sin\beta\,\delta x_1 + \cos\beta\,\delta y_1) \tag{10.8}$$

La perturbation $\delta\ell_2$ exercée par une planète extérieure de masse m', d'excentricité e' est donnée par [Pontécoulant, 1829] :

$$\begin{aligned}\delta\ell_2 = \frac{m'}{2}\sum_i F_i \sin i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') + m'e\sum_i G_i \sin\{i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - (nt + \varepsilon - \varpi)\} \\ + m'e'\sum_i H_i \sin\{i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - (nt + \varepsilon - \varpi')\}\end{aligned} \tag{10.9}$$

où F_i, G_i, H_i sont des coefficients ne dépendant que du rapport α des demi-grands axes et sont donnés[32] par Pontécoulant. Même problème que pour $\delta\ell_1$, cette expression devrait être multipliée par $r^2/a_u b_u$, ce que ne fait pas Adams.
Dans ses calculs, Adams fait varier i de 1 à 3. Avec $\alpha = \sin 31° \simeq 0.515$, il obtient pour la perturbation exercée par la planète extérieure les valeurs suivantes, valeurs que je confirme avec TRIP (Adams a incorporé dans cette expression la valeur numérique de e)

$$\begin{array}{rrrlll}
\delta\ell_2 = & - & 42''.33 & m' & \sin & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + & 76''.55 & m' & \sin\ 2 & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + & 7''.25 & m' & \sin\ 3 & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + & 2''.34 & m' & \sin & (n't + \varepsilon' - \varpi') \\
& - & 4''.74 & m'\ e' & \sin & (n't + \varepsilon' - \varpi') \\
& + & 41''.72 & m' & \sin & (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
& - & 16''.47 & m'\ e' & \sin & (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
& + & 33''.93 & m' & \sin & (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
& - & 63''.43 & m'\ e' & \sin & (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi')
\end{array}$$

Il ajoute que l'on peut[33] faire intervenir les deux termes suivants, qui sont du deuxième degré en e, e' (la valeur numérique de e a été incorporée par Adams).

$$\begin{array}{rrrlll}
& + & 0''.40 & m' & \sin\ 3 & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& - & 0''.74 & m'\ e' & \sin & \{3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi'\}
\end{array}$$

En fait, d'après les valeurs numériques lues dans son mémoire, il semble n'avoir incorporé que le deuxième terme (-0.74). Par la suite, on notera le premier coefficient (0.40) d_1 et le deuxième

31. Encore une fois, il ne détaille pas comment il obtient ces formules.
32. Avant de faire son cinquième calcul, Adams a vérifié complètement les formules donnant ces 3 coefficients. Les formules utilisées effectivement par Adams, et numériquement (mais pas formellement) équivalentes à celles de Pontécoulant sont données p. 14 de la thèse de Brookes.
33. La formulation [« To these *may* be added the following... » § 12 de son mémoire] est un peu étrange (la mise en italiques a été rajoutée). On décide ou non de les faire intervenir, mais on ne peut pas laisser le choix.

$(-0.74)\ d_2$. Les valeurs de ces coefficients dépendent de α, mais leur expression littérale [34] n'est pas donnée par Adams.
Adams fait la somme $\delta\ell$ de $\delta\ell_1$ et de $\delta\ell_2$, qui représente la perturbation totale subie par la longitude moyenne d'Uranus pour chacune des 21 dates d'observations, $t = -10, 10, 1$ et il égale chaque perturbation théorique à la perturbation observée à la même date. Il développe tous les sinus, pour ne conserver à l'intérieur des lignes trigonométriques que des arguments de la forme $(kn - k'n')t$. Il écrit ce développement sous la forme suivante :

TABLE 10.8 – Perturbation totale de la longitude moyenne d'Uranus : correction de ses éléments elliptiques (2 premières lignes) + action de Neptune (les 4 dernières)

$\delta\ell =$		$\delta\varepsilon$	+	δx_1	cos	nt	+	δx_2	cos	$2nt$					correction des
	+	$t\,\delta n$	+	δy_1	sin	nt	+	δy_2	sin	$2nt$					éléments elliptiques
			+	h_1	cos	$(n-n')t$	+	h_2	cos	$2(n-n')t$	+	h_3	cos	$3(n-n')t$	perturbation
			+	k_1	sin	$(n-n')t$	+	k_2	sin	$2(n-n')t$	+	k_3	sin	$3(n-n')t$	exercée par
			+	p_1	cos	$n't$	+	p_2	cos	$(n-2n')t$	+	p_3	cos	$(2n-3n')t$	la planète
			+	q_1	sin	$n't$	+	q_2	sin	$(n-2n')t$	+	q_3	sin	$(2n-3n')t$	perturbatrice

avec les expressions suivantes pour les coefficients :

TABLE 10.9 – Expression des coefficients des équations de condition à l'aide de θ, α, β et β'

h_1/m'	=	$F_1 \sin\theta$	p_1/m'	=	$e\,G_1 \sin(\theta-\beta) + e'H_1 \sin(\theta-\beta')$
h_2/m'	=	$F_2 \sin 2\theta$	p_2/m'	=	$e\,G_2 \sin(2\theta-\beta) + e'H_2 \sin(2\theta-\beta')$
h_3/m'	=	$F_3 \sin 3\theta + d_1 \sin 3\theta + d_2\, e' \sin(3\theta+\beta-\beta')$	p_3/m'	=	$e\,G_3 \sin(3\theta-\beta) + e'H_3 \sin(3\theta-\beta')$
k_1/m'	=	$F_1 \cos\theta$	q_1/m'	=	$-e\,G_1 \cos(\theta-\beta) - e'H_1 \cos(\theta-\beta')$
k_2/m'	=	$F_2 \cos 2\theta$	q_2/m'	=	$e\,G_2 \cos(2\theta-\beta) + e'H_2 \cos(2\theta-\beta')$
k_3/m'	=	$F_3 \cos 3\theta + d_1 \cos 3\theta + d_2\, e' \cos(3\theta-\beta')$	q_3/m'	=	$e\,G_3 \cos(3\theta-\beta) + e'H_3 \cos(3\theta-\beta')$
avec $\beta = \varepsilon - \varpi$; $\beta' = \varepsilon - \varpi'$; $\theta = \varepsilon - \varepsilon'$					

10.3.4 Traitement des équations modernes

On rappelle que le but d'Adams, non déclaré explicitement, mais facile à deviner, est de former des équations ne contenant que les éléments de la planète inconnue, et donc ne contenant plus [35] les corrections des éléments elliptiques d'Uranus ($\delta\varepsilon$, δn, δe, $e\delta\varpi$)
Pour les 21 dates modernes sélectionnées, Adams égale les expressions théoriques précédentes (données table 10.8) aux perturbations observées à la date correspondante. Il obtient un système de 21 équations aux 18 inconnues

$$\delta\varepsilon,\ \delta n,\ \delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta x_2,\ \delta y_2,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \tag{10.10}$$

Mais ces variables ne sont pas indépendantes, comme on peut le constater à la table 10.9.

34. J'ai trouvé une expression théorique dans Somerville [Somerville, 1836], qui est acceptable pour d_2, mais pas pour d_1 ; l'influence de d_1 semble limitée. Brookes, p. 101 de sa thèse, donne les expressions théoriques suivantes, plus crédibles pour ces coefficients, expressions qu'il a lues dans les manuscrits d'Adams, mais leur justification par Adams est basée sur des analogies non vraiment justifiées : $d_1 = \frac{e}{4} m' e G_3 \sin 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$ et $d_2 = \frac{e}{4} m' e' H_3 \sin[3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi']$.

35. Le Verrier avait procédé un peu de la même manière en remplaçant les corrections des éléments elliptiques par les variables P, Q, R, S.

Ensuite, pour chaque[36] inconnue (sauf δx_2, δy_2, p_i, q_i), disons z (il en reste 10), il considère les 21 équations de condition ; il multiplie chacune par le coefficient de z correspondant[37] et il fait la somme de ces 21 équations ; cette somme sera notée (z).
La finesse du calcul[38] vient de ce que, du fait des symétries (préparées) des données, ces 10 équations se partagent en 2 groupes, chaque groupe ne faisant intervenir que 9 inconnues.
Ainsi le premier groupe contient 5 équations (ε), (x_1), (h_1), (h_2), (h_3) aux 9 inconnues

$$\delta\varepsilon,\ \delta x_1,\ \delta x_2,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3 \tag{10.11}$$

et le deuxième groupe contient 5 équations (n), (y_1), (k_1), (k_2), (k_3) aux 9 inconnues

$$\delta n,\ \delta y_1,\ \delta y_2,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \tag{10.12}$$

$$\begin{array}{lrl}
(\varepsilon) & 151''48 = & 21{\cdot}0000\,\delta\varepsilon + 6{\cdot}0670\,\delta x_1 - 4{\cdot}4358\,\delta x_2 \\
 & & +13{\cdot}9515\,h_1 + 0{\cdot}9471\,h_2 - 4{\cdot}5965\,h_3 \\
 & & +18{\cdot}3916\,p_1 + 19{\cdot}6752\,p_2 + 8{\cdot}4184\,p_3 \\
(x) & 246{\cdot}48 = & 6{\cdot}0670\,\delta\varepsilon + 8{\cdot}2821\,\delta x_1 + 4{\cdot}1762\,\delta x_2 \\
 & & +7{\cdot}3540\,h_1 + 8{\cdot}3027\,h_2 + 5{\cdot}0961\,h_3 \\
 & & +6{\cdot}5793\,p_1 + 6{\cdot}3319\,p_2 + 8{\cdot}0850\,p_3 \\
(h_1) & 207''58 = & 13{\cdot}9515\,\delta\varepsilon + 7{\cdot}3540\,\delta x_1 - 0{\cdot}4177\,\delta x_2 \\
 & & +10{\cdot}9735\,h_1 + 4{\cdot}6775\,h_2 - 0{\cdot}0005\,h_3 \\
 & & +12{\cdot}8697\,p_1 + 13{\cdot}4050\,p_2 + 8{\cdot}4781\,p_3 \\
(h_2) & 245{\cdot}17 = & 0{\cdot}9471\,\delta\varepsilon + 8{\cdot}3027\,\delta x_1 + 7{\cdot}2362\,\delta x_2 \\
 & & +4{\cdot}6775\,h_1 + 10{\cdot}0259\,h_2 + 8{\cdot}3220\,h_3 \\
 & & +2{\cdot}3661\,p_1 + 1{\cdot}6727\,p_2 + 7{\cdot}3073\,p_3 \\
(h_3) & 103{\cdot}48 = & -4{\cdot}5965\,\delta\varepsilon + 5{\cdot}0961\,\delta x_1 + 10{\cdot}5558\,\delta x_2 \\
 & & -0{\cdot}0005\,h_1 + 8{\cdot}3220\,h_2 + 10{\cdot}9749\,h_3 \\
 & & -2{\cdot}8935\,p_1 - 3{\cdot}7316\,p_2 + 3{\cdot}5852\,p_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
(n) & -171''27 = & 77{\cdot}0000\,\delta n + 9{\cdot}3938\,\delta y_1 - 1{\cdot}2183\,\delta y_2 \\
 & & +8{\cdot}7355\,k_1 + 7{\cdot}6213\,k_2 - 0{\cdot}0590\,k_3 \\
 & & +5{\cdot}9764\,q_1 + 4{\cdot}3875\,q_2 + 9{\cdot}6152\,q_3 \\
(y) & -166{\cdot}33 = & 93{\cdot}9380\,\delta n + 12{\cdot}7179\,\delta y_1 + 1{\cdot}8907\,\delta y_2 \\
 & & +11{\cdot}0393\,k_1 + 11{\cdot}3717\,k_2 + 3{\cdot}3196\,k_3 \\
 & & +7{\cdot}3747\,q_1 + 5{\cdot}3825\,q_2 + 12{\cdot}6816\,q_3 \\
(k_1) & -181{\cdot}31 = & 87{\cdot}3550\,\delta n + 11{\cdot}0393\,\delta y_1 - 0{\cdot}3758\,\delta y_2 \\
 & & +10{\cdot}0264\,k_1 + 9{\cdot}2740\,k_2 + 0{\cdot}9476\,k_3 \\
 & & +6{\cdot}8054\,q_1 + 4{\cdot}9866\,q_2 + 11{\cdot}1971\,q_3 \\
(k_2) & -99{\cdot}51 = & 76{\cdot}2130\,\delta n + 11{\cdot}3717\,\delta y_1 + 4{\cdot}4810\,\delta y_2 \\
 & & +9{\cdot}2740\,k_1 + 10{\cdot}9740\,k_2 + 5{\cdot}6294\,k_3 \\
 & & +6{\cdot}0523\,q_1 + 4{\cdot}3916\,q_2 + 11{\cdot}0843\,q_3 \\
(k_3) & 113{\cdot}14 = & -0{\cdot}5900\,\delta n + 3{\cdot}3196\,\delta y_1 + 10{\cdot}2112\,\delta y_2 \\
 & & +0{\cdot}9476\,k_1 + 5{\cdot}6294\,k_2 + 10{\cdot}0251\,k_3 \\
 & & +0{\cdot}1746\,q_1 + 0{\cdot}0454\,q_2 + 2{\cdot}4791\,q_3
\end{array}$$

FIGURE 10.4 – Premier et deuxième groupe d'équations formé par Adams

Adams forme l'équation $-(h_1)+(h_2)+(h_3)$; équation notée (h).
En s'appuyant sur l'équation (ε), il élimine $\delta\varepsilon$ des équations (h) et (x_1)
Il remplace dans (x_1) et dans (h) δx_2 et δy_2 par leur expression en fonction de δx_1 et δy_1 (formule (10.8)) ; l'équation (h) devient (h').

Il recommence la même séquence avec le deuxième groupe d'équations

Il forme l'équation $-(k_1)+(k_2)+(k_3)$; équation notée (k).
En s'appuyant sur l'équation (n), il élimine δn des équations (k) et (y_1)
Il remplace dans (y_1) et dans (k) δx_2 et δy_2 par leur expression en fonction de δx_1 et δy_1 (formule (10.8)) ; l'équation (k) devient (k').

Enfin, en choisissant convenablement les coefficients a, b, c, d, il forme les équations :

$$(eq\_1) : (h') + a(x_1) + b(y_1) \quad \text{et} \quad (eq\_2) : (k') + c(x_1) + d(y_1)$$

pour qu'elles ne contiennent plus δx_1 ni δy_1.
Ces deux équations (eq_1) et (eq_2) ne font plus intervenir que les 12 inconnues (h_i), (k_i), (p_i), (q_i), $1 \le i \le 3$.

36. Dans la première démarche, correspondant à l'Hypothèse I, Adams avait fait ces combinaisons aussi pour les variables p_1, p_2, q_1, q_2, mais il avait constaté que les coefficients des équations obtenues après substitution étaient très faibles.

37. C'est l'étape élémentaire de la méthode des moindres carrés.

38. Rappelons que pour arriver à une telle symétrie, il a fallu procéder à de nombreuses interpolations, qui ont peut-être altéré les données.

10.3.5 Traitement des équations anciennes

Adams a retenu 9 observations anciennes. Il forme les 9 équations de condition correspondantes, chacune faisant intervenir les 18 inconnues de la liste (10.10).
Il écarte [39] la première équation, correspondant à l'observation de Flamsteed de 1690, qu'il présume imprécise, alors qu'elle est en fait très exacte.
Il déclare que les coefficients les plus élevés dépendant de e' dans ces 8 équations sont ceux de p_3 et q_3, ce qui, dans le cas concerné, est assez discutable [40]. Il va renforcer ces coefficients en multipliant [41] chacune des 8 équations par le coefficient de p_3 correspondant de cette équation et il fait ensuite la somme des 8 équations obtenues. Il fait exactement la même chose avec q_3.
En fait, comme Le Verrier, et pour les mêmes raisons que lui, à savoir afin de faire les calculs de tête, Adams multiplie les différentes équations par des valeurs approchées [42] des coefficients de p_3 ou de q_3. En l'occurrence, dans le cas étudié ($\alpha = 0.515$), il forme les deux combinaisons des 8 équations autres que celle de Flamsteed avec les coefficients suivants

-0.8, -0.6, +1.0, +1.0, +0.9, +0.6, +0.4, +0.3 combinaison qu'il note (eq_3)
et 1.0, 1.0, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1 combinaison qu'il note (eq_4)

Il remplace ensuite δx_2 et δy_2 par leur expression en fonction de δx_1 et δy_1.
Puis à l'aide de combinaisons convenables de (x_1) et (y_1), il élimine dans (eq_3) et (eq_4), comme plus haut, δx_1 et δy_1. On note encore (eq_3) et (eq_4) les résultats de ces combinaisons, qui ne contiennent plus que les 12 variables (h_i), (k_i), (p_i), (q_i).

10.3.6 Résolution des équations

Adams remplace les 4 équations affines (eq_1), (eq_2), (eq_3), (eq_4) par 3 équations homogènes (i.e. sans coefficient constant) en formant les 3 combinaisons :

$$(eq\_2') = (eq\_2) - a(eq\_1) \quad (eq\_3') = (eq\_3) - b(eq\_1) \quad (eq\_4') = (eq\_4) - c(eq\_1)$$

en choisissant convenablement les coefficients a, b, c ; il obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
0 = {} & 0{\cdot}4200\, h_1 - 0{\cdot}4114\, h_2 - 4{\cdot}2014\, h_3 + 0{\cdot}1980\, p_1 + 0{\cdot}1069\, p_2 + 0{\cdot}4236\, p_3 \\
& - 0{\cdot}4964\, k_1 + 2{\cdot}3306\, k_2 + 23{\cdot}3213\, k_3 - 0{\cdot}1567\, q_1 - 0{\cdot}0409\, q_2 - 0{\cdot}4531\, q_3 \\
0 = {} & -1{\cdot}0507\, h_1 + 2{\cdot}6465\, h_2 - 21{\cdot}8182\, h_3 + 0{\cdot}9482\, p_1 + 0{\cdot}8614\, p_2 - 1{\cdot}4023\, p_3 \\
& - 2{\cdot}7471\, k_1 - 4{\cdot}7334\, k_2 - 19{\cdot}4976\, k_3 - 1{\cdot}7569\, q_1 - 0{\cdot}7972\, q_2 - 0{\cdot}0655\, q_3 \\
0 = {} & -1{\cdot}9638\, h_1 - 5{\cdot}3845\, h_2 - 24{\cdot}7155\, h_3 - 3{\cdot}8034\, p_1 - 2{\cdot}6532\, p_2 + 0{\cdot}8317\, p_3 \\
& + 8{\cdot}4199\, k_1 - 7{\cdot}0819\, k_2 - 30{\cdot}3051\, k_3 + 3{\cdot}9767\, q_1 + 1{\cdot}7183\, q_2 + 4{\cdot}0811\, q_3
\end{aligned}$$

FIGURE 10.5 – Système formé par les 3 équations finales eq_1', eq_2' et eq_3' à 12 inconnues

Ces équations comportent 12 inconnues explicites, non indépendantes. Adams ne va garder que θ, $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$. À cette fin, il reprend les relations données à la table 10.9 ; mais il faut éliminer [43] e' et ϖ'.

39. Brookes refait les calculs en incluant l'observation de Flamsteed ; il trouve que tous les résultats, à part la longitude vraie, sont très sensiblement modifiés. Constatation a priori un peu étonnante car, malgré son ancienneté, l'observation de Flamsteed est précise ; on peut attribuer ces écarts au fait que le rapport des demi-grands axes n'est pas bon. J'ai refait le calcul de Brookes [avec l'observation de Flamsteed] et je ne constate pas beaucoup de différence avec le calcul sans cette observation.

40. Mais cela ne semble pas avoir beaucoup d'importance. On pourrait aussi bien utiliser p_1 et q_1, ou bien p_2 et q_2.

41. C'est encore une fois le principe de la méthode des moindres carrés.

42. Brookes, dans sa thèse, a testé les conséquences de ces approximations et il a conclu que les résultats étaient peu affectés. J'ai refait les calculs et je confirme la conclusion de Brookes.

43. Le Verrier avait développé les lignes trigonométriques et avait posé $h' = e' \sin \varpi'$ et $l' = e' \cos \varpi'$.

Pour cela, on[44] forme $\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta = eG_3\cos(2\theta-\beta) + e'H_3\cos(2\theta-\beta')$, ce qui donne

$$e'\cos(2\theta-\beta') = \frac{1}{H_3}\left[\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta - eG_3\cos(2\theta-\beta)\right]$$

valeur que l'on reporte dans l'expression de q_2 pour obtenir :

$$\frac{q_2}{m'} = e\left(G_2 - \frac{G_3H_2}{H_3}\right)\cos(2\theta-\beta) + \frac{H_2}{H_3}\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \tag{10.13}$$

Pour q_1, on fait le même travail à partir de $\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta$

$$\frac{q_1}{m'} = e\left(G_1 - \frac{G_3H_1}{H_3}\right)\cos(\theta-\beta) + \frac{H_1}{H_3}\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right) \tag{10.14}$$

Pour p_1 et p_2, c'est la même démarche, qui aboutit à

$$\frac{p_1}{m'} = e\left(G_1 - \frac{G_3H_1}{H_3}\right)\sin(\theta-\beta) + \frac{H_1}{H_3}\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) \tag{10.15}$$

$$\frac{p_2}{m'} = e\left(G_2 - \frac{G_3H_2}{H_3}\right)\sin(2\theta-\beta) + \frac{H_2}{H_3}\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) \tag{10.16}$$

Pour h_3, on part de $\frac{p_3}{m'}\cos\beta + \frac{q_3}{m'}\sin\beta$ et on obtient de la même façon

$$\frac{h_3}{m'} = \left(F_3 + d_1 - ed_2\frac{G_3}{H_3}\right)\sin 3\theta + \frac{d_2}{H_3}\left(\frac{p_3}{m'}\cos\beta + \frac{q_3}{m'}\sin\beta\right) \tag{10.17}$$

$$\frac{k_3}{m'} = \left(F_3 + d_1 - ed_2\frac{G_3}{H_3}\right)\cos 3\theta + \frac{d_2}{H_3}\left(\frac{q_3}{m'}\cos\beta - \frac{p_3}{m'}\sin\beta\right) \tag{10.18}$$

Adams reporte toutes ces expressions dans les équations (eq_2'), (eq_3') et (eq_4'), qui deviennent des équations aux inconnues θ, $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$. Il constate que dans l'équation (eq_2'), les coefficients de p_3/m' et q_3/m' sont faibles. Il considère alors l'équation (eq_2'') obtenue à partir de (eq_2') en remplaçant p_3 et q_3 par 0 ; c'est donc une équation à la seule inconnue θ. Et il entreprend de résoudre cette équation ; Adams ne précise pas comment il procède. Il exhibe une valeur de θ, qu'il reporte dans les 3 équations (eq_2'), (eq_3') et (eq_4'). Il en déduit des valeurs raisonnables pour p_3/m' et q_3/m', valeurs qu'il reporte dans la première équation, qui donne une meilleure valeur pour θ et il recommence[45] jusqu'à ce que les valeurs se stabilisent. Il reporte ces valeurs dans les équations littérales de p_3/m' et q_3/m' (voir table 10.9). Il en déduit e' et β' et donc ε'. En reportant dans l'équation (eq_1), il obtient la valeur de m'.
À l'aide des formules de la table 10.9, il en déduit les valeurs numériques des 18 variables énumérées à la liste (10.10), ce qui permet d'accéder aussi à δe et à $e\,\delta\varpi$.
Avec toutes ces valeurs, il peut déterminer les valeurs numériques des perturbations théoriques $\delta\ell$ données à la table 10.8 et comparer avec les $O-C$ correspondants, et ainsi évaluer la qualité de la solution. Voir § 10.3.8 les résultats finaux d'Adams, de Brookes et ceux obtenus avec TRIP.

10.3.7 Discussion de la méthode d'Adams

Les calculs d'Adams offrent une grande régularité et beaucoup de symétrie ; en conséquence, ils sont plus faciles à programmer que ceux de Le Verrier.

44. Adams n'indique pas sa démarche ; il écrit simplement « it is easily seen... » et il donne l'expression numérique de q_2/m', qui concorde avec l'expression analytique que je trouve un peu plus loin.
45. Adams ne donne pas le détail des calculs. Le mieux est bien sûr d'utiliser la méthode de Newton.

Il y a trois problèmes déjà signalés :
• Comment justifier le principe du passage des écarts d'observation pour la longitude vraie en écarts pour la longitude moyenne, passage critiqué par Brown et Lyttleton ?
• Comment justifier complètement la correction pour la longitude moyenne, en particulier $\delta\ell_1$?
• Pourquoi ne multiplie-t-il pas $\delta\ell_2$ par $r^2/a_u b_u$, comme la logique mathématique l'impose ?

Pour la résolution finale, il privilégie les variables p_3 et q_3 avec un argument discutable (voir paragraphe précédent) ; mais le choix des couples (p_1, q_1) ou (p_2, q_2) aurait été tout aussi valable.
Ce qui importe, c'est de faire des combinaisons du type : $p_i \left| \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right. k\theta \pm q_i \left| \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right. k\theta$.
Par contre, il y a un problème pour la résolution de l'équation (eq_2''), qui ne contient que θ. Adams exhibe une valeur (de l'ordre de $-50°$), puis affine son calcul. Le problème est que cette équation (eq_2'') admet 6 solutions ! Pourquoi choisir une valeur de l'ordre de $-50°$ plutôt qu'une autre ? Adams n'évoque pas ce problème ; l'a-t-il envisagé ?
Brookes, p. 92 de sa thèse [Brookes, 1969], a remarqué aussi l'existence de plusieurs solutions de l'équation (eq_2'') pour θ et il a constaté qu'une seule – celle justement retenue par Adams – débouchait sur une solution physiquement admissible pour les autres paramètres, par exemple $m' > 0$ et $e' < 0.2$. Est-ce qu'Adams, en bon mathématicien qu'il est, a procédé sans le dire à une telle sélection ? c'est un réflexe basique de mathématicien que d'étudier toutes les solutions possibles et pas seulement de choisir celle qui nous arrange.
J'ai essayé les 6 valeurs possibles pour θ et en reportant dans les équations (eq_2'), (eq_3') et (eq_4'), on obtient dans chaque cas une bonne convergence par la méthode de Newton. Par contre, pour les 5 valeurs autres que celle choisie par Adams, on obtient une solution non physiquement acceptable : $m' < 0$, ou bien $e' > 0.5$ par exemple, confirmation donc des calculs faits par Brookes dans sa thèse. Quand on fera varier α, comment reconnaître la ou les bonnes solutions ? Il faudrait déterminer toutes les valeurs possibles pour θ ; pour chaque valeur de θ, résoudre le système formé par les 3 équations (eq_2'), (eq_3') et (eq_4') et examiner si la solution obtenue est physiquement acceptable.
Autre petite acrobatie : dans l'expression de $\delta\ell$ intervient $\delta\varepsilon + 2e^2\delta\varpi$; Adams regroupe ces deux termes, en appelant encore la somme $\delta\varepsilon$; mais $e\delta\varpi$ est une variable indépendante de $\delta\varepsilon$, qui ne devient plus alors complètement indépendante. Disons que le risque est faible, à cause du coefficient e^2, qui est petit.

10.3.8 Valeurs obtenues

À l'aide de TRIP
j'ai appliqué la méthode de l'hypothèse I pour $\alpha = 0.5$, comme Adams.
j'ai appliqué la méthode de l'hypothèse II pour $\alpha = 0.515$, comme Adams.
Je reporte les résultats obtenus pour ces deux calculs dans les deux tables suivantes.

10.3.8.1 Calculs selon l'hypothèse I

Je place dans la table 10.10 les résultats obtenus par Adams, ceux obtenus par Brookes dans sa thèse et les miens obtenus avec TRIP, tous les trois en utilisant la méthode de l'hypothèse I ; ℓ'_{46} désigne ici la longitude vraie au moment de l'opposition (d'Uranus) de 1846 i.e. le 6/10/1846.

TABLE 10.10 – Valeurs obtenues par la méthode de l'hypothèse I par Adams, Brookes et TRIP

Paramètre	α	e'	ϖ'	ε'	ℓ'_{46}	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
Adams	0.5	0.1610	315°57′	269.°4	328°42′	6037	$-49''.8$	$-0''.70$	$127''.3$	$20''.8$
Brookes	0.5	0.1509	311°35′	269.°1	328°04′	6077	$-47''.0$	$-0''.24$	$118''.3$	$32''.8$
TRIP	0.5	0.1496	311°06′	268.°0	328°12′	6039	$-47''.1$	$-0''.67$	$117''.0$	$23''.9$

10.3.8.2 Calculs selon l'hypothèse II

Et voici les résultats obtenus en appliquant la méthode de l'hypothèse II.

TABLE 10.11 – Valeurs obtenues par la méthode de l'hypothèse II par Adams, Brookes et TRIP

Paramètre	α	e'	ϖ'	ε'	ℓ'_{46}	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
Adams	0.515	0.1206	299°11′	264°50′	329°25′	6664	$-43''.2$	$-0''.52$	$47''.1$	$40''.3$
Brookes	0.515	0.1387	303°52′	267°42′	331°31′	6763	$-46''.9$	$-0''.20$	$56''.8$	$53''.7$
TRIP	0.515	0.1371	303°18′	266°36′	331°38′	6743	$-47''.7$	$-0''.59$	$55''.9$	$37''.5$

On voit dans les deux cas le bon accord numérique avec les résultats de Brookes ; par contre, l'accord est un peu moins bon avec les valeurs d'Adams, mais bien meilleur qu'avec la solution de 1843. On rappelle que la bonne valeur pour ℓ'_{46} est 327°02′, qui est paradoxalement mieux approchée par la première hypothèse que par la deuxième.
Cette observation montre qu'il est bien difficile de dire qu'une solution est meilleure qu'une autre, car en principe Hyp II est meilleure que Hyp I.

10.3.8.3 Dépendance du rapport des demi-grands axes

Une fois les calculs programmés, on peut tester différentes valeurs de α. On a fait varier α de 0.49 à 0.59 avec un pas de 0.01. Les résultats, donnés à la table 10.12, sont représentés graphiquement à la figure 10.6. La méthode utilisée est celle de l'hypothèse II.
Pour $\alpha = 0.5$, on retrouve les valeurs obtenues à l'hypothèse I avec TRIP. Et pour $\alpha = 0.515$, on retrouve, en interpolant entre 0.51 et 0.52, les valeurs obtenues au § 10.3.8.2.

Voici ce qu'écrivait Adams dans son mémoire de 1847 :

> ... it may be seen[46], however, that if we took successively smaller and smaller values for the mean distance, the values found for the mean longitude in 1810 would probably go on diminishing, while at the same time the mean motion from 1810 to 1846 would rapidly increase, so that the corresponding values of the mean longitude at the present time would probably soon arrive at a minimum, and afterwards begin to increase. This I believe to be the reason why the longitude found on the supposition of too large a value for the mean distance agrees so nearly with observation.

Ce que dit Adams est correct pour la longitude de l'époque. Par contre, la longitude moyenne au 6/10/46 varie très peu (323°−328°) avec un léger maximum pour $\alpha = 0.58$; la longitude vraie varie un peu plus (325−336°, voir fig. 10.6) avec un maximum vers 0.56. Avec des valeurs de α supérieures à 0.6, on obtient des valeurs numériques, mais elles n'ont aucun sens physique : masse négative ou excentricité trop forte. Avec cette méthode, on s'approcherait le plus des valeurs correctes en partant de la valeur $\alpha = 0.58$.
L'intuition mathématique doit atteindre ses limites, car la dépendance vis à vis de α des coefficients F_i, G_i, H_i et en conséquence celle de θ et donc de ε' est extrêmement complexe. Elle ne peut pas se résumer à une simple interpolation, ou extrapolation, comme semble le faire Adams à la fin de son mémoire (au § 53), où il écrit qu'il avait suggéré dans une lettre adressée à Airy le 2 septembre 1846 [Airy, 1846] que $\alpha = 0.574$ « would probably satisfy all the observations very nearly », mais il se trouve que c'est assez vrai pour les éléments ; par contre, les résidus sont un peu plus élevés avec cette valeur de α.
Plus tard, dans ses *Scientific Papers* [Adams, 1896], Adams revient sur cette déclaration hâtive et il écrit « In consequence of not making sufficient allowance for the increase of the mean motion, I hastily inferred, in my letter to the Astronomer Royal mentionned above [2/9/46], that the effect of a diminution in the mean distance would be to diminish the mean longitude ».

46. La formule magique encore !

On a placé table 10.12 les valeurs des paramètres, qui permettent de construire les graphes de la figure 10.6 (On note un décrochage à partir de la valeur 0.58) :

TABLE 10.12 – Valeurs obtenues par la méthode de l'Hyp II avec TRIP pour $\alpha \in [0.49 : 0.60]$

α	e'	ϖ'	ε'	ℓ'_{46}	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
0.49	0.1579	315.9	268.9	325.7	5593	−46.7	−0.73	260.2	−3.1
0.50	0.1495	311.1	268.0	328.2	6036	−47.0	−0.67	117.0	23.9
0.51	0.1412	306.0	267.1	330.5	6502	−47.5	−0.61	69.9	34.0
0.52	0.1328	300.6	266.1	332.6	6986	−48.0	−0.56	44.9	40.6
0.53	0.1237	294.8	265.2	334.3	7478	−48.2	−0.50	28.0	46.3
0.54	0.1132	288.7	264.1	335.5	7960	−47.6	−0.43	14.4	52.2
0.55	0.1005	282.3	263.0	336.1	8411	−44.9	−0.32	1.5	59.0
0.56	0.0841	276.2	261.7	335.7	8791	−37.1	−0.14	−12.7	67.6
0.57	0.0618	271.4	260.1	334.0	9043	−16.6	0.18	−30.7	78.9
0.58	0.0312	278.1	258.1	330.4	9061	38.9	0.79	−57.4	94.8
0.59	0.0301	378.4	255.3	323.8	8654	209.9	2.05	−105.0	119.1

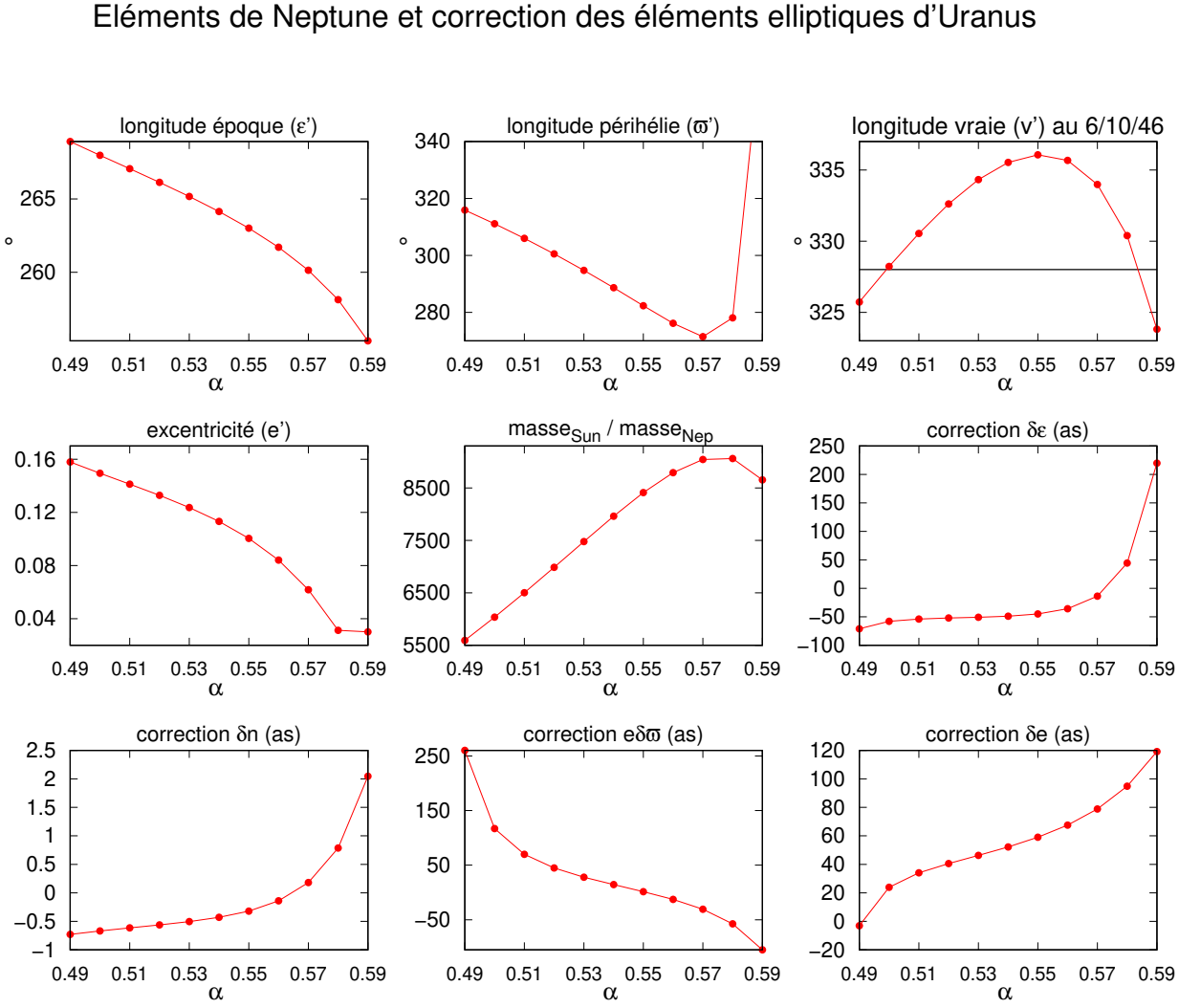


FIGURE 10.6 – Variations des éléments elliptiques de Neptune ainsi que celles des corrections à apporter aux éléments d'Uranus, en fonction du rapport des demi-grands axes α, en appliquant la méthode de l'hypothèse II. Les valeurs utilisées pour les tracés sont données dans la table 10.12

10.3.8.4 Sensibilité aux données

Pour appliquer sa méthode, Adams a dû évaluer les écarts $O-C$ en longitude à des époques régulièrement espacées, et pour cela, il a dû interpoler les données, qui en plus portaient sur la longitude vraie, ce qui l'a obligé à multiplier [47] chaque écart $O-C$ par $r^2/a_u b_u$. Toutes ces opérations peuvent entraîner des erreurs supplémentaires sur les données. Dans quelle mesure les résultats sont-ils affectés par les erreurs dans les observations ainsi que par les erreurs dans ce prétraitement ? Pour tester ces deux influences, on va ajouter aux données d'Adams un bruit aléatoire d'intensité croissante et examiner l'impact du bruit sur les résultats. Naturellement, les résultats dépendent du bruit effectif et varient d'un jeu de données à l'autre.
Voici fig. 10.7 et 10.8 deux tracés assez représentatifs, qui montrent que les résultats peuvent varier de façon significative d'un signal à l'autre.

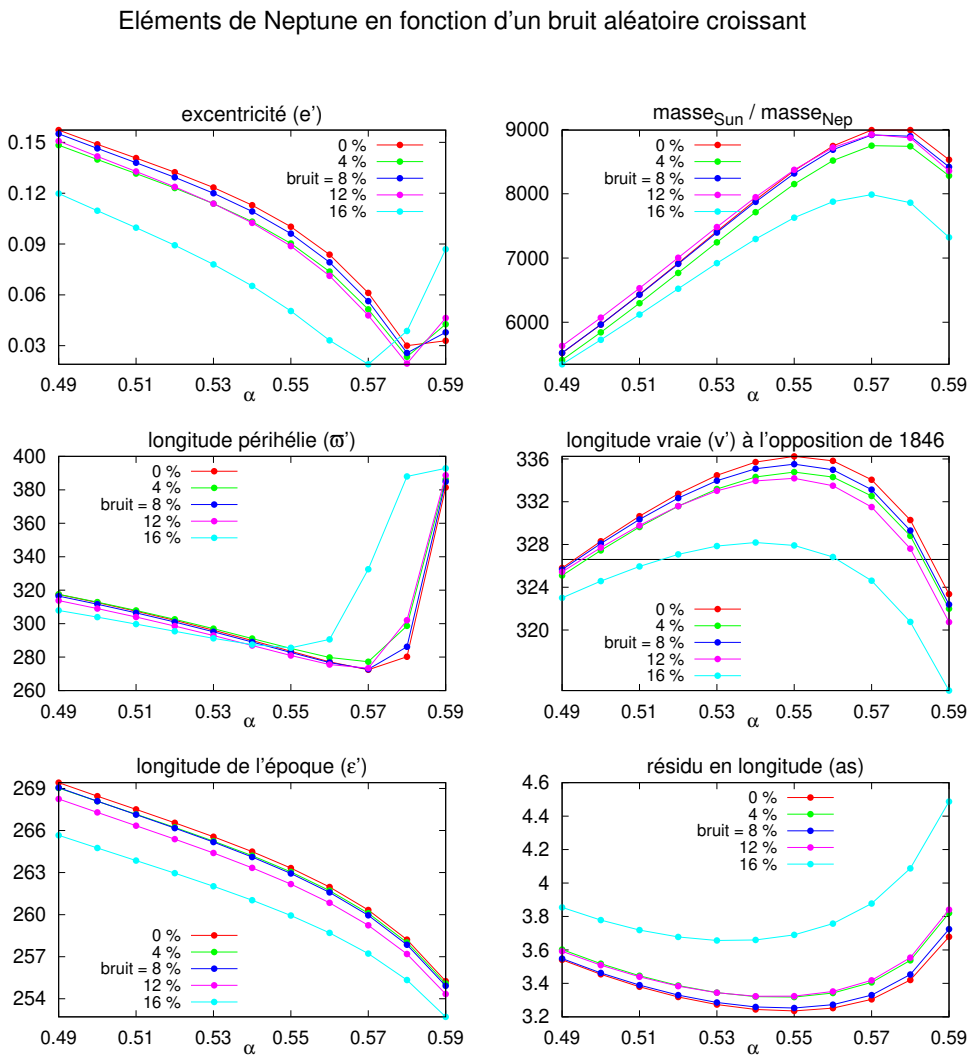


FIGURE 10.7 – Évolution des éléments elliptiques de Neptune en fonction du rapport des demi-grands axes et d'un bruit aléatoire imposé aux données d'Adams. La longitude vraie est celle à l'opposition de 1846. Les variations sur ces éléments dynamiques peuvent être importantes. La méthode de calcul est celle de l'hypothèse II.

47. On rappelle que Brown et Lyttleton ont trouvé ce traitement discutable. On rappelle aussi que l'erreur sur r doit être importante du fait du choix malheureux $\alpha = 0.5$ ou $\alpha = 0.515$.

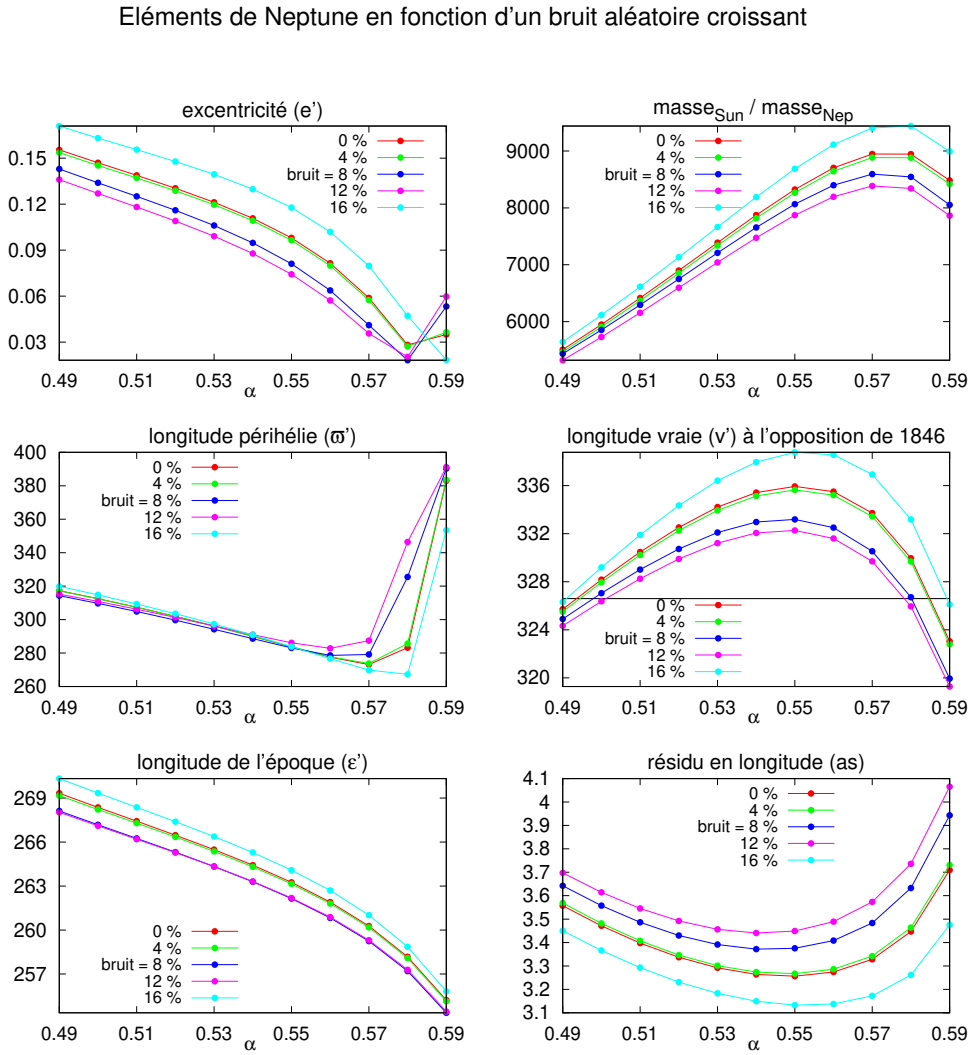


FIGURE 10.8 – Évolution des éléments elliptiques de Neptune en fonction du rapport des demi-grands axes et d'un bruit aléatoire imposé aux données d'Adams. La longitude vraie est celle à la date de l'opposition de 1846. La méthode de calcul est celle de l'hypothèse II.

10.4 Analyse de la thèse de C. J. Brookes

10.4.1 Démarche générale de Brookes

En 1969, Brookes a soutenu sa thèse consacrée aux calculs d'Adams à l'université d'Aston [48]. Dans une première partie, Brookes reprend les calculs d'Adams, en détaillant la démarche suivie par Adams. Il refait ensuite tous les calculs en utilisant les méthodes des hypothèses I et II. Brookes a utilisé l'unique (!) ordinateur de l'université pour faire ses calculs ! En 1969, un ordinateur était un objet rare, cher et peu performant. On peut observer que Brookes a refait tous les calculs d'Adams, alors que Baghdady [Baghdady, 1980], dans sa thèse (datant de 1980), se contente souvent de recopier les valeurs trouvées par Le Verrier. On peut interpréter cette observation de deux façons, non exclusives l'une de l'autre :
1) le travail de Brookes a été plus approfondi que celui de Baghdady ; et pourtant Brookes

48. On rappelle que Baghdady a fait sa thèse [Baghdady, 1980], portant sur les calculs de Le Verrier, en 1980 à la même université, sous la direction de Brookes.

dirigeait la thèse de Baghdady.
2) Les calculs d'Adams sont plus faciles à programmer que ceux de Le Verrier.
Brookes, dans sa thèse, donne de très nombreux tableaux de valeurs numériques, pour comparer ses résultats avec ceux obtenus par Adams. C'est très intéressant pour quelqu'un qui veut entrer dans le détail de tous les calculs, mais cela devient très vite indigeste pour quelqu'un qui veut avoir seulement une idée d'ensemble des calculs d'Adams. C'est peut-être pour cela que Brookes n'a pas publié [49] sa thèse ; il a seulement publié un résumé de celle-ci en 1970, plus facile à lire [Brookes, 1970]. Une autre difficulté pour interpréter les résultats : il n'y a aucun graphe (faute de grapheurs en 1969), que des tables de valeurs numériques. Dans sa thèse, comme dans son résumé, Brookes s'intéresse surtout aux éléments de la planète perturbatrice ; il ne détaille pas tous les résultats, par exemple les corrections à apporter aux éléments d'Uranus ; il faut prolonger certaines formules pour y accéder.
Brookes commence par appliquer la méthode de l'hypothèse I pour $\alpha = 0.5$, puis il applique la méthode de l'hypothèse II pour $\alpha = 0.515$, comme Adams.
Brookes confirme [50] pour l'essentiel les valeurs trouvées par Adams ; il signale quelques écarts, dus à la perte de précision dans les coefficients des équations de condition quand on procède à de nombreuses substitutions successives. Il résout l'équation en θ (sans préciser sa démarche) : il trouve des petites différences avec les résultats finaux d'Adams.
D'une manière générale, Brookes refait tous les calculs d'Adams, et il expérimente des variantes de ces calculs, comme

- Que se passe-t-il si l'on inclut l'observation de Flamsteed dans les équations de condition ?
- Que se passe-t-il si l'on supprime les termes d'ordre 2 dans les équations de condition ?
- Que se passe-t-il si l'on fait varier dans la perturbation théorique exercée par la planète extérieure i de 1 à 4 et plus seulement de 1 à 3 ?
- Que se passe-t-il si l'on arrête les calculs à une date antérieure à 1846 ?
- Que se passe-t-il si l'on applique la méthode des moindres carrés à la lettre et non de façon approchée ?

Avant de se lancer dans un calcul, Brookes étudie longuement les termes des développements qui sont sensibles, un peu comme l'avait fait Le Verrier.
D'une manière très générale, il constate que la prédiction de la longitude vraie au 6/10/46 (date de l'opposition d'Uranus) varie peu avec le changement de données et le changement de méthode.

10.4.2 Résultats trouvés par Brookes pour différentes dates de calcul

Brookes a programmé la méthode d'Adams pour différents rapports des demi-grands axes et il a examiné ce que donnerait la prédiction si l'on faisait les calculs à une date antérieure à 1845. Il a d'abord listé les écarts $O-C$ avec un pas d'un an. Ensuite, il choisit comme dates de calcul 1825, 1830, 1835, 1840 et 1846. Pour chaque date, il choisit une époque médiane, qui est aussi une date d'opposition, ce qui lui permet de disposer d'autant d'observations avant et après l'époque. Au moment des calculs, les observations modernes dont Adams disposait s'arrêtaient en 1840.
Voici, aux tables suivantes, les résultats obtenus par TRIP avec les rapports conservés [51] par Brookes, à savoir $\sin 29°$, $\sin 30°$, $\sin 31°$, $\sin 34°$, $\sin 35°$, $\sin 37°$ en appliquant la méthode de l'hypothèse II.
Il y a une bonne concordance avec les résultats trouvés par Brookes.
Il y a des écarts assez importants pour les paramètres 'mathématiques' (e' et ϖ', selon le mot de J. Herschel [Herschel, 1846]), paramètres qui ne sont pas véritablemennt indépendants et qui

49. Elle n'est pas disponible en ligne ; il faut en acheter une copie à la librairie de l'université de Londres (50 €).
50. Voir § 10.3.8.
51. L'utilité de mettre ces rapports sous forme trigonométrique (initiative d'Adams) ne saute pas aux yeux.

TABLE 10.13 – Solution obtenue par TRIP pour 5 dates de fin d'observations (1825, 1830, 1835, 1840, 1846) en utilisant la méthode de l'hypothèse II. ℓ' désigne dans chaque cas la longitude héliocentrique vraie de Neptune à la fin des observations, date indiquée en marge de chaque tableau.

	α	a'	e'	ϖ'	ε'	ℓ'	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
	0.485	39.6	0.181	336.0	258.8	279.8	4901	−42.4	2.47	496.0	−574.8
	0.500	38.4	0.172	331.3	257.4	282.4	5436	−51.7	0.18	133.5	−91.0
	0.515	37.3	0.165	327.4	256.3	285.1	5889	−57.3	−0.07	95.5	−30.5
1825	0.530	36.2	0.158	323.7	255.3	287.8	6252	−64.8	−0.16	85.5	−2.1
	0.559	34.3	0.143	315.5	253.4	293.5	6637	−87.9	−0.16	92.2	45.7
	0.574	33.5	0.128	310.0	251.7	295.9	6613	−97.1	−0.02	104.2	84.7
	0.602	31.9	0.062	15.2	235.2	279.1	6793	762.6	0.72	9.5	312.0
	0.637	30.1	0.009	44.°2	228.°1	280.°4	19300	← Valeurs du vrai Neptune			

	α	a'	e'	ϖ'	ε'	ℓ'	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
	0.485	39.6	0.482	242.8	249.2	345.2	20398	−22.0	1.05	13.2	−412.0
	0.500	38.4	0.362	231.7	246.4	329.9	19615	−22.0	0.09	0.9	−62.4
	0.515	37.3	0.283	223.2	244.5	320.8	19304	−22.9	−0.05	−1.6	−19.7
1830	0.530	36.2	0.224	215.2	243.1	314.5	19217	−23.9	−0.12	−3.7	−0.7
	0.559	34.3	0.128	191.5	240.1	303.5	18850	−17.8	−0.23	−11.0	26.3
	0.574	33.5	0.078	156.1	237.5	294.9	17868	11.8	−0.23	−21.2	44.6
	0.637	30.1	0.009	44..2	228.1	291.5	19300	← Valeurs du vrai Neptune			

	α	a'	e'	ϖ'	ε'	ℓ'	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
	0.485	39.6	0.170	7.8	274.6	302.1	2988	−68.4	0.14	1094	−477.1
	0.500	38.4	0.165	3.0	273.5	304.9	3366	−78.7	−0.47	268.5	−52.9
	0.515	37.3	0.160	358.2	272.6	308.0	3745	−85.5	−0.48	175.5	3.0
1835	0.530	36.2	0.156	353.0	271.8	311.5	4122	−94.5	−0.42	142.8	32.0
	0.559	34.3	0.145	339.9	269.7	319.3	4871	−123.5	−0.12	122.3	85.8
	0.574	33.5	0.135	330.7	267.9	323.0	5259	−141.8	0.23	117.3	127.2
	0.602	31.9	0.051	314.8	255.1	316.4	6469	271.3	1.81	−2.0	310.9
	0.637	30.1	0.009	44..2	228.1	302.5	19300	← Valeurs du vrai Neptune			

	α	a'	e'	ϖ'	ε'	ℓ'	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
	0.485	39.6	0.167	357.6	276.2	310.7	3468	−66.5	−0.47	992.2	−184.9
	0.500	38.4	0.161	352.5	275.2	314.4	3923	−70.9	−0.46	224.9	11.8
	0.515	37.3	0.155	347.0	274.3	318.4	4411	−74.9	−0.40	134.6	40.3
1840	0.530	36.2	0.150	340.7	273.4	322.6	4934	−80.5	−0.32	98.9	57.3
	0.559	34.3	0.136	324.7	271.1	331.1	6067	−96.2	−0.05	62.0	94.1
	0.574	33.5	0.122	314.0	269.0	334.1	6657	−99.8	0.23	42.4	123.2
	0.602	31.9	0.039	2.7	255.6	317.8	7212	528.4	1.76	−125.8	252.7
	0.637	30.1	0.009	44..2	228.1	313.6	19300	← Valeurs du vrai Neptune			

	α	a'	e'	ϖ'	ε'	ℓ'	$1/m'$	$\delta\varepsilon$	δn	$e\delta\varpi$	δe
	0.485	39.6	0.149	322.2	270.0	323.5	4998	−47.2	−0.28	612.4	−41.9
	0.500	38.4	0.136	316.2	268.6	327.0	5597	−47.0	−0.24	118.3	32.8
	0.515	37.3	0.123	309.5	267.3	330.1	6244	−46.9	−0.20	56.8	44.9
1846	0.530	36.2	0.111	302.1	266.0	332.7	6917	−46.2	−0.15	28.9	53.3
	0.559	34.3	0.075	286.7	262.8	334.7	8158	−31.8	0.01	−11.2	74.5
	0.574	33.5	0.045	285.6	260.5	332.4	8517	7.7	0.20	−39.3	92.5
	0.637	30.1	0.009	44..2	228.1	327.0	19300	← Valeurs du vrai Neptune			

se combinent pour donner des valeurs raisonnables pour la longitude ℓ' à la fin des observations. On constate que ε' et e' sont des fonctions décroissantes de α, ce qui est tout à fait naturel.
On trace figure 10.9 les résultats obtenus par les mêmes calculs qu'à la table 10.13, mais avec un pas de 0.1 pour α, aux différentes dates retenues par Brookes. Les résultats obtenus pour 1830

n'ont pas été reportés, car ils sont très différents de ceux obtenus aux autres époques et donc peu crédibles (problèmes de petits diviseurs ?).

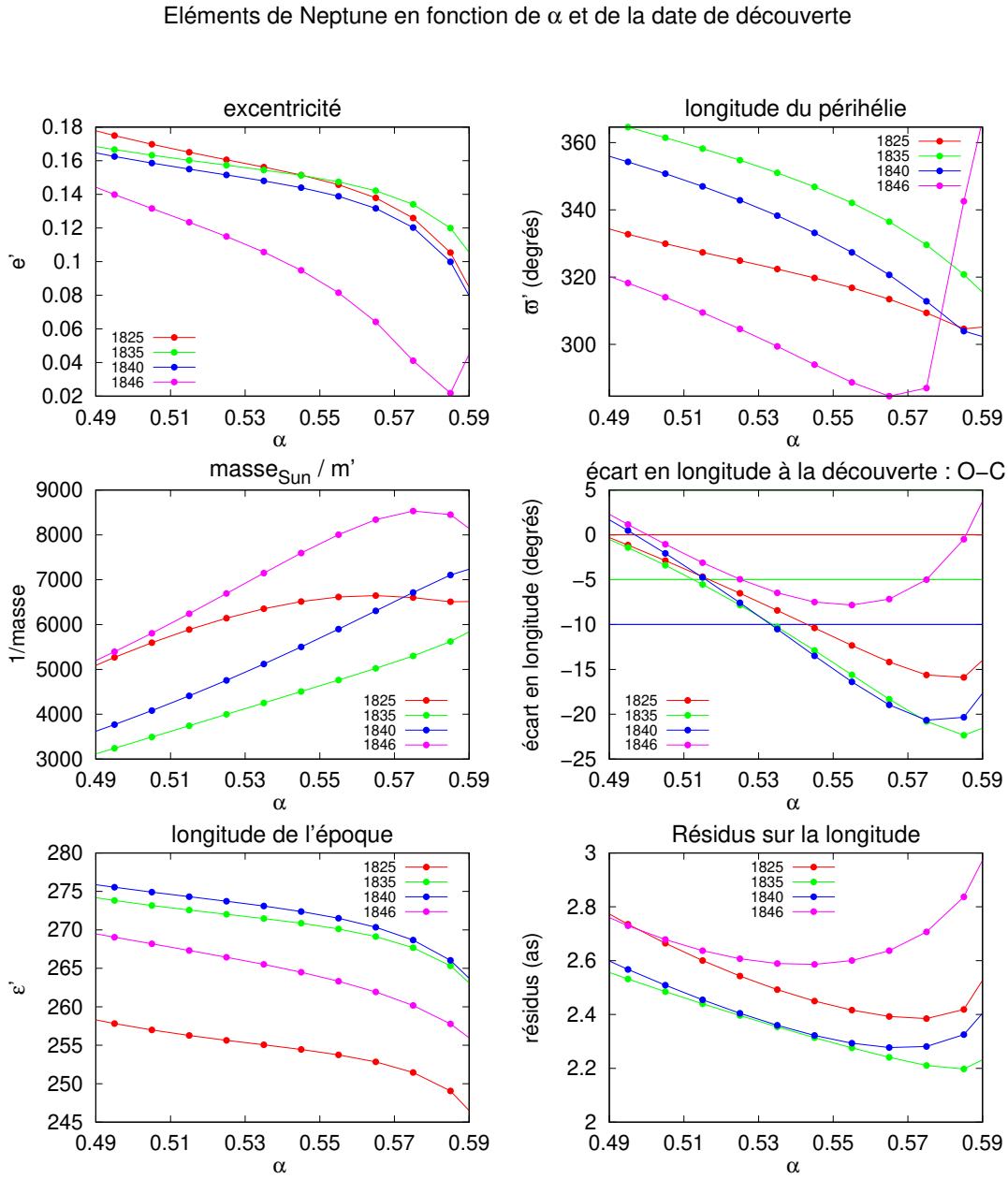


FIGURE 10.9 – Valeurs prédites pour les éléments de Neptune en fonction du rapport des demi-grands axes et de l'année de la découverte. On a omis 1830, date pour laquelle les solutions numériques avaient peu de sens physique : masse négative ou excentricité trop forte par exemple. La méthode de calcul est l'Hypothèse II. Pour $\alpha = 0.515$, en 1846, on trouve des valeurs voisines de celles obtenues par le calcul direct au § 10.3.8.2 ; les petites différences sont dues aux $O - C$ légèrement différents, ce qui montre au passage la sensibilité sur les données

.

Dans ces graphes, on ne retrouve pas tout à fait les valeurs trouvées à la table 10.12 ; cela tient au fait que
1) Brookes utilise des observations espacées d'un an, et non 3 ans comme Adams
2) Il utilise des $O - C$ un peu différents de ceux d'Adams.
On résume dans la table 10.14 ci-dessous les succès et les échecs dans les prédictions de la position de Neptune à différentes dates.
O(N) dans le tableau de gauche signifie que la position de Neptune a été (n'a pas été) déterminée à moins de 5° par l'Hypothèse II, aux dates indiquées.
O(N) dans le tableau de droite signifie que la position de Neptune a été (n'a pas été) déterminée à moins de 10° par l'hypothèse II, aux dates indiquées.

TABLE 10.14 – Résultats obtenus avec TRIP : à gauche positions prédites à ±5° ; à droite à ±10° ; dans la structure A/B, A représente la conclusion obtenue avec TRIP et B celle obtenue par Brookes ; par exemple O/O signifie que TRIP et Brookes ont tous les deux prédit la position de Neptune à moins de 5°

	1825	1830	1835	1840	1846
0.485	O /O	N /N	O /O	O /O	O /O
0.500	O /N	N /N	O /O	O /O	O /O
0.515	O /O	N /N	N /N	O /O	O /O
0.530	N /N	N /N	N /N	N /N	N /N
0.559	N /N	N /N	N /O	N /N	N /N
0.574	N /N	O /N	N /O	N /N	N /N
0.602	N /N	N /N	N /O	O /O	N /N

	1825	1830	1835	1840	1846
0.485	O /O	N /N	O /O	O /O	O /O
0.500	O /N	N /N	O /O	O /O	O /O
0.515	O /O	N /N	O /O	O /O	O /O
0.530	O /N	N /N	O /O	O /O	O /O
0.559	N /O	O /N	N /O	N /O	O /O
0.574	N /N	O /O	N /O	N /O	O /O
0.602	O /O	N /O	N /O	O /O	N /O

Sur 70 cas, il y a seulement 16 constats opposés (souvent de très peu), ce qui représente un bon accord général, sachant que les calculs n'ont pas suivi exactement le même chemin : par exemple, Brookes ne fait pas intervenir les termes de degré 2 de la perturbation de la longitude.

10.4.3 Conclusions

On a examiné séparément les contenus de la thèse de Brookes, consacrée aux calculs d'Adams et de celle de Baghdady consacrée aux calculs de Le Verrier. On a déjà effectué quelques comparaisons ; il est intéressant de poursuivre plus en détail la comparaison de ces deux thèses.

— Elles reprennent toutes deux les calculs effectués pour la recherche de la planète perturbatrice, mais elles ne reprennent pas les calculs préliminaires à cette recherche : perturbations exercées par Jupiter et Saturne sur Uranus, éphémérides détaillées, par exemple.

— Le travail de Brookes est très complet, et même parfois trop complet, avec une profusion de tables de valeurs numériques, portant souvent sur des paramètres peu intuitifs, ce qui rend la lecture parfois difficile à interpréter ; et ce qui est remarquable, c'est que ce travail a pu être fait avec un ordinateur, objet rare en 1969.

— Le travail de Baghdady est beaucoup moins complet ; il se contente souvent de reprendre les valeurs de Le Verrier, sans vérification, et il y a quelques erreurs, ce qui rend son travail moins crédible.

— Toutes les deux prolongent les calculs effectués par les deux savants : positionnement de la planète perturbatrice à partir de plusieurs valeurs de α et/ou pour différentes dates de recherche.

— Malheureusement, aucune de ces thèses ne comporte de graphes, ce qui rend l'exploitation de leurs résultats plus difficile.

Chapitre 11

COMPARAISON ENTRE LES CALCULS D'ADAMS ET CEUX DE LE VERRIER

Objectifs

Présentation On a repris en détail les calculs de Le Verrier aux chapitres 3, 4, 5, 6 et ceux d'Adams au chapitre 10. On compare dans ce chapitre la façon dont Adams et Le Verrier ont effectué leurs calculs respectifs.
On examine à la section 1 les points communs et les différences dans les traitements effectués par les deux savants ; on verra que le caractère propre de chacun d'eux a sans doute eu une influence sur la façon d'aborder leurs calculs et sur la façon de rédiger leurs manuscrits.
On compare ensuite à la section 2 les valeurs numériques des coefficients des équations de condition quand on reporte les valeurs finales trouvées par Adams, par Le Verrier et enfin les valeurs exactes ; on constatera que les 3 jeux de coefficients ont peu de rapport entre eux.
Le malheur commun d'Adams et de Le Verrier est de s'être inspiré de la loi de Bode pour fixer une valeur initiale au rapport des demi-grands axes ; mais leur chance, contrairement à Bouvard par exemple, est d'avoir fait les calculs au bon moment, c'est à dire sur une période englobant la conjonction de 1822. On a examiné au chapitre 8 l'influence déterminante de cette conjonction sur les prédictions.
Enfin, on reprendra à la section 3 les conclusions avancées dans les chapitres précédents, lors de la recherche directe d'orbites pour la planète perturbatrice en utilisant les méthodes de Le Verrier, d'Adams ou bien INPOP. On comparera les résultats obtenus par ces trois approches.

Sommaire

11.1 Différences et ressemblances entre les calculs de Le Verrier et d'Adams **388**
11.1.1 Gestion des calculs préliminaires 388
11.1.2 Forme et traitement des équations 388
11.1.3 Objectifs 389
11.1.4 Maudite loi de Bode 389
11.1.5 Comparaison des méthodes de pensée 390
11.1.6 Comparaison des rédactions 391

11.1.7 Comparaison des orbites trouvées par Le Verrier et Adams . . . 395
11.1.8 Stabilité des solutions . . . 395
11.1.9 Conclusions . . . 396
11.2 Retour sur les équations de condition, après la découverte visuelle . . . **397**
11.2.1 Comparaison numérique . . . 397
11.2.2 Comparaisons graphiques . . . 398
11.3 Bilan de la recherche d'orbites . . . **400**
11.3.1 Orbites circulaires . . . 400
11.3.2 Orbites elliptiques . . . 402
11.3.3 Conclusion . . . 403

11.1 Différences et ressemblances entre les calculs de Le Verrier et d'Adams

11.1.1 Gestion des calculs préliminaires

Le Verrier ne fait confiance qu'à lui-même dans cette grande entreprise, ce qui est bien dans son caractère entier. Il reprend donc le calcul à la base, en commençant par la détermination précise et détaillée des perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus. Ce travail monumental l'occupera de juillet à fin octobre 1845. Il doit en particulier effectuer le calcul des perturbations proportionnelles au carré des masses [1], travail complexe et pénible, qui n'avait pas été abordé par Bouvard [2].
On a vu que Le Verrier avait été aidé pendant cette période par Émile Gautier, qui faisait – en double et en secret – les calculs sur les perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus. Adams, contrairement à Le Verrier, n'a pas repris le calcul des perturbations créées par Saturne et Jupiter sur Uranus. Une des raisons est qu'il était très occupé par son travail d'enseignant [3] au collège Saint John de Cambridge et qu'il ne pouvait se consacrer à Uranus que pendant les vacances scolaires. Quand il était dans sa famille, à Lidcott (situé en Cornouailles), il pouvait le plus souvent bénéficier de l'aide de son frère, Thomas, qui contrôlait ses opérations [4]. Adams a donc fait confiance à Pontécoulant [Pontécoulant, 1829] pour le calcul des perturbations exercées par les autres planètes [5] et à Bouvard pour la théorie d'Uranus, après avoir tenu compte de quelques petites corrections – par exemple sur les masses attribuées à Jupiter et Saturne – signalées par Bessel et Hansen [Delaunay, 1842a].
Le Verrier, contrairement à Adams, a refait les réductions de toutes les observations d'Uranus qu'il veut exploiter, y compris la vérification de celles faites à Greenwich (*Herschel* p. 127 et cahier n° 3)

> Depuis 1781 jusqu'en 1800, j'ai eu recours aux publications de l'Observatoire de Greenwich. Toutes ces observations ont été réduites avec une très grande exactitude, et publiées par les soins de l'illustre directeur de l'Observatoire de Greenwich, M. Airy [...] J'ai repris, de mon côté, cette discussion dont les résultats devaient avoir une grande importance pour mon travail... Quoi qu'il en soit, je me plais à rendre hommage à la scrupuleuse rigueur du travail publié par les astronomes de Greenwich, travail où l'astronomie théorique pourra puiser avec confiance de précieux documents.

11.1.2 Forme et traitement des équations

Pour la recherche de la planète inconnue, Le Verrier et Adams utilisent tous les deux des équations – appelées équations de condition – qui expriment que les perturbations théoriques, faisant intervenir les paramètres d'Uranus à corriger ainsi que les paramètres de la planète perturbatrice à découvrir, sont égales aux perturbations observées.
Le Verrier utilise les données disponibles, après quelques regroupements d'observations rapprochées et en les interpolant pour avoir des dates espacées de 7 ans.

1. Les formules théoriques ont été établies par Laplace dans sa *Mécanique céleste*, et Le Verrier doit les transcrire numériquement, sans se noyer dans ces calculs très longs (voir § 3.9.3).
2. Voir au chapitre 4 la discussion sur la théorie de Bouvard.
3. Le Verrier avait aussi des missions d'enseignement au Collège de France, des charges de famille, de nombreuses visites protocolaires à effectuer en vue de son élection à l'Académie des sciences (19/1/46), mais il a réussi à combiner toutes ces activités, au prix quand même d'une détérioration de sa santé (voir § 14.1.1).
4. Mais ce frère n'avait pas les mêmes compétences scientifiques que Gautier.
5. Avant de se lancer dans sa sixième solution (connue sous le nom d'Hypothèse II), Adams a repris et vérifié les formules de Pontécoulant [Sampson, 1904]. Il a utilisé un formulaire formellement un peu différent de celui de Pontécoulant, mais numériquement équivalent, décrit par Brookes dans sa thèse [Brookes, 1969].

Adams procède d'une manière semblable à Le Verrier, mais en utilisant des équations [6] à des époques régulièrement espacées de 3.0362 ans (soit 3 fois la période de révolution synodique d'Uranus), et qu'il a donc fallu interpoler. Cette façon de procéder lui permet de faire une résolution mathématiquement assez élégante, mais ce prétraitement est en mesure de fausser les données (voir la remarque de Brown au § 10.3.1).
Le Verrier fait subir à ses équations des traitements assez irréguliers : multiplication de chaque équation par des coefficients dépendant de la date d'observation et de l'habileté supposée des observateurs, coefficients qu'il est difficile d'inventer. En conséquence de toutes ces irrégularités, justifiées astronomiquement, les calculs de Le Verrier sont plus difficiles à programmer.
Adams transforme ses équations de condition afin de se ramener à un système d'équations linéaires, quitte à augmenter de façon importante le nombre d'inconnues (jusqu'à 18 pour les Hypothèses I et II). Mais ces inconnues ne sont pas indépendantes, ce qui l'oblige à un traitement un peu particulier, mais très satisfaisant d'un point de vue mathématique, pour les hypothèses I et II.
Globalement, les méthodes d'Adams sont beaucoup plus faciles à programmer que celles de Le Verrier.

11.1.3 Objectifs

Le Verrier se fixe initialement des objectifs ambitieux : il se propose de déterminer tous les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice. En fait, il s'aperçoit au cours des calculs que sa démarche ne peut pas fournir avec précision tous les éléments de la planète perturbatrice, en particulier sa masse. Il revoit donc ses ambitions à la baisse et décide dans un premier temps de donner seulement une position approximative de la planète perturbatrice au 1/1/1847. Et dans un deuxième temps, il essaiera d'affiner cette position et de préciser les autres éléments orbitaux en s'appuyant sur un nombre plus élevé (33) d'équations.
Adams, conformément aussi à son caractère, se propose dans un premier temps d'examiner la faisabilité du problème : c'est le calcul [7] de 1843. Encouragé par ce premier résultat, Adams reprend les calculs en les complexifiant à chaque étape, et il y a 6 étapes en tout.
Adams détermine 6 solutions (voir chapitre 10), chaque solution obtenue à partir d'équations comportant progressivement plus de termes, mais en conservant toujours le même nombre – 21 – d'équations.
Le Verrier propose 2 solutions, avec une progression dans le nombre d'équations traitées : 18 puis 33.

On constate donc que le caractère de chacun des deux calculateurs influe fortement sur la façon d'aborder le problème : Le Verrier veut "tout", tout de suite, alors qu'Adams procède par étapes successives, en commençant par tester la faisabilité d'un tel problème.

11.1.4 Maudite loi de Bode

Le malheur commun de Le Verrier et d'Adams est donc lié à la loi de Bode (voir encadré 12 p. 168), qui n'en est pas une ou du moins, qui n'est satisfaite que jusqu'à Uranus. Ils sont tous les deux [8] partis, dans un premier temps, d'un rapport égal à 0.5, (0.51 pour l'approche finale de Le Verrier).

6. Et portant sur la longitude moyenne et non sur la longitude vraie, voir chapitre 10.

7. On a vu au chapitre 10 que ce calcul posait des problèmes théoriques importants ; ce calcul devait être considéré comme un test de faisabilité par Adams et ses résultats n'ont pas été publiés.

8. Pour son sixième calcul (Hypothèse II), Adams part d'un rapport des demi-grands axes égal à 0.515, mais sa méthode ne prévoit pas de faire évoluer cette valeur au cours du calcul.

La méthode de Le Verrier dans la dernière approche, qui est une méthode **locale** d'ajustement à partir d'une valeur initiale assez arbitraire, à savoir 0.51, ne pouvait pas donner de bons résultats pour le demi-grand axe.
Adams, quant à lui, ne procède pas à l'ajustement du demi-grand axe au cours de ses calculs : il part d'une valeur (arbitraire) et la conserve tout au long de ses calculs. Il ne peut donc tomber sur la bonne valeur de ce demi-grand axe que s'il part de cette bonne valeur !
Si la loi de Bode avait été une vraie loi, ils auraient tous les deux trouvé une très bonne approximation pour le demi-grand axe, ainsi que pour l'excentricité et dans une moindre mesure la longitude du périhélie, trois paramètres qui sont, comme on l'a vu au chapitre 8, fortement corrélés dans cette recherche (§ 8.8).
Adams et Le Verrier ne sont pas très satisfaits d'avoir eu à choisir une valeur assez arbitraire pour amorcer leurs calculs. On rappelle (p. 202) que Le Verrier considérait ce nombre [0.5] comme une première approximation et qu'il pensait le déterminer complètement lors de sa deuxième approche ; j'avais modéré ce jugement en notant que Le Verrier ne faisait qu'une recherche locale autour de sa valeur de départ.
Quant à Adams, voici ce qu'il déclare à Airy à la page 2 de ses papiers scientifiques [Adams, 1896]

> In the investigation, the results of which I communicated to you [Airy] last October [1845], the mean distance of the supposed disturbing planet is assumed to be twice that of Uranus. Some assumption is necessary in the first instance, and Bode's law renders it probable that the above distance is not very remote from the truth : but the investigations could scarcely be considered satisfactory while based on anything arbitrary ; and I therefore determined to repeat the calculation, making a different hypothesis as to the mean distance.

On voit donc qu'Adams était prêt à refaire [9] son calcul jusqu'à ce qu'il tombe sur un résultat entièrement satisfaisant, mais le temps lui a manqué, car Le Verrier avait déjà publié ses résultats.
On a vu au § 8.8.5 que ce qui sauve les calculs de Le Verrier et d'Adams c'est l'attraction exercée par la conjonction de 1822 : tous les calculs auraient abouti à des localisations proches de la position réelle, en partant d'un large jeu de valeurs des paramètres attribués à la planète perturbatrice. À l'aide des simulations effectuées dans les chapitres précédents, on peut affirmer que la localisation aurait été faite au pire à $\pm 10°$ par toute méthode et pour un large jeu initial de paramètres pour la planète troublante.
Adams et Le Verrier ont effectué des calculs remarquables, mais ils ont été grandement aidés par la configuration favorable entre 1800 et 1845 : on insiste sur le rôle décisif joué par l'attraction de la conjonction de 1822 ; l'analyse du rôle de la conjonction de 1822 a été faite à la figure 8.42.

11.1.5 Comparaison des méthodes de pensée

Sampson a été un élève d'Adams à Cambridge et il connaît bien sa façon de réfléchir à un problème ; voici ce qu'il en dit [Sampson, 1904] :

> Adams was a rapid worker when his work was coming to a point, and then and always was able to carry through fabulous computations without error.

Le Verrier réfléchit longuement aussi à la façon de résoudre un problème. Une fois la méthode arrêtée, il accumule rapidement les calculs, le plus souvent faits de tête. Quand il ne peut plus avancer, voici ce que dit Raoul Gautier, rapportant les propos de son père, Émile Gautier ([Wolf, 1892] p. 331) :

9. On rappelle qu'on peut penser que Le Verrier envisageait aussi de refaire ses calculs pour différentes valeurs de α, car il avait calculé, dans le cahier n° 4 les coefficients de Laplace pour 21 valeurs de α, comprises entre 0.40 et 0.60, sachant que ces coefficients interviennent de façon critique dans les équations de condition (voir § 5.4).

> Émile Gautier racontait que lorsque Leverrier n'en pouvait plus, il s'asseyait brusquement par terre avec son violon (il était bon musicien) et jouait pendant une demi-heure, après quoi, il était détendu et en état de reprendre ses calculs.

11.1.6 Comparaison des rédactions

La rédaction des manuscrits est très différente chez les deux savants :
Adams fait ses calculs pour lui, donnant peu d'indications sur sa démarche. On peut lire le jugement de Sampson à propos de la rédaction des manuscrits d'Adams [Sampson, 1904] :

> It was a longlife habit of Adams to mature his work in his mind before committing it to paper. As a result, his writings always contain the minimum of explanation, and the present ones were written for his own eyes alone, and before experience could teach him the penalties of such a habit. Scores of pages of this work consist of nothing but columns of figures...

Et voici ce qu'il dit au sujet de la rédaction des calculs de la première version, celle de 1843

> Fortunately, it is complete and intelligible, though most difficult to follow. It is written at first straightforwardly, then on the backs of other calculations, and at last squeezed into any corner not already occupied, as if his eagerness to finish would not let him wait to get a few more sheets of paper.

Adams omet certains intermédiaires importants, comme la détermination de l'expression théorique de la perturbation de la longitude moyenne, le détail de la résolution de l'équation finale dans l'Hypothèse I, le détail du calcul des perturbations du rayon vecteur, la réduction des observations, et la façon dont il interpole celles-ci pour former une série de données régulièrement espacées dans le temps... On donne fig. 11.1 la reproduction de la page finale du manuscrit consacré au calcul de 1843. On y voit surtout des opérations, mais peu d'explications ; même le résultat final, la valeur de θ ($\theta = -35°35'$), n'est pas bien mis en évidence.
Le Verrier est beaucoup plus généreux en commentaires : commentaires d'une part pour lui-même, en vue d'une reprise de ses calculs et d'autre part pour guider [10] le lecteur (courageux) de ses manuscrits ; il n'épargne à ce lecteur aucun calcul : des pages de réductions d'observations, de calculs de coefficients de Laplace, d'équations de condition, de tables en tout genre... Le Verrier doit donc penser que ses manuscrits vont être relus – encore une différence dans les caractères des deux savants – car il présente le plus souvent le but de ses calculs, les choix qu'il a été amené à faire à certains moments, les difficultés qu'il a pu rencontrer et parfois des indications étonnantes pour un tel document (manuscrit) comme $\mathcal{T}\ \mathcal{S}\ \mathcal{V}\ \mathcal{P}$ en bas de la page 23 du cahier n° 2 des manuscrits.
Selon Sampson [Sampson, 1904], il n'y a pas de calculs inutiles dans les manuscrits d'Adams : « from the first solution to the sixth he developped, he was never obliged to reject, unless we make the exception of the determinations of latitude » (voir § 6.2.10.2) ; tous les calculs ont servi.
Les manuscrits de Le Verrier comportent quelques calculs qui n'ont pas abouti :
– au début du cahier n° 2, il entreprend de former le développement de la fonction perturbatrice au degré 6 des excentricités, en usant de notations compliquées ; il abandonne brutalement le calcul au bout de 5 pages et reprend le calcul au degré 2 des excentricités.
– p. 101 du cahier n° 4, il reprend le calcul de la masse m' en ne supposant plus $P = Q = R = S = 0$, mais les formules sont tellement compliquées qu'il abandonne le calcul (§ 5.2.4.2).
– le premier calcul pour la première approche (§ 5.2.2) est abandonné sans solution.
– Le Verrier recommence le calcul de la première approche avec $\alpha = 0.51$ à la fin du cahier n° 4, et au bout de 50 pages, les calculs s'arrêtent, sans véritable conclusion (voir p. 202).

10. Cela ne veut pas dire que ses manuscrits sont faciles à lire, loin de là : d'abord, il reste des calculs complexes à comprendre, pas toujours complètement expliqués (comme la perturbation proportionnelle au carré des masses exercée sur Uranus), et surtout l'écriture de Le Verrier est bien souvent difficile à déchiffrer.

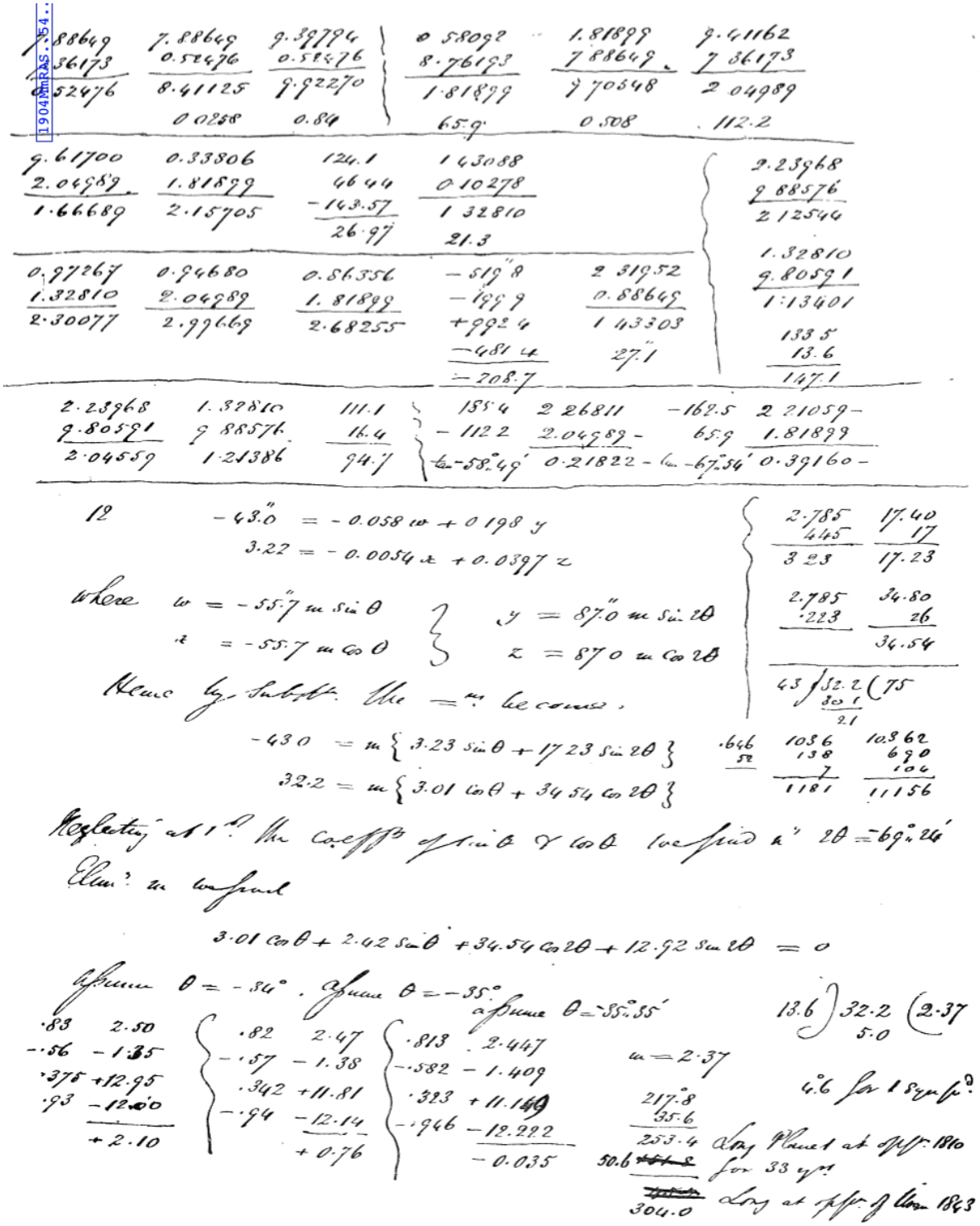


FIGURE 11.1 – Feuille de calcul finale pour la solution de 1843 d'Adams. Il y a essentiellement des calculs, dont on ne connaît pas le but ; le résultat principal, $\theta = -35°35'$ (en bas de page) n'est pas vraiment mis en évidence. On voit aussi en bas de la page l'erreur d'Adams, signalée au § 10.2.1.3 (151.8 au lieu de 50.6). Comme chez Le Verrier, le texte n'est pas très lisible, mais les chiffres sont bien formés. La reproduction provient de [Sampson, 1904].

