

OBSERVATOIRE DE PARIS
ECOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ILE DE FRANCE

Doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

AUTEUR: JULIEN BODOSSIAN

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DES TROYENS
EVOLUTION DU RESEAU DE RESONANCES EN FONCTION DES FREQUENCES
PLANETAIRES

Rapporteurs:

*Àngel Jorba
Anne Lemaître*

Soutenue le 16 décembre 2008 devant le Jury composé de:

*Philippe Robutel
Bruno Sicardy
Benoît Meyssignac
Fathi Namouni
Anne Lemaître
Àngel Jorba*

*Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur*

Table des matières

1	Etude analytique des points de Lagranges équilatéraux	13
1.1	Introduction	13
1.2	Existence des points de Lagrange \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 dans le Problème à Trois Corps Restreint (PTCR)	13
1.2.1	Introduction : présentation du système étudié	13
1.2.2	Existence de \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 dans le PTCR	14
1.3	Problème à N corps Restreint Circulaire Séculaire	15
1.3.1	Modèle, variables de départ, définitions	15
1.3.2	Développement en séries du hamiltonien	17
1.3.3	Existence des points fixes analogues à \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 dans le PTCRC séculaire perturbé : application au problème à N corps plan	19
1.4	Développement analytique de \mathcal{H}_1^s au voisinage de \mathbf{L}_4	21
1.4.1	Principe du développement	21
1.4.2	Approximation linéaire du PTCRC séculaire	22
1.5	Approximation analytique des coordonnées de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ et de ses fréquences propres	24
1.5.1	Principe général	24
1.5.2	Mise en place d'un algorithme pour approximer $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$	25
1.5.3	Approximation linéaire du Problème à Quatre Corps Restreint Circulaire (PQCRC) séculaire	30
1.5.4	Influence de $N - 1$ planètes	41
1.5.5	Application au système solaire	44
1.6	Conclusion	47
2	Etude de multiples configurations planétaires dans le contexte de la migration	51
2.1	Etude du système Soleil-Jupiter-Saturne pour de multiples configurations	52
2.2	Etude du système Soleil-Jupiter-Saturne en migration forcée : « traversée » de la RMM 1 : 2	58
2.3	Un exemple de migration des planètes externes du système solaire en interaction avec un disque de planétésimaux.	61
2.4	Conclusion	66

3	Etude générale des structures résonantes dans un essaim de troyens	67
3.1	Cas du Problème à Trois Corps Restreints	67
3.2	Cas d'un système à $N + 2$ corps restreints	69
4	Application aux troyens de Jupiter	73
4.1	Modèle à un paramètre	74
4.2	Analyse de l'évolution des familles de résonances	75
4.2.1	Analyse de la <i>Famille IV</i>	78
4.2.2	Analyse de la <i>Famille II</i>	88
4.3	Conclusion	94
5	Application aux troyens de Saturne	95
5.1	Modèle à un paramètre	96
5.2	Etude de l'espace des fréquences	97
5.2.1	Présentation de la situation actuelle	98
5.2.2	Etude d'une configuration plus stable	100
5.2.3	Etude des bornes de l'espace des fréquences	104
5.3	Analyse de l'évolution des 4 familles de résonances dans l'essaim des troyens de Saturne	107
5.3.1	Analyse de la <i>Famille II</i>	109
5.3.2	Analyse de la <i>Famille III</i>	116
5.3.3	Analyse de configurations proches de la situation actuelle	122
5.4	Conclusion	125
6	Les troyens de Neptune dans la configuration planétaire actuelle	127
6.1	Modèle	128
6.2	Analyse des structures résonantes dans l'essaim des troyens de Neptune . .	128
	Conclusion	137

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Philippe Robutel, pour m'avoir guidé patiemment tout au long de ce travail. Je tiens aussi à remercier toute le personnel de l'IMCCE, c'est une équipe soudée au sein de laquelle j'ai pris plaisir à travailler. En particulier, Mickael Gastineau pour son aide plus que nécessaire dans l'utilisation du matériel informatique. Je remercie aussi les membres du jury et les rapporteurs, d'avoir accepté aussi rapidement de participer à la conclusion de ce travail. Je voudrais aussi remercier mes parents et mon grand père de m'avoir permis de réaliser mes étude dans de bonnes conditions. Enfin, Je remercie la personne qui m'accompagne pour sa patience et son aide.

Résumé

Considérons un système planétaire à N planètes ordonnées par ordre croissant des demi-grands-axes. Nous nous intéressons à la dynamique des troyens de la p -ième planète, perturbée par la présence des $N - 1$ autres planètes.

Nous travaillons dans le cadre de l'approximation quasi-périodique, de manière à assurer l'existence des fréquences propres. Celles des troyens sont usuellement notées (ν, g, s) . Dans le cas du Problème à Trois Corps Restreint (PTCR), la valeur de ces fréquences dépend principalement de la masse de la planète co-orbitale. Dans le cas plus général où $N > 1$, nous utilisons un modèle linéaire séculaire, pour calculer des expressions analytiques donnant l'ordre de grandeur des fréquences propres des troyens. Ces expressions dépendent des masses et des demi-grands axes des planètes.

Les fréquences des planètes sont considérées comme des fréquences de forçage, perturbant la dynamique des troyens. La présence des planètes déforme l'espace des fréquences des troyens. L'introduction des fréquences de forçage y fait apparaître un réseau de résonances. Nous essayons de classer de manière générique l'ensemble des résonances de ce réseau, dans le but d'avoir une vision globale de ces structures. Puis, nous donnons un modèle permettant de prédire leurs présences dans l'essaim des troyens, en fonction de la valeur des fréquences de forçage.

Nous utilisons alors cette analyse et explorons la dynamique des troyens de Jupiter et de Saturne pour de multiples configurations planétaires. Cette étude est menée dans le cadre du problème à quatre corps restreint Soleil-Jupiter-Saturne+particule sans masse. Nous intégrons le système planétaire pour de nombreuses valeurs initiales du demi-grand axe de Saturne et calculons leurs fréquences propres. Nous utilisons alors notre modèle afin de prédire pour quelles configurations planétaires des résonances agissent sur les troyens. Pour ces configurations planétaires, nous intégrons la trajectoire de populations fictives de troyens et calculons leurs fréquences propres. Nous explorons leur espace des fréquences afin d'identifier les résonances qui y apparaissent. Ceci nous permet de vérifier nos prédictions et d'analyser la manière dont ces résonances parcourent les troyens.

Enfin, pour généraliser notre étude, nous examinons l'espace des fréquences des troyens de Neptune. Cette fois-ci, nous considérons l'influence des 4 planètes externes du système solaire, dans la configuration actuelle. De nombreuses fréquences séculaires semblent y apparaître. D'autres résonances y sont très clairement identifiables, impliquant les moyens mouvements d'Uranus et Neptune et la fréquence de libration ν . De manière plus générale, nous montrons que ces résonances appartiennent à une famille de résonances qui joue

souvent un rôle important dans la dynamique des troyens.

Introduction

Le premier troyen de Jupiter fut découvert par Max Wolf en 1906 et nommé Achille, par référence au héros de la guerre de Troie. A l'heure actuelle on a répertorié 2761 possibles troyens de Jupiter et 6 possibles troyens de Neptune. Ces objets ont été observés aux voisinages des points équilatéraux, mais leurs trajectoires n'ont pas toutes été établies avec suffisamment de précision pour pouvoir affirmer catégoriquement qu'il s'agit bien de troyens. Parmi les 2761 possibles troyens de Jupiter, seuls 1424 ont été déterminés avec certitude. En raison de la grande période de rotation des troyens de Neptune, et de leurs récentes découvertes (entre 2001 et 2007), aucun de ces objets n'est encore validé comme troyen de Neptune. Parmi les six troyens de Neptune, les quatre premiers qui ont été découverts ont plus de chance d'être effectivement des troyens de Neptune. En revanche, on n'a pas encore observé de potentiels troyens aux voisinages des points équilatéraux de Saturne et Uranus. Ce qui soulève une question bien naturelle : peut-on expliquer l'absence ou la présence de troyens par l'évolution de la dynamique aux voisinages des points équilatéraux des planètes depuis leur formation ? Dans cette perspective, de nombreux travaux ont eu pour but de calculer la stabilité des orbites de particules se maintenant dans la Résonance en Moyen Mouvement (RMM) 1 : 1, en considérant la géométrie actuelle du système solaire. Ces travaux ont mis en évidence la présence de structures résonantes, contribuant à déstabiliser les troyens. Dans l'article [RG06], P. Robutel et F. Gabern, ont classé les résonances agissant sur les troyens de Jupiter, en quatre familles de résonances. Ces résonances impliquent les fréquences propres des planètes. Les valeurs de ces fréquences dépendent de la géométrie du système planétaire. Par conséquent, si l'on change la géométrie du système planétaire, on modifie aussi les résonances agissant sur les troyens. Or, selon le modèle le plus probable de migration planétaire (celui de Nice), la géométrie de notre système planétaire a fortement évolué peu après sa formation et la dissipation du gaz de la nébuleuse protoplanétaire. Pendant cette phase de l'histoire du système solaire, les résonances agissant sur les troyens ont donc sûrement connu de fortes variations. Ces résonances peuvent déstabiliser violemment les troyens, éjecter des astéroïdes de la RMM 1 : 1, ou bien permettre au contraire d'en capturer. Il est donc crucial de comprendre l'évolution du réseau de résonances agissant sur les troyens. Notre travail a pour but de prédire l'évolution de ces structures résonantes en fonction de la valeur des fréquences planétaires. Il procède en deux étapes, la première consiste à estimer le domaine des fréquences propres des troyens, et la deuxième à évaluer pour quelles valeurs des fréquences planétaires ces résonances apparaissent dans l'essaim des troyens.

Au chapitre *I*, nous démontrons l'existence de points fixes se substituant à L_4 et L_5 dans le modèle séculaire d'un système à N planètes en mouvement circulaire uniforme autour d'une étoile. Puis, nous donnons des expressions analytiques approximant la position et les fréquences propres de ces points fixes. Ce modèle simple permet d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des fréquences propres des troyens, et met en valeur les planètes qui perturbent la dynamique des troyens de manière significative.

Au chapitre *II*, nous étudions l'évolution des planètes lors de leur migration. Plus particulièrement nous nous intéressons aux RMM que rencontrent Jupiter et Saturne lors de cette phase de l'histoire du système solaire, et les variations des fréquences propres de ces planètes. Nous illustrons ensuite le phénomène de migration planétaire par deux modèles. Dans le premier, nous forçons la migration des planètes de manière artificielle dans notre intégrateur. Dans le deuxième, nous faisons interagir les planètes avec un disque de planétésimaux.

Au chapitre *III*, nous généralisons la définition des 4 familles de résonances, définies dans [RG06] pour les troyens de Jupiter, à une population de troyens d'un système planétaire quelconque. Nous donnons ainsi une vision globale du réseau de résonances agissant sur les troyens.

La plupart des résultats exposés au chapitre *IV* ont été exposés dans notre article [RB08]. Nous donnons des méthodes permettant de localiser de manière précise, pour quelles configurations planétaires les familles de résonances perturbent la dynamique des troyens de Jupiter. En intégrant une population de troyens de Jupiter pour de multiples configurations, nous validons ces prédictions en identifiant le passage des résonances dans l'espace des fréquences des troyens. Nous faisons l'inventaire des résonances modifiant drastiquement leur dynamique. Nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, de faire cette analyse indépendamment du scénario de migration planétaire. Si la réalisation de ce travail a été le fruit d'une étroite collaboration entre mon directeur de thèse et moi-même, l'analyse de base permettant l'élaboration de ce travail est le fruit de son travail.

Le chapitre *V* est issu d'un travail personnel. Dans ce chapitre, j'ai appliqué les méthodes développées pour l'analyse des troyens de Jupiter, en les adaptant aux troyens de Saturne. La principale différence entre ces deux études, provient du fait que pour les troyens de Saturne, nous déplaçons la planète en corotation avec les troyens, alors que ce n'était pas le cas pour les troyens de Jupiter. Une grande variété de dynamiques apparaît. Ce travail valide la généralité de notre analyse, et permet de déduire des informations importantes sur l'histoire d'une hypothétique population de troyens de Saturne.

Enfin, au chapitre *VI*, nous étudions la dynamique des troyens de Neptune dans la configuration actuelle, et mettons en valeur la complexité de leur dynamique.

Notations et conventions

Afin d'alléger la rédaction, les unités des grandeurs utilisées sont la plupart du temps omises. Par convention, dans le système solaire, toutes les masses sont exprimées en masses solaires. Lorsque nous considérons un système planétaire quelconque, les masses sont exprimées en masses relatives par rapport à la masse de l'étoile. Le temps est exprimé en années terrestres et les distances en unités astronomiques. Par défaut, les angles sont exprimés en degrés. Lorsqu'il s'agit de petites mesures on préférera la seconde d'arc mais dans ce cas il en sera fait mention dans le texte. Les fréquences sont exprimées en secondes d'arcs par an.

Lorsqu'on s'intéresse au système solaire dans sa configuration actuelle, nous utilisons les coordonnées des planètes données par DE405 à la date en jours Juliens : 24522005 (10 octobre 2001).

Chapitre 1

Etude analytique des points de Lagranges équilatéraux

1.1 Introduction

1.2 Existence des points de Lagrange L_4 et L_5 dans le Problème à Trois Corps Restreint (PTCR)

1.2.1 Introduction : présentation du système étudié

Considérons le Problème à Trois Corps Restreint (PTCR) « étoile-planète+particule sans masse ». Dans ce modèle l'étoile et la planète influent sur la particule mais ne subissent pas son influence. L'étoile et la planète décrivent donc des ellipses autour du centre de gravité du système.

Choisissons un repère orthonormé orienté dans le sens direct $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Nous choisissons comme origine le centre de gravité de l'étoile. $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{r}_p}{r_p}(t=0)$ avec \mathbf{r}_p le vecteur position de la planète à l'instant t , \mathbf{j} est le vecteur image de \mathbf{i} par une rotation d'angle $+90$ dans le plan de l'orbite de la planète (orienté dans le sens de rotation de la planète), et $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$. On peut écrire le hamiltonien d'un tel système sous la forme

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{H}_0(\mathbf{X}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{X}, t),$$

où $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ est la concaténation des vecteurs position et vitesse de la particule. \mathcal{H}_0 représente la partie képlérienne du hamiltonien due à l'interaction de la particule avec l'étoile, et $\epsilon \mathcal{H}_1$ est la partie perturbative due à l'interaction de la particule avec la planète. Cette perturbation est de taille $\epsilon = m_p$ supposée petite par rapport à la masse de l'étoile.

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{G(M + m_p)}{r} + \frac{\tilde{r}^2}{2} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{H}_1 = -Gm_p \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p}{r_p^3} - \frac{1}{r} \right) \quad (1.2)$$

Ce hamiltonien dépend du temps par le biais de \mathbf{r}_p . Si la planète a une trajectoire circulaire on peut se ramener à un hamiltonien ne dépendant pas du temps en travaillant dans un repère de centre O tournant avec la même fréquence que la planète. Le choix de \mathcal{H}_0 et de $\epsilon\mathcal{H}_1$ n'est pas unique; en effet on peut ajouter des termes en $\mathcal{O}(\epsilon)$ à \mathcal{H}_0 et les soustraire à \mathcal{H}_1 . Dans une certaine mesure on a donc le choix de l'écriture du modèle de perturbation. Ainsi les termes Gm_p/r introduits dans (1.1) et (1.2) s'annulent dans l'addition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon\mathcal{H}_1$. Ces termes ont été introduits pour qu'une particule de hamiltonien \mathcal{H}_0 ait exactement la même fréquence de rotation autour de l'étoile que celle de la planète.