Par comparaison avec Adams, et par contraste, on donne fig. 11.2 un exemple typique [11] d'une page manuscrite de Le Verrier. On peut assez aisément reconnaître la nature des variables et le but des calculs.
Même si Le Verrier a été aidé, matériellement et moralement, par Émile Gautier dans la première partie de son travail, la réalisation d'un tel travail en si peu de temps force l'admiration.
Le Verrier doit fréquemment donner des impulsions et des orientations à ses calculs, quelquefois à l'issue d'essais non fructueux. Voici par exemple ce qu'écrit Le Verrier avant la résolution finale (*Herschel*, p. 226) :

> Après plusieurs tentatives infructueuses pour tirer des valeurs les plus précises des inconnues qu'elles renferment, j'ai été conduit à reconnaître qu'il était indispensable de commencer par éliminer 6 des inconnues [que les équations donnent nettement en fonction de la masse]...

Adams a suivi une ligne initiale bien définie et des calculs qui s'imposent assez naturellement : cela tient à sa façon de résoudre le problème dans sa tête avant de le coucher sur le papier (voir la remarque de Sampson au début de ce paragraphe 11.1.6).
Si donc on veut comparer le style des deux démarches, on peut dire que Le Verrier est un forçat du calcul, ne reculant devant aucune montagne, alors qu'Adams est plus fin, plus mathématique et ses enchaînements sont plus naturels.
Tisserand [Tisserand, 1889] résume bien la situation : « La méthode employée [par Adams] est simple et élégante ; la discussion est cependant moins approfondie que chez Le Verrier.
Voici ce que dit H.S. Jones [12] [Jones, 1947] :

> Hansen, [...] wrote to Airy to say that, in his opinion, Adams' investigation showed more mathematical genius than Le Verrier's. Airy gave his opinion to Biot « On the whole I think his [Adams'] mathematical investigation superior to M. Le Verrier's. However, both are so admirable that it is difficult to say ».

Voici l'opinion de Danjon [Danjon, 1946a] :

> Devenu fellow de St-John's College, à Cambridge, Adams imagine une méthode à la fois simple et élégante pour calculer les inconnues non sans avoir judicieusement réduit, au préalable, le nombre de celles-ci.

En fait, il augmente le nombre d'inconnues dans un premier temps, jusqu'à 18, avant de les répartir dans deux systèmes indépendants de 21 équations à 9 inconnues chacun (voir chapitre 10).

11. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas chez Le Verrier de pages remplies uniquement de calculs, mais les calculs correspondent alors à une démarche présentée au préalable.
12. Harold Spencer Jones (1890−1960) ; il fut astronome Royal de 1933 à 1955.

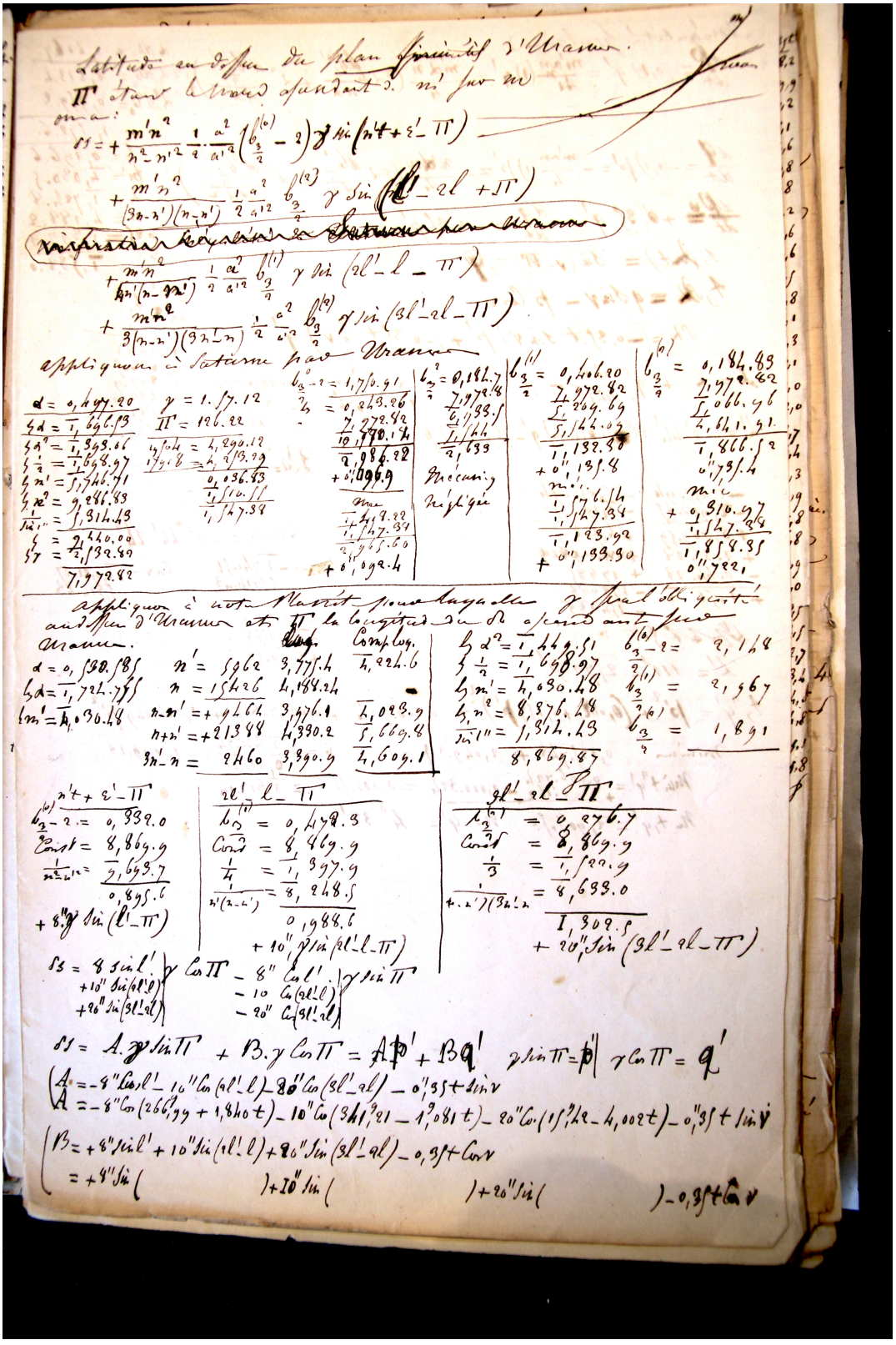


FIGURE 11.2 – Feuille de calcul de Le Verrier pour déterminer l'inclinaison de l'orbite de Neptune sur celle d'Uranus (cahier n° 6 des manuscrits). Il y a beaucoup de calculs, mais on sait à quoi correspondent ces différents calculs. Ici, c'est le début du calcul pour former les équations de condition concernant la latitude (voir plus de détail au §6.2.10). Comme pour Adams (voir fig. 11.1), le texte n'est pas très lisible, mais les chiffres sont bien formés

11.1.7 Comparaison des orbites trouvées par Le Verrier et Adams

On a tracé sur le même graphe (fig. 11.3) la solution trouvée par Le Verrier, celle trouvée par Adams, et la véritable orbite de Neptune. On voit le rapprochement de ces différentes orbites au moment de la découverte, le 23/9/46.

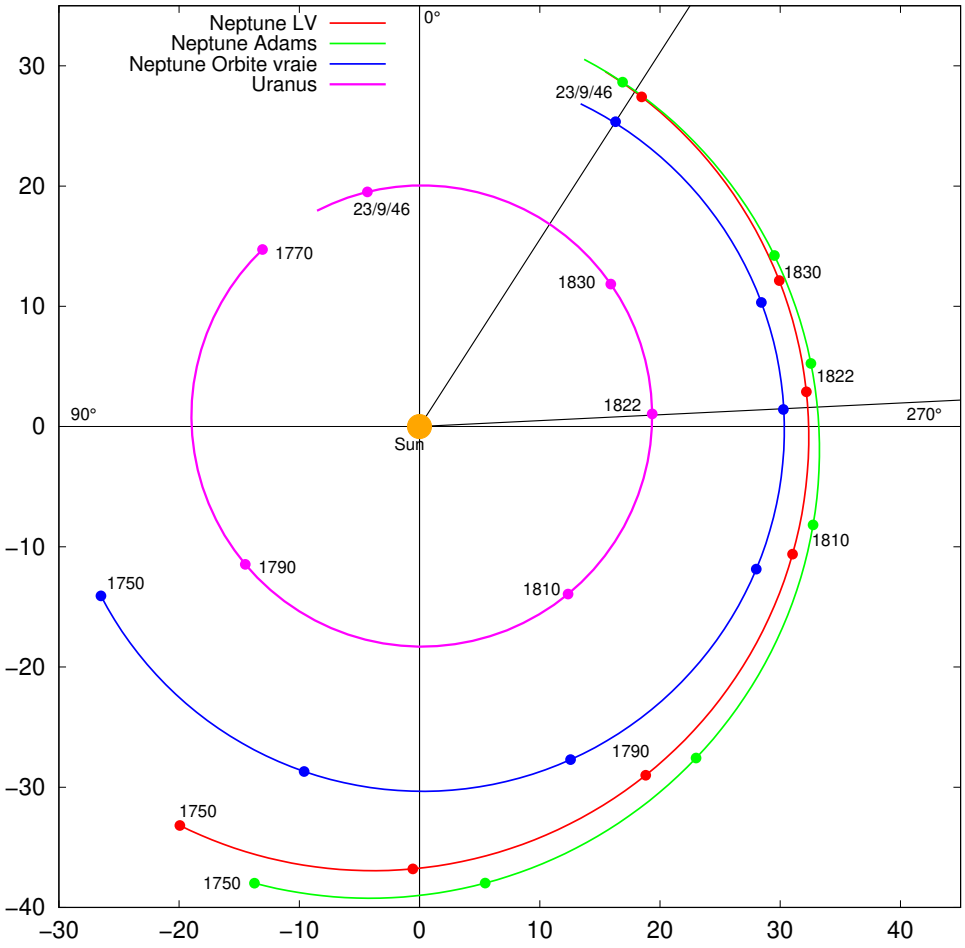


FIGURE 11.3 – Orbites trouvées par Le Verrier et Adams, comparées à l'orbite réelle de Neptune. On constate le rapprochement de ces trois orbites au moment de la découverte, le 23/9/46. On peut voir la position de Le Verrier (point rouge) 1° avant la position correcte, et celle d'Adams (point vert), 2°30′ après

11.1.8 Stabilité des solutions

Il se trouve qu'Adams et Le Verrier ont placé la planète perturbatrice très près de la position réelle, mais en lui attribuant des paramètres orbitaux très éloignés de la réalité. On est en droit de se demander quelle est la part de chance dans leurs calculs.
Il y a plusieurs sources d'erreurs possibles dans la démarche et des variations imaginables dans les calculs des deux savants ; en voici quelques unes :

1. Les erreurs d'observations, surtout sur les observations anciennes. Le Verrier pensait qu'elles pouvaient aller [13] jusqu'à 15 as. Pour évaluer l'influence de ces erreurs d'observations, des erreurs gaussiennes ont été ajoutées aux observations au chapitre 10 (§ 10.3.8.4).

13. En fait elles sont remarquablement précises, comme on peut le constate sur la figure 2 de l'introduction.

2. Le regroupement un peu arbitraire des données et les interpolations faites sur ces données, qui peuvent fausser les conclusions. En particulier, Adams a transformé les données portant sur la longitude vraie en données portant sur la longitude moyenne, transformation discutable à plus d'un titre, comme on l'a vu au § 10.3.1.
3. Le choix du nombre de variables dans les expressions théoriques des perturbations : Adams commence avec 4, puis va jusqu'à 18 (mais ces variables ne sont pas indépendantes) ; Le Verrier utilise essentiellement 9 variables (4 pour Uranus et 5 pour Neptune) : ε, n, ϖ, e, a', ε', k', h', m'.
4. Le choix du nombre de termes à retenir dans l'expression des coefficients F_i, G_i, H_i de la perturbation de la longitude : c'est 3 pour les deux.
5. Adams et Le Verrier limitent initialement leurs équations au degré 1 selon les excentricités ; dans l'approximation finale, ils introduisent en plus quelques termes de degré 2 selon les excentricités ; est-ce suffisant ?
6. La manipulation des équations : moindres carrés rigoureux ou variantes plus ou moins éloignées de la méthode des moindres carrés. Des tests ont été faits à la fin du chapitre 8.

Alors, avec tous ces choix et toutes ces variations possibles, comment expliquer que les deux calculs aboutissent à des résultats proches de la position correcte ?

La convergence des calculs vient du fait que la conjonction de 1822 est un facteur attractif incontournable, comme on l'a vu au § 8.8.5, qui fait que les paramètres s'ajustent, quelles que soient leurs valeurs de départ [dans des limites raisonnables], pour placer Neptune à peu près correctement à la conjonction.
Voici ce que dit Sampson au sujet des calculs préliminaires pour la recherche de Neptune et des mérites respectifs de Le Verrier et d'Adams :

> The problem of Neptune had its full share of this difficult and necessary but thankless work. We may at once admit that where Le Verrier has a higher merit than Adams, it lies in his exhaustive discussion of all such points [calcul des perturbations exercées par Saturne et Jupiter par exemple]. Adams, working with little leisure and no assistance, here did what was necessary and no more. Collecting and reducing observations was one part of this task ; examinining the existing theory was another.

On rappelle que Tisserand avait fait une analyse semblable, voir p. 334.
Et voici ce que pense Brookes des deux recherches [Brookes, 1970] :

> There is no doubt that the final solutions are particularly sensitive to any variation in the set of values representing the discrepancies in mean longitude. It was found, for example, that interpolation from a curve drawn through the points representing the discrepancies derived by Adams can considerably influence the values obtained for e', m', ϖ' and ℓ'. The corresponding change in ℓ'_{46} only amounts to a little $1\frac{1}{2}°$. In view of this there is little point in regarding the solution of Le Verrier as more accurate than that of Adams..
> Although it has been shown that the approximate position of the planet could have been predicted with sufficient accuracy to lead to its discovery, for any value of the mean distance between 30 *au* and 40 *au*, there is nevertheless an element of chance present [...] However, having examined the manuscripts in detail, it is clear that Adams intended only to determinate approximatively the orbital elements of the planet, and that had the investigations been instituted at any time after 1830, when sufficient observational material became available, the predictions would probably have led to its discovery.

11.1.9 Conclusions

Tous les calculs effectués dans la thèse montrent que, même si l'on modifie les données et/ou la méthode de traitement des équations, les paramètres orbitaux de la planète perturbatrice

bougent beaucoup, mais la longitude vraie au 1/1/1847 varie relativement peu. Donc, même avec un point de départ relativement éloigné de la réalité, on obtient une estimation permettant rapidement la découverte visuelle. La conjonction de 1822 a augmenté les résidus dans l'écart en longitude d'Uranus et donc les décalages avec la théorie, ce qui a lancé les calculs d'Adams et de Le Verrier. L'opposition de 1822 verrouille les positions et conduit ainsi à des résultats raisonnablement exacts en 1847.

On peut reprendre ce qui a été dit à la fin du chapitre 8 : Le Verrier et Adams ont eu beaucoup de talent, de détermination et de persévérance, et ont été aidés par la nature physique du problème, qui conduisait inévitablement, une fois posées les bonnes équations, à un positionnement favorable de la planète au 1/1/47.

11.2 Retour sur les équations de condition, après la découverte visuelle

Le Verrier et Adams ont tous les deux formé des équations de condition portant d'une part, sur les corrections à apporter aux éléments d'Uranus et d'autre part, sur les paramètres de la planète inconnue. Les coefficients des corrections à apporter aux éléments d'Uranus ($\delta n,\ \delta\varepsilon,\ \delta e,\ e\delta\varpi$) sont bien connus, puisqu'ils ne font intervenir que les paramètres d'Uranus. Par contre, la perturbation exercée par une planète extérieure est représentée par une expression algébrique dont les coefficients dépendent des inconnues du problème. Le Verrier et Adams retiennent tous les deux un développement au degré 1 des excentricités [14], écrit ici avec les notations de Le Verrier (voir chapitre 5) :

$$\begin{aligned}\delta v = m'\{&P^{(1)}\sin[(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon]+P^{(2)}\sin[(2n'-2n)t+2\varepsilon'-2\varepsilon]+P^{(3)}\sin[(3n'-3n)t+3\varepsilon'-3\varepsilon]\}\\ +m'\{&N^{(1)}\sin[n't+\varepsilon'-\varpi]+N^{(2)}\sin[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon-\varpi]+N^{(3)}\sin[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi]\}\\ -m'h'\{&M^{(1)}\cos[n't+\varepsilon']+M^{(2)}\cos[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon]+M^{(3)}\cos[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon]\}\\ +m'l'\{&M^{(1)}\sin[n't+\varepsilon']+M^{(2)}\sin[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon]+M^{(3)}\sin[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon]\}\end{aligned} \tag{11.1}$$

On rappelle que $h' = e'\sin\varpi'$ et $l' = e'\cos\varpi'$. Il est intéressant [15] de voir ce que valent ces coefficients, une fois les calculs terminés, et de les comparer avec les valeurs réelles.

11.2.1 Comparaison numérique

Pour cela, on évalue ces coefficients

- avec les valeurs finales trouvées par Le Verrier
- avec les valeurs finales trouvées par Adams II.
- avec les valeurs réelles des éléments de Neptune.

On fera apparaître aussi les périodes des différentes lignes trigonométriques.

14. Le Verrier prend en compte des termes d'ordre 2 dans sa dernière approche et Adams considère un terme d'ordre 2 dans les hypothèses I et II.

15. L'idée de la comparaison vient de Sampson [Sampson, 1904], qui a fait ces rapprochements pour les calculs d'Adams, pendant son analyse de ceux-ci.

TABLE 11.1 – Table des coefficients des termes de la perturbation directe exercée par une planète extérieure selon les résultats de Le Verrier, Adams et les valeurs modernes, suivis des périodes des différents termes

Terme de la perturbation créée par Neptune sur Uranus	Coefficients (as) selon			Périodes (ans) selon		
	LV	Adams	Actuel	LV	Adams	Actuel
$\sin[(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon]$	26.1	31.7	34.4	137	132	171
$\sin[(2n'-2n)t+2\varepsilon'-2\varepsilon]$	−54.7	−57.4	875.9	68	66	86
$\sin[(3n'-3n)t+3\varepsilon'-3\varepsilon]$	−4.9	−5.4	−14.3	46	44	57
$\sin[n't+\varepsilon'-\varpi]$	2.6	3.2	3.4	217	231	165
$\sin[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon-\varpi]$	−33.8	−33.9	−2878	370	308	4232
$\sin[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi]$	−16.0	−25.7	−16.8	100	92	179
$\cos[n't+\varepsilon']$	5.9	7.5	−0.4	217	231	165
$\cos[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon]$	−26.1	−26.0	148.1	370	308	4232
$\cos[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon]$	−60.0	−100.2	3.4	100	92	179
$\sin[n't+\varepsilon']$	−1.5	−4.2	−0.4	217	231	165
$\sin[(2n'-n)t+2\varepsilon'-\varepsilon]$	6.6	14.5	132.8	370	308	4232
$\sin[(3n'-2n)t+3\varepsilon'-2\varepsilon]$	15.1	56.0	3.0	100	92	179

L'écart est particulièrement flagrant avec les termes d'argument $(2n'-n)t$ de période élevée, 4232 ans, dans la théorie actuelle, et de période moyenne, 370 ans, dans la théorie de Le Verrier et 308 ans dans celle d'Adams. Les coefficients reflètent aussi ces grandes différences, car ils proviennent d'intégrations faisant apparaître au dénominateur la petite quantité $2n'-n$. En fait, cet écart considérable sur les coefficients a peu d'incidence sur le calcul, comme l'a très bien expliqué Le Verrier [Le Verrier, 1848c], car ce terme est quasi constant sur la courte période d'observation et peut donc être développé à l'ordre 1 du temps et ainsi être englobé dans la longitude moyenne. La concordance avec les valeurs modernes aurait été beaucoup plus forte en partant d'un rapport des moyens mouvements voisin de 2 et non de 3, comme l'on fait Adams et Le Verrier, en s'appuyant sur la loi de Bode, c'est-à-dire en partant avec un rapport des demi-grands axes de l'ordre de 0.63.

11.2.2 Comparaisons graphiques

On rappelle que les paramètres de la planète perturbatrice se calculent à partir des équations de condition ayant pour deuxièmes membres les $O-C$ observés sur la planète perturbée, et non les $O-C$ résultant de l'action directe de la planète perturbatrice ; les $O-C$ utilisés dans les équations de condition (donc après correction des éléments elliptiques d'Uranus) sont fortement atténués par ces corrections, et sont d'un ordre de grandeur inférieurs aux $O-C$ résultant de l'action directe. Pour Uranus, les $O-C$ maximaux observés sont de l'ordre de $100''$, alors que les $O-C$ directs exercés par Neptune sont de l'ordre de $900''$.
Pour la comparaison graphique de la perturbation théorique de la longitude, on va procéder de deux façons, décrites dans les deux paragraphes suivants.

11.2.2.1 Comparaison à partir de la formule théorique de la mécanique céleste

On utilise l'expression théorique δv de la perturbation de la longitude vraie à partir des formules de la *Mécanique céleste*, formules faisant intervenir m', e', ϖ', a', ε', et écrites à la fig. 5.1 ou à l'équation (11.1). On a ajouté les termes d'ordre 2 retenus par Le Verrier. On a reporté dans δv les valeurs numériques trouvées par Le Verrier, Adams, ainsi que les valeurs modernes, et on a tracé les 3 graphes correspondants. Le tracé est fait à la figure 11.4.

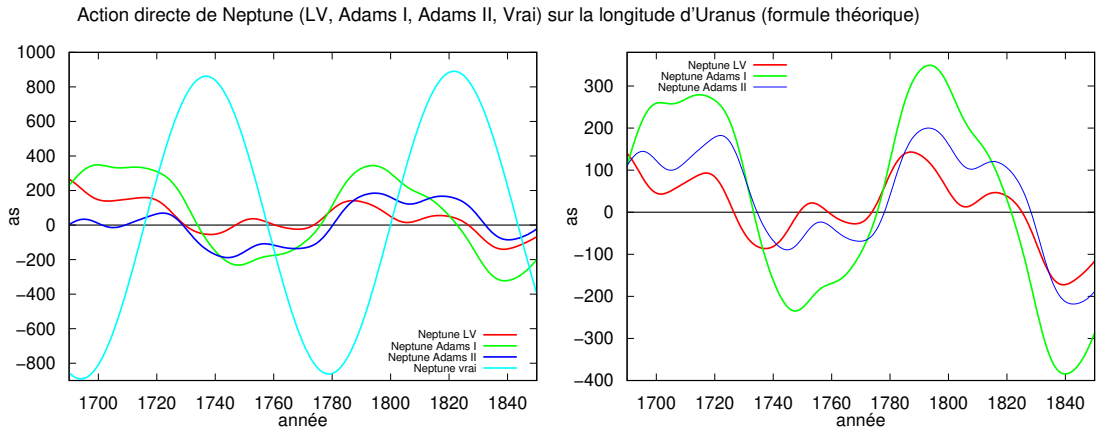


FIGURE 11.4 – Valeurs des perturbations directes exercées sur la longitude vraie d'Uranus quand on reporte dans la formule théorique (équation (11.1)) les valeurs numériques trouvées par Le Verrier, Adams I, Adams II ainsi que les valeurs exactes. Le graphe de droite est identique à celui de gauche avec une échelle verticale réduite et il n'y pas le Neptune vrai

Les valeurs de Le Verrier et d'Adams ont une certaine similitude, mais sont très éloignées des valeurs réelles. La quasi-résonance 1 : 2 apparaît dans le graphe du Neptune réel ; la quasi-résonance 1 : 3 se devine avec l'amplitude plus élevée pour Adams I correspondant à $\alpha = 0.5$ que pour Adams II correspondant à $\alpha = 0.515$, valeur qui s'éloigne un peu de la résonance.

11.2.2.2 Comparaison en utilisant la fonction perturbatrice

On part de la fonction perturbatrice et à partir des données numériques trouvées par les deux savants, on détermine, comme il a été fait pour Jupiter et Saturne au chapitre 3, les perturbations directes exercées sur Uranus par le Neptune de Le Verrier, celui d'Adams et enfin par le vrai Neptune. Pour comparaison, on a ajouté les perturbations directes exercées par Jupiter et Saturne. Le graphe est tracé à la figure 11.5. De la même façon que dans la comparaison précédente, les valeurs de Le Verrier et d'Adams ont une certaine similitude, mais sont très éloignées des valeurs réelles.

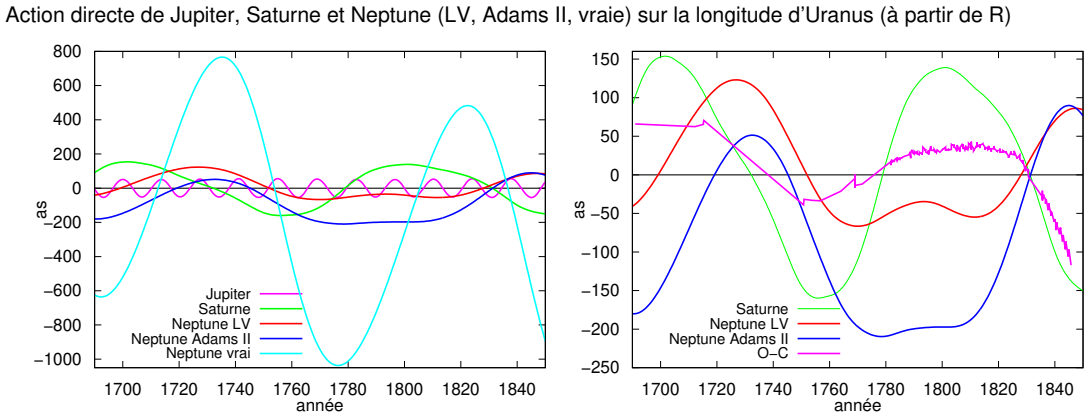


FIGURE 11.5 – Perturbations directes exercées par Jupiter, Saturne, Neptune Le Verrier, Neptune Adams et enfin Neptune vrai sur la longitude vraie d'Uranus. Les expressions sont celles que l'on obtient en partant de la fonction perturbatrice, comme il a été fait au chapitre 3 pour Saturne et Jupiter. Le graphe de droite est identique à celui de gauche avec une échelle verticale réduite. Le terme principal pour Jupiter a pour période 14 ans et celui pour Saturne 105 ans

11.2.2.3 Images des perturbations directes par la transformée de Brown

À titre d'illustration, on peut représenter les transformées des actions directes de Neptune Le Verrier, Neptune Adams1, Neptune Adams2 et du vrai Neptune par la transformée de Brown (voir § 9.3.1), transformation à travers laquelle les corrections apportées aux éléments elliptiques d'Uranus sont quasi éliminées. On voit aussi que la transformée écrase la perturbation du vrai Neptune du fait que $2(n - n') \simeq n$.

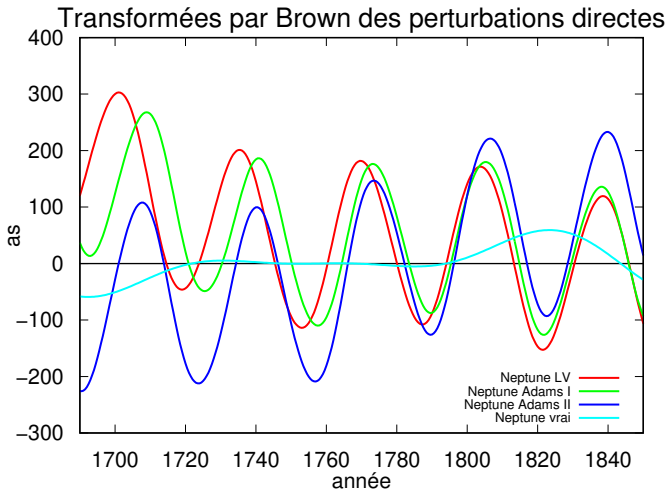


Figure 11.6 – Image des perturbations directes exercées par le Neptune de Le Verrier, ceux d'Adams I et II et enfin le vrai Neptune par la transformée de Brown. Comparer ces tracés à ceux de la fig. 11.4. On remarque en particulier l'écrasement du signal venant du vrai Neptune ainsi que le rapprochement des 3 autres graphes vers l'époque de la conjonction

11.3 Bilan de la recherche d'orbites

On est maintenant en mesure de comparer les différents calculs visant à déterminer une orbite pour la planète perturbatrice. On compare les 3 démarches de Le Verrier, Adams et INPOP, d'abord pour le calcul d'orbites circulaires, puis pour la recherche d'orbites elliptiques.

11.3.1 Orbites circulaires

Reprenons les calculs des chapitres précédents, où l'on a cherché des orbites circulaires pour la planète troublant Uranus dans les 3 contextes suivants :

1. En reprenant le calcul effectué par Le Verrier pour différentes valeurs de α, en faisant $e' = 0$ dans ses équations (voir § 5.5). (Ce calcul n'a pas été fait par Le Verrier).
2. En utilisant INPOP (voir § 8.8.2).
3. En refaisant le calcul de 1843 d'Adams avec 20 valeurs du rapport des demi-grands axes (voir § 10.2.2.2).

On rappelle dans le même ordre (1,2,3) les constations effectuées pour chacune de ces situations :

Le Verrier On a vu, en utilisant la méthode de Le Verrier avec $e' = 0$, que l'on ne pouvait guère dépasser la valeur $\alpha = 0.60$, sous peine de tomber sur des résultats n'ayant aucune signification physique. On a observé une certaine stabilité dans les longitudes prédites au 1/1/1847 : toutes les valeurs sont comprises entre 297 et 309°, mais ces valeurs sont assez éloignées de la valeur exacte 327°. La valeur optimale s'obtenait pour $\alpha = 0.58$ quand on s'appuyait sur les longitudes héliocentriques et $\alpha = 0.54$ quand on s'appuyait sur les longitudes géocentriques. On retrouve le fait, déjà observé à de nombreuses reprises, que les résultats dépendent sensiblement des méthodes choisies.

INPOP Les méthodes utilisées par Le Verrier et Adams retournent les paramètres de la planète perturbatrice, en particulier la masse. Avec INPOP, il faut fournir un jeu de paramètres complet pour la planète perturbatrice : ici $e' = 0$, $i' = 0$ et a' paramètre principal. Le calcul a été fait pour deux valeurs de la masse : $m' = m_{Ura}$ et $m' = 2m_{Ura}$.

Il n'y a pas de limitation a priori pour le rapport des demi-grands axes, car le programme procède par intégration numérique, sans dénominateurs et donc sans petits diviseurs.

Pour $m' = m_{Ura}$, on a constaté à la figure 8.2 la cohérence des résultats : la longitude vraie est une fonction décroissante du rapport a_{Nep}/a_{Ura} et la bonne valeur (327°) était atteinte pour la bonne valeur (1.57) du rapport des demi-grands axes.
Avec INPOP on obtient une très bonne solution en se limitant à des orbites circulaires, mais il faut avoir un ordre de grandeur correct pour la masse.

Avec $m' = 2m_{Ura}$, voir figure 8.5, on obtient le même type de courbes, mais légèrement décalées : le bon emplacement (327°) s'obtient pour $\alpha = 1.62$, i.e. une distance plus grande, ce qui est cohérent pour une masse plus élevée.

Pour trancher, il faut faire varier m' et α simultanément et déterminer pour quelle valeur du couple (m', α) le minimum du résidu est atteint. Le calcul a été fait au § 8.2. Et à partir du couple optimal trouvé (très voisin en fait du couple exact), on peut envisager éventuellement une orbite elliptique, voire une orbite inclinée sur l'écliptique.

Adams On peut appliquer la méthode qu'Adams a utilisée pour sa solution de 1843 pour toute valeur de α, sans tomber sur des valeurs aberrantes quand on se rapproche de la valeur critique 0.63. Malheureusement, comme on l'a vu au § 10.1, la méthode souffre d'une grave incohérence théorique : Adams forme 4 équations à 2 inconnues seulement ; il combine ces 4 équations pour en former deux, qu'il résout, mais en reportant les valeurs trouvées, les quatre équations de départ ne sont pas satisfaites. D'autre part, on a vu qu'avec la démarche retenue par Adams, on tombait quasiment toujours sur la même valeur de la longitude de l'époque de Neptune et sur les mêmes résidus quand on reportait les valeurs finales dans les 21 équations de condition. On a vu que le problème venait du nombre insuffisant d'inconnues intervenant dans les équations de condition. En conséquence, il est impossible avec cette méthode de mettre en évidence une valeur optimale pour le rapport des demi-grands axes. Il ne semble pas qu'Adams ait eu conscience de ce problème, car, pour se rendre compte de l'incohérence des calculs, il faut avoir appliqué la méthode à plusieurs valeurs de α, ce que n'a pas pu faire Adams.
On a vu à la figure 10.3 que la longitude vraie au 1/1/47 était une fonction quasi linéaire de α, variant de 308° pour $\alpha = 0.49$ à 337° pour $\alpha = 0.68$; la bonne valeur (327°) étant obtenue pour une valeur (0.61) proche de la valeur réelle (0.63) ; mais quel crédit peut-on accorder à un calcul manquant de cohérence interne ?

Conclusion : Dans les 3 méthodes de calcul précédentes, on localise la planète troublante dans la région correcte du ciel, le calcul le plus précis étant bien sûr réalisé avec INPOP, mais il fallait donner une bonne valeur pour la masse. Comment peut-on deviner la masse a priori ? il n'y a pas de loi de Bode pour les masses !
Le calcul avec la méthode d'Adams paraît plus précis que celui de Le Verrier, mais la méthode ne peut pas être justifiée complètement d'un point de vue théorique.
Rappelons aussi, un peu à l'encontre du bon sens, que les calculs n'auraient pas été significativement raccourcis en recherchant dès le début des orbites circulaires, contrairement à ce que suggère Tisserand en conclusion de son étude des calculs de Le Verrier (voir citation p. 369) ; et en plus, ils n'auraient pas abouti à une solution correcte. La raison est la suivante : avec la méthode choisie par Le Verrier (ou par Adams) adaptée à $e' = 0$, il n'y a pas assez de variables ; c'est ce qu'avait constaté Sampson dans sa remarque p. 332.

11.3.2 Orbites elliptiques

Reprenons dans le même ordre les 3 types de calcul :

Le Verrier Le Verrier détermine une première approximation par un balayage sur ε' à partir de 18 équations de condition. Dans un deuxième temps, il affine cette première solution par une interpolation à partir de 33 équations de condition. Il se rapproche ainsi de la valeur correcte du rapport des demi-grands axes, mais sa valeur de départ (0.51) était beaucoup trop éloignée de la valeur réelle (0.63) pour pouvoir accéder à cette valeur réelle par une simple interpolation. Il aurait fallu que Le Verrier extrapole largement en dehors de l'intervalle de travail $0.49-0.53$, ce qui est irréaliste.

INPOP Le traitement avec INPOP est plus complexe si l'on autorise une excentricité non nulle : en effet, si on cherche une solution avec une excentricité non nulle, il faut aussi donner une valeur initiale à la longitude du périhélie.

On peut imaginer deux approches :

1) En utilisant une famille de courbes dépendant de e' ainsi qu'un balayage sur ε'

Si pour chaque valeur du rapport des demi-grands axes, l'on considère 5 excentricités et 8 valeurs du périhélie, ce qui semble plutôt un minimum, cela multiplie chaque calcul de base (i.e. un balayage sur la longitude de Neptune avec des éléments fixés) par un facteur $5\times 8 = 40$, ce qui est naturellement totalement irréalisable pour l'époque de Le Verrier. Les calculs actuels, effectués avec TRIP demandent environ une semaine pour chaque choix du rapport du demi-grand axe, chaque choix traitant 40 valeurs du couple (e', ϖ') et effectuant un balayage sur ε' de 2° en 2°.

On a constaté figure 8.13 qu'avec un rapport des demi-grands axes égal à 1.6, l'écart pour la position le jour de la découverte selon la valeur choisie pour ϖ' aurait pu s'élever jusqu'à 60° ; pour un rapport égal à 1.8 (fig. 8.14), cet écart aurait pu s'élever jusqu'à 55° et enfin jusqu'à 60° pour un rapport égal à 2 (fig. 8.15). Heureusement ϖ' n'est en fait pas une variable aléatoire – J. Herschel [Herschel, 1846] qualifie même e' et ϖ' de *variables d'ajustement* dans le contexte du calcul de Le Verrier ou d'Adams – et dépend fortement de la position relative de Neptune et d'Uranus, en particulier de la date de conjonction héliocentrique (voir la discussion faite au § 8.8).

On constate à la figure 8.13 que pour $\alpha = 1.6$, la bonne position se trouve avec une excentricité faible et un ϖ' assez indifférent, ce qui est logique. Pour $\alpha \simeq 1.6$, 'la' meilleure solution est donc une orbite proche d'un cercle.

Pour $\alpha = 1.8$ (fig. 8.14), la bonne solution se trouve avec $e' \simeq 0.11$ et $\varpi' \in [270°, 315°]$; valeurs qui sont proches de la solution finale de Le Verrier : $\alpha = 1.887$, $e' = 0.107$ et $\varpi' = 284°$.

Pour $\alpha = 2$ (fig. 8.15), l'écart minimum est obtenu avec $e' = 0.15$ et $\varpi' \in [270°, 315°]$ et l'écart serait sûrement encore réduit en augmentant l'excentricité, mais on serait néanmoins tombé à une dizaine de degrés de la bonne position.

Quand on augmente α, il faut augmenter aussi l'excentricité et placer le périhélie au voisinage de la conjonction héliocentrique.

Cette première approche, avec balayage sur 3 paramètres aurait été totalement irréalisable à l'époque de Le Verrier et d'Adams.

2) En déterminant e' au cours du calcul

Il faut former des équations qui permettent de déterminer ε' puis e'. C'est ce qui a été fait au § 8.1.3. Mais il faut faire attention à la convergence des calculs. On a vu que l'on ne pouvait pas ajuster tous les paramètres de Neptune dans un même calcul ; il faut le faire par étapes.

Adams Adams choisit une valeur pour le rapport des demi-grands axes : 0.5 pour l'hypothèse I et 0.515 pour l'hypothèse II, mais ces valeurs restent inchangées au cours du calcul. Au vu de ces deux résultats, par ce qui semble une simple règle de 3, suivie d'une extrapolation, Adams postule [16] que la vraie valeur devrait être autour de 0.574, mais on a vu qu'il avait désavoué plus tard cette extrapolation hardie.

11.3.3 Conclusion

On peut dire que, d'une certaine manière, Le Verrier et Adams partaient battus pour la recherche d'une solution **indiscutable**, i.e. avec **tous** les paramètres corrects car :
– avec le choix malheureux de s'appuyer sur la loi de Bode, la position annoncée est correcte, mais l'orbite a une trop grande excentricité.
– avec le choix correct ($\alpha = 0.63$), les calculs divergent.

Avec INPOP, on peut commencer par chercher des orbites circulaires en ajustant α et m' simultanément, et à partir d'une solution optimale, glisser vers la bonne solution elliptique, démarche en grande partie mise en œuvre au chapitre 8.

16. Voir le détail au § 10.3.8.3.

Cinquième partie

RÉFLEXIONS SUR LA MÉTHODE DE LE VERRIER POLÉMIQUES

Chapitre 12

RÉFLEXIONS SUR LA MÉTHODE DE LE VERRIER

Objectifs

Présentation On donne quelques réflexions, sur la méthode utilisée par Le Verrier, sur son utilité et sur son degré de généralité.

Sommaire

12.1 Quel est le degré de généralité de la méthode employée par Le Verrier ? . . . **405**
12.1.1 Problème direct, problème inverse . . . 405
12.1.2 Problème direct . . . 405
12.1.3 Problème inverse . . . 406
12.1.4 Chance de Le Verrier, malchance de Bouvard . . . 407
12.1.5 Pourquoi les recherches de Pluton et de Vulcain ont-elles été des échecs ? . . . 408
12.1.6 Calculs de Delaunay pour la Lune . . . 411
12.1.7 Auxiliaires de calcul modernes . . . 411
12.2 Utilité de refaire les calculs de Le Verrier . . . **412**
12.2.1 Les calculs de Le Verrier sont-ils reproductibles ? . . . 412
12.2.2 Importance de refaire pas à pas certaines démarches de Le Verrier . . . 413
12.2.3 Seule véritable erreur de Le Verrier . . . 413
12.3 Calculs discutables de Le Verrier . . . **413**
12.3.1 Calculs théoriquement discutables . . . 413
12.3.2 Situations délicates . . . 415
12.4 Innovations de Le Verrier . . . **416**
12.4.1 Premier mémoire de Le Verrier, méthode de Le Verrier . . . 417
12.4.2 Méthode d'interpolation . . . 417
12.4.3 Comètes . . . 417
12.4.4 Problème inverse . . . 417
12.5 Utilité des théories planétaires . . . **418**
12.5.1 Plan de Le Verrier, présenté au ministre, pour l'astronomie analytique . . . 418
12.5.2 Est-il vraiment nécessaire d'avoir des théories valables sur des temps très longs ? . . . 419
12.5.3 Reprise des calculs de Le Verrier par Aimable Gaillot . . . 419

12.1 Quel est le degré de généralité de la méthode employée par Le Verrier ?

12.1.1 Problème direct, problème inverse

Quand on considère un calcul de perturbations, il convient de distinguer deux types de problèmes :
• Le calcul des perturbations exercées par une planète connue sur une planète particulière : c'est le problème direct.
• La localisation d'une planète inconnue à partir des perturbations qu'elle exerce sur une planète connue : c'est le problème inverse.

Voir plus de détail sur la notion de problème inverse à l'encadré 1, p. 4.

12.1.2 Problème direct

12.1.2.1 Perturbation exercée par une planète connue sur une planète donnée

Le Verrier étudie une planète particulière [1] (P) et l'action d'une autre planète (P') sur la planète étudiée. Il développe la fonction perturbatrice de (P') sur (P) en série de Fourier jusqu'à un degré fixé par le niveau de précision souhaité. À partir de ce développement et en s'appuyant sur les équations de Lagrange, il obtient les perturbations exercées par (P') sur (P).
Dans le détail, Le Verrier décompose l'étude globale d'Uranus en trois problèmes à 3 corps :

Soleil+Uranus+Saturne ; Soleil+Uranus+Jupiter ; Soleil+Saturne+Jupiter

Il obtient ainsi les perturbations sensibles exercées sur la longitude héliocentrique d'Uranus par l'ensemble des planètes connues du Système solaire. À partir des éléments elliptiques admis pour Uranus, il peut ainsi former des éphémérides d'Uranus, en tenant compte des perturbations qu'il vient de calculer. Concrètement, cela consiste à former des tables de valeurs numériques pour les coordonnées héliocentriques puis équatoriales à des instants régulièrement espacés, ce qui permet de déterminer, par interpolation, les positions d'Uranus, à tout instant.
Le Verrier va progressivement appliquer la méthode de la double interpolation [2], mise en œuvre pour Mercure (en 1842) et perfectionnée pour Uranus (en 1845), à chacune des planètes du Système solaire, grand œuvre qu'il achèvera avec la théorie de Neptune en août 1877, un mois avant sa mort. Les calculs pour les différentes planètes sont largement indépendants les uns des autres, mais suivent la même démarche, ce qui lui a permis de gagner en rapidité au fur et à mesure qu'il accroissait le nombre de planètes étudiées, et ce d'autant plus, qu'il disposait à partir de 1861 – début de la collaboration avec Gaillot – de plus en plus de calculateurs permanents.

12.1.2.2 Comment détermine-t-on les éléments orbitaux d'un astre connu ?

Il y a deux situations :
• On a affaire à un astre nouveau : comète ou petite planète. Il faut disposer au minimum de 3 observations, aussi espacées dans le temps que possible. La méthode de Gauss (ou d'Olbers s'il s'agit d'une comète) permet de déterminer une orbite provisoire pour l'astre.
• On a affaire à un astre déjà découvert, mais dont l'orbite n'est pas connue avec suffisamment de précision. On accumule des observations (O) que l'on compare aux éphémérides connues (C)

1. En l'occurrence ici Uranus, mais en 1843, c'était Mercure.
2. On rappelle que l'idée initiale de la méthode de double interpolation serait due à Euler, selon les notes bibliographiques de Le Verrier lui-même (Académie de Berlin 1783, p. 59). Cette méthode permet de calculer de façon efficace des valeurs approchées des coefficients de séries trigonométriques doubles ; c'est en fait un calcul déguisé d'intégrales doubles.

pour former les $O - C$. On forme ensuite les équations de condition, qui sont des équations linéaires reliant les corrections (δa, $\delta \varepsilon$, δe....) à apporter aux éléments orbitaux admis au moment des calculs afin de diminuer les résidus (i.e. les $O - C$), (voir encadré 10, p. 137). Tobias Mayer [Wepster, 2010] semble avoir été le premier à résoudre un tel système, redondant et numériquement approché, en proposant une méthode adaptée à son problème, à savoir la libration de la Lune.
Depuis Legendre et Gauss, qui se disputèrent la paternité de la méthode, la démarche universelle pour résoudre de tels problèmes s'appuie sur la méthode des moindres carrés (voir encadré 13, p. 211). Cette méthode est extrêmement gourmande en calculs, et est donc impossible à mener à bien si le nombre d'équations est élevé et si l'on ne dispose pas d'outils de calcul rapides, ce qui était bien sûr la situation à l'époque de Le Verrier. Dans ce cas, il faut effectuer un prétraitement pour réduire le nombre d'équations ; les techniques sont variées : regrouper des observations voisines en en prenant la moyenne, sélectionner des observations aussi régulièrement espacées dans le temps que possible, sélectionner les équations qui paraissent les plus fiables, sélectionner les observations postérieures à une certaine date... Bouvard, Lalande, Adams et Le Verrier ont été confrontés à de tels problèmes et ont effectué des choix adaptés à leurs démarches. Par exemple, Bouvard a dû renoncer à utiliser les observations anciennes d'Uranus ; Adams a calculé les positions d'Uranus à des intervalles réguliers de 3 révolutions synodiques, soit 3.0362 ans ; et Le Verrier a pondéré ses équations de condition en fonction de leur ancienneté.

12.1.3 Problème inverse

12.1.3.1 Détermination d'une planète inconnue à partir des perturbations qu'elle exerce sur une planète connue, ici Uranus

Les irrégularités dans le mouvement d'Uranus ont fait rapidement penser qu'Uranus pouvait être perturbé par une planète extérieure ; il semblerait que ce soit Alexis Bouvard qui ait émis le premier cette hypothèse, oralement, sans trop oser l'écrire (lettre d'Euègne Bouvard à Airy du 6 octobre 1837, citée dans [Airy, 1846]).
L'orbite d'Uranus était donc mal connue, puisque l'on n'avait pas pu tenir compte dans les équations de condition des perturbations exercées par cette planète extérieure.
Pour déterminer les paramètres de cette planète inconnue, Le Verrier ajoute aux perturbations, accessibles, crées par les planètes connues, les perturbations, mises sous forme analytique, crées par cette éventuelle planète inconnue. Il égale les perturbations théoriques aux écarts O−C entre positions observées et positions calculées d'Uranus par les éphémérides à faire évoluer. Le nombre d'équations de condition est en général très élevé, 279 par exemple pour la recherche de Neptune par Le Verrier ; sans outil de calcul, il est humainement impossible de résoudre un tel système par les moindres carrés. Il faut donc limiter le nombre d'équations et la démarche peut être alors discutable.
Combien d'équations sélectionner et lesquelles ?
Par exemple, dans un premier temps, Le Verrier forme 8 équations (§ 5.2.2) à des dates régulièrement espacées dans le temps (14 ans), mais comme les observations brutes n'ont pas eu lieu à des époques régulières, il est amené à faire des interpolations, voire des extrapolations (voir § 4.4.3). À partir de ce premier système, il obtient une masse de 2.11 (avec ses unités) pour la planète perturbatrice, alors que la bonne valeur est de l'ordre de 1.
Il considère ensuite un système de 18 équations (§ 5.2.3), formé à partir des 279, en effectuant quelques moyennes. Après un calcul assez long, il en déduit que la planète perturbatrice ne peut se trouver que dans une zone assez bien délimitée du ciel : il estime avoir la position correcte avec moins de 10° d'incertitude.
Dans un troisième temps (ce qu'il appelle sa deuxième approche, (TAB. 6.2)), il considère 33

équations. Il obtient, après un calcul pénible, mais effectué miraculeusement en moins [3] de 2 mois, la bonne position à 1° près : quelle peut être la marge d'erreur ? C'est tout l'objet du travail, présenté au chapitre 8, qui examine comment le résultat final dépend des hypothèses initiales, en particulier du demi-grand axe de la planète perturbatrice.
Le Verrier s'est aidé de son intuition en donnant des poids ajustés aux différentes observations en fonction de la confiance qu'il accordait à l'observateur. Il s'est par exemple méfié de la première observation de Flamsteed (celle de 1690), en lui affectant un très petit coefficient, alors qu'elle est en fait, excellente pour l'époque. Cette approche, à partir d'équations de condition, peut être généralisée, (voir plus loin, recherche de Pluton (§ 12.1.5.1)), mais a aussi ses limites, comme on le montre au paragraphe suivant.

12.1.3.2 Limites de la méthode employée par Le Verrier

La méthode de Le Verrier (et celles d'Adams) repose sur la résolution d'équations de condition, de la forme $\delta v = O - C$ où δv est la perturbation totale de la longitude la planète :

$$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2 \qquad \text{avec}$$

δv_1 : variation de la longitude de la planète due aux corrections des éléments elliptiques de cette planète
δv_2 : perturbation créée par la planète inconnue.

Dans la première approximation, Le Verrier limite le développement de δv_2 au degré 1 selon les excentricités, puis développe partiellement les expressions trigonométriques afin d'obtenir une expression **linéaire** de δv_2 en fonction de m', $m'h'$ et $m'l'$.
Dans l'approximation finale, Le Verrier retient les termes de degré 2 par rapport aux excentricités ; les coefficients des termes correspondants font intervenir $m'e^2$, $m'ee'$ ou $m'e'^2$ (e étant l'excentricité connue d'Uranus)
Voici comment Le Verrier traite ces termes (*Herschel* p. 201) :

> Elle [la perturbation δv_2] renferme un terme proportionnel à m', un autre proportionnel à $m'e'$; un troisième, enfin, proportionnel à $m'e'^2$. Le terme proportionnel à m' ne changeant rien à la forme des équations de condition, n'apporte aucune nouvelle difficulté théorique [...]. Le terme en $m'e'$, ne dépendant que de $m'h'$ et $m'l'$, ne complique pas non plus la forme des équations [....]. Quant au terme en $m'e'^2$, il ajouterait de grandes difficultés à la résolution des équations, s'il était nécessaire de le conserver.

Le Verrier s'en tire ici en faisant valoir que ce terme en $m'e'^2$ est petit, donc négligeable, et ce faisant, il peut ainsi conserver des équations linéaires.
On voit donc que la démarche de Le Verrier, consistant à utiliser un développement de degré 1 selon les excentricités, ne peut pas se généraliser à toute situation en passant au degré 2. On touche ici à la limite de la méthode utilisée par Le Verrier et Adams.

12.1.4 Chance de Le Verrier, malchance de Bouvard

Le calcul de Le Verrier pour Neptune a bien fonctionné, car d'une part, les écarts $O - C$ étaient assez élevés [4] et d'autre part, les observations couvraient 20 ans avant et après la conjonction Soleil-Uranus-Neptune, circonstance extrêmement favorable. Si les calculs avaient été faits en 1800, la localisation aurait été beaucoup plus douteuse, car durant la période d'observation 1690-1800, l'influence de Neptune est très faible, donc la détection de Neptune aurait été entachée de beaucoup plus d'erreurs ; voir § 8.6 où l'on répond en partie à cette question. C'est le passage à

3. En fait 6 semaines, compte tenu d'une très grande fatigue, causée par ce travail intense, fatigue qu'il signale dans sa lettre à Gautier du 10 septembre 1846 (voir chapitre 2) et qui l'a obligé à rester alité du 15/8 au 30/8/46.
4. C'est bien sûr très relatif, mais les $O - C$ étaient beaucoup plus importants que pour la recherche de Pluton par exemple.

l'opposition qui augmente les résidus, qui accroît le décalage avec la théorie de Bouvard [Bouvard, 1821b] et qui, in fine, lance les calculs d'Adams et de Le Verrier.
Bouvard a eu moins de chance, car ses données se terminaient en 1821, date de la conjonction et, durant la période 1800-1821, Uranus était constamment accéléré par Neptune, ce qui a rendu impossible de faire concorder les observations anciennes (peu perturbées par Neptune) et les modernes (accélérées par Neptune). En ne retenant que les observations modernes, il ne pouvait pas aboutir à une orbite longtemps satisfaisante car, après 1822, Uranus a été freiné par Neptune, d'où des avances grandissantes des éphémérides de Bouvard par rapport aux positions réelles d'Uranus, avances constatées rapidement.

12.1.5 Pourquoi les recherches de Pluton et de Vulcain ont-elles été des échecs ?

12.1.5.1 Pluton

Le succès remporté par Le Verrier suscite des vocations pour la recherche d'une planète au-delà de Neptune. C'est la réalisation de la prédiction que Le Verrier avait formulée à la fin de *Herschel*, p. 254 :

> Ce succès [découverte de Neptune] doit nous laisser espérer qu'après trente ou quarante années d'observations de la nouvelle planète, on pourra l'employer, à son tour, à la découverte de celle qui la suit dans l'ordre des distances au Soleil.

Deux astronomes au moins [5] ont essayé de mettre en évidence une planète située au delà de Neptune en exploitant les écarts résiduels entre position calculée et position observée
– d'Uranus dans le cas des recherches de Lowell.
– de Neptune dans le cas des recherches de Pickering.

En effet, Lowell, contrairement à Pickering, n'avait pas voulu travailler à partir des résidus sur la longitude de Neptune, car l'on ne disposait de données que sur moins d'une demi-révolution, alors que l'on disposait de données pour Uranus sur près de 3 révolutions.

Lowell [6] retranche des observations d'Uranus les perturbations exercées par Neptune. Il pense avoir mis en évidence des résidus non explicables par des erreurs d'observation. La démarche utilisée par Lowell, assisté de nombreux calculateurs, est très voisine de celle de Le Verrier. Lowell essaie d'exploiter les résidus, infimes, entre les positions calculées d'Uranus et les positions observées. La méthode n'aboutit pas, malgré des années d'efforts, car d'une part, les résidus disponibles sont de l'ordre des erreurs de mesure et d'autre part, Pluton a une masse beaucoup trop faible pour produire des perturbations sensibles sur Uranus.

Pickering [7], le concurrent de Lowell à la course à la 9e planète, part des résidus sur la longitude de Neptune. Pickering élabore une démarche graphique assez complexe, ressemblant en partie à celle de John Herschel. En 1909, il prédit une position à quelques degrés de la position correcte [Pickering, 1909], mais cette prédiction, malgré ses revendications, est en fait le fruit du hasard.

5. Sheehan [Sheehan, 2021] mentionne aussi David Peck Todd (1855−1939) « who tried a graphical method, similar to John Herschel's » and George Forbes (1849−1936), « who speculated the existence of a pair of perturbing planets ».

6. Percival Lowell (1855−1916) était un homme d'affaires américain, mathématicien et astronome, qui avait pensé avoir vu des canaux artificiels sur Mars. Il organisa une recherche intense pour la 9e planète du Système solaire. Pour cela, il fonda le Lowell observatory en Arizona et y initia la recherche qui devait conduire à la découverte de Pluton par Clyde Tombaugh, 14 ans après sa mort.

7. William Henry Pickering (1858−1930), astronome américain, découvreur du satellite Phoébé de Saturne. Il prit une part active à la recherche de la 9e planète.

La planète IX fut finalement découverte en 1930 par Clyde Tombaugh [8] en utilisant une recherche photographique systématique à l'Observatoire de Flagstaff, observatoire fondé en 1894 par Lowell.

12.1.5.2 Vulcain

Le cas de Vulcain est très différent (voir aussi [Laskar, 2017] pour plus de détails). Le Verrier a déjà étudié (en 1842−1843) en détail les mouvements de Mercure [Le Verrier, 1843b] ; il reprend l'étude en 1858−1859 [Le Verrier, 1859b].
Dans cette nouvelle étude, il corrige en particulier légèrement l'avance séculaire du périhélie de Mercure due aux autres planètes : 281″ pour Vénus, 84″ pour la Terre, 152″ pour Jupiter...
En étudiant les passages de Mercure devant le Soleil, événements qui procurent des observations très précises permettant d'améliorer les éphémérides, Le Verrier constate qu'il y a un petit écart entre l'observation et la prévision lors des passages correspondant au nœud descendant (passages qui se produisent en mai). Il écrit des équations de condition relatives à la correction du nœud descendant ; la résolution, très laborieuse, donne pour la correction annuelle de la longitude du nœud $\delta\theta = -1''.5$ et conduit à la relation suivante entre la correction séculaire [9] supplémentaire $(\delta e)'$ de l'excentricité et la correction séculaire supplémentaire $(\delta\varpi)'$ de la longitude du périhélie : $2.72(\delta e)' + (\delta\varpi)' = 39''.2$; mais les équations sont telles qu'il n'est pas possible de dissocier les deux corrections. Alors Le Verrier forme à partir des 260 observations méridiennes disponibles de Mercure de nouvelles équations de condition ; il trouve $\delta\theta = 12''.4$. Devant cette discordance, Le Verrier prend la valeur moyenne pour $\delta\theta$ et ajoute un paramètre τ, ce qui permet de gérer dans un même calcul les passages et les observations méridiennes :

$$\delta\theta = 5''.5 + \tau.$$

Il obtient à partir de ces nouvelles équations la relation :

$$2.72(\delta e)' + (\delta\varpi)' = 38''.3$$

Comment expliquer ces corrections séculaires supplémentaires $(\delta e)'$ et $(\delta\varpi)'$?
Le Verrier met hors de cause les observations et ne voit comme explication possible que l'imprécision sur les masses de Vénus (surtout) et (éventuellement) de la Terre ; il appelle $1+\nu'$ le facteur correctif pour la masse de Vénus et $1+\nu''$ celui pour la Terre ; ils doivent satisfaire la relation $288''\nu' + 87''\nu'' = 38''.3$; comme la masse de la Terre est bien connue (grâce à la Lune), il faudrait prendre $\nu' = 0.1$ au moins, c'est à dire augmenter la masse de Vénus de 10%, ce qui est considérable et inacceptable, car une telle augmentation de la masse de Vénus aurait des effets visibles sur la Terre et serait aussi en contradiction avec la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique. Donc, augmenter la masse de Vénus, compliquerait encore plus les choses. Alors Le Verrier sort son arme favorite [10] : une planète inconnue qui perturbe le mouvement de Mercure ; cette éventuelle planète ne peut être située qu'entre le Soleil et Mercure. Le Verrier écrit les perturbations supplémentaires que créerait une telle planète sur Mercure :

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \tfrac{1}{2}\left[B + C\frac{e}{e'}\cos(\varpi' - \varpi)\right] mn' \quad ; \quad \frac{de'}{dt} = \tfrac{1}{2}Ce\sin(\varpi' - \varpi)mn' \tag{12.1}$$

en notant avec des ' les éléments de Mercure et sans indice, ceux de la planète inconnue ; les coefficients B et C dépendant uniquement du rapport α des demi-grands axes des deux planètes.

8. Clyde Tombaugh (1906−1987), astronome américain. Il fut engagé en 1929 par le Lowell observatory pour conduire une recherche photographique systématique de la 9e planète du Système solaire.

9. Le Verrier utilise la variation annuelle, mais l'histoire a retenu les variations séculaires pour ce problème. Le Verrier utilise les notations e' et ϖ', qui sont ambiguës ; on a donc choisi de noter $(\delta e)'$ et $(\delta\varpi)'$ les corrections séculaires supplémentaires.

10. Expression utilisée par William Sheehan et Richard Baum dans "*In search of planet Vulcan*" [Baum, 1997].

On rappelle qu'il faut satisfaire l'équation [11] $2.72\frac{de'}{dt} + \frac{d\varpi'}{dt} = 38''.3$.
Devant l'indétermination (une équation, deux inconnues), Le Verrier envisage une planète perturbatrice d'excentricité faible ($e \simeq 0$), ce qui simplifie les équations (12.1) en

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \tfrac{1}{2}Bmn' \qquad \text{et} \qquad \frac{de'}{dt} = 0 \tag{12.2}$$

Par exemple, pour $\alpha = 0.4$, il trouve $\frac{m}{m'} = 1.29$ et pour $\alpha = 0.6$, il trouve $\frac{m}{m'} = 0.35$.
Le Verrier ajoute pour consolider sa démarche :

> D'ailleurs, s'il s'agit d'un groupe d'astéroïdes, on doit croire que leurs périhélies occupent des positions variées dans l'espace, et qu'ainsi les termes en $\sin(\varpi' - \varpi)$ et $\cos(\varpi' - \varpi)$ peuvent se détruire les uns les autres : tandis que le premier terme (B) de la valeur de $\frac{d\varpi'}{dt}$ est toujours positif, quelle que soit l'orientation de l'orbite.

Donc, la correction du périhélie de Mercure est un peu plus compliquée que ce qu'on l'on présente habituellement : il y a en fait une correction combinée de e' et ϖ', mais qui se transforme, dans la lettre même de Le Verrier à Faye [Le Verrier, 1859a] en la seule correction de $38''$ du périhélie, la correction sur e' étant passée sous silence ; voici ce que Le Verrier écrit :

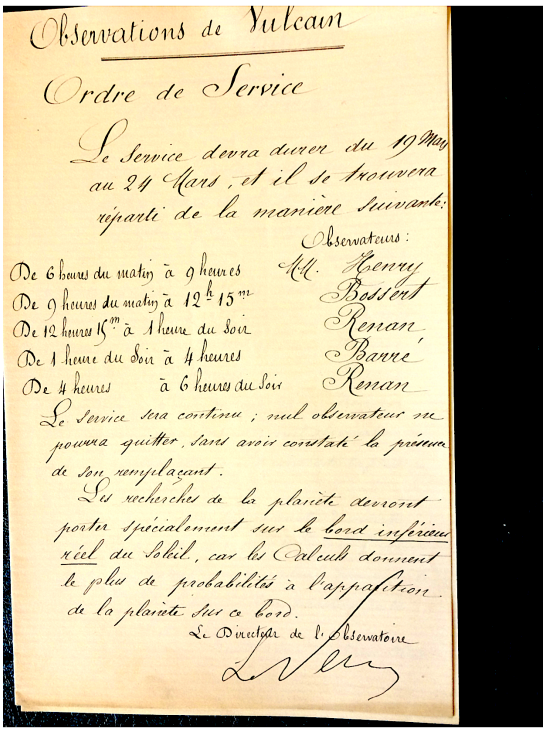
> Mais, ce qui est remarquable, c'est qu'il a suffi d'augmenter de 38 secondes le mouvement séculaire du périhélie pour représenter toutes les observations des passages à moins d'une seconde près, et même la plupart d'entre elles à moins d'une demi-seconde.

Cette situation est donc totalement différente de celle d'Uranus, où l'observable était la longitude d'Uranus, car ici, l'observable est le décalage, très faible, du premier contact au moment d'un passage devant le Soleil en mai. Le Verrier a clairement observé ces passages de Mercure devant le Soleil, comme on peut en juger avec la description qu'il en donne dans la leçon 13 présentée à la Sorbonne (§ C.3.2).
Comme Le Verrier pense éventuellement à une ceinture d'astéroïdes intramercurielle pour expliquer l'avance du périhélie, voici ce qu'il écrit dans cette même lettre du 12 septembre 1859 à Hervé Faye [Le Verrier, 1859a] :

> Dans tous les cas, comme il se pourrait qu'au milieu des astéroïdes il en existât quelques-uns de plus gros que les autres, et qu'on n'aurait pas d'autre moyen d'en constater l'existence que par l'observation de leurs passages devant le disque solaire, la discussion présente devra confirmer les astronomes dans le zèle qu'ils mettent à étudier chaque jour les apparences de la surface du Soleil. Il est fort important que toute tache régulière, quelque minime qu'elle soit, et qui viendrait à paraître sur le disque du Soleil, soit suivie quelques instants avec la plus grande attention, afin de s'assurer de sa nature par la connaissance de son mouvement.

Donc, contrairement à son assurance après ses calculs pour la détermination de Neptune, Le Verrier s'en remet beaucoup aux observations pour la détection de la planète inconnue, notamment celles effectuées durant les éclipses de Soleil : voir l'ordre de service édicté par Le Verrier, fig. 12.1.
De nos jours, la cause de cette avance est bien connue : c'est un effet de la relativité générale, et cette explication était naturellement totalement inimaginable à l'époque de Le Verrier. Mais, comme quoi, les tenants d'une modification de la loi de gravitation universelle pour expliquer des anomalies gravitationnelles : ajout d'une force en $1/r^3$, changement de l'expression loin (ou près) du Soleil, force dépendant de la nature des corps... n'avaient pas complètement tort sur le principe d'un changement de cette loi de gravitation ; mais il restait à déterminer la nature de ce changement. Jacques Laskar conclut [Laskar, 2017] : « Il fallait donc bien se résoudre cette fois-ci à changer la loi de gravitation ».

11. Qui relie les corrections séculaires supplémentaires, en sus de celles, connues, crées par les autres planètes.


Observations de Vulcain

Ordre de Service

Le Service devra durer du 19 Mai au 24 Mars, et il se trouvera réparti de la manière suivante :

Observateurs :

De 6 heures du matin à 9 heures — MM. Henry
De 9 heures du matin à 12h 15m — Bossert
De 12 heures 15m à 1 heure du soir — Renan
De 1 heure du soir à 4 heures — Banré
De 4 heures à 6 heures du soir — Renan

Le Service sera continu ; nul observateur ne pourra quitter, sans avoir constaté la présence de son remplaçant.

Les recherches de la planète devront porter spécialement sur le bord inférieur réel du Soleil, car les Calculs donnent le plus de probabilités à l'apparition de la planète sur ce bord.

Le Directeur de l'Observatoire

Figure 12.1 – On peut observer ci-contre un exemple de la façon dont Le Verrier s'adresse au personnel chargé de la surveillance pour Vulcain. C'est le billet mettant en demeure son équipe de surveiller Vulcain. Le Verrier ne connaît pas l'expression 'note de service', mais seulement 'ordre de service'.
Le texte n'est pas écrit par lui ; il l'a seulement signé.
Contrairement à ce qui s'est passé lors de la prédiction de la localisation de Neptune, les calculs théoriques ne lui permettent pas de localiser la planète perturbatrice. Il s'en remet donc aux observateurs.

12.1.6 Calculs de Delaunay pour la Lune

Quant à Delaunay, son approche a été radicalement différente. Il a utilisé un formalisme hamiltonien. Le principe très schématique est le suivant : l'hamiltonien dépend, d'une part de variables d'action associées au demi-grand axe, à l'inclinaison sur l'écliptique et à l'excentricité et d'autre part, de variables angulaires dépendant des anomalies moyennes. Le principe est de faire des changements de variables (dits canoniques) pour éliminer les unes après les autres les variables angulaires. Ainsi, pour éliminer une variable angulaire, du type $a\ell + b\ell' + c\varpi + d\varpi'$ où a, b, c, d sont des entiers, ℓ, ℓ' les anomalies moyennes, on doit faire un changement de variables canonique. Comme il y a 324 termes périodiques de ce type dans le hamiltonien de Delaunay (selon Clemence et Brouwer, [Brouwer, 1961]), il faut [12] 500 changements de variables canoniques, travail titanesque et très ingrat. Une fois tous ces changements effectués, les dernières variables d'état sont des constantes et les dernières variables angulaires sont des fonctions linéaires du temps. Mais ensuite, il faut reporter ces valeurs finales dans les variables utilisées successivement, autre travail titanesque. Delaunay a mis 20 ans à faire ce travail et celui-ci n'était pas complètement achevé à sa mort en 1872 (voir aussi [Le Lay, 2016]). Depuis, on peut obtenir rapidement un résultat analogue à l'aide du logiciel TRIP et de transformations de Lie, plus faciles à implanter et à interpréter.

12.1.7 Auxiliaires de calcul modernes

Avec un outil de calcul moderne comme TRIP [Laskar, 1988-2021], mis au point à l'IMCCE par Jacques Laskar et Mickaël Gastineau, le calcul de Delaunay peut être effectué en quelques heures ! Il en est de même des calculs de Le Verrier ou d'Adams : une fois programmés, les calculs sont très rapides et permettent en plus de tester des situations avec différents jeux de

12. L'augmentation tient au fait, qu'en éliminant un terme périodique d'un certain ordre, on fait apparaître des termes périodiques d'ordre supérieur, qu'il faut éliminer à leur tour !

paramètres, ce qui a été fait au chapitre 8.
Pour ses premiers travaux jusqu'aux calculs pour localiser Neptune, Le Verrier a effectué beaucoup de calculs numériques. C'est un peu moins vrai après, car, une fois installé à l'Observatoire, il a progressivement disposé de plusieurs calculateurs, ce qui lui a permis d'achever son travail exhaustif sur les théories des planètes du Système solaire. On rappelle que le Bureau des Longitudes a utilisé pour son annuaire les éphémérides de Le Verrier-Gaillot jusqu'en 1984 [Berthier, 2021].

12.2 Utilité de refaire les calculs de Le Verrier

12.2.1 Les calculs de Le Verrier sont-ils reproductibles ?

Lorsque l'on veut valider une loi physique, comme la loi de Mariotte ou le principe d'Archimède, on procède à des expériences en faisant varier les paramètres du système étudié et en confrontant les résultats observés aux résultats prévus par la théorie en cours de test.
De façon analogue, on peut examiner si les calculs de Le Verrier sont reproductibles. Comme pour toute expérience physique, il y aura des différences numériques, dues à des outils de calcul différents, mais est-ce que les résultats finaux obtenus avec les outils de calcul modernes concordent suffisamment avec les résultats de Le Verrier ?
Presque tous les calculs de Le Verrier ont été refaits dans cette thèse, en suivant scrupuleusement sa méthode : fonction perturbatrice, équations de condition, résolution de ses équations de condition... et les valeurs trouvées avec TRIP sont très proches de celles obtenues par Le Verrier. Cela a été possible car Le Verrier décrit en détail ses méthodes de calcul : il donne dans ses manuscrits tous les éléments pour reproduire ses calculs. Il faut parfois fouiller un peu, avant de trouver les indications ou les données nécessaires, mais il n'y a pas vraiment de connaissances tacites à posséder pour aller au bout des calculs, il faut juste connaître les manipulations algébriques basiques (voir [Collins, 2010]).
Signalons quand même qu'à certains endroits, la méthode utilisée ne se devine qu'en examinant les valeurs numériques successives calculées par Le Verrier : c'est ce qui s'est passé par exemple pour la détermination des erreurs d'observations avec un pas de 7 ans (voir § 4.4.3).
J'ai constaté un oubli important : l'absence des expressions théoriques qu'il utilise pour calculer la perturbation δr du rayon vecteur, alors qu'il donne les expressions correspondantes pour la perturbation δv de la longitude. Il utilise pour la deuxième approximation quelques valeurs numériques pour δr, mais ces valeurs numériques ne correspondent pas aux formules classiques (Laplace, Somerville), voir § 7.2.2. A-t-il choisi une voie moins classique pour le calcul des perturbations du rayon ?
Autre absence : Le Verrier affirme (lettre du 28 juin 1846 adressée à Airy, [Airy, 1846]) à G. B. Airy que les nouveaux éléments qu'il vient de trouver pour Uranus corrigent aussi le rayon vecteur. On a déjà signalé (§ 7.1) que, malgré une recherche attentive, la vérification de la correction du rayon vecteur ne figure pas dans les manuscrits.

Rappelons qu'en comparaison, les manuscrits d'Adams ne comportent pratiquement que des opérations (voir un extrait fig. 11.1), et ils sont bien difficiles à exploiter. Sampson [Sampson, 1904] a eu un grand mérite de mettre de l'ordre et de la chronologie dans cet ensemble touffu d'opérations.

12.2.2 Importance de refaire pas à pas certaines démarches de Le Verrier

Il est parfois indispensable de reprendre les calculs dans leur intégralité pour en comprendre leur utilité ou leur importance ou bien quelquefois leur complexité inutile. Ces aspects peuvent ne pas apparaître avec une lecture superficielle.
Une démarche de ce type se présente lors de la première approche. Le Verrier forme 18 équations de condition (4.17) aux inconnues les corrections à apporter aux 4 éléments elliptiques d'Uranus. Le Verrier détermine ces corrections en fonction des erreurs d'observation : il exprime les 4 inconnues δn, δe, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$ en fonction des erreurs P, Q, R, S d'observation à 4 dates données. Cette substitution peut paraître de peu d'intérêt ; en fait, à force de manipuler ces équations, on voit que l'on remplace 4 inconnues que l'on ne sait pas encadrer par 4 inconnues dont on connaît des bornes : c'est un progrès énorme, mais difficile à apprécier avant d'avoir refait en détail tous les calculs. On a vu (§ 9.2) que Liais n'avait pas du tout compris cette substitution. On a vu aussi au § 4.4.1.6 comment refaire un calcul de longitude héliocentrique, puis géocentrique à partir des tables de Bouvard d'une part et des formules de Le Verrier d'autre part ; et la comparaison des deux calculs est très intéressante, mais il faut les avoir faits tous les deux intégralement.
En reprenant pas à pas la démarche de Le Verrier, on peut constater que certains calculs sont inutiles, par exemple la détermination des racines d'une équation du dixième degré (voir § 5.2.4.2), ou bien dans le cahier n° 4 des manuscrits le calcul de coefficients de Laplace pour 21 valeurs du rapport des demi-grands axes ; est-ce que Le Verrier avait vraiment l'intention de faire la série complète de calculs [localisation de la planète perturbatrice] pour ces 21 valeurs du rapport des demi-grands axes ? (voir une discussion au § 5.4).

12.2.3 Seule véritable erreur de Le Verrier

La seule erreur significative trouvée dans les calculs de Le Verrier se situe en toute fin de calcul, au cours de la dernière interpolation. L'erreur n'est pas énorme, mais aurait affecté le commentaire systématiquement ressassé au sujet de la découverte de Neptune : "Le Verrier a placé la planète inconnue à **moins** de 1° de la position correcte" ; en fait, au lieu d'annoncer une erreur de $52'$, Le Verrier aurait dû annoncer une erreur de $1°11'$ (voir § 6.2.5).

12.3 Calculs discutables de Le Verrier

On peut reprendre l'ensemble des calculs de Le Verrier afin d'examiner leur caractère de reproductibilité, mais on peut aussi examiner si certains de ces calculs peuvent être considérés comme discutables.
Le dilemme permanent de Le Verrier est de trouver un compromis entre la précision et la longueur des calculs.
On va séparer dans les deux paragraphes suivants les calculs pour lesquels la méthode est discutable théoriquement et ceux pour lesquels les choix sont un peu arbitraires et auraient pu être autres.
Nuançons tout de suite, il n'y a aucun reproche majeur à faire à Le Verrier, contrairement à Adams (voir § 10.2.2.3).

12.3.1 Calculs théoriquement discutables

Interpolations Pour traiter ses données, Le Verrier procède à de nombreuses interpolations ainsi qu'à de nombreuses moyennes, ce que fait aussi Adams. Jusqu'à quel point on ne dénature pas les données ? Biot ([Biot, 1847b] 4e et 5e article) a testé sur un des calculs de

Le Verrier l'effet d'une telle interpolation et n'a pas trouvé à cette occasion de modification importante, et il n'a pas trouvé de différences sensibles dans les résultats, ce que je confirme. Il est difficile de faire des simulations. Ce qui est clair, c'est que si on applique les moindres carrés aux 279 équations prises individuellement, on obtient des résultats assez différents de ceux obtenus par Le Verrier (voir § 4.3.1.3).
On a vu que pour établir des éphémérides régulières avec un pas de 7 ans, Le Verrier avait procédé à des interpolations savantes ; les valeurs trouvées par Le Verrier diffèrent sensiblement de celles qu'il aurait pu trouver en utilisant une interpolation graphique (voir § 4.4.3).

Minimum d'une fonction Du fait d'une difficulté mathématique importante, Le Verrier est amené à faire un calcul discutable dans l'approximation finale. Il part de la solution trouvée à l'issue de la première approximation, à savoir $\alpha = 0.51$ et $\varepsilon' = 252°$, et il essaie de se rapprocher de la solution en posant $\alpha = 0.51 + 0.02\gamma$ et $\varepsilon' = 252 + 18\mathcal{C}$. Il forme les 33 équations de condition (TAB 6.2) pour 6 valeurs du couple $(\gamma, \mathcal{C})$. Il remplace le 1er membre de chaque équation par un polynôme quadratique, ce qui lui permet de gérer les 6 couples particuliers en une seule opération. Il forme la somme C_t des carrés des premières membres de ses 33 équations (fig. 6.9). Malheureusement, C_t est un polynôme de degré 4 ; il forme alors le polynôme quadratique Σ qui coïncide avec C_t sur les 6 couples $(\gamma, \mathcal{C})$. Il veut déterminer les extrema de C_t ; en fait il cherche ceux de Σ, avec comme seule justification (*Herschel* p. 233) : « *on peut retrancher, sans grande erreur, les termes de degré 3 et 4, mais alors il sera plus exact de recourir à* Σ ** ». D'abord, tronquer C_t à l'ordre 2 n'est pas sans conséquence, car γ est de l'ordre de 1 ; d'autre part, est-ce que les recherches des extrema de C_t et de Σ, qui coïncident en seulement 6 points, sont des problèmes équivalents ? La réponse est non (voir § 6.2.6). Disons à sa décharge, que le problème, sans outil de calcul performant, est extrêmement pénible et Le Verrier approchait de la fin de ses calculs et il devait être impatient de connaître le résultat final.

Précision affichée Il est bien sûr important de garder pendant les calculs une précision maximale, afin de ne pas trop affecter le résultat final. C'est d'ailleurs une précaution que ne respecte pas toujours Adams, qui a souvent tendance à arrondir légèrement ses valeurs intermédiaires, ce qui a pour conséquence de fausser un peu le résultat final. Mais, insistons pour dire que Le Verrier est parfois un peu trop optimiste : après un calcul approché, il donne parfois des résultats avec une précision excessive. Conserver la précision des chiffres pour les calculs intermédiaires est une bonne chose, mais le résultat final doit être affiché avec le nombre de chiffres correspondant à la précision atteinte. Cela concerne les valeurs des paramètres définitifs de Neptune, fruits d'une interpolation linéaire, valeurs qui sont données avec 6 chiffres significatifs, ce qui ne peut pas être la précision réelle dans une méthode d'interpolation (voir § 6.2.3.5).
Voir aussi l'appréciation de Danjon, reproduite p. 334, sur la précision des résultats.

Pour le calcul de l'inclinaison relative des orbites, Le Verrier doit sentir que les données sont trop faibles pour garantir une grande précision ; il énonce son résultat (p. 251 de *Herschel*) sous la forme « Le plan de l'orbite de cet astre paraît devoir être incliné d'au moins 4°38′ par rapport au plan de l'orbite d'Uranus ». Dans cette phrase, il perce un léger doute, mais il donne aussi une valeur de l'inclinaison trop précise par rapport aux données (voir le calcul au § 6.2.10). Rappelons qu'avec les mêmes données, Adams avait obtenu 3 résultats successifs contradictoires et il avait alors renoncé à avancer une valeur pour cette inclinaison (voir § 6.2.10.2).

12.3.2 Situations délicates

Intervalles de confiance Après son troisième mémoire, présenté le 31 août 1846, où il précise l'endroit où chercher la nouvelle planète, Le Verrier détermine des intervalles dans lesquels doivent se trouver les valeurs exactes des paramètres de la planète perturbatrice (cf. fig. 6.21). Malheureusement, une fois la planète découverte et ses éléments réels déterminés, les valeurs exactes se situent largement en dehors des intervalles délimités par Le Verrier. Par exemple, Le Verrier prédit que le demi-grand axe a doit vérifier $35.4 < a < 37.90$; or la bonne valeur est 30.11 et il trouve une excentricité de 0.107 alors que la valeur correcte est 0.0093.
Ces divergences susciteront des incompréhensions et des moqueries de la part d'une partie de la presse, mais aussi du milieu scientifique (Peirce [Peirce, 1847a], Babinet, Moigno (avec des articles cités dans [Institut de France, 1911])).
On lit dans La Presse (11 septembre 1848), après l'intervention de Babinet à l'Académie :

> Admise d'enthousiasme et avec fracas, cette identité [entre la planète prédite et la planète découverte à Berlin] est aujourd'hui fatalement niée, non plus par le transport de nos imaginations exaltées et surprises, mais par l'arrêt sévère, irrécusable et imprescriptible des faits les plus certains.

En fait, malgré les apparences, ces résultats ne sont pas aussi erronés qu'il peut sembler au premier abord, car cette valeur excessive de a est associée à une valeur excessive de l'excentricité, qui compense assez largement l'erreur du demi-grand axe. De plus, la valeur très erronée (285° au lieu de 45°) qu'il trouve pour la longitude du périhélie place ce périhélie dans la direction de la conjonction de 1822 et place Neptune le jour de la découverte à une distance de 33.06 ua au lieu de 30, soit une erreur de l'ordre de 'seulement' 10%.
Le Verrier, dans sa réponse à Babinet [Le Verrier, 1848c], déclarait que ses données (voir ce qu'il entend exactement par données au § 13.3.3.2) étaient entachées d'une erreur de l'ordre de 10% ; en conséquence, il réclamait pour ses calculs une marge d'erreur du même ordre, ce qui est le cas pour le rayon vecteur. En fait, tous les paramètres trouvés pour Neptune : demi-grand axe, excentricité, périhélie, passage au périhélie étaient fortement corrélés et les valeurs finales trouvées résultaient du choix initial, un peu malheureux, du demi-grand axe double de celui d'Uranus.

Il faut considérer les résultats de Le Verrier dans leur ensemble, qui présentent alors une assez large cohérence, quand on les examine sans parti pris.

Changement de variables Le Verrier est amené à changer souvent de variables principales dans ses fonctions – sans que cela soit toujours nettement précisé – et certains changements sont assez difficiles à suivre. Il en est de même pour les calculs de dérivées : par exemple quand les variables sont v, ℓ, ε, ζ ; on a $\ell = \varpi + \zeta$, est-ce que ℓ est une fonction de ϖ ? La question devient sensible quand il s'agit de dériver la fonction perturbatrice obtenue par la méthode analytique : dans le calcul fait par Le Verrier, ℓ ne semble pas dépendre de ϖ et une fois la dérivation effectuée, il remplace ℓ par $\varpi + \zeta$.

Moindres carrés On a déjà signalé que Le Verrier n'applique pas à la lettre la méthode des moindres carrés. Il essaie de s'arranger pour n'avoir à multiplier les équations que par des entiers (voir encadré 13, p. 211). Ceci n'affecte pas en général de manière sensible les résultats, mais il n'a pas testé cette affirmation, du moins, il n'a pas mentionné un tel test. Biot l'a fait dans son analyse du travail de Le Verrier [Biot, 1847b] ; Brookes l'a fait aussi dans sa thèse. Ils confirment tous les deux le peu d'impact de cette variante des moindres carrés sur le résultat final ; je confirme aussi.

Taille de l'échantillonnage Prenons maintenant l'exemple du calcul de la fonction perturbatrice, qu'il s'agit de développer en série de ζ et $\zeta' - \zeta$ où ζ est l'anomalie moyenne d'Uranus et ζ' celle de Saturne. Il procède par double interpolation, c'est son expression, mais en fait c'est un calcul d'intégrales doubles [13] à l'aide de sommes de Riemann [14]. Il faut donc échantillonner deux variables ; combien de points ? Il se trouve que si l'on choisit une puissance de 2, on peut s'arranger pour limiter notablement le nombre de multiplications à effectuer : on a la confirmation de l'utilité d'un tel choix dans la lettre de Le Verrier à Gautier datée du 20 juin 1846 :

> [Gautier essaie d'évaluer les perturbations exercées par Jupiter sur la comète de Biela ou Gambart] Vous pouvez prendre les formules du journal de Liouville [où Le Verrier a publié sa théorie de Mercure [Le Verrier, 1843b]]. Prenez seulement soin d'indiquer que les calculs deviennent très simples quand le diviseur de la circonférence est une puissance de 2, comme nous l'avons vu.

Car il s'agit bien de minimiser le nombre d'opérations, sachant que ces développements en série doivent être répétés pour quantifier l'action de Saturne et de Jupiter sur Uranus, puis celle de Jupiter sur Saturne... Quelle puissance choisir ? 8 paraît bien peu, 32 paraît bien, mais l'échantillonnage comporte alors 32×32 points [15], ce qui est éventuellement imaginable pour un seul calcul, mais pas quand un tel calcul doit être répété un grand nombre de fois [16] pour chaque élément elliptique de chaque planète ; il choisit donc 16.
Le Verrier avait donc initié la méthode d'interpolation lors de sa première étude de Mercure en 1843, mais pour Uranus les calculs vont être beaucoup mieux organisés et optimisés [17] (voir fig. A.4 et fig. A.5 pour une comparaison des dispositions adoptées pour Mercure et pour Uranus).
J'ai refait les calculs en utilisant exactement la méthode de Le Verrier, puis en utilisant les outils internes de TRIP : tous les développements sont en parfait accord, ce qui confirme que Le Verrier était un calculateur exceptionnel (voir table 3.9).
Notons que le passage de 16 à 32 points intermédiaires modifie très peu la valeur des coefficients communs aux deux développements, ce qui est conforme à la théorie des séries de Fourier, voir table 3.9.

12.4 Innovations de Le Verrier

Le Verrier était fondamentalement un mathématicien, donc plutôt porté sur la théorie ; il avait la foi en des calculs théoriques qui débouchent ensuite sur des applications. Donc, le plus étonnant dans son parcours scientifique est qu'il ait réussi dans sa première spécialité, la chimie, alors qu'elle demande beaucoup d'expériences pratiques. Ses expériences sur les combinaisons du phosphore et de l'oxygène [18] [Le Verrier, 1835] puis du phosphore et de l'hydrogène [Le Verrier, 1837] furent jugées très intéressantes et novatrices par Gay-Lussac et surtout par Dulong. Mais son goût pour la recherche théorique l'emporta rapidement sur son esprit d'ingénieur.
Quand il se lança dans la recherche astronomique, ce fut tout de suite par un coup d'éclat ; Bertrand [Bertrand, 1879] écrit : « Il [Le Verrier] y entra sans précurseur et sans guide ».

13. Les coefficients de Fourier d'une telle série sont donnés par des intégrales doubles.
14. Avec un vocabulaire actualisé ; Le Verrier utilise une combinaison de fonctions trigonométriques.
15. On rappelle que c'est l'échantillonnage que choisira Gaillot à partir de 1888.
16. Et il sera répété de façon intensive pour chacune des 8 planètes.
17. Le Verrier n'est pas l'inventeur du tableur, mais la disposition qu'il adopte en est une réalisation parfaite.
18. Il n'avait pas oublié ses recherches, quand un soir de juillet 1845, il a fait la farce avec Émile Gautier, en jetant dans le bassin du Luxembourg, une poignée de boulettes d'un sel de phosphore qui détonne dans l'eau sous forme de jolies petites étoiles (lettre de Gautier à ses parents du 10 juillet 1845).

On rappelle que lors de sa conversion de chimiste en astronome en 1837, Le Verrier essaie d'absorber par lui-même et en moins d'un an toutes les connaissances astronomiques de l'époque (voir § 1.1.1).

12.4.1 Premier mémoire de Le Verrier, méthode de Le Verrier

Le Verrier s'attaque dès ses débuts en astronomie à un problème difficile :
Les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons des planètes [Le Verrier, 1839a]
Bertrand, dans son éloge historique écrit : « Un tel début est celui d'un maître » [Bertrand, 1879].
Non seulement Le Verrier résolut le problème brillamment mais en plus, il prévit les corrections à apporter au cas, fort probable, où il faudrait modifier légèrement les masses des planètes.
Au cours du calcul, il est confronté à la détermination des valeurs propres d'une matrice 7×7 et il en conclura à la stabilité du Système solaire ; en fait, il scinde le problème en deux : une matrice 4×4 pour traiter les planètes telluriques et une matrice 3×3 pour traiter les planètes gazeuses.
Il est donc amené à inventer une méthode – appelée depuis, méthode de Le Verrier, améliorée plus tard par Fadeev, puis Souriau – pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, mettant en lumière son esprit mathématique (voir [Laskar, 2017] pour plus de détails).
J'ai refait ce calcul par ailleurs et je montre que Le Verrier, moyennant une toute petite adaptation de ses calculs, aurait pu travailler directement sur la matrice 7×7. Par contre, il n'aurait pas pu établir le développement à l'ordre 1 selon les masses, développement qui nécessite l'inversion d'une matrice 7×7 comportant des paramètres.

12.4.2 Méthode d'interpolation

Pour déterminer les perturbations de Mercure, Le Verrier met au point une méthode d'interpolation : l'idée première en reviendrait à Euler (voir note 1.15), mais Le Verrier l'a optimisée afin de pouvoir l'utiliser efficacement dans ses très nombreux calculs de perturbations, et effectivement, elle sera utilisée systématiquement pour toutes ses théories planétaires.
Comme l'a indiqué Gautier dans sa lettre du 31 août 1845 à ses parents, Le Verrier a dû tenir compte du carré des masses perturbatrices ; ce n'est peut-être pas une totale innovation, car Laplace avait déjà indiqué la méthode dans le tome III de sa *Mécanique céleste* [Laplace, 1802], mais, Laplace était resté sur les formules théoriques ; Le Verrier doit gérer un cas concret et complexe (voir § 3.9.3). Et, d'autre part, Bouvard n'avait pas tenu compte des termes du second ordre selon les masses, et en ce sens, on peut considérer ce calcul comme une innovation. Voir ce qu'en pense Biot au § 3.9.

12.4.3 Comètes

Il innove encore lors de l'étude de la comète de 1770, dite de Lexell : il s'agissait de savoir si la comète apparue en 1843 (comète de Faye) était identique à la comète de Lexell. Il montre que le problème de la détermination de l'orbite de la comète de Lexell est très instable ; il propose alors, non pas une trajectoire pour la comète de Lexell, mais une famille de trajectoires possibles, dépendant d'un paramètre arbitraire. Il parvient à conclure que ces deux comètes ne sont pas identiques et que la comète de Lexell, non réapparue après son passage en 1770, n'a pas été capturée par Jupiter [Le Verrier, 1844b] (voir aussi [Laskar, 2017]).

12.4.4 Problème inverse

Et par dessus tout, il a résolu ce redoutable problème inverse : déterminer l'objet perturbateur à partir des perturbations qu'il produit. Le Révérend Hussey raconte, que lors d'une conver-

sation [19] avec Alexis Bouvard, celui-ci lui avait déclaré qu'il avait envisagé l'existence d'une planète extérieure troublant Uranus, et que sa localisation serait plus pénible que difficile (cité dans [Airy, 1846], lettre n° 1) et qu'il entreprendrait ce travail s'il en avait le temps ; pour sa part, Airy avait jugé la tâche impossible avant d'avoir au moins les données sur plusieurs révolutions complètes pour Uranus [20].
Le Verrier a attaqué le problème avec rigueur, exhaustivité, hargne, mais aussi avec beaucoup d'originalité, de subtilité et de finesse dans le traitement du problème.
Adams partage avec lui cet exploit, mais pour Adams, c'était au moins autant un défi mathématique – du type de ceux rencontrés lors des tripos de Cambridge – qu'une avancée astronomique.

12.5 Utilité des théories planétaires

12.5.1 Plan de Le Verrier, présenté au ministre, pour l'astronomie analytique

Le Verrier était totalement convaincu de la nécessité d'établir des théories planétaires précises et durables, car il pensait qu'à son époque « *presque toutes nos théories sont en désaccord avec les observations [...] d'une manière assez grave.* » [Institut de France, 1911] p. 56.
Cette idée constitue l'essentiel du plan qu'il présente dans une lettre au ministre de l'Instruction Publique, Mr de Salvandy, en 1847. Cette lettre est reproduite dans le bulletin du centenaire de la naissance de Le Verrier [Institut de France, 1911]. Ce faisant, il en profite pour essayer de montrer qu'il est le personnage – il dit dans son plan l'architecte – pour réaliser un tel plan.

> Vous avez pensé, M. le Ministre, que l'État, qui accorde chaque année [...] de puissants secours à l'astronomie d'observation, devait aussi se préoccuper de l'astronomie analytique, à laquelle revient en définitive la mise en œuvre des matériaux et aussi la constitution de la Science.
> Dans cette grande intention, vous m'avez autorisé à placer sous vos yeux un succinct exposé du plan que je me propose d'embrasser [...]
> Pour établir avec précision la théorie d'une planète, pour l'amener à la forme définitive sous laquelle elle peut prendre la place dans la science, il faut des travaux immenses et qui présentent quatre phases successives, tellement distinctes les unes des autres que jusqu'ici l'exécution en a été confiée à des mains différentes.
> Il faut premièrement entreprendre une série d'observations exactes et nombreuses de la planète et réparties sur un intervalle de temps considérable.
> Il faut en second lieu, en se basant sur la loi de la gravitation universelle et en tenant compte de l'influence de toutes les masses, rechercher avec soin la forme des expressions analytiques propres à représenter à une époque quelconque les coordonnées de l'astre [...]
> Un troisième travail a pour but de les rapprocher [observations et prédictions] afin de tirer des observations la valeur des constantes qui sont restées indéterminées dans les formules et qu'on a dû réduire au plus petit nombre possible.
> La théorie de la planète ainsi obtenue, il est indispensable pour qu'elle puisse prendre place définitive dans l'astronomie pratique, qu'on l'ait réduite en table numérique. C'est la quatrième et dernière partie de la question. [...]
> Mais les observations inscrites sur les registres [des grands observatoires] sont les matériaux d'un édifice encore épars sur le sol.
> Votre Excellence a pensé qu'après les avoir réunis, il était temps de songer à élever l'édifice lui-même et de recourir à l'architecte et au maçon. [...]
> Embrasser dans un seul travail l'ensemble du système planétaire, mettre tout en harmonie, s'il est possible et, dans le cas contraire, déclarer avec certitude qu'il existe des causes de perturbations encore ignorées, et dont les auteurs pourraient alors, et seulement alors, être reconnus, tel est, en définitive, le projet que j'ai l'honneur de transmettre à votre Excellence.

19. Lettre de Hussey à Airy du 17 novembre 1834, reproduite dans [Airy, 1846].
20. Lettre de Airy à Hussey du 23 novembre 1834, reproduite dans [Airy, 1846].

12.5.2 Est-il vraiment nécessaire d'avoir des théories valables sur des temps très longs ?

Le Verrier a pu constater les progrès dans les précisions des éphémérides au fur et à mesure que la qualité des observations augmentait, facteur qui permet de déterminer avec une précision accrue les constantes d'intégration apparaissant lors de la résolution des systèmes différentiels régissant les mouvements des planètes. Ces équations font intervenir de façon directe les masses des planètes ; or s'il est assez facile de déterminer les masses de planètes possédant des satellites, comme la Terre, Jupiter ou Saturne, il est beaucoup plus difficile de le faire pour Mercure, Vénus ou Mars, qui n'avaient pas de satellites connus à l'époque. Cette incertitude sur les masses a rendu nécessaire d'actualiser certains calculs effectués par de grands géomètres comme Lagrange. Celui-ci avait établi la stabilité du Système solaire à l'ordre 1, et donné des intervalles dans lesquels pouvaient varier les éléments orbitaux des différentes planètes ; or Lagrange avait, entre autres[21], utilisé une masse inexacte pour Vénus, ce qui pouvait rendre ses estimations incertaines[22]. Le Verrier a repris le calcul de la stabilité du Système solaire en 1839 [Le Verrier, 1839a] et à cette occasion, il avait introduit une innovation majeure (cf. § 12.4.1) : intégrer dans ses formules une éventuelle correction à apporter aux masses des planètes afin de conserver des résultats acceptables, même si l'on découvrait que les masses utilisées pour certaines planètes étaient assez éloignées de leurs valeurs réelles. Pour cela, il introduisit dans ses équations les masses sous la forme $m(1+\mu)$ où μ est la correction (relative) éventuelle à apporter à la masse. Dès cette époque, Le Verrier a en tête l'ambition de donner des théories définitives pour les différentes planètes du Système solaire, dont il espère tirer une gloire éternelle, ce qui va être le cas, mais gloire due surtout à la découverte spectaculaire de Neptune. Il souhaite que ses tables puissent être utilisables pendant des centaines, voire des milliers d'années. Si d'un point de vue théorique, cette ambition est justifiée, est-elle vraiment raisonnable d'un point de vue pratique ? Le Verrier est conscient que les tables se périment, à mesure que des données plus précises et des calculs plus savants permettent d'affiner les théories. Il reprend par exemple le problème de la stabilité du Système solaire en poussant les développements au degré 3 selon les excentricités. Mais pense-t-il vraiment que l'on va arrêter de faire des éphémérides après lui ? Quelle est vraiment l'utilité pratique d'une table d'éphémérides valable 300 ans, voire 3000 ans ? Le Verrier, sans aller jusqu'à imaginer la révolution informatique, doit se dire que des améliorations seront nécessairement apportées dans un délai plus court.
Ceci dit, ses théories planétaires (améliorées par Gaillot) ont servi de base aux éphémérides du Bureau des Longitudes jusqu'en 1984 [Berthier, 2021], ce qui est déjà une longévité remarquable.

12.5.3 Reprise des calculs de Le Verrier par Aimable Gaillot

En 1904, Gaillot [Gaillot, 1904] publie un travail améliorant la théorie de Saturne, établie par Le Verrier. Très modestement, il se place dans la lignée des calculs de Le Verrier, en se proposant seulement d'améliorer la concordance entre théorie et observations.
Dans son introduction, Gaillot indique que Le Verrier a utilisé la méthode d'interpolation surtout afin de vérifier les résultats donnés par la théorie analytique. Au passage, Gaillot qualifie la vérification de Le Verrier de *sommaire* (!), alors qu'elle a dû lui prendre des mois d'intense labeur !

> Gaillot : « Le Verrier, en faisant usage de cette méthode, n'avait eu d'autre but que d'obtenir une vérification sommaire des résultats fournis par l'analyse : ceux-ci, limités à l'ensemble des perturbations du premier et du deuxième ordre par rapport aux masses, ne lui ayant

21. Et à l'époque de ses calculs, Uranus n'avait pas été encore découverte.
22. En fait, les estimations trouvées par Lagrange et Le Verrier sont voisines ; Le Verrier explique que l'erreur dans la masse de Vénus est compensée dans le calcul de Lagrange par une autre erreur [Le Verrier, 1839d].

> pas donné le moyen d'établir un accord suffisant entre les positions calculées et les positions observées de Saturne ».

En fait, Le Verrier s'était limité à un développement à l'ordre 2 des masses, qui laissait encore quelques écarts entre théorie et observations, et qui nécessitait déjà des calculs énormes (voir § 3.9.3). Mais on peut être sûr qu'il n'y a aucune malveillance envers Le Verrier dans le propos [vérification sommaire] de Gaillot.
Gaillot se propose donc de pousser le développement analytique à l'ordre 3 des masses et pour confirmer ces calculs, d'utiliser la méthode d'interpolation avec un découpage de 32×32, ce qui représente 4 fois plus de calculs que Le Verrier ! Il déclare que « en appliquant le procédé [la méthode analytique] dans toute sa rigueur, les termes nouveaux que nous aurions à considérer, après toutes les transformations nécessaires, se chiffreraient par dizaines et même par centaines de mille [23] ». Mais il ajoute aussitôt : « la plupart des termes, il faut bien le dire, ne donneraient, par l'intégration, aucun résultat sensible ». En comparaison, la méthode d'interpolation, façon Gaillot, avec ses 1024 termes, paraît rapide et systématique !

23. C'est ce que l'on a observé au § 3.9.3 pour le calcul des perturbations à l'ordre 2 des masses : il faut faire de très nombreux produits de séries comportant des dizaines de termes et sélectionner ceux qui seraient sensibles, tâche complexe, fastidieuse et incertaine.

Chapitre 13

LE VERRIER POLÉMISTE

Objectifs

Présentation Le Verrier était le plus souvent, et à juste raison, convaincu de la justesse de ses idées et de ses calculs. Il ne tolérait pas d'entendre ou de lire des affirmations erronées dans les travaux de ses confrères. Il sera amené à signaler vertement des erreurs commises par certains de ceux-ci. Il s'en prendra entre autres à Pontécoulant, puis à Delaunay (très souvent), à Babinet et à Liouville.
Nous allons examiner successivement certaines de ces polémiques :

- Polémique avec Pontécoulant en 1839
- Première polémique avec Delaunay en 1842
- Polémique avec Babinet en 1848.

Sommaire

13.1 Polémique avec Pontécoulant **420**
13.2 Première polémique avec Delaunay **421**
13.2.1 Delaunay annonce à l'Académie la découverte de nouveaux termes dans la perturbation de la longitude d'Uranus 421
13.2.2 Réponses de Le Verrier et polémique 422
13.2.3 Conclusions 423
13.3 Polémique avec M. Babinet **424**
13.3.1 Rappels sur la découverte de Neptune 424
13.3.2 Attaque de Jacques Babinet 424
13.3.3 Réponses de Le Verrier à Babinet 426
13.3.4 Conclusions 432
13.4 Autres polémiques **434**

13.1 Polémique avec Pontécoulant

Le Verrier avait relevé de grossières erreurs numériques dans la première version du troisième volume de la '*Théorie analytique du Système du Monde*' de Pontécoulant [1] [Pontécoulant, 1829]. Le Verrier signale les erreurs suivantes, lors de la présentation à l'Académie de son mémoire '*Sur les variations séculaires des planètes*' [Le Verrier, 1845a], qu'il fait lire le 16 septembre 1839 :

> M. de Pontécoulant a repris ce travail [Travail de Lagrange sur les variations séculaires des planètes] dans le troisième volume de la *Théorie du système analytique du Monde*, mais les nombres qu'il y a consignés sont tous affectés des erreurs les plus graves, et qui dépassent, quelquefois, jusqu'à 20 000 et même 40 000 fois les valeurs absolues de ces nombres...

Pontécoulant répond le 28 octobre en précisant à l'Académie le but de son travail et en disant « qu'à défaut d'autre mérite, il [mon travail] aurait eu le mérite d'avoir mis en évidence les véritables difficultés de la question », et il reconnaît ses erreurs [Pontécoulant, 1839a].

		COEFFICIENTS QUI LEUR CORRESPONDAIENT DANS				
		Vénus.	La Terre.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.
Racines dues à la présence de ♀, ♂ et ♂.....	$h_4 = 18,489..$	—0,0001	0,0000	0,0005	0,0520	—0,0185
	$h_5 = 17,115..$	—0,0072	—0,0001	0,0071	0,0560	—0,0261
Racine due à ♆	$h_1 = 22,260..$	—0,0008	0,0016	—0,0091	0,0288	—0,0013

FIGURE 13.1 – Coefficients intervenant dans les perturbations mutuelles des éléments elliptiques des différentes planètes ; ici ces coefficients interviennent dans les expressions des variations de l'excentricité et de la longitude du périhélie de Vénus, de la Terre, de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, sous l'action de Vénus, de la Terre, de Mars ou de Jupiter. Ces valeurs ont été extraites par Le Verrier de la première version du troisième tome de la *'Théorie analytique du Système du Monde'*. Voir ci-dessous les critiques formulées par Le Verrier (voir aussi [Laskar, 2017]).

Lors de cette même séance du 28 octobre 1839, Le Verrier avait détaillé les erreurs en des termes peu charitables [Le Verrier, 1839b] :

> Il résulte de ce tableau, [reproduit fig. 13.1], plusieurs conséquences absurdes :
> Les coefficients 0.0520 et 0.0560 qui affectent Saturne et proviennent des plus petites planètes, surpassent le coefficient 0,0288 qui provient de la présence de Jupiter. En sorte que Saturne doit ses plus grandes perturbations à la présence de Mars, la Terre, etc.
> On voit de même que Mars troublerait Uranus beaucoup plus que ne le fait Jupiter.
> La comparaison des nombres compris dans les deux premières lignes horizontales, montre que Vénus et la Terre se troubleraient peu l'une l'autre, tandis qu'elles agiraient prodigieusement sur Saturne et Uranus. Nous ne multiplierons pas davantage les exemples de ces contradictions.

Pontécoulant répond lors de la séance du 2 décembre 1839 [Pontécoulant, 1839b] :

1. Philippe-Gustave Doulcet, comte de Pontécoulant (1795−1874), astronome français, colonel d'artillerie, géomètre. À partir de 1829, il commence à écrire sa '*Théorie analytique du Système du Monde*' en 4 volumes, en prenant soin de suivre les notations de Laplace ; cet ouvrage connut un véritable succès [Véron, 2016].

> Je ne vois qu'il s'agit que d'incertitudes dans les résultats numériques, inexactitudes, qui, en cas qu'elles existent en effet, peuvent dépendre soit d'inadvertance en effectuant quelques opérations arithmétiques, soit même d'une simple erreur de transcription. Je me propose d'ailleurs de revoir très prochainement ces calculs et dès que j'aurai terminé la vérification, j'aurai l'honneur d'en soumettre les résultats à l'Académie.

La polémique s'arrête là et il semble que Pontécoulant ait corrigé ces valeurs numériques dans les versions suivantes de sa '*Théorie analytique du Système du Monde*'.

13.2 Première polémique avec Delaunay

On connaît de nombreuses polémiques entre Le Verrier et Delaunay. Une première polémique eut lieu en 1842, quand Delaunay annonça qu'il avait trouvé deux termes non encore connus dans l'expression de la perturbation de la longitude vraie d'Uranus. Le Verrier entreprit de montrer que ces termes étaient déjà pris en compte dans la théorie d'Uranus (voir aussi [Laskar, 2017]).

13.2.1 Delaunay annonce à l'Académie la découverte de nouveaux termes dans la perturbation de la longitude d'Uranus

Dans une note envoyée à l'Académie par Delaunay [Delaunay, 1842a] et lue lors de la séance du 7 mars 1842, Delaunay mentionne « que M. Hansen annonce qu'il a trouvé dans la longitude d'Uranus deux termes[2] de perturbations inconnus jusqu'ici ». Il ajoute : « M. Hansen ne donne pas ces nombres comme rigoureusement exacts ; il ne croit pouvoir en répondre qu'à $2''$ près ». Il s'agit du terme d'argument $(2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta)$ et celui d'argument $(2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta)$, où (ζ, ζ', ζ'') sont respectivement les anomalies moyennes d'Uranus, de Saturne et de Jupiter.
Du coup, Liouville[3] a chargé Delaunay « de faire les calculs nécessaires pour retrouver ces termes » [Delaunay, 1842a]. Delaunay retrouve ces deux termes, avec des coefficients très proches de ceux de Hansen. On a reporté, table 13.1, pour chacun de ces deux termes, les valeurs des coefficients trouvés par Hansen, Delaunay et celles que trouvera plus tard Le Verrier dans *Herschel* p. 84−85. Il y a une bonne concordance pour ces termes délicats à calculer, car ce sont des termes du second ordre selon les masses, qui dépendent du produit des masses d'Uranus et Saturne (voir plus de détail au § 3.9.3).

Table 13.1 – Coefficients des nouveaux termes de la perturbation de la longitude d'Uranus selon Hansen, Delaunay et Le Verrier

coefficient de l'argument	Hansen	Delaunay	Le Verrier
$2\zeta'' - 6\zeta' + 3\zeta$	$31''.5$	$32''.10$	$32''.7$
$2\zeta'' - 6\zeta' + 2\zeta$	$7''.6$	$8''.18$	$7''.87$

Dans la foulée de ce premier calcul, Delaunay poursuit l'étude de la perturbation de la longitude d'Uranus et dans la séance du 14 mars 1842 [Delaunay, 1842b], Delaunay déclare avoir trouvé « des inégalités sensibles dont il ne paraît pas qu'on ait tenu compte dans la formation des

2. Les notations utilisées par Delaunay diffèrent un peu de celles utilisées par Le Verrier dans *Herschel* ; j'ai aligné toutes les expressions sur les notations de Le Verrier : $''$ pour Jupiter, $'$ pour Saturne et rien pour Uranus.

3. Joseph Liouville (1809−1882), mathématicien français ; fondateur du journal "*Journal des mathématiques pures et appliquées*", dans lequel il avait fait connaître, entre autres, les travaux d'Évariste Galois. Le Verrier publiera *Variations séculaires des orbites des planètes* ainsi que ses premières recherches sur Mercure [Le Verrier, 1843b] dans le journal de Liouville.

tables d'Uranus ». Il a trouvé un terme d'argument $(4n - n')$ et un autre d'argument $(2n - n')$; Delaunay conclut en disant « qu'il devient nécessaire, pour la formation des tables d'Uranus, de reprendre complètement la théorie de ses perturbations... »

13.2.2 Réponses de Le Verrier et polémique

• Dans la séance du 28 mars 1842 [Le Verrier, 1842a], Le Verrier déclare qu'il « travaille depuis longtemps à revoir scrupuleusement la théorie des perturbations périodiques des principales planètes ». Il énonce un des résultats qu'il a obtenus :

> si $i'n' - in$ est une petite quantité par rapport à n, il n'en saurait résulter dans la longitude aucun terme d'ordre supérieur, dépendant de l'argument $(i + 1)n - i'n'$

ce qu'il démontre en donnant une explication résultant de l'application des équations de Lagrange (voir la justification de Le Verrier à l'annexe, § A.4).
• Dans la séance du 18 avril 1842 [Delaunay, 1842c], Delaunay conteste la démonstration de Le Verrier, en mettant en doute son explication. Delaunay reprend son calcul à partir de la perturbation d'argument $3n - n'$ et il conclut qu'il y a au moins un terme nouveau. Il continue en disant que les inégalités qu'il vient de trouver ne sont pas données au chapitre de la théorie d'Uranus, (voir aussi [Le Lay, 2016]).

> Ce sont ces raisons qui me les ont fait regarder comme nouvelles. J'ajouterai cependant que j'ai reconnu depuis que, si ces inégalités ne sont pas données explicitement dans la Mécanique céleste, elles y sont implicitement comprises [elles sont en fait dans l'introduction des tables de Bouvard, p. jii], et ont été, comme telles, employées dans la construction des tables. L'inégalité de moyen mouvement d'Uranus, qui dépend du petit diviseur $3n-n'$, ayant reçu le nom de *grande inégalité* [...], on l'a traitée comme les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne ; en sorte que, si on développait les formules qui ont été employées par Bouvard pour la construction de ses tables, on retrouverait les inégalités que j'avais annoncées comme nouvelles.

• Dans la séance du 2 mai 1842 [Le Verrier, 1842a], Le Verrier reprend la conclusion de Delaunay [qui affirmait qu'il faut reprendre complètement la théorie des perturbations d'Uranus] en disant que

> s'il était constaté qu'on avait négligé dans la théorie plusieurs termes, tels que ceux qui étaient indiqués, on pouvait espérer d'avoir la clef des grands écarts des tables de cette planète [...] Aussi quand je me fus convaincu que les perturbations annoncées ne devaient pas être ajoutées aux tables existantes, il me sembla que l'intérêt de la science exigeait que je le fisse connaître.

Le Verrier ajoute que, dans la réponse de Delaunay [Delaunay, 1842c], on peut lire le passage suivant :

> Delaunay : « J'ajouterai cependant que j'ai reconnu depuis que, si ces inégalités ne sont pas données explicitement dans la Mécanique céleste, elles y sont implicitement comprises, et ont été employées dans la construction des tables ».

Et Le Verrier de s'écrier :

> Il est impossible de se rétracter plus complètement que ne le fait ici l'auteur sur le fond de la question. Il reconnaît que les termes qu'il avait d'abord regardés comme devant être rajoutés aux tables actuelles d'Uranus n'y doivent pas réellement être introduits. C'est tout ce que j'avais voulu établir.

Le Verrier explique ensuite qu'il y a deux façons de traiter les perturbations de la longitude d'une planète : soit on ajoute la grande inégalité (à très longue période) à la longitude moyenne et l'on fait les calculs avec cette longitude corrigée, soit on l'ajoute en fin de calculs à la longitude vraie. Laplace a fortement recommandé la première méthode, mais Delaunay a suivi la deuxième, ce qui n'est pas l'usage des tables, et ce qui modifie l'expression analytique finale, mais en donne finalement les mêmes valeurs numériques.
Le Verrier conclut :

> Il a dû nécessairement arriver ainsi à une théorie qui n'était pas identique en apparence avec la théorie des tables existantes, et il en a conclu que ces tables étaient fausses.

Le Verrier explique qu'il y a plusieurs présentations analytiques possibles des perturbations ; l'essentiel est qu'elles conduisent aux mêmes valeurs numériques. « Tout le reste est arbitraire et de convention ».
Ici, de façon un peu inhabituelle, et peut-être par provocation envers Delaunay, Le Verrier soutient un point de vue pragmatique – mêmes valeurs numériques – alors qu'il est par nature plutôt enclin à soutenir les théories analytiques.

13.2.3 Conclusions

Delaunay a 23 ans ; il débute dans la carrière, soutenu par Liouville. À la demande de Liouville, il refait les calculs de Hansen et confirme les résultats obtenus par celui-ci. Ayant ainsi abordé les perturbations d'Uranus, il prolonge par curiosité ses calculs et obtient deux termes qui ne figurent pas explicitement dans la théorie d'Uranus. Un tel constat est une aubaine pour un jeune chercheur qui se lance dans la carrière. Il communique son résultat à l'Académie. Malheureusement pour lui, Le Verrier est aussi en train de travailler sur la théorie d'Uranus ; il est l'aîné de Delaunay de 8 ans et il a déjà une grande expérience dans le calcul des perturbations. Il diagnostique rapidement l'origine du problème et en fait part à l'Académie : Delaunay n'a pas organisé ses calculs selon les recommandations de Laplace, recommandations qu'il n'avait peut-être pas encore complètement assimilées. Pourtant, Delaunay, en tant que major de Polytechnique à sa sortie de l'école en 1836, avait reçu les œuvres complètes de Laplace, récompense offerte au major sortant par la veuve de Laplace ([Lequeux, 2010] p. 15). Delaunay doit reconnaître que les termes qu'il a découverts sont déjà présents dans la théorie, mais pas sous forme explicite. Cet aveu a dû lui coûter beaucoup, mais il montre à l'évidence son honnêteté intellectuelle.
Le Verrier termine en examinant ce que peut signifier qu'un terme est présent ou non dans une théorie : il conclut que cette assertion est arbitraire et seul compte le résultat numérique final. Et il termine avec cette dernière pique :

> Les astronomes n'attacheront, je crois, qu'un médiocre intérêt à savoir si des termes qui ne doivent pas entrer dans les tables existent ou n'existent pas.
> En accordant que ses perturbations ne doivent pas figurer dans nos tables, M. Delaunay a ainsi accordé qu'elles n'existaient pas, suivant le seul sens qu'on puisse attacher à cette expression.

On peut remarquer la différence de ton entre les deux savants :
- Delaunay est jeune, ardent, exalté par sa première découverte ;
- Le Verrier a déjà un ton professoral, une assurance, une attitude hautaine qu'il gardera toute sa vie. Il n'a aucune retenue dans ses constats, ni aucune pitié pour ses 'victimes' quand il s'agit de dénoncer une erreur scientifique.
Jacques Laskar [Laskar, 2017] écrit : « Il n'y a pas de doute, Le Verrier tient à faire comprendre qu'il est à son époque un acteur incontournable de la mécanique céleste ».

Cet épisode laissera des traces profondes chez Delaunay : il réalise qu'il a un concurrent imbattable sur la théorie d'Uranus ; en conséquence, il va changer de recherches pour se concentrer d'abord sur les marées puis, jusqu'à sa mort, sur la théorie de la Lune. Voici ce qui dit Colette Le Lay [Le Lay, 2016] (voir aussi § 12.1.6 'Calculs de Delaunay pour la Lune') :

> La violence de l'épisode conduit Delaunay à se choisir un nouveau thème de travail. Ce sera le mouvement de la Lune sur lequel il produit un premier travail présenté à l'Académie des sciences en 1846.

13.3 Polémique avec M. Babinet

13.3.1 Rappels sur la découverte de Neptune

Le Verrier, dans son mémoire du 31 août 1846 [Le Verrier, 1846a], prédit les valeurs des éléments elliptiques de la planète qui trouble Uranus. Il donne même des intervalles dans lesquels doivent se trouver ces éléments.
Danjon [Danjon, 1946a] écrit : *« Il avait commis l'imprudence de fixer des limites aux éléments de la planète supposée »* ; voir aussi § 8.8.5.1 pour un commentaire de Danjon sur la précision excessive de certains résultats donnés par Le Verrier.
Deux découvertes rapides permettent de préciser ces éléments :
• Lassell [4] [Lassell, 1846] découvre Triton le 10 octobre 1846, ce qui permet de préciser la masse de Neptune.
• Walker [Walker, 1847a] annonce le 9 février 1847 que Lalande avait observé Neptune les 8 et 10 mai 1795, en le prenant pour une étoile, et cette observation lui a permis de corriger les éléments de Neptune.
On constate alors que ces éléments corrigés ne tombent pas dans les intervalles déterminés par Le Verrier (voir § 6.2.12) : les critiques sont nombreuses ; Peirce [5] [Peirce, 1847a] va même jusqu'à affirmer que la découverte de Neptune par Galle a été fortuite, un "happy accident", (voir la discussion de l'annonce de Peirce au § 6.3).

13.3.2 Attaque de Jacques Babinet

Mais l'attaque la plus véhémente et la plus construite (a priori) vient de Babinet [6] qui, dans la séance du 23 août 1848 de l'Académie, déclare [Babinet, 1848] (voir aussi [Laskar, 2017]) :

> L'identité de la planète Neptune avec la planète théorique [..] n'étant plus admise par personne depuis les énormes différences constatées entre l'astre réel quant à la masse, à la durée de révolution, à la distance au Soleil, à l'excentricité et même la longitude [...], on est conduit à chercher si les perturbations d'Uranus se prêteraient à l'indication d'un second corps planétaire...

Il laisse entendre que la découverte d'une telle planète à partir des perturbations qu'elle produit sur Uranus, une fois déduites celles exercées par Neptune, demanderait beaucoup de temps, ce qui n'est pas un signe de grande confiance en l'existence d'un tel second corps, car la planète Neptune avait été trouvée au bout d'une heure d'observation à partir de la position indiquée

4. William Lassell (1799−1880) est un brasseur de profession, astronome amateur, basé à Liverpool. À l'instar de William Herschel, il fabriquait lui-même ses télescopes avec des miroirs en bronze. Il a observé Triton à l'aide de son télescope de 60 cm de diamètre.

5. Benjamin Peirce (1809−1880), professeur de mathématiques à Harvard. La déclaration a été faite à l'occasion du meeting de l'AAAS le 16 mars 1847.

6. J. Babinet (1794−1872), mathématicien, physicien et astronome français, membre de l'Académie des sciences.

par Le Verrier.
Il prend comme base les éléments de la planète prédite par Le Verrier, qu'il considère comme exacts, et il essaie ensuite d'interpréter l'action de la planète prédite par Le Verrier comme la résultante de l'action combinée de Neptune et d'une planète beaucoup plus distante du Soleil, qu'il appelle Hypérion.
Précisons la terminologie : il y a la planète Neptune (N) découverte visuellement par Galle et d'Arrest, la planète Le Verrier (L), non observée, dont les éléments elliptiques sont ceux donnés par Le Verrier et la planète Hypérion (H), à localiser, qui, couplée à Neptune (N) exercerait une action égale à celle de la seule planète Le Verrier (L).
Il procède à une addition algébrique [7], ce qui a de quoi surprendre, car deux masses distinctes agissent gravitationnellement comme une seule masse de somme la masse des deux autres uniquement si ces deux masses sont situées au même endroit. Babinet est bien conscient qu'une telle déduction est très approximative :

> Cette déduction serait sans objection, si les masses de Neptune et d'Hypérion s'exerçaient à une distance infinie [8] et rentreraient dans le cas du centre des forces parallèles : ce n'est pas le cas ici. Je ne donne ces aperçus que comme des approximations grossières destinées à guider les observateurs...

La distance moyenne de Neptune au Soleil est 30 *au*, celle de la planète de Le Verrier 36 *au*. Comme il suppose que la planète de Le Verrier est le centre de masse, il utilise l'égalité des moments pour déterminer la distance x entre Le Verrier et Hypérion : $N \times 6 = H \times x$, ce qui donne $x = 11$ et donc un demi-grand axe de 36+11 = 47 *au* pour Hypérion. Ce calcul suppose que les trois planètes restent indéfiniment alignées, ce qui est mécaniquement impossible. Il constate alors astucieusement qu'à la distance de 47 *au*, la période de révolution est double de celle de Neptune. Puisque celle de Neptune est le double de celle d'Uranus, il propose une 'nouvelle loi de Bode' : les périodes de révolution doublent d'une planète à l'autre. Il oublie de dire que cette 'loi' n'est pas vérifiée pour Jupiter-Saturne, ni pour Saturne-Uranus. Il pronostique alors l'existence d'une planète supplémentaire à 77 *au* du Soleil.
Il suppose implicitement que les 3 planètes sont alignées [9] au 1/1/47. À l'aide d'une homothétie et du théorème de Thalès, il en déduit la longitude héliocentrique d'Hypérion au 1/1/47. Il peut alors donner la longitude moyenne d'Hypérion à toute date.
Ayant constaté que la masse d'Hypérion était voisine de celle d'Uranus, il en déduit par homothétie son éclat.
Et comme conclusion, Babinet reprend, avec beaucoup d'autorité, tous les éléments précédents. Sa seule concession est : « si la planète se trouve à la position indiquée, on pourra empiriquement substituer à la loi de Bode la loi des durées doubles des révolutions pour toutes les planètes supérieures à Saturne ».

D'abord, pourquoi est-ce Babinet qui attaque Le Verrier, et pas Delaunay ou Arago ou Laugier ? On peut avancer qu'Arago et Delaunay, déjà fortement fâchés avec Le Verrier, auraient pu être accusés de parti pris. Babinet est a priori plus neutre, mais il a épousé la fille de Laugier et il fait donc partie du clan Arago.
Pour le fond maintenant : Babinet est sûrement assez fin physicien (et mathématicien) pour savoir que certains de ses arguments ne tiennent pas : essentiellement le calcul de la masse et de la position au 1/1/47. Pour la masse, l'addition algébrique et pour la longitude, l'alignement éternel n'ont aucun sens physique.

7. $L = H + N$, ce qui donne avec les valeurs de l'époque en masses solaires ($L = \frac{1}{9300}$, $N = \frac{1}{14500}$) $H = \frac{1}{25900}$, soit sensiblement la masse réelle d'Uranus.
8. Auquel cas, elles auraient une action nulle!!
9. Et même à toute date, pour que le calcul précédent soit un peu crédible.

13.3.3 Réponses de Le Verrier à Babinet

13.3.3.1 Réponse à chaud

Le Verrier répond à chaud à Babinet [Le Verrier, 1848b], en disant que les nouveaux éléments de Neptune (déterminés par Walker) risquaient de moins bien représenter les observations d'Uranus, car il y avait encore des incertitudes sur la masse de Saturne et il pouvait exister une nouvelle planète perturbatrice au delà de Neptune. Alors qu'avec son calcul, il absorbait ces deux possibilités potentielles.

> J'avais en effet calculé les éléments de cette planète de manière à embrasser autant que possible non seulement son action propre, mais encore le complément de l'action de Saturne, et l'action d'une planète supérieure ; tandis que les éléments ayant été déterminés, ainsi que sa masse, par des observations directes [faites par Walker], le calcul des perturbations au moyen de ces données devait représenter rigoureusement l'action de la planète, et laisser en dehors les actions étrangères dont l'effet reparaîtrait naturellement s'il était sensible.

Le Verrier ajoute qu'il avait commencé à faire ce travail [recherche d'une planète au delà de Neptune], mais qu'il l'avait abandonné : « [En utilisant les éléments récents], on parvient à satisfaire complètement les observations d'Uranus et de Neptune ».
Affirmation surprenante : il n'y a pas de traces d'une telle recherche [planète au delà de Neptune] dans les manuscrits.
Et il continue avec cette prophétie qu'auraient dû méditer Lowell et Pickering :

> En cet état de la question, il m'est apparu qu'on n'aurait absolument *rien* pour déterminer la situation d'une autre planète, sinon des considérations dans lesquelles l'imagination aurait trop de part. L'hypothèse qui sert de départ à M. Babinet me semble donc trop précaire.

Il voit immédiatement une première faille dans le calcul de son « savant confrère » :

> on ne peut pas remplacer les actions de deux masses par l'action d'une seule masse égale à la somme des deux, et située en leur centre de gravité, que par des circonstances particulières qui ne sont pas celles du problème.

Babinet était probablement peu convaincu du bien-fondé d'une telle démarche, mais il l'avait néanmoins exploitée dans son attaque contre Le Verrier.

13.3.3.2 Réponse du 11 septembre 1848

Le Verrier reprend sa défense dans la séance de l'Académie du 11 septembre 1848 [Le Verrier, 1848c]. Il commence par laisser entendre ce qu'il pense [10] des observateurs français (voir aussi un peu plus loin) :

> Mes vives instances pour qu'on vérifiât mon travail au moyen d'une lunette furent entendues à Berlin...

Il donne ensuite le ton :

> J'ai fait usage d'irrégularités dont on ne pouvait répondre qu'au dixième de leur valeur... Je ferai voir cependant que l'écart de ma théorie est de beaucoup inférieur à ce dixième.

Il reprend le commentaire de Babinet :

10. Ce qui confirme que Le Verrier peut avoir beaucoup d'humour. Voir "Le Verrier humoriste" § 14.1.5.1.

> On me permettra de ne pas voir de difficulté dans cette affirmation gratuite, « *que l'identité n'est plus admise par personne* ». Je dis, qu'après cette discussion, *personne* ne s'arrêtera au dire de M. Babinet.

Il rappelle sa démarche :

> J'ai déterminé la position de Neptune au moyen des perturbations qu'il produit sur Uranus. Donc, quand de telles perturbations ont lieu, je puis trouver directement où est Neptune. Mais quand il n'y a pas de perturbation, cela m'est impossible... les seules choses que j'ai pu conclure des perturbations d'Uranus sont la direction dans laquelle se trouvait Neptune, sa distance au Soleil et sa masse.

On constate que Le Verrier ne mentionne ni l'excentricité, ni la longitude du périhélie, dont les valeurs qu'il avait prédites étaient très éloignées de la réalité.
Il répond point par point aux accusations formulées contre lui :

> Est-il vrai que la direction dans laquelle j'ai placé Neptune comporte une énorme erreur... ? NON, cela est faux... Pendant soixante-cinq ans, ma théorie, déduite de considérations indirectes, assigne à Neptune une suite de positions qui ne diffèrent jamais des positions obtenues au moyen de l'orbite directe que d'un *cinquante-cinquième* au plus de la circonférence du cercle.... j'entends M. Babinet déclarer que quand il avait parlé *d'erreurs énormes*, il n'en avait pas fait le calcul, et qu'il les croyait beaucoup plus considérables qu'elles ne sont.
> Pendant tout le temps que Neptune a agi sur Uranus, ma théorie ne s'est point écartée de celle déduite des observations de plus de $\frac{1}{91}$ de la circonférence. Et l'on vient dire aujourd'hui que la découverte par Galle est un hasard fortuit !

Il répond avec humour (et peut-être avec humeur aussi) à l'accusation de découverte par hasard :

> les planètes deux fois grosses comme Uranus, et encore inconnues, quoiqu'elles brillent comme des étoiles de septième grandeur, sont répandues en si grand nombre dans le ciel, qu'il n'y a rien de surprenant à ce qu'en dirigeant au hasard son doigt vers un point quelconque du firmament, on ait de grandes chances d'en trouver une ! Et c'est sans doute à cause de leur nombre même, et parce qu'il n'y aurait aucun mérite à les découvrir, que nos observateurs dédaignent de le faire !

Question suivante : « Est-il vrai qu'il y ait des erreurs énormes relativement à la distance au Soleil ? NON. Cela est faux ». Il dit d'abord qu'il est

> indigne d'un astronome d'exprimer les écarts de distance en lieues [11] de poste.
> En 1812, je n'ai fait qu'une erreur d'un quatorzième sur la distance ; en 1822 et en 1832 un seizième ; en 1842, un treizième. Jamais le *dixième*...
> J'ai placé Neptune un peu trop loin ; mais je l'ai fait un peu trop gros.

Question suivante : « Est-il vrai que la masse théorique de Neptune diffère de la masse déduite de l'observation du satellite à ce point, que ce soit un argument irrésistible contre l'identité du Neptune théorique avec le Neptune observé ? NON. Cela est faux ».
Jacques Laskar écrit [Laskar, 2017] :

> Il est sans doute normal que Le Verrier, ayant supposé une distance au Soleil plus grande, se retrouve aussi avec une masse de Neptune plus importante. Les perturbations principales sont en effet des termes de marées, proportionnels à la masse, et inversement proportionnels au cube de la distance.

11. Ces évaluations en lieues de poste ne figurent pas dans la version imprimée de l'article de Babinet ; elles sont signalées par l'abbé Aoust, qui était présent lors de la séance : peut-être Babinet les a-t-il mentionnées de vive voix devant les journalistes présents dans la salle, afin de les impressionner ?

Le Verrier donne pour se justifier 3 exemples où deux mesures, soit à des époques différentes, soit par deux méthodes différentes ont conduit à des résultats très différents ; en particulier il évoque la détermination de la masse d'Uranus :

> On a déterminé aussi la masse d'Uranus de deux manières : par l'action que cette planète produit sur Saturne, et par la considération de ses satellites. Et bien, la seconde des valeurs ainsi déterminées, n'est que les $\frac{75}{100}$ de la première. Et cependant on disposait de quarante années d'observations directes d'Uranus, tandis, que je n'avais pas, moi, une seule observation de Neptune. Et cependant, on ne demandait aux perturbations que Saturne éprouve de la part d'Uranus que la masse de cette dernière planète, tandis que j'exigeais des perturbations que Neptune exerce sur Uranus, et la direction, et la distance, et la masse de la planète. Dira-t-on par hasard qu'il y a deux planètes Uranus ? On le devrait pour être logique.

Il conclut, philosophe et un peu désabusé :

> Mœstlinus, le maître de Kepler, regardait comme un devoir pour lui de détourner les astronomes de s'occuper de la théorie de Mercure, s'ils ne voulaient pas perdre leur repos. Pourquoi faut-il, hélas ! que Mœstlinus ne nous ait pas donné le même conseil sur la recherche des planètes ?

13.3.3.3 Réponse du 2 octobre 1848

Le Verrier reprend encore la discussion lors de la séance du 2 octobre 1848 [Le Verrier, 1848a].

> Dans ma lecture du 11 septembre dernier, j'ai montré que les écarts qui existent entre la théorie prédite de Neptune, et celle qui résulte des observations, sont loin d'être considérables. Je me propose aujourd'hui d'entrer plus avant dans la question, et de prouver que tous ces écarts sont contenus en dedans des limites que l'incertitude des données permet d'atteindre.

Il commence par comparer la longitude vraie déduite de sa théorie avec celle qui résulte de l'orbite calculée par M. Walker. On donne, fig. 13.2, les écarts qu'il trouve.

	Longitude vraie dans l'orbite prédite.	Longitude vraie dans l'orbite Walker.	Différence.
En 1887.....	396°,9	415°,5	18°,6
1877.....	380,9	393,6	12,7
1867.....	363,9	371,6	7,7
1857.....	345,7	349,7	4,0
1847.....	326,5	327,5	1,0
1837.....	306,4	305,7	— 0,7
1827.....	285,9	283,9	— 2,0
1817.....	265,3	262,2	— 3,1
1807.....	245,2	240,7	— 4,5
1797.....	225,9	219,3	— 6,6
1787.....	207,6	198,0	— 9,6
1777.....	190,4	176,7	— 13,7
1767.....	174,3	155,5	— 18,8

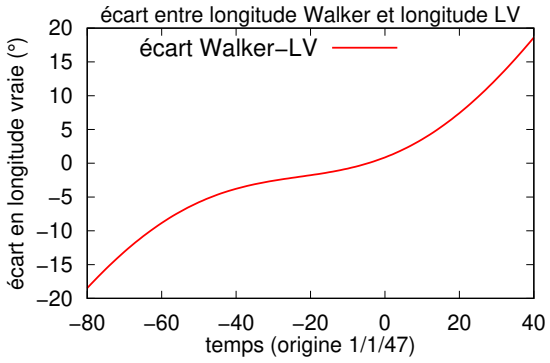


FIGURE 13.2 – Écarts, calculés par Le Verrier, entre la longitude vraie calculée avec sa théorie et celle calculée à partir de l'orbite de Walker sur une période de 120 ans. Le Verrier déclare que l'écart entre les deux théories ne dépasse pas 18° sur cet intervalle de 120 ans, ce que l'on confirme avec le tracé de cet écart, obtenu avec TRIP

Le Verrier entreprend ensuite de montrer qu'il avait prévu de tels écarts, de l'ordre de 18°, dans son mémoire du 31 août 1846 [Le Verrier, 1846a] :

> Il s'agit de savoir si ces différences, ainsi *rigoureusement* calculées pour 120 années, sont effectivement inférieures à celles que *l'incertitude des données* pouvait et devait introduire...

Il commence par faire un peu de pédagogie :

> Comprenons bien, avant tout, la signification de cette expression : *incertitude des données*, expression qu'on a trop souvent traduite par *incertitude des observations... l'incertitude des données* ne résulte pas seulement de *l'incertitude des observations*, mais encore de deux autres causes, savoir : 1° d'une *inexactitude possible de la masse de Saturne susceptible d'ajouter* 3″ à l'incertitude des observations ; et, en second lieu, de *l'influence d'une planète située bien au delà de Neptune, qui agirait encore sur Uranus*, et dont l'action, comme il est facile de le voir, pourrait produire de 5″ à 7″ sur Uranus...
> *L'incertitude des données peut parfaitement monter à* 10″ *ou* 12″*, tandis que l'incertitude des observations modernes ne dépasse pas* 2″ *à* 3″*.*

Il continue :

> C'est dans cette hypothèse *arbitraire* [choix d'une incertitude égale à 5″ pour les observations modernes] que j'ai fait mes calculs de limites. Mais on voit, et l'on n'oubliera pas, que j'aurais pu, au lieu de 5″, prendre pour écart 10″ et même 12″.

Il insiste et conclut pour cet écart de 18° :

> Tout cela étant posé, si l'on développe complètement les calculs numériques de ma théorie des limites, [...], on trouve, *même en réduisant à* 5″ *l'incertitude des données modernes*, que pendant les 120 années que j'ai comparées plus haut, les différences de longitude de Neptune, dans mon orbite prédite et dans l'orbite de Walker, sont toujours restées au-dessous de l'incertitude des données. [..]
> Ainsi, dès 1846, j'ai professé que l'incertitude des données pourrait produire une incertitude de plus de 18 degrés dans le lieu de l'astre, à l'une des époques où l'on pouvait le mieux répondre de sa position.

De fait, dans le mémoire du 31 août 1846 [Le Verrier, 1846a], il mentionne l'intervalle 321°−335° pour la longitude vraie au 1/1/1847, et en admettant une éventuelle excentricité élevée, il étend cet intervalle à 321°−345°, ce qui représente selon le cas, un écart de 14° ou de 24°, soit en moyenne 19°.
Il continue de se justifier :

> 1° Il est prouvé que, soit avant la découverte de Neptune, soit après cette découverte en 1846, soit aujourd'hui, j'ai toujours, relativement aux incertitudes produites dans le résultat par l'incertitude des données, tenu le même langage.
> 2° Que l'orbite calculée par M. Walker [...] peut fort bien être en erreur de plusieurs degrés [...] et que si j'ai admis comme exactes les positions qu'elle fournit à ces époques, c'est uniquement par courtoisie, et parce qu'il n'en résulte pour moi aucun embarras [...]

Il passe ensuite aux éléments elliptiques de Neptune, en faisant apparaître leur caractère non essentiel dans un premier temps :

> Les éléments, avais-je dit à l'Académie, ne sont que des *auxiliaires* mathématiques propres à conduire à la connaissance de la direction et de la distance : ces auxiliaires peuvent varier considérablement, sans cesser de donner, aux époques des perturbations, la position du corps troublant.

On a effectivement constaté au chapitre 8 que ces paramètres auxiliaires, e' et ϖ', pouvaient varier dans des proportions importantes en fonction des données, en particulier en fonction de la valeur du demi-grand axe attribuée à Neptune (voir § 6.21).
La formule [auxiliaire mathématique] lui est peut-être inspirée par la lettre de J. Herschel datant du 22 septembre 1848, qui lui écrit [Herschel, 1848] :

> The axis and eccentricity are intellectual objects remote results, useful to represent to the mind's eye the general relations of the planet to space and time. The direct object of the enquiry was to say « whereabouts in space at the present moment is the disturbing body and where has it been within reasonable limits for the last 40 or 50 years ». Now it would seem, if I understand the matter that, laying axis and eccentricity out of the question, you have assigned this pretty correctly all things considered ».

On voit là toute l'intelligence de John Herschel, fruit de son expertise quotidienne : il sait faire la distinction entre l'essentiel (a', ℓ') et l'accessoire (e', ϖ').
Le Verrier justifie aussi l'encadrement qu'il a donné pour le demi-grand axe : $35.04 < a < 37.90$, encadrement qui est bien loin de contenir la valeur réelle 30.11 :

> La solution de la prétendue difficulté est tout entière dans ce fait, que les limites 37.90 et 35.04 *ne sont pas des limites absolues*, mais bien des limites relatives à l'hypothèse *arbitraire*, que les données modernes ne comportaient pas d'incertitude supérieure à $5''$. [...] Elle [l'incertitude sur les données modernes] pouvait atteindre $10''$ ou $12''$ [...] Or, quand on reprend le calcul des limites du demi-grand axe avec d'autres incertitudes que $5''$ dans les données, on aperçoit qu'il s'en faut de beaucoup que l'étendue comprise entre les limites de ce demi-grand axe varie proportionnellement à l'incertitude des données. Elle varie bien plus rapidement.

C'est partiellement vrai, comme on le constate à la figure 13.3 où l'on a fait varier la tolérance pour les seules observations modernes. Sur ce graphe, on a représenté les points de coordonnées (v', r') qui satisfont aux 33 équations de condition établies par Le Verrier (fig. 6.9 et voir la discussion au § 6.21). On constate, d'un graphe au suivant, l'augmentation importante de l'intervalle où doit se trouver v' ainsi que l'augmentation importante de l'intervalle où doit se trouver r'. De même, les éléments elliptiques e', ϖ' varient énormément avec les variations de la tolérance. Par contre, contrairement à ce qu'affirme Le Verrier, ε', ℓ' et a' varient relativement peu : même en imposant des tolérances très larges, on ne dépasse guère pour a' l'intervalle [34.7 : 38.7]. Cet intervalle semble bien étroit quand on examine la figure 13.3 où l'on voit que r' peut prendre des valeurs entre 20 et 50 *au* : cela tient au fait que, pendant le calcul d'enceintes, e' peut varier dans des conditions considérables, entre 0.03 et 0.96, ce qui explique que r' peut varier beaucoup, alors que a' varie relativement peu.
Comment expliquer que cet intervalle ne contienne pas la valeur exacte ? Cela doit tenir au fait que les 33 équations de condition utilisées par Le Verrier (fig. 6.9) sont des équations locales, écrites au voisinage du couple (α, ε') = (0.51, 252°) et les utiliser loin de ce voisinage n'est pas très pertinent. Le Verrier répond ensuite indirectement à l'objection de Peirce, qui avait signalé une discontinuité dans les solutions si l'on faisait varier continûment le rapport des demi-grands axes de 0.5 à 0.63 (toujours [Le Verrier, 1848a]) :

> C'est ici le lieu de répondre à une autre difficulté, qu'on a cru trouver dans ce fait, qu'avec le demi grand axe 30.20 la durée de révolution de Neptune serait, à très peu près, double de la durée de la révolution d'Uranus : circonstance qui devrait introduire dans les théories de ces deux planètes des inégalités d'amplitudes considérables. *Ce n'est qu'une difficulté de forme*, ajoute avec raison sir Herschel, dans sa lettre du 22 septembre [Herschel, 1848]. Et, en effet, loin que ces inégalités d'amplitudes considérables soient un embarras, on peut, au contraire, les négliger pendant une période de temps égale à celle que j'avais à considérer. J'en ai exposé la raison à la page 157 de mon Mémoire. Dans ces inégalités de la forme $A\sin(\alpha t + \beta)$, α étant un angle très petit, ce qui permet, dans les limites où le temps est compris pour nous, de remplacer $\sin(\alpha t + \beta)$ par une série convergente procédant selon les puissances du temps, et bornée aux deux premiers termes. Or ces termes se confondent avec la longitude moyenne de la partie elliptique du mouvement de l'astre troublé, et peuvent ainsi être négligés dans le calcul des perturbations [série convergente signifie en fait développement limité].

On ne peut qu'admirer la clarté, la classe et la précision des explications de Le Verrier.

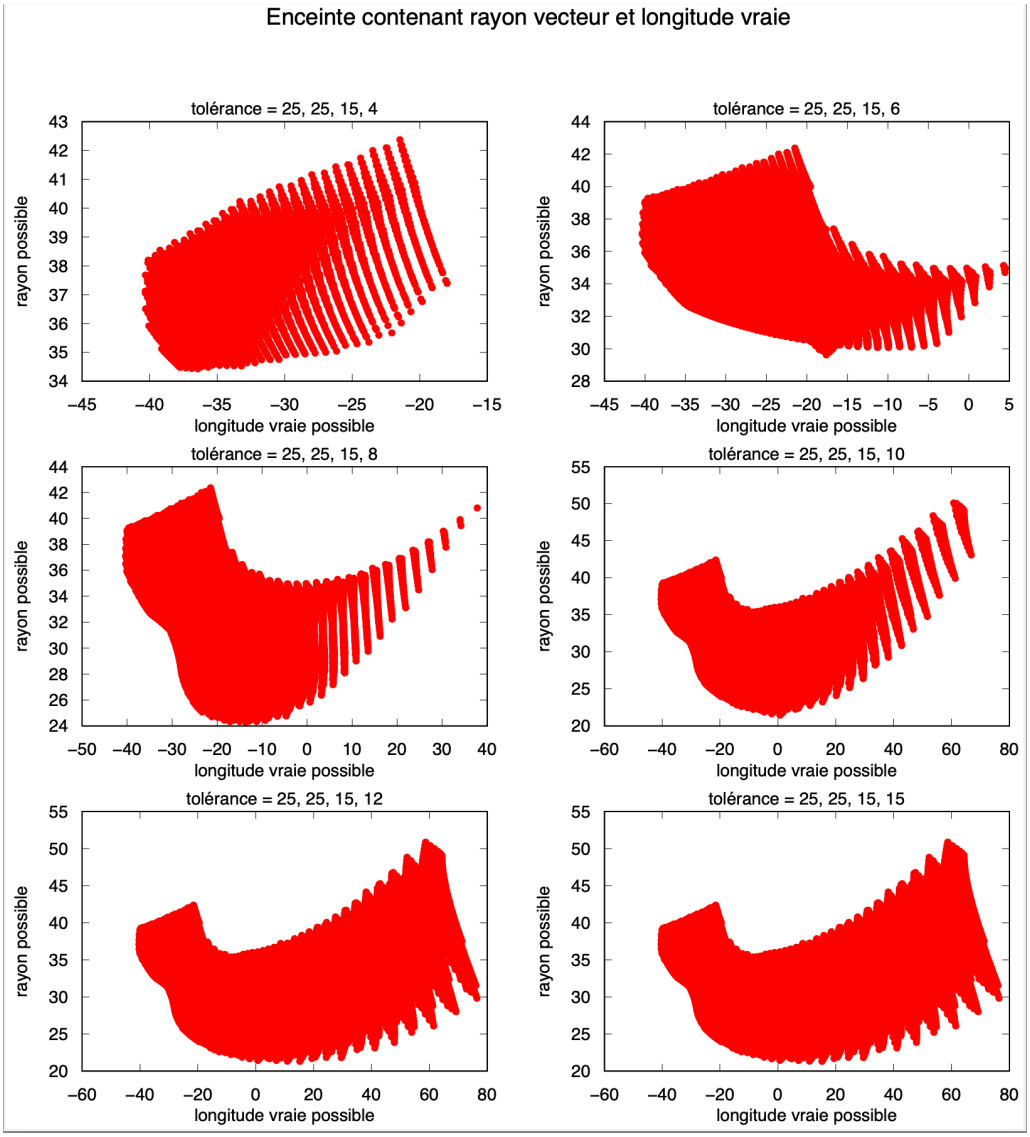


FIGURE 13.3 – Variations de l'enceinte déterminées par TRIP quand on fait varier uniquement la tolérance moderne ; on rappelle que l'on a représenté les couples (v', r') qui satisfont aux 33 équations (fig. 6.9) écrites à la figure 6.9 (voir la discussion au § 6.21). Cette figure confirme l'affirmation de Le Verrier : l'encadrement sur le rayon croît beaucoup plus vite que la tolérance admise sur les observations modernes. Par contre, contrairement à l'affirmation de Le Verrier, le demi-grand axe a' ne croît pas dans les mêmes proportions. Et quand on passe d'une tolérance de 12 as à 15 as, il n'y a pas de changement dans l'enceinte

Il résume ses prédictions [Le Verrier, 1848a] :

> J'ai annoncé en 1846 qu'à tel jour donné on trouverait en tel lieu une planète qui rendrait compte des perturbations d'Uranus. Et les astronomes de Berlin ont trouvé au jour et à la place indiquée une planète qui rend compte des perturbations d'Uranus [...] L'exactitude de la prédiction aurait été aussi correcte en 1827 ou 1837.

La dernière affirmation est correcte, mais seulement quand on utilise INPOP. Selon Baghdady et Brookes, avec la méthode des équations de condition, la prédiction aurait été possible en 1825 et en 1835, mais pas en 1830 (voir table 10.14).

Il conclut avec une formule péremptoire : « Les éléments de Neptune déduits de l'observation, ne s'éloignent pas des éléments prédits au delà de ce qu'autorisaient les incertitudes des données. Je le prouve sans réplique ».
Le Verrier est très habile : il termine son article en dénonçant les incrédules qui ne voulaient pas croire à ses prédictions de 1846 et qui sont les premiers à trouver intolérables une erreur de quelques degrés dans la position de Neptune sur une période de 80 ans [Le Verrier, 1848a] :

> Lorsque j'annonçai mon principal résultat en 1846, je ne trouvai presque personne qui voulût y croire. Déduire la position d'une planète d'un petit dérangement qu'elle produit sur Uranus ! Quelle folie ! disait-on. Or ce sont précisément ceux qui parlaient ainsi qui, aujourd'hui, trouvent tout à fait intolérable que j'aie réussi à donner la position de Neptune pendant 80 ans sans erreur de plus de sept degrés et demi aux extrémités de cette période, et qui pensent qu'on en doit faire un sévère exemple.

Il prouve par ce long et détaillé plaidoyer qu'il a fait tout ce que l'on pouvait attendre de lui pour la situation d'Uranus−Neptune : l'orbite d'Uranus est corrigée et son Neptune occupe une position proche du vrai Neptune.

13.3.4 Conclusions

Babinet et Le Verrier s'étaient déjà affrontés pour une place de secrétaire-bibliothécaire de l'Observatoire de Paris en janvier 1841 : Babinet l'avait emporté par 8 voix contre 1 (voir § 1.2), car Babinet faisait déjà partie du clan Arago [12] et était donc supporté par ce clan. Le Verrier en gardera certainement une rancune [13], d'autant qu'à l'époque, il gagnait chichement sa vie.
Dans son mémoire du 31 août 1846, Le Verrier avait donné les éléments elliptiques de Neptune et dans celui du 5 octobre (*Herschel* p. 250) il avait même prédit que l'inclinaison de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne était d'au moins 4°37', ce qui n'est pas le cas.
Malgré les écarts importants entre prédiction et observations, il garde dans son compte-rendu du 11 septembre 1848, reprenant le détail de sa recherche de la planète perturbatrice, une grande confiance dans son travail et dans ses résultats, confiance peut-être doublée d'un optimisme un peu forcé [Le Verrier, 1848c] :

> Ainsi donc, en résumé, la direction, la distance au Soleil et la masse de Neptune, c'est-à-dire les trois qu'on fût en droit de demander, sont exactes au delà de toute espérance. Le Neptune qu'on a trouvé, tout comme celui que j'ai cherché, rend parfaitement compte des perturbations d'Uranus. Cette grande accusation dont on a fait tant de bruit, rentrera donc dans le néant, d'où elle n'eût jamais dû sortir.

Dans cette première réponse à Babinet, on constate donc que Le Verrier a un peu rabaissé ses ambitions : par sa méthode, on ne peut déterminer que la longitude, et le couple corrélé (distance, masse). Il sous-entend donc implicitement dans cette réponse qu'il avait été un peu trop gourmand en voulant, dans un premier temps, tout déterminer par ses calculs.

Dans sa deuxième réponse à Babinet, datant du 2 octobre 1848 [Le Verrier, 1848c], il conforte son argumentation et met fin à la polémique.

La découverte de Neptune a été saluée avec faste dans les journaux français ; puis, quand la nouvelle orbite a été connue, il est apparu quelques articles critiques dans certains d'entre eux (*La Presse* notamment, voir des extraits de presse publiés dans [Institut de France, 1911]). Babinet, qui était plutôt un vulgarisateur, se sent un peu le héraut de cette opposition populaire. Ses accusations seront reprises par l'abbé Moigno dans son journal *La Presse* et Le Verrier demandera

12. On rappelle que Babinet avait épousé la sœur de Laugier, qui avait lui-même épousé la nièce d'Arago ; Babinet faisait donc partie du clan Arago.
13. De même qu'il gardera une rancune à Mauvais, qui avait été élu contre lui à l'Académie en novembre 1843.

un droit de réponse.
On peut aussi penser que Babinet ne devait pas avoir analysé les résultats de Le Verrier avec suffisamment de finesse et, en tant que mathématicien, il ne doit pas être totalement convaincu du bien-fondé de toutes ses accusations.
Babinet aime bien parler [14], mais ici, il a fondé ses critiques sur des arguments physiques indéfendables. Il a aussi usé d'artifices discutables pour les scientifiques, mais propres à impressionner les personnes peu versées dans les sciences, en évaluant les écarts entre théorie et observations en kg ou en lieues de poste. Il ne faut pas oublier que les séances de l'Académie étaient publiques (depuis la prise de fonction d'Arago, comme secrétaire perpétuel en 1835) et qu'il y a des journalistes présents, dans l'espoir d'assister à des joutes verbales et à des disputes, qu'ils se feraient un plaisir de relater dans leurs journaux respectifs.
Selon ses contemporains, Le Verrier n'était pas un bon orateur, en particulier au Sénat, mais quand il s'agissait de défendre ses théories avec des chiffres, il était excellent (voir par exemple les commentaires de Lucile, § 14.1.4.2) : et ici, il évalue les écarts entre ses résultats et les résultats de Walker en pourcentage, ce qui est fort habile.
On rappelle ce que Henri de Parville [15] a écrit au sujet de Le Verrier :

> c'était plutôt un "caractère", qui n'était pas sans grandeur ; au contraire. Il était âpre, virulent, plein de dédain pour ses adversaires, hautain, cassant même, mais d'une telle énergie, d'une telle puissance dans la lutte, qu'il finissait par s'élever lui-même sur un piédestal que ne pouvaient atteindre ses contradicteurs ; il devenait grand, oui, dans sa haine ! Mais qu'on ne s'y trompe pas, il ne haïssait pas comme les autres ; il haïssait presque par acquit de conscience et pratiquait la méthode mathématique jusque dans ses rancunes.

Le Verrier était un polémiste né et sans pitié : en 1842, il avait humilié Delaunay, qui débutait sa carrière d'astronome, et un peu plus tard Mauvais et Laugier, accusés de conclusions hâtives au sujet de la comète de de Vico [Le Verrier, 1847a].

Le Verrier a eu beau jeu de démonter chacune des accusations émises à l'égard de ses calculs. Il le fait avec beaucoup de conviction, de compétence et d'humour. Il avait la tâche facile.
Par son argumentation très maîtrisée, Le Verrier met fin à la polémique au sujet des éléments elliptiques prédits pour Neptune ; on ne dira plus qu'il y a deux Neptune : celui annoncé par Le Verrier et celui découvert par Galle.
Et pour confirmer ce verdict, l'abbé Aoust [Aoust, 1878], qui était présent ce jour là [2/10/48], écrit [16] : « Cauchy et Biot se levèrent successivement et déclarèrent qu'ils croyaient, eux, à l'identité des deux astres et qu'ils protestaient contre des attaques indignes de l'Académie ». Et il ajoute : « Ce fut le dernier assaut. Le Verrier resta maître [17] du champ de bataille ».
Danjon commente l'attaque de Babinet sur Le Verrier en ces termes [Danjon, 1946a] :

> Babinet se couvrit de ridicule en ajoutant à Neptune une autre planète troublante, qu'il appela Hypérion, et dont il calcula les éléments par une méthode ingénieusement absurde. Quelques mots de Le Verrier firent rentrer promptement Hypérion dans le néant.

C'est aussi l'opinion de Littrow, qui écrit dans sa lettre du 28 octobre 1848 (publiée dans [Institut de France, 1911]) :

14. Selon ses contemporains, sa phrase était souvent lourde et embarrassée ; les grâces dont il cherche à l'orner sentent un peu trop le savant en 'us' ; il agrémentait ses propos de nombreuses anecdotes [Véron, 2016].
15. Journaliste scientifique (1838−1909), la citation provient d'un article publié dans le journal des Débats du 10 octobre 1877.
16. Herschel, Struve, Jacobi et d'autres écrivirent aussi pour défendre Le Verrier (lettres dans le dossier Ms 1072 de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris).
17. En fait, Liais, très rancunier envers Le Verrier, qui l'avait renvoyé de l'Observatoire, attendra 1892 pour publier un pamphlet dans lequel il dénie tout mérite à Le Verrier dans la découverte de Neptune, voir § 9.2.

> Dès le moment où les observations de Neptune vous ont donné une distance du Soleil plus petite que celle que vous étiez contraint d'adopter, tout astronome se devait attendre qu'on trouvera un jour aussi la masse de la nouvelle planète diminuée dans le même rapport.
> Si votre agresseur n'est pas assez astronome pour avoir partagé cette attente dès le commencement, j'aurais cru qu'il est assez savant pour ne pas juger des choses qu'il n'entend point. Je ne comprends pas comment les secrétaires de l'Académie ont pu admettre une agression tellement ridicule et dirigée contre une gloire des plus brillantes de l'Institut lui-même ; le blâmage de M. B... qui le devrait faire désespérer selon moi, par là est réfléchi sur l'Académie....

Mais Le Verrier n'oubliera pas l'incident : il écrivit au ministre le 1 août 1863, une fois directeur de l'Observatoire [Véron, 2016] :

> Mr X [Babinet], nommé astronome-adjoint en 1854, n'a jamais fait aucune espèce de service et touche néanmoins 2000 frs par an. Ce serait un abus à supprimer.

Et effectivement, en 1864, Babinet n'est plus astronome-adjoint : la vengeance est un plat qui se mange froid !

13.4 Autres polémiques

On peut citer aussi le cas de Liais, qui, après une analyse assez sommaire, a dénié à Le Verrier tout mérite dans la découverte de Neptune (voir § 9.2). La motivation principale est la vengeance, car Le Verrier l'avait fait renvoyer de l'Observatoire en 1858. Mais ce n'est pas une polémique à proprement parler, car Liais avait attendu que Le Verrier soit mort avant de faire sa déclaration (voir § 9.2).
Il y a eu d'autres polémiques avec Delaunay, avec Liouville, mais le sujet de dispute n'était plus directement lié à Uranus ou à Neptune.

Chapitre 14

QUELQUES ASPECTS DE L'HOMME LE VERRIER

Objectifs

Le Verrier est un grand scientifique ; il l'a prouvé : il aurait pu être aussi bien chimiste qu'astronome. Il raisonne aussi bien en physicien qu'en mathématicien.
On sait que Le Verrier était un très gros travailleur, mais ce travail a, à la longue, usé sa santé.
On sait aussi que Le Verrier était d'un abord difficile à l'Observatoire, mais Le Verrier, en dehors de l'Observatoire, pouvait avoir de bons côtés, comme le révèle sa fille Lucile dans son journal intime, ou bien Gautier, dans ses lettres à ses parents.
On donne dans ce chapitre, quelques réflexions sur ces différents aspects de l'homme Le Verrier, en privilégiant les jugements, moins connus, concernant l'époque de la découverte de Neptune. Pour cette époque, les sources sont rares : Le Verrier ne laisse filtrer aucun élément personnel dans ses manuscrits et on ne peut se reposer que sur les lettres de Le Verrier à Gautier ou de Gautier à ses parents. Dans ses lettres, Le Verrier montre des qualités humaines un peu inattendues et utilise même assez souvent un vocabulaire très chaleureux.

Sommaire

14.1 L'homme Le Verrier **435**
14.1.1 Santé de Le Verrier 435
14.1.2 Témoignages sur le caractère de Le Verrier 436
14.1.3 Le Verrier dans son travail 439
14.1.4 Éclairage apporté par Lucile 439
14.1.5 Quelques traits d'humour 442
14.2 Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris **444**
14.2.1 Dictature de l'astronomie de position à l'Observatoire de Paris 444
14.2.2 Flammarion 445
14.2.3 Équipement de l'Observatoire en instruments 446
14.3 Le Verrier observateur **446**

14.1 L'homme Le Verrier

14.1.1 Santé de Le Verrier

Il est évident que Le Verrier était un travailleur acharné quand il avait une recherche en cours. La quantité de travail qu'il s'est imposé, le stress qu'il a subi pour finir à des échéances fixées à l'avance, ont dû altérer durablement sa santé. Les 3 extraits suivants sont pris de lettres adressées à Émile Gautier.
On rappelle que dans sa lettre à Gautier du 10 septembre 1846, il avait avoué une très grande fatigue, juste après avoir bouclé son troisième mémoire (voir l'extrait correspondant p. 49). Il continue dans la même lettre :

> Ma santé n'est pas rétablie ; je suis repris tous les après-midis d'une sorte d'accès fébrile qui me laisse sans forces physiques et morales, et il se pourrait très bien, si cela dure, que je me trouvasse dans l'impossibilité de vous être d'aucun secours. Le tableau n'est pas flatteur ; malheureusement il est exact [...] Vous voyez, je commence par vous dire que, passé à l'état de patraque, je ne vous serai bon à rien.

Le 7 octobre 1848 :

> J'ai été malade comme une bête, ne sortant que pour affaire indispensable, parlant peu, et n'écrivant pas du tout. Aussi suis-je effrayé du nombre de missives à écrire ; la vôtre est loin d'être classée toutefois parmi celles qui me font peur, car c'est par vous que je commence.

Le 3 avril 1849 :

> J'ai été repris de mes rhumatismes, et ma femme a été plus souffrante. J'irai cependant chez vous ce soir à 8 heures, réclamer la promesse que vous m'aviez faite de présenter votre vieux professeur [38 ans !] à vos aimables compatriotes [des Suisses].

Selon l'abbé Aoust [Aoust, 1878], Le Verrier était en bonne santé, et selon lui, ce n'est qu'en 1872 que Le Verrier « acquit la certitude que la maladie avait aussi prise sur lui ».
C'est un propos un peu étonnant, vu les crises déjà signalées, et le mal [maladie du foie] devait couver déjà depuis un certain temps.
Voici quelques extraits de lettres de Le Verrier à l'abbé Aoust (inclus dans "*Le Verrier, sa vie, ses travaux*" p 23−24), [Aoust, 1878].
Le 24 octobre 1872 ; « j'ai été très sérieusement souffrant et je suis loin d'être complètement rétabli ».
Le 17 octobre 1873 : « La santé générale s'est améliorée ; mais une certaine douleur de côté s'est, au contraire, aggravée ».
Le 18 novembre 1873 :

> Atteint d'une absence complète de forces, j'étais obligé de m'y reprendre à quatre fois pour monter mes trois étages du quai Voltaire... Je n'étais bien que couché... Une des choses qui fatiguent le plus, c'est de passer sans cesse d'un sujet à un autre... Et j'imagine que ce va et vient d'un sujet à un autre pendant tant d'années a beaucoup contribué à m'épuiser [...] Je vous recommande de réprimer le geste d'étonnement par lequel ceux qui me revoient me témoignent si éloquemment qu'ils me trouvent si complètement changé.

Le 3 février 1874 : « J'ai fait une nouvelle dégringolade ».
Le 23 février 1875 : « Ma santé laisse beaucoup à désirer ».
Le 24 mars 1877 : « Je suis définitivement une patraque. J'ai la douleur de ne pouvoir aller à Lyon, assister au mariage de mon fils ».
Patraque : mot déjà utilisé dans la lettre de Le Verrier à Gautier du 10/9/46.
Et Aoust [Aoust, 1878] conclut de cette manière :

> Ces citations multipliées prouvent que, malgré les difficultés, les complications d'une santé épuisée et d'un corps brisé, Le Verrier était toujours à l'œuvre sans désemparer, et que sa volonté triompha de la maladie, pour l'achèvement de son entreprise.

On peut aussi citer la grande estime que Le Verrier garda pour son professeur de rhétorique du collège de Caen, Julien Travers. Il communique régulièrement avec son ancien professeur ; malheureusement ces lettres ne semblent pas accessibles, à part celle qui suit, datée du 16 juillet 1871 citée dans [de Beaurepaire, 1890]. On peut y deviner l'affection qu'il porte à son ancien professeur et son désarroi quant à sa situation personnelle ainsi qu'à celle du pays.

> Mon très cher Maître,
>
> c'est avec une bien vive satisfaction que j'ai reçu de vos nouvelles, de celles de votre famille, de ses joies présentes et de ses joies futures. J'aime la maison et le jardin de la rue des Chanoines, le coteau, la vallée, et à vous savoir toujours alerte, toujours gai (autrefois, mais à présent ?). Je n'excepte que l'Orne qui, depuis une certaine soirée, me fait peur [1].
> Puissez-vous, mon cher ami, avoir conservé votre vigueur, votre verve, votre inaltérable entrain ! Pour moi, je n'y suis plus quant à présent, et je ne sais si cela reviendra. Tout m'apparaît comme à travers un épais brouillard dans le lointain. Je ne m'y mêle pas et n'ai aucune envie de m'y mêler.
> N'allez pas croire au moins que le changement de ma situation [révocation par le ministre] y soit pour quelque chose ; non, pour rien. C'est le mal terrible et l'état de notre pauvre patrie qui me font pleurer [Guerre avec la Prusse, commune de Paris...]

Il y a une ambiguïté sur "c'est le mal terrible" : est-ce une allusion à sa maladie du foie ou bien à l'état maladif de la France ?

14.1.2 Témoignages sur le caractère de Le Verrier

On donne dans ce paragraphe quelques extraits de témoignages sur le caractère, contrasté, de Le Verrier.

14.1.2.1 Témoignages avant l'arrivée à l'Observatoire

D'abord, un premier extrait qui montre que Le Verrier peut s'attacher à des personnes (de haute qualité intellectuelle). Gautier est rentré à Genève et Le Verrier apprend qu'un accident s'y est déroulé (lettre du 11 octobre 1846)

> Mon très cher ami, la nouvelle que je viens de recevoir qu'une grave collision a éclaté dans votre ville, la presque certitude que vous y aurez été mêlé, me donne pour vous les plus vives inquiétudes. Que je regrette que vous ne soyez pas venu à Paris ! Écrivez-nous promptement, si vous ne l'avez déjà fait, pour nous rassurer. Mais je compte que vous n'aurez pas oublié que vous avez laissé ici des amis et qu'un mot de vous nous tire d'inquiétude.

Ensuite une remarque de Gautier (dans sa lettre à ses parents du 24 juin 1847) sur le manque de pragmatisme [2] de Le Verrier ; Gautier l'avait finalement décidé à se rendre en Angleterre et apparemment, Le Verrier est arrivé un peu démuni financièrement :

> J'ai présenté M. Le Verrier à M. J.L. Prévost, qui lui fournira des fonds, vu qu'il est arrivé ici avec un sac d'écus de 5 francs et rien d'autre. On n'a pas idée d'être aussi peu au courant des affaires de la vie !

1. Quelques années auparavant, M. Travers avait failli se noyer dans l'Orne, dans laquelle il était tombé un soir.
2. Il est bien connu que les savants sont dans la Lune, ou bien sur Neptune !

Gautier a effectué des calculs sur la comète Colla ; dans sa lettre du 28/11/852, Le Verrier écrit

> Aussi seriez-vous encore bien plus gracieux si au lieu de confier votre travail à la poste, vous l'apportiez vous-même. C'est dans cet espoir que je suis votre tout dévoué et affectueux U.J. Le Verrier

Le Verrier a déjà sa fierté ; dans sa lettre à Gautier du 19 mai 47 il écrit :

> Il déplaît à Mr A. que je fasse ce voyage d'Angleterre. Il travaille de son mieux à aliéner les savants de ce pays. Et quand à me mettre à m'occuper de contremiser et d'envoyer des explications : je vous avoue que je suis trop fier pour cela.