La dynamique du troyen est régie par des équations du type $\dot{\mathbf{X}} = f_0(\mathbf{X}) + \epsilon f_1(\mathbf{X}, t)$, avec $f_0(\mathbf{X}) = J\nabla\mathcal{H}_0$ et $f_1(\mathbf{X}) = J\nabla\mathcal{H}_1$.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{r}}} &= -\frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial\mathbf{r}} - \epsilon\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial\tilde{\mathbf{r}}} + \epsilon\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\tilde{\mathbf{r}}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial\mathbf{r}} &= \frac{G(M+m_p)}{r^3}\mathbf{r}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\mathbf{r}} = \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p\|^3} + \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial\tilde{\mathbf{r}}} &= \tilde{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\tilde{\mathbf{r}}} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2.2 Existence de L_4 et L_5 dans le PTCR

Soit $\mathbf{L}(t) = (\mathbf{r}_L, \tilde{\mathbf{r}}_L)$ les positions et vitesses d'un des deux points du plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ formant un triangle équilatéral avec la planète et l'étoile au temps t . Les équations du mouvement de la planète sont générées par $\mathcal{H}_0(\mathbf{r}_p, \tilde{\mathbf{r}}_p)$. Comme \mathbf{L} a une trajectoire qui est l'image de la trajectoire de la planète par une rotation d'angle ± 60 , \mathbf{L} est solution des équations du mouvement générées par $\mathcal{H}_0(\mathbf{X})$, donc $\dot{\mathbf{L}} = f_0(\mathbf{L})$. D'autre part, on vérifie facilement que le gradient de la perturbation s'annule en \mathbf{L} . En effet en ce point les égalités suivantes sont vérifiées $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_p\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p\|$, ce qui permet de déduire que :

$$\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{L}(t)) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p\|^3} + \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_p - \mathbf{r}}{r_p^3} = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

De plus \mathcal{H}_1 ne dépend pas de \mathbf{r} , on a donc pour tout temps t , $f_1(\mathbf{L}, t) = J\nabla\mathcal{H}_1(\mathbf{L}, t) = \mathbf{0}$. Par conséquent $\dot{\mathbf{L}} = f_0(\mathbf{L}) = f_0(\mathbf{L}) + \epsilon f_1(\mathbf{L}, t)$. $\mathbf{L}(t)$ est donc solution des équations

(1.3) du mouvement du PTCR. Ces deux trajectoire périodiques sont appelées points de Lagrange, \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 . Si la planète a une orbite circulaire ces trajectoires correspondent à des points fixes dans un repère de centre O et tournant avec la planète.

Dans le cas du Problème à Trois Corps Restreint Forcé, où la trajectoire de la planète n'est plus périodique mais quasi-périodique, on peut se demander si les trajectoires déduites de celle de la planète par une rotation d'angle ± 60 vérifient les équations du mouvement. Ce n'est pas le cas. En effet à chaque instant ce point \mathbf{L} vérifie bien $f_1(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$ mais par contre $\dot{\mathbf{L}} \neq f_0(\mathbf{L})$ puisque \mathbf{L} n'a plus une trajectoire elliptique.

1.3 Problème à N corps Restreint Circulaire Séculaire

1.3.1 Modèle, variables de départ, définitions

1.3.1.1 Modèle

Dans ce système nous considérons une étoile et N planètes en mouvements circulaires uniformes autour de cette étoile. Ces corps agissent sur une particule sans masse. On s'intéresse aux particules qui restent proches des points de Lagrange équilatéraux de la p -ième planète, on appelle ces particules des troyens. On suppose que toutes les planètes orbitent dans un même plan. Le hamiltonien de ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N = & \sum_{j=1}^N n_j \Lambda_j - \frac{G(M + m_p)}{r} + \frac{\tilde{r}^2}{2} - Gm_p \left(\frac{1}{\delta_p} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p(\lambda_p)}{r_p^3} - \frac{1}{r} \right) \\ & - G \sum_{j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}} m_j \left(\frac{1}{\delta_j} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j(\lambda_j)}{r_j^3} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

δ_j représente la distance entre la j -ième planète et la particule, n_j représente le moyen mouvement de la j^{ieme} planète, λ_j sa longitude moyenne et Λ_j la variable conjuguée de λ_j ajoutée de manière à forcer le mouvement de la j^{ieme} planète par $\dot{\lambda}_j = n_j$. Les variables sans indice sont associées aux troyens.

1.3.1.2 Choix des Variables

Notons $\mu = G(M + m_p)$ et considérons les variables de Poincaré du système :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sqrt{\mu a}, \\
\lambda &= M + \varpi, \\
x &= \sqrt{\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} e^{i\varpi}, \\
\tilde{x} &= -i\tilde{y}, \\
y &= \sqrt{\Lambda} \sqrt{\sqrt{1 - e^2} (1 - \cos(I))} e^{i\Omega}, \\
\tilde{y} &= -i\tilde{x},
\end{aligned}$$

et $\Lambda_1, \lambda_1, \dots, \Lambda_N, \lambda_N$.

Nous allons adapter ces variables à l'étude des troyens. Les troyens sont en résonance de moyen mouvement avec la p -ième planète, l'angle $\lambda - \lambda_p \pm 60$ est donc un angle résonant que nous allons utiliser. Au voisinage des points de Lagrange équilatéraux de la p -ième planète $a - a_p$ est aussi une petite quantité que nous allons utiliser pour faire des développements en séries entières. Pour travailler au voisinage de \mathbf{L}_4 on utilisera donc l'application canonique $(\Lambda, \lambda, \Lambda_p, \lambda_p) \mapsto (S, \sigma, S_p, \sigma_p)$:

$$\begin{aligned}
S &= \Lambda - \sqrt{\mu a_p} \\
\sigma &= \lambda - \lambda_p - 60 \\
S_p &= \Lambda_p + \Lambda \\
\sigma_p &= \lambda_p.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Pour l'étude du voisinage de \mathbf{L}_5 il suffit de changer -60 en $+60$ dans la définition de σ . Pour simplifier les notations comme $\sigma_p = \lambda_p$ on désignera σ_p par λ_p par la suite. On représentera les coordonnées du troyen par un vecteur $\mathbf{X} = (S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$. Ces variables sont les images des variables de Poincaré par la composée d'une application linéaire et d'une translation. Nous les avons construites de manière à ce que le point de Lagrange du PTCRC exprimé dans ces coordonnées soit à l'origine : $\mathbf{L}_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Posons $T : (\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \Lambda_p, \lambda_p) \mapsto (\mathbf{X}, S_p, \lambda_p)$, T est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ . Les coordonnées

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \Lambda_1, \lambda_1, \dots, S_p, \lambda_p, \dots, \Lambda_N, \lambda_N)$$

étant canoniques elles sont solutions du système hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}_N$ défini par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_N &: \mathbb{R}^{6+2N} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\tilde{\mathcal{H}}_N(S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \Lambda_1, \lambda_1, \dots, S_p, \lambda_p, \dots, \Lambda_N, \lambda_N) &= \mathcal{H}_N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \Lambda_1, \lambda_1, \dots, \Lambda_N, \lambda_N).
\end{aligned}$$

1.3.1.3 Définition du hamiltonien séculaire au premier ordre des masses planétaires

Le hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}_N$ moyenné sur les longitudes moyennes des planètes $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est le hamiltonien séculaire à l'ordre 1 des masses planétaires :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_N^s(S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \Lambda_1, \dots, S_p, \dots, \Lambda_N) &= \langle \tilde{\mathcal{H}}_N(S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \dots) \rangle_{\lambda_1, \dots, \lambda_N} \\
&= \frac{1}{(360)^N} \int_0^{360} \dots \int_0^{360} \tilde{\mathcal{H}}_N(S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \dots) d\lambda_1 \dots d\lambda_N.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Dans ce modèle $(\Lambda_1, \dots, S_p, \dots, \Lambda_N)$ sont des intégrales premières; pour simplifier l'écriture on les omettra dorénavant dans l'expression de \mathcal{H}_N^s . Ce système a donc 3 degrés de liberté. Remarquons que comme \mathbf{r} ne dépend pas de $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ certains termes de \mathcal{H}_N^s sont trivialement nuls; en effet pour $j \neq p$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right\rangle_{\lambda_j} &= \mathbf{r} \cdot \left\langle \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right\rangle_{\lambda_j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}$ est impaire et périodique. Le hamiltonien \mathcal{H}_N^s a donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_N^s(\mathbf{Y}) &= -n_p S - \frac{\mu^2}{2(S + \sqrt{\mu a_p})^2} \\
&- G m_p \frac{1}{360} \int_0^{360} \left(\frac{1}{\delta_p(T^{-1}(\mathbf{Y}))} - \frac{1}{r(T^{-1}(\mathbf{Y}))} - \frac{\mathbf{r}(T^{-1}(\mathbf{Y})) \cdot \mathbf{r}_p}{r_p^3} \right) d\lambda_p \\
&- \frac{G}{(360)^2} \sum_{j \in \{1 \dots N\} - \{p\}} m_j \int_0^{360} \int_0^{360} \frac{d\lambda_j d\lambda_p}{\delta_j(T^{-1}(\mathbf{Y}))}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ce hamiltonien ne dépend pas du temps.

1.3.2 Développement en séries du hamiltonien

Nous développons \mathcal{H}_N en série entière de $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}$ et en série de Fourier des longitudes moyennes :

$$\mathcal{H}_N = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N+5}} C_{\mathbf{k}}(a, a_1, \dots, a_N) x^{k_1} \tilde{x}^{k_2} y^{k_3} \tilde{y}^{k_4} e^{i(k_5 \sigma + k_6 \lambda_1 + \dots + k_{N+5} \lambda_N)}, \tag{1.10}$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{N+5})$.

Les invariances par rotation et par symétrie donnent lieu aux règles de d'Alembert :

1. $C_{\mathbf{k}} = C_{-\mathbf{k}}$, ce qui permet d'écrire le développement de \mathcal{H}_N en utilisant seulement des cosinus de combinaisons linéaires des angles.
2. $k_3 + k_4$ est pair, ce développement ne comporte donc que des termes en puissances paires de l'inclinaison

$$3. k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \sum_{j=6}^{N+5} k_j = 0$$

En calculant la valeur moyenne de ce hamiltonien sur les courtes périodes $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ on obtient l'expression du développement elliptique du hamiltonien séculaire \mathcal{H}_N^s . Ce qui revient à ne garder dans le développement précédent que les termes vérifiant $k_6 = \dots = k_{5+N} = 0$:

$$\mathcal{H}_N^s = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^5} C_{\mathbf{k}}(a, a_1, \dots, a_N) x^{k_1} \tilde{x}^{k_2} y^{k_3} \tilde{y}^{k_4} e^{ik_5 \sigma}, \quad (1.11)$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$. On déduit aisément des relations de d'Alembert que le développement ci-dessus ne contient que des puissances paires de l'excentricité et de l'inclinaison. En effet, la troisième relation de d'Alembert énoncée ci-dessus implique que les termes non nuls de cette série vérifient $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 0$. Cette relation implique que $k_1 - k_2$ et $k_3 - k_4$ aient même parité. D'après la deuxième relation de d'Alembert, $k_3 + k_4$ est pair, or $k_3 - k_4 = 2k_3 - (k_3 + k_4)$, par conséquent $k_3 - k_4$ est pair. $k_1 - k_2$ et $k_3 - k_4$ ayant même parité, $k_1 - k_2$ est pair. Or $k_1 + k_2 = 2k_1 - (k_1 - k_2)$, ainsi $k_1 + k_2$ est pair. En conclusion, $k_1 + k_2$ et $k_3 + k_4$ sont tous deux pairs. Ce développement ne comporte donc que des puissances paires de l'excentricité et de l'inclinaison.

Remarquons que dans le cas du problème séculaire plan $k_1 = k_2$ le développement de \mathcal{H}_N^s ne comporte donc que des termes en $(x\tilde{x})^{k_1}$.

Nous développons \mathcal{H}_N^s par rapport aux variables S et σ , on obtient alors une série du type :

$$\mathcal{H}_N^s = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^6} D_{\mathbf{p}}(a_1, \dots, a_N) S^{p_1} \sigma^{p_2} x^{p_3} \tilde{x}^{p_4} y^{p_5} \tilde{y}^{p_6}, \quad (1.12)$$

avec $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_6)$. On appelle ordre total d'un terme associé à une valeur de \mathbf{p} , l'entier $|p_1| + \dots + |p_6|$. Lorsque $N = 1$, nous sommes dans le cas du PTCRC. Dans ce cas, L_4 est un point fixe, on a donc $D\mathcal{H}_N^s(\mathbf{L}_4) = \mathbf{0}$ ce qui revient à dire que les termes d'ordre total 1 dans (1.12) sont nuls. Ceci n'est plus vrai lorsque $N > 1$ où les autres planètes introduisent des termes de taille $\epsilon = \max\{m_j | 1 \leq j \leq N, j \neq p\}$:

$$\mathcal{H}_N^s = \mathcal{H}_1^s - \epsilon G \sum_{j \neq p} \frac{m_j}{\epsilon} \langle \frac{1}{\delta_j} \rangle_{\lambda_p, \lambda_j},$$

Afin de comprendre pourquoi $D\mathcal{H}_N^s(\mathbf{L}_4) \neq \mathbf{0}$ et de mieux comprendre la forme que prend le développement en série de \mathcal{H}_N^s , on réécrit ce développement sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N^s &= q_0(\mathbf{X}) + \epsilon q_1(\mathbf{X}) + \epsilon l(\mathbf{X}) + f_0(\mathbf{X}) + \epsilon f_1(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{X}^t Q_0 \mathbf{X} + \epsilon \mathbf{X}^t Q_1 \mathbf{X} + \epsilon \mathbf{L}^t \mathbf{X} + f_0(\mathbf{X}) + \epsilon f_1(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

où q_0 et q_1 sont des formes quadratiques dont les matrices respectives dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6)$ de \mathbb{C}^6 sont Q_0 et Q_1 . l est une forme linéaire et $\mathbf{L} = l(\mathbf{e}_1)$. f_0 ainsi

que f_1 sont des séries dont les termes sont de degré total supérieur à 3. Nous identifions tout vecteur avec ses coordonnées dans la base canonique de l'espace vectoriel auquel il appartient. Les termes de taille ϵ , $(q_1, l, \text{ et } f_1)$, ne dépendent pas de σ . Nous avons déjà vu que cette série ne contient que des termes de puissance paire en excentricité et inclinaison, l ne dépend donc que de S . Cette même parité en excentricité et inclinaison implique que

$$\mathbf{X}^t(Q_1 + \epsilon Q_2)\mathbf{X} = b_{2,0}S^2 + b_{1,1}S\sigma + b_{0,2}\sigma^2 + c_{1,1}x\tilde{x} + d_{1,1}y\tilde{y}$$

où les coefficients $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ et $d_{i,j}$ sont des fonctions affines de ϵ dépendant des demi-grands axes des planètes. D'après l'expression de \mathcal{H}_N^s définie en (1.13), $D\mathcal{H}_N^s(\mathbf{L}_4) = l \neq \mathbf{0}$. \mathbf{L}_4 n'est donc plus un point fixe. Dans le paragraphe suivant nous démontrons que pour des valeurs suffisamment petites de ϵ il existe un nouveau point fixe $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ se substituant à \mathbf{L}_4 . Dans le paragraphe 1.5 nous donnons une méthode permettant d'approximer ce nouveau point fixe.

1.3.3 Existence des points fixes analogues à \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 dans le PTCRC séculaire perturbé : application au problème à N corps plan

Dans le paragraphe 1.2.2 nous avons vu qu'il existait des orbites périodiques solutions du PTCRC dénommées \mathbf{L}_4 et \mathbf{L}_5 . Ces orbites périodiques se transforment en points fixes lorsque l'on considère le problème séculaire à l'ordre un des masses planétaires..

Soient ϵ un réel et $f : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ définie sur un voisinage de \mathbf{L}_4 . Nous allons démontrer que pour des valeurs de $|\epsilon|$ suffisamment petites la dynamique générée par le hamiltonien $\mathcal{H}_\epsilon = \mathcal{H}_1^s + \epsilon f(X)$ possède également un point fixe voisin de \mathbf{L}_4 que l'on notera $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$. Nous n'écrivons la démonstration que pour \mathbf{L}_4 , la preuve pour un résultat analogue sur \mathbf{L}_5 étant rigoureusement identique.

Ce résultat se déduit du théorème des fonctions implicites.

preuve :

Considérons la fonction $h(\mathbf{X}, \epsilon) = \nabla \mathcal{H}_\epsilon(\mathbf{X}, \epsilon) = \nabla \mathcal{H}_1^s(\mathbf{X}) + \epsilon \nabla f(\mathbf{X})$. \mathbf{L}_4 est un point fixe du PTCRC séculaire, ceci implique que $\nabla \mathcal{H}_1^s(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, et donc que $\nabla h(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$.