Une mention de la relation entre Le Verrier et Gautier peut se lire dans [de Candolle, 1892]

> [Gautier suit alors les cours de Le Verrier au Collège de France] : Frappé de la grande assiduité de son élève et de ses aptitudes au travail, Le Verrier ne tarda pas à se l'attacher comme aide particulier et lui voua même dès lors une chaude amitié qui ne fit que s'accroître avec le temps. C'est ainsi que notre compatriote se trouva bientôt initié aux vastes calculs relatifs aux perturbations d'Uranus, qui devaient aboutir à la fameuse découverte de la planète *Neptune*.

14.1.2.2 Témoignages plus tardifs

Voici une appréciation de l'abbé Aoust, extrait de [Aoust, 1878]

> Illustre maître[3], vous ne fûtes pas, aux yeux de vos contemporains, à l'abri d'attaques passionnées et d'hostilités ardentes : soit à cause de votre énergie à défendre ce qui est vrai et juste ; soit parce que, travailleur infatigable, vous vouliez trouver chez les autres une ardeur pour le travail égale à la vôtre ; soit peut-être à cause de votre incontestable supériorité. L'heure de la justice a maintenant sonné, l'oubli écrasera vos injustes agresseurs tandis que la postérité a déjà inscrit votre nom à côté des noms les plus glorieux.

À la suite de la biographie de Le Verrier par l'abbé Aoust, Julien Travers (1802-1888), qui fut le professeur de rhétorique de Le Verrier à Caen, écrivait :

> Mon intention était de faire des additions nombreuses à la biographie de Le Verrier, par M. l'abbé Aoust ; mais le temps m'a manqué pour réunir les lettres que mon respectueux élève de rhétorique m'a écrites depuis l'année de sa grande découverte jusqu'à celle de sa mort. Le résultat doit être, non la réhabilitation de mon illustre élève sous le rapport du caractère, mais une atténuation des prétendus torts qu'on lui a bien hautement imputés et au sujet desquels je plaiderai sans peine les circonstances atténuantes. J'affirme ici que ces circonstances, si je les révèle[4], ne feront pas honneur à ses ennemis.

À la place de sa contribution, Julien Travers a inséré l'article publié par Henri de Parville dans le journal des Débats du 18 octobre 1877 :

> Peu de savants ont eu autant de popularité que M. Le Verrier. Il le devait bien en partie à ses premiers travaux, qui le mirent inopinément hors de pair ; mais il devait aussi pour beaucoup au retentissement qu'eurent ses discussions souvent violentes avec plusieurs des géomètres les plus éminents de notre époque. Les discussions dégénérèrent plus d'une fois en véritables querelles et firent assez de bruit pour sortir de l'enceinte académique. Il fut de mode, pendant un certain temps, d'aller à l'Institut entendre M. Le Verrier les jours de grand débat. La foule accourait ; la salle était pleine, et il s'en fallut de peu que le public

3. Aoust avait suivi les cours de mécanique céleste de Le Verrier au Collège de France.

4. L'a-t-il fait ? Est-ce que toutes les lettres que lui a écrites Le Verrier sont disponibles ? Un extrait de la lettre du 16 juillet 1861 est donné au paragraphe 14.1.1

> ne prît quelquefois parti, suivant le tour de la discussion, pour ou contre le Directeur de l'Observatoire. On visait surtout la direction de l'Observatoire dans ces luttes en apparence purement scientifiques ; les journaux s'en mêlaient, et les attaques n'étaient pas ménagées à M. Le Verrier. Son nom était depuis longtemps connu à l'étranger ; il fut désormais connu, même à Paris.
> Grand astronome, disait-on, petit caractère. Ce n'est peut-être pas là l'expression de la vérité. Grand astronome, tout le monde est d'accord sur ce point ; petit caractère, je ne le pense pas ; j'aime mieux dire : "Mauvais caractère", et ce n'est pas encore exact ; [suite du texte reproduit p. 433]. On l'avait attaqué : l'équation était posée, il fallait la pousser jusqu'à la solution. L'oubli des offenses eût été pour lui comme une faute de calcul. Il ne se doutait pas qu'il fût cruel quelquefois ; il faisait le vide autour de lui, à l'Observatoire, presque inconsciemment. On résistait, il résolvait ses équations rancunières, et l'équation amenait la chute d'un homme. Il en résolut tant, qu'un beau jour il se trouva tout seul à l'Observatoire. S'en aperçut-il ? Je n'en suis pas bien convaincu. Il fallut qu'un Ministre lui apprit que le Directeur de l'Observatoire ne régnait plus que sur des télescopes. Ce fut pour lui une équation de plus à entamer. On se rappelle la fin. Il répliqua à l'avertissement du Ministre par une demande d'interpellation au Sénat, qui amena naturellement sa révocation. Ici encore, il ne tomba pas comme tout le monde. M. Le Verrier n'a eu, à mon sens, ni l'esprit petit ni les vues étroites ; il était né pour la lutte ; il s'y complaisait ; son indomptable volonté augmentait avec le nombre et l'importance des obstacles ; il ne voyait pas le mal qu'il pouvait faire ; il n'apercevait, au bout de cette route semée d'écueils, que le plaisir de vaincre, que la volupté du triomphe ! L'homme a été antipathique à presque tout le monde ; on lui doit, affirme-t-on, d'avoir désorganisé les services de l'Observatoire. Sous son étreinte pesante, les jeunes astronomes ont perdu le goût des observations ; mais la postérité, qui n'a que faire de ces détails, oubliera vite l'homme pour ne se rappeler que le grand astronome.

Dans son éloge, [Bertrand, 1879] Bertrand dit :

> Le dénombrement des mémoires composés par Le Verrier avant sa nomination à l'Académie, en 1846 [37 si l'on en croit la liste publiée dans [Institut de France, 1911]], occuperait ici trop de place ; il y faudrait louer uniformément la même puissance de travail, le même succès dans le choix des méthodes, la même prudence à ménager des vérifications, sans s'assurer jamais sur sa grande habileté à manier les chiffres, la même netteté, enfin, dans la correction des erreurs signalées sans ménagement partout où il les rencontre.

Voici maintenant l'analyse d'André Danjon [Danjon, 1946a], lue à l'occasion du centenaire de la découverte de Neptune.

> Il avait du caractère, on disait même un mauvais caractère, une volonté tenace, une puissance de travail rarement égalée, et par dessus tout, le goût inné des grands desseins, à la réalisation desquels il se donnait avec passion. Distant, autoritaire, olympien, il devait se faire, comme directeur de l'Observatoire de Paris, beaucoup d'ennemis, et aussi, beaucoup d'envieux. Les nombreux pamphlets qui furent écrits contre lui, et que j'ai lus à l'occasion de ce centenaire, font penser à toute cette basse littérature répandue sous l'Empire contre Napoléon : ce sont de petits personnages, des esprits mesquins, qui reprochent à un grand homme authentique d'être ce qu'il est. Ces écrits ont pu nuire à la carrière de Le Verrier et causer sa destitution en 1870, ils ne font aucun tort à sa mémoire. À parcourir les misérables griefs accumulés contre lui, par des gens décidés à tout, on se persuade qu'on n'avait rien à lui reprocher, sinon sa supériorité.

On peut consulter [Locher, 2012] avec profit pour avoir des éclairages contrastés sur Le Verrier : "période dorée" et "période noire" par exemple.
Je peux aussi reproduire la remarque formulée par Philippe Nabonnand dans son rapport sur ma thèse, montrant la diversité des facettes de Le Verrier :

> Plusieurs des points soulignés dans ces paragraphes [paragraphes de la thèse, citant quelques traits de caractère de Le Verrier] recoupent une citation (que je dois à Sylvain Demanie) d'Olry Terquem qui réagissait à l'éviction prônée par Le Verrier de la méthode de Sturm des programmes de l'École Polytechnique : « Le célèbre calculateur astronome (Le Verrier) a fait un emploi utile du théorème de Sturm ; un académicien de même nom a retranché de l'enseignement ce théorème comme appartenant à la haute théorie, chose inutile ; un représentant de même nom, dans la discussion sur les conducteurs-voyers, a déclaré la haute théorie chose indispensable. Ces trois noms désignent-ils la même personne ? » (Nouvelles annales de mathématiques, Série 1, Tome 10 (1851), p. 91.).

14.1.3 Le Verrier dans son travail

Le Verrier ne décrit pas son mode de vie. Il est difficile de savoir comment il organisait son travail. Ses journées devaient être bien remplies ; il ne faut pas oublier que Le Verrier, pendant la recherche de Neptune, continuait à donner ses cours au Collège de France.
Émile Gautier donne quelques indications précieuses sur la façon de travailler pendant la première partie de la recherche sur les perturbations d'Uranus (voir chap. 2).
Il semblerait qu'il travaillait beaucoup la nuit, en particulier, une fois chassé de l'Observatoire, ainsi qu'on le découvre fig. 2.5.
On rappelle que selon Raoul Gautier, le fils d'Émile, Le Verrier avait des poules dans son cabinet de travail dans un premier temps, puis un peu plus tard un ouistiti qui se blottissait contre sa nuque ! (voir chap. 2, p. 62).

14.1.4 Éclairage apporté par Lucile

14.1.4.1 Journal intime

Sa fille, Lucile, entame un journal intime [5] en 1866 [Lucile, 1994] où elle raconte son mode de vie, quelques anecdotes durant la période 1867−1873 et laisse apercevoir quelques traits de caractère de son père.
Lucile, dans son journal intime, parle beaucoup d'elle, mais donne aussi quelques informations intéressantes sur ses relations avec son père. Malheureusement, ces informations ne couvrent pas les premières recherches de son père, et pour cause, car Lucile est née en 1853.
Elle commence donc son journal intime en 1866 à l'âge de 13 ans. On y constate toute l'autorité du père de famille, surtout lorsqu'il est question de relations sociales ou de mariage, mais on voit aussi beaucoup de tendresse entre ces deux êtres si différents. On constate que, même si elle n'a pas connu l'époque où son père était occupé par la recherche de Neptune, elle y fait souvent allusion ainsi qu'à la gloire qui s'ensuivit. Il est souvent question d'argent, ce qui étonne un peu, car Le Verrier avait des appointements plutôt élevés, une fois nommé sénateur (le 26 janvier 1852). Au fil des propos de Lucile, on constate que Le Verrier est un père attentif, parfois strict, mais sachant aussi se montrer affectueux.

14.1.4.2 Citations de Lucile

Toutes les citations qui suivent sont extraites de son journal intime, et on précise à chaque fois, les dates des citations et les pages où on peut les trouver. On a sélectionné essentiellement les commentaires de Lucile qui concernent son père.

p 23 (26/12/66) J'ai une tante, mais elle est brouillée avec papa et nous ne la voyons pas.

5. Ce journal intime a été retrouvé tardivement, ce qui explique la date récente de la première publication : 1994.

p 23 (27/12/66) Toutes mes inquiétudes sont dissipées : Papa est d'une humeur charmante et il est convenu que nous danserons tous les 2e et 4e lundi de chaque mois.

p 27 (18/1/67) Mercredi, séance de l'Association scientifique fondée et présidée par papa. Il a fait une leçon sur les comètes et les étoiles filantes ; il a été superbe, clair, éloquent, magnifique.

p 34 (4/3/67) Hier, papa est parti pour Marseille où il veut observer la grande éclipse qui aura lieu le 6. Cette éclipse ne sera belle qu'à Salerne, mais papa n'a pas eu le courage d'y aller... Ce voyage était pourtant bien tentant, mais la mer fait peur à papa [6]...

p 35 (6/3/67) Papa se félicite de ne pas avoir été à Salerne, car il a plu tout le temps de l'éclipse.

p 39 (11/5/67) Papa est de plus en plus tendre pour moi, ce qui me console un peu de la froideur de maman...

p 42 (25/11/67) Mais voilà que le ministre [Duruy] a attaqué papa, a voulu faire examiner sa gestion par deux ennemis notoires.

p 45 (7/12/67) L'empereur et l'impératrice, démentant les bruits qui courent, ont assuré mon père de leur plus haute estime.

p 48 (2/1/68) Un second chagrin a été les affaires de l'Observatoire, parce qu'elles m'exposent à sortir des murs que j'affectionne, et parce qu'elles altèrent la santé de mon père, qui voit contre lui ceux qui l'accablaient de protestations d'attachement.

p 52 (12/8/68) Beaucoup d'ennuis pour mon père, persécuté par Duruy.

p 61 (19/5/69) Les ennemis de mon père avaient demandé à l'Académie la démolition complète de l'Observatoire, et l'Académie a, au contraire, décidé qu'il resterait tel qu'il est (voir aussi [Aubin, 2003]).

p 70-71 (28/6/69) [Lucile devait aller à l'Opéra, mais sa mère est souffrante, ce qui met la soirée en danger, et Lucile ne peut s'empêcher de présenter une mine un peu contrariée] Mon père se mit à taper sur la table, à me traiter de misérable, et s'avancer vers moi avec une telle violence qu'il m'aurait battue, si j'étais restée.

p 74 (19/7/69) Le ministre [Duruy] qui a tant persécuté papa, qui a bouleversé l'Observatoire, n'est plus ministre.

p 85 (20/9/69) Si le Sénat était supprimé, nous serions ruinés. Il faut donc se restreindre, d'autant plus que jusqu'ici nous dépensions vraiment trop.

p 87 (29/9/69) Je t'adresse, cher papa, mon budget [7], que je ne t'avais pas encore remis.

p 89 (6/10/69) Papa m'accorde les 150 f. par mois. C'est commode, mais il ne me donne que 20 f., et le reste il faut que je lui demande à mesure ; c'est moins commode.

p 101 (6/2/70) Mon père est destitué. J'écris ce mot bravement, car il est glorieux pour nous. Cette année, il s'applique à tous les grands hommes. Du reste, depuis deux ans, nous étions tellement abreuvés de déceptions, de calomnies, de chagrins, qu'au soupir de regret se mêle un soupir de soulagement. En somme, nous ne sommes pas tristes.

p 102 (14/3/70) Maman va très bien ; nous nous promenons tous les jours, elle, papa et moi.

p 116 (14/8/70) Mon père s'est engagé dans la garde nationale.

6. Apparemment Delaunay avait aussi peur de la mer, et la mer le tua.

7. Elle renoue avec les habitudes de son père qui « inscrivait soigneusement ses dépenses journalières sur un carnet, détaillant ainsi à son père l'emploi des fonds qui lui avaient été envoyés. » ([Lantier, 1977] p. 39) ; on rappelle que M. Le Verrier père avait vendu sa maison de Saint Lô pour pouvoir payer les études de son fils à Paris.

p 129 (31/10/70) [Les Le Verrier ont quitté Paris pour se réfugier au château Le Roucas, près de Marseille] Il arrive à mon père des lettres menaçantes de Marseille, où l'on nous dit que nous sommes des Crésus et où l'on fait retomber sur notre tête les malheurs du pays... Nous voici donc une fournée de gens compromettants et compromis.

p 131 (6/11/70) En même temps, nous apprenions au château [Le Roucas, près de Marseille] qu'on était très irrité dans la ville [Marseille] contre les Le Verrier, qu'on nous appelait des impérialistes accapareurs, qu'on était décidé à venir nous prendre.

p 132 (6/11/70) Nous étions cachés à Toulon sous le nom de la mère de mon père [de Baudre]. Nous sommes de même ici [château Le Roucas]. Nous nous trouvons bien tristes et bien pauvres.

p 140 (8/12/70) Mon père est plongé dans la fabrication de son instrument [moyen de communiquer avec les parisiens par la lumière du Soleil le jour et par la lumière électrique la nuit].

p 145 (23/12/70) Hors du piano, c'est autre chose : si je suis silencieuse et grave, je mécontente mon père, qui proteste de suite que les filles ne sont aimables que quand on leur fournit une vie de fêtes.

p 175 (3/5/71) Papa est à Versailles, il travaille beaucoup à ses tables astronomiques.

p 197 (3/9/71) Il [Thiers] a fait demander un entretien à mon père. C'est très gracieux, mais qu'est-ce qu'il veut tirer de lui ? Nous ne sommes pas républicains, nous, oh mais non. Je n'irai pour rien au monde en soirée chez les têtes de la République ; en faisant la révérence, j'aurais envie de tirer la langue.

p 203 (sans date, 72 ?) M. Léo de Leymarie m'a demandé en mariage. Refus de mon père.

p 222 (1/9/73) Ce soir nous avons pris notre courage à deux mains et maman est allée tout dire à papa [demande en mariage de Lucien]. J'avais raison de souffrir, car mon père a d'abord refusé radicalement. Mais ensuite elle a si bien plaidé, opposant à la jeunesse de Lucien ses qualités sérieuses et la fortune solide de sa famille, qu'après des débats que je suis trop émue pour raconter, mon père a cédé, tout en disant que c'était absurde. Alors je suis arrivée, je l'ai câliné... et il n'a plus dit que ce fût absurde.

p 264 (22/11/73) Nous nous sommes r'habitués à l'Observatoire comme si nous ne l'avions jamais quitté, pauvre vieux monument qui a dû tant s'ennuyer sans nous.

p 272 (23/12/76) C'est dans cette conviction que nous faisons beaucoup de sacrifices d'argent pour cette œuvre [église de MontMorency], dont la réussite serait pour mon mari ce que fut pour mon père la découverte de la planète Neptune.

p 277 (23/5/78) Mon mari m'a apporté hier de bonnes nouvelles de la souscription pour une statue à mon père... Hier on s'est battu dans le comité pour décider si la statue serait en marbre ou bien en bronze ; Lucien, qui tenait beaucoup au marbre, l'a emporté. Lucien se montre très jaloux de ce qui peut honorer la mémoire de mon illustre père. C'est lui [Lucien] qui a fait démarche sur démarche pour que le ministre de l'instruction publique fit classer les œuvres manuscrites de mon père par le seul homme qui l'eût aidé à terminer ces œuvres parmi les plus gigantesques qu'ait produites le génie humain. M. Gaillot accomplira cette tâche avec compétence et honnêteté. Enfin, c'est Lucien qui, au milieu de nos embarras matériels, a voulu qu'une somme fût réservée pour élever un tombeau à mes parents [tombeau situé au cimetière Montparnasse (Div 11)].

p 285 (29/9/78) Par une remarquable coïncidence, mon illustre père est mort le 23 septembre, le jour même où avait lieu la découverte de sa planète Neptune, qui commença sa célébrité. Il est venu fort peu de monde à cette cérémonie de deuil [messe] ; je m'y attendais un peu.

14.1.5 Quelques traits d'humour

14.1.5.1 Le Verrier, humoriste

Pour terminer sur une note plus gaie, voici quelques traits d'humour de Le Verrier. Il avait, semble-t-il, de l'humour, mais un humour plutôt 'scientifique', et souvent acerbe.

Tout d'abord, sa précision, presque maladive, que l'on retrouve bien sûr dans ses calculs. Voici ce qu'il écrit [8] à sa fille au sujet de son frère Urbain :
« Dis à Monsieur Hurbain que je viens de recevoir son diplôme. Comme il (M. Hurbain) va arriver, il est inutile que je le (diplôme) lui (M. Hurbain) expédie ».

Le Verrier devait présenter un mémoire de Gautier à l'Institut. Le jour initialement prévu [9], la séance était présidée par Arago. Le Verrier préfère donc différer sa présentation d'une semaine et voici comment, dans sa lettre du 12 août 1848 à Gautier, il commente le rapport de séance rédigé par Arago :

> Vous verrez qu'il est rédigé par un profond politique, dont il ne fallait pas contrister le retour [10] en lui donnant à imprimer du Gautier doublé de Le Verrier. On se serait épuisé à trouver des fautes hénormes...

Le futur sénateur n'était pas toujours très sérieux, comme le raconte Gautier à ses parents (lettre du 10 juillet 1845) :

> Ce soir, nous avons fait la farce, mon Patron et moi, de jeter dans le bassin du Luxembourg une poignée de boulettes d'un sel de phosphore [11] qui détonne dans l'eau sous forme de jolies petites étoiles : [cela] excitait au plus haut point la curiosité publique.

Dans sa lettre du 9 août 47 il présente son plan de travail à Gautier :
« Pas de calculs numériques, et beaucoup de théorie, voilllà ».

Le Verrier a préparé les calculs pour refaire les théories des planètes du Système solaire. Il attend Gautier pour réaliser concrètement ce travail (lettre du 16 janvier 1849) :

> [C'est à dire] qu'au reçu de la présente, vous quittiez (dans les 8 jours, toute autre affaire cessant, et sans qu'aucun prétexte à l'encontre soit valable) la longitude et la latitude par lesquelles vous vous trouverez pour vous transporter par 48°51'50" latitude nord et 0h 0mn 0.28s est (méridien de Paris) pour prendre part à la dite révision et mise en oeuvre.
> Comme donc toute objection est impossible, je vous attends pour le 1er mai AU PLUS TARD, et j'envoie Buisson retenir votre local rue Voltaire.

On sent bien sûr dans ce message le caractère autoritaire de Le Verrier, mais aussi l'importance qu'il attache à la présence de Gautier, aussi bien pour le travail, que pour la compagnie.
Dans sa lettre du 22 juin 49, il évoque l'épouse de Gautier

> Heureux mortel ! Vous filez des jours tissés d'or et de soie. Après vous être brûlé au feu de ses regards, vous aspirez la brise du lac et la rosée de vos coteaux. L'univers est pour vous tout entier sur les bords du Léman qui répond pour le murmure de ses ondes à vos chants de triomphe. Que vous importe le reste du monde ? Comme vous méprisez et plaignez tout ce qui n'habite pas à Cologny [12] ! Vous devez faire des vers à votre belle et lui dire qu'elle est le sinus des grâces et la tangente de votre cœur. Sinon, elle a droit de se plaindre... Quand reprenons-nous les comètes ? Il faut en trouver une qui soit l'image de sa longue chevelure !

8. p. 87 des mémoires de sa fille [Lucile, 1994].
9. Séance du 31 juillet 1848 et la présentation se fera finalement à la séance du 7 août.
10. Arago n'est plus président du comité exécutif, qui a exercé le pouvoir du 5 mai au 24 juin 1848.
11. Les études de chimie lui auront servi à quelque chose.
12. Riche commune du canton de Genève, où se trouvait la maison familiale des Gautier. Émile Gautier fut le maire de Cologny de 1862 à 1878.

Dans sa lettre du 25 mars 1850 à Gautier, Le Verrier mentionne la situation désastreuse du pays et du manque d'énergie et de volonté :

> Votre ancien professeur serait un foudre de guerre auprès de tous nos grands politiques. Depuis que je mes suis assez approché d'eux pour prendre leur distance zénithale et en déduire leur hauteur, je ne m'étonne plus de la déplorable position qu'ils ont faite au pays ; mais en même temps, en voyant que le salut du pays leur est confié, j'en désespère presque.

Dans sa lettre du 5 août 1850 [Il répond à Gautier qui vient de lui annoncer la naissance de son premier enfant] « J'avais à vous faire tous mes compliments pour la grrrrrande nouvelle que vous m'avez adressée ».

Le 21 juillet 1871, il écrit à Gautier : « j'ai lu votre notice avec un grand intérêt. C'est bien que vous ne soyez pas, ce me semble, très partisan de cette hypothèse [13] que le Soleil déjeune et dîne d'astéroïdes ».

On rappelle aussi la pique contenue dans la réponse à Babinet, qui suggérait l'existence d'une planète supplémentaire, Hypérion, pour expliquer les irrégularités dans les mouvements d'Uranus ([Le Verrier, 1848b]) : voir p. 427.

Mais l'humour pouvait être féroce (lettre du 23 février 1846 à Gautier) : « Mr. Eugène Bouvard a quitté l'Observatoire et s'est mis dans le cadastre des chemins de fer. Pauvre cadastre ».

14.1.5.2 Maxime Vincent

Bien que l'auteur ne soit ni Le Verrier, ni contemporain de Le Verrier, il est préférable de classer le compte-rendu qui suit dans la rubrique 'Comique' plutôt que d'en pleurer.
Voici ce que déclare Maxime Vincent en préface de son opuscule [Vincent, 1958] (cote 8.B 1826) :

> Nous verrons dans cet opuscule, que Le Verrier a bien découvert Neptune ; mais ne l'a pas fait et n'a pas pu le faire en calculant sa position d'après la loi de Newton ; car cette loi, exacte pour exprimer l'attraction, c'est à dire l'emprise réciproque des masses, est fausse comme loi de gravitation ; elle ne s'accorde pas avec celles de Kepler, surtout avec la troisième, dont l'observation a toujours vérifié la valeur.

p. 12 il ose écrire : « Surtout il [Le Verrier] déclara que Jupiter et Saturne n'intervenaient pas dans le problème [d'Uranus] ».
Le Verrier a simplement rempli 325 pages sur l'action de Jupiter et de Saturne sur Uranus !!
Il affirme ensuite que Le Verrier aurait déposé son 3e mémoire en juin 1846 et non le 31 août 46.

> La découverte de Neptune, faite en juin 46, puis confirmée par l'astronome allemand Galle, lui fit une réputation européenne. Dans le cas d'un dépôt en juin à l'Académie, Le Verrier aurait sans doute pris les dispositions légales [pli cacheté ?], pour éviter les fuites.

Vincent continue son délire en affirmant que Le Verrier avait découvert Neptune en observant à la lunette :

> La découverte par l'observation, sans calcul antérieur de la position, selon la loi newtonnienne, *ne prouvait aucun système* ; car elle est le plus souvent due à la patience de l'observateur, autant qu'à la puissance de l'instrument. La démonstration théorique de la situation probable *établit définitivement un système* du monde, et devient d'une portée universelle, tandis que la découverte expérimentale, très importante sans doute en l'occasion, n'est qu'un fait particulier et solitaire ; elle n'atteint pas l'universel.

13. Hypothèse sur la provenance de l'énergie du Soleil : il se nourrirait d'astéroïdes !

Il ajoute un peu plus loin :

> Il reste à savoir où Le Verrier aurait découvert Neptune, à la lunette astronomique.
> Réponse : il aurait fait sa découverte à l'Observatoire même de Paris, après avoir y été introduit, à la connaissance ou à l'insu d'Arago.

Et comme conclusion :
« Le Verrier n'a pas pu découvrir Neptune, en calculant sa position, par la seule loi de Newton ».
Inutile de prolonger le délire...

14.2 Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris

On donne un tout petit aperçu de Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris. Pour plus de détail, consulter [Lequeux, 2009] ou [Sheehan, 2021].

14.2.1 Dictature de l'astronomie de position à l'Observatoire de Paris

Voici un reproche régulièrement fait à Le Verrier, astronome ([Flammarion, 1911], [Liais, 1865]) : Pour Le Verrier, selon ses détracteurs, il n'est question que de positions dans le ciel, repérées par des astronomes spécialisés dans l'observation, positions réduites par des calculateurs sans connaissances astronomiques particulières, voués à appliquer les mêmes réductions 7 h par jour ; seuls les astronomes les plus compétents peuvent traiter de trajectoires, de paramètres elliptiques... la nature physique des objets célestes ne semble pas du tout l'intéresser.

Cette analyse est un peu trop schématique ; on peut, à la lecture de ses manuscrits, rétablir une certaine vérité : on a vu qu'au début de sa carrière, Le Verrier avait pris de très nombreuses notes sur les nébuleuses, les comètes, la constitution des planètes, l'apparence de celles-ci, et qu'il en parla longuement pendant ses cours à la Sorbonne et au Collège de France (voir chapitre 2 et annexe § C.3.2).

Mais c'est avec cet état d'esprit qui lui est attribué qu'il prend possession de l'Observatoire de Paris le 30 janvier 1854. Son modèle est la gestion de l'Observatoire de Greenwich par Airy, tout aussi rigide que la sienne, tout aussi orientée sur l'astronomie de position avec l'aide d'observateurs n'effectuant que des relevés de positions d'étoiles et de jeunes calculateurs, peu formés, pour faire les réductions d'observations. C'est évidemment la négation de la méthode Arago, qui avait rassemblé autour de lui une grande famille (dans tous les sens du terme) d'astronomes, avec des objectifs d'études physiques très étendues. Arago souhaitait rendre, par l'intermédiaire de ses conférences, l'astronomie populaire ; ces cours ont donné naissance à son *Astronomie populaire* en 4 tomes, publiée à titre posthume en 1854 [Arago, 1854].
Et surtout, on reproche à Le Verrier son caractère despotique (voir figure 12.1 ainsi que les commentaires de Flammarion au paragraphe suivant), et les sanctions arbitraires et injustes qui pleuvaient sur ses administrés : retenues arbitraires sur les salaires par exemple.
En fait, Le Verrier ne s'intéresse qu'aux élites, qu'aux personnes de son niveau de performances (et peut-être aussi ayant les mêmes idées conservatrices). C'est ainsi qu'il faut comprendre sa relation, qui semble être unique, avec Émile Gautier, qui a suivi ses cours à la Sorbonne, puis a été un élève privilégié avant de devenir un assistant efficace et occulte pour la recherche de Neptune et enfin directeur de l'Observatoire de Genève de 1882 à 1889. On rappelle qu'une grande affinité politique a pu aussi jouer un rôle important dans cette amitié.

On a vu fig. 12.1 un exemple de la façon dont Le Verrier s'adresse au personnel chargé de la surveillance pour Vulcain.

14.2.2 Flammarion

Il faut citer Camille Flammarion [14] qui fut élève-astronome calculateur à l'observatoire de Paris, de 1858 à 1862. Sa situation se gâte quand il publie *La pluralité des mondes habités* [Flammarion, 1862], qui est bien sûr à l'opposé des croyances et des préoccupations de Le Verrier : « Je vois, Monsieur, que vous ne tenez pas à rester ici. Rien n'est plus simple, vous pouvez vous retirer » [Flammarion, 1911].
En fait, Flammarion essaie de plaider sa cause dans une lettre adressée au directeur ([Lequeux, 2009], p. 348), mais Le Verrier reste inflexible.
Flammarion s'explique dans ses mémoires [Flammarion, 1911] :

> Je n'ai pas encore dit que Le Verrier avait le caractère le plus épouvantable qui se puisse imaginer.
> Hautain, dédaigneux, intraitable, cet autocrate considérait tous les fonctionnaires de l'Observatoire comme des esclaves. Jaloux de toute indépendance et de toute initiative personnelle, il était accoutumé à régner seul et à tout écraser. Personne ne pouvait travailler tranquillement. C'est à qui abandonnerait la place.

On comprend facilement que, dans un tel contexte, Flammarion, curieux de tout, n'ait pas pu rester très longtemps à l'Observatoire.
Flammarion fit le serment de se venger : « IL M'A FAIT PARTIR, IL PARTIRA ! ».
Flammarion, qui suivait alors les cours de Delaunay à la Sorbonne, lui expliqua sa mésaventure, et Delaunay répondit : « Tant mieux ! Personne ne peut rester avec ce monstre. Voulez-vous venir avec moi ? » Et il fut engagé comme calculateur au Bureau des Longitudes.
Flammarion n'est pas aveugle : il sait faire la distinction entre l'homme et le savant [Flammarion, 1911] :

> son génie mathématique était transcendant, je m'empresse de le répéter, sa découverte de la planète Neptune est l'une des plus splendides de l'histoire de l'astronomie.

Un soir de 1876, Flammarion observait Neptune [15] à la grande lunette de l'Observatoire ; Le Verrier vint à passer et lui demanda ce qu'il observait : il lui répondit qu'il avait *sa* planète dans le champ de l'instrument et qu'elle lui paraissait bleue. « Tiens fit-il, quelle idée ! qu'est-ce que cette observation peut avoir d'intéressant ? » [Flammarion, 1911]
Le commentaire de Flammarion semble exagéré et malveillant : on verra au paragraphe suivant que Le Verrier a observé la position de Neptune à plusieurs reprises ; par contre, on ne connaît pas de commentaires faits par lui sur l'aspect physique de Neptune.
A partir de février 1866, Flammarion publie régulièrement dans le journal *Le Siècle* une rubrique intitulée LE DOSSIER LE VERRIER dans laquelle il publie tous les griefs élevés contre lui, toutes ses injustices, tous ses abus de pouvoir. Le Verrier répondit d'abord en envoyant un huissier, mais il se défendait mal. D'autres journaux reprirent les informations du journal *Le Siècle*.
« Il était détesté même à l'Institut. Du reste, quand il entrait dans la salle des séances, le lundi à trois heures, il regardait tout du haut de sa grandeur, avec un air de dédain, qui semblait dire « Qu'est-ce c'est que tous ces gens-là ? » [Flammarion, 1911].
On sait que Le Verrier, après avoir interpelé son ministre de tutelle, fut destitué en 1870 [16].

14. Camille Flammarion (1842 :1925), astronome et vulgarisateur scientifique. Il fit un bref séjour comme calculateur à l'observation de Paris (1858−1862) avant d'être renvoyé par Le Verrier. Il fonda en 1883 l'Observatoire de Juvisy-sur-Orge et en 1887 il créa la Société astronomique de France.

15. Il s'intéressait en fait aux étoiles doubles, et par curiosité il jeta un œil à Neptune, qui se trouvait à proximité de l'étoile qu'il observait.

16. La lettre de destitution, signée par le ministre, est conservée à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris sous la référence ms 1072 (32).

14.2.3 Équipement de l'Observatoire en instruments

Le Verrier est conscient de l'insuffisance de l'équipement instrumental de l'Observatoire, insuffisance qui a, en partie, empêché d'effectuer une recherche aprofondie pour la planète perturbant Uranus [Descamps, 2011]. Il a sollicité à plusieurs reprises sa tutelle pour obtenir les crédits afin de moderniser l'équipement de l'Observatoire. Pour plus de détails sur l'équipement de l'Observatoire, consulter [Lequeux, 2010].

14.3 Le Verrier observateur

Il a été souvent dit, par Flammarion surtout, que Le Verrier n'avait jamais mis l'œil à une lunette. C'est faux : il a observé Neptune en compagnie d'Adams pendant son séjour en Angleterre : information trouvée dans plusieurs sources, dont une lettre de Gautier à ses parents du 24 juin 1847 et une lettre de Forbes [Forbes, 1847] ; voir § 2.3.7.
Ensuite, de façon surprenante, il a rempli des carnets d'observation : il y en a 21 à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris à la cote F14/86 (voir fig. 14.2). Le premier cahier commence le 14 février 1854, alors qu'il vient à peine d'entrer en fonction à l'Observatoire (le 30 janvier).
Il semble faire des observations 'classiques' : étoiles, planètes. Le Verrier note au crayon les heures de passage aux 5 fils. Puis il reprend plus tard ses données en faisant des réductions à l'encre, comme on peut le voir sur son carnet à la figure 14.3.

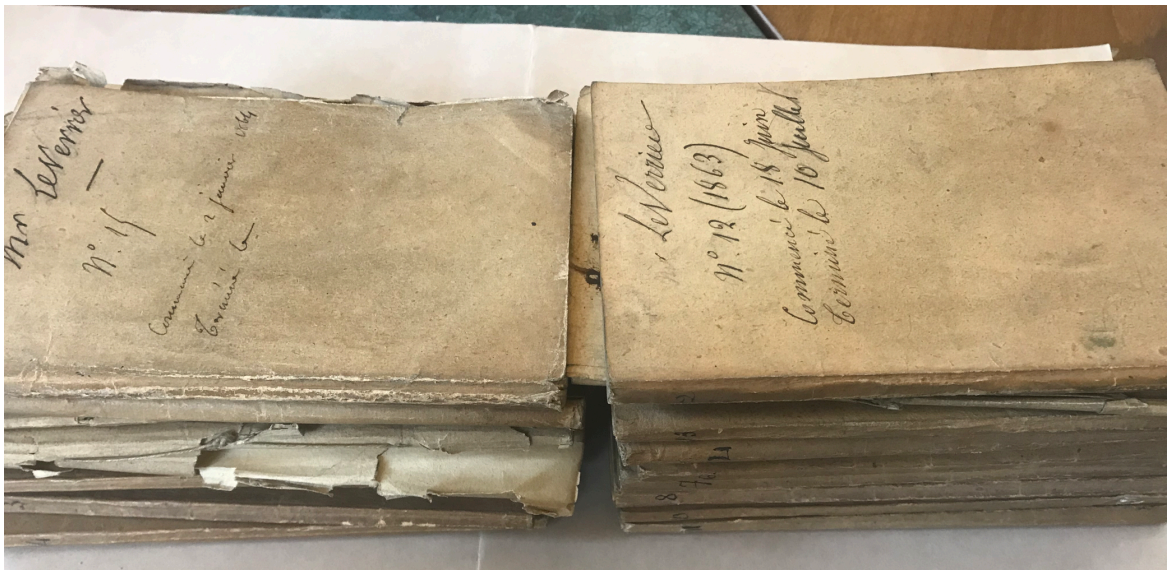


FIGURE 14.2 – Carnets d'observations de Le Verrier déposés à la bibliothèque de l'Observatoire. Il y en a 21 en tout. Les observations vont du 14 février 1854 à fin 1864

Progressivement, Le Verrier orientera ses observations à des fins de réglages des instruments méridiens : retournement, calibrage des fils, synchronisation des pendules...
Cela confirme que Le Verrier n'était pas qu'un simple théoricien : il connaissait les techniques pratiques d'observations méridiennes ainsi que les techniques pour évaluer les corrections instrumentales à apporter aux instruments de passage. D'ailleurs, Le Verrier enseigne à ses élèves du Collège de France ces différentes techniques ; voir § C.3.1.

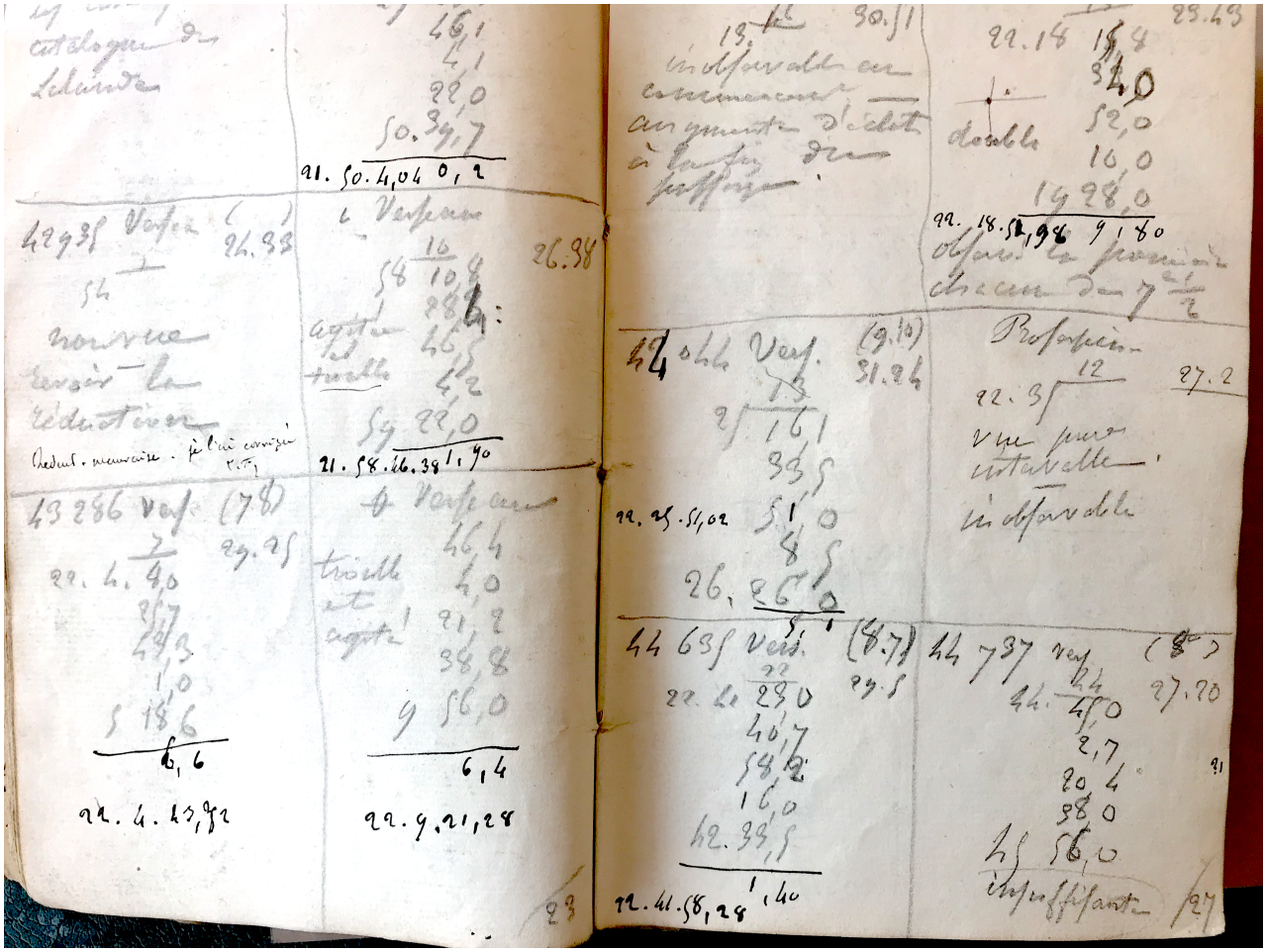


FIGURE 14.3 – Une page du premier cahier d'observations de Le Verrier. La présentation n'est pas très soignée, mais il y a peut-être des excuses (écriture dans une quasi obscurité). Les références pour les étoiles observées (42935, 43286...) sont celles de *l'Histoire Céleste Française* de Lalande [de la Lande, 1801]. Le Verrier note les temps de passage aux 5 fils et fait ses réductions plus tard à l'encre, (cote F14/86 de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris)

J'ai reporté dans le tableau, page suivante, la liste de tous les objets observés par Le Verrier dans son premier cahier, observations faites en 1854, année de sa prise de fonction à l'Observatoire. Les observations méridiennes permettent de fixer avec précision des repères célestes (étoiles fondamentales) et d'utiliser ces repères pour déterminer les positions des astres mobiles (planètes, comètes, astéroïdes) ; voir encadré 9 p. 132 pour le détail des corrections à apporter aux mesures. Ces observations permettaient aussi de déterminer les corrections à apporter aux horloges.

14/2	8 Licorne, 15 Lyre, 81 Grand Chien, 26 Grand Chien, β Petit Chien, ε Lyre, Pollux, Procyon, β Cancer, ε Hydre, δ Hydre, 21 Écrevisse, 31 Écrevisse.
16/2	ε Hydre, 70 Écrevisse, α Hydre, ε Lion, μ Lion, ξ Cancer.
23/2	β Petit Chien, Pollux, ξ Navire, Procyon, 14 Petit Chien, 17 Petit Chien, β Cancer, ε Hydre, 15 Hydre, i Grande Ourse, ξ Cancer, α Hydre, 23 Hydre, β Céphée, α Céphée, ε Lion, μ Lion.
25/2	α Bélier, α Persée, γ Taureau, Algol, Pollux, Procyon, ξ Navire.
26/2	Pollux, ξ Navire, β Cygne, α Aigle, α Cygne, Soleil (!!), α Andromède, α Polaire, β Andromède, β Bélier, α Bélier, Saturne, α Persée, ξ Navire, δ Hydre, β Cancer, ε Hydre, i Grande Ourse, α Hydre, ξ Cancer, ε Lion, μ Lion, ρ Lion, Regulus, γ Lion, Mars, Vesta, δ Lion, β Céphée.
27/2	α Cygne, Vénus, α Cassiopée, Polaire, β Andromède, Castor, α Bélier, β Bélier, Procyon, β Petit Chien, β Cancer, i Grande Ourse, ε Lion, γ Lion, ρ Lion, μ Lion, δ Hydre, ξ Cancer, α Hydre, Regulus, Vesta, δ Lion, Mars, β Cygne, γ Cygne, α Cygne.
28/2	Soleil, Mercure, Polaire, β Bélier, β Andromède, Pollux, ρ Lion, H.C. 20333, Regulus, Vesta, γ Lion, Mars, Saturne.
1/3	Mars, B.A.C. 3761, δ Lion, α Hydre, β Céphée, Regulus, ε Lion, γ Lion.
2/3	B.A.C. 3761, δ Lion, Mars, Regulus, ε Lion, H.C. 20261, ρ Lion, μ Lion.
3/3	Mars, α Cygne, α Céphée, α Hydre, μ Lion, 12 Lion, ε Lion, Régulus, 37 Lion.
11/3	Mars, α Aigle, δ Lion, Vénus. Mercure, Soleil ? Polaire, α Bélier, η Taureau, Rigel, Aldébaran, ε Orion.
15/3	ρ Lion, δ Lion, Vesta, Soleil, Polaire, α Cygne, α Hydre, α Bélier.
8/4	λ Lion, α Hydre, i Hydre, 26 Lion, ψ Lion, μ Lion, Regulus, Lune, Mars, δ Lion, Vesta, β Vierge, σ Vierge, o Vierge, 12 Vierge, δ Corbeau, β Corbeau, η Vierge, Polaire.
21/4	δ Hydre, α Hydre, Regulus, ε Lion, Mars, γ Lion, ρ Lion, β Lion.
19/4	Il mentionne un problème avec un fil (?)
7/5	γ Coupe, c Lion, π Vierge.
11/5	37 Petit Lion, β Grande Ourse, δ Lion, δ Coupe, θ Coupe, ζ Coupe. β Corbeau, 13 Vierge, Polaire, α Vierge, 1 Bouvier, η Balance, ε Serpent, α Balance, β Bouvier.
17/5	α Couronne, α Serpent, 45 Serpent, ε Serpent, ψ Serpent, α Ophiucus, α Hercule, β Ophiucus.
19/5	4713 Vierge, 4766 Bouvier, Arcturus, 26 Bouvier, ρ Vierge, α Balance, ζ Bouvier, δ Balance, α Couronne, α Serpent, ε Serpent, β Scorpion, δ Ophiucus, 45 Serpent, ε Ophiucus, ψ Scorpion, Antarès, ζ Ophiucus, m Hercule, 16 Ophiucus, κ Hercule, 5932 Hercule, i Ophiucus, 5760 Ophiucus, χ Ophiucus, 5787 Ophiucus.
20/5	α Hercule, ε Lion, β Ophiucus, Regulus, γ Lion, δ Coupe, α Grande Ourse, γ Céphée, λ Dragon, β Vierge, η Vierge, γ Grande Ourse, δ Corbeau, β Corbeau, δ Grande Ourse, α Cassiopée, a Chiens de Chasse, α Vierge.
21/5	Retournement de la lunette, mesure par lui et Yvon Villarceau. Il note 'Fils à l'envers', puis une autre série de mesures. Expérience de niveau avec Mr Dunker (?). Colonnes numérotées de 1 à 30 avec des nombres variés. Signification ?
26/5	Série de mesures faite par lui et Mr Dunker. Il établit le retard du chronomètre à 5mn 0.10 s. Il fait des tests sur l'objectif.

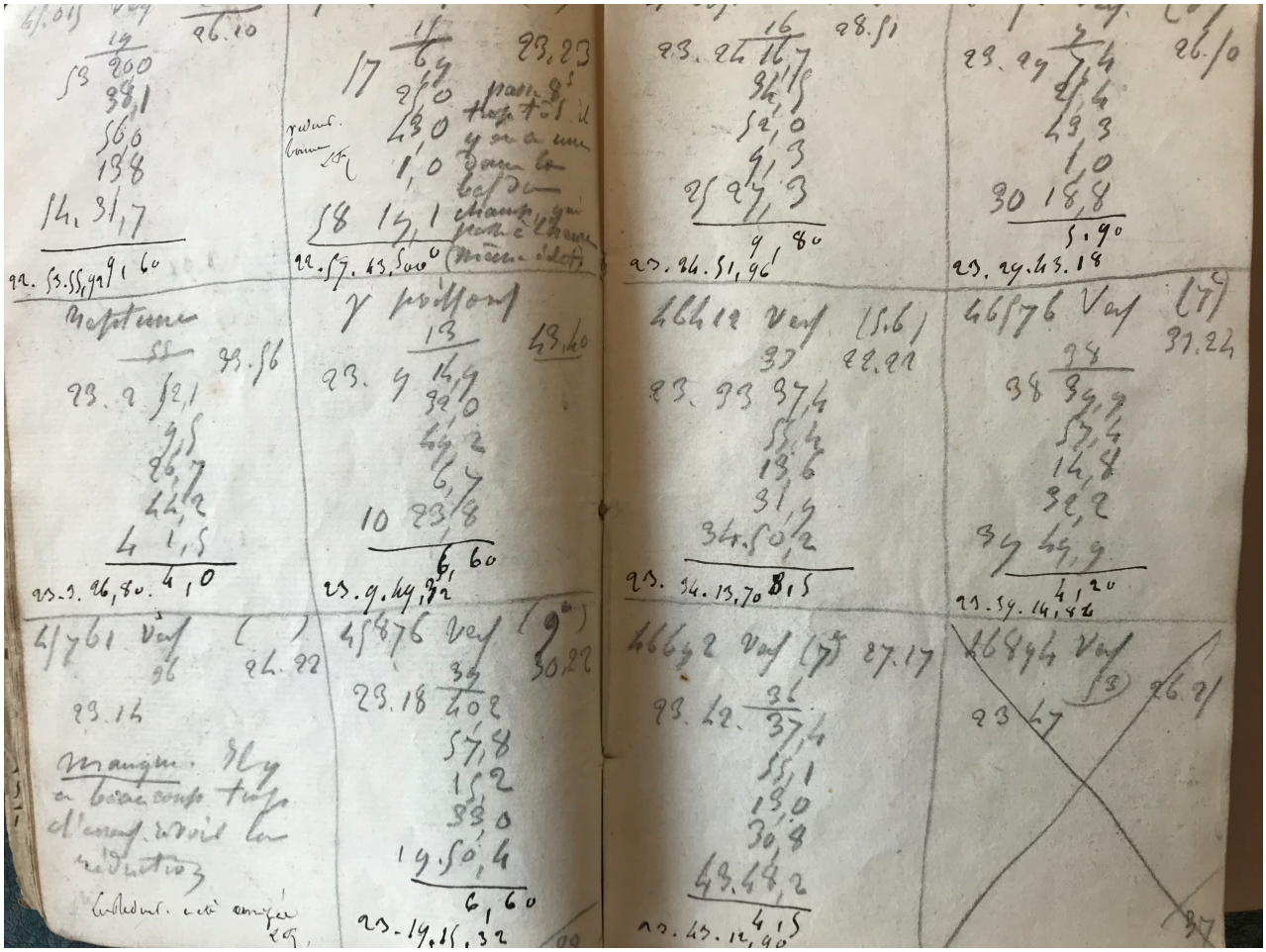


FIGURE 14.4 – Observation de Neptune faite par Le Verrier le 21 septembre 1854 (au milieu de la page de gauche). Il n'y a pas de 'triche' : la position notée est bien l'ascension droite de Neptune à cette date, une fois la correction d'horloge effectuée, vérification avec Miriade (carnet d'observation n° 2, conservé à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris (F14/86))

Le Verrier connaissait son ciel, comme le prouve la carte qu'il a dessinée pour sa leçon 6 bis à la Sorbonne (voir fig. C.2).
Comme le prouvent aussi les notes bibliographiques prises au début de sa carrière astronomique, et les contenus de ses cours donnés au Collège de France et à la Sorbonne (§ C.3.2), Le Verrier s'intéressait à tous les aspects de l'astronomie (voir § 1.1.2).
Il savait utiliser un instrument méridien, et il apprenait à ses étudiants de la Sorbonne comment noter les passages aux 5 fils, et comment exploiter ces données.
Il leur apprenait aussi à corriger la marche d'une pendule, à mesurer les déclinaisons à l'aide des microscopes.
Il leur montrait comment calculer l'écart en ascension droite entre Castor et Pollux en utilisant le passage aux 5 fils (leçon 5 des cours à la Sorbonne (§ C.3.2)).
On rappelle que Le Verrier avait voulu se former à l'observation astronomique à l'Observatoire de Genève, sous la direction de Plantamour, mais la démarche n'avait pas abouti, Plantamour étant tiraillé entre son admiration pour Le Verrier et la reconnaissance qu'il vouait au clan Arago pour sa formation à l'Observatoire de Paris (voir plus de détails p. 63).

Sixième partie

ANNEXES

Annexe A

DOCUMENTS COMPLÉMENTAIRES

Objectifs

On présente les observations anciennes d'Uranus, en particulier celles faites par Le Monnier.
On compare la disposition des calculs faits par Le Verrier pour Mercure avec celle retenue pour faire les calculs pour Uranus.
On commente la fin de la lettre de Galle à Le Verrier, et enfin, on reporte la justification donnée par Le Verrier de l'impossibilité d'avoir dans l'expression de la perturbation de la longitude d'Uranus, un terme en $(4n - n')$, problème soulevé au cours de sa polémique avec Delaunay (voir § 13.2)

Sommaire

A.1 Observations anciennes d'Uranus, observations faites par Le Monnier **452**
A.2 Feuilles de calcul pour la fonction perturbatrice **456**
A.2.1 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Vénus sur Mercure 456
A.2.2 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Saturne sur Uranus 457
A.3 Suite de la lettre de Galle à Le Verrier **458**
A.4 Justification donnée par Le Verrier à Delaunay **459**

A.1 Observations anciennes d'Uranus, observations faites par Le Monnier

Après la découverte d'Uranus par Herschel le 13 mars 1781, plusieurs astronomes (Bode, Burckhardt, Bouvard, Bessel...) fouillèrent les catalogues d'étoiles et les registres d'observations pour essayer de mettre en évidence des observations fortuites d'Uranus, qui aurait été pris au moment de son observation pour une étoile.
Bouvard signale qu'en faisant ses observations pour former son catalogue d'étoiles, Le Monnier a enregistré dans ses cahiers d'observations à plusieurs reprises (pas moins de 12 fois !) Uranus entre 1750 et 1771, en le prenant pour une étoile. Ses cahiers d'observations sont très mal tenus, comme on peut le constater dans les pages suivantes (fig. A.1, fig. A.2, fig. A.3) et voici la morale qu'en tire Bouvard [Bouvard, 1821b] :

> D'après les idées d'Halley, Lemonnier s'attacha principalement aux observations de la Lune, afin de reconnaître les inégalités de cet astre, dépendantes de la révolution des nœuds.
> À l'époque où il commença ses observations, on n'avait pas encore de catalogue exact des principales étoiles ; en conséquence, il ne s'assujétissait pas à observer souvent les mêmes étoiles, comme on le fait actuellement ; il observait toutes les étoiles brillantes, et surtout les petites qui se trouvaient près du zodiaque, soit avant, soit après le passage de la Lune.
> Parmi le grand nombre de petites étoiles qu'il [Le Monnier] a observées, la planète Uranus s'y est souvent trouvée ; mais pour n'avoir pas, jour par jour, comparé ses observations, il a été privé de l'honneur d'une belle découverte.

Il continue ainsi :

> Quand Herschel eut reconnu et annoncé le mouvement de cette nouvelle planète, les astronomes, occupés de grands travaux sur les étoiles, reconnurent bientôt qu'elle avait été observée plusieurs fois comme étoile. M. Bode trouve deux observations anciennes, l'une dans *l'Histoire céleste* de M. Flamsteed, et l'autre dans le catalogue de Mayer.
> Lemonnier, un peu trop tard, trouva dans ses registres trois observations.
> M. Bessel, en construisant son grand catalogue des étoiles de Bradley, reconnut que ce célèbre astronome l'avait également observé le 5 décembre 1753.
> Enfin, M. Burckhart ayant fait de nouvelles recherches dans *l'Histoire céleste* de Flamsteed, a encore trouvé que cet astronome l'avait observée le 2 avril 1712, les 5, 6 et 11 mars 1715 (nouveau style). Occupé depuis quelques années de la construction de nouvelles tables de cette planète, j'ai présumé que je trouverais encore d'autres observations dans les registres originaux de Lemonnier, qui sont déposés à l'Observatoire royal ; en conséquence, j'ai parcouru avec le plus grand soin, les quinze volumes in-folio qui renferment toutes les observations faites par cet astronome, depuis 1736 jusqu'en 1780, et mes recherches m'ont procuré douze observations, en y comprenant les trois déjà connues.
> Les registres de Lemonnier sont dans le plus grand désordre ; son écriture est si imparfaite, que très souvent il est impossible de lire ce qu'il a écrit, surtout les chiffres.
> Ses observations ont été faites à l'aide d'un quart de cercle mural [1] ; la pendule dont il faisait usage, était certainement fort médiocre ; car son avance ou son retard diurne variait considérablement d'un jour à l'autre ; souvent on est fort embarrassé pour en conclure sa marche en vingt-quatre heures.
> Le désordre qui règne dans les registres est encore augmenté par le peu de soin qu'il mettait dans les observations des passages au méridien. On trouve très souvent des erreurs de plusieurs secondes, et, quelquefois, de plus considérables, comme le prouvent les observations du 15 janvier 1754. Les erreurs de passages par le méridien s'accroissent des défauts particuliers

1. Construit par Sisson en 1742 (une photo se trouve fig. B.5) et actuellement exposé à l'Observatoire de Lyon. C'est l'instrument prêté à Lalande en 1751-1752 pour mesurer la position de la Lune conjointement à Lacaille, basé au Cap de Bonne Espérance. Plus tard, Le Monnier utilisera aussi un quart de cercle construit par Bird, qui est actuellement exposé à l'observatoire de Paris.

> du plan du limbe du quart de cercle, qui, en outre, n'était pas strictement dans le méridien. Comme on ne trouve nulle part une table de construction, on ne peut employer, pour déterminer la position de la planète, que les étoiles qui se trouvent à peu près sur le parallèle de l'astre.
> On trouvera ci-après les douze observations citées. Pour les réduire, j'ai fait usage du nouveau Catalogue des étoiles de Bradley, que M. Bessel vient de publier...

On a rassemblé table A.1 une liste des observations anciennes d'Uranus, c'est à dire celles antérieures à la découverte par Herschel en 1781. Deux observations de Bradley n'ont pas pu être utilisées par Le Verrier, car elles ont été identifiées seulement en 1864 (sources : Alexander [Alexander, 1965] et Sheehan [Sheehan, 2021]).

TABLE A.1 – Liste des observations d'Uranus en tant qu'étoile, faites antérieurement à sa découverte par Herschel. Dans l'ordre : observateur, date d'observation, constellation dans laquelle elle a été observée, 'découvreur' de l'observation et date de cette 'découverte' (sources : Alexander [Alexander, 1965] et Sheehan [Sheehan, 2021])

n°	Observateur	Date	Constellation	Découvreur, date
1	Flamsteed	23 décembre 1690	Tau	Bode, 1785
2	Flamsteed	2 avril 1712	Leo	Burckhart, avant 1820
3-5	Flamsteed	4, 5, 10 mars 1715	Leo	Burckhart, avant 1820
6	Flamsteed	29 avril 1715	Leo	Burckhart, avant 1820
7	Bradley	21 octobre 1748	Cap	Breen, 1864
8	Bradley	13 septembre 1750	Cap	Breen, 1864
9	Le Monnier	14 octobre 1750	Cap	Bouvard, avant 1818
10	Le Monnier	5 décembre 1750	Cap	Bouvard, avant 1818
11	Bradley	3 décembre 1753	Aqr	Bessel, 1810 (1813 ?)
12	Mayer	25 septembre 1756	Aqr	Bode, 1781
13	Le Monnier	15 janvier 1764	Psc	Bouvard, avant 1818
14-15	Le Monnier	27, 30 décembre 1768	Ari	Bouvard, avant 1818
16-17	Le Monnier	15, 16 janvier 1769	Ari	Bouvard, avant 1818
18-21	Le Monnier	20, 21, 22, 23 janvier 1769	Ari	Bouvard, avant 1818
22	Le Monnier	18 décembre 1771	Ari	Bouvard, avant 1818

Pourquoi ces observateurs chevronnés n'ont-ils pas reconnu la nature planétaire de l'astre observé ?

1. Sans doute, parce qu'ils établissaient des catalogues d'étoiles ou travaillaient sur la théorie de la Lune [2] [en vue de la détermination des longitudes] et n'étaient pas à la recherche de nouvelles planètes.
2. Parce que le faible diamètre des objectifs de leurs instruments ne leur permettait de faire apparaître Uranus sous la forme d'un disque.

2. Cas de Le Monnier

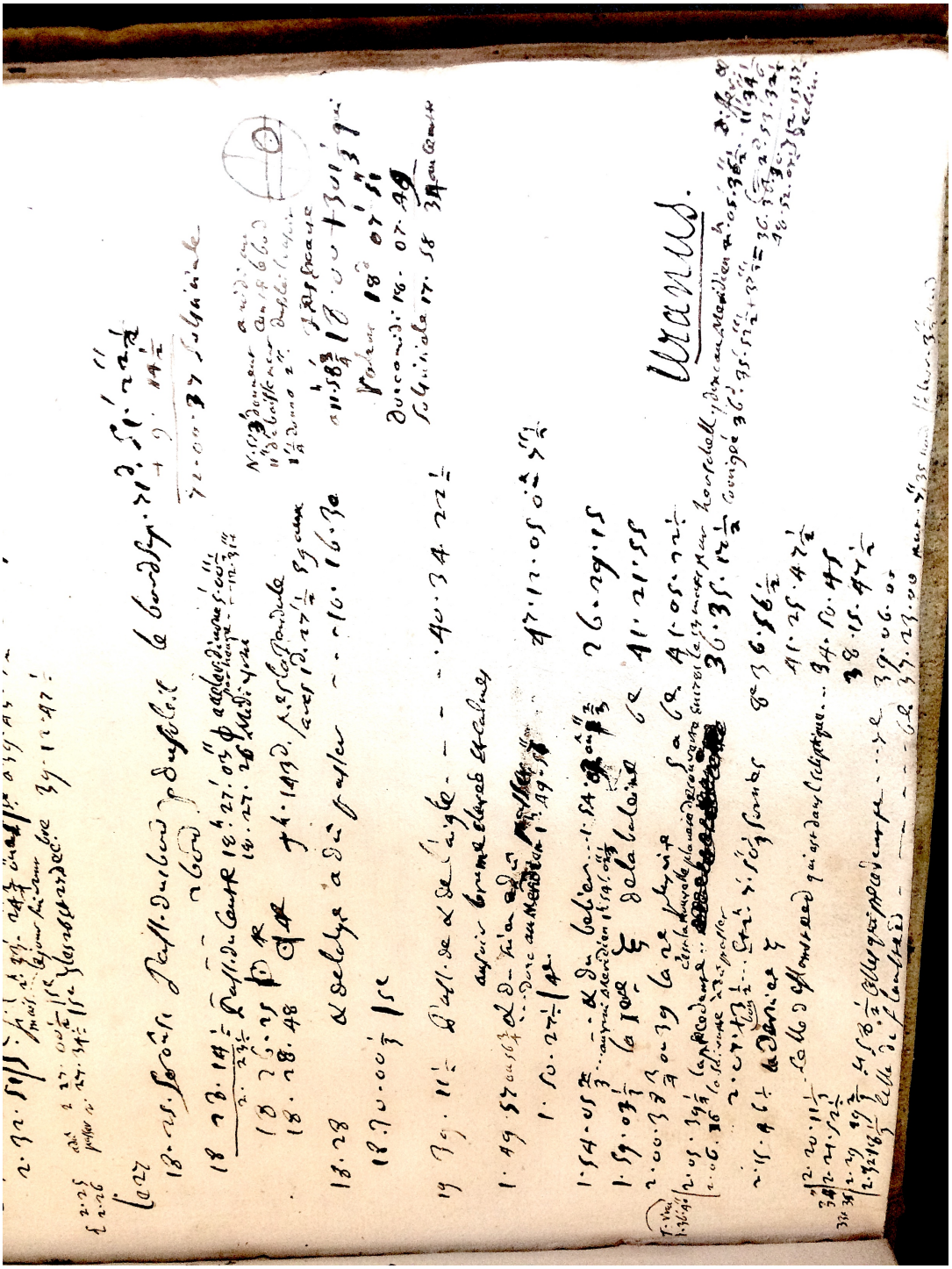


FIGURE A.1 – Extrait d'un cahier d'observation de Le Monnier ; Le Monnier, lui-même, a reconnu dans cette observation du 27 décembre 1768 que l'étoile qu'il avait notée était en fait Uranus ; il écrit au-dessus de son observation « c'est la nouvelle planète découverte en 1781 le 13 mars par Herschell [sic] » ; il inscrit « Uranus » au-dessus de son commentaire et il corrige la position qu'il avait notée à l'époque. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris

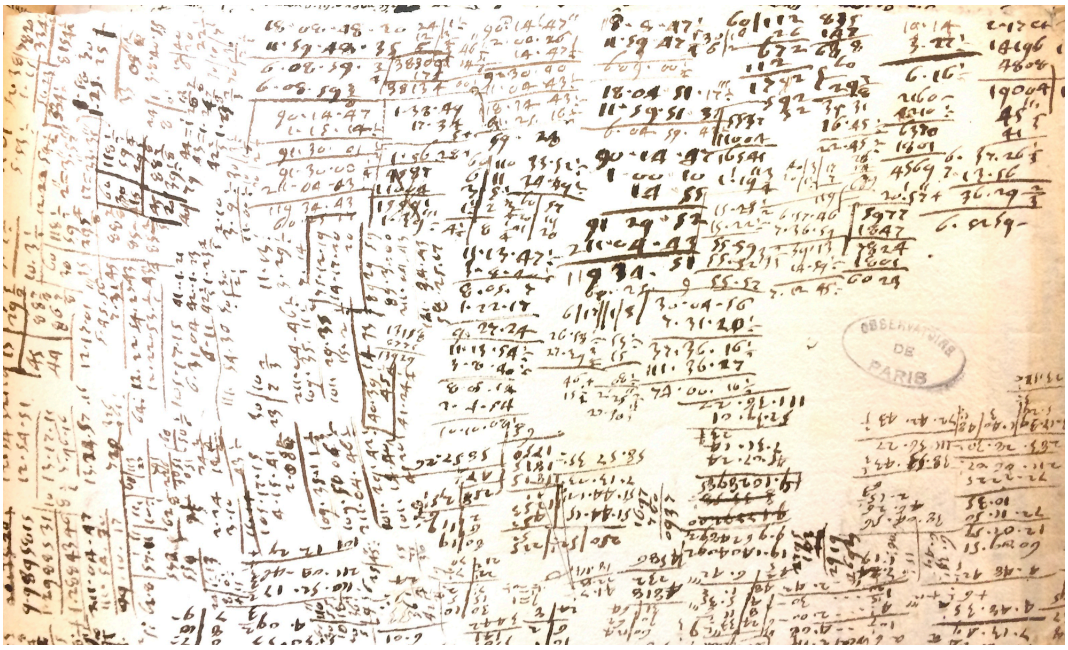


FIGURE A.2 – Feuille de calcul de Le Monnier. Il est bien difficile de s'y retrouver dans cette masse d'opérations. Les résultats sont-ils tous corrects ? © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris

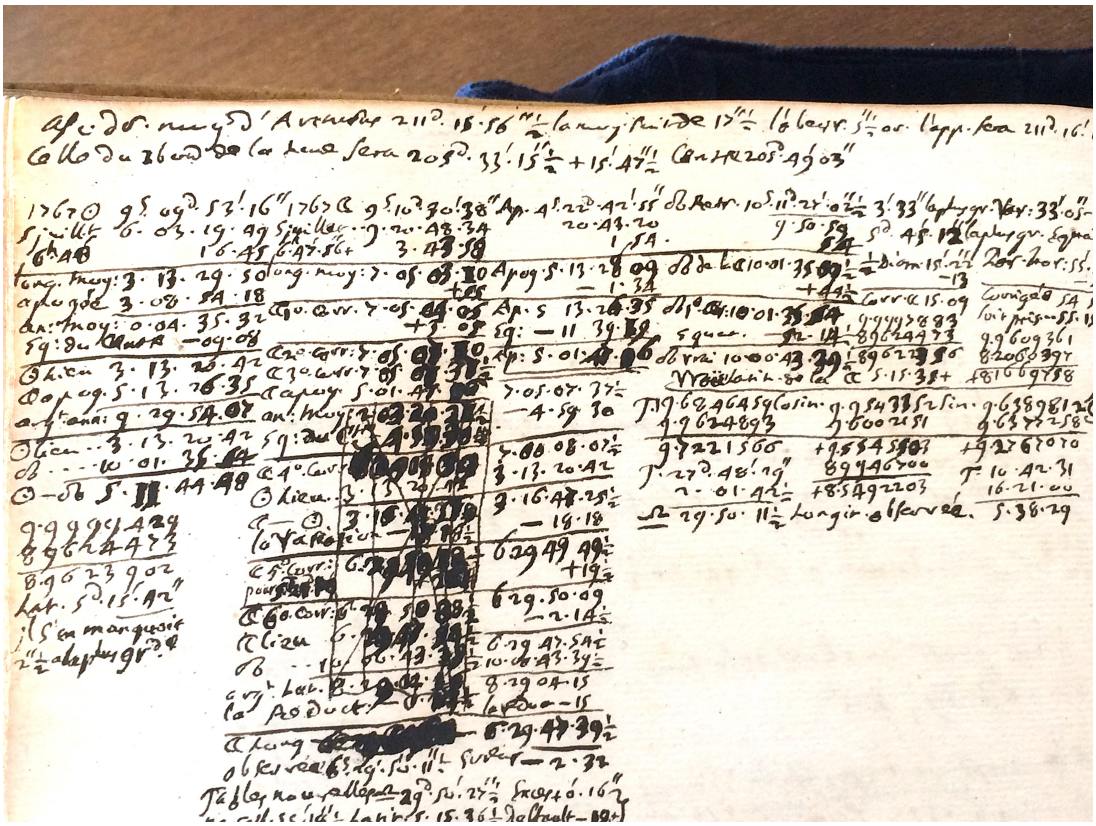


FIGURE A.3 – Feuille de calcul de Le Monnier datant de 1767. Les chiffres, même non raturés, ne sont pas tous lisibles. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris

A.2 Feuilles de calcul pour la fonction perturbatrice

A.2.1 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Vénus sur Mercure

Voici une page du calcul effectué lors de la première interpolation dans la détermination des perturbations exercées par Vénus sur Mercure (Ms 1063 tome 3). Pour comparer, on a placé le calcul correspondant concernant Saturne et Uranus fig. A.5. Le progrès dans l'efficacité de l'organisation de l'espace est spectaculaire.

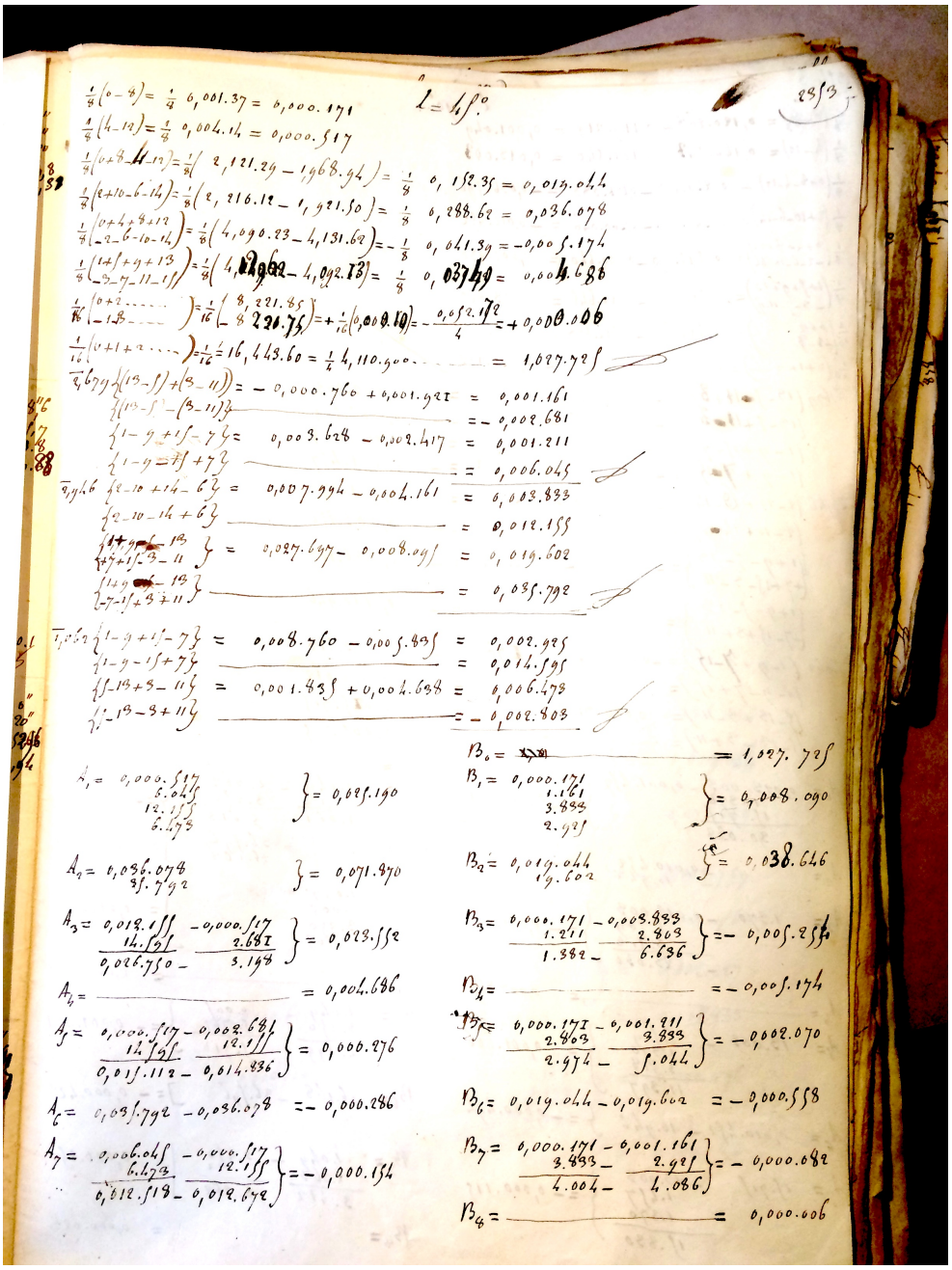


Figure A.4 – Extrait du calcul de la fonction perturbatrice de Vénus sur Mercure, effectué en 1842. Le Verrier n'avait pas encore adopté la disposition en tableur. Il est assez difficile de s'y retrouver et l'occupation de l'espace n'est pas optimisée ; comparer avec la disposition de la figure A.5, page suivante. © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris (Ms 1063).

A.2.2 Feuille de calcul pour la perturbation exercée par Saturne sur Uranus

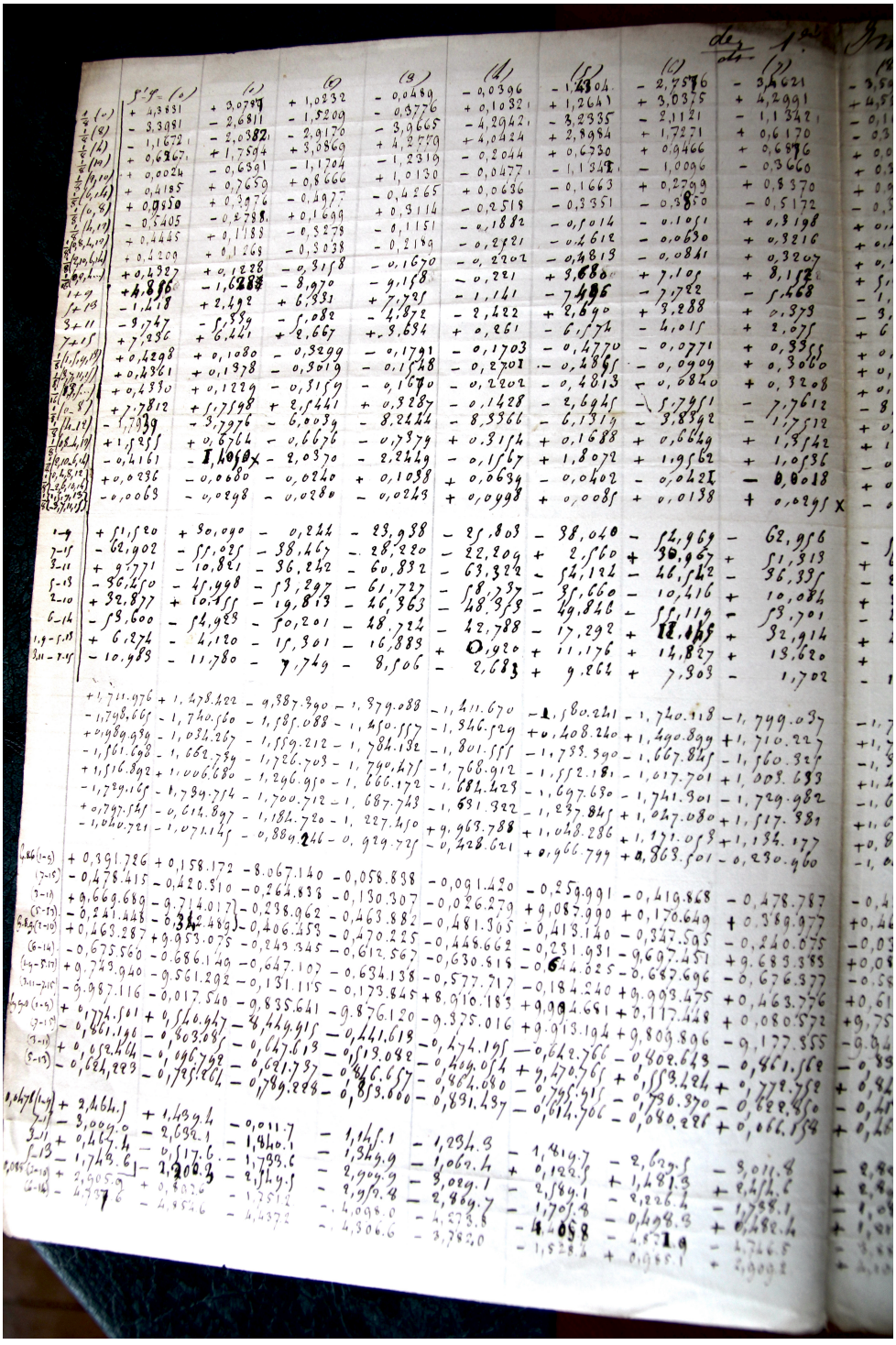


FIGURE A.5 – Feuille de calcul lors de la première interpolation dans le calcul de la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus. Les sous-expressions calculées sont dans la colonne de gauche. On peut apprécier le gain d'efficacité et de lisibilité dans la disposition des calculs par rapport à la page précédente. Voir § 3.4 pour plus de détails sur la signification de ces calculs © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris (Ms 1063 (27) cahier n° 2).

A.3 Suite de la lettre de Galle à Le Verrier

Galle avait écrit à Le Verrier pour lui annoncer la découverte visuelle de sa planète. L'original de cette lettre est reproduit dans un bulletin de la revue *Ciel et Espace* [Danjon, 1946b].
Le Verrier recopie intégralement cette lettre dans le brouillon de son mémoire *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel*, en vue de son impression (voir le début de la lettre au § 6.14). En fin de lettre, Encke et Galle proposent le nom 'Janus' [3] pour la nouvelle planète ; Le Verrier recopie cette suggestion dans son brouillon dans un premier temps, puis la raye, en indiquant au typographe de mettre à la place une ligne de points. Non seulement Le Verrier n'appréciait pas le fait que les astronomes berlinois proposent un nom, privilège en principe réservé au découvreur, qu'il considérait bien sûr comme étant lui-même, mais en plus, il n'appréciait pas le nom 'Janus', qui sous-entendrait que la nouvelle planète marquait la limite du Système solaire.

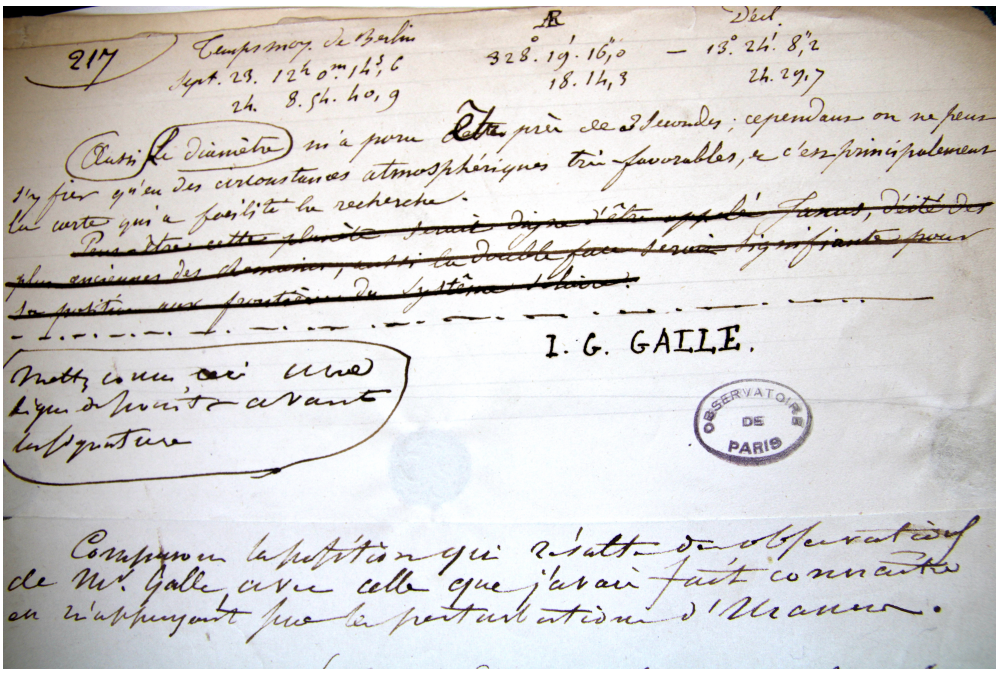


FIGURE A.6 – Copie, figurant dans le brouillon de *Recherches sur les mouvements de la planète Uranus*, écrite de la main de Le Verrier, de la deuxième moitié de la lettre de Galle annonçant la découverte de Neptune. Le Verrier recopie complètement dans un premier temps la lettre originale de Galle (voir le début de la lettre au § 6.14), puis se ravise et raye la suggestion de Galle et Encke d'appeler la nouvelle planète 'Janus' et il demande au typographe (dans le texte entouré) de mettre à la place une ligne de points.
Voici en clair le texte barré : *« Peut-être cette planète serait digne d'être appelée Janus, déité des plus anciennes des Romains, aussi la double face serait significative pour la position aux frontières du Système solaire »*. Suggestion contraire à l'idée que Le Verrier se faisait du Système solaire (page 254 de *Herschel*) : « Ce succès doit nous laisser espérer qu'après trente ou quarante années d'observations de la nouvelle planète, on pourra l'employer, à son tour, à la découverte de celle qui la suit dans l'ordre des distances au Soleil ». (Brouillon du manuscrit de *Herschel* cahier n° 1) © Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

3. Janus est le dieu romain des commencements et des fins. Il est bifrons (« à deux visages ») et représenté avec une face tournée vers le passé, l'autre sur l'avenir. Son mois, Januarius (« janvier »), marquait le commencement et la fin de l'année dans le calendrier romain.

A.4 Justification de l'absence d'un terme en $(4n - n')$ dans l'expression de la perturbation de la longitude vraie d'Uranus

Delaunay avait annoncé un terme en $4n - n'$ dans l'expression de la perturbation exercée par Saturne sur Uranus. Le Verrier avait contesté cette affirmation (voir § 13.2) et avait fourni la justification suivante pour l'absence d'un tel terme, justification publiée dans [Le Verrier, 1842a].

» Soit $in - i'n'$ un petit diviseur dont l'ordre est égal à la quantité positive $i - i'$. On sait, par la théorie du VIe livre de la *Mécanique céleste*, et par celle des constantes arbitraires, que les inégalités de la longitude qui dérivent de ce diviseur, ne peuvent provenir que de la variation de l'excentricité et de celle du périhélie. On les obtient par les formules

$$\delta v = 2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e\,\delta\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi),$$

$$\delta e = -\frac{an}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\,dt,$$

$$\delta\varpi = \frac{an}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{de}\,dt;$$

toutes ces notations sont bien connues.

» D'autre part, un terme quelconque de R, correspondant à l'argument $in - i'n'$, et de l'ordre le moins élevé, est toujours de la forme suivante :

$$\mathrm{M}e^h \cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

l'exposant h de l'excentricité e étant égal au multiplicateur de $-\varpi$ sous le signe cosinus. On en déduit successivement

$$\delta e = \frac{anh\,e^{h-1}\,\mathrm{M}}{in - i'n'}\cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\delta\varpi = \frac{anh\,e^{h-2}\,\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\delta v = -\frac{2anh\,e^{h-1}\,\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin[(i-1)nt - i'n't + (i-1)\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - (h-1)\varpi];$$

et l'on voit que δv ne renferme aucun terme dépendant de l'argument $(i+1)n - i'n'$. Ce terme s'évanouit, à cause de la forme particulière du développement de la fonction perturbatrice, et de celle des expressions différentielles des variations de l'excentricité et du périhélie.

» Vers la fin de 1838, l'erreur croissante des tables d'Uranus s'élevait à 70″ pour la longitude. J'avais d'abord espéré que les perturbations nouvellement annoncées feraient disparaître ces erreurs, après qu'elles auraient été introduites dans la détermination des éléments. Mais l'une d'elles n'existe pas; et il a été tenu compte de celle dont l'argument est $2n^{\text{V}1} - n^{\text{V}}$ dans la construction des tables. Les perturbations indiquées par M. Hansen ont dû, à cause de la période de 1600 ans de l'inégalité du moyen mouvement, se confondre avec la détermination du moyen mouvement elliptique, et l'erreur qui en peut résulter sur la longitude actuelle de la planète est insensible. »

FIGURE A.7 – Justification donnée par Le Verrier dans [Le Verrier, 1842a] pour expliquer l'absence de termes en $(4n - n')$ dans l'expression de la perturbation de la longitude héliocentrique d'Uranus : les termes $(i+1)n - i'n'$ se détruisent après linéarisation des produits sin cos

Annexe B

INSTRUMENTS D'OBSERVATION

Objectifs

On présente les instruments méridiens en usage à l'époque de Le Verrier. On donne aussi les représentations de quelques instruments historiques qui ont participé à la découverte d'Uranus et de Neptune

Sommaire

B.1 Instruments pour les observations méridiennes **461**
B.1.1 Quart de cercle méridien 461
B.1.2 Lunette des passages ou lunette méridienne 462
B.1.3 Détermination d'une position complète 462
B.1.4 Principe d'une observation au cercle méridien universel 463
B.2 Quelques instruments historiques **464**

B.1 Instruments pour les observations méridiennes

Une grande partie de ce qui suit provient de [Le Guet-Tully, 2005].
L'appellation officielle des divers instruments méridiens n'est pas toujours respectée dans les descriptions données dans les livres consacrés à cette période.

Jusqu'au milieu du XIXe siècle, il y avait essentiellement deux types d'instruments méridiens :
– le quart de cercle méridien, évoluant progressivement vers le cercle méridien mural
– la lunette des passages, appelée aussi lunette méridienne ou encore lunette de transit

Ces deux instruments étaient munis d'une lunette, qui ne pouvait se déplacer que dans le plan méridien. L'ouverture de la lunette de visée était très variable d'un instrument à l'autre : de 12.5 cm à 22 cm ; 15 cm pour le cercle mural de Gambey à l'Observatoire de Paris.

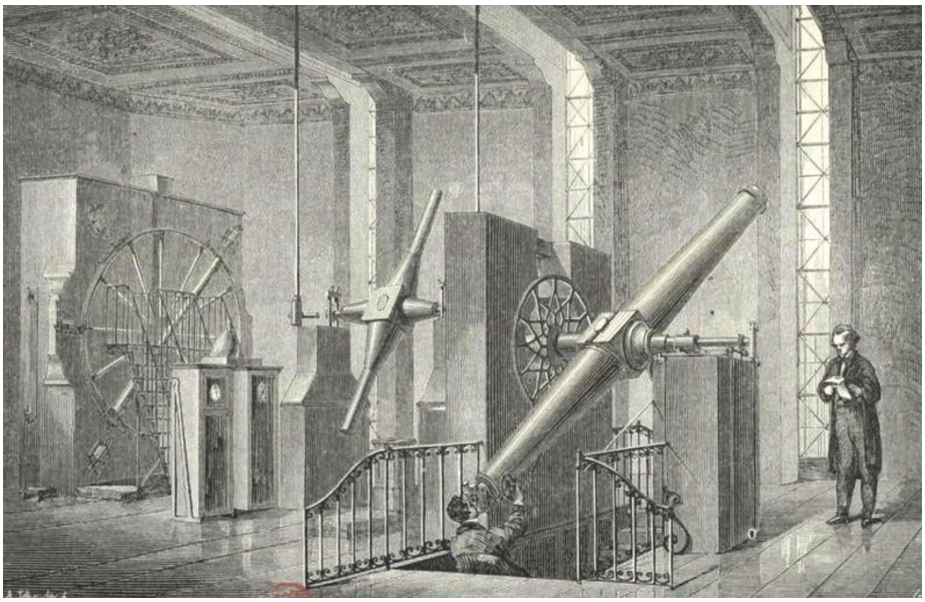


FIGURE B.1 – Salle des instruments méridiens de l'Observatoire de Paris. De gauche à droite : le cercle mural de Gambey (datant de 1843), la lunette méridienne de Gambey (datant de 1830) et l'instrument méridien (1863), commandé à Eichens par Le Verrier ; on observe que cet instrument ne possède qu'un seul cercle gradué pour lire les déclinaisons. On remarque les fenêtres allongées pour permettre les observations (source : Gallica)

B.1.1 Quart de cercle méridien

En principe, le quart de cercle méridien (fig. B.5) servait uniquement à mesurer les déclinaisons par lecture sur le cercle gradué bordant l'instrument. Le quart de cercle méridien était solidement fixé à un mur aligné selon le méridien. De fréquents réglages devaient être effectués pour s'assurer que le plan du quart de cercle coïncidait bien avec le plan méridien. D'autre part, il fallait s'assurer de la verticalité du quart de cercle à l'aide d'un fil à plomb. Le quart de cercle ne peut pas viser toutes les latitudes : le plus souvent, chaque observatoire disposait de deux quarts de cercle : un pour viser au Sud, et un autre pour viser au Nord, en particulier pour viser la Polaire, utilisée pour de nombreux réglages.
Progressivement, avec le progrès dans la gravure sur le cercle de lecture [Chapman, 1990], le quart de cercle évoluera vers le cercle (complet) mural (fig. B.1 à gauche et fig. B.3), qui permet d'observer une plus grande étendue du ciel.

B.1.2 Lunette des passages ou lunette méridienne

(Fig. B.1, au centre) La lunette des passages permettait de noter à l'aide d'une horloge réglée sur le temps sidéral le temps de passage d'un astre au méridien. La lunette des passages ne disposait pas de cercle de lecture pour la déclinaison. L'ascension droite de l'astre – but de l'observation – est égale au temps sidéral au moment du passage. Mais comme l'axe des tourillons n'est pas exactement horizontal et dirigé dans la direction Est-Ouest, la lunette ne pivote pas exactement dans le plan méridien. D'autre part, l'axe optique ne coïncide pas exactement avec l'axe de la lunette. Il faut donc corriger la lecture en tenant compte de tous ces petits décalages. Initialement, on déterminait ces décalages par l'observation d'étoiles de référence et on corrigeait la position de l'instrument. Puis, plus tard, on ne touchait plus aux réglages de l'instrument, mais on corrigeait les lectures, à partir de constantes régulièrement mises à jour par des observations (voir encadré 9, p. 132). D'autre part, il fallait aussi corriger la lecture de l'horloge (voir la correction de l'horloge lors de l'observation de Flamsteed fig. 4.6).
Dans les catalogues d'observations publiés par Greenwich ou Paris, ces diverses corrections sont indiquées pour chaque observation. Voici par exemple, fig. B.2, un extrait d'observations faites à Greenwich en 1846.

Star.	Collimation	Level.	Azimuth.	Star.	Collimation	Level.	Azimuth.
	l	Cos. Z.D.	Sin. Z D.		l	Cos. Z.D.	Sin. Z.D.
	15 Sin. N.P.D.	15 Sin. N.P.D.	15 Sin. N.P.D.		15 Sin. N.P.D.	15 Sin. N.P.D.	15 Sin. N.P.D.
α Andromedæ . .	+0·076	+0·069	+0·030	α Cassiopeiæ S.P. .	−0·118	−0·035	+0·113
γ Pegasi	+0·069	+0·055	+0·042	12 Canum Venaticûm	+0·086	+0·084	+0·018
α Cassiopeiæ . . .	+0·118	+0·118	−0·009	Polaris S.P. . . .	−2·528	−1·936	+1·626
β Ceti	+0·070	+0·024	+0·066	Spica	+0·068	+0·032	+0·060
Polaris	+2·528	+2·019	−1·522	η Ursæ Majoris . .	+0·104	+0·104	+0·002
θ Ceti	+0·067	+0·033	+0·059	η Bootis	+0·070	+0·060	+0·038

FIGURE B.2 – Extrait du rapport des observations de Greenwich pour 1846 avec les 3 corrections instrumentales (collimation, axe optique et azimut) pour chaque observation. Pour la façon de réduire les observations, voir encadré 9, p. 132.

B.1.3 Détermination d'une position complète

Comme conséquence de ce dispositif – lunette des passages et quart de cercle mural séparés – la position complète d'un astre (ascension droite et déclinaison) devait être déterminée par deux instruments distincts ; il fallait donc deux observateurs, observant simultanément le même objet et quand il s'agissait d'une étoile faible, il y avait un risque de ne pas observer exactement le même objet aux deux instruments.
On constate par exemple que parmi les 279 observations retenues par Le Verrier, seules 260 sont complètes : ascension droite et déclinaison (*Herschel*, p. 129−136).
Cependant ces dispositions générales comportaient des exceptions :
1) Flamsteed, avec son quart de cercle mural, notait à la fois l'ascension droite, à l'aide d'une horloge sidérale, et la déclinaison.
2) Certaines lunettes des passages disposaient d'un cercle divisé pour noter la déclinaison en même temps que l'heure de passage. Il semblerait que ce soit Picard, à l'Observatoire de Paris, qui ait eu l'idée de cette combinaison [Le Guet-Tully, 2005]. Mais la réalisation d'un tel instrument ne s'est faite qu'après sa mort. C'est finalement Rømer, son assistant à l'Observatoire de Paris, qui utilisa de façon intensive un tel instrument (voir fig. B.4).
Cette fonctionnalité supplémentaire fut oubliée par les successeurs de Rømer et de Picard jusqu'à la création d'instruments méridiens universels à partir de la deuxième moitié du XIXe siècle.
On peut citer l'anecdote rapportée par Chapman ([Chapman, 1990] p. 86) :

> Hornsby [1] who never had an assistant, was forced to keep his own clock, and to scribe and observe all at one time. Moreover, it was his custom to make routine observations in both right ascension and declination on the same star-passage. He did this by observing a star on the first and second wires of the quadrant to obtain its declination. He then quickly transferred to the adjacent transit instrument to see it actually come to the meridian, after which he would switch back to the quadrant, to see it leave the field across the fourth and fifth wires. Such a technique must have demanded considerable physical agility, a flawless sense of timing, and an exact memory.

B.1.4 Principe d'une observation au cercle méridien universel

À partir de la deuxième moitié du XIXe siècle, on voit se développer le cercle méridien universel, qui permet de mesurer avec le même instrument ascension droite et déclinaison. Il a la configuration d'une lunette des passages, mais avec deux cercles divisés pour lire aussi la déclinaison. Pour améliorer la précision de la lecture, des microscopes étaient fixés sur le cercle de lecture, par paires, placées aux extrémités d'un même diamètre. Il y avait, selon l'instrument, une, deux ou trois paires de microscopes, régulièrement réparties autour du disque de lecture (voir fig. B.3). Le champ de la lunette contenait en général un fil horizontal et 3 ou 5 fils verticaux régulièrement espacés. L'observateur ajustait en hauteur la position de la lunette à l'aide de vis micrométriques afin d'aligner l'astre observé sur le fil horizontal, puis comptait les temps de passage de cet astre aux différents fils, temps notés par un assistant ; l'assistant notait le nombre de tours de vis pour ajuster la lunette en hauteur, nombre qui était ensuite converti en secondes d'arc. Pendant ce temps, un autre assistant lisait les indications des divers microscopes pour la détermination de la déclinaison. Pendant ses observations (fig. 14.3), Le Verrier ne notait que les temps de passage aux 5 fils et pas les déclinaisons, qui devaient être notées le plus souvent par Goujon, qui travaillait régulièrement avec Le Verrier (jusqu'en 1856). Le Verrier observait surtout des étoiles brillantes, probablement pour déterminer les corrections à apporter aux mesures.

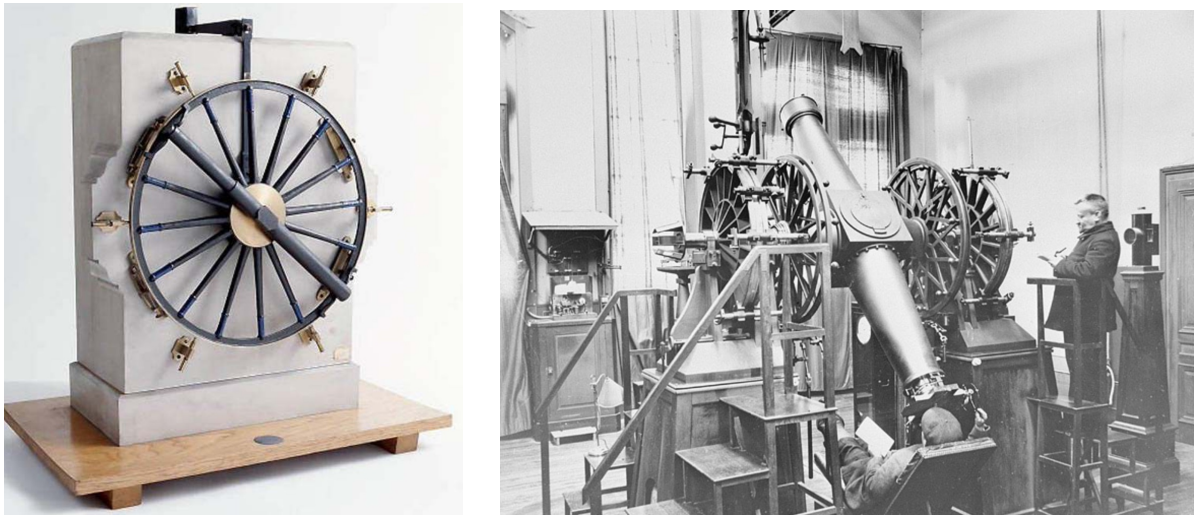


FIGURE B.3 – À gauche, la maquette du cercle mural construit par Gambey en 1843. La graduation est faite sur la tranche et les 6 microscopes de lecture sont dans le plan du disque (la maquette date de 1883 et se trouve au CNAM, © Inventaire général, 1996). À droite, cercle méridien universel de l'Observatoire de Besançon. Les graduations sont sur le limbe du disque et les 6 microscopes sont placés perpendiculairement aux disques. © Observatoire de Besançon

1. Thomas Hornsby (1733−1810), astronome anglais, fondateur et directeur de l'observatoire Radcliffe d'Oxford à partir de 1772. Il a effectué des dizaines de milliers d'observations, publiées après sa mort.

B.2 Quelques instruments historiques

À gauche de la figure B.4, une reproduction de l'arc méridien de Flamsteed, construit en 1688 par Abraham Sharp ; c'est l'instrument avec lequel il a observé Uranus le 23 décembre 1690 [Chapman, 1990] ; son rayon mesure 2.10 m. Avec son ouverture de 140°, Flamsteed pouvait viser l'étoile polaire et ainsi déterminer de façon précise la latitude de l'Observatoire de Greenwich. La division du limbe a été faite par le constructeur sur place et non sur une table horizontale. La lecture pouvait se faire à 10″ près. À droite lunette méridienne imaginée par Rømer (et Picard), qui permettait aussi de lire la hauteur de l'astre observé à l'aide d'un index gradué fixé sur le mur de droite.

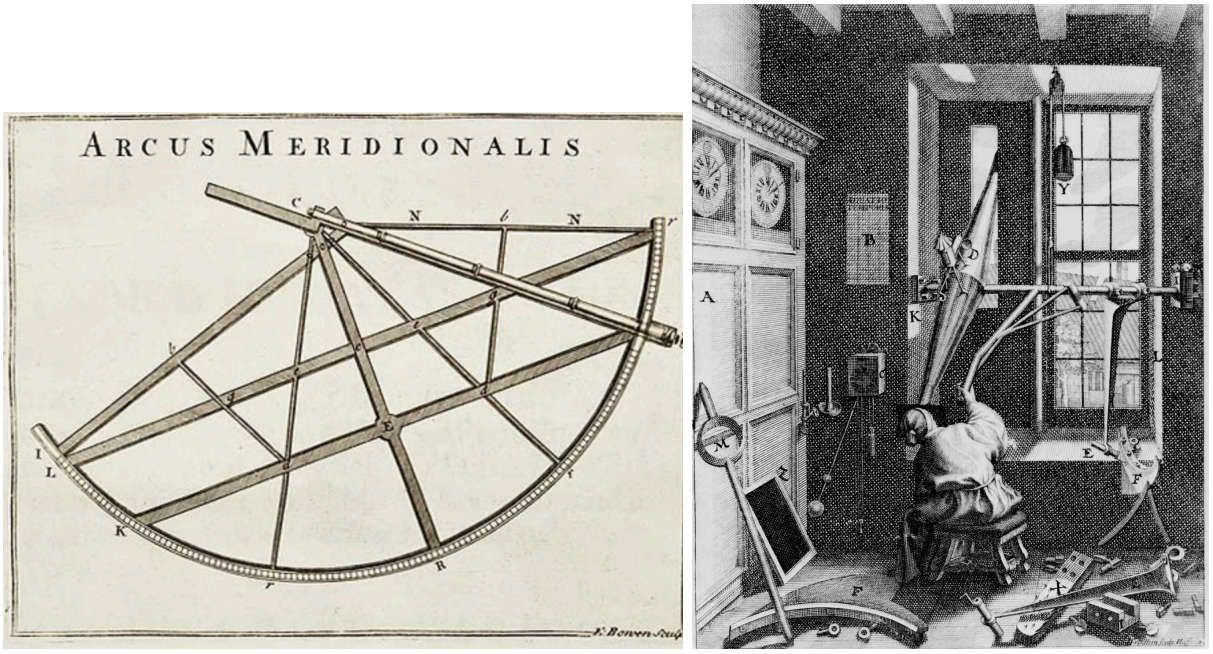


FIGURE B.4 – À gauche, arc méridien de Flamsteed de 140° d'ouverture construit par Sharp en 1688 ; à droite la lunette méridienne de Rømer, qui, grâce à un index fixé sur le mur de droite, permettait de lire les déclinaisons

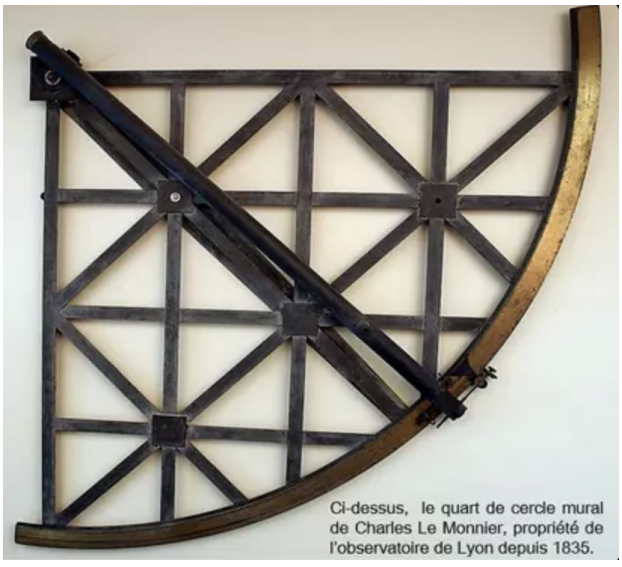
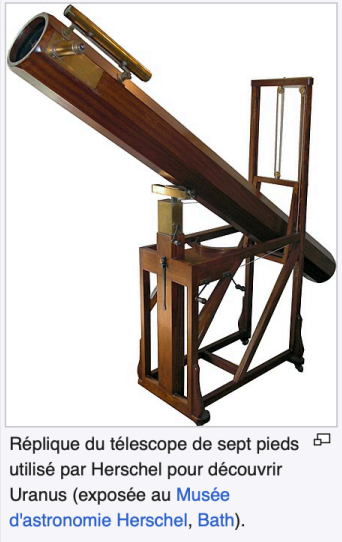
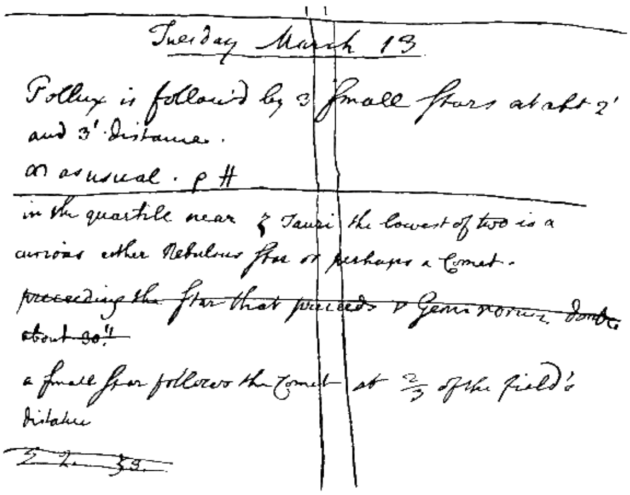


Figure B.5 – Quart de cercle [Adam, 2007], construit par Sisson en 1742, utilisé par Le Monnier pour ses observations à l'Observatoire du jardin des Capucins. Celui-ci prêta son instrument à Lalande pour mesurer, à Berlin, la parallaxe de la Lune, en association avec Lacaille, basé au Cap de Bonne Espérance. Cet instrument se trouve maintenant à l'Observatoire de Lyon, © Observatoire de Lyon

On reproduit les instruments qui ont permis les découvertes associées à Neptune :
– Télescope ayant permis à W. Herschel de découvrir Uranus le 13 mars 1781.
– La lunette qui a permis à Galle et d'Arrest de découvrir Neptune le 23 septembre 1846.
– Le télescope équatorial de Lassell, qui lui a permis de découvrir Triton, le plus gros satellite de Neptune, le 16/10/46.



Réplique du télescope de sept pieds utilisé par Herschel pour découvrir Uranus (exposée au Musée d'astronomie Herschel, Bath).



Extrait du journal de W. Herschel, daté du 13 mars 1781.
Source : *Journal of the Royal astronomical Society of Canada*, 1951.

FIGURE B.6 – Télescope construit par W. Herschel, avec lequel il a découvert Uranus ; le miroir de 17 cm de diamètre est en bronze. À droite, extrait de son cahier d'observation, mentionnant l'observation d'une 'nebulous star or perhaps a comet' (au centre du texte)

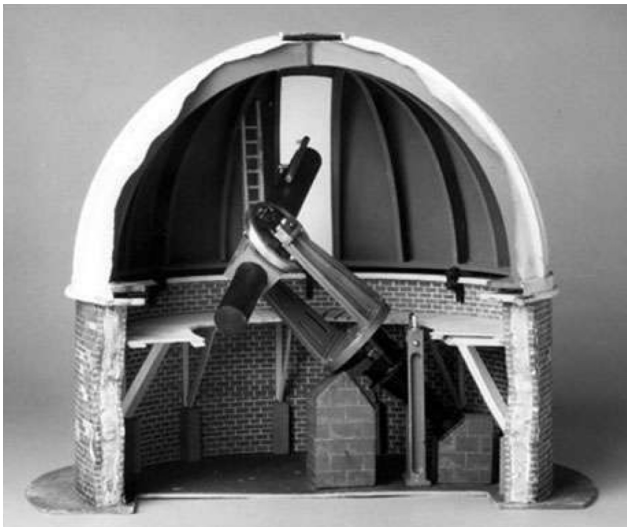


FIGURE B.7 – À gauche : lunette de 24 cm, construite par Fraunhofer, avec laquelle Galle et d'Arrest ont découvert Neptune (© Deutsches Museum Berlin). À droite, modèle du télescope de 60 cm de diamètre construit par Lassell qui, comme William Herschel, construisait ses propres télescopes avec des miroirs faits en bronze. C'est avec ce télescope que Lassell a découvert Triton (il n'y a pas de représentation disponible pour ce télescope)

Annexe C

NOTES PRISES PENDANT LES RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES ET COURS DONNÉS PAR LE VERRIER

Objectifs

On examine le contenu du dossier Ms 1063 (31) de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, intitulé 'Notes sur les Cours d'astronomie à la Sorbonne'. Une présentation partielle a été donnée à la fin du chapitre 2. On précise ici l'ensemble du contenu de ce dossier.

S'il y a bien, dans ce dossier, des notes en vue de cours, il est sûr qu'il y a aussi des notes de connaissance générale prises à l'occasion du relevé de références bibliographiques, fait essentiellement en 1837 ; mais il n'y a pas toujours un élément : date ou source, pour trancher avec certitude.

J'ai donc séparé tout ce qui relevait de la préparation de cours, de tout ce qui semblait être des notes d'après références bibliographiques. Les recopies sont conformes aux textes originaux, souvent hachés et incomplètement rédigés ; les documents sont présentés tels qu'ils apparaissent dans le dossier, sans réécriture.

Sommaire

C.1 Structure des notes bibliographiques prises par Le Verrier **467**
C.2 Notes prises au cours des relevés bibliographiques **468**
C.3 Cours donnés par Le Verrier **470**
C.3.1 Cours donnés au Collège de France 470
C.3.2 Cours à la Sorbonne 471

C.1 Structure des notes bibliographiques prises par Le Verrier

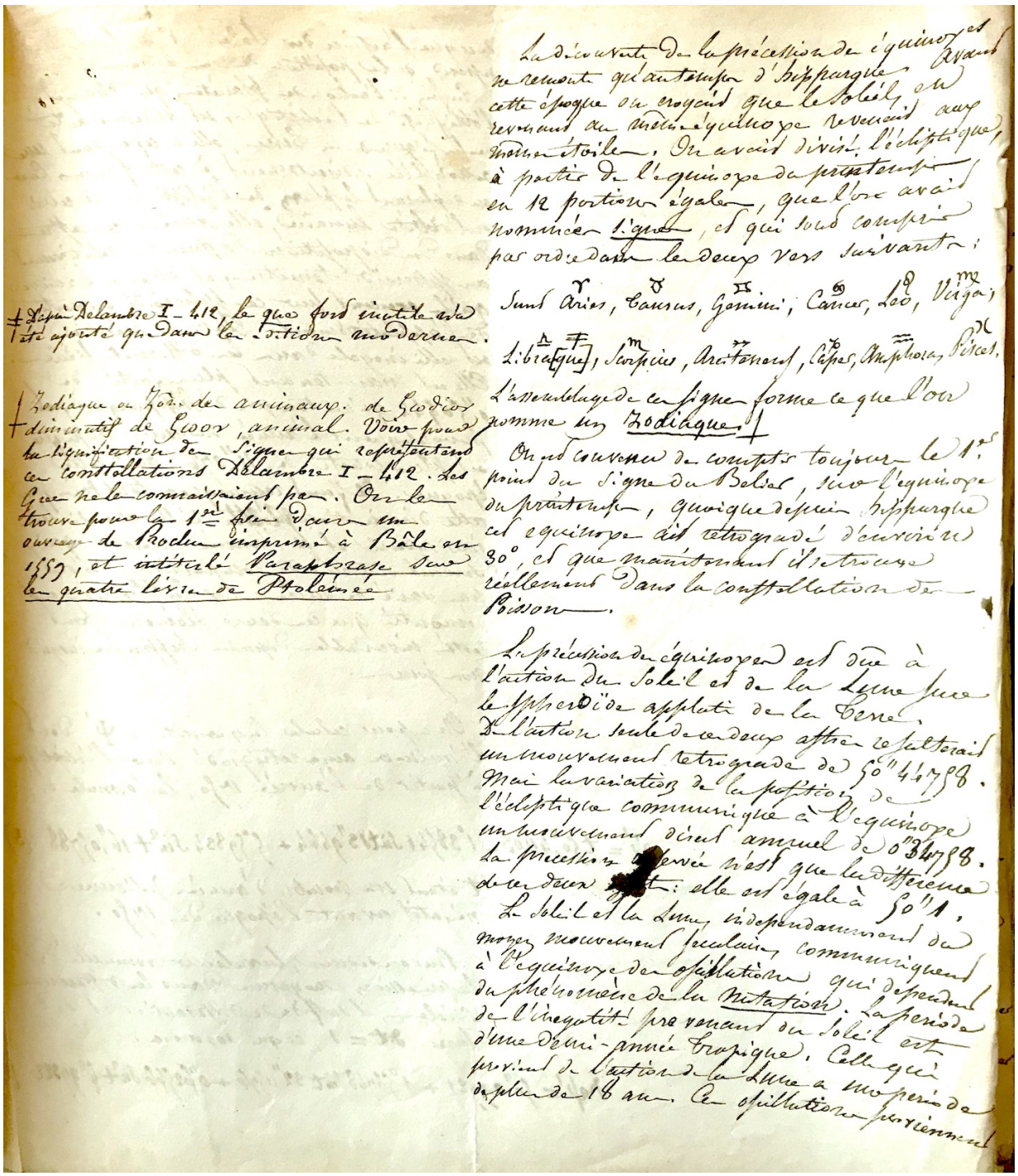


FIGURE C.1 – Exemple d'organisation des notes prises par Le Verrier durant ses recherches bibliographiques et rassemblées dans le dossier Ms 1063 (31) déposé à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris. Le Verrier note les passages qui lui semblent intéressants sur la moitié droite de la feuille ; et dans la marge, il formule quelques remarques, justifie un calcul, ou illustre les propos par un croquis. Ici, il est question du zodiaque : on reconnaît la liste des 12 constellations qui le constituent

C.2 Notes prises au cours des relevés bibliographiques

Au début de sa carrière astronomique, Le Verrier avait noté un très grand nombre de références bibliographiques afin d'être à même de maîtriser tous les problèmes de l'astronomie (voir § 1.1.2). Ce qui suit semble être des notes prises dans des livres qu'il a référencés. Elles sont souvent commentées, corrigées ou complétées par des calculs personnels. Les notes sont prises sur la moitié droite de la feuille et les corrections et les ajouts sont dans la marge, comme on le voit fig. C.1. Après un premier remplissage, il y a parfois d'autres remplissages ultérieurs avec des encres différentes et une écriture pas toujours très lisible.
Voici une liste des documents que Le Verrier a dû noter au début de sa carrière astronomique (en 1837), à partir de ses recherches bibliographiques. On indique pour chacun d'eux le nombre de pages de chaque sous-dossier. La plupart des sous-dossiers comportent une table des matières sur la couverture. Les titres de ces sous-dossiers et les tables des matières sont de la main de Le Verrier.
Dans le descriptif ci-dessous, quand un sous-dossier comporte une table des matières, on se contente de reproduire cette table des matières ; sinon, en l'absence de table des matières, on donne quelques indications sur les sujets notés dans le dossier.

Mathématiques pures (11 p)

Valeurs des expressions se présentant sous la forme 0/0.
Lignes trigonométriques. Arc de cercle.
Logarithme et exponentielle.
Différentielle d'un arc de courbe.
Courbes à double courbure. Surfaces courbes.
Principe des vitesses virtuelles. Composition et équilibre des forces appliquées à un même point.

Orbites, détermination (9 p)

Le cahier est consacré à la méthode de Gauss : détermination d'une orbite par 3 observations, suivie d'une application numérique. Il recopie un article de Gauss et fait (ou recopie) les calculs de l'article.

La Lune (45 p)

Mouvement circulaire.
Phases.
Parallaxe.
Mouvement elliptique, inégalités périodiques. Évection. Équation annuelle. Équation de Laplace.
Inégalités périodiques de la latitude, inégalités périodiques du rayon vecteur.
Libration. Rotation. Constitution physique de la Lune.
Éclipses de Lune.
Du mouvement des nœuds de la Lune.
Circonstances générales des occultations de planètes et d'étoiles par la Lune.

Il y a un deuxième fascicule sur la Lune consacré à la théorie de Laplace et à celle de Hansen :
– Théorie de la Lune de Laplace, livre II de mécanique céleste (p. 146). Il y a des formules donnant le développement de v', e'... en fonction du temps.
– Il y a ensuite des extraits de la théorie de la Lune par Hansen avec de nombreuses formules extraites de différentes pages du livre de Hansen (p. 1, 2,..., 159).
Et ces notes sont prises sur les ouvrages mentionnés (Laplace [Laplace, 1802], Hansen [Hansen, 1838]).

Mouvement du système planétaire (8 p)

Donne les principales caractéristiques physiques des planètes.
Il explique les mots écliptique, équateur...
Au passage, il décrit un cercle à réflexion à double miroir, puis le sextant et il donne son mode d'emploi (pour l'observation du Soleil ?).
Est-ce un canevas de cours ou bien des notes prises sur des livres ?

De la masse et de la densité des planètes et examen de la gravitation (5 p)

Il donne quelques formules et quelques valeurs numériques. *Semble être recopié d'un cours.*

Planètes, nature, dimension des orbites (5 p)
Longitude héliocentrique et géocentrique.
Planètes : nature, dimension des orbites.
Station et rétrogradation des planètes.
Donne les formules et des exemples.

Des mouvements des planètes relativement au Soleil et à la Terre (3 p)
Donne les révolutions synodiques des différentes planètes.

Planètes, position des orbites (4 p)
Existence de phases.
Positions des nœuds.

De la constitution des planètes (8 p)
Il décrit sommairement l'aspect des planètes, probablement à partir des cours donnés à l'Observatoire par Arago.
Vénus.
L'axe de rotation de Vénus est presque parallèle à l'écliptique,
On a reconnu de hautes montagnes à la surface.
La manière progressive dont la lumière se répand dans cette planète y indique une atmosphère.
Éclat très vif tous les 8 ans. Phases, taches, cornes (Schroeter ?) d'où rotation en 0.973 jours.
Pour **Jupiter**, il refait le calcul de Rømer.
Il y a une description assez détaillée de l'anneau de Saturne.

Station et rétrogradation des planètes (5 p)
Calcul de la station, de la rétrogradation.
Ce sont des notes prises à partir de plusieurs références.

Des comètes (2 p)
Quelques formules et mentions de comètes célèbres. *Notes prises à partir de plusieurs références.*
Données numériques pour chaque comète.

Mesure de la hauteur du baromètre (6 p)
Formules de correction, selon la température, entre autres.

Lieux géométriques associés à l'ellipse (1 p)
Quelques problèmes de foyers, directrices. *Notes prises à partir de diverses références.*

Intégration d'expressions trigonométriques (40 p)
Intégration de séries trigonométriques, cas de petits dénominateurs.
Le but semble être le calcul de l'intégrale $X_i = \int \cos(iv + i'\ell')$ où v est l'anomalie vraie d'une planète et ℓ' la longitude moyenne d'une autre. Le calcul semble se faire par une itération et un développement selon l'excentricité e.

Le Soleil (50 p)
Mouvement circulaire du Soleil.
Détermination plus exacte du périgée.
Détermination plus exacte de l'excentricité.
Détermination des éléments par les équations de condition.
Des jours, du calendrier.
Saisons. De la durée des jours.
Des taches du Soleil et de sa rotation.
Périodes astronomiques en usage dans l'Antiquité.
Éclipses du Soleil. Conditions.
Parallaxe.

Lever ou coucher cosmique ; lever ou coucher acronique ; lever ou coucher héliaque.
Il donne la méthode pour déterminer l'époque de l'année où une étoile donnée a son lever héliaque.
Mesure du temps.
Condition d'éclipse du Soleil.
Petit dossier sur la parallaxe du Soleil avec des valeurs successives jusqu'en 1861.

La Terre (15 p)
Quelques données numériques. Données de gravitation surtout.

Action de l'éther sur le mouvement des planètes (4 p)
Formules de frottement.
Ne semble pas pris de la thèse de Lecaplain, ne serait-ce que parce que cette thèse a été soutenue en 1843 [Lecaplain, 1843]. Provient probablement de la *Mécanique céleste* de Laplace.
Le Verrier conclut :
« à chaque révolution, le rayon vecteur diminue de $4\pi\rho a^2$ » (voir § 5.1.1), puis il écrit :
« La résistance de l'éther n'a point été remarquée sur les planètes. Mr Encke a cru la découvrir sur la comète de 1200 jours ».

Sur la réfraction (10 p)
Formulaire.
Il détaille le principe de la méthode des moindres carrés. Il l'applique à la détermination, à partir d'observations, des constantes A, B, ... pour la réfraction : $z + A\tan z + B\tan^3 z + ...$

Inégalités séculaires (50 p)
Il évoque la formation d'une équation du 7e degré à partir de l'évolution des paramètres h et ℓ.
Il dit que le mémoire publié dans la *Connaissance des Temps pour 1843* est un résumé du présent travail, mais le texte publié paraît beaucoup plus long que ce manuscrit.
C'est donc un calcul personnel, qui n'est pas tout à fait à sa place dans ce dossier.

C.3 Cours donnés par Le Verrier

Le Verrier a enseigné au Collège de France de 1843 à 1846 en tant que suppléant de J.B. Biot (voir § 1.4.1 pour plus de détails). Et à partir de la fin 1846, il a enseigné à la Sorbonne dans la chaire qui avait été créée pour lui après la découverte de Neptune (voir § 1.4.2). Quand ce n'est pas indiqué explicitement, il n'est pas toujours facile de déterminer si certaines notes de cours étaient destinées au Collège de France plutôt qu'à la Sorbonne. Si l'on se fie aux déclarations d'Émile Gautier (lettre du 25 décembre 1844 à Charles le Fort, voir § 2.3.2) et aux notes de cours de Mauduit [Mauduit, 1854], le niveau d'enseignement était beaucoup plus élevé au Collège de France qu'à la Sorbonne.
D'une manière générale, les notes, que l'on peut considérer comme des notes pour préparer des cours, sont incomplètes et peu rédigées. Il y a plusieurs documents appelés 3e leçon par exemple : cela doit correspondre à des années différentes. Les textes sont souvent accompagnés de croquis.
Il est difficile de trouver un ordre complet.
On constate qu'il y a bien sûr beaucoup de méthodes de calcul de mécanique céleste, mais il y aussi beaucoup d'évocations historiques.

C.3.1 Cours donnés au Collège de France

Feuillet de 35 pages consacré aux comètes.
Commence par : 2e leçon, 7 Septembre 1844 et finit 9e leçon, 30 septembre 1844.
La 2e leçon débute par « il ne sera pas sans intérêt de commencer par rappeler les idées des anciens sur la nature des comètes ». Et il y a un historique très détaillé et très rédigé pour indiquer les croyances et les interprétations des anciens.
Dans la 3e leçon, il reprend en détail les craintes qu'avaient les anciens au sujet des exhalaisons – chaudes et sèches – produites par les comètes.
Il rapporte une raison avancée pour expliquer l'action des comètes :

> L'air étant infecté par l'apparition d'une comète, tous les hommes respirent également cette corruption ; mais les Grands ajoutent une seconde cause de mort à la première, en se remplis-

> sant de toutes sortes de volatiles qui leur communiquent le poison de l'air qu'ils ont rassemblé de tout côté. Quelle misère !

Le Verrier reprend

> Terminons l'énumération de toutes ces observations [concernant les malheurs apportés par les comètes] « Eh plût au ciel, s'écriait Eraste, que la mélancolie et la bile des Princes fussent les vraies causes des guerres : quelque grains de rhubarbe épargneraient bien du sang ».

Puis il mentionne des interprétations plus raisonnables de Tycho Brahé, Kepler ou Cassini.
Dans la quatrième leçon, il parle longuement des observations d'Hévélius.
À partir de la cinquième leçon, il passe aux calculs.
Il montre comment calculer la position de la comète de Faye le 26 novembre 1843, à partir de la position observée de γ Orion. Pour cela, il actualise les positions de γ Orion à partir des coordonnées lues dans le catalogue de Zach. Au passage, il donne une expression de l'obliquité tenant compte de la nutation. Il montre aussi comment déterminer la correction de la pendule.

Leçons au Collège de France
Petit fascicule avec le contenu très abrégé de certaines de ses leçons.
Une feuille où sont marqués (c'est donc très court ; pour les derniers, il n'y a que le titre) :
Lundi 16 juin 51e Fonction perturbatrice ;
Samedi 21 juin 52e 3e partie du mémoire de Lagrange analysée ;
Lundi 23 juin 53e Intégration de la fonction perturbatrice ;
Samedi 28 juin 54e Théorie de la comète de 1770, éléments provisoires, observations pouvant servir au calcul des éléments ;
Lundi 30 juin 55e Perturbation produite par la Terre sur la comète de 1770 ;
Samedi 5 juillet 56e Calcul des équations de condition. Leur résolution ;
Lundi 7 juillet 57e Introduction de l'indéterminée μ (comète de 1770 ?). Éléments variables.
Les derniers cours de l'année ?

Il évoque le nom des constellations, leur origine, les façons de les nommer. Il reporte sur une carte les principales constellations et les étoiles les plus brillantes.
Correction des mesures dans une lunette méridienne. Calcul de la collimatation.
Étude d'étoiles doubles, exemple η Couronne, 61 Cygne, ζ Grande Ourse.
Textes des premières leçons, plus ou moins détaillés.
On a vu (§ 1.4.1) que le texte de la 9e leçon sur la gravitation universelle était très rédigé.

C.3.2 Cours à la Sorbonne

Il y a un mini-dossier intitulé **Notes relatives aux cours d'Astronomie à la Sorbonne.**
Leçon 1 « Le cours d'astronomie physique fait partie de l'enseignement régulier de la faculté ».
Dépendance de questions : *coup d'œil général et résumé de cosmographie.*
– Vue simple : Étoiles fixes, carte céleste, nombre d'étoiles visibles à l'œil nu. Voie lactée.
– Avec lunette : étoiles plus nombreuses, résolution de la voie lactée, nébuleuses avec lunette faible. Généralités sur les étoiles. Description du Système solaire.

Leçon 2 Apprendre à se reconnaître dans le ciel.
Zénith, nadir, hauteur, distance angulaire, lever, élévation, étoile polaire, circumpolaire.

Leçon 3 Méridien, méridienne, emploi du cercle azimutal.
Principe de la lentille simple. Grossissement. Nécessité d'un réticule.

Leçon 4 Propriété de réfraction de la lumière. Principe de la lentille simple (suite). Coordonnées célestes, constellations. Temps, heure sidérale.

Leçon 5 Latitude, longitude. Ascension droite, déclinaison.
Lunette méridienne et pendule. Détail de l'emploi du réticule à 5 fils. Le Verrier prend un exemple ; il donne la formule $\theta = \frac{\tau}{\cos\delta}$ où τ est le temps de passage à l'équateur entre deux fils. Il poursuit pour montrer comment on calcule l'écart en ascension droite entre Pollux et Procyon en utilisant les temps de passage aux 5 fils.
Il aborde la délicate mesure des angles faibles. Il signale l'erreur de Herschel sur le calcul d'une parallaxe et il mentionne le résultat de Bessel qui, en 1838, a trouvé une parallaxe de $0''.313$ pour 61 Cygni, soit une distance de 10.6 années lumière. Et il écrit « **à quoi cela nous servira ?** » *Comment faut-il prendre cette déclaration ? Au premier degré : calcul inutile, ou bien remarque pour un approfondissement ultérieur ?*
En fait, 3 leçons plus loin, Le Verrier donne de nombreux exemples de parallaxes et des distances associées ; cette remarque de Le Verrier doit donc être considérée comme une préparation à la suite des leçons.

Leçon 6 « Il faut maintenant tenir compte de la marche de la pendule » : il donne un exemple numérique avec Castor et Pollux. Il détaille ensuite le mouvement du Soleil, qui entraîne le Système solaire avec lui : déplacement du soleil au moins de 7 à 8 lieues, mais il ne dit pas en combien de temps (*c'est évidemment par seconde*). Il donne un exemple de passage au réticule.

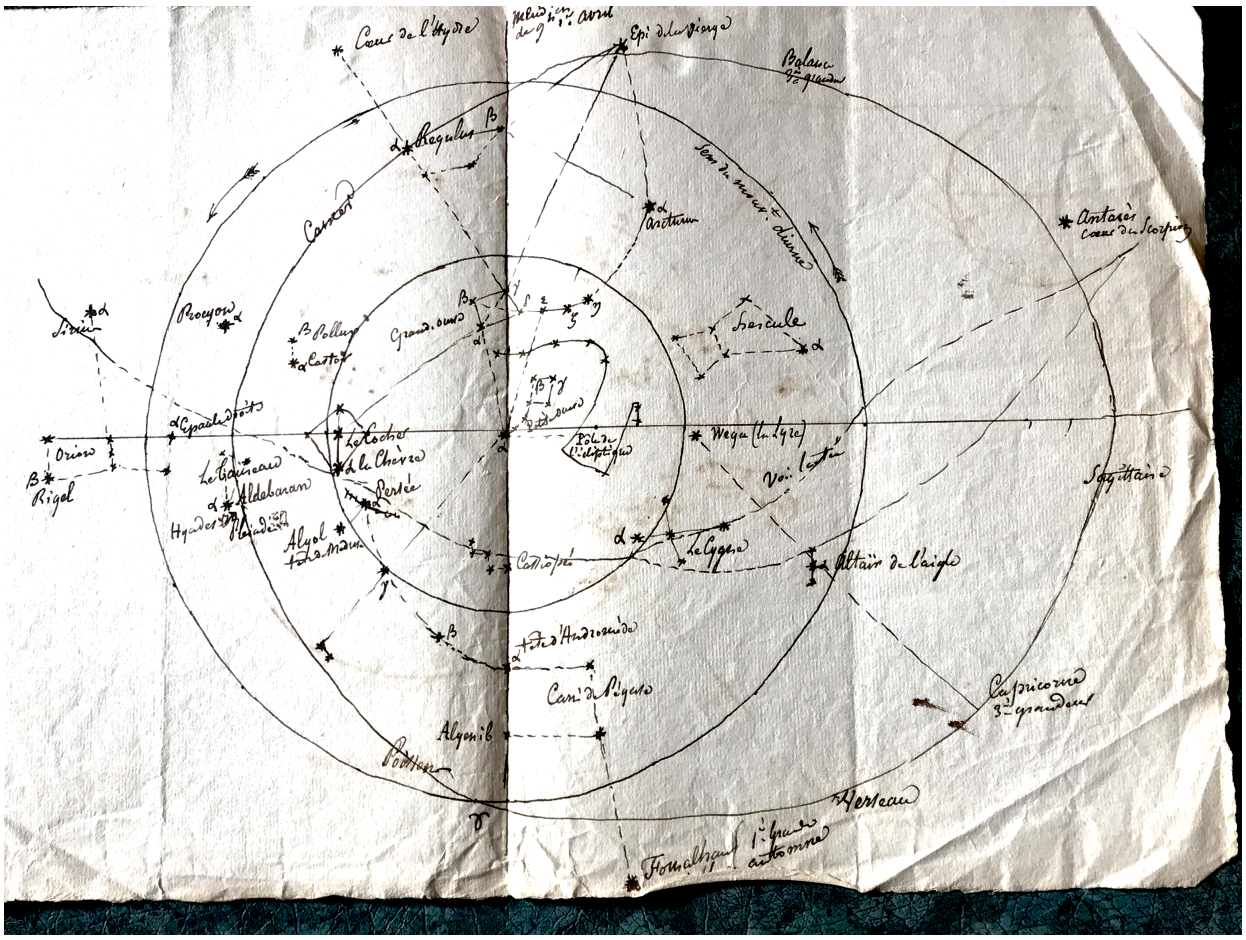


FIGURE C.2 – Carte du ciel polaire établie par Le Verrier pour sa 6e leçon à la Sorbonne

Leçon 6 bis Il donne une liste de constellations avec quelques caractéristiques et l'étymologie (Andromède, Cassiopée, Scorpion qui pique Orion...). Il a dessiné un planisphère avec de nombreuses constellations de l'hémisphère nord (fig. C.2). Exemples de catalogues d'étoiles.

Leçon 7 Base de la mécanique : mouvement uniforme, accéléré, retardé.
Erreur de collimation. Formule correctrice pour le temps de passage.
Détail du calcul pour déterminer la déclinaison à la lunette méridienne.
Méthode des moindres carrés pour déterminer les corrections à apporter aux mesures. Il insiste sur le grand nombre de multiplications impliquées. Donne le calcul avec 5 fils, puis envisage le cas où il manquerait un fil.

Leçon 8 Donne les caractéristiques géométriques de la Terre. Donne une idée de la grande distance des étoiles. Confirmation de l'intérêt qu'il porte finalement aux distances des étoiles (voir la remarque à l'occasion de la leçon 5).

Leçon 9 Est-ce la sphère des fixes ou la Terre qui tourne ? Chute des corps vers l'Est.

Leçon 9 bis Évocation de la parallaxe annuelle. Quelques mentions de mesures : Véga $0''.261$ (Struve), Sirius $0''.230$ (Herschel), Arcturus $0''.127$, Polaire $0''.067$.

Leçon 10 Il a dû noter des informations données durant les cours d'Arago à l'Observatoire. Loi de Kepler, vérifiée avec les satellites de Jupiter. Idem avec les satellites de Saturne.
Coup d'œil sur l'école grecque : Aristarque de Samos, Eratosthène, Hipparque, Ptolémée.

Leçon 11 Position relative de la Terre et de la Lune. Calcul du cône d'ombre le 9 juin 1751. Passage de Mercure, de Vénus.

Leçon 12 Considérations sur le passage de Vénus devant le Soleil, sur les éclipses.

Leçon 13 Étude des passages de Mercure. Discussion du passage. Le Verrier commente le passage dans les termes suivants (certains mots sont difficiles à déchiffrer) :

> On voit d'abord la planète mordre sur le bord du Soleil, et y produire une petite échancrure. La tache augmente et au bout de quelques minutes elle forme un cercle noir. Elle avance et la plus grande partie de la planète se trouve sur le Soleil ; alors la solution (?) noire qui sépare la corne du Soleil diminue de largeur, et il arrive un moment où elle est à peine sensible (?). Enfin les deux bouts terminaux se rejoignent tout à coup. C'est ce moment qu'on saisit avec grand soin et qui a la plus grande importance. La première impression ne peut avoir aucune exactitude.
> La planète avance sur le disque, le traverse et à la sortie on retrouve toutes les phases en sens inverse. C'est le moment où un point noir vient tout à coup à briser (?) les bouts (?) terminaux qui se présentent entre la planète et le Soleil, qu'on observe avec soin ; la sortie totale ne peut être déterminée avec une entière précision.

Il indique ensuite que le problème principal est la détermination de la distance du centre du Soleil à la corde décrite par Mercure (ou Vénus). Il semble suggérer de la mesurer en diamètres apparents de la planète.
Le texte s'arrête brutalement, mais on se rend compte que Le Verrier est aussi un observateur expérimenté.
Leçon 14 (31 mars 1847) Ce jour, 31 mars 1847, il y a une éclipse de Lune. Il fait le calcul du détail de l'éclipse et reproduit ses caractéristiques sur un dessin, voir fig. C.3.

Leçon 15 Absente

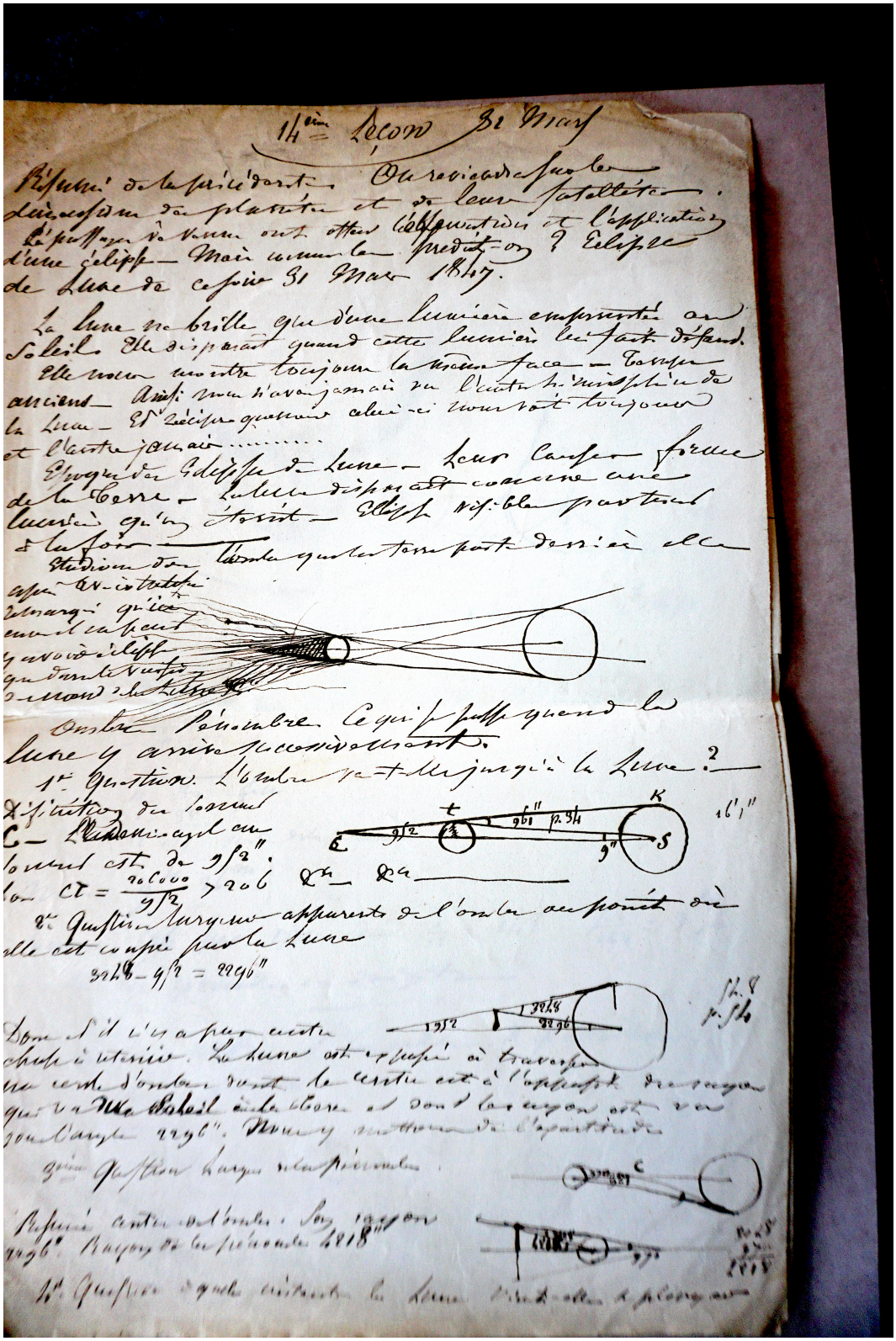


FIGURE C.3 – Début de la leçon 14 du 31 mars 1847, donnée à la Sorbonne et consacrée aux éclipses, car ce jour (ou plutôt cette nuit), il était prévu une éclipse de Lune. Le Verrier fait les calculs pour déterminer les caractéristiques de cette éclipse (dossier Ms 1063 (31) de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris)

Leçon 16 Étude des forces gravitationnelles. Comment déduit-on que la Lune a une masse 85 fois plus faible que celle de la Terre ? Distance et mouvement des planètes. Parallaxe du Soleil ?

Leçon 17 Étude de la Lune. « Je présente une grave question, et de la plus haute importance philosophique. Elle est relative à la nature [...] de la pesanteur. La force qui retient la Lune vient-elle exclusivement du centre de la Terre ou bien de chacune des molécules de la Terre ? »

Puis des feuillets séparés, non associés a priori à une leçon particulière.

- Il signale qu'Herschel en 1783 avait montré que le Soleil se dirigeait vers 2 Hercule à raison de 2 lieues par seconde, soit le 1/4 de la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil (*Contradiction avec le résultat de la leçon 6 ?*).
- Description des Pléïades
- Étoiles doubles ; il mentionne Tobias Mayer en disant « qu'il voit partout des étoiles doubles ».
  Il signale quelques étoiles reconnues comme doubles grâce à leur mouvement propre (61 Cygne, τ Couronne).
  Il se pose les questions suivantes : les planètes sont-elles habitées ? Les étoiles ont-elles des planètes habitables ? *On constate que, contrairement aux déclarations de Flammarion, Le Verrier se pose parfois des questions existentielles !*
- Étude d'étoiles doubles ; nombreux exemples, classement par distance angulaire.
  Étude de θ Orion, système quadruple. Il donne quelques positions de γ Virginis de 1833 à 1846.
- Il donne le nom de quelques étoiles variables, dont Bételgeuse.
- Description de la Voie Lactée.
- Description de certaines nébuleuses : Lyre, 47 Toucan. Il dit qu'il y a 35 à 36 nébuleuses planétaires (dans la catalogue Messier ?). Évocation de nébuleuses irrégulières.
- Il fait le calcul d'Ératosthène pour le diamètre de la Terre.
- Il fait calculer aux étudiants la position du Soleil à différentes époques de l'année.
- Mouvement du Soleil. Équation du centre. Calcul de la durée des saisons.
- Éléments sur les étoiles doubles. Donne pour η Couronne des mesures effectuées par Yvon Villarceau, datant du 28 novembre 1848. Autres exemples d'étoiles doubles.
- Il termine par

  > Mais voici qui est remarquable : Lalande a observé une conjonction de Mars le 8 mars 1760 à 5h30 du matin. Eh bien, en 1839 la conjonction est arrivée aussi le 8 mars. Alors la Terre a fait 79 tours. Et Mars un nombre complet de tours, combien ? De 1760 à 1839 il y a eu 37 oppositions de Mars. qui a fait 79−37=42 révolutions. 365*79+18=28853 (18 est est le nombre d'années bissextiles dans cette période) qui, divisé par 42, donne 686.97≃687 jours.

  On retrouve dans cet exemple la fascination de Le Verrier pour les nombres et les recoupements de calcul, en vue de vérifications.

Annexe D

ALGORITHMES ET PROGRAMMES TRIP

Objectifs

On donne quelques algorithmes utilisés pour le calcul de la fonction perturbatrice et la résolution de certaines équations de condition. On donne ensuite la traduction de ces algorithmes dans des programmes écrits en TRIP [Laskar, 1988-2021] et § 0.4.3.

Sommaire

D.1 Transformation des équations de condition **477**
D.1.1 Algorithme pour éliminer $\mathbf{m}'\mathbf{h}'$ et $\mathbf{m}'\mathbf{l}'$ des équations de condition 477
D.1.2 Programme TRIP pour les calculs matriciels visant à éliminer $\mathbf{m}'\mathbf{h}'$ et $\mathbf{m}'\mathbf{l}'$ 479
D.2 Détermination de la fonction perturbatrice par double interpolation **482**
D.2.1 Algorithme de calcul des coefficients A_i et B_i 482
D.2.2 Programme TRIP pour déterminer par double interpolation la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus 484
D.3 Détermination de la fonction perturbatrice par des développements en série **488**
D.4 Feuille ce calcul Maple pour la masse m' **491**
D.5 Solutions acceptables avec un balayage pour α **493**

D.1 Transformation des équations de condition

D.1.1 Algorithme pour éliminer m′h′ et m′l′ des équations de condition

On a vu au § 4.3.2.3 comment on organisait les calculs pour passer du système (4.16) au système (4.17) en l'absence de planète extérieure.
On reprend le problème, cette fois en tenant compte de l'action d'une planète extérieure et en gardant les mêmes notations ; concrètement, cela revient à rajouter aux équations de départ un terme de la forme $C_{18} * m'h'l'$.

On pose $\Delta_c = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon \\ \delta n \\ \delta e \\ e\delta\varpi \end{bmatrix}$ et $PS = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{bmatrix}$

On fait intervenir la planète inconnue en posant $m'h'l' = \begin{bmatrix} m' \\ m'h' \\ m'l' \end{bmatrix}$

Les 18 équations de condition (4.16) s'écrivent (notations indiquées au § 5.3) sous la forme

$$A_{18} * \Delta_c + C_{18} * m'h'l' + B_{18} + Cor = 0 \tag{D.1}$$

où C_{18} est une (18,3)−matrice se calculant à partir des fonctions A', H', L' données p. 173 de la thèse.
On extrait les lignes 3, 8, 13 et 18 :

$$A_4 * \Delta_c + C_4 * m'h'l' + B_4 + I_4 * PS = 0 \tag{D.2}$$

On résout par rapport à Δ_c

$$\Delta_c = -A_4^{-1} PS - A_4^{-1} C_4 * m'h'l' - A_4^{-1} B_4 \tag{D.3}$$

On reporte dans les équations de condition (D.1)

$$A_{18}[-A_4^{-1} PS - A_4^{-1} C_4 * m'h'l' - A_4^{-1} B_4] + C_{18} * m'h'l' + B_{18} + Cor = 0 \tag{D.4}$$

On pose $\boxed{A_{184} = -A_{18} * A_4^{-1}}$; $\boxed{C_{184} = C_{18} - A_{18} * A_4^{-1} C_4}$ et $\boxed{B_{184} = B_{18} - A_{18} * A_4^{-1} * B_4}$
Les 18 équations de condition s'écrivent

$$A_{184} * PS + C_{184} * m'h'l' + B_{184} + Cor = 0 \tag{D.5}$$

On forme le système constitué par les 3 équations : 4+5+6+7 ; 9+10+11+12 et 14+15+16+17, ce qui peut s'écrire avec des notations évidentes

$$D * PS + E * m'h'l' + F = 0 \tag{D.6}$$

On laisse tomber R et S, erreurs dans les deux observations les plus récentes, car Le Verrier les suppose faibles ; on regroupe P, Q, m' afin d'isoler $m'h'$ et $m'l'$ et on ne retient que les deux dernières équations de (D.6) (correspondant aux observations les plus récentes).

Pour cela, on pose $D = [d_{ij}]$, $E = [e_{ij}]$ et $F = [f_j]$ et on définit les matrices suivantes

$$D_{23} = \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & e_{21} \\ d_{31} & d_{32} & e_{31} \end{bmatrix} \qquad E_{23} = \begin{bmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \qquad F_{23} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

Les deux dernières lignes de l'équation (D.6) s'écrivent

$$D_{23} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + E_{23} \begin{bmatrix} m'h' \\ m'l' \end{bmatrix} + F_{23} = 0 \tag{D.8}$$

On résout par rapport à $m'h',\ m'l'$

$$\begin{bmatrix} m'h' \\ m'l' \end{bmatrix} = -E_{23}^{-1} * D_{23} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} - E_{23}^{-1} F_{23} \quad \text{que l'on écrit} \quad \begin{bmatrix} m'h' \\ m'l' \end{bmatrix} = ED \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + FF \tag{D.9}$$

On appelle AC la (18,3)−matrice formée de la façon suivante :
– ses deux premières colonnes sont les deux premières colonnes de A_{184} (qui correspondent à P et Q)
– sa dernière colonne est la première colonne de C_{18} (qui correspond à m').
On appelle C_{23} la (18,2)−matrice formée de la façon suivante :
– ses colonnes sont les deuxième et troisième colonnes de C_{18} (ce qui correspond à $m'h'$ et $m'l'$)

$$\text{en posant} \quad A_{18} = [a_{i,j}] \text{ et } C_{18} = [c_{i,j}] \quad \text{on a} \quad AC = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & c_{1,1} \\ a_{2,1} & {}_{2,2} & c_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{18,1} & a_{18,2} & c_{18,1} \end{bmatrix} \quad C_{23} = \begin{bmatrix} c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,2} & c_{2,3} \\ \vdots & \vdots \\ c_{18,2} & c_{18,3} \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

Avec ces conventions et ces notations, on peut récrire les équations de condition sous la forme

$$A_{184} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_{18} * \begin{bmatrix} m' \\ m'h' \\ m'l' \end{bmatrix} + B_{184} = AC \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + C_{23} * \begin{bmatrix} m'h' \\ m'l' \end{bmatrix} + B_{184} = 0 \tag{D.11}$$

soit

$$AC \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + C_{23} * \left(ED \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + FF \right) + B_{184} = 0 \tag{D.12}$$

puis

$$(AC + C_{23} * ED) * \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + C_{23} * FF + B_{184} = GG * \begin{bmatrix} P \\ Q \\ m' \end{bmatrix} + HH = 0 \tag{D.13}$$

Dans l'ensemble de la thèse, le langage de programmation utilisé est TRIP, mis au point par Jacques Laskar et Mickaël Gastineau (voir § 0.4.3). On rappelle qu'un tutorial sur TRIP est disponible sur le site de l'IMCCE [Laskar, 1988-2021].

On programme ici le calcul de toutes les matrices introduites dans l'algorithme § D.1.1 afin d'obtenir en fin de calcul les matrices GG et HH.
Les programmes TRIP correspondant à cet algorithme sont écrits au § D.1.2.
Deux systèmes obtenus par Le Verrier se trouvent fig. 5.6, p. 182 et sur la même page, on voit les équations obtenues avec TRIP en utilisant les programmes écrits au § D.1.2.

D.1.2 Programme TRIP pour les calculs matriciels visant à éliminer m′h′ et m′l′

Le programme suivant permet d'éliminer les corrections des éléments elliptiques d'Uranus (δe, δn, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$) ainsi que $m'h'$ et $m'l'$ dans les équations de condition (6.2) pour ne garder que P, Q, m'.
Les notations A_4, C_{184} sont expliquées à la fin des compléments au § 4.4.4.
L'algorithme de calcul, avec les notations, est présenté au § D.1.1.
`dates` représente les dates d'observations retenues par Le Verrier et `per` les perturbations de la longitude héliocentrique d'Uranus à ces dates.

```
// coefficients de m', m'h' et m'l' issus directement de leurs formules théoriques
macro C18[alpha, eps, dates]
{private aux, nb, t;
  nb = size(dates)$
  matrixR aux([1:nb, 1:3])$
  for j=1 to nb
     {t = dates[j]$
        aux[j,1] = %App[alpha, eps, t]$ /* coefficient donné dans la Mécanique céleste */
        aux[j,2] = %Hp[alpha, eps, t]$
        aux[j,3] = %Lp[alpha, eps, t]$}$
return aux;
};

macro C4[alpha, eps, dates] /* extraction des lignes 3, 8, 13, 18 */
{private aux, c;
    matrixR aux([1:4, 1:3])$
    c = %C18[alpha, eps, dates]$
    for j=1 to 3
      {aux[1,j] = c[3, j]$
       aux[2,j] = c[8, j]$
       aux[3,j] = c[13, j]$
       aux[4,j] = c[18, j]$
      }$
return aux;
};
```

```
macro C184[alpha, eps, dates] /* C184 = C18 - A18 * A4^{-1} * C4 */
{private aux, inv, aux1, a, c;
  matrixR aux([1:4, 1:3])$
  a = %A4$
  inv = invertmatrix(a)$
  c = %C4[alpha, eps, dates]$
  aux =  %C18[alpha, eps, dates]$
  aux1 = inv &* c$
  aux1 =  %A18 &* aux1$
  aux = aux - aux1$
return aux;
};

macro D /* regroupe les lignes de A184 4 par 4 */
{private aux, A;
A = %A184$
matrixR aux([1:3,1:4])$
for j=1 to 4
  {aux[3,j] = A[14,j] + A[15,j] + A[16,j] + A[17,j]$
   aux[2,j] = A[9,j] + A[10,j] + A[11,j] + A[12,j]$
   aux[1,j] = A[4,j] + A[5,j] + A[6,j] + A[7,j]$
   }$
return aux;
};

macro E[alpha, eps, dates] /* regroupe les lignes de C184 4 par 4 */
{private aux, A;
A = %C184[alpha, eps, dates]$
matrixR aux([1:3,1:3])$
for j=1 to 3
  {aux[3,j] = A[14,j] + A[15,j] + A[16,j] + A[17,j]$
   aux[2,j] = A[9,j] + A[10,j] + A[11,j] + A[12,j]$
   aux[1,j] = A[4,j] + A[5,j] + A[6,j] + A[7,j]$
   }$
return aux;
};

macro F[per] /* regroupe les lignes de B184 4 par 4 */
{private aux, b;
b = %B184[per]$
vnumR aux([1:3])$
    aux[3] = b[14] + b[15] + b[16] + b[17]$
    aux[2] = b[9] + b[10] + b[11] + b[12]$
    aux[1] = b[4] + b[5] + b[6] + b[7]$
 return aux;
 };
```

```
macro F23[per] /* extrait les deux dernières lignes de F */
{private aux, b;
   matrixR aux([1:2, 1:1])$
   b = %F[per]$
   aux[1,1] = b[2]$ aux[2,1] = b[3]$
return aux;
};

macro D23[alpha, eps, dates] /* extrait les deux dernières lignes de D */
{private aux, d, e;
   matrixR aux([1:2, 1:3])$
   d = %D$
   e = %E[alpha, eps, dates]$
   aux[1,1] = d[2,1]$ aux[1,2] = d[2,2]$ aux[1,3] = e[2,1]$
   aux[2,1] = d[3,1]$ aux[2,2] = d[3,2]$ aux[2,3] = e[3,1]$
return aux;
};

macro E23[alpha, eps, dates] /* extrait une sous-matrice de E */
{private aux, e;
   matrixR aux([2,2])$
   e = %E[alpha, eps, dates]$
   for j=1 to 2
    {for k=1 to 2
      {aux[j,k] = e[j+1, k+1]$}$
       }$
return aux;
};

macro ED[alpha, eps, dates] /* forme le produit (E23)^{-1} * D23 */
{private aux, d, e, inv;
   d = %D23[alpha, eps, dates]$
   e = %E23[alpha, eps, dates]$
   inv = invertmatrix(e)$
   aux = -inv &* d$
return aux;
};

macro FF[alpha, eps, dates, per] /* forme le produit (E23)^{-1} * F23 */
{private aux, inv, f, e;
   f = %F23[per]$
   e = %E23[alpha, eps, dates]$
   inv = invertmatrix(e)$
   aux = -inv &* f$
return aux;
};
```

```
macro AC[alpha, eps, dates] /* combine partiellement A184 et C184 */
{private aux, a, c, nb;
   a = %A184$
   c = %C184[alpha, eps, dates]$
   nb = size(dates)$
   matrixR aux([1:nb, 1:3])$
   for j=1 to nb
     {for k=1 to 2
       {aux[j,k] = a[j,k]$}$
        aux[j,3] = c[j,1]$
         }$
 return aux;
 };

macro C23[alpha, eps, dates] /* extrait les deux dernières colonnes de C184 */
{private aux, c, nb;
   nb = size(dates)$
   matrixR aux([1:nb, 1:2])$
   c = %C184[alpha, eps, dates]$
   for j=1 to nb
     {for k=1 to 2
        {aux[j, k] = c[j, k+1]$}$
      }$
return aux;
};

macro GG[alpha, eps, dates] /* GG = AC+ C23 * ED */
{private aux;
   aux = %AC[alpha, eps, dates]$
   aux = aux + %C23[alpha, eps, dates] &* %ED[alpha, eps, dates]$
return aux;
};

macro HH[alpha, eps, dates, per] /* HH = B184 + C23 * FF */
{private aux;
   aux = %B184[per]$
   aux = aux + %C23[alpha, eps, dates] &* %FF[alpha, eps, dates, per]$
return aux;
};
```

D.2 Détermination de la fonction perturbatrice par double interpolation

D.2.1 Algorithme de calcul des coefficients A_i et B_i

Les notations pour le développement de la fonction perturbatrice par double interpolation sont données au chapitre 3.
On a reproduit (table D.1) un extrait de l'algorithme-tableur utilisé par Le Verrier pour calculer

les coefficients A_i du développement en série trigonométrique de la fonction perturbatrice R.
R_i désigne la valeur de R quand $\zeta = i\frac{\pi}{8}$ et $\zeta'-\zeta$ prend la valeur donnée en colonne : $\zeta'-\zeta = k'\pi/8$, $0 \leq k' \leq 15$.
On obtient facilement, à partir de ce tableau, les valeurs des A_i (A_i est défini au § 3.5.1.3).
Le Verrier fait des tableaux semblables pour les B_i, C_i et D_i.
Le but de Le Verrier est de réduire au maximum le nombre de multiplications ; comme il doit faire de nombreuses sommes contenant des expressions de la forme $a \sin\frac{\pi}{8} + b \sin\frac{\pi}{8}$, il organise ses calculs pour faire d'abord la somme $a + b$ et ensuite multiplier le résultat par $\sin\frac{\pi}{8}$.
Cet algorithme est programmé en TRIP au § D.2.2 sous l'appellation `tableau_calcul_sinus`.

TABLE D.1 – Partie de la feuille de calcul pour déterminer les coefficients A_i pour la première interpolation de R, avec la démarche suivie par Le Verrier. Les valeurs numériques correspondent à la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus. Les calculs ont été faits avec TRIP, et Le Verrier trouve exactement les mêmes valeurs, voir fig. 3.3. Bizarrement, Le Verrier ne va pas tout à fait au bout du calcul pour obtenir A_3 : il faut faire la somme de la pénultième et l'antépénultième ligne, qui donne $A_3 = -116.86$. Idem pour A_1 et A_2. Le calcul se termine en fait dans la feuille de calcul suivante, consacrée à la 2e interpolation. R_i représente la valeur de $R(\zeta, \zeta')$ quand ζ prend la valeur $\zeta = i\frac{\pi}{8}$ et ζ' celle indiquée dans les différentes colonnes : $\zeta' - \zeta = k'\frac{\pi}{8}$

	Calculs pour déterminer les coefficients des sinus dans la première interpolation							
$\zeta' - \zeta$	0	1	2	3	4	5	6	7
$(1) = \frac{1}{8}(R_1 - R_{15})$	-1563.16	1974.06	7349.87	10734.00	9602.31	2309.18	-5843.33	-11210.23
$(2) = \frac{1}{8}(R_2 - R_{14})$	-2752.49	3326.97	12950.77	19451.67	18041.96	4897.26	-10740.30	-21337.19
$(3) = \frac{1}{8}(R_3 - R_{13})$	-3357.30	3800.20	15743.57	24661.89	24122.76	7727.83	-13835.47	-29190.21
$(4) = \frac{1}{8}(R_4 - R_{12})$	-3366.33	3527.10	15635.14	25701.33	26742.65	10233.89	-14531.10	-33428.35
$(5) = \frac{1}{8}(R_5 - R_{11})$	-2893.95	2807.72	13247.79	22787.33	25197.14	11354.43	-12757.18	-32736.47
$(6) = \frac{1}{8}(R_6 - R_{10})$	-2090.26	1900.67	9423.28	16796.59	19529.43	10016.37	-9132.37	-26350.10
$(7) = \frac{1}{8}(R_7 - R_9)$	-1089.88	949.19	4857.26	8852.41	10633.49	5921.58	-4647.95	-14752.49
$a = (1) + (7)$	-2653.04	2923.25	12207.13	19586.40	20235.81	8230.76	-10491.28	-25962.71
$b = (2) + (6)$	-4842.75	5227.64	22374.05	36248.26	37571.38	14913.63	-19872.67	-47687.29
$c = (3) + (5)$	-6251.25	6607.93	28991.35	47449.22	49319.89	19082.27	-26592.66	-61926.68
$d = (1) - (7)$	-473.27	1024.87	2492.61	1881.59	-1031.18	-3612.40	-1195.38	3542.26
$f = (2) - (6)$	-463.35	992.48	2495.78	1874.57	-1074.38	-3626.60	-1078.29	3546.26
$g = d + f$	-936.63	2017.35	4988.40	3756.16	-2105.56	-7239.00	-2273.68	7088.52
$a_1 = a * \sin(\pi/8)$	-1015.27	1118.68	4671.47	7495.39	7743.91	3149.78	-4014.84	-9935.50
$c_1 = c * \sin\pi/8$	-2392.25	2528.74	11094.51	18158.03	18873.91	7302.47	-10176.57	-23698.31
$f_2 = f * \sin\pi/4$	-3424.34	3696.50	15820.84	25631.39	26566.98	10545.53	-14052.10	-33720.00
$g_2 = g * \sin\pi/4$	-662.29	1426.48	3527.33	2656.00	-1488.86	-5118.75	-1607.73	5012.34
$a_3 = a * \sin 3\pi/8$	-2451.09	2700.73	11277.92	18095.47	18695.45	7604.23	-9692.67	-23986.42
$c_3 = c * \sin 3\pi/8$	-5775.40	6104.93	26784.52	43837.36	45565.64	17629.71	-24568.41	-57212.79
$a_1 + c_3 = (A_1 + A_7)/2$	-6790.68	7223.61	31455.98	51332.75	53309.55	20779.49	-28583.25	-67148.29
$b_2 + (4) = (A_1 - A_7)/2$	-6790.67	7223.60	31455.98	51332.72	53309.63	20779.42	-28583.20	-67148.36
$g_2 = (A_2 + A_6)/2$	-662.29	1426.48	3527.33	2656.00	-1488.86	-5118.75	-1607.73	5012.34
$(2) - (6) = (A_2 - A_6)/2$	-662.23	1426.31	3527.50	2655.08	-1487.47	-5119.11	-1607.94	5012.91
$a_3 - c_1 = (A_3 + A_5)/2$	-58.84	171.99	183.41	-62.55	-178.46	301.76	483.89	-288.11
$b_2 - (4) = (A_3 - A_5)/2$	-58.02	169.40	185.71	-69.93	-175.67	311.64	479.00	-291.65
$d - f = A_4$	-9.92	32.39	-3.17	7.02	43.20	14.20	-117.09	-4.01

D.2.2 Programme TRIP pour déterminer par double interpolation la fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus

• Dans une première partie, on calcule r, r', $\cos S$ (S est l'angle P Soleil P') et la distance mutuelle Δ' en fonction des éléments elliptiques des deux planètes et de leurs anomalies moyennes M et M'.
On peut alors former l'expression théorique de la fonction perturbatrice R.
• On programme le calcul des coefficients A_i et B_i (la définition de ces coefficients est donnée au § 3.5.1.3), but de la première interpolation à l'aide des macros `tableau_calcul_sinus` et `tableau_calcul_cosinus`.
Les formules théoriques pour programmer le calcul de `tableau_calcul_sinus` se trouvent à la table D.1 de l'annexe D.
• La deuxième interpolation s'obtient à partir de la même macro `tableau_coefs`, comme indiqué à l'encadré 7, p. 89.
• Après ces deux interpolations, on peut former la série formelle représentant R avec `tableau_vers_serie`.