Supposons que $\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1^s}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})$ soit inversible. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à ∇h en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pour conclure sur l'existence de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ pour des valeurs de $|\epsilon|$ suffisamment petites.

Ce théorème affirme qu'il existe des voisinages $U \in v(0)$ et $V \in v(\mathbf{L}_4)$ ainsi qu'une fonction $\phi : U \mapsto V$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que

$$\forall \epsilon \in U, \nabla h(\mathbf{X}, \epsilon) = \mathbf{0} \iff \mathbf{X} = \phi(\epsilon),$$

Donc $\forall \epsilon \in U, \nabla \mathcal{H}_\epsilon(\phi(\epsilon)) = 0$, et pour tout ϵ de U il existe un point fixe des équations du mouvement générées par \mathcal{H}_ϵ .

Cependant $\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1^s}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})$ n'est pas inversible. En effet de façon standard (voir par exemple [Mor99]) les valeurs propres de la matrice des dérivées partielles secondes de \mathcal{H}_1^s en $\mathbf{0}$ sont $(\pm i\nu_0, \pm ig_0, \pm is_0)$ respectivement associées à deux fréquences horizontales et une fréquence verticale. Si ν_0 et g_0 sont non nulles ce n'est pas le cas de $s_0 = 0$. Pour pouvoir conclure sur l'existence d'un point fixe on a donc besoin de lever cette dégénérescence. Pour ce faire une méthode classique consiste à passer en repère tournant, les valeurs propres de la hessienne de \mathcal{H}_1^s sont alors translatées de n_1 , et sont donc non nulles.

Une autre possibilité est de se restreindre au cas plan. En effet, comme \mathcal{H}_1^s est pair en (y, \tilde{y}) , on a :

$$\forall (S, \sigma, x, \tilde{x}) \in \mathbb{C}, \frac{\partial \mathcal{H}_1^s}{\partial \tilde{y}}(S, \sigma, x, \tilde{x}, 0, 0) = 0 = \frac{\partial \mathcal{H}_1^s}{\partial y}(S, \sigma, x, \tilde{x}, 0, 0)$$

Par conséquent, le sous espace vectoriel V_P de \mathbb{C}^6 , de dimension 4, défini par la relation $y = \tilde{y} = 0$, est stable par le flot du hamiltonien \mathcal{H}_1^s . On peut donc chercher $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ dans l'espace V_P . La Hessienne de la restriction de \mathcal{H}_1^s à V_P est inversible, on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites pour conclure qu'au voisinage de $\epsilon = 0$ il existe un point fixe $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ voisin de \mathbf{L}_4 appartenant à V_P .

Remarquons que comme \mathcal{H}_1^s est également pair en (x, \tilde{x}) , le sous espace vectoriel V_C de dimension 4 défini par la relation $x = \tilde{x} = 0$ est aussi stable par le flot du hamiltonien \mathcal{H}_1^s . Par conséquent, le sous espace vectoriel $V_{CP} = V_C \cap V_P$ de dimension 2 est stable par le flot du hamiltonien \mathcal{H}_1^s . On peut donc raisonner de même que ci-dessus en considérant la restriction de \mathcal{H}_1^s à V_{CP} pour conclure que $\mathbf{L}_4^N(\epsilon) \in V_{CP}$.

Application au système à N corps séculaire plan :

On peut appliquer ce résultat au problème à N corps séculaire plan en posant :

$$f = -\frac{G}{(360)^2} \sum_{j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}} \frac{m_j}{\epsilon} \int_0^{360} \int_0^{360} \frac{d\lambda_j d\lambda_p}{\delta_j} \quad (1.14)$$

et,

$$\epsilon = \max(m_j, j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}).$$

Ce qui nous permet de conclure que pour des masses planétaires suffisamment petites, il existe un point fixe $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ se substituant à \mathbf{L}_4 . Il est donc pertinent de développer une théorie de perturbation pour calculer les coordonnées de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ (voir chapitre 1.5).

1.4 Développement analytique de \mathcal{H}_1^s au voisinage de \mathbf{L}_4

Dans ce paragraphe on a $N = 1$ et $p = 1$.

1.4.1 Principe du développement

Dans cette partie nous expliquons comment nous calculons le développement du hamiltonien \mathcal{H}_1^s en série entière des variables $S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}$. Pour cela on commence par effectuer le développement de \mathcal{H}_1 en série entière des variables $\mathbf{X} = (S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$ et en série de Fourier de λ_1 . On obtiendra alors l'expression du développement \mathcal{H}_1^s en ne conservant que les termes du développement de \mathcal{H}_1 d'ordre 0 en $e^{i\lambda_1}$. Dans les coordonnées de Poincaré, \mathcal{H}_1 est de la forme :

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu^2}{2(S + \sqrt{\mu a_1})^2} + n_1(S_1 - S) - Gm_1 \left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{1}{r} \right) \quad (1.15)$$

où les termes en facteur de m_1 sont exprimés en fonction de X, S_1 et λ_1 à l'aide du changement de coordonnées T . Dans cette expression les termes d'ordre 0 en m_1 , c'est à dire ceux qui ne sont pas en facteur de m_1 , se développent en utilisant le développement en série entière de $1/(1+x)^2$:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu^2}{2(S + \sqrt{\mu a_1})^2} - n_1 S &= -\frac{\mu^2}{2\mu a_1 (1 + S/\sqrt{\mu a_1})^2} - n_1 S \\ &= -\frac{\mu^2}{2\mu a_1} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{S}{\sqrt{\mu a_1}} \right)^{k-1} - n_1 S. \end{aligned}$$

On constate que cette série ne dépend que de S et que le terme de degré 1 en S a l'expression suivante :

$$\frac{\mu^2 S}{(\mu a_1)^{3/2}} - n_1 S = S \frac{\sqrt{\mu} - n_1 a_1^{3/2}}{a_1^{3/2}} = 0$$

Ce terme s'annule car, d'après la loi des aires, on a $n_1^2 a_1^3 = \mu$. Cette série n'introduit donc pas de termes linéaires. Les termes linéaires sont donc en $\mathcal{O}(m_1)$

Le développement de $1/r$ en série des variables de Poincaré se fait de façon standard (voir par exemple [MD99]), on passe ensuite dans les coordonnées définies en (1.7).

On développe $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 / r_1^3$ de façon classique également.

Par contre, le développement du terme $1/\delta_1$ ne se fait pas de façon classique en utilisant le rapport de demi-grands axes, car au voisinage de \mathbf{L}_4 , $a/a_1 \sim 1$. On commence par développer $(\delta_1/a_1)^2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta_1}{a_1}\right)^2 &= \frac{r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos(v + \varpi - \lambda_1)}{a_1^2} \\ &= 1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2 - 2\frac{r}{a_1} \cos(v + \varpi - \lambda_1) \\ &= 1 + U \end{aligned}$$

$$\text{Avec } U = \left(\frac{r}{a_1}\right)^2 - 2\frac{r}{a_1} \cos(v + \varpi - \lambda_1).$$

En L_4 on a $U = 0$, on développe donc $1/\delta_1 = \frac{1}{a_1\sqrt{1+U}}$ en série de Taylor au voisinage de L_4 après avoir développé U en variables de Poincaré. Il suffit ensuite de passer dans les coordonnées définies en (1.7) pour obtenir le développement souhaité.

1.4.2 Approximation linéaire du PTCRC séculaire

Dans cette partie, nous calculons les fréquences propres du point fixe \mathbf{L}_4 du problème séculaire circulaire. Ce calcul est élémentaire et se trouve fréquemment dans la littérature, dans d'autres coordonnées. Nous le présentons en préambule du paragraphe suivant dans lequel nous ajoutons l'influence directe d'autres planètes. Les équations du mouvement générées par un hamiltonien $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ s'écrivent à l'aide de $\nabla\mathcal{H}(\mathbf{X})$, l'étude du problème linéaire requiert donc un calcul préalable du développement analytique de ce hamiltonien à l'ordre 2. On donne ci-dessous ce calcul pour \mathcal{H}_1^s à l'ordre 2 en \mathbf{X} . On représentera les termes d'ordre total n en les composantes de \mathbf{X} par le symbole $\mathcal{O}(n)$. En suivant la démarche indiquée dans la partie précédente, on trouve la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^s &= n_1 S_1 - \frac{3Gm_1}{2a_1} \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\mu a_1}} S\sigma + \frac{3}{4}\sigma^2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{Gm_1} - \frac{3}{\mu} \right) S^2 \right] \\ &\quad - i \frac{27Gm_1}{8\mu} n_1 x\tilde{x} + cte + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans ce développement les variables (y, \tilde{y}) n'apparaissent pas, ceci entraîne une dégénérescence de la hessienne de \mathcal{H}_1^s à laquelle nous avons fait allusion dans le paragraphe 1.3.3. Nous avons vu dans le paragraphe 1.3.2 que ce développement est pair en les variables e et I , ceci implique en particulier qu'à l'ordre 2 il n'y ait pas de termes croisés entre (S, σ) et (x, \tilde{x}) .

Pour faire apparaître les variables action-angle du problème linéarisé, il suffit de décomposer la partie quadratique de \mathcal{H}_1^s en sommes de carrés de formes linéaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^s = & n_1 S_1 - \frac{3Gm_1}{2a_1} \left[\frac{3}{4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right)^2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{Gm_1} - \frac{4}{\mu} \right) S^2 \right] \\ & - i \frac{27Gm_1}{8\mu} n_1 x \tilde{x} + cte + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Afin de faire apparaître les fréquences propres du système on effectue le changement de variable linéaire symplectique suivant :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \left(\frac{3a_1 Gm_1 \mu}{4(\mu - 4Gm_1)} \right)^{1/4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right) \\ S' &= \left(\frac{4(\mu - 4Gm_1)}{3a_1 Gm_1 \mu} \right)^{1/4} S \end{aligned} \quad (1.18)$$

en laissant inchangées les autres variables.

Dans ces variables, \mathcal{H}_1^s s'écrit :

$$H_{1s} = cte + n_1 S_1 - \nu_0 \frac{\sigma'^2 + S'^2}{2} - i g_0 x \tilde{x} - i s_0 y \tilde{y} + \mathcal{O}(3), \quad (1.19)$$

avec,

$$\begin{aligned} \nu_0 &= n_1 \sqrt{\frac{27(Gm_1)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{Gm_1} - \frac{4}{\mu} \right)} = n_1 \sqrt{\frac{27m_1}{4M}} + \mathcal{O}(m_1^2) \\ g_0 &= \frac{27Gm_1}{8\mu} n_1 = n_1 \frac{27m_1}{8M} + \mathcal{O}(m_1^2) \\ s_0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

où ν_0, g_0 et s_0 sont les fréquences propres de \mathbf{L}_4 . Dans ce modèle simple on voit déjà apparaître une caractéristique importante de ces fréquences propres, $\nu_0 = \mathcal{O}(\sqrt{m_1})$, $g_0 = \mathcal{O}(m_1)$, et $s_0 = 0$. On a donc $\nu_0 \gg g_0 \gg s_0$, cette caractéristique empêche l'existence de résonances secondaires n'impliquant que les fréquences propres des troyens.

1.5 Approximation analytique des coordonnées de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ et de ses fréquences propres

1.5.1 Principe général

Nous avons montré au paragraphe 1.3.2 que le développement du hamiltonien \mathcal{H}_N^s se met sous la forme décrite par l'équation (1.13), mettant en évidence la présence de termes linéaires d'ordre de grandeur ϵ . Nous avons démontré au paragraphe 1.3.3 qu'au voisinage de $\epsilon = 0$ il existe un point fixe $\mathbf{L}_4^N(\epsilon) \in V_{CP}$ voisin de \mathbf{L}_4 . Nous cherchons une approximation des coordonnées de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ qui est un point critique de \mathcal{H}_N^s voisin de \mathbf{L}_4 . Pour cela, nous voulons annuler les termes linéaires de taille ϵ en faisant un changement de variable du type $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} - \epsilon\mathbf{A}$ où \mathbf{A} est un vecteur de dimension 6 de la forme $\mathbf{A} = (A, B, 0, 0, 0, 0) \in V_{CP}$. Nous translatons l'origine de notre développement de manière à obtenir un développement dont les termes linéaires sont au moins d'ordre 2 en ϵ . Nous substituons donc $\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A}$ à \mathbf{X} dans l'équation (1.13) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N^s &= \mathbf{X}^t(Q_0 + \epsilon Q_1)\mathbf{X} + \epsilon L^t \mathbf{X} + f_0(\mathbf{X}) + \epsilon f_1(\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A})^t(Q_0 + \epsilon Q_1)(\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A}) + \epsilon L^t(\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A}) + f_0(\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A}) + \epsilon f_1(\mathbf{X}_1 + \epsilon\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Dans cette expression les termes linéaires d'ordre 1 en ϵ sont :

$$\epsilon \mathbf{A}^t Q_0 \mathbf{X} + \epsilon \mathbf{X}^t Q_0 \mathbf{A} + \epsilon L^t \mathbf{X}$$

Etant donné que les deux premiers termes de cette somme sont des réels et que Q_0 est symétrique, on a $\mathbf{A}^t Q_0 \mathbf{X} = \mathbf{X}^t Q_0 \mathbf{A}$. Il suffit donc de trouver un vecteur \mathbf{A} tel que $2\mathbf{A}^t Q_0 + L^t = 0$ ou bien encore tel que :

$$Q_0 \mathbf{A} = -(1/2)L. \quad (1.21)$$

Comme \mathcal{H}_N^s est pair en (x, \tilde{x}) et en (y, \tilde{y}) , on a $\mathbf{L} \in V_{CP}$.

De plus la restriction l_1 de $l_0 : \mathbf{X} \mapsto Q_0 \mathbf{X}$ à V_{CP} est inversible. On prend donc $\mathbf{A} = l_1^{-1}(\mathbf{X})$. On a alors $D\mathcal{H}_N^s(\epsilon\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, on obtient donc une première approximation de $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ qui est $\mathbf{X} = \epsilon\mathbf{A} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

En faisant ce changement de variable, des termes d'ordre 2 en ϵ apparaissent et on obtient un hamiltonien de la forme :

$$\mathbf{X}_1^t(Q_0 + \epsilon Q_1 + \epsilon^2 Q_2)\mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_2^t \mathbf{X}_1 \epsilon^2 + f_0(\mathbf{X}_1) + \epsilon f_1(\mathbf{X}_1) + \epsilon^2 f_2(\mathbf{X}_1)$$

où les Q_i , $i = 0, 1, 2$ sont des matrices symétriques et \mathbf{L}_2 est un vecteur. Les valeurs propres de $Q_0 + \epsilon Q_1$ nous donnent une approximation des fréquences propres à l'ordre 1 en ϵ .

On réitère alors le procédé de manière à obtenir une approximation à l'ordre n en ϵ . Dans le paragraphe suivant, nous détaillons cet algorithme et donnons les formules de récurrence permettant de calculer $\mathbf{L}_4^N(\epsilon)$ ainsi que ses fréquences propres.