Application à $R_{u,s}$

• Ensuite, on remplace dans cette expression R les paramètres formels a, ε, n... par les paramètres réels d'Uranus a_u, ε_u, n_u ..., et a', ε', n'... par les paramètres réels de Saturne a_s, ε_s, n_s ..., ce qui permet de connaître numériquement la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus.
• Une fois que l'on a ce développement, on peut obtenir les expressions des perturbations exercées sur les éléments elliptiques d'Uranus en utilisant les équations de Lagrange (§ 3.4.2).

```
// Forme la fonction perturbatrice exercée par la planète intérieure P' sur la planète extérieure P
// directement (sans séries de Fourier) a partir de deux interpolations successives
// Sera appliqué à Saturne sur Uranus, Jupiter sur Uranus et Jupiter sur Saturne

// Résout l'équation de Kepler à l'ordre 6
macro kepler[e, M]
{private E; /* anomalie excentrique */
E = M
  + (e - e**3 / 8 + e**5 / 192) * sin(M)
  + (e**2 / 2 - e**4 / 6 + e**6 / 48) * sin(2*M)
  + (3 * e**3 / 8 - 27 / 128*e**5) * sin(3*M)
  + (e**4 / 3 - 4*e**6 / 15) * sin(4*M)
  + 125 * e**5 / 384 * sin(5*M)
  + 27 / 80 * e**6 * sin(6*M)$
return E;
};

// Calcule le rayon vecteur
macro rayon[a, e, M]
{private E, r;
  E = %kepler[e, M]$
  r = a * (1 - e * cos(E))$
return r;
};

// Calcule l'anomalie vraie à partir de l'anomalie excentrique
macro vraie[e, M]
{private E, f;
  E = %kepler[e, M]$
  f = 2 * atan(sqrt((1 + e) / (1 - e)) * tan(E/2))$
return f;
};
```

```
// Calcule les coordonnées cartésiennes
macro coord[a, e, icl, M, omega, Omega] /* icl désigne l'inclinaison sur l'écliptique */
{private t, f, r;
  dim t[1:3]$
  r = %rayon[a, e, M]$
  f = %vraie[e, M]$
  t[1] = r * (cos(Omega) * cos(omega+f) - sin(Omega) * sin(omega+f) * cos(icl))$
  t[2] = r * (sin(Omega) * cos(omega+f) + cos(Omega) * sin(omega+f) * cos(icl))$
  t[3] = r * sin(omega+f) * sin(icl)$
return t;
};

// Calcule la distance mutuelle
macro dist[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']
{private t, t', d;
  t = %coord[a, e, icl, M, omega, Omega]$
  t' = %coord[a', e', icl', M', omega', Omega']$
  d = sqrt((t[1] - t'[1])**2 + (t[2] - t'[2])**2 + (t[3] - t'[3])**2)$
return d;
};

// Calcule le cosinus de l'angle (P)-Soleil-(P')
macro cosS[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']
{private t, t', d, r, r', c;
  r = %rayon[a, e, M]$
  r' = %rayon[a', e', M']$
  d = %dist[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']$
  t = %coord[a, e, icl, M, omega, Omega]$
  t' = %coord[a', e', icl', M', omega', Omega']$
  c = (t[1] * t'[1] + t[2] * t'[2] + t[3] * t'[3]) / r / r'$
return c;
};

// Calcule la fonction perturbatrice de (P') sur (P)
macro pertu[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']
{private r, r', s, d, aux;
  r = %rayon[a, e, M]$
  r' = %rayon[a', e', M']$
  s = %cosS[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']$
  d = %dist[a, e, icl, omega, Omega, M, a', e', icl', omega', Omega', M']$
  aux = 1 / d - r * s / (r')**2$
return aux;
};

// Remplit un tableau intermédiaire pour déterminer les coefficients Ai
/* algorithme donné au D.2.1 */
macro tableau_calcul_sinus[val] /* val contiendra un échantillon 16x16 de valeurs de R */
{private s, t;
dim t[1:26]$
  for j=1 to 7 {t[j] = (val[j+1] - val[17-j]) / 8 $ }$
  t[8] = t[1] + t[7]$ t[9] = t[2] + t[6]$
  t[10] = t[3] + t[5]$  t[11] = t[1] - t[7]$
  t[12] = t[3] - t[5]$ t[13] = t[11] + t[12]$
  t[14] = t[8] * sin(pi/8)$ t[15] = t[10] * sin(pi/8)$
  t[16] = t[9] * sin(pi/4)$ t[17] = t[13] * sin(pi/4)$
  t[18] = t[8] * sin(3*pi/8)$ t[19] = t[10] * sin(3*pi/8)$
  t[20] = t[14] + t[19]$ t[21] = t[16] + t[4]$
  t[22] = t[17]$ t[23] = t[2] - t[6]$ t[24] = t[18] - t[15]$
  t[25] = t[16] - t[4]$ t[26] = t[11] - t[12]$
 return t;};
```

```
// Retourne les coefficients Ai dans le tableau resu : Ai = resu[i] ; algorithme donné au D.2.1
macro coef_sinus[val]
{private t, resu;
  dim resu[1:7]$
  t = %tableau_calcul_sinus[val]$
  resu[1] = t[20] + t[21]$ resu[2] = t[22] + t[23]$
  resu[3] = t[24] + t[25]$ resu[4] = t[26]$
  resu[5] = t[24] - t[25]$ resu[6] = t[22] - t[23]$
  resu[7] = t[20] - t[21]$
return resu ;};

// Remplit le tableau pour déterminer les coefficients Bi, selon un algorithme voisin de celui de D.2.1
macro tableau_calcul_cosinus[val] */ val contiendra un échantillon 16x16 de valeurs de R */
{private t ;
  dim t[1:33]$
  t[1] = val[1]/4$ t[2] = (val[2] + val[16])/8$
  t[3] = (val[3] + val[15])/8$ t[4] = (val[4] + val[14])/8$
  t[5] = (val[5] + val[13])/8$ t[6] = (val[6] + val[12])/8$
  t[7] = (val[7] + val[11])/8$ t[8] = (val[8] + val[10])/8$
  t[9] = val[9]/4$             t[10] = (t[1] + t[9])/2$
  t[11] = (t[1] - t[9])/2$ t[12] = t[3] - t[7]$
  t[13] = t[2] + t[8]$ t[14] = t[4] + t[6]$
  t[15] = t[4] - t[6]$ t[16] = t[2] - t[8]$
  t[17] = t[3] + t[7]$ t[18] = t[12] * cos(pi/4)$
  t[19] = t[16] * cos(pi/8)$ t[20] = t[15] * cos(3*pi/8)$
  t[21] = t[16] * cos(3*pi/8)$ t[22] = t[15] * cos(pi/8)$
  t[23] = t[13] * cos(pi/4)$ t[24] = t[14] * cos(pi/4)$
  t[25] = (t[10] + t[17] + t[5])/2$ t[26] = (t[13] + t[14])/2$
  t[27] = t[11] + t[18]$ t[28] = t[19] + t[20]$
  t[29] = t[10] - t[5]$ t[30] = t[23] - t[24]$
  t[31] = t[11] - t[18]$ t[32] = t[21] - t[22]$
  t[33] = t[10] + t[5] - t[17]$
return t; };

// Retourne les coefficients Bi dans le tableau resu : Bi = resu[i]
macro coef_cosinus[val]
{private t, resu;
  dim resu[0:8]$
  t = %tableau_calcul_cosinus[val]$
  resu[0] = t[25] + t[26]$ resu[1] = t[27] + t[28]$
  resu[2] = t[29] + t[30]$ resu[3] = t[31] + t[32]$
  resu[4] = t[33]$         resu[5] = t[31] - t[32]$
  resu[6] = t[29] - t[30]$ resu[7] = t[27] - t[28]$
  resu[8] = t[25] - t[26]$
return resu;};

// Retourne le tableau des coefficients Ai et Bi pour les 16 valeurs de zeta' - zeta
macro tableau_coefs[val] /* val contiendra l'échantillon 16x16 de R */
{private t, resu, sol;
dim resu[1:16]$
matrixR  sol([1:16, 1:16])$
for j=1 to 16 {
   t = val[:,j]$
   t = %vectorise[t]$
   resu = %coef_sinus[t]$
   for k=1 to 7 {sol[k,j] = resu[k] $}$
   resu = %coef_cosinus[t]$
   for k=8 to 16 {sol[k,j] = resu[k-8] $}$
   }$
return sol;};
```

```
// Transforme une matrice (n,1) en un n-vecteur
macro vectorise[t]
 {private resu ;
   n = size(t)$
   dim resu[1:n]$
   for j=1 to n {resu[j] = t[j,1] $}$
 return resu;
 };

// Forme la série de Fourier à partir des 7 premiers coefficients sinus et les suivants en cosinus
macro formation_Serie[t]
{private s;
  s = 0$
  for j=1 to 7 {s = s + t[j,1] * sin(j * (Mp-M))$}$
  for j=8 to 15 {s = s + (t[j,1]) * cos((j-8) * (Mp-M))$}$
return s;
};

// Forme le développement en série de R à partir des coefficients Ci, Di, Ei, Fi en fonction de X
macro Tab_vers_serie[tab]
{private s, PremierInter, DeuxiemeInter, aux, t;
  PremierInter = %tableau_coefs[tab]$
  PremierInter = transposematrix(PremierInter)$
  DeuxiemeInter = %tableau_coefs[PremierInter]$
  s = 0$
  for j=1 to 7 {aux = DeuxiemeInter[:, j]$ t = %formation_Serie[aux] $  s = s + t * sin(j*M)$}$
  for j=8 to 16 {aux = DeuxiemeInter[:, j]$ t = %formation_Serie[aux]$  s = s + t * cos((j-8)*M)$}$
 return s;
 };

// Calcule les valeurs prises par la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus
// par double interpolation sur un échantillon de 16x16 points

// Fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus sous forme non développée
macro R_u_s[M, M']
{private resu;
  resu = %pertu[a_u, e_u, icl_u, omega_u, Omega_u, M, a_s, e_s, icl_s, omega_s, Omega_s, M']$
  resu = cte_u_s * resu $ /* cte_u_s définie au § 3.3.1 */
return resu;
};

// Retourne le tableau des valeurs de la fonction perturbatrice Uranus Saturne en 256 points
macro valeurs_de_R_u_s
{private resu, alpha;
  matrixR resu([1:16, 1:16])$
  alpha = pi / 8$
  for j=1 to 16 {
    for k=1 to 16 {aux = %R_u_s[(j-1) * alpha, (j+k-2) * alpha] $
      resu[j, k] = aux$}$
  }$
return resu;
};

// Développe R_u_s en série par deux interpolations
macro R_serie_u_s
{private val, res;
  val = %valeurs_de_R_u_s$
  res = %tab_vers_serie[val]$
  convcf(res)$
return res;};
```

D.3 Détermination de la fonction perturbatrice par des développements en série

Détermine la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus par des développements internes en série à l'aide de TRIP, à partir de la formule $R = \frac{1}{\Delta} - \frac{rs}{r'^2}$

```
// Programme principal : calcul de la fonction perturbatrice de (P') sur (P) à l'aide de séries de Fourier

// Les variables suffixées par p (Xp, Mp, fp...) sont relatives à la planète perturbatrice

// initialise l'environnement
macro init[kMax, deg_e, deg_X]{
// flottants en double précision
  _modenum = NUMDBL$
// néglige tout en dessous de cette précision
  _cleaneps = 1e-16$
  _cleanflag = 1$
// taille d'un vecteur de coeficients de Fourier
  Nk = kMax + 1$
// définit l'ordre maximal des séries de Fourier
  initcf((Xp, -kMax, kMax),(X, -kMax, kMax))$
// définit X comme exp(iM) et Xp comme exp(iMp)
  Xp = expi(Mp, 1, 0)$
  X = expi(M, 1, 0)$
  tr = ({(e, ep, eta), deg_e}, {(X, Xp), deg_X})$ /* troncature, voir § 0.4.3 */
  usetronc(tr)$
};

// Programme principal
  _affc = 1$
  _affdist = 5$
  TOL = 1E-15$
  %init[8, 5, 8]$

// Détermine le développement en série de Fourier de la fonction perturbatrice
// à l'aide des coordonnées cartésiennes d'Uranus et de la planète perturbatrice

macro test[X, Xp]
// compare X à Xp et retourne la composante maximale de X-Xp
  {private tc, tm, aux$
  aux = X - Xp$
  cfcoef_tabexp(aux, tc, tm)$
return max(abs(tc))$
};

// retourne DE = E-M par itération de longueur maximale itermax
macro D_E[e, itermax]
{private DE, DE2, diff;
  DE = e * sin(M)$
  convcf(DE)$
//algorithme itératif pour calculer l'anomalie excentrique
  for k=1 to itermax
  {//DE_{n+1} = e * sin(DE_n + M)
  DE2 = e * real(sin(M) * cos(DE) + cos(M) * sin(DE))$
  diff = %test[[DE], [DE2]]$
  if (diff < TOL) then {stop;}$
  if (k==itermax) then {msg " itermax atteint ";}$
  DE = DE2$
  }$
return DE2$ };
```

```
// Calcule le rayon vecteur d'Uranus (fonction de X)
macro rayon[a, e]
{private r, _DE;
  _DE = %D_E[e, 100]$
  _ExpiE = exp(i*_DE) * X$
  r = a * (1 - e * real(_ExpiE))$ /* correspond à exp(iE) */
return r;};

// calcule le rayon vecteur de la planète perturbatrice (P') (fonction de Xp)
macro rayon_p[a, e]
{private rp;
  rp = %rayon[a, e]$
  rp = substvar(rp, (X, Z))$ /* il faut deux substitutions */
  rp = substvar(rp, (Z, Xp))$
  convcf(rp)$
return rp; };

// Calcule le sinus de l'anomalie vraie de (P)
macro sinf[e]
{private s;
  _DE = %D_E[e, 100]$
  _ExpiE = exp(i * _DE) * X$
  s = sqrt(1 - e**2) * imag(_ExpiE) / (1 - e * real(_ExpiE))$
return s; };

// Calcule le sinus de l'anomalie vraie de la planète perturbatrice (P')
macro sinf_p[e]
{private sf;
  sf = %sinf[e]$
  sf = substvar(sf, (X, Z))$
  sf = substvar(sf, (Z, Xp))$
return sf; };

// Calcule le cosinus de l'anomalie vraie de (P)
macro cosf[e]
{private c;
  _DE = %D_E[e, 100]$
  _ExpiE = exp(i * _DE) * X$
  c = (real(_ExpiE) - e) / (1 - e * real(_ExpiE))$
return c; };

// Calcule le cosinus de l'anomalie vraie de la planète perturbatrice (P')
macro cosf_p[e]
{private cf;
  cf = %cosf[e]$
  cf = substvar(cf, (X, Z))$
  cf = substvar(cf, (Z, Xp))$
  return cf; };

// Coordonnées de (P) (coordonnées cartésiennes)
macro coord[a, e, icl, omega, Omega]
{private t, s, c, x;
  dim t[1:3]$
  r = %rayon[a, e]$
  s = sin(omega) * %cosf[e] + cos(omega) * %sinf[e]$ // Calcule sin(omega + f)
  c = cos(omega) * %cosf[e] - sin(omega) * %sinf[e]$ // Calcule cos(omega + f)$
  t[1] = r * (cos(Omega) * c - sin(Omega) * s * cos(icl))$
  t[2] = r * (sin(Omega) * c + cos(Omega) * s * cos(icl))$
  t[3] = r * s * sin(icl)$
return t; };
```

```
// Coordonnées cartésiennes de la planète perturbatrice (P')
macro coord_p[ap, ep, iclp, omegap, Omegap]
{private t, rp, cp, sp, x;
  dim t [1:3]$
  rp = %rayon_p[ap, ep]$
  // Calcule sin(omegap + f)
  sp = sin(omegap) * %cosf_p[ep] + cos(omegap) * %sinf_p[ep]$
  // Calcule cos(omegap + f)$
  cp = cos(omegap) * %cosf_p[ep] - sin(omegap) * %sinf_p[ep]$
  t[1] = rp * (cos(Omegap) * cp - sin(Omegap) * sp * cos(iclp))$
  t[2] = rp * (sin(Omegap) * cp + cos(Omegap) * sp * cos(iclp))$
  t[3] = rp * sp * sin(iclp)$
return t;
};

// Par clarté, on reprend la notation ' pour la fonction perturbatrice (P')

// Calcule la distance entre (P) et la planète perturbatrice (P')
macro dist[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']
{private t, t', d;
  t = %coord[a, e, icl, omega, Omega]$
  t' = %coord_p[a', e', icl', omega', Omega']$
  d = sqrt((t[1] - t'[1])**2 + (t[2] - t'[2])**2 + (t[3] - t'[3])**2)$
return d;
};

// Calcule le cosinus de l'angle (P)-Soleil-(P')
macro cosS[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']
{private t, t', d, r, r', c;
  r = %rayon[a, e]$
  r' = %rayon_p[a', e']$
  d = %dist[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']$
  t = %coord[a, e, icl, omega, Omega]$
  t' = %coord_p[a', e', icl', omega', Omega']$
  c = (t[1] * t'[1] + t[2] * t'[2] + t[3] * t'[3]) / r / r'$
return c;
};

// Calcule la fonction perturbatrice de (P') sur (P)
macro pertu[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']
{private r, r', s, d, aux;
  r = %rayon[a, e]$
  r' = %rayon_p[a', e']$
  s = %cosS[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']$
  d = %dist[a, e, icl, omega, Omega, a', e', icl', omega', Omega']$
  aux = 1 / d - r * s / (r')**2$
return real(aux);
};

// Détermine la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus (6k_u_snR en fait)
macro R_u_s_serie
{private aux;
  aux = %pertu[a_u, e_u, icl_u, omega_u, Omega_u, a_s, e_s, icl_s, omega_s, Omega_s]$
  return (2 * cte_u_s * aux);
};
```

D.4 Feuille de calcul Maple utilisée pour déterminer la longitude de l'époque rendant la masse m′ positive

On reproduit la feuille de calcul Maple pour déterminer la longitude de l'époque rendant la masse m' positive, selon la méthode utilisée par Le Verrier (expliquée p. 183 de *Herschel*), mais ici j'utilise les coefficients que j'ai calculés à partir des mêmes formules théoriques que Le Verrier, coefficients qui diffèrent très peu de ceux de Le Verrier (voir la comparaison au § 5.2.4.3).
Pour plus d'explications, voir page suivante.

```
> a0 := 306.7·sin(eps) + 312.0·sin(2·eps) + 54.9·sin(3·eps) + 437·cos(eps) − 358.2·cos(2·eps)
      − 139.7·cos(3·eps) :
> a0 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( a0 ), tan ) ) ) ) ) :
> b0 := -447.5·sin(eps) + 1036.4·sin(2·eps) − 6381.1·sin(3·eps) − 652.0·cos(eps) − 1326.3·cos(2
      ·eps) + 1564.7·cos(3·eps) :
> b0 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( b0 ), tan ) ) ) ) ) :
> c0 := 652.0·sin(eps) + 1326.3 sin(2·eps) − 1564.7·sin(3·eps) − 447.5·cos(eps) + 1036.4·cos(2
      ·eps) − 6381.1·cos(3·eps) :
> c0 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( c0 ), tan ) ) ) ) ) :
> a1 := 187.5·sin(eps) + 92.5·sin(2·eps) + 25.8·sin(3·eps) + 231.3·cos(eps) − 215.0·cos(2·eps)
      − 67.4·cos(3·eps) :
> a1 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( a1 ), tan ) ) ) ) ) :
> b1 := -231.0·sin(eps) + 541.8·sin(2·eps) − 3757.2·sin(3·eps) − 367.0·cos(eps) − 746.0·cos(2
      ·eps) + 1488.8·cos(3·eps) :
> b1 := expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( b1 ), tan ) ) ) ) :
> c1 := 367.0·sin(eps) + 746.0·sin(2·eps) − 1488.8·sin(3·eps) − 231.0·cos(eps) + 541.8·cos(2·eps)
      − 3757.2·cos(3·eps) :
> c1 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( c1 ), tan ) ) ) ) ) :
> a2 := 172.3·sin(eps) + 40.5·sin(2·eps) + 21.3·sin(3·eps) + 186.9·cos(eps) − 159.5·cos(2·eps)
      − 66.4·cos(3·eps) :
> a2 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( a2 ), tan ) ) ) ) ) :
> b2 := -186.8·sin(eps) + 444.6·sin(2·eps) − 2644.6·sin(3·eps) − 326.4·cos(eps) − 666.0·cos(2
      ·eps) + 1523.2·cos(3·eps) :
> b2 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( b2 ), tan ) ) ) ) ) :
> c2 := 326.4·sin(eps) + 666.0·sin(2·eps) − 1523.2·sin(3·eps) − 186.8·cos(eps) + 444.6·cos(2·eps)
      − 2644.6·cos(3·eps) :
> c2 := simplify( expand( subs( tan( eps/2 ) = x, ( convert( expand( c2 ), tan ) ) ) ) ) :
> deno := simplify( ( a0·( b1·c2 − c1·b2 ) + a1·( c0·b2 − b0·c2 ) + a2·( b0·c1 − c0·b1 ) )·10^(-8) ) :
> num := numer( deno ) :
> res := rem( num, ( x^2 + 1 )^6, x, 'q' ) :
> factor( q );
```

$$-0.2178399600\,(x+17.7440712855789)\,(x+2.41075889517684)\,(x+0.0150028416277670)\,(x-1.12271097504611)\,(x^2+2.49930037343582\,x+1.68560639977087)\,(x^2+0.392763023612044\,x+0.298767228208879)\,(x^2-3.432315892\,10^{-7}\,x+1.000000020)\,(x^2-0.187993007287208\,x+1.30124189687939) \qquad (1)$$

```
> d0 := -805.5 : d1 := -552.1 : d2 := -605.4 :
> y0 := b1·c2 − b2·c1 : y1 := b2·c0 − b0·c2 : y2 := b0·c1 − b1·c0 :
> N := simplify( ( d0·y0 + d1·y1 + d2·y2 )·10^(-8) ) :
> factor( N ) :
> 2·arctan(1.123)·180/Pi ; 2·arctan( -17.744 )·180/Pi + 360; 2·arctan( -2.411 )·180/Pi + 360;
```

On rappelle la formule théorique utilisée par Le Verrier pour m' (voir § 5.2.4.2) :

$$m' = \frac{d(b'c'' - c'b'') + d'(cb'' - bc'') + d''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')}$$

On rappelle qu'il s'agit de déterminer les valeurs de la longitude de l'époque de Neptune rendant cette fraction m' positive.
Dans la feuille de calcul, on évalue l'expression de m' en fonction de ε', puis on fait le changement de variables $x = \tan\frac{\varepsilon'}{2}$, on cherche les zéros de cette fonction et enfin on trace le graphe de $1/m'$ ($1/m'$ car la fonction m' n'est pas bornée).
On rappelle qu'à cause des erreurs d'arrondis, le troisième zéro trouvé par Le Verrier était 263°5′ et non 225°5′. La valeur finale qu'il avait trouvée pour ε' (240°17′) dans la 2ème approximation rendait l'expression de m' négative, ce qui stoppa Le Verrier longtemps pendant ses calculs (voir § 5.2.4.3).
Dans la feuille de calcul, a, a', a'' sont notés respectivement $a0$, $a1$, $a2$ et ε' est noté *eps*.

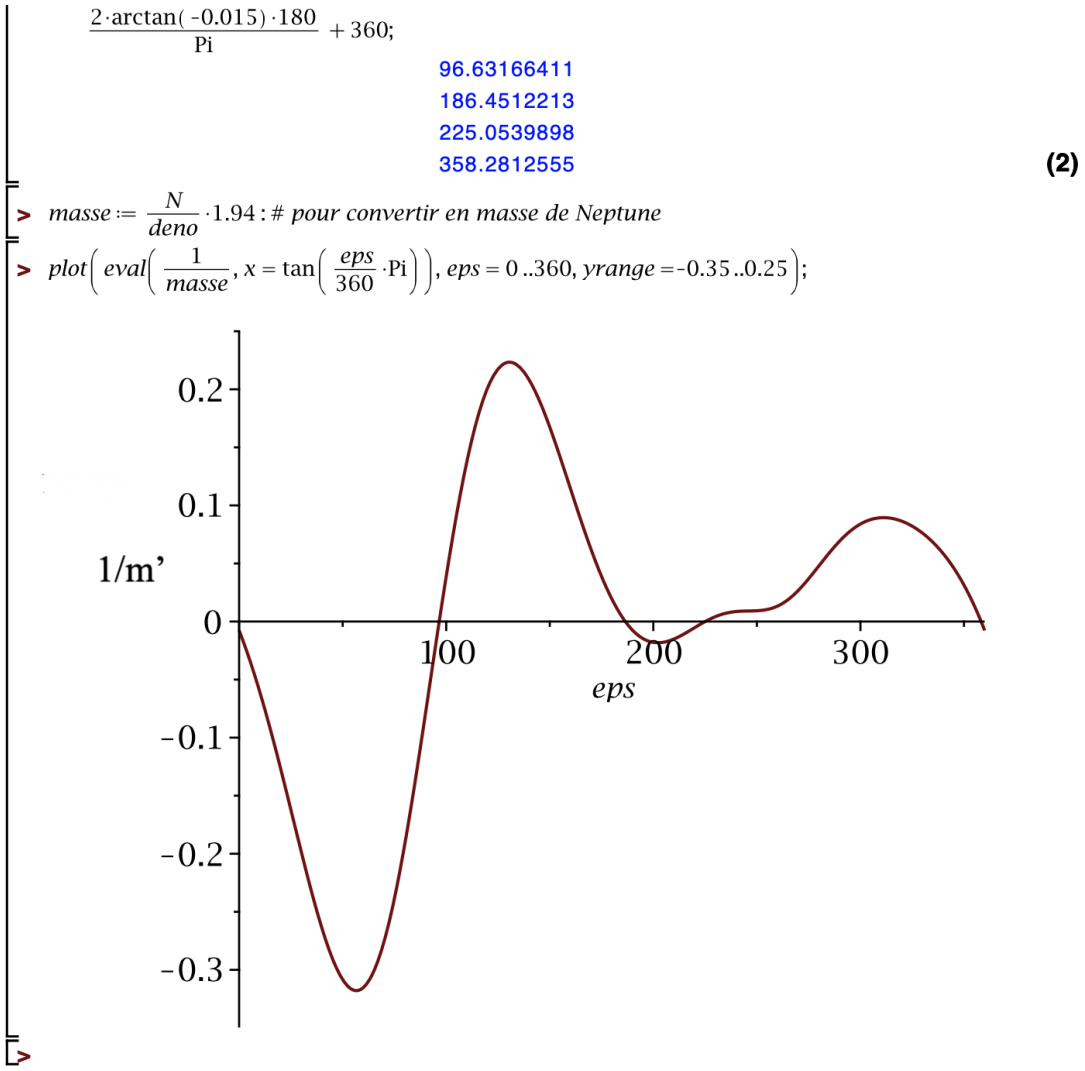


FIGURE D.1 – Tracé de la fonction $1/m'$. On constate que la valeur finale trouvée pour ε' par Le Verrier ($\varepsilon' = 240°17'$) tombe dans une zone où m' prend des valeurs positives, constatation qui aurait grandement rassuré Le Verrier (voir § 5.2.4.3)

D.5 Solutions acceptables avec un balayage pour α

Les tables sur les 5 pages suivantes se placent à la suite des calculs faits au chapitre 5 pour localiser la planète inconnue, calculs commencés au § 5.4, p. 191 de la thèse. Voir les objectifs visés et des commentaires sur les résultats dans ce paragraphe 5.4.

Solutions acceptables avec la première méthode
$P_{max} = 15$, $Q_{max} = 22$, $e_{max} = 0.22$

α	ε'	λ_D	m'	P	Q	$m'h'$	$m'l'$	e'	res
0.50	258°	329°	1.14	4	-21	-0.11	0.21	0.21	26.8
0.50	261°	328°	1.43	7	-22	-0.06	0.24	0.17	27.1
0.51	258°	333°	1.14	-6	-14	-0.12	0.19	0.20	22.0
0.51	261°	332°	1.36	-1	-15	-0.07	0.22	0.17	19.3
0.51	264°	332°	1.70	5	-17	-0.01	0.24	0.14	19.2
0.52	261°	336°	1.37	-7	-12	-0.07	0.20	0.16	19.4
0.52	264°	336°	1.65	-1	-13	-0.02	0.23	0.14	16.4
0.52	267°	337°	2.08	8	-16	0.05	0.24	0.12	20.2
0.53	264°	339°	1.64	-9	-11	-0.02	0.21	0.13	19.3
0.53	267°	340°	2.01	-2	-14	0.04	0.23	0.12	18.1
0.54	270°	345°	2.57	-6	-17	0.09	0.24	0.10	24.7
0.65	54°	161°	0.52	5	-20	0.03	-0.08	0.16	48.3
0.67	225°	334°	0.39	-2	-17	-0.00	0.02	0.05	26.1
0.68	228°	356°	0.25	9	-10	-0.02	-0.05	0.20	11.7

Solutions acceptables avec la deuxième méthode
$P_{max} = 15$, $Q_{max} = 25$, $e_{max} = 0.2$

α	ε'	λ_D	m'	P	Q	$m'h'$	$m'l'$	e	res
0.48	0°	65°	0.80	-1	18	0.04	-0.01	0.05	98.4
0.48	3°	67°	0.78	-5	17	0.04	-0.01	0.05	98.0
0.48	6°	70°	0.75	-8	15	0.04	-0.02	0.06	97.8
0.48	9°	72°	0.72	-11	13	0.04	-0.02	0.06	98.0
0.48	12°	74°	0.67	-14	11	0.04	-0.03	0.07	98.4
0.48	45°	92°	0.24	-15	2	-0.02	-0.04	0.18	108.1
0.48	207°	277°	1.95	12	-19	0.00	-0.04	0.02	58.2
0.48	210°	280°	1.91	2	-20	0.00	-0.03	0.02	58.8
0.48	213°	282°	1.86	-6	-22	0.01	-0.03	0.02	60.7
0.48	216°	285°	1.81	-14	-22	0.01	-0.03	0.02	63.5
0.48	336°	413°	0.28	8	12	-0.00	0.03	0.11	109.1
0.48	339°	411°	0.40	10	14	0.00	0.03	0.07	108.1
0.48	342°	412°	0.51	12	17	0.01	0.02	0.05	106.8
0.48	345°	414°	0.61	12	19	0.02	0.02	0.04	105.3
0.48	348°	416°	0.69	11	20	0.02	0.01	0.04	103.6
0.48	351°	418°	0.75	9	21	0.03	0.01	0.04	102.0
0.48	354°	420°	0.79	6	21	0.03	0.01	0.04	100.5
0.48	357°	423°	0.80	3	20	0.03	0.00	0.04	99.3
0.49	156°	208°	1.91	11	23	-0.07	0.35	0.19	130.9
0.49	195°	267°	2.57	9	-14	0.17	-0.03	0.07	48.7
0.49	198°	272°	2.20	5	-18	0.15	-0.07	0.08	48.8
0.49	201°	277°	1.90	2	-20	0.13	-0.11	0.09	48.6
0.49	204°	283°	1.66	0	-22	0.10	-0.14	0.10	48.1
0.49	207°	289°	1.46	-1	-23	0.07	-0.16	0.12	47.4
0.49	210°	294°	1.31	-1	-24	0.03	-0.18	0.14	46.7
0.49	213°	300°	1.18	-2	-24	-0.00	-0.18	0.15	46.1
0.49	216°	305°	1.08	-2	-25	-0.04	-0.18	0.17	45.5
0.49	270°	334°	2.26	-9	-22	0.05	0.21	0.09	48.7
0.49	273°	336°	2.10	-8	-18	0.07	0.22	0.11	53.2
0.49	276°	337°	1.73	-8	-13	0.08	0.23	0.14	58.6
0.49	279°	336°	1.29	-10	-9	0.11	0.23	0.20	63.9
0.50	99°	154°	4.08	-9	-25	-0.51	-0.53	0.18	111.9
0.50	102°	157°	3.85	-2	-15	-0.53	-0.47	0.18	119.4
0.50	105°	159°	3.65	4	-6	-0.55	-0.42	0.19	128.3
0.50	108°	161°	3.46	9	1	-0.58	-0.36	0.20	138.2
0.50	213°	304°	1.19	6	-25	-0.01	-0.20	0.17	44.2
0.50	216°	310°	1.07	6	-24	-0.05	-0.20	0.19	40.9
0.50	258°	328°	1.27	1	-20	-0.10	0.21	0.18	26.2
0.50	261°	329°	1.50	-0	-20	-0.06	0.22	0.15	25.7

0.50	264°	330°	1.78	-2	-20	-0.01	0.24	0.13	25.5
0.50	267°	332°	2.13	-4	-19	0.04	0.24	0.12	26.3
0.50	270°	335°	2.50	-6	-17	0.08	0.25	0.10	29.2
0.50	273°	338°	2.84	-8	-15	0.12	0.25	0.10	35.5
0.50	276°	340°	3.00	-11	-10	0.15	0.26	0.10	45.7
0.51	96°	153°	3.57	-3	-23	-0.44	-0.51	0.19	79.5
0.51	99°	156°	3.53	5	-15	-0.48	-0.47	0.19	90.2
0.51	102°	158°	3.50	13	-7	-0.52	-0.43	0.19	103.2
0.51	213°	302°	1.28	10	-24	-0.00	-0.17	0.13	44.0
0.51	216°	308°	1.15	9	-23	-0.04	-0.17	0.15	39.4
0.51	219°	313°	1.04	9	-21	-0.07	-0.17	0.18	35.7
0.51	222°	319°	0.95	9	-20	-0.10	-0.16	0.20	32.7
0.51	258°	331°	1.24	3	-16	-0.10	0.20	0.18	19.1
0.51	261°	332°	1.44	2	-16	-0.06	0.22	0.16	18.6
0.51	264°	333°	1.71	0	-16	-0.01	0.24	0.14	18.4
0.51	267°	335°	2.07	-2	-15	0.04	0.25	0.12	19.3
0.51	270°	337°	2.53	-5	-15	0.09	0.25	0.11	22.5
0.51	273°	340°	3.09	-9	-13	0.14	0.26	0.09	29.6
0.51	276°	343°	3.67	-14	-10	0.18	0.27	0.09	42.5
0.52	213°	300°	1.33	13	-23	0.00	-0.13	0.10	43.5
0.52	216°	306°	1.19	12	-21	-0.03	-0.14	0.12	38.1
0.52	219°	311°	1.07	11	-20	-0.06	-0.14	0.14	33.9
0.52	222°	317°	0.98	10	-18	-0.08	-0.13	0.16	30.5
0.52	225°	322°	0.91	10	-17	-0.11	-0.12	0.18	27.8
0.52	255°	334°	1.08	6	-14	-0.13	0.16	0.19	16.4
0.52	258°	334°	1.22	5	-14	-0.09	0.19	0.17	16.0
0.52	261°	335°	1.41	3	-14	-0.05	0.21	0.15	15.8
0.52	264°	336°	1.67	1	-14	-0.01	0.23	0.14	16.1
0.52	267°	337°	2.03	-2	-14	0.04	0.24	0.12	17.4
0.52	270°	339°	2.52	-5	-14	0.09	0.25	0.10	20.6
0.52	273°	342°	3.21	-10	-14	0.15	0.26	0.09	27.7
0.53	213°	299°	1.34	14	-22	0.01	-0.10	0.08	42.7
0.53	216°	305°	1.19	13	-20	-0.02	-0.11	0.09	36.8
0.53	219°	310°	1.08	12	-18	-0.04	-0.11	0.11	32.3
0.53	222°	316°	0.99	11	-17	-0.07	-0.11	0.13	28.7
0.53	225°	320°	0.92	11	-15	-0.09	-0.10	0.15	25.8
0.53	228°	325°	0.87	11	-14	-0.11	-0.09	0.17	23.5
0.53	231°	329°	0.84	10	-14	-0.13	-0.07	0.18	21.6
0.53	234°	332°	0.82	10	-13	-0.15	-0.05	0.19	20.0
0.53	249°	338°	0.91	8	-12	-0.15	0.09	0.20	15.7
0.53	252°	337°	0.98	7	-12	-0.14	0.12	0.19	15.3
0.53	255°	337°	1.08	6	-12	-0.12	0.15	0.17	15.1
0.53	258°	337°	1.22	5	-12	-0.09	0.17	0.16	15.2
0.53	261°	338°	1.40	3	-13	-0.05	0.20	0.15	15.5
0.53	264°	339°	1.65	1	-13	-0.01	0.22	0.13	16.3
0.53	267°	340°	2.00	-2	-14	0.03	0.23	0.12	18.1
0.53	270°	342°	2.51	-6	-15	0.09	0.24	0.10	21.5
0.53	273°	345°	3.28	-12	-16	0.15	0.26	0.09	28.1
0.54	216°	304°	1.17	14	-18	-0.01	-0.09	0.07	35.5
0.54	219°	310°	1.06	13	-16	-0.03	-0.09	0.09	30.9
0.54	222°	315°	0.98	12	-15	-0.05	-0.09	0.11	27.2
0.54	225°	320°	0.91	11	-14	-0.07	-0.09	0.13	24.3
0.54	228°	325°	0.87	11	-13	-0.09	-0.08	0.14	22.0
0.54	231°	329°	0.83	11	-12	-0.11	-0.07	0.16	20.1
0.54	234°	332°	0.82	10	-12	-0.13	-0.05	0.17	18.6
0.54	237°	335°	0.81	10	-11	-0.14	-0.03	0.18	17.4
0.54	240°	337°	0.81	10	-11	-0.15	-0.00	0.18	16.5
0.54	243°	338°	0.83	9	-11	-0.15	0.02	0.18	15.8
0.54	246°	339°	0.87	9	-11	-0.15	0.05	0.18	15.4
0.54	249°	340°	0.92	8	-11	-0.14	0.08	0.18	15.1
0.54	252°	340°	0.99	8	-11	-0.13	0.11	0.17	15.1
0.54	255°	340°	1.08	7	-11	-0.11	0.14	0.16	15.4
0.54	258°	340°	1.21	5	-12	-0.08	0.16	0.15	15.9
0.54	261°	341°	1.39	4	-12	-0.05	0.18	0.14	16.8
0.54	264°	342°	1.64	1	-13	-0.01	0.21	0.13	18.3
0.54	267°	343°	1.99	-2	-15	0.03	0.22	0.11	20.7
0.54	270°	345°	2.52	-6	-17	0.08	0.24	0.10	24.6
0.54	273°	347°	3.35	-13	-21	0.15	0.26	0.09	31.5
0.55	216°	305°	1.13	14	-16	-0.00	-0.07	0.06	34.3

0.55	219°	310°	1.03	13	-15	-0.02	-0.07	0.07	29.7
0.55	222°	315°	0.95	12	-13	-0.04	-0.08	0.09	26.1
0.55	225°	320°	0.89	12	-12	-0.06	-0.08	0.11	23.3
0.55	228°	325°	0.85	11	-11	-0.08	-0.07	0.12	21.1
0.55	231°	329°	0.83	11	-11	-0.09	-0.06	0.13	19.3
0.55	234°	332°	0.81	11	-10	-0.11	-0.04	0.14	18.0
0.55	237°	335°	0.81	10	-10	-0.12	-0.02	0.15	17.0
0.55	240°	338°	0.82	10	-10	-0.13	-0.00	0.16	16.2
0.55	243°	339°	0.84	10	-10	-0.13	0.02	0.16	15.8
0.55	246°	341°	0.87	9	-10	-0.13	0.04	0.16	15.7
0.55	249°	342°	0.92	8	-10	-0.13	0.07	0.16	15.8
0.55	252°	342°	1.00	8	-10	-0.12	0.10	0.15	16.2
0.55	255°	343°	1.09	7	-11	-0.10	0.12	0.15	17.0
0.55	258°	343°	1.23	5	-12	-0.08	0.15	0.14	18.1
0.55	261°	344°	1.41	4	-13	-0.05	0.17	0.13	19.7
0.55	264°	345°	1.66	1	-15	-0.02	0.20	0.12	22.0
0.55	267°	346°	2.03	-2	-18	0.02	0.22	0.11	25.4
0.55	270°	348°	2.59	-7	-22	0.08	0.25	0.10	30.6
0.56	216°	305°	1.08	14	-14	0.00	-0.05	0.05	33.2
0.56	219°	311°	0.99	13	-13	-0.01	-0.06	0.06	28.9
0.56	222°	316°	0.92	12	-12	-0.03	-0.06	0.08	25.6
0.56	225°	321°	0.87	12	-11	-0.05	-0.06	0.09	22.9
0.56	228°	325°	0.84	11	-10	-0.06	-0.06	0.11	20.9
0.56	231°	329°	0.81	11	-10	-0.08	-0.05	0.12	19.4
0.56	234°	333°	0.80	11	-9	-0.09	-0.04	0.13	18.3
0.56	237°	336°	0.80	10	-9	-0.10	-0.02	0.13	17.5
0.56	240°	339°	0.82	10	-9	-0.11	-0.01	0.14	17.1
0.56	243°	341°	0.84	9	-9	-0.12	0.02	0.14	17.0
0.56	246°	342°	0.88	9	-9	-0.12	0.04	0.14	17.3
0.56	249°	343°	0.94	8	-10	-0.12	0.06	0.14	17.8
0.56	252°	344°	1.02	8	-11	-0.11	0.09	0.14	18.8
0.56	255°	345°	1.12	7	-12	-0.10	0.11	0.13	20.1
0.56	258°	346°	1.26	5	-13	-0.08	0.14	0.13	22.0
0.56	261°	347°	1.46	3	-15	-0.05	0.17	0.12	24.6
0.56	264°	348°	1.73	1	-18	-0.02	0.19	0.11	28.3
0.56	267°	349°	2.13	-3	-23	0.02	0.22	0.10	33.6
0.57	216°	307°	1.02	15	-12	0.00	-0.04	0.04	32.4
0.57	219°	312°	0.94	13	-11	-0.01	-0.05	0.05	28.6
0.57	222°	317°	0.88	12	-10	-0.02	-0.05	0.07	25.7
0.57	225°	321°	0.84	12	-9	-0.04	-0.06	0.08	23.4
0.57	228°	326°	0.82	11	-9	-0.05	-0.05	0.09	21.8
0.57	231°	330°	0.80	11	-9	-0.07	-0.05	0.10	20.6
0.57	234°	334°	0.80	10	-8	-0.08	-0.04	0.11	19.8
0.57	237°	337°	0.81	10	-9	-0.09	-0.02	0.12	19.5
0.57	240°	339°	0.83	10	-9	-0.10	-0.01	0.12	19.5
0.57	243°	342°	0.86	9	-9	-0.11	0.01	0.12	19.8
0.57	246°	344°	0.91	9	-10	-0.11	0.03	0.12	20.6
0.57	249°	345°	0.98	8	-11	-0.11	0.06	0.12	21.8
0.57	252°	346°	1.07	7	-12	-0.10	0.08	0.12	23.5
0.57	255°	348°	1.19	6	-14	-0.09	0.11	0.12	25.8
0.57	258°	349°	1.35	5	-17	-0.08	0.13	0.11	29.0
0.57	261°	350°	1.58	3	-20	-0.05	0.16	0.11	33.4
0.58	219°	313°	0.89	14	-8	-0.01	-0.04	0.05	29.1
0.58	222°	318°	0.84	13	-8	-0.02	-0.05	0.06	26.9
0.58	225°	323°	0.82	12	-8	-0.03	-0.05	0.07	25.3
0.58	228°	327°	0.80	11	-8	-0.04	-0.05	0.08	24.2
0.58	231°	331°	0.80	11	-8	-0.06	-0.04	0.09	23.5
0.58	234°	334°	0.80	10	-8	-0.07	-0.03	0.10	23.3
0.58	237°	338°	0.82	10	-9	-0.08	-0.02	0.10	23.6
0.58	240°	340°	0.85	9	-9	-0.09	-0.01	0.10	24.2
0.58	243°	343°	0.90	9	-10	-0.09	0.01	0.11	25.4
0.58	246°	345°	0.96	8	-12	-0.10	0.03	0.11	27.0
0.58	249°	347°	1.05	8	-13	-0.10	0.05	0.11	29.4
0.58	252°	348°	1.17	7	-16	-0.10	0.07	0.10	32.6
0.58	255°	350°	1.32	6	-19	-0.09	0.10	0.10	37.0
0.58	258°	351°	1.53	6	-24	-0.08	0.13	0.10	43.1
0.59	219°	315°	0.83	14	-5	-0.00	-0.04	0.05	31.1
0.59	222°	320°	0.80	13	-6	-0.01	-0.04	0.06	30.0
0.59	225°	324°	0.79	12	-6	-0.03	-0.04	0.07	29.3

0.59	228°	328°	0.79	12	-7	-0.04	-0.04	0.07	29.2
0.59	231°	332°	0.80	11	-7	-0.05	-0.04	0.08	29.5
0.59	234°	335°	0.82	11	-8	-0.06	-0.03	0.08	30.4
0.59	237°	338°	0.86	10	-10	-0.07	-0.02	0.09	31.8
0.59	240°	341°	0.91	10	-11	-0.08	-0.01	0.09	33.9
0.59	243°	344°	0.98	9	-13	-0.09	0.01	0.09	36.7
0.59	246°	346°	1.08	9	-16	-0.09	0.03	0.09	40.7
0.59	249°	348°	1.20	9	-20	-0.10	0.05	0.09	46.1
0.60	225°	326°	0.76	15	-4	-0.02	-0.05	0.07	37.9
0.60	228°	330°	0.79	14	-5	-0.04	-0.04	0.07	39.8
0.60	231°	334°	0.82	14	-7	-0.05	-0.04	0.07	42.4
0.60	234°	337°	0.87	14	-10	-0.06	-0.03	0.08	45.9
0.60	237°	340°	0.94	14	-13	-0.07	-0.02	0.08	50.7
0.66	228°	352°	0.27	14	-11	-0.02	-0.04	0.17	16.5
0.67	225°	343°	0.30	15	-15	-0.01	-0.03	0.10	19.1
0.67	228°	354°	0.26	12	-10	-0.02	-0.05	0.19	13.2

Solutions acceptables avec la troisième méthode
$e_{max} = 0.2$

α	ε'	λ_D	m'	$m'h'$	$m'l'$	e	res
0.48	0°	64°	0.97	0.02	-0.03	0.03	24.9
0.48	3°	67°	0.95	0.02	-0.03	0.04	24.1
0.48	6°	69°	0.93	0.02	-0.03	0.04	24.3
0.48	9°	72°	0.89	0.02	-0.03	0.04	25.5
0.48	12°	75°	0.84	0.01	-0.03	0.04	27.4
0.48	15°	77°	0.79	0.01	-0.03	0.05	29.6
0.48	18°	80°	0.74	0.01	-0.04	0.05	32.0
0.48	21°	83°	0.69	0.00	-0.03	0.05	34.3
0.48	24°	86°	0.64	0.00	-0.03	0.05	36.6
0.48	27°	88°	0.59	-0.00	-0.03	0.06	38.7
0.48	30°	91°	0.55	-0.01	-0.03	0.06	40.6
0.48	33°	94°	0.51	-0.01	-0.03	0.06	42.5
0.48	198°	265°	0.51	0.00	0.00	0.01	49.5
0.48	201°	269°	0.69	0.00	-0.00	0.01	48.4
0.48	204°	272°	0.78	0.01	-0.00	0.01	47.5
0.48	207°	275°	0.80	0.01	-0.01	0.01	46.9
0.48	210°	278°	0.76	0.01	-0.01	0.02	46.6
0.48	213°	281°	0.71	0.01	-0.00	0.02	46.7
0.48	216°	284°	0.64	0.02	-0.00	0.03	46.9
0.48	219°	287°	0.58	0.02	-0.01	0.03	47.2
0.48	222°	290°	0.53	0.02	-0.01	0.04	47.6
0.48	333°	398°	0.52	0.01	-0.00	0.02	48.7
0.48	336°	401°	0.59	0.01	-0.01	0.02	46.7
0.48	339°	404°	0.66	0.01	-0.01	0.03	44.4
0.48	342°	407°	0.73	0.02	-0.01	0.03	41.8
0.48	345°	409°	0.80	0.02	-0.02	0.03	38.9
0.48	348°	412°	0.86	0.02	-0.02	0.03	35.7
0.48	351°	415°	0.91	0.02	-0.02	0.03	32.5
0.48	354°	418°	0.95	0.02	-0.02	0.03	29.4
0.48	357°	421°	0.97	0.02	-0.03	0.03	26.7
0.49	180°	246°	1.74	0.12	0.10	0.09	13.1
0.49	183°	251°	1.71	0.13	0.07	0.09	11.6
0.49	186°	256°	1.46	0.14	0.03	0.09	12.6
0.56	195°	278°	0.57	0.05	-0.00	0.10	22.1
0.56	198°	283°	0.57	0.05	-0.01	0.10	20.4
0.57	192°	275°	0.52	0.05	0.01	0.09	25.4
0.57	195°	279°	0.56	0.05	0.01	0.08	23.4
0.57	198°	284°	0.56	0.05	-0.01	0.08	21.6
0.57	201°	289°	0.55	0.04	-0.02	0.09	20.0
0.57	204°	294°	0.54	0.04	-0.03	0.09	18.7
0.58	195°	281°	0.53	0.04	0.01	0.08	24.6
0.58	198°	285°	0.53	0.04	-0.00	0.08	22.8
0.58	201°	290°	0.53	0.04	-0.01	0.08	21.3
0.58	204°	295°	0.51	0.04	-0.02	0.09	20.1
0.58	207°	301°	0.50	0.03	-0.04	0.09	19.1

Annexe E

TABLE DES MATIÈRES DES MANUSCRITS CONSACRÉS À LA RECHERCHE DE NEPTUNE

Objectifs

On détaille le contenu du dossier Ms 1063 (27), conservé à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, contenant les calculs effectués par Le Verrier pour la recherche de Neptune

Description des manuscrits de Le Verrier

Les manuscrits de Le Verrier relatifs à la recherche de Neptune sont répartis dans 7 cahiers, regroupés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris à la cote Ms 1063 (27).

1) Pagination des manuscrits

Par endroits, Le Verrier n'utilise que les rectos, ou un seul côté d'une feuille double (pour les doubles interpolations essentiellement).

Seul le premier cahier est entièrement paginé et Le Verrier n'utilise dans ce cahier que les rectos (seuls quelques rares versos sont utilisés pour noter des calculs).

Le cahier n° 2 est paginé jusqu'à la page 125. Les annexes numériques ne sont paginées que très partiellement.

Les cahiers 3, 4, 5, 6 et 7 sont très peu paginés, et quand ils le sont, la pagination est rarement cohérente : il s'agit souvent de feuillets utilisés (et paginés de 1 à 10 ou de 1 à 20 selon le cas) séparément, puis regroupés dans un deuxième temps pour les archives.

2) Pagination adoptée pour remplir la table des matières

En conséquence, pour le premier cahier, la pagination a été faite feuille par feuille (et non page par page) et il y a 217 feuilles en tout.

Pour les autres cahiers, les rectos et les versos ont été systématiquement comptabilisés, même si souvent, seuls les rectos ont été utilisés.

Certaines pages dans le cinquième cahier sont presque vides, celles qui font intervenir les calculs pour $\alpha = 0.52$ ou $\alpha = 0.498$ par exemple.

L'ensemble comporte selon ce décompte un peu arbitraire

$$217 + 224 + 303 + 279 + 156 + 203 + 97 = 1479 \text{ pages plus ou moins remplies}$$

ou avec un décompte différent, environ 850 feuilles (recto-verso).

3) Organisation des manuscrits

Le Verrier utilise souvent des feuillets reliés constitués d'une dizaine ou d'une vingtaine de feuilles (dans le cahier n° 5 notamment) et paginés de façon autonome.

De nombreux calculs annexes, ainsi que des tables de multiplication locales sont insérées entre les pages régulières.

Certaines données – comme les valeurs des éléments elliptiques au cahier n° 4 – sont notées sur de petites bandes de papier, afin de pouvoir être utilisées à tout endroit.

Certaines feuilles ont été rallongées, par collage avec des pastilles de cire, en cas de nécessité.

Les premiers cahiers sont très structurés ; les autres le sont plus irrégulièrement.

Il y a quelques pages mal placées, comme l'observation fortuite de Neptune en 1795, placée dans le n° 4 alors qu'elle n'a sa place que dans le cahier n° 7.

4) Titres des rubriques de cette table des matières

Les titres des paragraphes et des rubriques de la table des matières sont le plus souvent ceux de Le Verrier.

Dans le cahier n° 1, les titres et le découpage sont entièrement de Le Verrier. Dans les cahiers suivants, les titres ne sont pas toujours donnés explicitement. En cas d'absence, un titre a été rajouté, présentant le calcul fait.

Le premier cahier a été imprimé en 1846, sous le titre *Recherche sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)* ; la version imprimée et le manuscrit ne diffèrent que par l'absence de quelques formules (absences voulues par Le Verrier), et la présence de quelques erreurs de transcription, dans certaines tables de valeurs numériques, par exemple.

CAHIER nº 1
Recherches sur les mouvements de la planète Herschel

Introduction ..... p 1

PREMIÈRE PARTIE

Perturbations du mouvement elliptique d'Uranus, dues aux actions de Saturne et de Jupiter ..... p. 4
Formules générales servant au calcul des perturbations ..... p. 5
Détermination simultanée de toutes les inégalités ..... p. 7
Perturbations produites par Saturne et proportionnelles à la première puissance de sa masse ..... p. 13
Inégalités des éléments, déduites simultanément du même calcul ..... p. 14
Perturbations de la longitude θ_1 du nœud ..... p. 14
Perturbations de l'inclinaison relative ϕ_1 ..... p. 16
Perturbations du moyen mouvement et du grand axe a ..... p. 16
Perturbations de l'excentricité e ..... p. 19
Perturbations de la longitude du périhélie ϖ ..... p. 21
Perturbations de la longitude de l'époque ε ..... p. 23
Détermination et vérification des inégalités précédentes par le développement algébrique de la fonction perturbatrice ..... p. 25
Moyen mouvement et demi-grand axe n, a ..... p. 29
Excentricité et longitude du périhélie e, ϖ ..... p. 30
Longitude de l'époque ε ..... p. 32
Inclinaison et longitude du nœud ϕ, θ ..... p. 33
Inégalités de la longitude et du rayon vecteur v, r ..... p. 35
Inégalités applicables à la longitude moyenne et à la longitude vraie ℓ, v ..... p. 37
Inégalités du rayon vecteur r ..... p. 38
Inégalités de la latitude λ ..... p. 40
Perturbations produites par Jupiter, et proportionnelles à la première puissance de sa masse ..... p. 42
Fonction perturbatrice ..... p. 43
Perturbations du moyen mouvement et du grand axe n, a ..... p. 44
Perturbations de la longitude θ_1 du nœud ..... p. 45
Perturbations de l'excentricité e ..... p. 45
Perturbations de la longitude du périhélie ϖ ..... p. 46
Perturbations de la longitude de l'époque ε ..... p. 47
Perturbations de l'inclinaison relative ϕ_1 ..... p. 48
Perturbations de la longitude moyenne ℓ ..... p. 48
Perturbations de l'anomalie moyenne ζ ..... p. 48
Perturbations de la longitude vraie v ..... p. 48
Perturbations du rayon r ..... p. 49
Perturbations de la latitude λ ..... p. 49
Inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice ..... p. 49
Expression sous forme logarithmique de la fonction perturbatrice ..... p. 53
Perturbations du moyen mouvement de Saturne ..... p. 53
Perturbations du grand axe de Saturne a' ..... p. 54
Perturbations de l'excentricité de Saturne e' ..... p. 54
Perturbations de la longitude du périhélie de Saturne ϖ' ..... p. 54
Perturbations de la longitude de l'époque de Saturne ε' ..... p. 54
Perturbations de la longitude moyenne de Saturne ℓ' ..... p. 55
Perturbations du moyen mouvement, dues aux variations des éléments d'Uranus ..... p. 55
Perturbations de la longitude de l'époque, de l'excentricité et du périhélie, dues aux variations des éléments d'Uranus ..... p. 57
Changements qu'éprouve la fonction R quand on y fait varier les éléments de Saturne, en vertu des perturbations que cette planète éprouve de Jupiter ..... p. 58

Perturbations du moyen mouvement et du grand axe ..... p. 59
Perturbations de l'excentricité ..... p. 61
Perturbations de la longitude du périhélie ..... p. 63
Perturbations de la longitude de l'époque ..... p. 63
Résumé de la théorie précédente ..... p. 66
Inégalités applicables à la longitude moyenne ..... p. 68
Inégalités applicables à la longitude vraie ..... p. 68
Inégalités du rayon vecteur ..... p. 69
Inégalités de la latitude ..... p. 69

DEUXIÈME PARTIE

Comparaison de la théorie précédente avec les observations ..... p. 70
Discussion des tables de Bouvard ..... p. 70
Explications sur la formation des éphémérides d'Uranus ..... p. 73
Éphémérides héliocentriques d'Uranus et de la Terre ..... p. 80
Passage des positions héliocentriques aux positions géocentriques ..... p. 91
Éphémérides des positions géocentriques d'Uranus ..... p. 92
Discussion des observations d'Uranus. Leur comparaison avec les éphémérides précédentes ..... p. 103
Tableau des comparaisons des observations d'Uranus avec la théorie admise ..... p. 108
Équations de condition entre les corrections des éléments du mouvement elliptique d'Uranus, et les erreurs des Tables en longitude ..... p. 114
Est-il possible de satisfaire à l'ensemble des équations précédentes, par une détermination convenable des valeurs des inconnues qu'elles renferment ? ..... p. 118
Équations de condition, déduites de la considération des erreurs héliocentriques des Tables ..... p. 122

TROISIÈME PARTIE

Les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus peuvent être expliquées par l'action perturbatrice d'une nouvelle planète. Première détermination de la position que le nouvel astre occupe dans le ciel ..... p. 124
Principales perturbations de la longitude héliocentrique d'Uranus, dues à l'action de la planète cherchée ..... p. 128
Perturbations indépendantes des excentricités ..... p. 128
Perturbations dépendantes des premières puissances des excentricités ..... p. 128
Perturbations dépendantes des puissances supérieures des excentricités ..... p. 130
Inégalités séculaires ..... p. 131
Résumé des termes à conserver dans la première approximation ..... p. 132
Recherche de la masse et des éléments de l'orbite de la planète troublante. Première solution ..... p. 133
Recherche de la masse et des éléments de l'orbite de la planète troublante. Deuxième solution ..... p. 137
Tables des coefficients des équations de condition ..... p. 138
Erreurs de la théorie en fonction de m', P', Q' ..... p. 152
Discussion des équations précédentes ..... p. 153
Valeurs des coefficients des équations de condition pour 6 valeurs de ε' ..... p. 156
Discussion de ces équations ..... p. 160

QUATRIÈME PARTIE

Détermination plus précise des éléments de l'orbite, et de la position actuelle de la planète troublante, au moyen de l'ensemble des observations d'Uranus ..... p. 164
Formules pour le calcul des perturbations héliocentriques ..... p. 166
Calcul des perturbations de la longitude géocentrique ..... p. 171
Formation des équations de condition ..... p. 188
Résolution des équations précédentes ..... p. 189
Solution la plus précise ..... p. 197
Comparaison de la nouvelle théorie avec les observations ..... p. 202
Recherche des limites entre lesquelles la planète perturbatrice est nécessairement comprise ..... p. 203

CINQUIÈME ET DERNIÈRE PARTIE

Est-il possible de déduire des observations d'Uranus la position du plan de l'orbite de la planète troublante ? ..... p. 213

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT

Lettre de Galle ..... p. 216
Comparaison entre la position calculée et la position réelle ..... p. 217
Fin du cahier ..... p. 217

CAHIER n° 2
Uranus
Perturbations produites par Saturne et Jupiter
Expression de ces perturbations obtenues par l'analyse et l'interpolation

Perturbations produites par Saturne sur Uranus

Rappels des formules donnant les variations des éléments elliptiques ..... p. 1
Données numériques des éléments d'Uranus et de Saturne ..... p. 5
Développement de la fonction perturbatrice ..... p. 7
Développement à l'ordre 6 de la fonction perturbatrice (calcul abandonné) ..... p. 10
Développement à l'ordre 2 de la fonction perturbatrice ..... p. 11
Formule du n° 23 de *Herschel* donnant l'expression de aR ..... p. 13
Développement en série de Fourier de R ..... p. 15
Calcul de $\frac{dR}{da}$ ..... p. 18
Calcul de $\frac{dR}{da'}$ ..... p. 20

Tables de Saturne agissant sur Uranus ..... p. 21

Détermination de R par double interpolation numérique ..... p. 23
Valeurs numériques de R en 16×16 points ..... p. 24
Expression de A_i et B_i sous forme de produits ..... p. 27
Expression de A_i, B_i sous forme développée ..... p. 29
Calcul de $\delta\rho$ ..... p. 30
Calcul de δa ..... p. 31
Calcul de $\delta\rho$ par une autre méthode ..... p. 34
Calcul de $\delta\theta$ ..... p. 35
Calcul de $\delta\phi$ ..... p. 36
Calcul de $\delta\lambda$ ..... p. 41
Perturbation de l'inclinaison ..... p. 43
Perturbation de la latitude ..... p. 47
Calcul de δe ..... p. 51
Calcul de $e\delta\varpi$ ..... p. 59
Calcul de $\delta\varepsilon$ par double interpolation ..... p. 65
Calcul de $\delta\varepsilon$ par la méthode algébrique ..... p. 71
Calcul de δv ..... p. 73
Calcul de $\delta\ell$ ..... p. 77
Calcul de δr ..... p. 79

Perturbations exercées par Jupiter sur Uranus

Calcul de la fonction perturbatrice ..... p. 81
Calcul de $\delta\rho$ ..... p. 82
Calcul de δa ..... p. 83
Calcul de δe ..... p. 84
Calcul de $e\delta\varpi$ ..... p. 85
Calcul de $\delta\varepsilon$ ..... p. 86
Perturbation de l'inclinaison ..... p. 88

Inégalité de la longitude vraie ..... p. 90
Inégalité du rayon ..... p. 92
Perturbation de la latitude ..... p. 93

Principales inégalités de Saturne, perturbé par Jupiter ..... p. 95
Fonction perturbatrice ..... p. 95
Détermination de $\delta\rho$ ..... p. 96
Inégalité de la longitude de l'époque ..... p. 96
Inégalité de la longitude moyenne ..... p. 97
Inégalité de l'excentricité ..... p. 98
Inégalité du périhélie ..... p. 98
Inégalité du demi-grand axe ..... p. 99

Carré de la Force Perturbatrice ..... p. 101
Calcul de $\delta\rho$ ..... p. 105
Calcul de δe ..... p. 109
Calcul du demi-grand axe ..... p. 111
Calcul du périhélie ..... p. 112
Perturbation de la longitude de l'époque ..... p. 115
Variations de l'équation du centre ..... p. 117
Variations de l'excentricité ..... p. 119

Résumé de la théorie précédente ..... p. 123

(Annexes de calcul, non paginées) ..... 101 pages
Données relatives à Uranus, troublé par Saturne ..... 1 page
Tables diverses pour les doubles interpolations numériques ..... 48 pages
Tables pour calculer les coefficients de la méthode algébrique ..... 6 pages
Reprise des tables pour des calculs par double interpolation ..... 38 pages
Action de Jupiter ..... 8 pages

CAHIER n° 3
Observations d'Uranus
Calcul des lieux théoriques correspondants
Comparaison des lieux calculés avec les lieux observés
Équations de condition

Rapports d'observations d'Uranus et d'étoiles repères ..... p. 1
Réduction des observations précédentes ..... p. 19
Réduction des observations de Greenwich ..... p. 27
Observations de Flamsteed ..... p. 35
Observations de Lemonnier ..... p. 43
Observation de Bradley ..... p. 45
Observations de Mayer ..... p. 47
Détermination des latitudes géocentriques et héliocentriques ..... p. 51
Calcul des déclinaisons observées ..... p. 59
Termes généraux des équations de condition pour la latitude (ces équations devraient être dans le cahier n° 5) ..... p. 67
Table des valeurs relatives à Uranus ..... p. 79
Discussion des tables d'Uranus de Bouvard ..... p. 79
Calcul des perturbations de la longitude vraie à partir de la formule littérale ..... p. 87
Calcul des perturbations de la longitude vraie à l'aide des tables de Bouvard. Comparaison avec celles de Le Verrier ..... p. 95
Écriture des équations de condition ..... p. 97
Perturbations du rayon vecteur ..... p. 101
Rayon vecteur par Bouvard ..... p. 106
Reprise de la perturbation de la longitude vraie et du rayon aux dates d'observation ..... p. 107

Perturbations de la distance polaire ..... p. 119
Angles de perturbation de la longitude aux dates anciennes ..... p. 121
Perturbation du rayon vecteur ..... p. 125
Calcul des perturbations à l'aide des tables de Bouvard aux dates anciennes ..... p. 127
Calcul de l'équation au centre ..... p. 133
Calcul du rayon vecteur par deux méthodes ..... p. 137
Calcul de la distance polaire ..... p. 141
Lieux du Soleil extraits de la connaissance des temps de 1844 ..... p. 145
Calcul de la nutation ..... p. 163
Calcul des anciennes observations ..... p. 167
Lieux d'Uranus ..... p. 171
Calcul de l'aberration ..... p. 225
Formulaire pour les équations de conditions ..... p. 233
Calcul de α, β, H, K ..... p. 235
Coefficients pour passer de δR à $\delta \ell$ ..... p. 245
Équations de condition regroupées 10 par 10 ..... p. 249
Équations moyennes résolues par substitutions ..... p. 259
Table des résidus individuels ..... p. 260
Groupement des équations de condition. Résolution en éléments elliptiques ..... p. 265
Résidus dans les équations de condition ..... p. 267
Équations de condition en latitude ..... p. 276
Comparaison des positions observées et calculées ..... p. 287
Table des valeurs de P, Q, M, N, avec ζ de grade en grade ..... p. 293
Fin du cahier ..... p. 303

CAHIER n° 4
Recherche du corps troublant
1ère approximation

Perturbations les plus importantes ..... p. 1
Équations de condition régulièrement espacées ..... p. 11
Détermination des constantes ..... p. 23
Calcul de la position de Neptune les 8 et 10 mai 1795 (aurait dû être dans le cahier n° 7) ..... p. 25
Équations de condition à partir de 18 observations ..... p. 29
Équations combinées ..... p. 37
Table des valeurs des coefficients de Laplace (mal placée ?) ..... p. 39
Table de $P^{(3)}$ pour $\alpha \in [0.40 : 0.60]$ ..... p. 49
Table de $M^{(2)}$ pour $\alpha \in [0.40 : 0.60]$ ..... p. 51
Table de $N^{(1)}$ pour $\alpha \in [0.40 : 0.60]$ ..... p. 57
Table de $N^{(3)}$ pour $\alpha \in [0.40 : 0.60]$ ..... p. 61
Table de $P^{(1)}$ pour $\alpha \in [0.40 : 0.60]$ ..... p. 65
Formules générales ..... p. 71
Expressions de p_i, m_i ..... p. 73
Coefficients des équations de condition ..... p. 81
Expression de la masse à l'aide d'une fraction rationnelle ..... p. 83
Coefficients des équations de condition (suite) ..... p. 105
Valeurs numériques des coefficients de condition en fonction de ε' ..... p. 111
Substitution des valeurs précédentes dans les équations ..... p. 145
Discussion des équations de condition ..... p. 169
Calcul des erreurs ..... p. 199
Position au 1er Janvier 1847 ..... p. 223
Reprise des calculs précédents avec $\alpha = 0.51$ ..... p. 225
Fin du cahier ..... p. 279

CAHIER n° 5
Recherche du corps troublant
2ème approximation

Rectification de l'orbite de la planète en partant de $\alpha = 0.53$ et de $\varepsilon' = 280$ grades, première approximation ..... p. 1
Perturbation du rayon ..... p. 13
Tables de valeurs numériques de p_i et m_i ..... p. 19
Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.49$ et $\varepsilon' = 280$ grades ..... p. 25
Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.51$ et $\varepsilon' = 260$ grades ..... p. 51
Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.51$ et $\varepsilon' = 280$ grades ..... p. 81
Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.51$ et $\varepsilon' = 300$ grades ..... p. 111
Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.53$ et $\varepsilon' = 260$ grades ..... p. 131
Fin du cahier ..... p. 156

CAHIER n° 6
Recherche du corps troublant (suite)
2ème approximation

Tables et résolution des équations pour $\alpha = 0.53$ et $\varepsilon' = 280°$ ..... p. 1
Tables pour $\alpha = 0.55$ ..... p. 39
Tables pour $\alpha = 0.52$ (équations non résolues) ..... p. 47
Tables pour $\alpha = 0.498$ (début du calcul seulement) ..... p. 69
Tables pour $\alpha = 0.502$ (début) ..... p. 75
Éléments définitifs $\alpha = 0.530585$ (inachevé) ..... p. 77
Reprise des 6 cas pour la détermination de Σ. Calcul de résidus ..... p. 85
Formules particulières des coefficients constants et de m' pour chaque valeur de α ..... p. 101
Erreurs moyennes ..... p. 121
Détermination des courbes de contraintes ..... p. 135
Tracé des courbes ainsi délimitées ..... p. 203
Fin du cahier ..... p. 203

CAHIER n° 7
Calcul des positions de Neptune
Rectification des éléments à l'aide des premières observations

Formules géocentriques ..... p. 1
Ephémérides de Neptune pour certains jours de 1847 ..... p. 3
Schéma d'un calcul itératif pour G ..... p. 5
Observations de Neptune en 46 et 47 ..... p. 7
Développement des coordonnées en fonction des puissances du temps ..... p. 11
Quadrature de Novembre 46 ..... p. 15
Opposition de 1847 ..... p. 19
Quadrature de Novembre 47 ..... p. 25
Suite du calcul itératif P_1, P_2 ..... p. 29
Observations de Neptune ..... p. 43
Développements limités de l'ascension droite et de la déclinaison ..... p. 49
Rectification par l'observation ..... p. 59
Calcul des positions géocentriques ..... p. 67
Éléments servant de premier point de départ ..... p. 73
Tables diverses ayant servi à faciliter les calculs ..... p. 85
Fin du cahier ..... p. 97

Annexe F

OÙ LE VERRIER FAISAIT-IL SES CALCULS INTERMÉDIAIRES ?

Objectifs

Les manuscrits de Le Verrier comportent de très nombreux résultats numériques. Certaines valeurs sont obtenues de façon assez transparente, tous les intermédiaires de calcul étant visibles, mais d'autres semblent résulter de calculs non complètement présents sur les manuscrits.
Où Le Verrier faisait-il ses calculs ?
On va essayer de répondre à cette question, mais la brève analyse qui suit ne concerne que le dossier Ms 1063 (27) consacré à la recherche de Neptune ; une étude plus détaillée et plus systématique serait nécessaire, incluant la comparaison avec des manuscrits précédant la recherche de Neptune, comme ceux pour la détermination de l'orbite de Mercure par exemple, et des manuscrits suivant cette recherche, comme la théorie du Soleil.

Sommaire

F.1.1 Calculs élémentaires 504
F.1.2 Calculs plus longs 505
F.1.3 Pages de calculs auxiliaires 506

F.1.1 Calculs élémentaires

Il semblerait que les manuscrits d'Adams contiennent tous les calculs numériques qu'il a effectués pour la recherche de Neptune. C'est du moins la conclusion que laisse entendre Sampson à l'issue de son examen approfondi des manuscrits d'Adams [Sampson, 1904] : « A volume of manuscripts [...] presented by Mrs Adams to the Library of St. John's contains all, or nearly all, that Professor Adams wrote upon the perturbations of Uranus... »

En est-il de même pour les manuscrits de Le Verrier ? On a déjà signalé quelques absences : formules théoriques pour δr, passage de valeurs littérales de δr à des valeurs numériques (note 5.22). Mais où Le Verrier faisait-il concrètement ses calculs numériques ? Sur les manuscrits conservés à la bibliothèque de l'Observatoire ou bien sur des feuilles annexes aujourd'hui disparues ?

La façon dont Le Verrier faisait concrètement ses calculs semble avoir évolué, d'une part avec le cadre dans lesquels ces calculs ont été faits (calculs de perturbations, première approximation, deuxième approximation...) et d'autre part avec la densité et le nombre de calculs à effectuer. Pour faire des calculs intermédiaires courts (produit de deux nombres à l'aide d'une table de logarithmes par exemple), Le Verrier utilise la marge de ses feuilles (comme on le voit à la fig. F.1) et les corrections, quand elles sont nécessaires, sont reprises sur l'opération initiale.

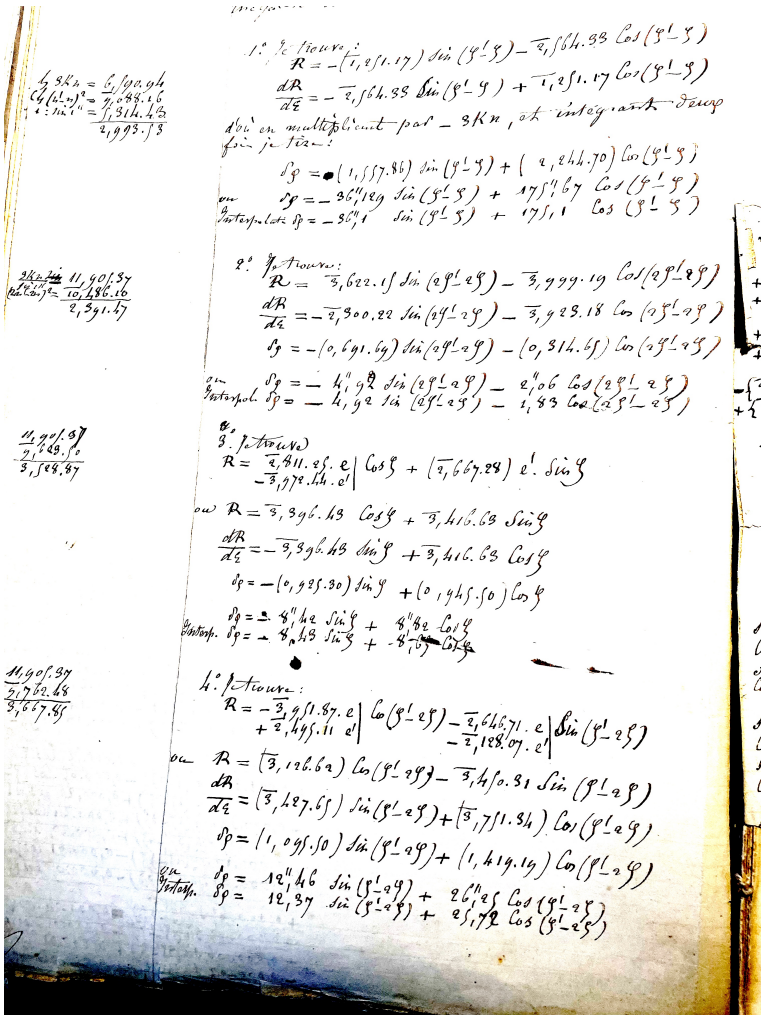


FIGURE F.1 – Calculs élémentaires effectués dans la marge et éventuellement corrigés sur place. Il s'agit de produits calculés à l'aide de logarithmes

F.1.2 Calculs plus longs

D'une manière générale, Le Verrier organise ses calculs pour pouvoir passer d'un intermédiaire au suivant, soit par un calcul fait de tête, soit par un appel élémentaire à des logarithmes. C'est par exemple, ce que l'on constate pour le calcul de $6k_{u,s}nR$, calcul organisé en tableur, et qui a été décomposé en de nombreuses étapes élémentaires intermédiaires (voir § 3.5.1.2 et fig. 3.2.)

Quand le nombre de calculs intermédiaires est plus élevé, Le Verrier semble utiliser une bande de papier extérieure sur laquelle il fait une première fois les calculs, qu'il contrôle aussitôt, qu'il corrige si nécessaire ; il reporte alors le résultat sur le manuscrit et il inscrit son paraphe à côté du résultat. Il existe de nombreuses bandes de papier de ce type, insérées dans les manuscrits, mais est-ce que Le Verrier a conservé toutes ces bandes de papier ? Cela semble peu probable ; il est vraisemblable que de nombreuses bandes de calcul ont disparu : probablement supprimées par Le Verrier lui-même après usage (ou peut-être par Gaillot, quand celui-ci a regroupé les manuscrits de Le Verrier), car ces bandes devaient être considérées comme inutilisables dans le futur et donc supprimables ?

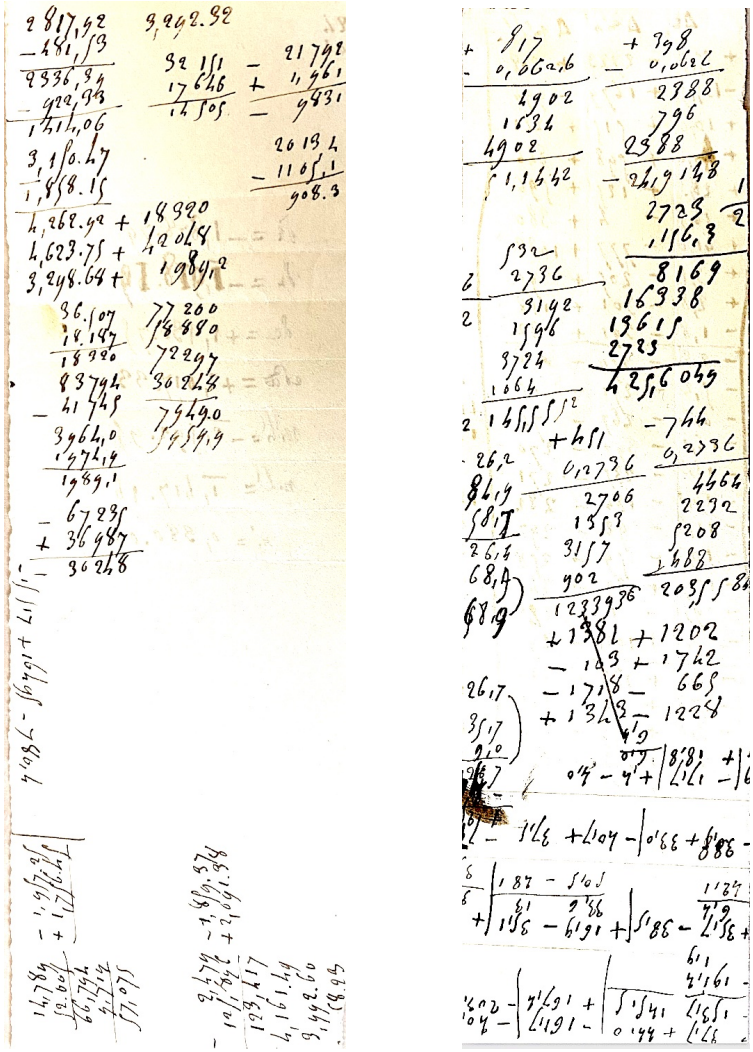


FIGURE F.2 – Deux bandes de papier utilisées par Le Verrier pour des calculs auxiliaires. Il est difficile de retrouver à quoi correspondaient ces calculs. De nombreuse bandes de ce type ont dû être supprimées, car non réutilisables par la suite

F.1.3 Pages de calculs auxiliaires

Il existe dans le dossier consacré à Neptune quelques feuilles ne comportant que des opérations (un exemple est donné fig. F.3) et qui, par leur aspect, pourraient sembler être extraites des manuscrits d'Adams ou pire, de Le Monnier ! (voir fig. 11.1 pour Adams et fig. A.2 pour Le Monnier). De telles feuilles de calcul semblent être bien difficiles à réutiliser, car elles ne comportent aucune référence en vue d'une relecture, contrairement aux manuscrits, très documentés, contenus dans le dossier sur Neptune conservé à la bibliothèque. Les feuilles de ce type ont dû être éliminées après remplissage par Le Verrier ; il en reste très peu dans le dossier consacré à Neptune (il s'agit parfois de versos de feuilles utiles).

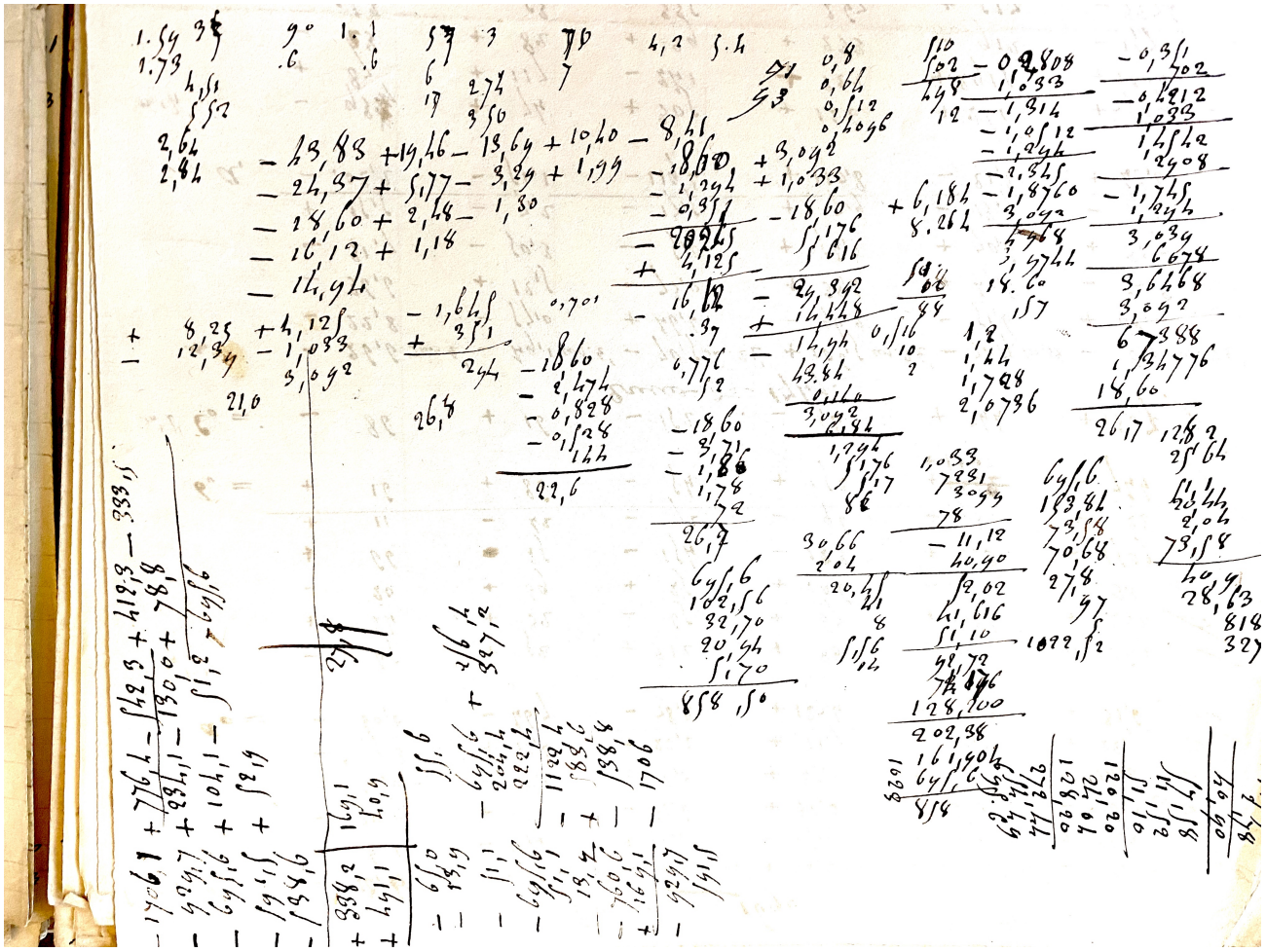


FIGURE F.3 – Feuille de calcul isolée, ne comportant aucune indication sur le but des calculs. Il est difficile de savoir après coup à quoi correspondaient ces calculs

Conclusion : les manuscrits conservés à la bibliothèque donnent l'impression d'une relative facilité pour l'exécution de la plupart des calculs. Il faut sûrement corriger cette première impression : les résultats numériques apparaissant sur les manuscrits ont, pour un bon nombre, été obtenus par des calculs effectués sur des feuilles auxiliaires, aujourd'hui disparues.
Je cite la réflexion de Philippe Nabonnand à ce sujet :

« Le Verrier est moins lisse qu'il a voulu le faire croire »

Mais bien sûr, ces diverses constatations ne retirent absolument rien au mérite de Le Verrier, qui est un fabuleux calculateur.

Annexe G

INVENTAIRE DES 59 DOSSIERS LE VERRIER CONSERVÉS À LA BIBLIOTHÈQUE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Objectifs

On donne la liste de tous (selon le catalogue de la bibliothèque) les dossiers conservés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris contenant des manuscrits de Le Verrier ; certains dossiers contiennent parfois des documents imprimés ou rédigés par des aides de Le Verrier.

Les documents rencontrés dans les divers dossiers Le Verrier sont mentionnés dans l'ordre dans lequel ils sont actuellement classés. Les documents relatifs à un même thème ou à un même calcul sont regroupés dans des chemises pour former des cahiers. Les contenus de ces cahiers sont indiqués sur leur couverture extérieure et ces indications sont le plus souvent de la main de Le Verrier. La pagination est le plus souvent absente, et quand elle est présente, elle est souvent très peu fiable.

Les dossiers ne contiennent pas que des manuscrits : il y a quelques épreuves imprimées. Il y a aussi des feuilles (de récupération) dont le verso n'a pas de rapport avec le dossier.

Certains dossiers ne contiennent que les brouillons des futurs documents imprimés dans les Annales de l'Observatoire de Paris. La numérotation des cahiers n'est pas faite dans les dossiers : quand elle est donnée, elle a pour but de séparer un peu mieux les différents documents.

J'ai particulièrement détaillé le premier dossier afin de faire apparaître l'enchevêtrement et la variété des documents rencontrés au sein d'un même dossier. Les autres dossiers seront un peu moins détaillés.

Dossier n°1 : tome 1 des Annales (début), recherches astronomiques (début)

L'écriture est relativement lisible. La pagination est par feuilles. Les rectos sont le plus souvent blancs. Quelques rectos sont utilisés pour des corrections du texte en regard. Dans les marges, il y a de nombreux renvois vers des notes. La pagination est au crayon et est sûrement de la main de Le Verrier. Il y a régulièrement le nom des typographes qui sont intervenus pour l'impression ; il y a aussi quelques indications typographiques, par exemple (avec une belle écriture) feuille $\frac{21}{121}$. Les différents documents ne sont pas regroupés par cahiers, contrairement à d'autres dossiers : les premières feuilles sont regroupées dans des chemises et les autres sont majoritairement en vrac.

• Cahier n°1
La numérotation commence p. 69 ; le titre est "Recherches astronomiques par U.J.J Le Verrier".
Table des matières du premier volume des Annales : p 71, 72.
Recherches astronomiques. Introduction p. 1.
I Des fonctions circulaires p. 2−18.
II Des triangles rectilignes p. 19−24.
III Des triangles sphériques : p. 25−35.
IV Développements des fonctions en série : p. 36−68.
V Interpolation des suites : p. 69−75.
VI Calcul des intégrales par des quadratures : p. 76−78.
VII Résolution d'un système d'équations de condition en nombre supérieur au nombre des inconnues : p. 79−86.
VIII Note. Addition à l'introduction : p. 87−91.
Note 2ème : p. 91−93.
Note 3ème : p. 94.
Note 4ème : p. 95−101. Sur la page 97 il est écrit (de la main de Le Verrier) 97−101 et on passe directement à la page 102.
Note 5ème : p. 102−103 ; p. 103 il y a 2 tableaux (partiellement corrigés de la main de Le Verrier), issus d'une première impression.
Note 6ème : p. 104 ; en haut de page le texte original a été remplacé par un texte d'une autre main sur 9 lignes.
• Cahier n°2
Chapitre Premier
Des coordonnées astronomiques : les feuillets sont réunis dans une chemise intitulée : "Coordonnées astronomiques" et paginées p. 105−136.
Dans ce chapitre aucun recto n'est utilisé. Au milieu de la chemise il y a une feuille de brouillon, avec un peu de texte et quelques calculs.
Chapitre Deuxième
Mouvement des corps célestes autour du Soleil (les feuilles ne sont pas dans une chemise), p. 136−187.
Quelques versos sont utilisés. Il y a une feuille intermédiaire de calcul.
Note 1 : Table du mouvement parabolique. Dans cette note, tous les versos sont utilisés.
• Cahier n°3
Chapitre Troisième
Perturbation du mouvement héliocentrique. Méthode de la variation des arbitraires.
Le chapitre est contenu dans une chemise et paginé, p. 188−215 ; aucun verso n'est utilisé.
Chapitre IV
Section 1ère. Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes, p. 216−276.
Il y a quelques versos utilisés pour des calculs élémentaires.
Section 2ème : Développement de la fonction perturbatrice, de ses dérivées partielles et des variations différentielles des éléments de l'orbite d'une planète au moyen des valeurs particulières de ces fonctions, p. 277−284.
p. 285 fin du chapitre IV.
Recherches astronomiques. Addition au chapitre IV.
Addition Première : Fonction auxiliaire. La pagination est toujours par feuille et reprend à 1, mais à l'encre.
Fonctions auxiliaires pour le développement de la fonction perturbatrice p. 1−8 (écrit deux fois, avec la

même pagination, la deuxième version pour un changement de notations indiqué aux typographes).
Première version p. 10−18, puis reprise partielle avec des changements de notations (?) de 12 à 25. Il y a quelques rectos qui n'ont pas de rapport avec les calculs en regard (par exemple un brouillon de calcul pour la deuxième approximation pour la découverte de Neptune.)
Recherches astronomiques par U.J.J Le Verrier. Tome premier.
C'est la table des matières, détaillée sur 8 pages recto-verso.
Annales de l'Observatoire Impérial. Premier volume. Il y a une table des matières sommaire.
Deux pages dédiées à l'Empereur et deux versos.
On reprend p. 22 (!) le développement de fonctions auxiliaires (?).
Une remise en ordre des pages semble nécessaire.
Page 26 il est noté 26−31 (mais il n'y a qu'une page). Et le développement continue jusqu'à la page 111. Il semblerait que ce soit le détail du calcul pour le développement de la fonction perturbatrice.
On continue avec addition III qui commence à la p. 52.
Développement des fonctions en séries conformément à la méthode indiquée dans l'article 24 de l'introduction.
p. 54−65 : épreuves imprimées recto-verso (avec de nombreuses corrections de la main de Le Verrier) ; p. 66 il est noté 66−97 (mais il n'y a qu'une seule page). On reprend p. 98 pour aller p. 101 ; p. 102 il est noté 102−112 ; on reprend p. 113 jusqu'à 147 en recto-verso consacré à la grande inégalité de Pallas.
On termine avec une feuille d'errata et une feuille de dessins.