1.5.2 Mise en place d'un algorithme pour approximer $L_4^N(\epsilon)$

Dans le but de simplifier les calculs nous commençons par exprimer le hamiltonien \mathcal{H}_N^s dans les variables $\mathbf{X}' = (S', \sigma', x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$ que nous avons définies au paragraphe 1.4.2. Ceci est intéressant car dans ces coordonnées la matrice de q_0 est diagonale. Comme le changement de variables linéaire symplectique $P : X \mapsto X'$ défini en (1.18) a été choisi de manière à ce que $S' = S$, les termes du développement de \mathcal{H}_N^s de taille ϵ ne dépendent pas de σ' . q_1 ne dépend donc pas de σ' et les règles de d'Alembert imposent que q_1 soit également diagonale dans ces coordonnées. On obtient ainsi un hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}_N^s(X') = \mathcal{H}_N^s(P^{-1}(X))$ dont le développement est du type :

$$\tilde{\mathcal{H}}_N^s = \epsilon b_{0,1} S' + b_{2,0} \sigma'^2 + b_{0,2} S'^2 + \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j} \sigma'^k S'^j + f(S', \sigma', x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) \quad (1.22)$$

où les coefficients $b_{k,j}$ sont réels. f est une série entière des variables \mathbf{X}' ne contenant que des termes d'ordres totaux en $(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$ supérieurs à 2. Nous allons démontrer qu'il existe des constantes réelles (A_1, \dots, A_n) et (B_2, \dots, B_n) telles qu'en effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} S' = S_n + \sum_{1 \leq j \leq n} A_j \epsilon^j \\ \sigma' = \sigma_n + \sum_{2 \leq j \leq n} B_j \epsilon^j, \end{cases} \quad (1.23)$$

dans le hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}_N^s(\mathbf{X}')$, on obtienne un hamiltonien ne contenant plus que des termes linéaires d'ordre $n+1$ en ϵ . f ne contenant que des termes d'ordre total en $(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$ supérieur à 2, on n'introduit pas de termes linéaires en effectuant un changement de variables du type (1.23) dans f . Il suffit donc que le hamiltonien suivant ne contienne que des termes linéaires d'ordre $n+1$ en ϵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N,n}(S_n, \sigma_n) &= (\tilde{\mathcal{H}}_N^s - f) \left(S_n + \sum_{1 \leq j \leq n} A_j \epsilon^j, \sigma_n + \sum_{2 \leq j \leq n} B_j \epsilon^j, x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \right) \\ &= \tilde{\mathcal{H}}_N^s \left(S_n + \sum_{1 \leq j \leq n} A_j \epsilon^j, \sigma_n + \sum_{2 \leq j \leq n} B_j \epsilon^j, 0, 0, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

La recherche des constantes A_j et B_j se fait par récurrence sur n .

A) Première étape :

Dans un premier temps, on veut se ramener à un hamiltonien ne contenant que des termes linéaires d'ordre 2 en ϵ . On cherche des coefficients A_1 et B_1 tels qu'en faisant le changement de variables :

$$\begin{cases} S' = S_1 + \epsilon A_1 \\ \sigma' = \sigma_1 + \epsilon B_1, \end{cases} \quad (1.25)$$

le hamiltonien $\mathcal{H}_{N,1}$ soit de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N,1}(S_1, \sigma_1, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) &= \epsilon^2 b_{0,1}^1 S_1 + \epsilon^2 b_{1,0}^1 \sigma_1 + b_{2,0}^1 \sigma_1^2 + b_{0,2}^1 S_1^2 + \epsilon b_{1,1}^1 \sigma_1 S_1 \\ &+ \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j}^1 \sigma_1^k S_1^j, \end{aligned} \quad (1.26)$$

où les coefficients $b_{k,j}^1$ sont des séries entières en ϵ . Pour cela, on substitue les variable S_1 et σ_1 dans $\tilde{\mathcal{H}}_N^s - f$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N,1}(S_1, \sigma_1) &= (\tilde{\mathcal{H}}_N^s - f)(S_1 + \epsilon A_1, \sigma_1 + \epsilon B_1) \\ &= \epsilon b_{0,1}(S_1 + \epsilon A_1) + b_{2,0}(\sigma_1 + \epsilon B_1)^2 + b_{0,2}(S_1 + \epsilon A_1)^2 \\ &+ \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j}(S_1 + \epsilon A_1)^j (\sigma_1 + \epsilon B_1)^k \end{aligned} \quad (1.27)$$

On cherche des valeurs de A_1 et B_1 telles que les coefficients devant σ_1 et S_1 soient des $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour cela on développe les puissances de $S_1 + \epsilon A_1$ et de $\sigma_1 + \epsilon B_1$ à l'aide du binomôme de Newton :

$$(\sigma_1 + \epsilon B_1)^k (S_1 + \epsilon A_1)^j = \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^j C_k^p C_j^q S_1^q \sigma_1^p \epsilon^{k+j-p-q} B_1^{k-p} A_1^{j-q} \quad (1.28)$$

1. Choix de la valeur de B_1 tel que $b_{1,0}^1 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$

Le coefficient devant σ_1 du développement de $\mathcal{H}_{N,1}$ est :

$$b_{1,0}^1 = 2\epsilon b_{2,0} B_1 + \sum_{k+j \geq 3, k \geq 1} b_{k,j} k \epsilon^{k+j-1} B_1^{k-1} A_1^j.$$

Le terme derrière le signe sommatoire ci-dessus est un $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour annuler le terme de degré 1 en ϵ , il suffit donc de prendre $\boxed{B_1 = 0}$.

2. Choix de la valeur de A_1 tel que $b_{0,1}^1 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$

Le coefficient devant S_1 dans le développement de $\mathcal{H}_{N,1}$ est :

$$b_{0,1}^1 = \epsilon b_{0,1} + 2b_{0,2}\epsilon a + \sum_{k+j \geq 3, j \geq 1} b_{k,j} j \epsilon^{k+j-1} B_1^k A_1^{j-1}.$$

Le terme derrière le signe sommatoire ci-dessus est un $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour annuler les termes de degré 1 en ϵ , il suffit donc de prendre

$$\boxed{A_1 = -\frac{b_{0,1}}{2b_{0,2}}},$$

3. expression des coefficients $b_{i,j}^1$ en fonction des coefficients $b_{i,j}$

On déduit de la valeur des coefficients A_1 et B_1 l'expression des coefficients des termes de degré inférieur à 2 de $\mathcal{H}_{2,1}$:

$$\begin{aligned} b_{0,1}^1 &= \sum_{j \geq 3} b_{0,j} \epsilon^{j-3} A_1^{j-1} \\ b_{1,0}^1 &= \sum_{j \geq 2} b_{1,j} \epsilon^{j-2} A_1^j \\ b_{1,1}^1 &= \sum_{j \geq 2} b_{1,j} j \epsilon^{j-2} A_1^{j-1}. \\ b_{0,2}^1 &= b_{0,2} + \sum_{j \geq 3} b_{0,j} C_j^2 \epsilon^{j-2} A_1^{j-2}. \\ b_{2,0}^1 &= b_{2,0} + \sum_{j \geq 1} b_{2,j} \epsilon^j A_1^j. \end{aligned}$$

On obtient les coefficients des termes de degré supérieur à 2 par la relation :

$$b_{q,p}^1 = \sum_{j \geq q} b_{p,j} C_j^q (\epsilon A_1)^{j-q}.$$

B) Deuxième étape : passage du rang $n - 1$ au rang n

Supposons que l'on ait construit des variables (S_{n-1}, σ_{n-1}) telles que le hamiltonien $\mathcal{H}_{N,n-1}$ soit de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N,n-1}(S_{n-1}, \sigma_{n-1}) &= \epsilon^n b_{0,1}^{n-1} S_{n-1} + \epsilon^n b_{1,0}^{n-1} \sigma_{n-1} + b_{2,0}^{n-1} \sigma_{n-1}^2 + b_{0,2}^{n-1} S_{n-1}^2 \\ &\quad + \epsilon b_{1,1}^{n-1} \sigma_{n-1} S_{n-1} + \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j}^{n-1} \sigma_{n-1}^k S_{n-1}^j \end{aligned} \quad (1.29)$$

Nous cherchons des coefficients A_N et B_N de façon à ce que $\mathcal{H}_{N,n}(S_n, \sigma_n)$ soit de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N,n}(S_n, \sigma_n) &= \epsilon^{n+1} b_{0,1}^n S_n + \epsilon^{n+1} b_{1,0}^n \sigma_n + b_{2,0}^n \sigma_n^2 + b_{0,2}^n S_n^2 \\ &\quad + \epsilon b_{1,1}^n \sigma_n S_n + \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j}^n \sigma_n^k S_n^j \end{aligned}$$

où les coefficients $b_{k,j}^n$ sont des séries entières de ϵ . On substitue donc les variables (S_n, σ_n) dans $\mathcal{H}_{N,n}$:

$$\begin{aligned} H_{N,n}(S_n + \epsilon^n A_n, \sigma_n + \epsilon^n B_n) &= \epsilon^n b_{0,1}^{n-1} (S_n + \epsilon^n A_n) + \epsilon^n b_{1,0}^{n-1} (\sigma_n + \epsilon^n B_n) \\ &\quad + b_{2,0}^{n-1} (\sigma_n + \epsilon^n B_n)^2 + b_{0,2}^{n-1} (S_n + \epsilon^n A_n)^2 \\ &\quad + \epsilon b_{1,1}^{n-1} (\sigma_n + \epsilon^n B_n) (S_n + \epsilon^n A_n) \\ &\quad + \sum_{k+j \geq 3} b_{k,j}^{n-1} (\sigma_n + \epsilon^n B_n)^k (S_n + \epsilon^n A_n)^j \end{aligned}$$

On cherche alors des valeurs des constantes A_n et B_n telles que les coefficients devant S_1 et σ_1 soient des $\mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$. Dans ce but, on développe les puissances de $S_n + \epsilon^n A_n$ et de $\sigma_n + \epsilon^n B_n$ à l'aide du binôme de Newton :

$$(\sigma_n + \epsilon^n B_n)^k (S_n + \epsilon^n A_n)^j = \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^j C_k^p C_j^q S_n^p \sigma_n^q \epsilon^{n(k+j-p-q)} B_n^{k-p} A_n^{j-q}. \quad (1.30)$$

1. **Choix de la valeur de A_n telle que $b_{0,1}^n = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$**

Le coefficient de S_n est :

$$\epsilon^n b_{0,1}^{n-1} + 2\epsilon^n b_{0,2}^{n-1} A_n + \epsilon^{n+1} b_{1,1}^{n-1} B_n + \sum_{k+j \geq 3, j \geq 1} b_{k,j}^{n-1} j \epsilon^{n(k+j-1)} B_n^k A_n^{j-1}. \quad (1.31)$$

Pour annuler les termes en ϵ^n , on prend

$$\boxed{A_n = -\frac{b_{0,1}^{n-1}(0)}{2b_{0,2}^{n-1}(0)}}.$$

2. **Choix de la valeur de B_N telle que $b_{1,0}^n = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$**

Le coefficient de σ_n est :

$$\epsilon^n b_{1,0}^{n-1} + 2\epsilon^n b_{2,0}^{n-1} B_n + \epsilon^{n+1} b_{1,1}^{n-1} A_n + \sum_{k+j \geq 3, k \geq 1} b_{k,j}^{n-1} k \epsilon^{n(k+j-1)} B_n^{k-1} A_n^j. \quad (1.32)$$

Pour annuler les termes en ϵ^n , on prend

$$B_n = -\frac{b_{1,0}^{n-1}(0)}{2b_{2,0}^{n-1}(0)}.$$

3. expression des coefficients $b_{i,j}^n$ en fonction des coefficients $b_{i,j}^{n-1}$

On déduit de ce qui précède l'expression des coefficients des termes de degré total en (S_n, σ_n) inférieur à 2 dans $\mathcal{H}_{N,n}$:

$$b_{0,1}^n = \epsilon^{-1} (b_{0,1}^{n-1} - 2b_{0,2}^{n-1} A_n) + b_{1,1}^{n-1} B_n + \sum_{k+j \geq 3, j \geq 1} b_{k,j}^{n-1} j \epsilon^{n(k+j-2)-1} B_n^k A_n^{j-1}$$

$$b_{1,0}^n = \epsilon^{-1} (b_{1,0}^{n-1} - 2b_{2,0}^{n-1} B_n) + b_{1,1}^{n-1} A_n + \sum_{k+j \geq 3, k \geq 1} b_{k,j}^{n-1} k \epsilon^{n(k+j-2)-1} B_n^{k-1} A_n^j$$

$$b_{1,1}^n = b_{1,1}^{n-1} + \sum_{k+j \geq 3, k \geq 1, j \geq 1} b_{k,j}^{n-1} k j \epsilon^{n(k+j-2)-1} B_n^{k-1} A_n^{j-1}$$

$$b_{2,0}^n = b_{2,0}^{n-1} + \sum_{k+j \geq 3, k \geq 2} b_{k,j}^{n-1} C_k^2 \epsilon^{n(k+j-2)} B_n^{k-2} A_n^j$$

$$b_{0,2}^n = b_{0,2}^{n-1} + \sum_{k+j \geq 3, j \geq 2} b_{k,j}^{n-1} C_j^2 \epsilon^{n(k+j-2)} B_n^k A_n^{j-2}$$

On obtient les coefficients des termes de degré total en (S_n, σ_n) supérieur à 2 par la relation :

$$b_{q,p}^n = \sum_{k \geq p, j \geq q} b_{k,j}^{n-1} C_k^p C_j^q \epsilon^{n(k+j-p-q)} B_n^{k-p} A_n^{j-p}$$

C) Conclusions

Au point de coordonnées

$$\mathbf{X} = \left(\sum_{1 \leq j \leq n} A_j \epsilon^j, \sum_{2 \leq j \leq n} B_j \epsilon^j, 0, 0, 0, 0 \right)$$

la différentielle de \mathcal{H}_N^s est d'ordre $n+1$ en ϵ . On prend ce point comme approximation de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ à l'ordre $n+1$ en ϵ . On obtient ainsi $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ en faisant une simple translation δa en demi-grand axe avec $\delta a = \mathcal{O}(\epsilon)$ ainsi qu'une translation sur σ' plus petite car $\delta\sigma' = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Cependant la forme de la matrice du changement de variable linéaire P implique que σ , lui, soit translaté d'une quantité $\delta\sigma = \mathcal{O}(\epsilon)$.

En effectuant le changement de variable (1.23) dans $\tilde{\mathcal{H}}_N^s$ on obtient une approximation des fréquences propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\nu &= \nu_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} a_j \epsilon^j + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) \\ g &= g_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j \epsilon^j + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) \\ s &= s_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} c_j \epsilon^j + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}),\end{aligned}\tag{1.33}$$

où ν_0 , g_0 , et s_0 sont les fréquences du PTCR. Nous verrons ci-dessous que les principales contributions aux valeurs de g et s sont les coefficients des termes en $x\tilde{x}$ et $y\tilde{y}$ apparaissant dans $\tilde{\mathcal{H}}_N^s$ avant de réaliser le changement de variables (1.23).

1.5.3 Approximation linéaire du Problème à Quatre Corps Restreint Circulaire (PQCRC) séculaire

Dans cette partie, nous donnons des expressions analytiques des fréquences propres ainsi que des coordonnées de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ en effectuant la première étape de l'algorithme présenté ci-dessus. Afin de donner des résultats simples et compréhensibles, nous donnons aussi une expression de ces résultats en les développant en puissances du rapport des demi-grands-axes et de la masse de la planète dont on considère le point de Lagrange.

1.5.3.1 Influence d'une planète extérieure

Dans ce paragraphe on considère l'influence d'une planète qui orbite dans le même plan que la planète dont on considère le point de Lagrange et dont la trajectoire reste à l'extérieur du domaine balayé par $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. C'est le cas par exemple de l'approximation plane de Saturne influant sur les points de Lagrange équilatéraux de Jupiter. On désigne naturellement par l'indice 1 la planète dont on cherche une approximation du point de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. La planète extérieure est désignée par l'indice 2, on a donc $\epsilon = m_2$. Le hamiltonien de ce système s'écrit :

$$\mathcal{H}_2^s = \mathcal{H}_1^s - Gm_2 < \frac{1}{\delta_2} >_{\lambda_1, \lambda_2}\tag{1.34}$$

Pour calculer le développement analytique de $\langle \frac{1}{\delta_2} \rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$ à l'ordre 2, on utilise l'expression donnée dans l'article [LR95] :

$$\langle \frac{a_2}{\delta_2} \rangle_{\lambda_1, \lambda_2} = C_1(\alpha) - iC_3(\alpha_0) \frac{1}{\sqrt{\mu a_1}} (x\tilde{x} - y\tilde{y}) + \mathcal{O}(3) \quad (1.35)$$

avec $\alpha_0 = a_1/a_2$, $\alpha = a/a_2$, $C_1 = (1/2)b_{1/2}^{(0)}(\alpha)$ et $C_3 = (\alpha/4)b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$, les $b_s^{(k)}$ sont les coefficients de Laplace.

Pour finir le calcul de ce développement il nous reste à calculer le développement de $C_1(\alpha)$ en série de S . Cependant, on peut d'ores et déjà obtenir l'expression des fréquences séculaires de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ à l'ordre 1 en ϵ . Etant donné que le calcul n'est pas le même si on considère l'influence d'une planète extérieure ou bien intérieure on désigne respectivement g et s par g^{ext} et s^{ext} . En sommant les développements de $\langle 1/\delta_2 \rangle$ définie en (1.35) et de \mathcal{H}_1^s définie en (1.19) ne dépendant que de $(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$, on obtient :

$$\begin{aligned} g^{ext} &= \frac{27Gm_1}{8\mu} n_1 + \frac{m_2 \alpha_0^2}{4(M + m_1)} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_0) n_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= g_0 \left(1 + \frac{2\epsilon \alpha_0^3}{9 m_1} \right) + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ s^{ext} &= -\frac{m_2 \alpha_0^2}{4(M + m_1)} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_0) n_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -g_0 \frac{2\epsilon \alpha_0^3}{9 m_1} + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ce calcul n'est pas exactement celui des constantes b_1 et c_1 des développements définis en (1.33), car les termes $m_1(S + \epsilon A_1)x\tilde{x}$ et $m_1(S + \epsilon A_1)y\tilde{y}$ contribuent aux valeurs de ces constantes. Cependant, ces contributions sont des $\mathcal{O}(\epsilon m_1)$ et c'est pourquoi nous les négligeons dans un premier temps. Contrairement à s_0 calculé dans le PTCRC, s^{ext} n'est pas nulle, on enlève donc la dégénérescence de la hessienne du hamiltonien en ajoutant une planète à notre système. Remarquons que, dans cette approximation, les contributions apportées par la deuxième planète aux valeurs de g^{ext} et s^{ext} sont opposées. Le calcul de ν^{ext} à l'ordre 1 en ϵ demande plus de travail. Nous devons calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de $C_1(\alpha)$ en α_0 puis exprimer ce développement en fonction de S . On commence par calculer les dérivées du coefficient de Laplace $b_{1/2}^{(0)}$ en utilisant les relations suivantes énoncées dans le livre de Brouwer et Clemence [BC61] :

$$\alpha \frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} = \frac{2s\alpha^2 b_s^{(0)} + 2(s-1)\alpha b_s^{(1)}}{1-\alpha^2}$$

$$\alpha \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} = \frac{2s\alpha b_s^{(0)} + [(2s-1)\alpha^2 - 1]b_s^{(1)}}{1-\alpha^2}.$$

On en déduit l'expression des dérivées première et seconde de $b_{1/2}^{(0)}$:

$$\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{\alpha_0 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1-\alpha_0^2}$$

$$\frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{d^2 \alpha}(\alpha_0) = \frac{2\alpha_0^3 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) + (1-3\alpha_0^2)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{\alpha_0(1-\alpha_0^2)^2}$$
(1.37)

On obtient donc le développement de Taylor à l'ordre 2 de $b_{1/2}^{(0)}$:

$$b_{1/2}^{(0)}(\alpha) = b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) + \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{d^2 \alpha}(\alpha_0) \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2}.$$
(1.38)

On exprime $b_{1/2}^{(0)}$ en fonction de S en utilisant le changement de variables :

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{2\alpha_0 S}{\sqrt{\mu a_1}} + \frac{\alpha_0 S^2}{\mu a_1}$$
(1.39)

En substituant le développement de $b_{1/2}^{(0)}$ en fonction de S dans l'expression de $\langle \frac{a_2}{\delta^2} \rangle$ définie en (1.35) on obtient le développement de \mathcal{H}_2^s en fonction de \mathbf{X} :

$$H_2^s = n_1 S_1 - \frac{3Gm_1}{2a_1} \left[\frac{3}{4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right)^2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{Gm_1} + \frac{d_0 - 4}{\mu} \right) S^2 \right]$$
(1.40)

$$+ b_0 S - i g^{ext} x \tilde{x} - i s^{ext} y \tilde{y} + Cte + \mathcal{O}(3)$$

où les constantes b_0 et d_0 sont déduites du développement de Taylor de $C_1(\alpha)$:

$$b_0 = -\frac{m_2 \alpha_0^2}{M + m_1} \frac{\alpha_0 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} n_1 = -\epsilon \alpha_0^3 \frac{n_1}{M + m_1} + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5)$$

$$d_0 = \frac{m_2 \alpha_0^2}{3m_1} \left(\frac{(\alpha_0 + 3\alpha_0^3)b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) + (1 - 5\alpha_0^2)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{(1 - \alpha_0^2)^2} \right) = \frac{\epsilon \alpha_0^3}{m_1} + \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon}{m_1} \alpha_0^5 \right)$$

Dans ce développement apparaissent des termes linéaires $b_0 S$ avec $b_0 = \mathcal{O}(\epsilon)$. Afin de faire apparaître les fréquences propres du système, on doit faire un changement de variables $(S, \sigma) \mapsto (S', \sigma')$ de manière à n'avoir que des termes carrés en (S', σ') . On doit donc éliminer le terme linéaire $\mathcal{O}(\epsilon)S$ en faisant une translation sur S du type $S = S_1 + \epsilon A_1^{ext}$. On réalise ainsi la première étape de l'algorithme présenté dans le paragraphe 1.5.2 en faisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\sigma' &= \left(\frac{3a_1 G m_1 \mu}{4(\mu - 4Gm_1 + d_0)} \right)^{1/4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right) \\ S' &= \left(\frac{4(\mu - 4Gm_1 + d_0)}{3a_1 G m_1 \mu} \right)^{1/4} (S + A_1^{ext})\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}A_1^{ext} &= \frac{a_1^2 \epsilon \alpha_0^2}{3(M - 3m_1)} \left(\frac{\alpha_0 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) n_1 \\ &= \frac{a_1^2 \epsilon \alpha_0^3}{3(M - 3m_1)} n_1 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Dans les coordonnées $(S', \sigma', x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$, \mathcal{H}_2^s a pour expression :

$$\mathcal{H}_2^s = cte - \nu^{ext} \frac{\sigma'^2 + S'^2}{2} - ig^{ext} x \tilde{x} - is^{ext} y \tilde{y} + \mathcal{O}(3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.41)$$

avec

$$\nu^{ext} = n_1 \sqrt{\frac{27(Gm_1)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{Gm_1} - \frac{4}{\mu} + \frac{d_0}{\mu} \right)} \quad (1.42)$$

Les coordonnées du point de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ du PQCRC séculaire à l'ordre 1 en ϵ sont celles du PTCRC séculaire traduites dans la direction des demi-grand axes d'une quantité δa^{ext} :

$$\begin{aligned}\delta a^{ext} &= -\frac{2}{3} \frac{a_1}{M - 3m_1} \epsilon \alpha_0^2 \left(\frac{\alpha_0 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{2}{3} a_1 \epsilon \alpha_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned} \quad (1.43)$$

et dans la direction de l'angle σ d'une quantité $\delta \sigma^{ext}$:

$$\begin{aligned}
\delta\sigma^{ext} &= \frac{2}{3\sqrt{3}(M-3m_1)}\epsilon\alpha_0^2 \left(\frac{\alpha_0 b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon\alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}\epsilon\alpha_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon\alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

La fréquence de libration ν^{ext} est proche de ν_0 :

$$\begin{aligned}
\delta\nu^{ext} &= \nu^{ext} - \nu_0 = \frac{3\sqrt{3}m_1}{4(M+m_1)\sqrt{M-3m_1}}\epsilon\alpha_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon\sqrt{m_1}\alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{3m_1}\epsilon\alpha_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon\sqrt{m_1}\alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1^{3/2}\alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

1.5.3.2 application au point de Lagrange de Jupiter

Dans ce paragraphe, nous utilisons les calculs présentés ci-dessus pour décrire l'évolution du point de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ de Jupiter dans le problème à quatre corps restreint, Soleil-Jupiter-Saturne + particule sans masse. Nous reprenons les notations du paragraphe précédent, l'indice 1 désigne Jupiter, et l'indice 2 fait référence à Saturne. Saturne est la planète perturbant le PTCR, et on a $\epsilon = m_2 \simeq 3 \cdot 10^{-4} M \simeq m_1/3$. Dans une configuration proche de la situation actuelle $a_1 \simeq 5.204$ et $a_2 \simeq 9.582$. Dans l'approximation séculaire du PTCR, $\nu_0 \simeq 8746.1$, $g_0 \simeq 351.5$, $s_0 = 0$. Si on rajoute l'influence de Saturne, l'approximation à l'ordre 1 en ϵ translate ces fréquences : $\delta\nu^{ext} \simeq 0.54$, $\delta g^{ext} = -\delta s^{ext} \simeq 7.37$. La valeur de ν est modifiée par la présence de Saturne d'à peine 0.006%. g est un peu plus affectée et subit une translation de l'ordre de 0.02%, tandis que s est tradlatée de manière conséquente puisqu'elle passe de 0 à 7.37, levant ainsi la dégénérescence de la hessienne du hamiltonien en $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. L'influence de Saturne translate également la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ dans le plan (a, σ) , d'une quantité $(\delta a^{ext}, \delta \sigma^{ext}) \simeq (-2.3 \cdot 10^{-4}, 5.38)$.

Afin de visualiser l'évolution de ces quantités lorsqu'on modifie seulement le demi-grand axe de Saturne a_2 , nous représentons leurs évolutions sur la figure *fig.1* pour $a_2 \in [8.1, 9.65]$. Lorsque a_2 varie, g_0 et ν_0 restent bien sûr inchangées ; par conséquent, nous avons représenté sur les deux graphiques de gauche de la figure *fig.1*, l'évolution des décalages des fréquences $\delta\nu^{ext}(a_2)$ (en haut), et $\delta g^{ext}(a_2)$, en bas. Nous n'avons pas représenté $s^{ext}(a_2)$, car comme le montre la formule (1.36), $s^{ext}(a_2) = -\delta g^{ext}$. Ces décalages de fréquences diminuent lorsque Saturne s'éloigne de Jupiter. Pour $a_2 \simeq 8.4$, remarquons que ces décalages sont le double de ceux correspondant à la situation actuelle. Néanmoins, ces translations restent faibles relativement aux valeurs de ν_0 et g_0 . Nous utiliserons cette caractéristique au chapitre 4, pour élaborer une méthode permettant de prédire l'apparition de résonances secondaires dans l'essaim des troyens. La seule

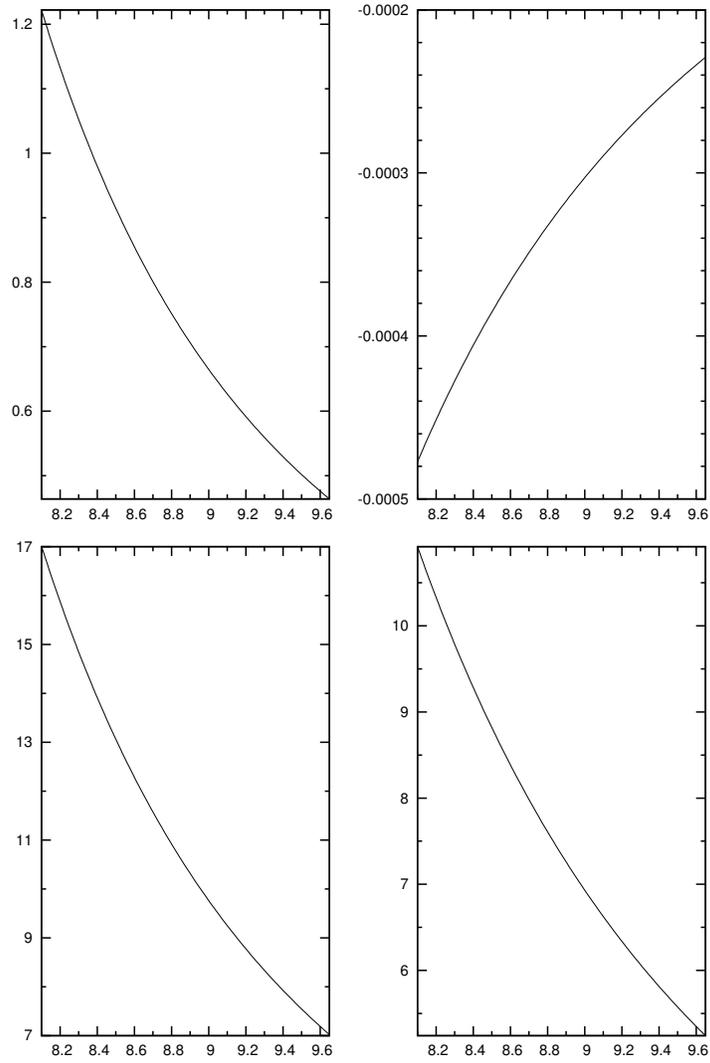


FIG. 1 – Ces figures illustrent l'évolution du point de Lagrange \mathbf{L}_4 de Jupiter du problème linéaire séculaire à 4 corps restreint Soleil - Jupiter - Saturne + particule sans masse, lorsqu'on fait varier le demi-grand axe de Saturne dans l'intervalle $[8.1, 9.65]$. En haut à gauche : $g_0^{ext} - g_0$; en bas à gauche : $\nu_0^{ext} - \nu_0$; en haut à droite : δa^{ext} ; et en bas à droite : $\delta \sigma^{ext}$ exprimé en secondes d'arcs.

fréquence subissant des variations notables est s^{ext} qui passe de -17 pour $a_2 \simeq 8.4$ à -7 pour $a_2 \simeq 9.6$.

Sur les graphiques de droite de la figure *fig.1*, nous représentons l'évolution de $\delta\sigma^{ext}$ (en bas) et δa^{ext} (en haut). Les valeurs de δa^{ext} représentées sur cette figure, ne sont pas exactement le résultat de l'application de la formule (1.43). Cette formule a été élaborée de manière à obtenir une expression simple et intuitive. Pour obtenir cette expression, nous avons linéarisé le changement de variables qui permet de passer de S à δa^{ext} : $\delta a^{ext} = S^2/\mu + 2\sqrt{a_1/\mu}S$. Pour tracer la courbe $\delta a^{ext}(a_2)$, nous avons gardé l'expression exacte de ce changement de variables. Les quantités δa^{ext} et $\delta\sigma^{ext}$ représentées ne sont donc pas proportionnelles. Cependant les équations (1.43) et (1.44) restent une bonne approximation des valeurs que nous représentons. Selon leurs expressions, on a $\delta a^{ext} \simeq -a_1\sqrt{3}\delta\sigma^{ext}$. C'est ce qui apparaît sur la figure *fig.1*. De même que les décalages en fréquences, les translations de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ par rapport au point équilatéral du PTCR, sont d'autant plus grandes que Saturne se rapproche de Jupiter. Ceci est dû au fait que l'influence de Saturne diminue lorsqu' a_2 augmente. Pour $a_2 \simeq 8.4$, les translations δa^{ext} et $\delta\sigma^{ext}$ sont le double de leurs valeurs actuelles.