En tout, il y a 554 pages non blanches. Sont comptées les feuilles avec des rabats (qui comptent pour deux) et quelques versos de récupération qui n'ont pas de rapport avec le dossier en cours.

Dossier n°2 : tome 1 des Annales (suite et fin), recherches astronomiques (suite)

Le dossier se compose de 12 cahiers.
Table des matières 1 p.
• Cahier 1
Notes. Introduction I, II, III. Fonctions circulaires et leurs (?) Trigonométrie (?) sphérique, p. 1-39 en recto-verso.
Formules pour l'interpolation : une page double.
• Cahier 2
Observations de Mr Puiseux (sur les calculs de Le Verrier) : 12 pages très lisiblement écrites.
• Cahier 3
Notes. Coordonnées astronomiques. Parallaxe. Chapitre Premier, 29 pages recto-verso.
• Cahier 4
Notes. Chapitre Deuxième. Mouvement elliptique, hyperbolique, parabolique. Variations différentielles des coordonnées héliocentriques. Aberration de la lumière, 92 p., recto-verso.
• Cahier 5
Table des anomalies de la comète des 109, ... jours. Instructions et calculs. Notes du chapitre deuxième.
La chemise contient 3 cahiers écrits d'une main autre que celle de Le Verrier. Il est dit "le calcul a été confié à Mr Bourdette", 96 p. *Quel est le rapport avec Le Verrier ?*
• Cahier 6
Chapitre 3ème. Perturbations. Méthode de la variation des arbitraires, 29 p.
Il y a des calculs de Le Verrier, mais aussi des extraits de textes de Laplace, Lagrange...
• Cahier 7
Chapitre 4ème. Développements analytiques de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des planètes, textes explicatifs, 14 p, recto.
• Cahier 8
Tome I (chapitre 4ème). Calculs pour le développement de R. "Vérification nouvelle et postérieure de plus de trois ans des termes indépendants de e et e' et des termes en e et e' pouvant servir de vérification aux commencements des ? on contrôlera ainsi qu'il n'y aurait jamais d'erreurs de facteurs tels que 1/2. Tout est trouvé parfaitement juste."
A l'intérieur cela commence par Addition VI au chapitre 5ème (?) : 124 pages de formules compliquées faisant intervenir des M_i et de K_i ? La conclusion est effectivement : tout est conforme ou juste.

• Cahier 9
Note. Addition au 5ème chapitre. Additions I, II, 6p avec des expressions de $x^k \cosh y$.
• Cahier 10
Note. Tome I (addition du chapitre 4ème). Développement de R. Calcul numérique des coefficients par le moyen des différences. Addition V au chapitre 4ème, 21 p.
• Cahier 11
Note. Addition au chapitre 4ème. Formation des fonctions. Calculs doubles. Addition III, 39 p.
Dans cette chemise, il y a des feuilles de récupération. Il y a une dizaine de versos qui semblent être des réflexions philosophiques sur Newton, la physique des planètes, et qui n'ont pas de rapport direct avec les calculs.
• Cahier 12
Notes. Tome I.
Mémoire de la grande inégalité du moyen mouvement de Pallas. Rapport du 17 mars 1845 (Cauchy, Mathieu, Damoiseau) : 4 grandes feuilles pliées en deux et 9 petites marques contenant des formules.
Coefficients analytiques du développement de R. "Expression plus développée dans la forme que dans le texte. C'est l'expression originale. Celle destinée à l'impression n'en est qu'une copie mise en votre sur (?) une forme plus concise. Celle-ci est plus commode pour la réduction en nombres. Vérification sur la dernière page (celle de la couverture) d'un terme du 6ème ordre donné faux par ailleurs ("Pontécoulant"), 51 p. de développement.

En tout 554 pages. Les pages qui semblent sans aucun rapport avec le reste du texte n'ont pas été comptabilisées.

Dossier n°3 : tome 2 des Annales (début), recherches astronomiques (suite)

Les documents sont plutôt regroupés par cahiers. Il est indiqué que pour certains documents, il y a deux paginations, et la pagination est le plus souvent erratique. Il y a 14 cahiers, qui sont essentiellement des textes prêts pour l'impression.
• Cahier n°1
Recherches astronomiques par U.J. Le Verrier. Second volume, 7 pages de table des matières.
• Cahier 2
Chapitre V. Texte imprimé, p. 1−26.
• Cahier n°3
Chapitre VI. Texte imprimé, p. 27−67
• Cahier n°4
Chapitre VII. Texte imprimé, p. 68−78.
• Cahier n°5
Chapitre huitième. Texte imprimé. Coefficients b_i^j pour les huit planètes principales, 31 p.
• Cahier n°6
Chapitre IX. Texte imprimé. Inégalités séculaires. Précession et nutation, p. 93−208.
• Cahier n°7
Chapitre X. Texte imprimé. Sect 1. Position des étoiles fondamentales, 47 p. 6 pages ne sont pas de la main de Le Verrier : recopie des typographes avant impression ?
• Cahier n°8
Chapitre X. Sect II. Texte imprimé, p. 232−318.
• Cahier n°9
Chapitre X. Sect III. Texte imprimé, p. 321−331.
• Cahier n°10
Chapitre V. Additions I. Texte imprimé, 29 p. Il y a des versos qui sont complètement rayés et qui correspondent à des feuilles de récupération.
• Cahier n°11
Chapitre IX (art 2), p. 24−36.
• Cahier n°12
Chapitre IX. Addition III, p. 37−79. Il y a un mélange de textes imprimés (et très corrigés), de parties de la main de Le Verrier et les 10 premières pages, qui ne sont pas de sa main.

• Cahier n°13
Chapitre X. Addition IV, 65 pages de positions d'étoiles, dans des tableaux dont aucun n'est de la main de Le Verrier.
• Cahier n°14
Chapitre X. Addition V. Texte imprimé, 64 p. de tableaux de positions d'étoiles, dont aucun n'est de la main de Le Verrier.
Se termine avec 1 planche contenant 4 figures.

Il y a en tout 688 pages.

Dossier n°4 : tome 2 des Annales (suite), recherches astronomiques (suite)

1 feuille avec les éléments de Mercure en 1800. Le signe de validation semble être ici le $\sim$ (et non le ∞, paraphe de Le Verrier).
Enveloppés dans une feuille, il y a une trentaine de marques étroites avec les expressions des coefficients de Laplace et de leurs dérivées, pour des rapports de demi-grands axes variant de 0.46 à 0.68.
• Cahier n°1
Enveloppés dans une feuille une douzaine de valeurs numériques pour des coefficients de Laplace.
Petit fascicule de 14 pages avec le développement de $(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-s}$.
Petit fascicule de 13 pages donnant les valeurs de coefficients de Laplace.
Fascicule de 168 pages consacré à des calculs de coefficients de Laplace.
• Cahier n°2
Chapitre VI. Petit fascicule de 7 pages.
37 pages grand format pliées en deux (numérotées de 368 à 406).
Fascicule intitulé Mécanique céleste, numéroté de 2217 à 2237, puis un autre de 2289 à 2308.
• Cahier n°3
Fascicule de 20 p. Éléments approchés des orbites.
• Cahier n°4
Notes. Coefficients de Laplace, 127 p. faisant intervenir les planètes deux par deux.
• Cahier n°5
Chapitre IX. Inégalités séculaires, 66 p.
• Cahier n°6
Chapitre IX. Précession et nutation. Fascicules de 11 p., puis de 44 p.

Il y a 547 pages sans compter les petites marques.

Dossier n°5 : tome 2 des Annales (suite et fin), recherches astronomiques (suite)

Les documents sont le plus souvent recto-verso et se présentent par cahiers séparés.
• Cahier n°1
Tome I. Addition IV, p. 1. Table des matières.
Tables du nœud ascendant de la Lune, 10 p., numérotées de 80 à 89.
• Cahier n°2
Un petit fascicule de 10 pages sur la nutation lunaire.
• Cahier n°3
Fascicule de 63 pages portant sur les observations de Bradley.
• Cahier n°4
2 pages de corrections sur les 36 étoiles fondamentales.
2 pages de brouillons de calculs.
• Cahier n°5
208 pages recto-verso de réductions d'observations de Flamsteed.
• Cahier n°6
Ascensions droites observées à Greenwich, 85 p.
• Cahier n°7
3 pages de notes sur le chapitre X des Annales.
Comparaison d'ascensions droites d'étoiles, 4 p., puis 122 p, numérotées de 33 à 154.

• Cahier n°8
Fascicule de 32 p. sur les positions de la Polaire.
• Cahier n°9
Fascicule de 65 p. Calcul des valeurs de U''' et V'''. Étoiles.
• Cahier n°10
Fascicule sur les ascensions droites d'étoiles par Bradley 1750−1762, 9 p. Il y a des petites pages de calculs intermédiaires.
• Cahier n°11
Tables particulières d'aberration et de nutation, 22 p., plus une vingtaine de petites feuilles d'auxiliaires de calcul.
• Cahier n°12
Tables particulières pour les positions d'étoiles, 13 p.
• Cahier n°13
Ascensions droites et déclinaisons moyennes des 36 étoiles fondamentales, 136 p., recto verso.
• Cahier n°14
Calcul de la nutation lunaire en AR et δ pour les 36 étoiles fondamentales, 96 p., recto-verso.
• Cahier n°15
Tables particulières pour les positions d'étoiles, 12 p. et une dizaine de marques d'auxiliaires de calcul.
• Cahier n°16
Observations de Bradley, 16 p.
• Cahier n°17
Observations par Maskelyne, 6 p.
• Cahier n°18
Observations de Paris, 28 p., recto-verso.

Il y a 940 pages ; cela tient au fait que la plupart des feuilles sont remplies au recto et au verso.

Dossier n°6 : tome 3 des Annales, recherches astronomiques (suite)

Le dossier contient essentiellement des brouillons de textes à imprimer dans les Annales.
Comète périodique de 1770. Manuscrit du texte à imprimer, rectos, 82 p.
• Cahier n°1
Construction des tables des planètes, 33 p., recto. Texte à imprimer.
• Cahier n°2
Réduction d'observations depuis 1750. Manuscrit du texte à imprimer, 25 p., rectos.
• Cahier n°3
Données numériques relatives à la comète de 1770. Texte à imprimer, 14 p.
• Cahier n°4
Chapitre XIII. Add II. Copie imprimée, 96 p., rectos.
• Cahier n°5
Chap XIII. Add II. Texte imprimé, 18 p.
• Cahier n°6
Chap XIII Addition. Passage d'étoiles fondamentales observées à la méridienne de Paris. Non imprimé, 40 p.
• Cahier n°7
Comète de 1770. Perturbations par la Terre, 25 p.
• Cahier n°8
Éphémérides des 36 étoiles fondamentales de 1769 à 1845, 4 p. de papier petit format portant des corrections de nutation. Les éphémérides ne sont pas de la main de Le Verrier (à part 1 ou 2), 11 p. recto verso, puis 192 p., recto verso.
• Cahier n°9
"Documents divers et difficiles à classer", 22 p.

Il y a 562 pages dans ce dossier.

Dossier n°7 : tome 4 des Annales (début), théorie du Soleil

1 grosse chemise avec des petites à l'intérieur.
Soleil. Chap XIV. Sect I. Calcul de l'expression des perturbations exercées par Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, 5 p. + 10 feuilles volantes de calcul.
• Cahier n°1
Par Mercure, 8 p. + 8 p. de brouillon.
• Cahier n°2
Par Vénus, 64 p. + 12 p. de feuilles intermédiaires de calcul.
• Cahier n°3
Par Mars, 60 p. + 6 p. de feuilles volantes.
• Cahier n°4
Par Jupiter, 37 p. + 8 p. de feuilles volantes.
• Cahier n°5
Par Saturne, 15 p.
• Cahier n°6
Par Uranus, 9 p.
• Cahier n°7
Par Neptune, 1 p.
• Cahier n°8
Positions du Soleil 1836−1857, 32 p. non de la main de Le Verrier.
• Cahier n°9
Lieux du Soleil calculés à l'aide des tables de Le Verrier, 137 p., rectos, non de la main de Le Verrier.

Il y a en tout 412 pages dans ce dossier.

Dossier n°7A : tome 4 (suite), théorie du Soleil

Les feuilles de ce dossier sont le plus souvent remplies recto et verso.
• Cahier n°1
Calcul des lieux du Soleil, 173 p., calcul de l'ascension droite du soleil, 80 p., recto verso ; ascensions droites du soleil à Greenwich, 98 p.
• Cahier n°2
Lieux du Soleil pour 1801, 28 p.
• Cahier n°3
Calculs, 50 p., recto verso.
• Cahier n°4
Lieu du Soleil de 1810 à 1821, 156 p., recto verso.
• Cahier n°5
14 p. pour le lieu du Soleil
• Cahier n°6
Lieux du Soleil, 58 p.
• Cahier n°7
Ascensions droites, 15 p., pas de la main de Le Verrier.
• Cahier n°8
Calcul des lieux du Soleil, 102 p., recto verso.

Ce dossier contient au total 760 pages

Dossier n°8 : tome 4 (suite), théorie du Soleil

Ce dossier contient 4 cahiers principaux ; chaque cahier contient plusieurs chemises. Les feuilles sont le plus souvent utilisées uniquement au recto.
• Cahier n°1
Soleil. Chapitre XIV. Sect IV. Équations de condition. Calculs.
Petit fascicule contenant 12 pages de calculs non de la main de Le Verrier. 2 pages de calculs de collimation par Le Verrier.
Petit fascicule avec des calculs des coefficients des équations de condition de Bradley, 7 p. ; les calculs sont

de Le Verrier, mais pas le remplissage des tableaux.
Calculs de coefficients, 12 p.
Discussion des équations, fascicule de 34 p.
Fascicule de 24 p. pour la discussion des équations.
Feuillet de 8 p.
Fascicule de discussion des équations, 13 p.
Fascicule de 28 p. sur l'équation en ν' ; tout n'est pas de la main de Le Verrier
Fascicule de 12 p. sur des positions du Soleil.
• Cahier n°2
Chapitre XIV. Section V.
Fascicule de 20 p. de calculs divers.
Fascicule de perturbations lunaires, 6 pages avec une dizaine de bandes de calcul.
Fascicule La Terre par Mercure, 23 p. et 6 bandes de calcul.
La Terre par Mars, 21 p. et 50 bandes de papier donnant les valeurs numériques de certaines expressions trigonométriques pour un argument variant de 20 gr en 20 gr.
3 pages de tables du Soleil.
La Terre par Jupiter, 10 p.
La Terre par Saturne, 21 p.
Distance de la Terre, 1 p. et 4 bandes.
Rayon de la Terre, 2 p. et 50 bandes de papier.
Perturbations du rayon par Mars, 6 p. et 22 bandes de papier.
Perturbations du rayon par Jupiter, 5 p. et 15 bandes.
Perturbations du rayon par Saturne, 2 p. et 4 bandes.
Perturbations de la latitude par Vénus, 3 p. et 12 bandes.
Perturbations de la latitude par Jupiter, 2 p. et 5 bandes.
• Cahier n° 3
Tables éphémérides, 18 p.
• Cahier n° 4
Notes. Tables du Soleil, 69 p..

Dans ce dossier en tout 366 pages et 180 bandes

Dossier n°8A : tome 4 (suite), théorie du Soleil

Ce dossier contient un grand nombre de chemises, consacrées pour la plupart à des éphémérides. Ces éphémérides sont contenues dans des tableaux non écrits de la main de Le Verrier, mais supervisées par un $\mathcal{S}$ (Serret ?) ou un $\mathcal{L}$ (Leveau ?) et quelque fois par Le Verrier lui-même (∞).
• Cahier n° 1
Chapitre XIV. Sect VI. Calculs. Tables éphémérides, 126 p ; les calculs un peu théoriques sont de la main de Le Verrier ; par contre les tableaux sont remplis par une main différente, mais sur presque chaque page il y a *Vu* ou *Vérifié* et le paraphe de Le Verrier.
• Cahier n° 3
Tables éphémérides provisoires, 42 p. de tableaux non de la main de Le Verrier. Quelques commentaires de lui.
Tables éphémérides du Soleil, 54 p. ; les tableaux ne sont pas de Le Verrier ; ils ont été vérifiés par un $\mathcal{S}$ et approuvés in fine par Le Verrier.
• Cahier n° 2
Calcul de tables d'éphémérides. Perturbations produites par Vénus, 104 p. de tableaux ; quelques pages de Le Verrier, mais essentiellement une autre main et l'ensemble est supervisé par $\mathcal{S}$.
• Cahier n° 3
Chap XV. Sect V. Théorie du mouvement apparent du Soleil. Calcul des tables éphémérides, 98 p. supervisées par un $\mathcal{S}$ et un $\mathcal{L}$.
• Cahier n° 4
Perturbations produites par Mars, 26 p. non de Le Verrier, supervisées par $\mathcal{S}$.
• Cahier n° 5
Perturbations produites par Jupiter, non de la main de Le Verrier, supervisées par $\mathcal{S}$, 27 p.
• Cahier n° 6

Perturbations par Saturne, 22 p., supervisées par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{L}$.
• Cahier n° 7
Calcul des perturbations de la longitude, 84 p. revues par $\mathcal{S}$.
Perturbations de la longitude, 26 p., non de Le Verrier.
Perturbations de la longitude, 14 p., non de Le Verrier.
Perturbations de la longitude, 6 p., non de Le Verrier.
Perturbations de la latitude, 40 p., non de Le Verrier.
Perturbations de la différence à la Terre, 12 p.

Il y a 681 pages dans ce dossier

Dossier n°9, tome 4 des Annales (suite), théorie du Soleil

Deux grosses chemises.
• Cahier n°1
Copie pour l'impression du tome IV.
Table des matières, 7 p., 140 p. de texte, 37 p. de tables grand format, 12 p. de tables, 146 p. de tables non de la main de Le Verrier, 18 p. de tables non de la main de Le Verrier.
• Cahier n° 2
Théorie du Soleil, 45 p. normales, 6 feuilles de calcul dans tous les sens et 20 p. demi-format, peu remplies.

Il y a 422 pages dans ce dossier

Dossier n°10, tome 4 des Annales (suite et fin), théorie du Soleil

Deux grosses chemises ; presque tout est de la main de Le Verrier.
• Cahier n° 1
Chapitre XIV. Addition I, II, II et errata.
Addition I, texte imprimé, 25 p.
Addition II, texte imprimé, 20 p.
Addition II, texte imprimé, 140 p. recto verso de la main de Le Verrier.
Addition II, texte imprimé, 52 p.
Addition II, texte imprimé, 22 p.
Addition III, texte imprimé, 44 p.
Chapitre XIV. Errata, 2 p.
• Cahier n° 2 (chemise intermédiaire)
Documents relatifs aux équations de condition.
Équations finales, 44 p.
Fascicule de 7 pages.
Formation des équations de condition, 28 p.
Équations de condition, discussion, 121 p. de la main de Le Verrier.
• Cahier n° 3
Observations du Soleil par Bradley, 54 p.
Compléments des observations de Bradley, 14 p.
Réduction des observations, 84 p, recto.
Observations du Soleil, 156 p., recto verso.
Observations de la pendule de Greenwich, 44 p., non de la main de Le Verrier.
Observations de Greenwich, 42 p., de Le Verrier.
Observations du Soleil à Paris, 103 p.
3 p. de formules par Le Verrier.
Observations de Piazzi, 10 p.
Observations de Bessel, 12 p.
Feuilles de calcul, 12 p.

Il y a 1019 pages dans ce dossier.

Dossier n°11, tome 5 des Annales (début), théorie de Mercure

Deux chemises : une pour conserver les bandes de papier et l'autre pour les perturbations de Mercure.
• Cahier n° 1
1200 (environ) bandes de papier avec des opérations, des valeurs numériques pour des expressions trigonométriques ou algébriques ....
• Cahier n° 2
Perturbations de l'orbite de Mercure.
Mercure par Vénus, 60 p.
Mercure par la Terre, 31 p.
Mercure par Mars, 10 p.
Mercure par Jupiter, 28 p.
Mercure par Saturne, 13 p.
Mercure par Uranus, 4 p.
Mercure par Neptune, 1 p.
Mercure, carré de masse, 4 p.
Mercure, perturbations, 2 p.
Résumé des perturbations, 7 p.

Il y a 180 pages normales et environ 1200 bandes de papier.

Dossier n°11A, tome 5 des Annales (suite), théorie de Mercure

Consacré à Mercure.
• Cahier n °1
Perturbations du rayon vecteur par Vénus, 12 p., table d'une autre main. 20 bandes ; perturbations du rayon par la Terre, 6 p. et 10 bandes ; perturbations du rayon par Jupiter, 4 p. et 10 bandes.
Perturbation de la longitude de Mercure, 25 p. et 60 bandes de papier.
Table de la longitude de Mercure, non de Le Verrier, 25 p. Calcul de l'équation du centre, 18 p.
Tables provisoires, 5 p.
Tables nouvelles.
Mémoire sur la présentation des tables, 20 p. ; 19 feuilles A3 repliées en 4 et remplies recto verso avec des corrections.
Corrections de la longitude de Mercure, 50 p.
Fascicule pour la construction des tables, 50 p.
Tables, 17 p.
Mouvements de la longitude moyenne, 35 p.
Calculs relatifs aux perturbations, 6 p.
12 p. doubles, grand format, pour les éléments elliptiques de Mercure.
9 p. doubles, grand format, pour la latitude.
11 p. doubles, grand format, pour le rayon vecteur.
15 p. de calculs divers.
Tables auxiliaires, 40 p.
Résumé de la réduction des observations, 12 p.

Ce dossier contient 482 p. et 70 bandes

Dossier n°12, tome 5 des Annales (suite et fin), théorie de Mercure

Trois grosses chemises
• Cahier n° 1
Calcul des lieux de Mercure à l'aide des tables de Le Verrier. Lieux de 1855 à 1864 : 12p + 17 p.+ 22 p. + 23 p. + 12 p. + 25 p. + 18 p. + 28 p. + 23 p. + 15 p. Tous les calculs sont de Leveau.
• Cahier n° 2
Passages devant le Soleil, 73 p.
Passage de 1845, 30 p.
Passage de 1848, 6 p.
Une vingtaine de notes pour réunir les observations récentes du passage de Mercure.

Lieux du Soleil pour les passages de Mercure, 25 p.
Équations de condition, 19 p. et 8 pages de calculs brouillons.
Passage du 12 Novembre 1861. Une cinquantaine de lettres venant de tous les horizons pour décrire des observations ou bien pour demander qu'on leur télégraphie l'heure exacte au moment du passage. Imprimé de son compte rendu dans l'Académie des sciences.
Passage de 1868, 8 pages de calcul et une vingtaine de lettres de correspondants décrivant leurs observations.
• Cahier n°3
Mercure, chapitre XV. Manuscrit du texte imprimé, 244 p. pour l'impression et 10 pages non destinées à l'impression.

Il y a environ 674 pages dans ce dossier

Dossier n°13, tome 6 des Annales (début), théorie de Vénus

Deux grosses chemises.
• Cahier n°1
Table sommaire des publications de Le Verrier, par Gaillot.
Théorie analytique du mouvement de Vénus.
Texte imprimé, 218 p. plus quelques épreuves imprimées.
• Cahier n°2
Théorie de Vénus, texte non imprimé, séparé en de multiples fascicules.
Passages devant le Soleil, 24 p.
Tables de Vénus, 34 p.
Perturbations de Vénus, 38 p. + 15 bandes étroites.
Positions héliocentriques, 40 p.
Équations de condition, 50 p. + 8 p. de brouillon.
Équations de condition en latitude, 2 p.
Positions calculées, 12 p., non par Le Verrier.
Positions calculées, 58 p., non par Le Verrier.
Perturbations de Vénus par la Terre, 58 p.
Perturbations par Mars, 26 p.
Perturbations par Jupiter, 15 p.
Perturbations par Saturne, 9 p.
Perturbations par Uranus, 5 p.
Perturbations par Neptune, 2 p.
8 pages de calculs supplémentaires.
Positions du Soleil aux dates des observations, 38 p.
Lieux de Vénus, 18 p., non de Le Verrier.
Lieux de Vénus, 16 p., non de Le Verrier.
Lieux de Vénus, 20 p., non de Le Verrier.
Lieux de Vénus, 15 p., par Leveau.
Lieux de Vénus, 15 p., par Leveau.
Lieux de Vénus, 19 p., par Leveau.

Ce dossier contient 740 pages et 15 bandes

Dossier n°14, tome 6 des Annales (suite), théorie de Mars

Consacré à Mars. Deux grosses chemises.
• Cahier n°1
Théorie du mouvement de Mars. Texte imprimé.
Fascicule de 107 p..
Fascicule de 66 p.
Tables, 152 p.
• Cahier n°2
10 petites bandes, 57 pages pour les équations de condition.
Notes diverses, 17 p.

Perturbations. Calcul des coefficients, 131 p.
Perturbations, 18 p.
Perturbations, 20 p.
Lieux de Mars, 16 p. par Leveau.
Lieux de Mars, 15 p. par Leveau.
Positions par Leveau, 18 p.
Positions par Leveau, 13 p.

Ce dossier contient 697 pages

Dossier n°14A, tome 6 des Annales (suite et fin), théorie de Mars

Ce dossier contient 2 chemises. Les calculs et les tables sont de la main de Leveau, partiellement vérifiés par Serret.
• Cahier n°1
8 p. de tables de perturbations recopiées sous une forme plus commode pour l'impression par Leveau.
3 p. de corrections définitives par Le Verrier.
4 p. de tables provisoires.
6 p. de tables non de la main de Le Verrier.
40 p. d'équations de condition par Leveau et vérifiées par Serret.
6 p. de longitude de Mars par Gaillot et 10 bandes.
Perturbations de la longitude de Mars par la Terre, 12 p. et 20 bandes par Leveau.
Perturbations de la longitude de Mars par Jupiter, 11 p. et 20 bandes par Leveau
Perturbations de la longitude de Mars par Saturne, 4 p. et 10 bandes par Leveau
Termes périodiques, 5 p. et 12 bandes par Leveau
Latitude. Réduction à l'écliptique par Leveau, 8 p.
Perturbations de la latitude par Leveau, 6 p. et 20 bandes.
Perturbations du rayon vecteur par Leveau 13 p.
Perturbations du rayon vecteur par Leveau, 45 p. et 80 bandes.
Observations de Mars à Cayenne, Paris..., 27 p. par Le Verrier
• Cahier n°2
Longitude du soleil de 1755 à 1830 par Leveau, 13 p.
Lieux de Mars par Leveau (1751-1830), 93 p.
Lieux de Mars (1836-1858) par Leveau, 61 p.
Observations de Paris par Leveau, 10 p.

Ce dossier contient 385 pages et 160 bandes

Dossier n°15, tome 10 des Annales, action mutuelle de Jupiter et de Saturne

Il y un grand mélange de calculs, de formules théoriques, de versos utilisés pour corriger un calcul. Il y a sûrement beaucoup de travail pour remettre les documents dans un ordre logique.
Jupiter et Saturne
Coefficients de Laplace et dérivées : 12 p. de formules et 23 p. de valeurs par Le Verrier.
Coefficients de R, 36 p. par Le Verrier.
Saturne et Jupiter, 23 p.
Jupiter par Saturne, 6 p. et 12 bandes.
Tome X, chap XVIII, sect VI, 44 p.
Sect VII, 11 p. + 7 p.
Sect VIII, 2 p.
Sect IX, 17 p. + 96 p.
Sect XII, 37 p.
Chap XVIII. Add I. Comparaison des développements de R par l'analytique et l'interpolation "Il y a accord", 112 p.
Add III. Calculs, 64 p.
Add IV. Calculs, 20 p.
Table des matières du tome X, 10 p.
Add III. Calculs essentiellement de Le Verrier, quelques tables de Leveau (?), 198 p.

Perturbations périodiques, par Leveau, 28 p.
Sect VII. Suite, 96 p. par Le Verrier.
Excentricité, 26 p. par Le Verrier.
Manuscrit du texte imprimé avec les additions I à IV, Jupiter et Saturne, 130 p.
Variations séculaires du périhélie, 18 p.

Il y a 958 p. dans ce dossier et 12 bandes

Dossier n°16, tome 11 des Annales (début), théorie de Jupiter

Chap XIX. Sect I à Sect VI. Inégalités séculaires de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Beaucoup de calculs de Le Verrier, mais aussi des calculs très corrigés, supervisés par Le Verrier, 144 p.
Inégalités de Jupiter, par Le Verrier, 27 p.
Manuscrit du texte imprimé. Chap XIX, Sect I à V. Inégalités séculaires de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, 117 p. de la main de Le Verrier avec quelques corrections au crayon bleu.
Variations séculaires de la longitude moyenne de l'époque, 59 p., de Le Verrier.
Réduction des éléments à la forme tabulaire, 8 p.
Correctifs aux formules de Jupiter à l'encre rouge, 13 p. par Le Verrier.
Substitutions des inégalités séculaires dans les termes périodiques par Le Verrier, 7 p.
Jupiter et Uranus par ? supervisé de près par Le Verrier, 7 p.
Idem avec Jupiter et Neptune, 7 p.
Jupiter, 2ème ordre, calculs de la main de Le Verrier, 25 p.
Chap XX. Sect I à Sect VII. Additions I à IV, manuscrit du texte imprimé par Le Verrier, 204 p.

Ce dossier contient 638 pages

Dossier n° 17 : tome 11 des Annales (suite), théorie de Saturne

Chap XXI, Sect I, par Le Verrier, 2 p.
Sect II et Sect III, par Le Verrier, 103 p.
Saturne, termes du second ordre par rapport aux masses, par Le Verrier, 22 p.
Développement de dérivées, par Le Verrier, 29 p.
Formation des termes du second ordre, par Le Verrier, 132 p.
Calcul des coefficients pour Saturne, 78 p.
Coefficients divers, par Le Verrier, 28 p.
Saturne par Neptune, par Le Verrier, 28 p.
Chap XXI texte imprimé, par Le Verrier, 261 p.
Saturne. Additions, texte imprimé, mais non publié, Le Verrier ayant donné à la place une application de la méthode d'interpolation, 74 p.
Addition au chapitre XXI. Table des matières, 2 p.
Addition au chapitre XXI. Application de la méthode d'interpolation par Le Verrier, 144 p.
Errata, 5 p.

Ce dossier contient 865 pages

Dossier n°17A : tome 11 des Annales (suite), théorie de Saturne

Addition au chapitre XXI.
Calcul des valeurs particulières des dérivées, 362 p. d'une belle écriture. Aucun paraphe.
4 p. pour le calcul de la fonction perturbatrice par interpolation, de la main de Le Verrier
Double interpolation et intégration, 41 pages, par moitié de Le Verrier et du premier scribe. Il y a de nombreux paraphes de Le Verrier et des corrections de lui ; il écrit à un moment "Entrée d'un fâcheux" pour signaler une colonne de calcul entièrement fausse.
Chap 21 Addition, 48 p., le plus souvent de la main précédente, mais beaucoup de remarques de Le Verrier.
Double interpolation et intégration, 88 p. de calculs par JB (Joseph Bossert ?), confirmé souvent par Serret ? Le Verrier est très présent par son paraphe ou par ses instructions.
Idem avec beaucoup de paraphes de Le Verrier, 57 p.

Interpolation, avec beaucoup de paraphes de Le Verrier, 28 p.
Appendice par JB (?) mais avec beaucoup de contrôles de Le Verrier, 84 p.

Ce dossier contient 708 pages

Dossier n°18 : tome 11 des Annales (suite et fin), méthode d'interpolation

Dossier beaucoup moins épais que les autres. Une seule chemise, consacrée à Saturne.
Calcul des dérivées avec les valeurs rigoureuses de v, v', r, r'. Calculs d'interpolation non de la main de Le Verrier, très peu paraphés, mais avec beaucoup de corrections, 236 p.

Ce dossier contient 236 pages.

Dossier n°19 : tome 12 des Annales (début), tables de Jupiter

Tables de Jupiter fondées sur la comparaison de la théorie avec les observations. Texte imprimé, 30 p. de tables, le reste est de Le Verrier ; il y a en tout 127 p. dans cette chemise.
Manuscrit des tables, non de Le Verrier, 182 p.
Calculs de Jupiter pour le Nautical, non de Le Verrier, 44 p.
Calculs de Jupiter pour le Nautical de 1879, commencés le 9 février, finis le 2 Mars, 39 p.
Longitude, tables non de Le Verrier, 11 p.
Longitude moyenne, inégalités à longue période, 19 p.
Inégalités à longue période de l'excentricité, 4 p.
Chap XXII, Sect V Vérification des coefficients C_0, S... "par moi", 12 p.
Perturbations de la longitude moyenne, 71 p (les tables, 30 p, ne sont pas de Le Verrier)
Perturbations de l'excentricité, non de Le Verrier, 71 p.
Tables de la longitude du périhélie, non de Le Verrier, 45 p.

Ce dossier contient 625 pages

Dossier n°19 A : tome 12 des Annales (suite), tables de Jupiter

Dossier beaucoup plus mince.
Tables du demi-grand axe, non de Le Verrier, 52 p. et 20 bandes.
Latitude, non de Le Verrier, 8 p.
Latitude, inégalités périodiques, 16 p et 8 bandes.
Longitude, réduction à l'écliptique 3 p, non de Le Verrier.
Longitude héliocentrique, 3 p non de Le Verrier.
Table rectificatrice, non de Le Verrier, 5 p.
Section V. Notes et calculs, non de Le Verrier, 100 p.
Chap XXI .Tables et errata par Le Verrier, 14 p.

Ce chapitre contient 185 pages et 28 bandes

Dossier n°20 : tome 12 des Annales (suite), tables de Jupiter

Lieux héliocentriques de Jupiter de 1750 à 1830, non de Le Verrier, 200 p.
Positions héliocentriques de Jupiter de 1836 à 1867, non de Le Verrier, 108 p.
Équations de condition, par Le Verrier, 23 p.
Section IV. Notes et calculs, par Le Verrier, 78 p.
Tables de la latitude, non de Le Verrier, 23 p.
Latitude, calculs, de la main de Le Verrier, 102 p.

Ce dossier contient 504 p

Dosssier n°21 : tome 12 des Annales (suite) , tables du mouvement de Saturne

Tables de Saturne. Manuscrit complet correspondant au texte imprimé, 414 p, dont 28 feuilles imprimées (et corrigées par Le Verrier) et 60 p de calcul par Le Verrier ; le reste est d'une autre main.
Calcul des coefficients, déduits de l'analyse seule, 78 p, de Le Verrier.

Équations de condition, 76 p, à moitié de Le Verrier.
Équations du centre, par Le Verrier, 40 p.
Résolution des équations de condition, 58 p, par Le Verrier.
Corrections des équations, par Le Verrier, 28 p.

Ce dossier contient 694 pages

Dossier n° 21A : tome 12 des Annales (suite), calcul des lieux de Saturne

Les chemises qui contiennent les éléments sont en très mauvais état ; les feuilles de calcul (pré imprimées) sont en assez bon état ; les autres sont un peu rongées.
Calcul des lieux de Saturne 1751-1769, 268 p, non de Le Verrier ; il est utilisé des feuilles pré imprimées.
Lieux de Saturne 1836-1851, tables, non de Le Verrier, 108 p.
Lieux de Saturne 1852-1869, tables, non de Le Verrier, 138 p.
Équations de condition, non de Le Verrier, 40 p.
Résumé par Le Verrier, 16 p.
Tables approchées de corrections, 60 p dont 20 de Le Verrier.
Perturbations de Saturne, non de Le Verrier, 107 p.

Ce dossier contient 637 pages

Dossier n°22 : tome 12 des Annales (suite), tables de Saturne

Arguments L, ϖ, et θ, non de Le Verrier, 31 p.
Arguments des termes séculaires, non de Le Verrier, 21 p.
Arguments angulaires, non de Le Verrier, 8 p.
Inégalités de longue période, non de Le Verrier, 67 p.
Vérifications de la table des perturbations, non de Le Verrier, 41 p.
Perturbations périodiques par Jupiter, de Joseph Bossert (?), 104 p.
Calculs, non de Le Verrier, 108 p.
Calculs de la longitude du périhélie, non de Le Verrier, 36 p.
Perturbations périodiques de Jupiter, non de Le Verrier, 23 p.
Calculs de perturbations, non de Le Verrier, 17 p.
Calculs de δE, non de Le Verrier, 18 p.
Calculs $\delta\alpha$, non de Le Verrier, 8 p.
Calculs de perturbation, non de Le Verrier, 61 p.

Ce dossier contient 543 pages

Dossier n° 22A : tome 12 des Annales (suite et fin), tables de Saturne

Tables provisoires de Saturne, non de Le Verrier, 177 p.
Tables auxiliaires, non de Le Verrier, 3 p.
Tables préparatoires pour l'impression, mais elles n'ont pas subi la dernière correction et n'ont pas été imprimées, non de la main de Le Verrier, 150 p.
Formules, déduites de l'analyse seule, non de Le Verrier, 35 p.

Ce dossier contient 365 pages

Dossier n°23 : tome 13 des Annales, Uranus et Neptune

Table des matières par Le Verrier, 15 p.
Formules et termes du deuxième ordre, par Le Verrier, 62 p.
Chapitre 24, Sect I, par Le Verrier, 47 p.
Chapitre 24, Sect II, par Le Verrier, 4 p.
Actions mutuelles d'Uranus et de Neptune, par Le Verrier, 64 p.
Addition I et II, texte manuscrit par Le Verrier, 23 p.
Chapitre XXV Sect II, à moitié par Le Verrier, 65 p.
Chapitr XXV, Sect III, par Le Verrier, 35 p.

Chao XXV, Sect IV, par Le Verrier, 25 p.
Chap XXVII, Théorie d'Uranus, texte manuscrit de Le Verrier, 18 p.
Action de Jupiter, texte manuscrit, par Le Verrier, 92 p.
Chap XXVI Sect I, par Le Verrier, 28 p.
Chap XXVI Sect II, par Le Verrier, 82 p.
Chap XXVI Sect III, par Le Verrier, 30 p.
Chap XXVI Sect IV, par Le Verrier, 32 p.

Ce dossier contient 654 pages

Dossier n°24 : tome 14 des Annales (début), calculs et documents divers

Table des matières, 2 p, par Le Verrier
Table du mouvement d'Uranus, à moitié de Le Verrier, 302 p.
Développement de la longitude moyenne aux 3/4 par Le Verrier, 80 p.
Chap XXVIII. Sect 1, 128 p, de Le Verrier.
cahp XXVIII. Sect 2 4 p, de Le Verrier.
Chap XXVIII. Sect 3, de Le Verrier, 6 p.
chap XXVIII. Sect 4, 1/3 de Le Verrier, 183 p.

Ce dossier comporte 723 pages

Dossier n°24 A : tome 14 des Annales (suite), Uranus

Feuilles A3 pliées en deux, 314 p, non de la main de Le Verrier.

Ce dossier comporte 314 pages

Dossier n°25 : tome 14 des Annales (suite), calculs et documents divers pour Uranus

Aucun document n'est de la main de Le Verrier.
Calculs auxiliaires pour Uranus, non de Le Verrier, 38 p.
Longitude moyenne d'Uranus, non de Le Verrier, 45 p.
Perturbations de la longitude d'Uranus, 55 p.
Perturbations de ϖ, 30 p.
Lieux d'Uranus, 35 p.
Perturbations de la longitude Uranus, non de Le Verrier, 130 p.
Tables diverses, 55 p.
Réduction à l'écliptique, 36 p.
Inégalités à longue période, 60 p.
Calculs auxiliaires, 44 p.
Calculs et développements définitifs non de Le Verrier, mais paraphés par Le Verrier, 112 p.
Termes complémentaires, 28 p.
Uranus, perturbations de ϖ, 6 p.
Tables provisoires d'Uranus, 136 p.

Ce dossier contient 820 pages

Dossier n°25A : tome 14 des Annales (suite), théorie d'Uranus

Aucun document n'est de la main de Le Verrier.
Tables diverses d'Uranus, 37 p.
Perturbations d'Uranus par Neptune, 40 p.
Tables définitives, 45 p.
Tables provisoires, 291 p.

Ce dossier contient 413 pages

Dossier n°26 : tome 14 des Annales (suite), théorie de Neptune

Chapitre XIX. Neptune
Tables du mouvement de Neptune, partiellement par Le Verrier, 104 p.
6 p d'épreuves imprimées, corrigées par Le Verrier
Inégalités diverses, partiellement de Le Verrier, 109 p.
Calcul de AR et déclinaison, 61 p.
Chap XXIX, sect I, 39 p.
Chap XXIX, sect IV, 224 p.

Ce dossier contient 643 pages

Dossier n°26A : tome 14 des Annales (suite et fin), théorie de Neptune

Chap XXVII. Sect I, sect III, par Le Verrier, 51 p.
Théorie de Neptune, par Le Verrier, 29 p.
Sect IV, 11 p, non de Le Verrier.
Sect IX, 60 p.
Tables de Neptune, 104 p, non de Le Verrier.
Neptune, termes séculaires, 68 p.
XXIX, sect 2 par Le Verrier (en partie), 29 p.
XXIX, sect 5. Calculs, 234 p.

Ce dossier contient 596 pages

Dossier n°27 : découverte de Neptune

7 cahiers, 1300 p, par Le Verrier. Le contenu de ce de dossier est très détaillé p. 498. Il contient le manuscrit de "*Recherche sur le mouvement de la planète Herschel*".

Ce dossier contient environ 1300 pages

Dossier n° 28 : premiers travaux de Le Verrier relatifs à la théorie de Mercure

Commence à la page 2184 mais il y a beaucoup de lacunes dans la numérotation. Les documents sont rangés dans des chemises. Presque toutes les pages sont de la main de Le Verrier.

Perturbations, 217 p.
Tables du mouvement de Mercure daté du 23 octobre 1843 à l'intention de Damoiseau, Mathieu et Liouville, 46 p.
Mémoire inséré dans la connaissance des temps pour 1848 et le journal de Liouville de 1843, 139 p.
Tables de Mercure, datées du 9 juin 1845, mention de Liouville, Damoiseau, Laugier ; explications de Le Verrier sur le contenu des tables, 30 p.
Nouvelles déterminations de l'orbite de Mercure et de ses perturbations, daté du 15 mai 1843, à Arago, Liouville, Damoiseau, 58 p, non de la main de Le Verrier.
Réduction des observations de Mercure par Le Verrier, 76 p.
Tables de Mercure par Le Verrier, 168 p ; ce sont des grandes feuilles sur lesquelles sont collées des petites feuilles.
Lieux du Soleil par Le Verrier, 68 p.
Éphémérides pour 1844, 144 p.
Éphémérides pour 1844 (mise au propre du précédent), 38 p avec des coefficients numériques pour former les équations de condition en cas de décalage pour l'ascension droite et la déclinaison.

Ce dossier contient 994 pages

Dossier n°29 : comètes et petites planètes

5 cahiers consacrés à des comètes

Comètes, perturbations, 50 p.
Comète de 1585, 15 p.

1ère comète de 1843, 27 p.
Comète de 1770, 57 p + 42 p + 48 p + 10 p + 33 p + 40 p + 30 p.
Comète de Vico, 264 p

Ce dossier contient 606 pages

Dossier n°29A : petites planètes

Cérès, Vesta, perturbations par les autres planètes, 188 p.

Ce dossier contient 188 pages

Dossier n°29 B : comète de Faye, petites planètes

Comète de Faye.
Éléments à diverses époques, 10 p.
Perturbation de la comète de Faye par Jupiter, 84 p.
Perturbations par la Terre, Mars, Jupiter et Saturne, 156 p.
Calculs pour μ=1/4, 70 p.
Calculs pour μ=0, 93 p.
Calculs pour μ=-1/4, 34 p.
Calculs pour μ=-7/8, 24 p.
Calculs pour μ=-3/4, 11 p.
Calculs pour μ=-1, 21 p.
Tables diverses, 96 p.
Retour sur la comète de Faye, 20 p, rapport pour l'Académie.
Perturbations en 1792, 7 p.
Perturbations de Jupiter, 8 p.
Équations de condition, 61 p.
Comète Colla, 15 p.
Calcul de Mr Laugier et Mauvais, 8 p.
Petites planètes
Perturbations de Cérès, Pallas, Junon et Vesta par les planètes, 40 p.
Flore 6 p.

Ce dossier contient 764 pages

Dossier n°30 : mémoires divers

Les divers documents sont organisés par chemises.

Masse des 4 planètes inférieures déduite de la théorie des mouvements, mémoire sur la précession des équinoxes, 26 p.
Comptes rendus du 30 mai dernier sur la durée du passage du Soleil au méridien qui n'est pas la même pour tous les astronomes, 5 p.
Sur les masses des planètes et la parallaxe du Soleil, 12 p.
Sur les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus, mouvement de ces orbites, 12 p en mauvais état.
Discussion d'anciennes observations de Mercure, extraites par Mr Édouard Biot de la collection des 25 historiens de la Chine, par U.J Le Verrier, 8 p.
2ème version du même sujet, 15 p.
Brouillon de la deuxième version, 18 p.
Calcul des lieux de Mercure et du Soleil aux dates des observations de Mercure par les Chinois (∼600), 30 p.
Petite note de Biot au sujet des observations chinoises 1 p.
Sur les erreurs personnelles relatives aux observations du Soleil. Réponse à une note de Mr Mauvais ("ne paraît pas avoir été présenté à l'Académie voir CR XXVII p 38"), 6 p.
Remarques sur la nouvelle édition de la *Mécanique céleste* de Laplace, 10 p.
Différentes remarques : au sujet de l'observation du Soleil ? chaque question étant associée à une lettre

A, B, C... Rapport entre ces questions ? 5 p.
Discussions académiques de 1868, notes diverses, 20 p.
Quelques feuilles contenant des remarques sûrement très méchantes de Le Verrier, à peine lisibles ; il semble qu'il y ait des menaces "ces messieurs ne perdront rien pour avoir attendu" ; "quelles misères quand on a rien de sérieux" ..., 10 p.
Texte imprimé des passages de Vénus, par M Airy, 25 p.
Imprimé de Fizeau (1874) sur les programmes d'opérations photographiques lors du passage de Vénus, 6 p.
Lettre de Duruy nommant Struve membre de la commission chargée d'organiser les observations du passage de Vénus en décembre 1874, 5 p.
Rapport imprimé du passage de Vénus de 1874 par le Bureau des Longitudes, 20 p.
Notes imprimées de Villarceau pour le passage de Vénus, 15 p.
Passage de Vénus, mémoire manuscrit de Wolf et André, 43 p.
Observations diverses sur les étoile filantes ; sur le nombre d'étoiles visibles, 20 p.
Nébuleuse de Hind par Le Verrier, 4 p.
Quelques lettres d'auteurs variés pour mentionner des observations de Mercure, 20 p.
Planètes intra-mercurielles, travaux postérieurs à ceux de Le Verrier ; lettres pour annoncer la découverte (par Watson entre autres), d'une planète majeure pendant une éclipse, article du journal anglais Nature, 15 p.
Dossier Lescarbault, lettres, articles de journaux, lettres du ministre pour la décoration, journal des connaissances médicales (!) qui parle de l'événement, 30 p environ.
Lettres au sujet de Vulcain, 30 p.
Lettres sur des observations d'une éclipse annonçant si on aperçoit ou non Vulcain, 30 p environ.
Très nombreuses lettres (120 environ) pour mentionner des observations solaires afin de savoir s'il existe une planète intra-mercurielle.
Planètes intra-mercurielles, diverses notes discutant de l'existence de Vulcain et de la crédibilité des observations ; tables de la planète ; ordre pour le service d'observations, 88 p.
5 p de Le Verrier lui-même pour analyser les observations et présenter les observations à venir, c'est le manuscrit de la note présentée à l'Académie des sciences.

Ce dossier contient 683 pages

Dossier n°31 : cours à la Sorbonne

Les documents sont classés dans des cahiers séparés.

Cours d'astronomie et de maths, 54 p.
Notes relatives aux cours d'astronomie, 140 p.
La Lune, 90 p.
Planètes, 12 p.
Masses, orbites, 30 p.
Équations, 48 p.
Le Soleil, 49 p.
La Terre, 12 p.
Action de l'éther sur le mouvement des planètes, 5 p.
Réfraction, 18 p.
Inégalités séculaires, 30 p.
Termes développés par rapport aux masses, 13 p.
Renseignements pour l'ordre des calculs, 58 p.
Soleil et planètes, 22 p.
Feuilles dépareillées, 23 p.
Correspondances, 5 lettres

Ce dossier contient 552 pages

Dossier n°32 : Index général des documents consultés par Le Verrier

Ce dossier donne la liste des livres, notes, cours... consultés par Le Verrier pour faire ses calculs. Ils sont de sa main, ce qui montre une fois de plus l'ordre et la précision qui règnent pour effectuer ses calculs.

Aberration, 1 p.
Analyse, 20 p.
Astronomie sphérique, 4 p.
Atmosphère, 1 p.
Bolides, 1 p.
Comètes, 26 p.
Éclipses du Soleil, 34 p.
Étoiles, 14 p.
Histoire, 26 p.
Instruments, 17 p.
Mécanique, 15 p.
La Lune, 42 p.
Mers, marées, 3 p.
Nébuleuses, 3 p.
Mouvement elliptique, 15 p.
Nutation, précession, 5 p.
Perturbation planétaire, 10 p.
Physique, 10 p.
Planètes, 15 p.
Satellites de Jupiter, 8 p.
Mars, 1 p.
Mercure, 5 p.
Neptune, 1 p.
Pallas, 1 p.
Saturne, 12 p.
Terre, 1 p.
Vénus, 12 p.
Vesta, 1 p.
Réfraction, 3 p.
Séries trigonométriques, 14 p.
Soleil, 28 p.
Terre, 24 p.
Trigonométrie, 2 p.
Divers, 37 p.

Ce dossier contient 639 pages

Par ailleurs, il existe quelques dossiers isolés contenant des documents relatifs à Le Verrier.

Dossier Ms 1027

Notes sur Le Verrier, Laplace et d'autres astronomes par V. Advielle

Dossier Ms 1036

Lettres de Le Verrier à Charles Jourdain, secrétaire général du Ministère de l'Instruction publique.

Dossier Ms 1037

Lettres de Le Verrier relatives à l'Observatoire de Montsouris.

Dossier Ms 1047

Descriptif de l'exposition 'Le Verrier et son temps'.

Dossier Ms 1072

Donation Magne : 33 lettres adressées à Le Verrier par Airy, Struve, Herschel...

Dossier Ms 1099

Lettre de Le Verrier à Hyppolyte Fizeau.

Dossier Ms 1112

Copies manuscrites de lettres échangées entre Le Verrier et son élève Émile Gautier.

Dossier Ms 1125

42 lettres écrites à M. Jourdan (correspondant au ministère).

Dossier Ms 1153

Dossier contenant 39 lettres écrites par des correspondants, pas toujours identifiés.

Dossier Ms 1165

Lettre de Le Verrier à l'abbé Moigno.

Dossier Ms 1167

Dossier consacré au docteur Lescarbault et à la recherche de Vulcain.

Dosier Ms 1187

Quelques documents autographes de Le Verrier.

Dossier Ms 1195

Lettre de Le Verrier à Mr Salvandy, ministre de l'Instruction publique, datée du 18 février 1847

Dossier F14/86

21 carnets d'observation de Le Verrier.

Résumé des contenus des dossiers Le Verrier
Voici, page suivante, un résumé du contenu des dossiers 1 à 32. On met surtout en évidence le nombre de pages écrites par Le Verrier. On a noté aussi le nombre de bandes de papiers comportant des calculs auxiliaires, par exemple des tables de multiplications, ou des données numériques. On a noté aussi le nombre de pages imprimées, ainsi que celles qui sont sans rapport avec le sujet.
Les valeurs inscrites dans le tableau sont bien sûr approximatives, les différents cahiers n'étant pas paginés. Et une page donnée peut contenir deux écritures différents, comme celles de Le Verrier et de Gautier dans le dossier n° 27. On rappelle que les premiers dossiers contiennent les brouillons des publications dans les premières Annales de l'Observatoire Impérial de Paris.

Nombre de pages par catégorie dans les dossiers Le Verrier déposés à la bibliothèque

Dossier n°	Tome annales	Sujet principal	écrit par Le Verrier	non écrit par Le Verrier	Bandes	Imprimés	Brouillon	Sans rapport
1	1	Recherches Astro	530	2	0	12	4	6
2	1	Recherches astro	420	118	0	0	6	10
3	2	Recherches astro	485	145	0	40	8	10
4	2	Recherches astro	541	0	42	0	4	2
5	2	Recherches astro	932	0	40	0	6	2
6	3	Recherches astro	257	203	4	96	4	2
7	4	Théorie du Soleil	207	169	12	0	32	4
7A	4	Théorie du Soleil	735	15	0	0	8	2
8	4	Théorie du Soleil	325	33	180	0	6	2
8A	4	Théorie du Soleil	44	635	0	0	2	0
9	4	Théorie du Soleil	248	164	0	0	8	2
10	4	Théorie du Soleil	969	44	0	0	6	0
11	5	Théorie de Mercure	180	0	1200	0	2	0
11A	5	Théorie de Mercure	441	31	70	0	6	4
12	5	Théorie de Mercure	390	264	0	0	18	0
13	6	Théorie de Vénus	554	174	15	0	12	0
14	6	Théorie de Mars	627	62	0	0	6	2
14A	6	Théorie de Mars	30	353	60	0	2	0
15	10	Jupiter et Saturne	792	128	12	0	24	20
16	11	Théorie de Jupiter	602	20	0	0	10	6
17	11	Théorie de Saturne	828	0	0	0	25	12
17A	11	Théorie de Saturne	88	614	0	0	6	0
18	11	Théorie de Saturne	0	236	0	0	0	0
19	12	Tables de Jupiter	111	475	0	0	25	14
19A	12	Tables de Jupiter	14	163	28	0	6	2
20	12	Tables de Jupiter	203	257	0	0	14	20
21	12	Tables de Saturne	292	360	0	28	4	10
21A	12	Tables de Saturne	36	595	0	0	0	6
22	12	Lieux de Saturne	0	513	0	0	30	0
22A	12	Lieux de Saturne	0	365	0	0	0	0
23	13	Théories d'Uranus et de Neptune	654	0	0	0	0	0
24	14	Tables d'Uranus	278	339	0	0	6	0
24A	14	Théorie d'Uranus	0	314	0	0	0	0
25	14	Théorie d'Uranus	0	798	0	0	16	6
25A	14	Théorie d'Uranus	0	403	0	0	10	0
26	14	Théorie de Neptune	369	258	0	0	12	4
26A	14	Théorie de Neptune	310	266	0	0	20	0
27	†	Découverte de Neptune	1250	0	0	0	40	10
28	‡	Premiers travaux sur Mercure	954	0	0	0	28	12
29	3	Comètes	590	0	0	0	16	0
29A	-	Petites planètes	180	0	0	0	8	0
29B	-	Comète de Faye, petites planètes	730	0	0	0	30	4
30	-	Mémoires divers, Vulcain	340	330	100	0	10	3
31	-	Cours à la Sorbonne	552	0	0	0	0	0
32	-	Documents consultés par Le Verrier	634	5	0	0	0	0
42		Total	17 722	8851	1763	176	449	177

† Publié dans Recherche sur les mouvements de la planète Herschel. Aide apportée par Émile Gautier.

‡ Publié dans le Journal de Liouville de 1843.

Annexe H

TABLES DIVERSES

H.1 Liste des encadrés

Liste et emplacement des encadrés		
n°	Titre	page
1	Problème inverse	4
2	Fonctionnement simplifié de INPOP	15
3	Tables de Bouvard	35
4	Longitude et latitude géocentriques, ascension droite, déclinaison	76
5	Perturbations planétaires	77
6	Fonction perturbatrice	78
7	Résumé du calcul de la fonction perturbatrice	89
8	Équations de correction pour les tables de Bouvard	126
9	Réduction des observations	132-135
10	Équations de condition	137
11	Justification du formulaire géocentrique	140
12	Loi de Titius-Bode	168
13	Méthode des moindres carrés	211
14	Observations normales	239
15	Observable	281
16	Paramètres imposés par INPOP	282
17	Algorithme de Metropolis-Hastings	309
18	Échantillonnage de Gibbs	318

H.2 Liste des notations

L'ordre est le suivant : lettres grecques minuscules, lettres grecques majuscules, lettres latines minuscules, lettres latines majuscules.
Voir § 3.1.2 le principe adopté pour la notation retenue pour une lettre utilisée par Le Verrier avec des significations différentes.

Notations utilisées	
α	Rapport des demi-grands axes d'Uranus et de Neptune ; selon les besoins $\alpha = \frac{a_{Ura}}{a_{Nep}}$ ou $\alpha = \frac{a_{Nep}}{a_{Ura}}$. On a donc $\alpha > 1$ dans le premier cas et $\alpha < 1$ dans le deuxième
$\dot{\alpha}$	Ascension droite
$\bar{\alpha}$	Pas utilisé pour la division du cercle en 16 parties égales : $\bar{\alpha} = \frac{360}{16} = 22°30'$
$\tilde{\alpha}$	Rapport des rayons vecteurs de Uranus et de Neptune : $\tilde{\alpha} = \frac{r}{r'}$
α_g, β_g	Coefficients intervenant dans l'incertitude sur la longitude géocentrique δG $\delta G = \alpha_g \delta v - \beta_g \delta r$
α_d, β_d m_d, n_d, c_d	Coefficients intervenant dans la correction instrumentale (voir encadré 9, p. 132)
γ	Accroissement du rapport des demi-grands axes pendant l'interpolation finale (chap. 6) $\alpha = 0.51 + 0.02\gamma$
$\tilde{\gamma}$	Rapport n'/n des moyens mouvements de la planète inconnue et d'Uranus
ε	Longitude moyenne de l'époque d'une planète i.e. ici longitude moyenne au 1er janvier 1800
ζ	Anomalie moyenne d'une planète.
η	Nombre aléatoire compris entre 0 et 1 (algorithme Metropolis-Hastings)
μ	Désigne la somme $GM_{Sun} + Gm$ où G est la constante d'attraction universelle et m la masse de la planète.
θ	Longitude du nœud ascendant d'une planète
ϖ	Longitude du périhélie d'une planète
λ	Latitude héliocentrique
ϕ	Inclinaison d'une orbite planétaire sur le plan de référence
ρ	L'équivalent du nt du mouvement képlérien non perturbé dans un mouvement képlérien perturbé (chap. 3)
σ	Constante d'intégration intervenant quand on intègre ρ (chap. 3)
ρ_e	Réduction de la longitude à l'écliptique
ρ_L	Fonction utilisée par Lyttleton pour déterminer la longitude de l'époque de la planète qui trouble Uranus (chap. 9)

ψ	Variable utilisée par Le Verrier dans les équations de Lagrange ; ψ est définie par $\psi = \arcsin e$ (chap. 3)
ψ_e	Auxiliaire utilisé pour le passage des coordonnées géocentriques aux coordonnées équatoriales (chap. 4)
Δ'	Distance entre Uranus et la planète perturbatrice
Δ_1	Longueur de la projection de la distance Uranus-Terre sur l'écliptique
Θ	Longitude de la Terre
Φ	Inclinaison mutuelle de deux orbites planétaires
Π	Longitude du périhélie d'Uranus par rapport au nœud ascendant de l'orbite d'Uranus sur Saturne
Π'	Longitude du périhélie de Saturne par rapport au nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur Uranus
Σ	Valeur approchée de la somme des carrés des 33 équations de condition (fig. 6.9), une fois mises sous forme quadratique, dans l'approximation finale (chap. 6)
a	Demi-grand axe de l'orbite d'une planète
b	Latitude géocentrique
e	Excentricité de l'orbite d'une planète
$h,\ l$	Définis par $h = e \sin \varpi$ et $l = e \cos \varpi$
ℓ'_{46}	Longitude héliocentrique vraie de Neptune au 6/10/46 (date de l'opposition d'Uranus)
ℓ'_{47}	Longitude héliocentrique vraie de Neptune au 1/1/47
$k_{us},\ k_{uj}$	Constantes intervenant dans le calcul des fonctions perturbatrices (chap. 3)
m	Masse d'une planète
n	Moyen mouvement orbital annuel d'une planète
$p,\ q$	Définis par $p = \tan \phi \sin \theta$ et $q = \tan \phi \cos \theta$ (à l'époque de Le Verrier)
r	Sera appelé selon l'usage (y compris par Le Verrier et Airy) rayon vecteur : désignera la distance entre le Soleil et la planète ; en fait, comme son nom l'indique, le rayon vecteur est un vecteur ; r est donc le module de ce rayon vecteur.
r_1	Longueur de la projection du rayon vecteur d'une planète sur l'écliptique
v	Longitude héliocentrique d'une planète
v_1	Longitude héliocentrique d'une planète réduite à l'écliptique
w	Anomalie vraie d'une planète
$A^i_j,\ B^i_j,\ C^i_j$ $D^i_j,\ E^i_j,\ F^i_j$	Coefficients du développement de la fonction perturbatrice (chap. 3)

A', H', L'	Coefficients intervenant dans la perturbation de la longitude vraie exercée par une planète extérieure sur Uranus (chap. 5)
C	Calcul d'une quantité observable, comme la longitude ou la latitude à partir d'éphémérides. S'utilise dans l'expression $O - C$
C_e	Équation du centre, i.e. différence entre la longitude vraie et la longitude moyenne.
C_t	Somme des carrés des 33 premiers membres du système ($TAB.$ 6.2), une fois mis sous forme quadratique (chap. 6)
$\mathcal{C}$	Accroissement de la longitude de l'époque dans l'approximation finale $\varepsilon = 252 + 18\,\mathcal{C}$ (chap. 6)
C_i, D_i, E_i	Coefficients intervenant dans l'expression théorique de δr (explicités dans la *Mécanique céleste*)
F_i, G_i, H_i	Coefficients intervenant dans l'expression théorique de δv (explicités dans la *Mécanique céleste*)
D	Déclinaison d'un astre
G	Longitude géocentrique d'un astre
H_g, K_g, M_g, N_g	Coefficients intervenant dans l'expression de la correction de la longitude géocentrique G d'Uranus quand on corrige ses éléments orbitaux
$M^{(i)}$, $N^{(i)}$ $P^{(i)}$	Coefficients intervenant dans les équations de condition héliocentriques pendant la recherche d'une planète perturbatrice
O	Observation d'une ou de plusieurs longitudes (ou latitudes). S'utilise dans l'expression $O - C$
O_{LV}	(279) Observations historiques retenues par Le Verrier
R	Fonction perturbatrice exercée par une planète sur une autre
$R_{u,s}$	Fonction perturbatrice exercée par Saturne sur Uranus
R_T	Distance de la Terre au Soleil
$P_h(t)$, $Q_h(t)$, $R_h(t)$, $S_h(t)$	Coefficients des corrections des éléments elliptiques (δe, δn, $\delta\varepsilon$, $e\delta\varpi$) dans l'expression de la correction δv de la longitude vraie à l'instant t
P, Q, R, S	Variables utilisées par Le Verrier dans son système de 18 équations (4.16). Elles représentent les corrections à apporter dans les erreurs d'observation aux dates suivantes 1715, 1747, 1775 et 1815 respectivement
P_g, Q_g R_g, S_g	Coefficients intervenant dans l'expression de l'erreur de la longitude et de la latitude géocentriques en fonction de $\delta\mathring{\alpha}$ et δD
P', Q'	Erreurs d'observation en 1715 et 1747 (Identique à (P, Q))
(TAB 6.2)	Système formé de 33 équations de condition dans l'approximation finale
(fig. 6.8)	Système de 6 équations formé à partir de (TAB. 6.2) en appliquant une variante des moindres carrés. Les équations obtenues sont qualifiées d'auxiliaires

(fig. 6.9)	Système des 33 équations (TAB 6.2), mises sous forme quadratique
T	Période de révolution d'une planète
$\mathcal{T}$	Transformation utilisée par Brown pour simplifier la recherche de la planète qui perturbe Uranus (chap. 9)

H.3 Biographies succinctes

Brèves notices biographiques sur les personnes mentionnées dans la thèse			
Adams	John Couch	1819−1892	Mathématicien et astronome anglais. Il entreprit à partir de 1843 une recherche mathématique pour localiser la planète qui troublait Uranus. Il est l'inventeur d'une méthode d'intégration numérique, méthode utilisée par INPOP (voir encadré 2, p. 15).
Airy	George Bidell	1801−1892	Mathématicien, physicien et astronome anglais. Il dirigea l'Observatoire de Cambridge jusqu'en 1835, puis il prit la direction de l'Observatoire de Greenwich jusqu'à sa retraite en 1881. Il a développé une théorie de l'arc-en-ciel.
Aoust	Xavier Barthélémy	1814−1885	Professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Marseille. Ancien élève de Le Verrier au Collège de France et auteur d'une biographie de Le Verrier [Aoust, 1878].
Arago	François	1786−1853	Il fut directeur des observations à l'Observatoire de Paris de 1834 jusqu'à sa mort, survenue en 1853. Il devint secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences à partir de 1835 ; il y avait été élu en 1809, à l'âge de seulement 23 ans. Il orienta la recherche astronomique vers l'astronomie physique. Auteur d'une *Astronomie populaire* [Arago, 1854].
Babinet	Jacques	1794−1872	Mathématicien, physicien et astronome français. Il épouse la sœur d'Ernest Laugier et il fait donc partie du clan Arago. Il est surtout connu pour ses ouvrages de vulgarisation scientifique et pour sa critique des travaux de Le Verrier pour Neptune (voir § 13.3).
Bertrand	Joseph	1822−1900	Mathématicien, économiste et historien des sciences français. Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences à partir de 1874. Il a donné un critère de convergence pour les séries.
Bessel	Fiedrich Willem	1784−1846	Mathématicien et astronome allemand. Il est connu pour les fonctions qui portent son nom ; il a mesuré en 1838 la première parallaxe stellaire, celle de l'étoile 61 Cygni, à l'aide d'un héliomètre (voir cependant note 2.5).
Binet	Jacques Philippe Marie	1786−1856	Mathématicien français connu, entre autres, pour ses travaux en cinématique. Professeur au Collège de France.

Biot	Jean-Baptiste	1774−1862	Biot présente les calculs de Le Verrier pour Neptune dans 5 articles publiés dans le *Journal des sçavants* et regroupés dans [Biot, 1847a]. Biot a soutenu Le Verrier au début de sa carrière et a été longtemps proche de lui. Le Verrier suppléera Biot au Collège de France à partir de 1843. Biot connaît parfaitement les techniques de calcul impliquées dans le travail de Le Verrier, puisqu'il a refait tous les calculs de la *Mécanique céleste* de Laplace, et il a publié les conclusions de son analyse dans le traité [Biot, 1801].
Bode	Johann Elert	1747−1826	Astronome allemand, qui dirigea l'Observatoire de Berlin de 1786 à 1825. Il étudia des représentations artistiques des constellations. Il a popularisé une formule donnant les distances moyennes des planètes au Soleil, formule découverte par le mathématicien Titius et connue maintenant sous le nom de 'loi de Titius-Bode' (voir encadré 12, p. 168).
Bouvard	Alexis	1767−1843	Initialement berger savoyard ; il montre à l'école des aptitudes remarquables pour le calcul. Monté à Paris, il est remarqué par Pierre-Simon Laplace et devient son assistant pour la rédaction de la *Mécanique céleste*.
Brown	Ernest William	1866−1936	Mathématicien et astronome anglais, qui a passé la majorité de sa carrière aux États Unis (il acquiert la nationalité américaine en 1923). Auteur d'une théorie de la Lune.
Challis	James	1803−1861	Professeur d'astronomie, de philosophie naturelle à Saint John's et directeur de l'Observatoire de Cambridge de 1836 jusqu'à sa mort. Il commença, à l'instigation d'Airy, une recherche visuelle de Neptune à l'Observatoire de Cambridge le 29 juillet 1846.
Choquet	Charles	1790−1880	Directeur de l'institut Mayer, où Le Verrier a préparé le concours de Polytechnique. Beau-père de Le Verrier. Auteur d'une thèse sur les variations séculaires des éléments des planètes [Choquet, 1842].
d'Arrest	Heinrich	1822−1875	Astronome allemand. Il a pris une part active à la découverte de Neptune à Berlin [Dreyer, 1882]. Il a dirigé l'Observatoire de Copenhague de 1857 jusqu'à sa mort.

Danjon	André	1890−1967	Astronome français. Inventeur de l'astrolabe impersonnel. Il devint directeur de l'Observatoire de Paris en 1945. Il écrivit deux articles à l'occasion du centenaire de la découverte de Neptune [Danjon, 1946a] et [Danjon, 1946b].
Delambre	Jean-Baptiste Joseph	1749−1822	Il participa à la mesure de la longueur du méridien terrestre entre Dunkerque et Barcelone de 1792 à 1793. Auteur d'une table d'Uranus, travail récompensé par l'Académie en 1790.
Delaunay	Charles	1816−1872	Astronome français. Sorti major de l'École Polytechnique en 1836. Après sa polémique avec Le Verrier en 1842 au sujet de la théorie d'Uranus, il s'orienta vers la théorie de la Lune, qui l'occupera toute sa vie. Il a dirigé l'Observatoire de Paris de 1870 jusqu'à sa mort, par noyade, en 1872.
Faye	Hervé	1814−1902	Astronome français. Membre de l'Académie des sciences et directeur du Bureau des Longitudes à partir de 1876. Il donna son nom à une des comètes de 1843.
Fixlmillner	Placidus	1721−1791	Prêtre bénédictin. Il fit de nombreuses observations de Mercure, que Lalande utilisa pour construire ses tables de Mercure. Auteur d'une des deux premières tables d'Uranus.
Flammarion	Camille	1842−1925	Astronome français. Élève astronome à l'Observatoire de Paris pendant 4 ans. Il fut congédié par Le Verrier après sa publication de *La pluralité des mondes habités* [Flammarion, 1862]. Il a écrit de nombreux ouvrages de vulgarisation. Il a fondé en 1883 l'Observatoire de Juvisy. Il a créé la Société astronomique de France en 1887.
Flamsteed	John	1646−1719	Il devint, en 1676, le premier astronome royal. Il passa l'essentiel de sa vie à établir un catalogue d'étoiles. Il fit une observation fortuite d'Uranus le 23 décembre 1690, observation fort utile à Le Verrier pour la recherche de Neptune.
Forbes	James David	1809−1868	Physicien écossais, membre de la Royal Astronomical Society. Il étudia la géologie et en particulier les volcans d'Auvergne.

Gaillot	Aimable	1834−1921	Aide astronome, puis astronome adjoint (1864), astronome titulaire (1874), et enfin sous-directeur (1897) de l'Observatoire de Paris. De 1873 à 1903 il est le chef du Bureau des Calculs. À partir de 1888, il a prolongé et amélioré les calculs de Le Verrier sur les grosses planètes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune). Il a rassemblé les manuscrits de Le Verrier à la mort de celui-ci ; ces manuscrits sont conservés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris.
Galle	Johann Gotfried	1812−1910	Astronome allemand, auteur d'une thèse sur les réductions des observations de Rømer. Le 23 septembre 1846, avec l'aide de Heinrich d'Arrest, il localise à l'Observatoire de Berlin, la planète Le Verrier près de la position indiquée par celui-ci. Il deviendra plus tard directeur de l'Observatoire de Breslau.
Gautier	Alfred	1793−1881	Oncle d'Émile Gautier. Après des études à Genève, puis à Paris, il devint le 3e directeur de l'Observatoire de Genève, de 1821 à 1839. Il dut cesser ses activités de directeur du fait de graves problèmes de vue.
Gautier	Émile	1822−1891	Élève de Le Verrier au Collège de France. Il se lie d'amitié avec lui pendant ses études ; il aide Le Verrier dans différents calculs : tables de Mercure, éphémérides de la comète de 1770 et surtout calcul en double pour la première partie de la recherche de Neptune. Il dirigea l'Observatoire de Genève de 1882 à 1889.
Gautier	Raoul	1854−1931	Fils d'Émile Gautier. Il dirigea l'Observatoire de Genève de 1889 à 1931.
Hansen	Peter Andreas	1795−1874	Astronome allemand. Il dirigea l'Observatoire de Seeberg pendant plus de 50 ans. Il se spécialisa en mécanique céleste et plus particulièrement en calcul des perturbations.
Herschel	John	1792−1871	Astronome anglais, fils de William Herschel. Auteur de nombreuses observations. Il cartographia le ciel austral de 1834 à 1838. Il fut directeur de la Royal Astronomical Society pendant 3 périodes de 2 ans.

Herschel	William	1738−1822	Compositeur, musicien et astronome amateur allemand. Il s'installa en Angleterre en 1756 et y construisit des télescopes avec des miroirs en bronze, de diamètres de plus en plus grands. Il découvrit Uranus le 13 mars 1781 (voir fig. B.7).
Hind	John Russell	1823−1895	Astronome anglais. Il découvrit 10 astéroïdes. Il dirigea l'Observatoire privé de George Bishop, à Londres.
Lagrange	Louis-Joseph	1736−1813	Astronome et mathématicien italien, naturalisé français. Il établit de nombreux résultats en mathématiques : il démontra par exemple que tout entier est somme de 4 carrés. Il inventa le calcul des variations. Il apporta une importante contribution au problème des 3 corps. Il établit les équations (dites de Lagrange) pour déterminer les perturbations planétaires.
Lalande	Jérôme Lefrançois de	1732−1807	Astronome français. En 1759, l'Académie royale des sciences lui confie la rédaction de la *Connaissance des Temps*. Il fonde chez lui une école d'astronomie. Professeur au Collège de France à partir de 1762. Il contribuera à la popularisation de l'astronomie par son *Astronomie* de 1764 [de la Lande, 1764].
Laplace	Pierre-Simon	1749−1827	Astronome français. Il réunit dans sa *Mécanique céleste* [Laplace, 1802] toutes les méthodes connues de la mécanique céleste. Cet ouvrage sera largement consulté par Le Verrier. Il donna aussi un scénario pour la formation du Système solaire dans *Exposition du système du Monde* [Laplace, 1799]. Il a inventé de nombreux outils mathématiques et a fait grandement progresser le calcul des probabilités.
Lassell	William	1799−1880	Lassell était un brasseur de profession, astronome amateur, basé à Liverpool. À l'instar de William Herschel, il fabriquait lui-même ses télescopes avec des miroirs en bronze. Il a découvert Triton à l'aide de son télescope de 60 cm de diamètre le 10/6/46 (voir fig. B.7).

Le Monnier	Pierre-Charles	1715−1799	Astronome et géodésien français. Il participe avec Maupertuis à l'expédition de Laponie. Il a fait de très nombreuses observations astronomiques. La bibliothèque de l'Observatoire de Paris conserve ses nombreux registres d'observations (voir fig. A.1).
Le Verrier	Lucile	1853−1831	Fille de Le Verrier. Elle commence à écrire un journal intime à l'âge de 13 ans. On y apprend des détails intéressants sur la famille Le Verrier, en particulier sur son père. Elle épouse l'architecte Lucien Magne en 1873.
Lexell	Anders Johan	1740−1784	Astronome et mathématicien suédo-finlandais. Il étudia principalement les comètes, en particulier celle qu'il découvrit en 1770, et son étude fut reprise en détail par Le Verrier en 1844.
Liais	Emmanuel	1826−1900	Il travaille à l'Observatoire de Paris jusqu'en 1858, puis il part pour le Brésil, où il deviendra directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro de 1874 à 1881.
Liouville	Joseph	1809−1882	Mathématicien français ; fondateur du "*Journal des mathématiques pures et appliquées*", dans lequel il fait connaître les travaux d'Évariste Galois.
Littlewood	John Edensor	1885−1977	Mathématicien anglais, qui a beaucoup travaillé sur l'hypothèse de Riemann.
Lowell	Percival	1855−1916	Lowell était un homme d'affaires américain, mathématicien et astronome, qui pensait avoir vu des canaux artificiels sur Mars. Il organisa une recherche intense pour la 9e planète du Système solaire. Il fonda dans ce but le Lowell observatory en Arizona et y initia la recherche qui devait conduire à la découverte de Pluton par Clyde Tombaugh, 14 ans après sa mort.
Lyttleton	Raymond	1911−1995	Mathématicien britannique, qui s'est intéressé à l'astronomie théorique. Il a proposé une méthode pour simplifier les calculs de Le Verrier (voir chap. 9, § 9.3.2).

Magne	Lucien	1849−1916	Architecte français. Il participa à l'achèvement du Sacré Cœur. En 1873, il a épousé Lucile, la fille de Le Verrier. Il s'est activé pour réunir une souscription pour l'édification de la statue de Le Verrier se trouvant dans la cour Nord de l'Observatoire de Paris. Il a aussi supervisé la construction du monument funéraire de Le Verrier au cimetière Montparnasse.
Mayer	Tobias	1723−1762	Mathématicien, cartographe et astronome allemand. Il fait paraître ses tables de la Lune, qui pouvaient permettre de déterminer la longitude en mer à moins de 1°. Lors de son étude de la libration de la Lune, il résout de manière originale un système d'équations redondant et approché.
Moigno	François Napoléon Marie	1804−1884	Jésuite et mathématicien français, connu sous le nom d'abbé Moigno. Il fonde plusieurs revues scientifiques de vulgarisation, dont *Cosmos* et *Les Mondes*. Il lancera une fronde contre Le Verrier fin 1846.
Pickering	William Henry	1858−1930	Astronome américain, découvreur du satellite Phoébé de Saturne. Il prit une part active à la recherche de la 9e planète.
Peirce	Benjamin	1809−1880	Professeur de mathématiques à Harvard. Il a déclaré que la découverte de Neptune à Berlin était un 'happy accident' ; la déclaration a été faite à l'occasion du meeting de l'AAAS le 16 mars 1847. Cette déclaration ne semble pas fondée (voir § 6.3).
Plantamour	Émile	1815−1882	Plantamour se forma successivement avec Arago, Encke, Bessel et Gauss avant de diriger l'Observatoire de Genève de 1839 à 1882.
Pontécoulant	Philippe-Gustave	1795−1874	Philippe-Gustave Doulcet, comte de Pontécoulant, astronome français, colonel d'artillerie, géomètre. À partir de 1829, il commença à écrire sa *'Théorie analytique du Système du Monde'* [Pontécoulant, 1829] en 4 volumes, en prenant soin de suivre les notations de Laplace ; cet ouvrage connut un grand succès.
Savary	Félix	1797−1841	Astronome et mathématicien français. Il fut le premier à déterminer une orbite de binaire visuelle, celle de ξ Grande Ourse.

Somerville	Mary	1780−1872	Écrivaine et scientifique. Elle traduisit et commenta la *Mécanique céleste* de Laplace sous le titre *Mechanisms of the Heavens* [Somerville, 1831].
Struve	Wilhem	1793−1864	Astronome russe d'origine germano-balte. Directeur de l'Observatoire de Dorpat, puis de l'Observatoire de Poulkovo à partir de sa création en 1839. Ses travaux concernent surtout les étoiles doubles. Son fils, Otto, lui succédera à la direction de l'Observatoire de Poulkovo à partir de 1862.
Sturm	Charles-François	1803−1855	Mathématicien genevois connu surtout pour sa théorie permettant de résoudre certaines équations différentielles, théorie connue maintenant sous le nom de Sturm-Liouville. Professeur à la Sorbonne.
Tisserand	Félix	1845−1896	Mathématicien et astronome français. Dans son ouvrage *'Traité de Mécanique céleste'* [Tisserand, 1880], il fait la synthèse des recherches en mécanique céleste effectuées depuis Laplace. Il prend la direction de l'Observatoire de Paris en 1892, à la mort de l'amiral Mouchez.
Tombaugh	Clyde	1906−1987	Astronome américain. Il fut engagé en 1929 par le Lowell observatory pour conduire une recherche photographique systématique de la 9e planète du Système solaire. Il découvre Pluton sur une plaque photographique datée du 18 février 1930.
Walker	Sears Cook	1805−1853	Initialement actuaire, puis astronome américain attaché à l'US Observatory. Il met en évidence en 1847 les observations fortuites de Neptune faites par Lalande les 8 et 10 mai 1795 et il utilise ces observations pour améliorer l'orbite de Neptune.

Bibliographie

[AR, 1891] A.R. « Émile Gautier ». *Nature, n° 1118, vol 43, p. 518–519* (1891) (cf. p. 60).

[Adam, 2007] G. Adam, L. Maison et B. Rutily. « Le quart de cerclce mural dit de "de Lalande" conservé à l'Observatoire de Lyon ». *Cahiers Clairaut n°120* (2007) (cf. p. 464).

[Adams, 1847] J. C. Adams. « An explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus. » *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 7, p. 149–152* (1847) (cf. p. 233, 266, 359-361, 363, 370).

[Adams, 1848] J. C. Adams. « Explication des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus ». *Nautical Almanac pour l'année 1851* (1848) (cf. p. 360).

[Adams, 1896] J. C. Adams. *The scientific papers of John Couch Adams*. William Grylls, 1896 (cf. p. 378, 390).

[Advielle, 1893] V. A. Advielle. « Notes sur l'astronome Le Verrier ». *Dossier Ms 1027, Observatoire de Paris* (1893) (cf. p. 54, 56).

[Airy, 1833] G. B. Airy. « Report on the progress of Astronomy during the present century ». *British Association for the Advancement of Science, 1832* (1833).

[Airy, 1834] G. B. Airy. *Gravitation : An elementary explanation of the principal perturbations in the solar sytem*. London, 1834.

[Airy, 1838] G. B. Airy. « Uranus radius vector ». *Astronomische Nachrichten, n°349 p. 218–219* (1838) (cf. p. 259, 262, 265, 273).

[Airy, 1846] G. B. Airy. « Account of some circumstances historically connected with the discovery of the Planet exterior to Uranus ». *MNRAS 7 p. 121–144* (1846) (cf. p. 7, 37, 38, 130, 170, 171, 180, 252, 254, 255, 257, 259, 378, 406, 412, 418).

[Airy, 1896] W. Airy. *Autobiography of Sir George Biddell Airy*. Cambridge University Press, 1896.

[Albouy, 2013] A. Albouy, Y. Kosmann-Schwarzbach et P. Iglesias-Zemmour. *Siméon-Denis POISSON*. Éditions de l'École Polytechnique, 2013.

[Alexander, 1965] A. F. Alexander. *The Planet Uranus*. Faber & Faber, 1965 (cf. p. 3, 5, 67, 240, 453).

[Andoyer, 1912] H. Andoyer et F. Tisserand. *Leçons de cosmographie*. Armand Colin, 1912.