1.5.3.3 Influence d'une planète intérieure

Dans ce paragraphe on considère l'influence d'une planète qui orbite dans le même plan que la planète dont on considère le point de Lagrange et dont la trajectoire reste à l'intérieur du domaine balayé par $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. C'est le cas par exemple de l'approximation plane de Jupiter agissant sur les point de Lagrange équilatéraux de Saturne, Uranus, ou Neptune. Comme dans le paragraphe précédent on choisit l'indice 1 pour désigner les coordonnées de la planète dont on cherche une approximation de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ et l'indice 2 pour désigner celles d'une planète plus proche du soleil. On a donc $\epsilon = m_2$. Dans ce paragraphe on désigne respectivement g et s par g^{int} et s^{int} . Le développement de \mathcal{H}_1^s est explicité dans le paragraphe 1.4. Il nous reste donc à développer $\langle 1/\delta_2 \rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$. Ce calcul commence de la même façon que celui effectué dans le paragraphe 1.5.3.1, mais cette fois-ci $\alpha = a_2/a$. On calcule donc d'abord le développement de $\langle \frac{a}{\delta_2} \rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$ dans les variables $(\alpha - \alpha_0, x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$. Ce calcul est rigoureusement identique à celui effectué dans le paragraphe 1.5.3.1. On utilise ensuite le changement de variables :

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{2\alpha_0}{\sqrt{\mu a_1}}S + \frac{3\alpha_0}{\mu a_1}S^2 + \mathcal{O}(S^3), \quad (1.46)$$

pour obtenir le développement de $\langle \frac{a}{\delta_2} \rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$ dans les variables canoniques $(S, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$. On trouve ainsi l'expression du développement de \mathcal{H}_2^s :

$$H_2^s = n_1 S_1 - \frac{3Gm_1}{2a_1} \left[\frac{3}{4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right)^2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{Gm_1} + \frac{d_0 - 4}{\mu} \right) S^2 \right] \quad (1.47)$$

$$+ b_0 S - i g^{int} x \tilde{x} - i s^{int} y \tilde{y} + Cte + \mathcal{O}(3)$$

où les constantes $b_0, d_0, g^{int}, s^{int}$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{m_2}{M + m_1} \frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - \alpha_0 b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} n_1 \\
&= 2\epsilon n_1 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^2) \\
d_0 &= \frac{m_2}{3m_1} \left(\frac{(3 + \alpha_0^2) b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) + (-5\alpha_0 + \alpha_0^3) b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{(1 - \alpha_0^2)^2} \right) \\
&= 2 \frac{\epsilon}{m_1} + \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon}{m_1} \alpha_0^2 \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g^{int} &= \frac{27m_1}{8(M + m_1)} n_1 + \frac{\epsilon \alpha_0}{4(M + m_1)} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_0) n_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= g_0 \left(1 + \frac{2}{9} \frac{\epsilon \alpha_0^2}{m_1} \right) + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^4) + \mathcal{O}(\epsilon m_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
s^{int} &= -\frac{\epsilon \alpha_0}{4(M + m_1)} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_0) n_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= -g_0 \frac{2}{9} \frac{\epsilon \alpha_0^2}{m_1} + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^4) + \mathcal{O}(\epsilon m_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{1.48}$$

De même que dans le cas de l'influence d'une planète extérieure, les contributions apportées par la deuxième planète aux valeurs de g^{int} et s^{int} sont opposées. En faisant le changement de variables suivant dans le développement de \mathcal{H}_2^s :

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \left(\frac{3a_1 G m_1 \mu}{4(\mu - 4Gm_1 + d_0)} \right)^{1/4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_1}} S \right) \\
S' &= \left(\frac{4(\mu - 4Gm_1 + d_0)}{3a_1 G m_1 \mu} \right)^{1/4} (S + A_1^{int}),
\end{aligned}$$

où la constante A_1^{int} est définie par :

$$\begin{aligned}
A_1^{int} &= -\frac{a_1^2 \epsilon}{3(M - 3m_1)} \left(\frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - \alpha_0 b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) n_1, \\
&= -\frac{a_1^2 \epsilon \alpha_0}{3(M - 3m_1)} n_1 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5)
\end{aligned}$$

on obtient

$$\mathcal{H}_2^s = cte - \nu^{int} \frac{\sigma'^2 + S'^2}{2} - ig^{int} x\tilde{x} - is^{int} y\tilde{y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.49)$$

avec,

$$\nu^{int} = n_1 \sqrt{\frac{27(Gm_1)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{Gm_1} - \frac{4}{\mu} + \frac{d_0}{\mu} \right)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.50)$$

Les coordonnées du point de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ du PQCRC séculaires à l'ordre 1 en ϵ sont celles du PTCRC séculaire translatées dans la direction des demi-grand axes d'une quantité δa^{int} :

$$\begin{aligned} \delta a^{int} &= \frac{2}{3} \frac{a_1}{M - 3m_1} \epsilon \left(\frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - \alpha_0 b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{2}{3} a_1 \epsilon \alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (1.51)$$

et dans la direction de l'angle σ d'une quantité $\delta \sigma^{int}$:

$$\begin{aligned} \delta \sigma^{int} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}(M - 3m_1)} \epsilon \left(\frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - \alpha_0 b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0)}{1 - \alpha_0^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \epsilon \alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^5) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.52)$$

La fréquence de libration ν^{ext} est proche de ν_0 :

$$\begin{aligned} \delta \nu^{int} &= \nu^{int} - \nu_0 = \frac{3\sqrt{3m_1}}{4(M + m_1)\sqrt{M - 3m_1}} \epsilon \alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon \sqrt{m_1} \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{3m_1} \epsilon \alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon \sqrt{m_1} \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon m_1^{3/2} \alpha_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Dans le cas de l'influence d'une planète intérieure comme de celle d'une planète extérieure, un point fixe se substitue à \mathbf{L}_4 . Ses nouvelles coordonnées sont $(a, \sigma, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = (a + \delta a, \delta \sigma, 0, 0, 0, 0)$, seul le demi-grand axe et la longitude moyenne du point de Lagrange sont donc modifiés. Sous l'influence d'une planète extérieure $\delta a < 0$ et $\delta \sigma > 0$, $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ est donc décalé vers de plus petits demi-grands axes et de plus grandes longitudes moyennes. Sous l'influence d'une planète intérieur $\delta a > 0$ et $\delta \sigma < 0$, $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ est donc décalé vers de plus

grands demi-grands axes et de plus petites longitudes moyennes. On peut également remarquer que $\delta a^{ext}/a_1 \simeq -\alpha_0^2(\delta a^{int}/a_1)$ et que $\delta\sigma^{ext} \simeq -\alpha_0^2(\delta\sigma^{int})$. Néanmoins nous avons pris des notations différentes pour les calculs concernant l'influence de planètes intérieures et extérieures. Dans l'expression de δa^{ext} l'indice 1 désigne la planète interne alors que dans le calcul de δa^{int} cet indice désigne la planète externe. Ces relations signifient donc que le demi-grand axe et la longitude moyenne du point de Lagrange d'une planète 1 sont plus décalés sous l'influence d'une planète intérieure 2 qu'ils ne le seraient si on intervertissait les positions des planètes 1 et 2. En ce sens, les planètes extérieures ont donc moins d'influence que les planètes intérieures sur la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. On a également $\delta\nu^{ext} \simeq \alpha_0^2\delta\nu^{int}$, $s^{ext} \simeq \alpha_0 s^{int}$, et $\delta g^{ext} = \alpha_0\delta g^{int}$ avec $\delta g^{ext} = g^{ext} - g_0$ et $\delta g^{int} = g^{int} - g_0$. Dans le même sens que précédemment les planètes extérieures ont donc également moins d'influence que les planètes intérieures sur les valeurs des fréquences propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. Cette asymétrie est moins prononcée pour les fréquences séculaires.

1.5.3.4 application au point de Lagrange de Saturne

Dans ce paragraphe, nous utilisons les calculs présentés ci-dessus pour décrire l'évolution du point de lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ de Saturne dans le problème à quatre corps restreint, Soleil-Jupiter-Saturne + particule sans masse. Nous reprenons l'étude du paragraphe 1.5.3.2, mais cette fois-ci en étudiant le point de Lagrange de Saturne au lieu de celui de Jupiter. Les indices 1 et 2 sont donc inversés par rapport aux notations de ce paragraphe. L'indice 1 désigne Saturne, l'indice 2 fait référence à Jupiter et on a $\epsilon = m_2 \simeq 10^{-3}$. Nous allons étudier l'évolution de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ lorsque a_1 varie dans l'intervalle [8.1, 9.65]. Cette fois-ci, il faut décomposer l'évolution des coordonnées et des fréquences propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ en deux. D'une part, le demi-grand axe a_0 et les fréquences propres (ν_0, g_0) du point équilatéral du PTCR varient quand a_1 varie. D'autre part, il faut prendre en considération les translations dues à la perturbation du PTCR par la planète intérieure Jupiter : δa^{int} , $\delta\sigma^{int}$, $\delta\nu^{int}$, δg^{int} , δs^{int} . Nous résumons ces deux types de variations sur la figure *fig.2*. Les fréquences ν_0 et de g_0 évoluent proportionnellement au moyen mouvement n_1 . Elles sont représentées sur les graphiques de gauche, respectivement, en haut et au milieu. Les variations de $\delta\nu^{int}(a_1)$ et de $\delta g^{int}(a_1)$, apparaissent sur les figures de droite respectivement en haut et au milieu. La translation $\delta\nu^{int}(a_1)$ dépasse 6 pour $a_1 \simeq 8.1$, ce qui représente 0.25% de ν_0 . Cette translation est 100 fois plus importante que celle observée sur les troyens de Jupiter au paragraphe 1.5.3.4, ceci est dû bien sûr au fait que la masse de Jupiter est plus importante que celle de Saturne, mais aussi au fait que la perturbation d'une planète intérieure est plus forte que celle d'une planète extérieure. Néanmoins, cette perturbation reste faible par rapport aux variations de ν_0 . Ce n'est pas le cas de la fréquence g . En effet, sur les figures du milieu de la figure *fig.2*, il apparaît que g_0 et δg^{ext} ont des valeurs comparables. Le rapport $\delta g^{ext}/g_0$ augmente de manière significative lorsque a_1 diminue, il vaut 0.41 pour $a_1 = 9.65$ et 0.81 pour $a_1 \simeq 8.1$. Ceci met en avant l'influence croissante de Saturne sur $\mathbf{L}_4(\epsilon)$, lorsque Saturne se rapproche de Jupiter. La fréquence la plus altérée par la présence de Jupiter est $s = -\delta g^{int}$ qui

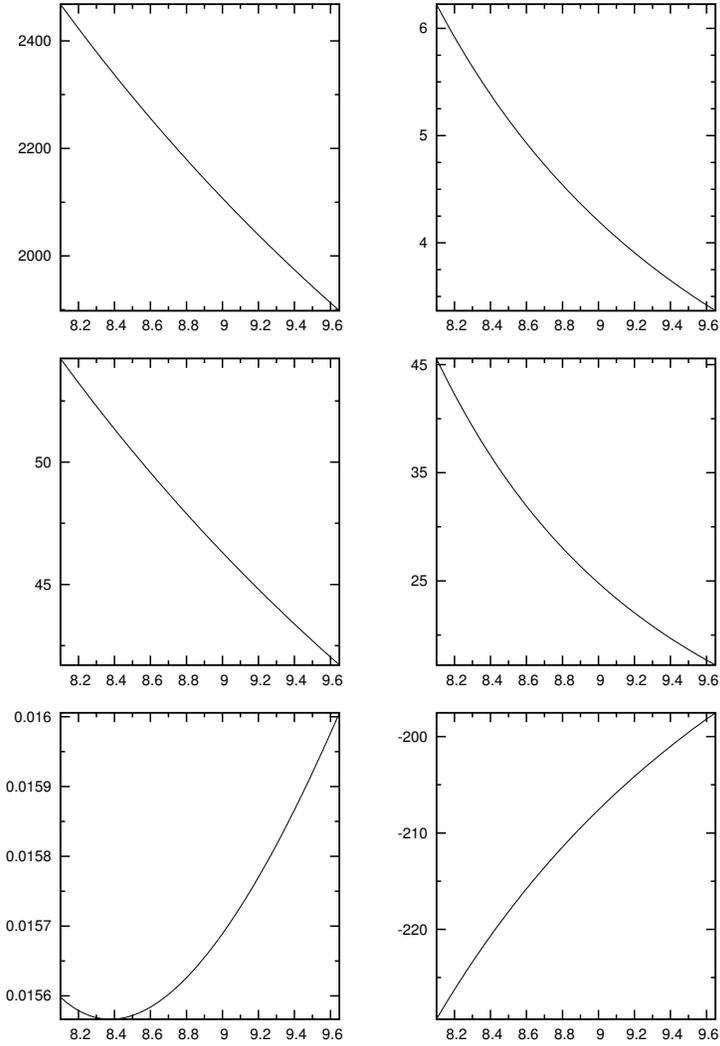


FIG. 2 – Ces figures illustrent l'évolution du point de Lagrange de Jupiter du problème séculaire à 4 corps restreint Soleil- Jupiter-Saturne+particule sans masse, lorsqu'on fait varier le demi-grand axe de Saturne dans l'intervalle $[8.1, 9.65]$. En haut à gauche : ν_0 ; au milieu à gauche : $\nu_0^{int} - \nu_0$; en bas à gauche : δa^{int} ; en haut à droite : g_0 ; au milieu à droite : $g_0^{int} - g_0$; en bas à droite : $\delta \sigma^{int}$ exprimé en seconde d'arc.

atteint -46 pour $a_1 = 8.1$. Nous verrons au chapitre 5 que ces variations importantes des fréquences séculaires jouent un rôle important dans l'apparition de résonances séculaires dans l'essaim des troyens de Saturne. Sur les deux figures du bas, nous représentons à gauche et à droite les variations respectives de δa^{int} et $\delta \sigma^{int}$. Remarquons que sur cet intervalle, les variations de $\delta \sigma^{int}$ sont de l'ordre de 14% de $\delta \sigma^{int}(a_1 = 8.1)$, elles sont donc beaucoup plus importantes que celles de δa^{int} qui sont quant à elles de l'ordre de 2.5% de $\delta \sigma^{int}(a_1 = 8.1)$. On peut comprendre cette propriété en considérant l'approximation de l'équation (1.51) :

$$\delta a^{int} = \frac{2}{3}a_1\epsilon\alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon\alpha_0^3 + \epsilon m_1\alpha_0),$$

or $(2/3)a_1\epsilon\alpha_0 = (2/3)\epsilon a_2$ est indépendant de a_1 , les variations de δa^{int} sont donc dues aux termes de plus grands ordre de cette relation $\mathcal{O}(\epsilon\alpha_0^3 + \epsilon m_1\alpha_0)$. Les variations de σ quant-à elles sont données par l'équation (1.52) :

$$\delta \sigma^{int} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\epsilon\alpha_0 + \mathcal{O}(\epsilon\alpha_0^5 + \epsilon m_1\alpha_0^3),$$

le terme de plus faible ordre de cette équation est proportionnel à $\epsilon a_2/a_1$, et varie de façon inversement proportionnelle à a_1 . Il en résulte que, contrairement à l'intuition selon laquelle $cL_4(\epsilon)$ est moins affecté par Jupiter lorsque Saturne est loin de Jupiter, la courbe δa^{int} décroît sur l'intervalle $[8.1, 8.379]$, atteignant un minimal local en $a \simeq 8.379$, et croît sur l'intervalle $[8.379, 9.65]$.

1.5.4 Influence de $N - 1$ planètes

Dans ce modèle, on considère un système à N planètes ayant des trajectoires circulaires coplanaires. On superpose donc les effets précédemment étudiés de planètes internes et externes. Cette fois-ci, on numérote de 1 à N les planètes par ordre croissant selon leur distance au soleil. On s'intéresse aux points de Lagrange de la p -ième planète. Le hamiltonien de notre système s'écrit :

$$\mathcal{H}_N^s = \mathcal{H}_1^s - \epsilon G \sum_{j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}} \frac{m_j}{\epsilon} < \frac{1}{\delta_j} >_{\lambda_p, \lambda_j} \quad (1.54)$$

Afin de développer le hamiltonien au voisinage du point équilatéral proche de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ nous travaillons dans les variables $(S, \sigma, S_p, \sigma_p)$ définies en (1.7). Notons $\alpha_j = a_j/a$ ainsi que $\alpha_j^0 = a_j/a_p$ pour $j < p$ et $\alpha_j = a/a_j$ ainsi que $\alpha_j^0 = a_p/a_j$ pour $j > p$. Le développement du hamiltonien séculaire à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^N = & \mathcal{H}_1^s + \sum_{j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}} n_j \Lambda_j - \sum_{j < p} \frac{Gm_j}{a_p} \left(C_1(\alpha_j) - i \frac{C_3(\alpha_j^0)}{\sqrt{\mu a_p}} (x\tilde{x} - y\tilde{y}) \right) \\ & - \sum_{j > p} \frac{Gm_j}{a_j} \left(C_1(\alpha_j) - i \frac{C_3(\alpha_j^0)}{\sqrt{\mu a_p}} (x\tilde{x} - y\tilde{y}) \right) + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (1.55)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^s &= n_p S_p - \frac{3Gm_p}{2a_p} \left[\frac{3}{4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_p}} S \right)^2 + \frac{1}{a_p} \left(\frac{1}{Gm_p} - \frac{4}{\mu} \right) S^2 \right] \\ &\quad - i \frac{27Gm_p}{8\mu} n_p x \tilde{x} + Cte + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (1.56)$$

Afin d'obtenir un hamiltonien sous forme diagonale, on effectue le changement de variables canoniques suivant :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \left(\frac{3a_p Gm_p \mu}{4(\mu - 4Gm_p + \sum_{j \in \{1..N\} - \{p\}} d_j)} \right)^{1/4} \left(\sigma + \frac{2}{\sqrt{3\mu a_p}} S \right) \\ S' &= \left(\frac{4(\mu - 4Gm_p + \sum_{j \in \{1..N\} - \{p\}} d_j)}{3a_p Gm_p \mu} \right)^{1/4} \left(S + \sum_{j \in \{1..N\} - \{p\}} \beta_j \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_j &= -\frac{a_p^2 m_j n_p (b_{1/2}^0(\alpha_j^0) - \alpha_j^0 b_{3/2}^0(\alpha_j^0))}{3(M - 3m_p)(1 - \alpha_0^2)}, \text{ pour } 0 < j < p \\ \beta_j &= (\alpha_j^0)^2 \left(\frac{a_p^2 m_j n_p (\alpha_j^0 b_{1/2}^0(\alpha_j^0) - b_{3/2}^0(\alpha_j^0))}{3(M - 3m_p)(1 - \alpha_0^2)} \right), \text{ pour } p < j < N + 1 \\ d_j &= \frac{m_j}{3m_p} \left(\frac{(3 + (\alpha_j^0)^2) b_{1/2}^{(0)}(\alpha_j^0) + (-5\alpha_j^0 + (\alpha_j^0)^3) b_{1/2}^{(1)}(\alpha_j^0)}{(1 - (\alpha_j^0)^2)^2} \right), \text{ pour } 0 < j < p \\ d_j &= \frac{m_j (\alpha_j^0)^2}{3m_p} \left(\frac{(\alpha_j^0 + 3(\alpha_j^0)^3) b_{1/2}^{(0)}(\alpha_j^0) + (1 - 5(\alpha_j^0)^2) b_{1/2}^{(1)}(\alpha_j^0)}{(1 - (\alpha_j^0)^2)^2} \right), \text{ pour } p < j < N + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^N &= cte + n_p S_p + \sum_{j \in \{1..N\} - \{p\}} n_j \Lambda_j - \nu_0^{tot} \frac{\sigma'^2 + S'^2}{2} - i g_0^{tot} x \tilde{x} - i s_0^{tot} y \tilde{y} \\ &\quad + \mathcal{O}(3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.57)$$

où $(\nu_0^{tot}, g_0^{tot}, s_0^{tot})$ sont des approximations à l'ordre 1 en ϵ des fréquences propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
\nu_0^{tot} &= \sqrt{\frac{27(Gm_p)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{Gm_p} - \frac{4}{\mu} + \frac{\sum_{j \in \{1, \dots, N\} - \{p\}} d_j}{\mu} \right)} n_p + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
g_0^{tot} &= \frac{27Gm_p}{8\mu} n_p + \sum_{j < p} \frac{Gm_j}{4\mu} \alpha_j^0 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_j^0) n_p + \sum_{j > p} \frac{Gm_j}{4\mu} (\alpha_j^0)^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_j^0) n_p + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.58) \\
s_0^{tot} &= -\sum_{j < p} \frac{Gm_j}{4\mu} \alpha_j^0 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_j^0) n_p - \sum_{j > p} \frac{Gm_j}{4\mu} (\alpha_j^0)^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_j^0) n_p + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Les coordonnées du point de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ sont celles du PTCRC séculaire translatées dans la direction des demi-grands axes d'une quantité δa :

$$\begin{aligned}
\delta a &= \frac{2a_p}{3(M - 3m_1)} \left(\sum_{j < p} m_j \frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0^j) - \alpha_0^j b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0^j)}{1 - (\alpha_0^j)^2} - \sum_{j > p} m_j (\alpha_0^j)^2 \frac{\alpha_0^j b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0^j) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0^j)}{1 - (\alpha_0^j)^2} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{2}{3} a_p \left(\sum_{j < p} m_j \alpha_0^j - \sum_{j > p} m_j (\alpha_0^j)^3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.59)
\end{aligned}$$

et dans la direction de l'angle σ d'une quantité :

$$\begin{aligned}
\delta \sigma &= \frac{-2}{3\sqrt{3}(M - 3m_1)} \left(\sum_{j < p} m_j \frac{b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0^j) - \alpha_0^j b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0^j)}{1 - (\alpha_0^j)^2} - \sum_{j > p} m_j (\alpha_0^j)^2 \frac{\alpha_0^j b_{1/2}^{(0)}(\alpha_0^j) - b_{1/2}^{(1)}(\alpha_0^j)}{1 - (\alpha_0^j)^2} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{-2}{3\sqrt{3}} \left(\sum_{j < p} m_j \alpha_0^j - \sum_{j > p} m_j (\alpha_0^j)^3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon \alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon m_1 \alpha_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.60)
\end{aligned}$$

Ces quantités peuvent être positives ou négatives. Si $p = 1$, δa est négatif. Lorsque p augmente, le nombre de planètes, dont l'interaction apporte des contributions positives à la valeur de δa , augmente. Pour $p = N - 1$, δa est positif. Inversement, pour $\delta \sigma$, si $p = 1$,

$\delta\sigma$ est positif. Lorsque p augmente, le nombre de planètes, dont l'interaction apporte des contributions négatives à la valeur de $\delta\sigma$, augmente. Pour $p = N - 1$, $\delta\sigma$ est négatif.

La fréquence de libration est proche de ν_0 , l'expression de $\delta\nu = \nu - \nu_0^{tot}$ est :

$$\delta\nu = \frac{3\sqrt{3m_p}}{4} \left(\sum_{j < p} m_j \alpha_0^j + \sum_{j > p} m_j (\alpha_0^j)^3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon\sqrt{m_1}\alpha_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon m_1^{3/2}\alpha_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.61)$$

Les contributions des planètes aux valeurs des fréquences ν_0^{tot} et g_0^{tot} sont toutes positives. On a donc $\nu_0^{tot} > \nu_0$ et $g_0^{tot} > g_0$. De plus, plus le nombre de planètes dont on considère l'influence augmente, plus la valeur de ces fréquences augmente.

Toutes les contributions des planètes aux valeurs de s_0^{tot} sont négatives ; on a donc $s_0^{tot} < 0$ et plus le nombre de planètes dont on considère l'influence augmente, plus la valeur de s_0^{tot} diminue.

Les calculs de ν_0^{tot} , g_0^{tot} , s_0^{tot} et de δa ont été ici présentés pour \mathbf{L}_4 . Les calculs correspondants pour \mathbf{L}_5 sont analogues et donnent exactement les mêmes résultats.

1.5.5 Application au système solaire

Nous appliquons le calcul de l'approximation des coordonnées et des fréquences propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ à l'ordre 1 en ϵ aux points de Lagrange équilatéraux des 8 planètes de notre système solaire. Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau TAB.1.1.

	g_0	g_0^{tot}	s_0^{tot}	ν_0	$\delta\nu$	δa	$\delta\sigma$
Me	3	8.5	-5.5	5696	0.0044	$-3 \cdot 10^{-7}$	0.094
V	17.4	29.5	-12.1	8563	0.044	$-2 \cdot 10^{-6}$	0.4
T	13.3	26.1	-12.8	5878	0.08	$1.1 \cdot 10^{-6}$	-0.13
Ma	0.75	18.5	-17.7	1017	0.03	$-12 \cdot 10^{-6}$	0.95
J	351.6	358.9	-7.4	8746	0.5	$-2 \cdot 10^{-4}$	4.5
S	42.1	60.4	-18.2	1918	3.5	0.02	-199
U	2.3	5	-2.8	264	0.4	0.03	-216
N	1.4	2	-0.7	147	0.2	0.05	-216

TAB. 1.1 – Application au système solaire à l'ordre 1 en ϵ

Sur chaque ligne apparaissent respectivement la valeur de la fréquence séculaire g_0 de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ dans le cadre du PTCRC ; la valeur des fréquences g_0^{tot} et s_0^{tot} qui sont les fréquences séculaires de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ calculées à l'ordre 1 en ϵ en considérant l'influence des 7 autres planètes ; la valeur de la fréquence de libration ν_0 du PTCRC ; la valeur du décalage sur ν , $\delta\nu = \nu^{tot} - \nu_0$ dû aux 7 autres planètes ; et la valeur de la translation δa en demi-grand axe de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ sous l'influence des 7 autres planètes. Comme $s_0 = 0$, la valeur absolue de s_0^{tot} nous donne la valeur absolue des variations des fréquences séculaires dues à l'influence

des 7 autres planètes, $\delta g = g_0^{tot} - g_0$ et $\delta s = s_0^{tot} - s_0$. Rappelons que $\delta g = -\delta s + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour toutes les planètes à l'exception de Jupiter nous constatons que δg et g_0 sont du même ordre de grandeur. Ceci signifie que les autres planètes exercent une perturbation importante sur $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. Dans le tableau TAB.1.2 nous détaillons les contributions de chacune des planètes à la valeur des fréquences séculaires.

	Me	V	T	Ma	J	S	U	N
Me	3	2.9	0.97	0.02	1.6	0.08	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
V	0.14	17	7.5	0.09	4.2	0.2	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
T	0.03	5.1	13	0.26	7.05	0.32	$6 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Ma	$6.2 \cdot 10^{-3}$	0.46	2	0.75	14.6	0.62	0.01	$3.5 \cdot 10^{-3}$
J	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$9.8 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	352	7.25	0.08	0.02
S	$8.9 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	17.8	42	0.3	0.07
U	$7.8 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	0.93	1.4	2.3	0.42
N	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0.18	0.21	0.28	1.4

TAB. 1.2 – contribution de chacune des planètes à la valeur des fréquences séculaires à l'ordre 1 en ϵ . Les planètes perturbatrices sont écrites en haut, et les planètes dont on considère les troyens à gauche.

Dans la colonne de gauche apparaissent les planètes dont on considère le point \mathbf{L}_4 et sur la ligne du haut les planètes dont on considère l'influence. On écrit la contribution de la j-ième planète à la valeur de la fréquence g_0^{tot} du point de Lagrange de la p-ième planète à l'intersection de la p-ième ligne et de la j-ième colonne. Les valeurs des fréquence g_0 du PTCRC sont inscrites sur la diagonale du tableau. La somme des contributions est égale à g_0^{tot} . On constate que Jupiter apporte une contribution importante à la valeur des fréquences séculaires de toutes les autres planètes, ceci provient du fait que cette contribution est proportionnelle au rapport des masses m_j/m_p . Il en découle également que les contributions des planètes telluriques aux valeurs des fréquences séculaires des points de Lagrange des planètes gazeuses sont négligeables. Ce tableau met en relief les planètes qui jouent un rôle important dans la dynamique des particules orbitant au voisinage des points de Lagrange de chacune des planètes du système solaire : ce sont celles qui apportent une contribution notable aux valeurs de g_0^{tot} . Dans le tableau TAB.1.1 on voit que les valeurs de $\delta\nu$ sont très faibles, les autres planètes affectent donc très peu la valeur de la fréquence de libration.

Les points de Lagrange qui voient leur fréquence ν la plus affectée sont ceux associés à Saturne, Uranus et Neptune. Ceci est dû au fait que les planètes intérieures affectent plus la valeur de $\delta\nu$ que les planètes extérieures (voir paragraphe 1.5.3.3). Les points de Lagrange qui voient leur demi-grand axe et leur longitude moyenne les plus affectés sont aussi ceux de Saturne, Uranus et Neptune. C'est également dû au fait que les planètes intérieures affectent plus les valeurs de δa et $\delta\sigma$ que les planètes extérieures (voir paragraphe 1.5.3.3).

Nous détaillons les contributions de chacune des planètes à la valeur des demi-grands axes des points de Lagrange dans le tableau TAB.1.4.

	$\Delta a(U.A)$	$\Delta \sigma(^{\prime\prime})$	$\Delta \nu(^{\prime\prime})$	$\Delta g(^{\prime\prime})$	$\Delta s(^{\prime\prime})$
Me	$7.1 \cdot 10^{-15}$	$-2.5 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
V	$3.3 \cdot 10^{-11}$	$-6 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-3}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
T	$-2.8 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-9.6 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
Ma	$7.9 \cdot 10^{-10}$	$-6.5 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$-1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
J	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$-8 \cdot 10^{-4}$	0.11	$-1.2 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$
S	$-3.1 \cdot 10^{-5}$	0.25	-1.1	-0.07	0.13
U	$-4.8 \cdot 10^{-5}$	0.13	-0.16	$-9.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
N	$-6.2 \cdot 10^{-5}$	$8.1 \cdot 10^{-2}$	$-8.8 \cdot 10^{-2}$	$-3.1 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$

TAB. 1.3 – Différence entre les valeurs obtenues à l'ordre 1 en ϵ et celles obtenues à l'ordre n en ϵ

	Me	V	T	Ma	J	S	U	N
Me		$-1.4 \cdot 10^{-7}$	$-5.5 \cdot 10^{-8}$	$-1.5 \cdot 10^{-9}$	-10^{-7}	$-4.9 \cdot 10^{-9}$	$-9.2 \cdot 10^{-11}$	$-2.8 \cdot 10^{-11}$
V	$2.1 \cdot 10^{-7}$		$-1.3 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-8}$	$-1.2 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-8}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$	$-3.5 \cdot 10^{-10}$
T	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$		$-1.1 \cdot 10^{-7}$	$-4.7 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-7}$	$-4.1 \cdot 10^{-9}$	$-1.2 \cdot 10^{-9}$
Ma	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-6}$		$-2.7 \cdot 10^{-5}$	$-1.2 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-8}$	$-6.6 \cdot 10^{-9}$
J	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$		$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$-3.3 \cdot 10^{-6}$	$-9.6 \cdot 10^{-7}$
S	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$3.14 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$		$-4.8 \cdot 10^{-5}$	$-1.2 \cdot 10^{-5}$
U	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$		$-3 \cdot 10^{-4}$
N	$6.6 \cdot 10^{-6}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	

TAB. 1.4 – Contribution de la j -ième planète à la valeur du demi-grand axe du point de Lagrange séculaire $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ de la p -ième planète à l'ordre 1 en ϵ (exprimé en U.A). Les planètes perturbatrices sont écrites en haut, et les planètes dont on considère les troyens à gauche.

La contribution de la j -ième planète à la valeur du demi-grand axe du point de Lagrange de la p -ième planète est écrit à l'intersection de la p -ième ligne et de la j -ième colonne. La contribution d'une planète extérieure à la valeur de δa étant négative et celle d'une planète intérieure étant positive, tous les termes au dessus de la diagonale sont négatifs et tous les termes au dessous sont positifs. Jupiter étant la planète la plus massive du système solaire, elle influence fortement les positions de points de Lagrange $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ de toutes les planètes du système solaire. En effet, Jupiter apporte la contribution la plus importante aux δa des points de Lagrange de Mars, Saturne, Uranus, et Neptune et une contribution significative à ceux de Mercure, Vénus, et la Terre. Les planètes qui apportent la contribution la plus importante aux δa des points de Lagrange des trois planètes restantes, Mercure, Vénus et la Terre, sont respectivement Vénus, la Terre et Vénus. Remarquons que la contribution de la j -ième planète au δa des troyens de la p -ième planète semble être une fonction croissante de p , ceci est principalement dû au fait que l'on considère des grandeurs relatives et devient faux si l'on considère les grandeurs absolues $\delta a/a_p$. C'est ce qu'on voit dans le tableau TAB.1.5 où l'on détaille les contribu-

tions de chacune des planètes à la valeur de $\delta\sigma$ car $\delta\sigma = -\delta a/(\sqrt{3}a_p) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

	Me	V	T	Ma	J	S	U	N
Me		0.04	0.017	4.10^{-4}	0.31	1.510^{-3}	2.810^{-5}	8.7
V	-0.034		0.21	3.610^{-3}	0.21	0.098	1.810^{-4}	5.71
T	-0.03	-0.7		0.01	0.56	0.026	4.910^{-4}	1.510^{-4}
Ma	-0.028	-0.47	-0.75		2.1	0.094	1.710^{-3}	5.310^{-4}
J	-0.026	-0.39	-0.5	-0.055		5.4	0.075	0.022
S	-0.026	-0.39	-0.49	-0.052	-198	0.59	0.59	0.15
U	-0.026	-0.39	-0.48	-0.051	-161	-56		1.9
N	-0.026	-0.39	-0.48	-0.051	-155	-49	-10	

TAB. 1.5 – Contribution de la j-ième planète à la valeur de σ au point de Lagrange séculaire $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ de la p-ième planète à l'ordre 1 en ϵ (exprimé en "). Les planètes perturbatrices sont écrites en haut, et les planètes dont on considère les troyens à gauche.