[Aoust, 1878] X. Aoust. « Le Verrier, sa vie, ses travaux ». *Mémoires de l'Académie des sciences, Belles-Lettres et Arts de Marseille, 1877–1878, p. 164–209* (1878) (cf. p. 29, 42, 433, 435, 437, 534).

[Arago, 1846a] F. Arago. « Examen des remarques critiques et des questions de priorité que la découverte de M. Le Verrier a soulevées ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 23(16) p. 741–755* (1846) (cf. p. 38).

[Arago, 1846b] F. Arago. « Letter about the name of Neptune ». *Astronomische Nachrichten 25 p. 81* (1846).

[Arago, 1854] F. Arago. *Astronomie populaire*. Gide et J. Baudry, 1854 (cf. p. 444, 534).

[Aubin, 2003] D. Aubin. « The Fading Star of the Paris Observatory in the Nineteenth Century ». *Osiris 2003, 18 : p. 79–100* (2003) (cf. p. 440).

[Aubin, 2020] D. Aubin. *Femmes, vulgarisation et pratique des sciences au siècle des Lumières*. Brepols, 2020.

[Aubin, 2010] D. Aubin, C. Bigg et O. Sibum. *Observatories and Astronomy in Nineteenth-Century Science and Culture*. Duke university press, 2010.

[Babinet, 1848] J. Babinet. « Sur la position actuelle de la planète située au delà de Neptune, et provisoirement nommée Hypérion ». *CRAS, 17(8) : p. 202–208* (1848) (cf. p. 339, 424).

[Baghdady, 1980] M. Baghdady. *The discovery of Neptune : A critical Examination of the Theory of Le Verrier (Thèse)*. University of Aston, Birmingham, 1980 (cf. p. 5, 185, 204, 214, 246, 248, 254, 256, 340, 381).

[Baum, 1981] R. Baum. « Le Verrier and the lost planet ». *1982 Year Book of Astronomy p. 150–161* (1981).

[Baum, 1997] R. Baum et W. Sheehan. *In search of planet Vulcan.* Plenum Publishing, 1997 (cf. p. 3, 36, 409).

[Belhoste, 1985] B. Belhoste. *CAUCHY, un mathématicien légitimiste au XIXe siècle.* Belin, collection, un savant, une époque, 1985 (cf. p. 31).

[Berthier, 2021] J. Berthier, P. Descamps et F. Mignard. *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques.* EDP sciences, 2021 (cf. p. 12, 173, 316, 412, 419).

[Berthout, 1802] F. Berthout. *Histoire de la mesure du temps par les horloges.* Imprimerie de la République, 1802.

[Bertrand, 1846] J. Bertrand. « Sur les erreurs commises par un géomètre étranger ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 23(17), p. 827–832* (1846).

[Bertrand, 1879] J. Bertrand. « Éloge historique de Le Verrier ». *Annales de l'Observatoire de Paris, tome XV, 1880. Lu le 10 mars 1879 à la séance de l'Académie des sciences* (1879) (cf. p. 19, 416, 417, 438).

[Bessel, 1823] F. W. Bessel. « Untersuchung einer merckwürdigen Erscheinung, welche die Bewegung des Uranus gezeigt hat ». *Staatsbibliothek zu Berlin, Handschriftenabteilung, Ms. Germ quart. 2266* (1823) (cf. p. 170).

[Biot, 1847a] J. -B. Biot. « Précis de l'histoire de l'astronomie planétaire écrit à l'occasion de la découverte de M. Le Verrier ». *Paris, imprimerie royale* (1847) (cf. p. 15, 44-46, 170, 171, 188, 535).

[Biot, 1847b] J. -B. Biot. « Sur la planète nouvellement découverte par M. Le Verrier ». *Journal des savants 12 series 4, p. 18–36* (1847) (cf. p. 48, 120, 151, 162, 169, 184, 186, 247, 338, 413, 415).

[Biot, 1847c] J. -B. Biot. « Sur la planète nouvellement découverte par M. Le Verrier ». *Journal des savants 12 series 3, p. 64–85* (1847) (cf. p. 5, 39, 45, 47, 172, 185).

[Biot, 1858] J. -B. Biot. *Mélanges scientifiques et littéraires.* Michel Lévy, 1858.

[Biot, 1801] J. –B. Biot. *Analyse du traité de Mécanique Céleste de P. S. Laplace.* Duprat, 1801 (cf. p. 15, 120, 535).

[Bode, 1772] J. E. Bode. *Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels.* Berlin & Stettin, 1772 (cf. p. 168).

[Bode, 1801] J. E. Bode. *Uranographia sive astrorum descriptio viginti tabul oeneis incisa ex recentissimis et absolutissimis Astrononmorum observationibus.* Berolini, Berlin, 1801 (cf. p. 168).

[Boistel, 2010] G. Boistel. *Jérôme Lalande (1732–1807) : une trajectoire scientifique.* Presses universitaires de Rennes, 2010.

[Boistel, 2017] G. Boistel. *Profession : calculateur du Bureau des Longitudes et de la Connaissance des Temps (dans* Pour une histoire du Bureau des Longitudes*).* Éditions universitaires de Lorraine, 2017.

[Boquet, 1909] F. Boquet. *Les observations méridiennes. Théorie et pratique. Tomes I et II.* Doin et fils, 1909 (cf. p. 132, 135).

[Boucher, 2017] C. Boucher et P. Willis. *Les références de temps et d'espace.* Hermann, 2017.

[Bouvard, 1808] A. Bouvard. *Nouvelles Tables de Jupiter et de Saturne, calculées d'après la théorie de M. Laplace et suivant la division décimale de l'angle droit, par M. Bouvard.* Courcier, 1808 (cf. p. 35, 36).

[Bouvard, 1821a] A. Bouvard. « Extrait des Registres des observations astronomiques faites par Lemonnier, à l'Observatoire des Capucins, rue Saint Honoré, à Paris ». *Connaissance des temps pour 1821 p. 338–347* (1821) (cf. p. 14).

[Bouvard, 1821b] A. Bouvard. *Tables de Jupiter, Saturne et Uranus.* Bachelier, 1821 (cf. p. 3, 35, 36, 72, 76, 138, 156, 158, 159, 408, 452).

[Bouvard, 1837] E. Bouvard. « Lettre du 6 octobre 1837 ». *In* Account of some circumstances connected with the discovery of the planet exterior to Uranus *by Airy* (1837) (cf. p. 35, 72).

[Bouvart, 1950] Bouvart et Ratinet. *Nouvelles tables de logarithmes.* Hachette, 1950 (cf. p. 47).

[Brookes, 1969] C. J. Brookes. *The Discovery of Neptune - A critical Examination of the Theory of Adams.* University of London, Ph.D. thesis, 1969 (cf. p. 6, 246, 340, 351, 360, 377, 388).

[Brookes, 1970] C. J. Brookes. « On the prediction of Neptune ». *University of Aston in Bermingham, England* (1970) (cf. p. 340, 351, 360, 382, 396).

[Brookes, 1972] C. J. Brookes. « On a criterion for the prediction of Neptune ». *Mon. Not. R. astr. Soc (1972) 158 p. 79–83* (1972) (cf. p. 308).

[Brouwer, 1961] D. Brouwer et G. M. Clemence. *Methods of Celestial Mechanics.* Academic Press, New York, 1961 (cf. p. 411).

[Brown, 1930] E. W. Brown. « On the prediction of trans-neptunian planets from the perturbations of Uranus » (1930).

[Brown, 1931] E. W. Brown. « On a criterion for the prediction of an Unkown Planet ». *Mon. Nat. R. astr. Soc., 92, p. 80–101* (1931) (cf. p. 172, 301, 327, 334, 337, 339, 350, 370).

[Bulirsch, 1983] R. Bulirsch et J. Stoer. *Introduction to numerical analysis*. Springer, 1983 (cf. p. 16).

[Bureau des Longitudes, 1841] Bureau des Longitudes. *Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1844*. Bureau des Longitudes, 1841 (cf. p. 138).

[Bureau des Longitudes, 1845] Bureau des Longitudes. *Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1848*. Bureau des Longitudes, 1845 (cf. p. 52).

[Chabert, 1989] J.L. Chabert. « Gauss et la méthode des moindres carrés ». *Revue d'histoire des sciences 1989 42-1-2 pp. 5–26* (1989) (cf. p. 211).

[Challis, 1846a] J. Challis. « Account of observations made at the Cambridge observatory for detecting the planet exterior to Uranus ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 7, p. 145–149* (1846) (cf. p. 230, 234).

[Challis, 1846b] J. Challis. « Letter to François Arago ». *CRAS 23(15), p. 715–716* (1846).

[Challis, 1847] J. Challis. « Report of proceedings in the Cambridge Observatory relative to the New Planet (Neptune) ». *Philosophical Magazine, 30, p. 33–41* (1847).

[Chapman, 1988] A. Chapman. « Private Research and Public Duty : George Bidell Airy and the search for Neptune ». *Jnl. Hist. Astronomy 19 p. 121–138* (1988).

[Chapman, 1990] A. Chapman. *Dividing the circle*. Chichester : Horwood, 1990 (cf. p. 135, 461, 462, 464).

[Chapman, 1998] A. Chapman. *The Victorian Amateur Astronomer : Independent astronomical research in Britain (1820–1920)*. Chichester : Praxis-Wiley, 1998.

[Chapront-Touzé, 2008] M. Chapront-Touzé. « Aspect de l'œuvre et de la vie de Pierre-Charles Le Monnier, astronome et académicien, collègue de Grandjean de Fouchy ». *Revue d'histoire des sciences, 2008/1 p. 89–104* (2008).

[Choquet, 1842] C. Choquet. *Sur les variations séculaires des éléments des planètes (Thèse)*. Bachelier, 1842 (cf. p. 20, 535).

[Collins, 2010] H. M. Collins. *Tacit and explicit knowledge*. University of Chicago Press, 2010 (cf. p. 412).

[Danjon, 1946a] A. Danjon. *La découverte de Neptune*. Bull. Soc. Astr. de France 60 p. 255–278, 1946 (cf. p. 4, 15, 19, 37, 38, 152, 162, 163, 224, 393, 424, 433, 438, 536).

[Danjon, 1946b] A. Danjon. « Le centenaire de la découverte de Neptune ». *Ciel et Terre, 62, p. 369–383* (1946) (cf. p. 15, 229, 334, 458, 536).

[Danjon, 1959] A. Danjon. *Astronomie générale*. Sennac, 1959 (cf. p. 132, 133, 145).

[de Beaurepaire, 1890] E. de Beaurepaire. *Julien Travers, notice biographique et littéraire*. Henri Delesques, 1890 (cf. p. 436).

[de Candolle, 1892] M. C. de Candolle. « Le colonel Émile Gautier ». *Mémoire de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, 1892, tome XXXI* (1892) (cf. p. 5, 437).

[de la Lande, 1764] J. de la Lande. *Astronomie*. Desaint et Saillant, 1764 (cf. p. 538).

[de la Lande, 1801] J. de la Lande. *Histoire céleste Française*. Imprimerie de la République, 1801 (cf. p. 447).

[de la Lande, 1803] J. de la Lande. *Bibliographie astronomique, avec l'histoire de l'astronomie de 1781 à 1802*. Imprimerie de la République, 1803 (cf. p. 23).

[de Maupertuis, 1738] P. -L. M. de Maupertuis. *De la figure de la Terre, déterminée par les observations de messieurs de Maupertuis, Clairaut, Le Monnier, de l'Académie royale des sciences*. Imprimerie Royale, 1738.

[de Pater, 2015] I. de Pater et J. J. Lissauer. *Planetary Sciences*. Cambridge University Press, 2015.

[Debardat, 2011] S. Debardat, J. Lamy, J. de la Noé et C. Soubiran. *La (re)fondation des observatoires astronomiques sous la IIIe République*. Jérôme de la Noé & Caroline Soubiran, 2011.

[Débardat, 1984] S. Débardat, S. Grillot et J. Lévy. *Observatoire de Paris. Son histoire 1667–1963*. Éditions de l'Observatoire de Paris, 1984.

[Deias, 2020] D. Deias. *Inventer l'observatoire : sciences et politique au temps de Giovanni Domenico Cassini (1625–1712). Thèse de doctorat*. École des hautes études en sciences sociales, 2020.

[Delaunay, 1842a] C. Delaunay. « Calcul de deux perturbations d'Uranus qui sont de l'ordre du carré de la force perturbatrice ». *CRAS 14(10) p. 371–373* (1842) (cf. p. 388, 421).

[Delaunay, 1842b] C. Delaunay. « Note sur la théorie des perturbations d'Uranus ». *CRAS 14(11) p. 406* (1842) (cf. p. 421).

[Delaunay, 1842c] C. Delaunay. « Réponse aux observations de M. Le Verrier sur la théorie des perturbations d'Uranus ». *CRAS 14(16) p. 579–582* (1842) (cf. p. 422).

[Descamps, 2011] P. Descamps. « Pourquoi Neptune n'a-t-elle pas été découverte à Paris ? » *Lettre d'information de l'IMCCE, Décembre 2011* (2011) (cf. p. 446).

[Descamps, 2015] P. Descamps. « La découverte de Neptune : entre triomphe et camouflet ». *Revue d'histoire des sciences 2015/1 (Tome 68), pages 47–79* (2015).

[Dewhirst, 1985] D. Dewhirst. « The Greenwich-Cambridge Axis ». *Vistas, 20 p. 109–111* (1985).

[Dreyer, 1882] J. L. E Dreyer. *Historical Note Concerning the Discovery of Neptune*. Copernicus 2, p. 63–64, 1882 (cf. p. 49, 535).

[Dreyer, 1923] J. L. E Dreyer. *History of the Royal Astronomical Society 1820–1920*. London, 1923.

[Encke, 1846] Encke. « Lettre à Le Verrier ». *Dans Centenaire de la naissance de Le Verrier, Institut de France* (1846) (cf. p. 234).

[Faye, 1859] H. Faye. « Remarques de M. Faye à l'occasion de la lettre de M. Le Verrier ». *CRAS 49(11) p. 383–385* (1859).

[Fienga, 2019] A. Fienga, J. Laskar et al. « INPOP ». *false* (2019). URL : https://www.imcce.fr/inpop/ (cf. p. 4, 7, 12, 15, 195, 259, 281).

[Flammarion, 1862] C. Flammarion. *La pluralité des mondes habités*. Didier et Cie, 1862 (cf. p. 445, 536).

[Flammarion, 1881] C. Flammarion. *Astronomie populaire*. Marpon & Flammarion, 1881 (cf. p. 42).

[Flammarion, 1911] C. Flammarion. *Les mémoires d'un astronome*. Fe Éditions, 1911 (cf. p. 23, 62, 444, 445).

[Flamsteed, 1725] J. Flamsteed. *Historia Coelestis Britannica*. Margaret Flamsteed, 1725.

[Fleury, 1891] L. L. Fleury. « La découverte de Neptune ». *Société Nationale des Sciences Naturelles et Mathématiques, t. XXXV, p. 359–380* (1891) (cf. p. 339).

[Forbes, 1975] E. Forbes. *The Greenwich Observatory : Origin and Early Developments, 1675–1835*. London : Taylor & Francis, 1975.

[Forbes, 1847] J. D. Forbes. « Letter to Alicia Forbes ». *Cited in Craik 2007, 182 (Reference taken from the book by Sheehan p. 294)* (1847) (cf. p. 64, 446).

[Foster, 2014] N. Foster. « Some matters relating to the documentary evidence of the discovery of Neptune ». *Antiquarian Astronomer, 2014, Issue 8, p. 4–20* (2014) (cf. p. 362).

[Gaillot, 1878] M. A. Gaillot. « Le Verrier et son œuvre ». *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques tome 2, no 1 (1878), p. 29–40* (1878).

[Gaillot, 1888] M. A. Gaillot. « Théorie analytique des mouvements des planètes. Expression générale des perturbations qui sont du troisième ordre par rapport aux masses ». *Bulletin astronomique t. V. (Août 1888)* (1888).

[Gaillot, 1904] M. A. Gaillot. « Tables rectifiées du mouvement de Saturne ». *Annales de l'Observatoire de Paris, tome XXIV* (1904) (cf. p. 9, 419).

[Galle, 1845] J. G. Galle. *Olai Roemeri Triduum observationum astronomicarum a MDCCVI. diebus Oct. XX usque ad XXIII. institutarum (Thèse)*. Berolini : Typis Academicis, 1845 (cf. p. 222).

[Gapaillard, 2015] J. Gapaillard. « By How Much Did Le Verrier Err on the Position of Neptune ? » *Journal for the History of Astronomy 2015, Vol. 46(1) p. 48–65* (2015) (cf. p. 224).

[Gastineau, 2010] M. Gastineau et J. Laskar. « TRIP - a computer algebra system dedicated to celestial mechanics and perturbation series ». *https://www.issac-conference.org/2010/assets/SoftwareDemos/GastineauFinal.pdf* (2010) (cf. p. 11, 89).

[Gastineau, 2019] M. Gastineau et J. Laskar. TRIP *1.4.120*. TRIP Reference manual. Paris Observatory : IMCCE, 2019.

[Gauss, 1809] C. F. Gauss. *Theoria Motus Corporum Coelestium*. Perthes & Besser, 1809 (cf. p. 211).

[Gauss, 1857] C. F. Gauss. *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections*. Boston, 1857.

[Gautier, 1847] E. Gautier. *Essai sur la théorie des perturbations des comètes*. Imprimerie de Ferdinand Ramboz, 1847 (cf. p. 55).

[Gautier, 1845-1846] Émile Gautier. « Lettres à ses parents ». *Ces lettres ce trouvent à la bibliothèque de Genève, dans le fonds Gautier* (1845−1846) (cf. p. 51).

[Gayet, 2014] D Gayet. *L'invention du réel. Les dessous philosophiques de l'astronomie*. de Boeck, 2014.

[Glaisher, 1883] J. W. L. Glaisher. « James Challis ». *MNRAS, 43, p. 160−179* (1883).

[Gloden, 1946] A. Gloden. *Le centenaire de la découverte de Neptune par Le Verrier*. Worre-Mertens, 1946.

[Gould, 1850] B. A. Gould. *Report on the history of the discovery of Neptune*. Smithsonian Institution, 1850 (cf. p. 240).

[Grant, 1852] R. Grant. *History of physical astronomy*. London, 1852.

[Greenberg, 1995] J. L. Greenberg. *The problem of the Earth's shape from Newton to Clairaut*. Cambridge University Press, 1995.

[Grier, 2007] A. Grier. *When computers were human*. Princeton university press, 2007.

[Grosser, 1962] M. Grosser. *The Discovery of Neptune*. Harvard, 1962 (cf. p. 3, 5, 67, 240, 359, 367).

[Hairer, 2010] E. Hairer. *Solving ordinary differential equations*. Springer, 2010 (cf. p. 16).

[Hansen, 1838] P. A. Hansen. *Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam luna perlustrat*. Gothae, 1838 (cf. p. 25, 468).

[Harrison, 1994] H. M. Harrison. *Voyager in Time and Space, The life of John Couch Adams*. The book guild, 1994.

[Herschel, 1846] J. Herschel. « Letter on Le Verrier's planet ». *Athenaum, October 3, 1846, p. 1019* (1846) (cf. p. 382, 402).

[Herschel, 1848] J. Herschel. « Lettre de J. Herschel à Le Verrier du 22 septembre 1848 ». *Centenaire de la naissance de Le Verrier, Institut de France* (1848) (cf. p. 429, 430).

[Herschel, 1849] J. Herschel. *Outlines of Astronomy*. Lea & Blanchard, 1849 (cf. p. 172, 338).

[Howse, 1975] D. Howse. *Greenwich Observatory vol 3*. Taylor et Francis, 1975.

[Hubbell, 1992] J. Hubbell et R. Smith. « Neptune in America : Negotiating a discovery ». *Journal for the History of Astronomy, 30, 261−291* (1992) (cf. p. 240, 244, 245).

[Hutchings, 2008] R. Hutchings. *British University Observatories 1779−1939*. Aldershot, 2008.

[Institut de France, 1911] Institut de France. « Centenaire de U.J.J Le Verrier ». *Gauthier-Villars* (1911) (cf. p. 223, 415, 418, 432, 433, 438).

[Jackson, 1949] J. Jackson. « The discovery of Neptune : a defence of Challis ». *Month. Not. Astron. Soc. South Africa 55 p. 312* (1949).

[Jackson, 1955] J. Jackson. « The discoveries of Neptune and Pluto ». *The Observatory Vol 75 p 126−127* (1955).

[Jones, 1947] H. S. Jones. *John Couch Adams and the discovery of Neptune*. Cambridge University Press, 1947, 1947 (cf. p. 393).

[Kaplan, 1989] G. H. Kaplan et al. « Mean and apparent place computations in the new iau system. Apparent, topocentric, and astrometric places of planets and stars ». *The astronomical journal, volume 97, number 4 april 1989* (1989) (cf. p. 281).

[Kollestrom, 2005] N. Kollestrom. « The Neptune-Discovery Correspondance Archive ». *web-site disclosed* (2005).

[Kollestrom, 2006a] N. Kollestrom. « An Hiatus in History : The British Claim for Neptune's Co-Prediction ». *History of Science, 44, p. 3−28 & p. 349−371* (2006).

[Kollestrom, 2006b] N. Kollestrom. « Recovering the Neptune Files ». *Astronomy & Astrophysics, 44, p. 23−24* (2006).

[Kowalski, 1856] M. Kowalski. *Recherche sur le mouvement de Neptune*. Garnier Frères, 1856.

[Lagrange, 1778] J. L. Lagrange. *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des planètes (Œuvres Complètes Vol. VI, p. 635−709)*. Gauthier-Villars, 1778 (cf. p. 76, 79).

[Lagrange, 1781] J. L. Lagrange. *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, première partie (Œuvres Complètes Vol. V, p. 125−207)*. Gauthier-Villars, 1781 (cf. p. 27).

[Lagrange, 1782] J. L. Lagrange. *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, deuxième partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales (Œuvres Complètes Vol. V, p. 211−344)*. Gauthier-Villars, 1782.

[Lai, 1990] H. M. Lai, C. C. Lam et K. Young. « Perturbations of Uranus by Neptune : A modern perspective ». *Am. Journ. of Phys. 58, p. 946−953* (1990) (cf. p. 7, 252, 263, 264, 272, 337, 340, 355, 356).

[Lantier, 1977] M. Lantier, F. Lamotte et P. Levert. *Le Verrier*. Ocep, 1977 (cf. p. 19, 339, 440).

[Laplace, 1799] P. S. Laplace. *Exposition du système du Monde*. Imprimerie de Crapelet, 1799 (cf. p. 538).

[Laplace, 1802] P. S. Laplace. *Traité de Mécanique Céleste, t. I, II, III*. Duprat, 1802 (cf. p. 15, 25, 27, 76, 77, 79, 173, 274, 343, 354, 417, 468, 538).

[Laskar, 1992] J. Laskar. « La stabilité du système solaire ». *In Chaos et déterminisme, Éditions du Seuil p. 170−211* (1992) (cf. p. 27).

[Laskar, 2017] J. Laskar. « Des premiers travaux de Le Verrier à la découverte de Neptune ». *C. R. Physique 18 (2017) p. 504−519* (2017) (cf. p. 26, 27, 130, 409, 410, 417, 420, 421, 423, 424, 427).

[Laskar, 1988-2021] J. Laskar et M. Gastineau. « TRIP » (1988−2021). url : %5Curl%7Bhttps://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipes/asd/trip/doc/trip_fr.html%7D (cf. p. 11, 411, 476, 479).

[Lassell, 1846] W. Lassell. « Discovery of supposed ring and satellite of Neptune ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Academy vol 7 n° 9 p. 157* (1846) (cf. p. 240, 424).

[Lassell, 1847] W. Lassell. « Lassel's satellite of Neptune ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Academy vol 1 n° 8 p. 7* (1847).

[Laugier, 1846] P. A. E. Laugier. « Mémoire sur quelques comètes anciennes ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 22(4), p. 148−156* (1846).

[Le Guet-Tully, 2005] F. Le Guet-Tully et J. Davoigneau. « L'inventaire et le patrimoine de l'astronomie : l'exemple des cercles méridiens et de leurs abris ». *https ://doi.org/10.4000/insitu.9177* (2005) (cf. p. 461, 462).

[Le Lay, 2009] C. Le Lay. « Camille Flammarion et le Bureau des longitudes ». *hal-03212076* (2009).

[Le Lay, 2016] C. Le Lay. « Introduction à la théorie de la Lune de Delaunay » (2016). url : http://journals.openedition.org/bibnum/683 (cf. p. 411, 422, 424).

[Le Lay, 2018] C. Le Lay. « Joseph Liouville et le Bureau des longitudes : mettre le pied à l'étrier à de jeunes savants et contrôler les dérives hégémoniques ». *Cahiers François Viète, 2018, Actualité des recherches du Centre François Viète, III (4), pp.37−59* (2018).

[Le Lay, 2021a] C. Le Lay. « John Couch Adams, Charles-Eugène Delaunay et la théorie de la Lune ». *hal-03212465* (2021).

[Le Lay, 2021b] C. Le Lay. « L'Annuaire du Bureau des longitudes (1795−1932) ». *8, 2021, Collection du Bureau des longitudes* (2021).

[Le Monnier, 1741] P. C. Le Monnier. *Histoire céleste, ou recueil de toutes les observations astronomiques faites par ordre du Roy*. Briasson, 1741.

[Le Monnier, 1750-1764] P. C. Le Monnier. *Cahiers d'observations*. Observatoire de Paris, 1750−1764.

[Le Verrier, 1835] U. J. J. Le Verrier. « Mémoire sur les combinaisons du phosphore avec l'hydrogène ». *Annales de Chimie et de Physique 60 (1835) pp. 174–194* (1835) (cf. p. 19, 416).

[Le Verrier, 1837] U. J. J. Le Verrier. « Sur les combinaisons du phosphore avec l'oxygène ». *Annales de Chimie et de Physique 65 (1837) pp. 18–35.* (1837) (cf. p. 19, 416).

[Le Verrier, 1839a] U. J. J. Le Verrier. « Mémoire sur les variations séculaires des orbites, pour les 7 planètes principales : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus ». *Connaissance des Temps pour 1843, Additions, p. 3−66* (1839) (cf. p. 27, 115, 189, 417, 419).

[Le Verrier, 1839b] U. J. J. Le Verrier. « Sur le calcul des inégalités séculaires, tel qu'il a été donné par M. de Pontécoulant dans le 3e volume du Système analytique du Monde, p. 387 à 401 ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 9(18), 28 octobre 1839, p. 550* (1839) (cf. p. 420).

[Le Verrier, 1839c] U. J. J. Le Verrier. « Sur les mouvements des inclinaisons et des nœuds des orbites des trois planètes Jupiter, Saturne et Uranus ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 9(12), p. 476−477* (1839).

[Le Verrier, 1839d] U. J. J. Le Verrier. « Sur les variations séculaires des planètes ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 9(12), p. 370* (1839) (cf. p. 27, 419).

[Le Verrier, 1840a] U. J. J. Le Verrier. « Sur la détermination simultanée de toutes les inégalités périodiques des planètes lorsqu'on doit y comprendre des perturbations d'un ordre fort élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 11(24) : p. 967–977* (1840).

[Le Verrier, 1840b] U. J. J. Le Verrier. « Sur la détermination simultanée de toutes les inégalités périodiques des planètes, lorsqu'on doit y comprendre les perturbations d'un ordre élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 11(13), p. 699–701* (1840).

[Le Verrier, 1842a] U. J. J. Le Verrier. « Notes sur les inégalités introduites dans la longitude des planètes, par les variations à longue période de leurs éléments ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 14(13), p. 487–488* (1842) (cf. p. 422, 459).

[Le Verrier, 1842b] U. J. J. Le Verrier. « Seconde note sur les perturbations de la planète Uranus ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 14(18), p. 660–663* (1842).

[Le Verrier, 1843a] U. J. J. Le Verrier. « Mémoire sur la grande inégalité du moyen mouvement de Pallas ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 16(25) : p. 1435–1436* (1843) (cf. p. 27).

[Le Verrier, 1843b] U. J. J. Le Verrier. *Recherches sur l'orbite de Mercure et sur ses perturbations. Détermination de la masse de Vénus et du diamètre du Soleil.* Journal de mathématiques pures et appliquées 1ère série, 8 : p. 273–359, 1843 (cf. p. 27, 79, 88, 409, 416, 421).

[Le Verrier, 1843c] U. J. J. Le Verrier. « Sur la construction des tables astronomiques ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 17(17) p. 884–886* (1843) (cf. p. 158).

[Le Verrier, 1843d] U. J. J. Le Verrier. « Sur la forme qu'il conviendrait de donner aux éphémérides des planètes. Application à Mercure ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 17(15) p. 735–738* (1843).

[Le Verrier, 1844a] U. J. J. Le Verrier. « Notes sur les perturbations de plusieurs comètes ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 19(12), 16 septembre 1844, p. 559* (1844).

[Le Verrier, 1844b] U. J. J. Le Verrier. « Théorie de la comète périodique de 1770 ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 19(20), p. 982–994* (1844) (cf. p. 27, 65, 417).

[Le Verrier, 1845a] U. J. J. Le Verrier. « Premier mémoire sur la théorie d'Uranus ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 21(19) : p. 1050–1055* (1845) (cf. p. 53, 55, 72, 76, 120, 420).

[Le Verrier, 1845b] U. J. J. Le Verrier. *Théorie du mouvement de Mercure.* Bachelier, 1845.

[Le Verrier, 1846a] U. J. J. Le Verrier. « Recherches sur les mouvements d'Uranus ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 22(22) : p. 907–918* (1846) (cf. p. 3, 60, 362, 424, 428, 429).

[Le Verrier, 1846b] U. J. J. Le Verrier. *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel.* Bachelier (Paris), 1846 (cf. p. 46, 360).

[Le Verrier, 1846c] U. J. J. Le Verrier. « Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus. Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 23(9) : p. 428–438* (1846) (cf. p. 230).

[Le Verrier, 1847a] U. J. J. Le Verrier. « Note à l'occasion d'un mémoire de M. Le Verrier sur les comètes périodiques par M. Laugier et M. Mauvais. Réponse à la déclaration de M. Mauvais ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 25(26) : p. 945–953* (1847) (cf. p. 433).

[Le Verrier, 1847b] U. J. J. Le Verrier. « Projet d'organisation de l'Astronomie analytique ». *Centenaire de la naissance de Le Verrier, Institut de France, p 48* (1847).

[Le Verrier, 1848a] U. J. J. Le Verrier. « Mémoire sur la planète Neptune ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 27(14) : p. 325–332* (1848) (cf. p. 239, 369, 428, 430-432).

[Le Verrier, 1848b] U. J. J. Le Verrier. « Remarque de M. Le Verrier à l'occasion de la communication précédente ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 27(8) : p. 208–210* (1848) (cf. p. 426, 443).

[Le Verrier, 1848c] U. J. J. Le Verrier. « Sur la planète Neptune ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 27(11) : p. 273–279* (1848) (cf. p. 333, 339, 353, 398, 415, 426, 432).

[Le Verrier, 1855a] U. J. J. Le Verrier. *Annales de l'Observatoire impérial de Paris.* Mallet-Bachelier, 1855 (cf. p. 106, 141).

[Le Verrier, 1855b] U. J. J. Le Verrier. « Rapport sur l'Observatoire impérial de Paris et projet d'organisation ». *Annales de l'Observatoire impérial de Paris, tome I* (1855).

[Le Verrier, 1855c] U. J. J. Le Verrier. « Recherches astronomiques ». *Annales de l'Observatoire impérial de Paris de Paris, tome I, 1855* (1855) (cf. p. 66, 80, 88, 106, 187).

[Le Verrier, 1855d] U. J. J. Le Verrier. « Recherches astronomiques » (1855) (cf. p. 89).

[Le Verrier, 1857] U. J. J. Le Verrier. « Théorie de la comète périodique de 1770 ». *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris Tome III chap. 11 p. 205−270* (1857) (cf. p. 27).

[Le Verrier, 1858] U. J. J. Le Verrier. « Réductions des observations aux instruments méridiens de 1800 à 1829 ». *Annales de l'Observatoire impérial de Paris, observations, tome I* (1858).

[Le Verrier, 1859a] U. J. J. Le Verrier. « Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 49(11) : p. 379−383* (1859) (cf. p. 410).

[Le Verrier, 1859b] U. J. J. Le Verrier. « Théorie du mouvement de Mercure ». *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris Tome V chap. XV* (1859) (cf. p. 27, 409).

[Le Verrier, 1845-1870] U. J. J. Le Verrier. « Lettres à Émile Gautier ». *Ces lettres ce trouvent à la bibliothèque de Genève, dans le fonds Gautier* (1845−1870) (cf. p. 68).

[Le Verrier, 1845-1846] U. J. J. Le Verrier. « Manuscrits des calculs pour Neptune ». *Bibliothèque de l'Observatoire de Paris, ms 1063(27)* (1845−1846).

[Lecaplain, 1843] G. Lecaplain. *Sur la résistance de l'éther au mouvement des planètes (Thèse)*. Bachelier, 1843 (cf. p. 169, 470).

[Legendre, 1805] Legendre. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Firmin-Didot, Paris, 1805.

[Lequeux, 2008] J. Lequeux. *François Arago, savant généreux*. EDP, 2008.

[Lequeux, 2009] J. Lequeux. *Le Verrier, savant magnifique et détesté*. EDP, 2009 (cf. p. 5, 25, 35, 67, 240, 444, 445).

[Lequeux, 2010] J. Lequeux. « La découverte de Neptune par Le Verrier (1846) ». *FMSH, 692, p. 1−18* (2010) (cf. p. 19, 20, 22, 26, 49, 423, 446).

[Lexell, 1783] A. J. Lexell. « Recherches sur la nouvelle planète, découverte par M. Herschel & nominee Georgium Sidus ». *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 1, janvier 1783, p. 303–329*. (1783) (cf. p. 3, 36).

[Li, 2018] Z. Li. « Lunar theory in the footsteps of Charels-Eugène Delaunay ». *École polytechnique'* (2018).

[Liais, 1865] E. Liais. *Espace céleste et la nature tropicale*. Garnier Frères, 1865 (cf. p. 23, 171, 337, 339, 341, 444).

[Littlewood, 1953] J. E. Littlewood. *A Mathematician's Miscellany*. Methuen & Co Ltd London, 1953 (cf. p. 335, 340).

[Locher, 2007] F. Locher. « L'empire de l'astronome : Urbain Le Verrier, l'Ordre et le Pouvoir ». *Cahiers d'Histoire 102* (2007).

[Locher, 2012] F. Locher. « De quoi Urbain Le Verrier est-il le nom ? Les légendes biographiques ou l'identité en question ». *in Les uns et les autres... sous la direction de Laurent Rollet et Philippe Nabonnand* (2012) (cf. p. 438).

[Lodge, 1905] O. Lodge. *Pioneers of Science*. MacMillan & co, 1905 (cf. p. 265, 266).

[Lucile, 1994] L. Lucile. *Journal d'une jeune fille du Second Empire*. Zulma, 1994 (cf. p. 9, 20, 54, 439, 442).

[Lyttleton, 1958] R. A. Lyttleton. « A short method for the discovery of Neptune ». *MNRAS 118 p. 551−565* (1958) (cf. p. 340).

[Lyttleton, 1960] R. A. Lyttleton. « The Rediscovery of Neptune ». *Vistas in Astronomy, Vol 3, 1960, p. 25−46* (1960) (cf. p. 172, 301, 327, 334, 337, 340, 346, 371).

[Manche, 2011] H. Manche. *Élaboration de l'éphéméride INPOP : modèle dynamique et ajustements aux données de télémétrie laser Lune*. Thèse, Observatoire de Paris, 2011 (cf. p. 287).

[Mauduit, 1854] V. E. Mauduit. *Notes prises au cours d'astronomie de M. Le Verrier*. Manuscrit de l'école normale supérieure, 1854 (cf. p. 31, 470).

[Miner, 1998] E. D. Miner. *Neptune The planet, rings and satellites*. Wiley-Praxis, 1998.

[Moore, 1988] P. Moore. *The Planet Neptune*. Ellis Horwood Ltd, 1988 (cf. p. 3, 5, 67, 240, 359).

[Moore, 1996] P. Moore. *The Planet Neptune*. John Wiley & Sons, 1996.

[Nabonnand, 2012] P. Nabonnand et L. Rollet. *Les uns et les autres : biographies et prosopographies en histoire des sciences*. Presses universitaires de Nancy, 2012.

[Newcomb, 1865] S. Newcomb. *An investigation of the orbit of Neptune with general tables of its motion.* Smithsonian Contributions to Knowledge, no 199, Washington, D.C., 1865, 1865.

[Newman, 1999] M. E. J. Newman et J. T. Barkema. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics.* Clarendon Press, 1999 (cf. p. 308).

[Newton, 2015] I. Newton. *Principes de philosophie naturelle : la traduction française des Philosophiae naturalis principa mathematica.* Centre d'études du XVIIIe siècle, Ferney-Voltaire, 2015.

[Panneboek, 1953] A. Panneboek. « The Discovery of Neptune ». *Centaurus 3, p. 126–137* (1953).

[Peirce, 1847a] B. Peirce. « Communication of Investigation into the action of Neptune on Uranus ». *Proc. Amer. Acad. Arts and Science 1, 16/03/1847, p. 65* (1847) (cf. p. 240, 241, 243, 244, 415, 424).

[Peirce, 1847b] B. Peirce. « Communication of Investigation into the action of Neptune on Uranus (suite) ». *Proc. Amer. Acad. Arts and Science 1, 4/05/1947, p. 144* (1847) (cf. p. 240, 244).

[Peirce, 1847c] B. Peirce. « Communication of Investigation into the action of Neptune on Uranus (suite) ». *Proc. Amer. Acad. Arts and Science 1, 7/12/1847, p. 285* (1847) (cf. p. 240, 244).

[Peirce, 1848] B. Peirce. « Communication of Investigation into the action of Neptune on Uranus (suite) ». *Proc. Amer. Acad. Arts and Science 1, 4/04/1848, p. 65* (1848) (cf. p. 240, 244, 245).

[Pelat, 2002] D. Pelat. *Bruits et signaux. Introduction aux méthodes de données. Cours de DEA.* École doctorale d'Ile de France, 2002 (cf. p. 287).

[Peng, 2022] D. Peng. *Advanced Statistical Computing.*, 2022.

[Perez, 2011] J. Perez. *Gravitation classique.* Presses de l'INSTA, 2011 (cf. p. 77, 79, 97, 110).

[Pickering, 1909] W. H. Pickering. « A search for a planet beyond Neptune ». *Annals of the astronomical observatory of Harvard college* (1909) (cf. p. 408).

[Poirier, 2011] J. -P. Poirier. *Jean-Baptiste Biot.* Hermann, 2011 (cf. p. 25, 31, 120, 370).

[Pond, 1835] J. Pond. *Observations made at the Greenwich Observatory in 1835.* Clowes & sons, London, 1835 (cf. p. 144, 260).

[Pontécoulant, 1829] G. Pontécoulant. *Théorie Analytique du Système du Monde.* Bachelier, 1829 (cf. p. 246, 256, 273, 274, 365, 372, 388, 420, 540).

[Pontécoulant, 1839a] G. Pontécoulant. « Remarque à l'occasion d'une note de M. Leverrier sur un point de mécanique céleste ». *Compte rendu de l'Académie des sciences 9(18) p. 539–544* (1839) (cf. p. 420).

[Pontécoulant, 1839b] G. Pontécoulant. « Réponse à M. Le Verrier au sujet des erreurs qu'il a découvertes dans la Théorie analytique du Système du Monde ». *Compte rendu de l'Académie des sciences 9(23) p. 739–740* (1839) (cf. p. 420).

[Raichvarg, 1991] D. Raichvarg et J. Jacques. *Savants et ignorants : une histoire de la vulgarisation des sciences.* Le Seuil, 1991.

[Ranyard, 1891] A. Ranyard. « Émile Gautier ». *Nature, 43 (2 avril) : p. 518–519* (1891) (cf. p. 67).

[Rawlins, 1970] D. Rawlins. « Some simple results regarding gravitational disturbance by exterior planets - with historical applications ». *Mon. Nat. R. astr. Soc. (1970) 147, 177–186* (1970) (cf. p. 291, 353).

[Rawlins, 1992] D. Rawlins. « The Neptune Conspiracy, Britain's Post-Discovery ». *DIO, 2, p. 115–142* (1992) (cf. p. 362).

[Rawlins, 1994] D. Rawlins. « The Theft of the Neptune Papers ». *DIO, 4, p. 92–102* (1994).

[Rawlins, 1999] D. Rawlins. « British-Neptune-Disaster File Recovered ». *DIO, 9, p. 3–25* (1999).

[Ré, 2015] P. Ré. « William's Lassell's (1799-1880) telescopes and the discovery of Triton ». *http://astrosurf.com/re* (2015).

[Rines, 1912] D. Rines. *The discovery of the planet Neptune.* Popular Astronomy, vol 20, 1912 (cf. p. 338).

[Roseveare, 1982] N. T. Roseveare. *Mercury's perihelion, from Le Verrier to Einstein.* Carendon Press, 1982.

[Sampson, 1904] R. A. Sampson. « A Description of Adams's Manuscripts on the Perturbations of Uranus ». *MRAS Vol 54 p. 143–170* (1904) (cf. p. 38, 39, 233, 332, 338, 359-362, 388, 390-392, 397, 412, 504).

[Samueli, 2019] J. J. Samueli. « Legendre et la méthode des moindres carrés ». *journals.openedition.org/bibnum/580* (2019) (cf. p. 211).

[Schaffer, 1988] S. Schaffer. « Astronomers Mark Time : Discipline and the personal equation ». *Science in Context, 2, p. 115–145* (1988).

[Schaffer, 2014] S. Schaffer. *La fabrique des sciences modernes*. Seuil, 2014.

[Schiavon, 2017] M. Schiavon et L. Rollet. *Pour une histoire du Bureau des Longitudes (1795−1932)*. Presses universitaires de Nancy, 2017 (cf. p. 9).

[Serres, 1997] M. Serres. *Éléments d'histoire de sciences*. Larousse, 1997 (cf. p. 4).

[Sheehan, 2006] W. Sheehan. « John Couch Adam's Autism-spectrum Disorder and the British Non-discovery of Neptune ». *Research conference at the Autism Research Center, Cambridge University* (2006).

[Sheehan, 2021] W. Sheehan. *Neptune : From Grand Discovery to a World Revealed*. Springer, 2021 (cf. p. 3, 5, 37, 53, 64, 67, 68, 170, 230, 240, 245, 255, 265, 359, 361, 362, 367, 408, 444, 453).

[Sheehan, 2004] W. Sheehan, N. Kollestrom et C. Waff. « The Case of the Pilfered Planet ». *Scientific American 291, p. 68−75* (2004).

[Signore, 2010] R. Signore. *Histoire du ciel et de ses représentations symboliques*. Vuibert, 2010.

[Signore, 2011] R. Signore. *Histoire du pendule*. Vuibert, 2011.

[Simon, 1994] J. L. Simon et al. « Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets ». *Astron. Astrophy. 282, 663−683 (1984)* (1994) (cf. p. 227, 287).

[Simon, 1973] J. L. Simon et J. Chapront. « Perturbations du second ordre des planètes Jupiter et Saturne. Comparaison avec Le Verrier ». *Astron. & Astrophys. 32, p. 51−64* (1973) (cf. p. 119, 121, 221, 361).

[Smart, 1946] W. M. Smart. « John Couch Adams and the discovery of Neptune ». *Nature, 9 novembre 1946* (1946).

[Smart, 1947] W. M. Smart. « John Couch Adams and the discovery of Neptune ». *Occasional notes of the Royal Astronomic Society, No 11, Vol 2, p. 33−88, London* (1947) (cf. p. 255).

[Smith, 1989] R. Smith. « The Cambridge Network in Action : The Discovery of Neptune ». *Isis, 80, p. 395−422* (1989).

[Sochon, 2004] S. Sochon. *Pierre-Simon de LAPLACE*. Éditions Christian, 2004.

[Somerville, 1831] M. Somerville. *Mecanism of the Heavens*. J. Murray, 1831 (cf. p. 354, 541).

[Somerville, 1836] M. Somerville. *The connexion of the physical sciences*. ed 1, 1834 ; ed 3, rev, 1836, 1836 (cf. p. 204, 373).

[Souchon, 1883] A. Souchon. *Traité d'astronomie pratique comprenant l'exposition du calcul des éphémérides astronomiques et nautiques*. Gautier-Villars, 1883.

[Standage, 2000] T. Standage. *The Neptune file*. The Penguin Press, 2000 (cf. p. 3, 5, 9, 36, 76, 240, 359).

[Tiercy, 1947] G. Tiercy. *À propos du centenaire de la découverte de Neptune*. Publications of the Observatoire de Genève Series A, vol. 40, p. 105−133, 1947 (cf. p. 51, 55, 60, 61, 64, 67).

[Tisserand, 1880] F. Tisserand. « Les Travaux de Le Verrier ». *Annales de l'Observatoire de Paris, t. 15, p. 23−43* (1880) (cf. p. 5, 26, 45, 46, 256, 301, 327, 333, 334, 350, 369, 541).

[Tisserand, 1889] F. Tisserand. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris, 1889, 1889 (cf. p. 15, 183, 393).

[Turner, 1904] H. H. Turner. *Astronomical Discovery*. Edward Arnold, 1904.

[Valsecchi, 2003] G. B. Valsecchi, A. Milani, G. F. Gronchi et S. R. Chesley. « Resonant returns to close approaches : Analytical theory ». *Astronomy and Astrophysics, 408 :1179˘1196* (2003) (cf. p. 27).

[Valz, 1847] J. E. B. Valz. « Éléments provisoires de la planète de M. Le Verrier pour l'époque du 7 décembre 1846 ». *Compte rendu de l'Académie des sciences, 24, p. 33−35* (1847).

[Verdier, 2020] N. Verdier et C. Le Lay. « Échos du conflit entre Le Verrier et le Bureau des longitudes dans le Journal d'un bourgeois de Paris d'Eugène Catalan » (2020).

[Véron, 2016] P. Véron. « Dictionnaire des astronomes français 1850−1950 ». *P. Véron, dictionnaire des astronomes français 1850−1950, www.obs-hp.fr/dictionnaire/* (2016) (cf. p. 342, 420, 433, 434).

[Vincent, 1958] M. Vincent. *Le mystère de la découverte de Neptune par Le Verrier*. Librairie Fishbacher, 1958 (cf. p. 443).

[Walker, 1847a] S. C. Walker. « Investigations which led to the detection of the coincidence between the computed place of the planet Le Verrier and the observed place of a star recorded by Lalande in May 1795 ». *Trans. Amer. Philosoph. Soc., n.s., 10 p. 141−* (1847) (cf. p. 240, 424).

[Walker, 1847b] S. C. Walker. « On the new planet ». *Astr. Nach. 25 p. 381* (1847).

[Wepster, 2010] S. Wepster. *Beyond theory and observations*. Springer, 2010, 2010 (cf. p. 38, 406).

[Wise, 1997] N. Wise. *The values of Precision*. Princeton University Press, 1997.

[Wolf, 1892] R. Wolf. « Auszüge aus Briefen von Émile Gautier und Urbain Leverrier ». *Astronomische Mitteilungen 1892 p. 325–356* (1892) (cf. p. 51, 54, 62, 63, 390).

Index

Adams, 8, 16, 21, 39, 48, 55, 64, 170, 172, 195, 211, 233, 246, 247, 249, 252, 282, 340, 341, 346, 347, 357, 359–366, 368, 370, 371, 373–378, 380, 382, 389, 391, 392, 395, 397, 399, 401, 408, 411, 418
Advielle, 54
Airy, 7, 9, 38, 53, 64, 132, 180, 183, 230, 252, 254, 258–263, 265, 359, 362, 378, 390, 412, 418
Alexander, 67
Ampère, 26
Aoust (Abbé), 29, 42, 67, 427, 433, 435, 437
Arago, 3, 19, 26, 35, 38, 39, 45, 53, 55, 62, 64, 65, 72, 240, 341, 432, 442, 444
Argelander, 132
Aristarque, 473
Aubin, 440

Babinet, 8, 26, 66, 240, 415, 419, 424–427, 432–434, 443
Baghdady, 5, 199, 204, 246–249, 254, 381
Bertrand (Abbé), 23
Bertrand (Joseph), 19, 417
Bessel, 37, 63, 170, 388, 452, 453
Bigourdan, 50
Binet, 51
Biot, 5, 15, 28, 29, 31, 45, 47, 48, 162, 163, 169–171, 184, 186, 274, 338, 370, 415, 433
Bode, 168, 334, 360, 363, 452, 453
Bouvard, 3, 7, 35–37, 44, 45, 60, 72, 76, 78, 123, 124, 127, 130, 150, 157, 327, 342, 406, 408, 452, 453
Bouvard (Eugène), 35, 53, 55, 72, 443
Bradley, 132, 453
Bremiker, 233, 234
Breumond, 24
Brookes, 246–249, 308, 340, 351–353, 360, 371, 373, 375–378, 381–383, 415
Brown, 172, 334, 337, 339, 346, 370, 377, 389
Buisson, 50, 66
Burckhardt, 452, 453

Cauchy, 28, 433
Chabert, 23
Challis, 230, 233, 362
Choquet, 19, 20
Choquet (Marie-Lucile), 20, 25, 50
Clairaut, 22, 170
Collège de France, 28, 29, 51, 52, 449
Commerson, 23
Cérès, 211
César, 30

d'Alembert, 170
d'Arrest, 3, 44, 45, 49, 425, 465
Danjon, 4, 15, 19, 37, 38, 162, 334, 393, 414, 433, 438
Daubeny, 64
Daverdoing, 54
de Vico, 9
de Vico (comète), 433
Delambre, 3, 23, 36, 76
Delaunay, 8, 19, 28, 29, 184, 411, 419, 421–423, 433, 445
Dreyer, 49
Duc de la Chapelle, 23
Dulong, 416
Dumas, 31
Duruy, 440

Encke, 63, 65, 169, 233
Eratosthène, 473, 475
Euler, 27, 170, 405

Faye (comète), 27, 64
Faye (Hervé), 410
Fienga, 12
Fixlmillner, 3, 36, 76
Flammarion, 42, 50, 444, 445
Flamsteed, 13, 37, 132, 136–138, 143, 151, 226, 227, 235, 333, 375, 382, 464
Flemming, 37, 170
Fleury, 339
Forbes (David), 62, 64, 446
Freycinet, 26

Gaillot, 9, 20, 50, 173, 405, 416, 419, 420, 441
Galle, 3, 39, 44, 45, 49, 61, 68, 222–224, 342, 425, 458, 465
Gambey, 461, 463
Gapaillard, 224
Gastineau, 5, 11, 411, 479
Gauss, 63, 406
Gautier, 6, 14, 19, 21, 35, 39, 49, 50, 52–56, 58, 60–64, 66–68, 72, 73, 77, 122, 416, 417, 434, 442, 444
Gautier (Adolphe), 65
Gautier (Alfred), 63, 65
Gautier (Fondation), 51
Gautier (Raoul), 51, 54, 62, 390, 439
Grosser, 67
Grégoire XIII, 30

Halley (comète), 170
Hansen, 25, 388, 421, 468
Herschel (John), 9, 172, 338, 353, 402, 408, 429, 430, 433
Herschel (William), 3, 36, 137, 465
Hind, 65
Hipparque, 473
Hypérion, 425

IMCCE, 5, 7
INPOP, 7, 12

Jacobi, 433
Janus, 61, 458
Jones, 393

Kepler, 30, 428
Kepler (Équation), 75

Lagrange, 22, 27, 29, 419, 420
Lagrange (Équations), 77, 78, 110
Lai, 7, 263, 355
Lalande, 3, 9, 10, 22, 24, 132, 240, 475, 536
Lam, 7
Laplace, 3, 5, 15, 19, 25, 27, 60, 62, 184, 256, 273, 370, 417, 423, 468, 535
Laskar, 5, 11, 12, 26, 27, 58, 130, 409–411, 417, 420, 421, 423, 424, 427, 479
Lassell, 240, 424, 465
Laugier, 433
Le Lay, 411
Le Monnier, 13, 14, 37, 453, 454, 456
Lecaplain, 169
Lefébure, 51
Legendre, 211, 406
Lequeux, 22, 26, 67, 446
Lexell, 3, 36
Lexell (comète), 27, 50
Liais, 337, 339, 341, 433
Liouville, 28, 419, 421
Littlewood, 340
Littrow, 433
Lowell, 408, 426
Lucile (Le Verrier), 9, 434, 439
Lyttleton, 172, 337, 340, 346, 347, 349, 351–353, 371

Magne (François), 50
Magne (Lucien), 9, 441
Manche, 287
Marie, 9
Mathieu, 19
Mauduit, 31, 470
Mauvais, 26, 433
Mayer (Institution), 19
Mayer (Tobias), 38, 406, 475
Miriade, 12, 13, 227
Moigno (Abbé), 61, 66
Moore, 67
Méchain, 23

Nabonnand, 438, 506
Napoléon III, 26
Newton, 30

Pallas, 27
Parvilde, 433, 437
Peirce, 64, 199, 240–244, 369, 424, 430
Pelat, 287
Piazzi, 132, 211
Picard, 462

Pickering, 408, 426
Plantamour, 63, 64, 449
Poisson, 22, 62
Pontécoulant, 8, 257, 365, 372, 388, 419, 420
Ptolémée, 473

Rømer, 223, 462, 464
Regnault, 19
Reuss, 24

Salvandy, 418
Sampson, 233, 334, 338, 359, 360, 364, 365, 370, 390, 391, 396
Savary, 19
Schroeter, 25
Serres, 4
Sheehan, 67, 72, 170, 230, 359, 361, 362, 367, 409, 453
Somerville, 204
Sorbonne, 29, 31, 51, 52, 184, 449, 466, 470, 471
Souriau, 27
Struve (Otto), 224, 433
Struve (Whilem), 9
Sturm, 51, 184

Thiers, 441
Tiercy, 51, 55, 60, 67
Tisserand, 5, 15, 45, 46, 184, 256, 333, 369
Titius-Bode, 44, 166, 168, 171
Tombaugh, 408, 409
Travers, 436, 437
Triton, 240

Walker, 64, 240, 241, 428, 429
Wolf (Rudolf), 51, 63

Young, 7, 252, 263–265, 268, 337, 340, 355

Liste des figures

1 Table de logarithmes de Lalande . . . 10
2 Écarts entre les observations retenues par Le Verrier et les données de Miriade . 13

1.1 Dossier de l'Observatoire de Paris contenant les notes bibliographiques de Le Verrier 20
1.2 Notes prises par Le Verrier sur le fonctionnement de certains instruments 21
1.3 Références bibliographiques notées par Le Verrier pour les perturbations planétaires 22
1.4 Extraits des assemblées de professeurs du Collège de France 28
1.5 Remplacement de Biot par Delaunay 29
1.6 Annonce du contenu du cours de Le Verrier au Collège de France 29

2.1 Début de la table X de Bouvard 36
2.2 Tracé des écarts $C - O$ entre les positions calculées par les tables de Bouvard et les observations 37
2.3 Dossier contenant les manuscrits de Le Verrier à l'Observatoire de Paris 38
2.4 Exemple (exceptionnel) de page très raturée des manuscrits de Le Verrier 41
2.5 Le Verrier, dans son cabinet de travail 42
2.6 Échantillons de paraphes de Le Verrier 43
2.7 Note de Bigourdan, mentionnant l'aide apportée par Gautier 50
2.8 Portraits d'Émile Gautier et de Le Verrier 56
2.9 Exemple de collaboration Le Verrier-Gautier 57
2.10 Alternance d'écriture Le Verrier-Gautier 58
2.11 Autre exemple de collaboration Le Verrier-Gautier 59
2.12 Lettre de Le Verrier à Gautier pour annoncer la découverte de Neptune 68

3.1 Définition des éléments orbitaux 75
3.2 Page contenant des calculs successifs pour accéder à des valeurs numériques de $3k_{u,s}nR$ 83
3.3 Première interpolation de $3k_{u,s}nR$ 85
3.4 Deuxième interpolation de $3k_{u,s}nR$ 87
3.5 Valeurs numériques de $3k_{u,s}nR$ 90
3.6 Valeurs des coefficients A_i et B_i 91
3.7 Expression manuscrite obtenue par Le Verrier pour la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus 93
3.8 Fonction perturbatrice déterminée par Le Verrier par double interpolation. 95
3.9 Développement de $\sin \phi_1 \delta\theta_1$ 99
3.10 Développement de δa 100
3.11 Développement de $\delta\rho$ 101
3.12 Développement de $e\delta\varpi$ 102

3.13 Développement de $\delta_2 e$ . . . 103
3.14 Développement de δe . . . 104
3.15 Développement de $\delta\varepsilon$ . . . 105
3.16 Développement de $\delta\phi_1$ . . . 106
3.17 Expression algébrique utilisée par Le Verrier pour la fonction perturbatrice R . . . 108
3.18 Fonction perturbatrice obtenue par Le Verrier . . . 109
3.19 Fonction perturbatrice obtenue avec TRIP . . . 109
3.20 Comparaison effectuée par Le Verrier de deux développements de δe . . . 111
3.21 Expression de la perturbation de la longitude moyenne exercée par Saturne sur Uranus . . . 112
3.22 Perturbation de la longitude vraie d'Uranus exercée par Saturne . . . 113
3.23 Perturbation de la longitude vraie d'Uranus exercée par Jupiter . . . 114
3.24 Perturbation de la longitude moyenne de Saturne exercée par Jupiter . . . 116
3.25 Formule permettant de déterminer le moyen mouvement d'Uranus à l'ordre 2 . . . 117
3.26 Sélection par Le Verrier des termes sensibles dans la perturbation de la longitude d'Uranus à l'ordre 2 des masses . . . 118
3.27 Expression de $\delta\rho$ trouvée par Le Verrier pour l'approximation d'ordre 2 par rapport aux masses . . . 119
3.28 Formule permettant de déterminer la perturbation du moyen mouvement . . . 120
3.29 Expression de la perturbation de la longitude vraie retenue par Le Verrier . . . 122

4.1 Expressions de la perturbation de la longitude héliocentrique d'Uranus calculée par Bouvard . . . 124
4.2 Écarts entre la longitude héliocentrique calculée par Bouvard et celle calculée par Le Verrier . . . 126
4.3 Groupement de termes de périodes voisines pour le calcul de δv . . . 129
4.4 Corrections des coordonnées de α Arietis effectuées par Le Verrier . . . 134
4.5 Position de l'étoile (a) de Bessel . . . 134
4.6 Réduction de l'observation de Flamsteed du 23/12/1690 . . . 136
4.7 Début des éphémérides des positions héliocentriques d'Uranus . . . 138
4.8 Calcul effectué par Le Verrier pour déterminer la longitude héliocentrique le 24/9/45 139
4.9 Exemple traité par Le Verrier pour passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques . . . 140
4.10 Début des éphémérides des positions géocentriques d'Uranus . . . 141
4.11 Formules de passage des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques 142
4.12 Écarts O-C en longitude géocentrique . . . 144
4.13 Équations de condition portant sur la longitude géocentrique . . . 146
4.14 Système de 4 équations aux inconnues les corrections sur les éléments elliptiques d'Uranus . . . 147
4.15 Résidus sur la longitude d'Uranus . . . 148
4.16 Système de 18 équations utilisé par Le Verrier . . . 152
4.17 Système de 18 équations aux inconnues P, Q, R, S noté (4.17) . . . 153
4.18 Positions relatives de la Terre, du Soleil et d'Uranus . . . 158
4.19 Feuille de calcul de la position d'Uranus le 24/9/45 à partir des tables de Bouvard 159
4.20 Résidus sur les 279 équations de condition . . . 161
4.21 Écarts $O - C$ en longitudes géocentriques pour la tranche 1745-1840 . . . 162
4.22 Enchaînement des calculs menant à 3 contradictions . . . 165

5.1 Expression théorique de la perturbation de la longitude . . . 173
5.2 Système d'équations final pour la 1ère méthode . . . 175

5.3 Forme des équations, après groupement . . . 176
5.4 Forme symbolique des équations . . . 177
5.5 40 systèmes de 3 équations aux 3 inconnues m', P', Q' . . . 179
5.6 Erreurs en longitude pour les 18 équations retenues par Le Verrier . . . 182
5.7 Graphe de l'inverse de la masse de Neptune . . . 186
5.8 Termes retenus par Le Verrier pour la perturbation exercée sur la longitude d'Uranus par la planète extérieure . . . 188
5.9 Valeurs prédites pour la longitude héliocentrique de Neptune en utilisant la formule de Le Verrier . . . 191
5.10 Longitude héliocentrique vraie au 1/1/1847 à partir de 18 équations . . . 196
5.11 Longitude géocentrique vraie au 1/1/1847 à partir de 279 équations . . . 197
5.12 Enchaînement des calculs pour localiser la planète perturbatrice . . . 198

6.1 Perturbation de la longitude héliocentrique . . . 204
6.2 Terme de degré 2 de la perturbation de la longitude vraie . . . 204
6.3 Perturbations retenues par Le Verrier . . . 205
6.4 Table des coefficients de m', $m'h'$ et $m'l'$ . . . 206
6.5 Partie 'invariable' des 33 équations de condition géocentriques . . . 208
6.6 Expression de la partie variable de la perturbation due à la planète perturbatrice 209
6.7 Tableau pour préparer les interpolations dans les équations de condition . . . 216
6.8 Équations intermédiaires pour éliminer les inconnues non principales . . . 217
6.9 Système de 33 équations (fig. 6.9 . . . 218
6.10 Fonction Σ . . . 219
6.11 Moyenne des écarts $C - O$ entre les positions d'Uranus calculées par Le Verrier à l'aide de sa nouvelle théorie et les positions observées . . . 222
6.12 Écarts $C - O$ pour les observations anciennes . . . 222
6.13 Lettre de Le Verrier à Galle . . . 223
6.14 Début de la réponse de Galle à Le Verrier . . . 224
6.15 Dérivée partielle de Σ . . . 225
6.16 Positions relatives d'Uranus et de Neptune . . . 229
6.17 Erreurs $O-C$ entre latitudes héliocentriques calculées et latitudes héliocentriques observées . . . 231
6.18 Système d'équation de condition pour l'inclinaison de l'orbite . . . 232
6.19 Mention d'une recherche visuelle de la planète Le Verrier à l'Observatoire de Paris 233
6.20 Extrait de la carte Hora XXI montrant la position prédite pour Neptune par Le Verrier . . . 234
6.21 Enceinte délimitant les positions possibles pour la planète perturbatrice . . . 236
6.22 Différentes enceintes en fonction des tolérances sur les observations . . . 238
6.23 Exemples d'observations normales utilisées par Peirce . . . 239
6.24 Couples (ε', T) satisfaisant aux conditions de Peirce . . . 242
6.25 Enchaînements pour localiser la planète perturbatrice . . . 250

7.1 Écarts entre le rayon vecteur de Le Verrier et le rayon vecteur exact . . . 258
7.3 Erreurs sur le raton vecteur . . . 262
7.5 Problème direct pour la longitude et le rayon . . . 267
7.6 Recherche de la date d'opposition . . . 269
7.7 Variations du rayon selon la date d'opposition . . . 269
7.8 Résidus du rayon vecteur . . . 269
7.9 Résidus de la longitude . . . 270
7.10 Résidus du rayon vecteur en ajustant ce rayon vecteur . . . 270

7.11 Résidus du rayon vecteur en ajustant le rayon vecteur et la longitude 270
7.12 Résidus du rayon vecteur en fonction du rapport des demi-grands axes 275
7.13 Longitude vraie de Neptune au 1/1/1847 277

8.1 Résidus de l'observable d'Uranus selon la position de Neptune 283
8.2 Longitude héliocentrique vraie de Neptune au moment de la découverte, $m' = m_{Ura}$ 284
8.3 Évolution des éléments elliptiques d'Uranus quand on ajuste 5 paramètres de Neptune 285
8.4 Évolution des éléments d'Uranus quand on ajuste les 7 paramètres de Neptune . 286
8.5 Longitude héliocentrique vraie de Neptune au moment de la découverte, $m' = 2m_{Ura}$ 290
8.6 Ajustements des éléments d'Uranus et de la masse de Neptune 291
8.7 Évolution de la masse de Neptune avec le rapport des demi-grands axes 292
8.8 Résidus de l'observable ($\mathring{a} : D$) d'Uranus selon l'inclinaison relative des orbites . 293
8.9 Résidus de l'observable ($\mathring{a} : D$) d'Uranus avec $\alpha = 1.6$ 295
8.10 Résidus de l'observable ($\mathring{a} : D$) d'Uranus avec $\alpha = 1.8$ 296
8.11 Résidus de l'observable ($\mathring{a} : D$) d'Uranus pour $\alpha = 2.0$ 297
8.12 Résidus de la longitude d'Uranus selon α, e' et ϖ' 298
8.13 Longitude de Neptune en fonction des éléments elliptiques imposés pour Neptune, $\alpha = 1.6$ 299
8.14 Longitude de Neptune en fonction des éléments elliptiques imposés pour Neptune, $\alpha = 1.8$ 299
8.15 Longitude de Neptune en fonction des éléments elliptiques imposés pour Neptune, $\alpha = 2.0$ 300
8.16 Résidus de la longitude d'Uranus avec les valeurs finales de Le Verrier 300
8.17 Longitudes correspondant à la valeur de α trouvée par Le Verrier 301
8.18 Longitudes optimales de l'époque en fonction de la date de découverte 302
8.19 Longitude vraie de Neptune à la fin des observations 303
8.20 Intervalles de α où l'on peut localiser Neptune à $\pm 5°$ ou $\pm 10°$ 304
8.21 Écarts de longitude selon la date de fin des observations 305
8.22 Écart entre position exacte et position calculée à la fin des observations 306
8.23 Ajustement de la longitude d'Uranus avec 5 éléments de Neptune 307
8.24 Longitude vraie de Neptune en fonction de la date de fin des observations 308
8.25 Chaîne de Markov quand on fait varier seulement a et ε 312
8.26 Chaîne de Markov pour la recherche d'une orbite elliptique 313
8.27 Évolution des paramètres a, ε, e et ϖ 314
8.28 Évolution de a, ε et m sur une chaîne particulière 315
8.29 Valeur finales de ε et a 316
8.30 Valeurs finales de m et des résidus 317
8.31 Chaîne partant de valeurs éloignées des valeurs réelles 319
8.32 Chaîne partant de valeur proches des valeurs réelles 320
8.33 Évolution de a et de ε 321
8.34 Évolution de e et de m 322
8.35 Évolution de l'inclinaison et de la longitude du périhélie 323
8.36 Évolution des résidus sur l'observable d'Uranus 324
8.37 Chaîne s'appuyant sur un échantillonnage de Gibbs 325
8.38 Moyennes des valeurs des paramètres sur une chaîne Metropolis-Hastings 326
8.39 Écart entre la longitude vraie d'Uranus et celle de Neptune 327
8.40 Relation entre la date de la conjonction et la position du périhélie de Neptune, $\alpha = 2.0$ 329

8.41 Relation entre la date de la conjonction et la position du périhélie de Neptune, $\alpha = 1.8$ . . . 330
8.42 Relation entre la date de la conjonction et la position du périhélie de Neptune, $\alpha = 1.6$ . . . 331
8.43 Résumé de l'action de la conjonction de 1822 . . . 332
8.44 Positions calculées par Tisserand pour justifier la bonne qualité de la solution de Le Verrier . . . 333

9.1 Tracé des fonctions ϕ de Brown . . . 343
9.2 Résidus en longitude héliocentrique . . . 345
9.3 Valeurs des perturbations dans la longitude d'Uranus . . . 347
9.4 Écarts quadratiques de la fonction ρ_L de Lyttleton . . . 349
9.5 Écarts quadratiques de ρ_L selon Lyttleton et TRIP . . . 351
9.6 Écarts quadratiques de ρ_L sur la période 1730−2070 . . . 352
9.7 Variations de $Q(t)/m'$ . . . 354
9.8 Variations de la valeur maximale de Q . . . 355
9.9 Ajustement de la longitude selon LLY, problème direct . . . 356
9.10 Ajustement simultané de la longitude et du rayon vecteur d'Uranus, selon LLY . 356

10.1 Systèmes d'équations obtenus par Adams pour la solution de 1843 . . . 364
10.2 $O - C$ utilisés par Adams pour Hyp I et II ; il se trouvent au § 9 de son mémoire 367
10.3 Longitude vraie au 1/1/47 pour une orbite circulaire optimale . . . 368
10.4 Premier et deuxième groupe d'équations formé par Adams . . . 374
10.5 Système formé par les 3 équations finales eq_1', eq_2' et eq_3' à 12 inconnues . 375
10.6 Corrections des paramètres en fonction du rapport des demi−grands axes . . . 379
10.7 Évolution des éléments elliptiques d'Uranus en fonction du rapport des demi-grands axes . . . 380
10.8 Variation des éléments elliptiques de Neptune, sous l'effet d'un bruit gaussien . . 381
10.9 Valeurs prédites pour les éléments de Neptune selon l'année de découverte . . . 384

11.1 Feuille de calcul finale pour la solution de 1843 par Adams . . . 392
11.2 Feuille de calcul de Le Verrier pour déterminer l'inclinaison de l'orbite de Neptune 394
11.3 Orbites de Le Verrier, d'Adams et du vrai Neptune . . . 395
11.4 Comparaison des perturbations directes exercées sur la longitude d'Uranus . . . 399
11.5 Comparaison des perturbations directes exercées sur la longitude d'Uranus (suite) 399
11.6 Perturbations exercées sur Uranus, transformées par la formule de Brown . . . 400

12.1 Ordre se service pour Vulcain . . . 411

13.1 Coefficients extraits de *'Théorie analytique du système du Monde'* . . . 420
13.2 Écarts entre la théorie de Le Verrier et celle de Walker . . . 428
13.3 Variations de l'enceinte en changeant la tolérance pour les observations modernes 431

14.2 Carnets d'observations de Le Verrier conservés à la bibliothèque de l'Observatoire 446
14.3 Une page du premier cahier d'observations de Le Verrier . . . 447
14.4 Observation de Neptune faite par Le Verrier le 21 septembre 1854 . . . 449

A.1 Extrait d'un cahier d'observations de Le Monnier . . . 454
A.2 Feuille de calcul de Le Monnier . . . 455
A.3 Feuille de calcul de Le Monnier . . . 455
A.4 Feuille de calcul pour la fonction perturbatrice de Vénus sur Mercure en 1842 . . 456

A.5 Feuille de calcul pour la fonction perturbatrice de Saturne sur Uranus 457
A.6 Copie de la fin de la lettre de Galle à Le Verrier 458
A.7 Justification donnée par Le Verrier à Delaunay pour lr terme en $4n - n'$ 459

B.1 Salle des instruments méridiens de l'Observatoire de Paris 461
B.2 Extrait du rapport des observations de Greenwich pour 1846 462
B.3 Cercle méridien de Besançon 463
B.4 Arc méridien de Flamsteed et lunette méridienne de Rømer 464
B.5 Quart de cercle utilisé par Le Monnier 464
B.6 Télescope de Herschel et manuscrit de la découverte d'Uranus 465
B.7 Lunette de l'Observatoire de Berlin. Télescope de Lassell 465

C.1 Feuille de notes bibliographiques 467
C.2 Carte du ciel polaire établie par Le Verrier pour sa 6e leçon à la Sorbonne 472
C.3 Début de la leçon donnée par Le Verrier à la Sorbonne le 31 mars 1847 474

D.1 Les 4 valeurs qui annulent $1/m'$ (en bleu) et tracé de la fonction $1/m'$ 492

F.1 Calculs élémentaires effectués dans la marge 504
F.2 Deux bandes de papier utilisées par Le Verrier pour des calculs auxiliaires 505
F.3 Feuille de calcul isolée, ne comportant aucune indication sur le but des calculs . . 506

Liste des tableaux

1.1 Liste des dossiers regroupant les notes bibliographiques prises par Le Verrier . . . 23

2.1 Historique des publications de Le Verrier 45

3.1 'Habillages' de la lettre α pour les notations et signification de ces habillages . . 72
3.2 Notations choisies par Le Verrier 74
3.3 Action perturbatrice d'une planète (P') sur une planète (P) 74
3.4 Relations algébriques entre les différents paramètres elliptiques d'une planète . . 75
3.5 Extrait de la disposition d'un bloc pour le calcul de $3k_{u,s}nR$ 82
3.6 Valeurs numériques de la fonction perturbatrice 90
3.7 Résultats de la première interpolation pour $6k_{u,s}nR$ 91
3.8 Résultats de la deuxième interpolation 92
3.9 Comparaison de coefficients de la fonction perturbatrice calculés par différentes méthodes 96
3.10 Perturbation de la longitude vraie d'Uranus exercée par Jupiter sur Uranus . . . 114
3.11 Perturbation de la longitude moyenne exercée par Jupiter sur Saturne 116
3.12 Perturbation du moyen mouvement déterminé par TRIP 119
3.13 Comparaison de certains coefficients d'ordre 2 selon les masses 121

4.1 Comparaison des coefficients dans les perturbations calculées par Le Verrier avec ceux calculés par Bouvard 125
4.2 Comparaison entre la perturbation de Bouvard et celle de Le Verrier 125
4.3 Corrections à apporter aux éléments elliptiques d'Uranus 127
4.4 Groupements effectués pour calculer δv 128
4.5 Ordre dans lequel Le Verrier va faire ses calculs 131
4.6 Formulaire permettant de passer des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques 140
4.7 Solution aux équations de condition géocentriques 148
4.8 Système de 18 équations de condition aux inconnues P, Q, R, S 153
4.9 Valeurs des écarts en longitude trouvées par Le Verrier à des dates espacées de 7 ans 164

5.1 40 systèmes de 3 équations 178
5.2 Solutions des 40 systèmes aux 3 inconnues m', P', Q' 181
5.3 Valeurs de ε' qui annulent le dénominateur de la fraction m' 185
5.4 Valeurs trouvées pour m' 189
5.5 Comparaison des solutions optimales obtenues par au moins deux méthodes . . . 193
5.6 Solutions optimales obtenues par 3 méthodes 194

5.7 Paramètres obtenus par TRIP pour une orbite circulaire . . . 196
5.8 Paramètres pour une orbite circulaire en s'appuyant sur les 279 équations géocentriques prises individuellement . . . 197

6.1 Coefficients numériques de m', $m'h'$ et $m'l'$ dans les expressions de la longitude héliocentrique . . . 206
6.2 33 équations de condition obtenues avec TRIP pour $\gamma = 0$ et $\mathcal{C} = -1$ . . . 210
6.3 Coefficients pour former les équations de condition . . . 215
6.4 Système obtenu après application de la méthode des moindres carrés . . . 217
6.5 Éléments de la planète inconnue . . . 221
6.6 Valeurs numériques de $\frac{\partial \Sigma}{\partial m'}$ pour $m' = 0.9,\ 1$ et 1.1 . . . 225
6.7 Interpolation entre $m' = 1$ et $m' = 1.1$ pour déterminer le zéro de $\frac{\partial \Sigma}{\partial m'}$ . . . 225
6.8 Liste de toutes les valeurs de m' minimisant Σ . . . 226
6.9 Calculs pour obtenir la longitude héliocentrique le 1/1/1847 . . . 228
6.10 Encadrement des paramètres par Le Verrier et valeurs optimales pour la tolérance 25, 15, 10, 5 adoptée par Le Verrier . . . 237
6.11 Paramètres optimaux pour Neptune . . . 239
6.12 Paramètres d'orbites circulaires satisfaisant aux conditions de Peirce . . . 242
6.13 Éléments elliptiques de Neptune conduisant à des écarts quadratiques inférieurs à 250 as . . . 243
6.14 Valeurs trouvées par Baghdady pour la longitude héliocentrique vraie au 1/1/47 248

7.1 Valeurs numériques de certains coefficients du développement théorique de δr . . . 257
7.2 Expressions quadratiques des éléments elliptiques d'Uranus . . . 257
7.3 Corrections ΔR par Airy et par les moindres carrés . . . 261
7.4 Valeurs obtenues pour $(t_0,\ \Omega_2)$ par ajustement sur le rayon, la longitude ou les deux simultanément . . . 268
7.5 Valeurs des paramètres de la planète perturbatrice pour le problème inverse portant sur le rayon vecteur . . . 276

8.1 Valeurs finales des paramètres de Neptune après ajustement complet . . . 287
8.2 Erreurs formelles σ_i sur les éléments elliptiques d'Uranus et de Neptune . . . 288
8.3 Algorithme pour déterminer les résidus de l'observable d'Uranus . . . 289
8.4 Résultats pour la recherche d'orbites circulaires pour Neptune en fonction du point de départ . . . 311

10.1 Caractéristiques principales des différentes solutions d'Adams . . . 361
10.2 Résultats trouvés pour les différentes versions des calculs d'Adams . . . 361
10.3 Écarts $O-C$ utilisés par Adams pour la solution de 1843 . . . 364
10.4 Différentes solutions aux équations de condition données dans les manuscrits et par TRIP (les valeurs sont en secondes centésimales) . . . 365
10.5 Comparaison de résultats obtenus par Adams et TRIP . . . 366
10.6 Résidus dans les 21 équations de condition . . . 366
10.7 Solutions obtenues avec la première méthode d'Adams pour 20 valeurs de α . . . 368
10.8 Expression analytique de la perturbation totale subie par la longitude d'Uranus . 373
10.9 Expression des coefficients des équations de condition à l'aide de θ, α, β et β' . . . 373
10.10 Valeurs obtenues par la méthode de l'hypothèse I par Adams, Brookes et TRIP 377
10.11 Valeurs obtenues par la méthode de l'hypothèse II par Adams, Brookes et TRIP 378
10.12 Valeurs obtenues par la méthode de l'Hyp II avec TRIP pour $\alpha \in [0.49 : 0.60]$. 379
10.13 Solutions obtenues pour 5 dates de fin des observations . . . 383

10.14 Bilan des prédictions à ±5° et ±10° 385

11.1 Expression numérique de la perturbation exercée par une planète extérieure . . . 398

13.1 Coefficients des nouveaux termes de la perturbation de la longitude d'Uranus selon Hansen, Delaunay et Le Verrier 421

A.1 Liste des observations anciennes d'Uranus 453

D.1 Feuille de calcul pour la première interpolation de R 483

On commence par décrire de quelle manière Le Verrier a entamé une carrière d'astronome après avoir amorcé une prometteuse carrière de chimiste. Il a notamment passé l'essentiel de l'année 1837 à prendre des notes bibliographiques à la bibliothèque de l'Institut afin d'accélérer sa formation d'astronome. Il se lance, dès ses premières recherches, dans des travaux ambitieux, comme la stabilité du système solaire ou la théorie de Mercure. Il se fait rapidement remarquer par ses collègues géomètres et durant l'été 1845, Arago lui demande de trouver une explication pour les irrégularités du mouvement d'Uranus. Une explication simple pourrait provenir de l'inexactitude des tables en vigueur, celles réalisées par Alexis Bouvard en 1821 et construites à partir de ses calculs de perturbation.
Le Verrier va, dans un premier temps, refaire l'intégralité du calcul des perturbations exercées par Saturne et Jupiter sur Uranus. À partir de ces résultats, il peut évaluer l'écart en longitude entre la théorie de Bouvard et la sienne ; il montre qu'il est impossible de corriger la théorie de Bouvard en corrigeant seulement les éléments elliptiques d'Uranus. Il forme alors des éphémérides d'Uranus en se fondant sur ses propres calculs de perturbations, ce qui lui permet d'évaluer les écarts entre les 279 observations O retenues par lui pour Uranus et les prédictions de position correspondantes C à partir de ses tables. Il constate des écarts $O - C$ importants, qu'il essaie de réduire en corrigeant les paramètres d'Uranus. Il montre qu'il est impossible de réduire complètement ces écarts $O - C$ en corrigeant seulement les paramètres d'Uranus. Il cherche alors à expliquer les irrégularités des mouvements d'Uranus par l'action d'une planète extérieure à Uranus. Il forme 18 équations de condition qui lui permettent de localiser une zone du ciel où pourrait se trouver une telle planète perturbatrice. Puis, dans un deuxième temps, en s'appuyant sur un système de 33 équations, il affine cette première localisation. Il envoie la position trouvée à Galle, qui, aidé de d'Arrest, localise à l'observatoire de Berlin le 23 septembre 1846 la nouvelle planète à environ 1° de la position indiquée par Le Verrier.
Ce succès soulève un enthousiasme général et Le Verrier est comblé d'honneurs. Mais une controverse sur la priorité de la découverte est rapidement soulevée, car un astronome anglais, J. C. Adams, a prédit, pour la planète perturbant Uranus, un an avant Le Verrier, une position voisine de celle annoncée par Le Verrier, mais Adams n'avait pas publié ses résultats. Par ailleurs, en s'appuyant sur une observation fortuite faite par Lalande en 1795, un astronome américain, Walker, établit pour Neptune une orbite très différente de celle prédite par Le Verrier. Le Verrier subit plusieurs attaques, dont la principale vint du physicien Babinet. Il se défendit en montrant lors de trois interventions successives à l'Académie des sciences que son orbite, même si elle différait notablement de l'orbite réelle, permettait de rendre compte des positions de Neptune pendant une période de 65 ans avec une erreur inférieure à 18°.
Assez rapidement, la polémique s'éteignit et l'on ne retint que les prouesses calculatoires d'Adams et de Le Verrier.

MOTS CLÉS

Perturbations, découverte, Adams, controverse, Uranus, Bouvard, Adams

ABSTRACT

We begin by describing how, after a brief and promising career as a chemist, Le Verrier turned his full attention to astronomy. To prepare for this change of career, he spent most of 1837 compiling an extensive bibliography in the Institute's library. With this preparation, he began to devote himself to challenging research projects, such as proving the stability of the solar system and re-examining the troublesome theory of Mercury's motions. These efforts brought him to the attention of his fellow mathematicians and, in the summer of 1845, led Arago to pose to him the problem of the irregularities in the motion of Uranus. Since 1821, when Alexis Bouvard had published his tables of the motion of Uranus, these irregularities had begun to increase to an unacceptable extent. Le Verrier redid the entire calculation of the perturbations exerted on Uranus by Saturn and Jupiter. He was then able to evaluate the difference in longitude between the calculations made by using Bouvard's theory and his own. He showed that it was impossible to correct Bouvard's theory by correcting only the elliptical elements of Uranus, and then proceeded to produce ephemerides of Uranus based on his own perturbation calculations. This involved evaluating discrepancies between the 279 observations O he had retained for Uranus and the corresponding position predictions C from his tables. He found large $O - C$ discrepancies; he showed that it was impossible to reduce these $O - C$ discrepancies completely by simply correcting the Uranus parameters alone. He then introduced the hypothesis of a planet outside Uranus to explain the irregularities in its motion. He formed 18 equations of motion which enabled him to locate an area of the sky where such a disturbing planet could be found. He then used a system of 33 equations to refine his initial position. He sent the position he had found to Galle, who, assisted by d'Arrest, observed the new planet at the Berlin Observatory on 23 September 1846, about 1° from the position indicated by Le Verrier.
This success aroused widespread enthusiasm and Le Verrier was showered with honours. But a controversy soon arose over the priority of the discovery, as an English astronomer, J. C. Adams, had predicted a position for the planet disturbing Uranus close to that announced by Le Verrier, a year before Le Verrier. Adams had communicated his research privately to G.B. Airy, the Astronomer Royal, but had not otherwise published his results. Further controversy arose when an American astronomer, Sears Cook Walker, based on the identification of a chance observation made by Lalande in 1795, determined a very different orbit for Neptune from that predicted by Le Verrier. Le Verrier suffered several attacks, the most important of which came from the physicist Babinet and the American mathematician Peirce, who claimed that the discovery of the planet was merely a "happy accident". Le Verrier defended himself by demonstrating in three successive speeches to the Académie des Sciences that his calculated orbit, even if it differed significantly from the actual orbit of the planet, nevertheless accounted for Neptune's positions over a period of 65 years with an error of less than 18°. These controversies died down fairly quickly, and Adams and Le Verrier shared the credit for their computational skills.