Dans ce tableau, de même que dans les tableaux précédents la contribution de la j-ième planète à la valeur du $\delta\sigma$ du point de Lagrange de la p-ième planète apparaît à l'intersection de la p-ième ligne et de la j-ième colonne.

Nous avons programmé l'algorithme d'approximation de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ et de ses fréquences propres à l'ordre 10 en ϵ afin de les comparer aux valeurs obtenues à l'ordre 1 en ϵ . Dans le tableau TAB.1.3 nous affichons la différence entre les résultats obtenus à l'ordre 10 en ϵ et ceux obtenus à l'ordre 1 en ϵ . Δa , $\Delta\sigma$, $\Delta\nu$, Δg , et Δs représentent respectivement ces différences pour δa , $\delta\sigma$, $\delta\nu$, g_0^{tot} et s_0^{tot} . Ces translations, relativement à celles obtenues à l'ordre 1 en ϵ , ne sont pas significatives, hormis celles de $\delta\nu$. En effet, comme on pouvait s'y attendre, $\Delta a/\delta a$, $\Delta\sigma/\delta\sigma$, $\Delta g/\delta g$, et $\Delta s/\delta s$ restent inférieures à $\epsilon \simeq 10^{-3}$. Ce n'est pas le cas pour $\Delta\nu$ qui est voisin de $\delta\nu$. En effet les $\Delta\nu$ de Mercure, Vénus, Jupiter, Saturne et Uranus sont du même ordre de grandeur que leurs $\delta\nu$. Les $\Delta\nu$ des autres planètes sont de l'ordre de grandeur de $10^{-1}\delta\nu$.

Même si, dans certains cas, Δg reste proche de l'opposé de Δs , ce n'est pas toujours le cas. Les valeurs de s_0 et de $g_0^{tot} - g_0$ ne sont donc plus opposées à l'ordre 10 en ϵ comme c'était le cas à l'ordre 1 en ϵ .

1.6 Conclusion

Dans un modèle séculaire, nous avons vu que, si les masses des planètes perturbatrices sont suffisamment petites, le point fixe \mathbf{L}_4 du PTCR est remplacé par un autre point fixe : $\mathbf{L}_4(\epsilon)$. Dans le problème non séculaire, un théorème élaboré par A. Jorba et C. Simo [JS96], assure que si les masses des planètes perturbatives sont suffisamment petites et sous certaines hypothèse de non résonance et de non dégénérescence de l'hamiltonien, des orbites quasi-périodiques dont les fréquences propres sont celles des planètes, se substituent aux points fixes L_4 et L_5 . De plus, ces orbites quasi-périodiques tendent vers les

points équilatéraux lorsque les masses des planètes perturbatives tendent vers zéro. De récents travaux de Philippe Robutel permettent d’obtenir une approximation numérique de ces trajectoires. Supposons qu’il existe une trajectoire quasi-périodique se substituant à \mathbf{L}_4 et que le point fixe $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ du modèle séculaire existe également. Dans ce cas, la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ est la moyenne de la trajectoire quasi-périodique se substituant à \mathbf{L}_4 dans le problème non séculaire, par rapport aux longitudes moyennes. Si les planètes ont un mouvement circulaire et évoluent dans un même plan, alors la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ est celle du point équilatéral, décalée dans la direction des demi-grands axes d’une quantité δa , et dans la direction des longitudes moyennes d’une quantité $\delta\sigma$. Dans ce chapitre, nous avons donné des formules analytiques exprimant ces translations et les valeurs propres de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ en fonction des demi-grands axes et des masses des planètes.

Si les planètes ont des trajectoires elliptiques planes, le théorème des fonctions implicites permet aussi de conclure sur l’existence du point fixe du modèle séculaire $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ à condition que les masses et les excentricités des planètes soient suffisamment petites. Les coordonnées elliptiques de ce point fixe sont celles du point équilatéral, translatées cette fois-ci dans les quatre directions des variables elliptiques (a, λ, e, ϖ) . Nous avons aussi élaboré un algorithme qui permet d’approximer $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ dans ce cas, mais nous n’avons pas eu le temps de le présenter ici. Si les trajectoires des planètes sont elliptiques et inclinées, alors le point fixe $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ existe également à condition que les masses, les excentricités, et les inclinaisons des planètes soient suffisamment petites. Les coordonnées elliptiques de ce point fixe sont celles du point équilatéral, translatées cette fois-ci dans les six directions des variables elliptiques.

Dans la suite de notre travail, nous nous intéressons à la dynamique de particules, que nous appellerons des troyens, dont les conditions initiales appartiennent à un voisinage des points équilatéraux. Plus particulièrement, nous étudions la perturbation de la dynamique des troyens, par les planètes qui ne co-orbitent pas avec eux. Le modèle séculaire circulaire plan, donne une première idée de l’importance de ces perturbations. Au paragraphe 1.5.5, nous avons dressé un portrait global des positions et des fréquences propres des points équilatéraux du système solaire. Les planètes qui apportent des contributions importantes à ces valeurs, sont celles qui perturbent le plus la dynamique des troyens. Ceci nous guide dans le choix de nos modèles planétaires. Par exemple, sur le tableau tab.1.2, il apparaît que les quatre planètes géantes apportent une contribution importante à la valeur des fréquences séculaires des points de Lagrange de Neptune. Elles perturbent donc de manière significative les troyens de Neptune. C’est pourquoi au chapitre 6, nous étudions la dynamique des troyens de Neptune en considérant l’influence des 4 planètes du système solaire externe. Ce même tableau laisse penser que le système Soleil-Jupiter-Saturne+particule sans masse, suffit à décrire l’essentiel de la dynamique des troyens de Jupiter et de Saturne. Aux chapitres 4 et 5, nous étudions respectivement les troyens de Jupiter et de Saturne dans le cadre de ce système à quatre corps restreint.

De même que pour $\mathbf{L}_4(\epsilon)$, Les positions et les fréquences propres des troyens dépendent des conditions initiales des planètes. Afin de mieux comprendre le rôle des perturbations planétaires sur la dynamique des troyens, au chapitre 3 nous analysons les changements de

dynamique des troyens en fonction des fréquences planétaires. Aux chapitres 4 et 5, nous mettons en place un modèle à un paramètre afin d'étudier le réseau de résonances qui agit sur les troyens de Jupiter et Saturne, pour de multiples configurations planétaires. Dans ces chapitres nous utilisons fréquemment les résultats des paragraphes 1.5.3.2 et 1.5.3.4, pour prédire les variations des fréquences propres des troyens en fonction des conditions initiales des planètes.

Cette étude est réalisée dans le cadre de la migration planétaire, et a aussi pour but d'explorer la dynamique des troyens, pour des configurations planétaires qui ont pu être approchées sur des périodes plus ou moins longues dans l'histoire de notre système solaire. Au chapitre suivant, nous dressons un portrait de la migration planétaire. Ceci nous guidera dans le choix des configurations planétaires que nous allons explorer. Au paragraphe 2.1, nous étudions les résonances en moyen mouvement entre les planètes ainsi que l'évolution des fréquences propres des planètes. Connaissant l'évolution des fréquences propres des troyens et des planètes, nous serons alors en mesure de comprendre quelles sont les structures résonantes agissant sur les troyens de Jupiter et de Saturne. Aux paragraphes 2.2 et 2.3, nous présentons des modélisations de la migration planétaire afin de décrire plus précisément ce phénomène.

Chapitre 2

Etude de multiples configurations planétaires dans le contexte de la migration

Après la dissipation du gaz de la nébuleuse protoplanétaire, les planètes subissent des rencontres proches avec les astéroïdes et planétoïdes du système solaire. Ces interactions ont pour effet de déstabiliser les planètes en modifiant leurs paramètres elliptiques, ce phénomène est connu dans la littérature scientifique sous le nom de migration planétaire. Pour schématiser les mécanismes de la migration planétaire, les rencontres proches entre une planète et des corps plus proches du soleil ont tendance à l'éloigner du soleil alors que les rencontres avec des corps plus éloignés du soleil ont tendance à la rapprocher du soleil. Etant donné que les planètes sont susceptibles d'interagir avec des astéroïdes qui sont situés soit plus proches soit plus loin du soleil, cette migration n'est pas monotone. Cependant les modélisations réalisées par leurs auteurs dans les articles [TGML05] et [GML04] montrent que l'effet global de cette migration, est de rapprocher Jupiter du soleil et d'en éloigner Saturne, Uranus et Neptune. Pour schématiser les mécanismes de cette migration, Jupiter étant la plus massive des planètes géantes et la plus proche du soleil, elle communique à certains des planétoïdes qu'elle rencontre suffisamment d'énergie pour traverser la zone dans laquelle orbitent les autres planètes géantes et rejoindre la ceinture de Kuiper. Dans leur lancée, ces planétoïdes entraînent les autres planètes géantes vers l'extérieur du système solaire. Ainsi Jupiter est-elle le principal moteur de la migration planétaire, elle transmet de l'énergie aux astéroïdes qui, à leur tour, en transmettent aux autres planètes. En réalité, ce mécanisme est bien sûr plus compliqué car des planétoïdes sont susceptibles d'être déviés vers l'intérieur du système solaire par les planètes géantes. De plus, les Résonances en Moyen Mouvement (RMM) rencontrées par les planètes géantes affectent la migration planétaire, à un tel point qu'il est possible qu'Uranus et Neptune aient interverti leur ordre de positionnement par rapport au soleil (voir [GLTM05]). La migration planétaire est donc complexe et notre but n'est pas ici de rentrer dans les détails de ses mécanismes mais plutôt d'en dresser un portrait grossier dans le but d'explorer des

configurations du système solaire externe susceptibles d'avoir été approchées.

2.1 Etude du système Soleil-Jupiter-Saturne pour de multiples configurations

Dans cette partie nous nous intéressons au système planétaire Soleil-Jupiter-Saturne. Les travaux de Michtchenko [MBR01] mettent en évidence que la RMM 1 : 2 Jupiter-Saturne génère une instabilité très forte sur l'ensemble de l'essaim des troyens de Jupiter, les éjectant de la RMM 1 : 1 avec Jupiter en moins de 10000 ans. La présence d'actuels troyens de Jupiter semble donc impliquer que Jupiter-Saturne n'a pas traversé la RMM 1 : 2 lors de la migration planétaire. On pourrait penser obtenir ainsi une contrainte sur les conditions initiales de Jupiter et Saturne au début de la migration planétaire. Cependant les travaux postérieurs de Morbidelli, Tsiganis, Levison, et Gomes, montrent des modélisations de migrations planétaires où les conditions initiales de Jupiter et Saturne sont choisies avant la RMM 1 : 2 Jupiter-Saturne et avec des excentricités très petites. Lors de cette modélisation, le couple Jupiter-Saturne commence par se rapprocher de la zone de RMM 1 : 2 avec des excentricités très faibles pour ensuite dépasser la zone de RMM 1 : 2 sans l'atteindre. Dans ce modèle, le saut de la RMM 1 : 2 déstabilise violemment les planètes sur une courte période de temps pendant laquelle les planètes externes du système acquièrent des excentricités comparables à leurs valeurs actuelles, expliquant ainsi l'architecture du système solaire actuel [LMV⁺08]. D'autre part R. Gomes et al. expliquent dans l'article [GLTM05] que ce saut a un effet dynamique tellement fort sur l'ensemble du système solaire qu'il pourrait être à l'origine du « Late Heavy Bombardment » dont on retrouve des traces sur la Lune. De plus, Morbidelli et al. montrent dans l'article [MLTG05] qu'il est possible que la région des troyens de Jupiter se soit repeuplée d'astéroïdes après ce saut de la résonance 1 : 2, levant ainsi la contradiction apparente entre le franchissement de la RMM 1 : 2 et l'existence des troyens de Jupiter. Il est donc probable que, lors de la migration planétaire, le couple de planètes géantes Jupiter-Saturne ait été affecté par la proximité des RMM 1 : 2, 2 : 5 et 3 : 7, ainsi que d'autres RMM d'ordres plus élevés telles que les RMM 4 : 9, 5 : 11, et 5 : 12 ayant un effet beaucoup plus faible sur la dynamique de ces planètes. Dans le but de mieux comprendre les RMM importantes dont se sont rapprochées Jupiter et Saturne, nous allons étudier la forme des RMM 1 : 2, 2 : 5 et 3 : 7 dans l'espace des conditions initiales des planètes. Jupiter étant plus massive que Saturne, elle se déplace moins que Saturne pendant la migration. Ceci nous incite à étudier différentes configurations planétaires en prenant des positions initiales identiques pour Jupiter et différentes pour Saturne. Le modèle le plus simple de migration planétaire consiste à ne faire varier que les demi-grand axes des planètes. Dans ce chapitre, les variables se référant à Jupiter et Saturne seront désignées respectivement par les indices 1 et 2. L'anomalie moyenne de Saturne M_2 , apparaît dans l'expression des angles résonants des RMM Jupiter-Saturne. Nous fixons toutes les valeurs initiales des coordonnées elliptiques de Jupiter et Saturne à l'excep-

tion de a_2 et M_2 . Pour de nombreuses valeurs initiales du couple (a_2, M_2) , nous intégrons le système Soleil-Jupiter-Saturne en ne considérant que les interactions mutuelles de ces corps (sans migration planétaire). Nous calculons les trajectoires des planètes sur 200000 ans à l'aide d'un intégrateur symplectique du type \mathcal{SABAC}_4 (voir [LR01]). Nous réalisons deux analyses en fréquences (voir [Las03]) de $a_2 e^{\lambda_2}$, la première sur l'intervalle de temps $[0, 100000]$ ans, et la deuxième sur l'intervalle de temps $[100000, 200000]$ ans. On obtient ainsi des approximations quasi-périodiques de $a_2 e^{\lambda_2}$. Les fréquences des termes de plus grandes amplitudes de ces approximations quasi-périodiques, sont associées aux moyens mouvements de Saturne $n_2^{(1)}$ et $n_2^{(2)}$ respectivement sur la première et la deuxième période d'intégration. La quantité $n_{dif} = \log_{10}(|(n_2^{(1)} - n_2^{(2)})/n_2^{(1)}|)$ est un indice de diffusion quantifiant la stabilité du couple de planètes Jupiter-Saturne. Sur les figures *fig.3* et *fig.4*, nous associons à chaque valeur des conditions initiales (a_2, M_2) une couleur codant la valeur de n_{dif} selon l'échelle de couleur correspondante. L'échelle de couleur va du bleu au rouge. Le bleu correspond à des zones de stabilité ($n_{dif} < 10^{-6}$), et le rouge à des zones chaotiques ($n_{dif} > 10^{-3}$). Ces figures nous permettent de localiser les RMM 1 : 2, 2 : 5 et 3 : 7 dans le plan des conditions initiales (a_2, M_2) . Une figure de ce type s'appelle une carte de diffusion, et nous utiliserons largement cet outil dans la suite de notre travail. Les valeurs initiales des variables (a_2, e_2) pour lesquelles Jupiter et Saturne sont en RMM, sont rassemblées autour d'une valeur constante de a_2 avec une largeur proportionnelle à une puissance de l'excentricité e_2 [MF01]. Comme nous le voyons sur les figures *fig.3* et *fig.4*, l'allure de ces résonances dans le plan (a_2, M_2) ressemble à un pendule perturbé où les zones résonantes sont représentées par des îles dont la taille est proportionnelle à une puissance de l'excentricité. Ces îles sont séparées par des noeuds révélant la présence de structures hyperboliques.

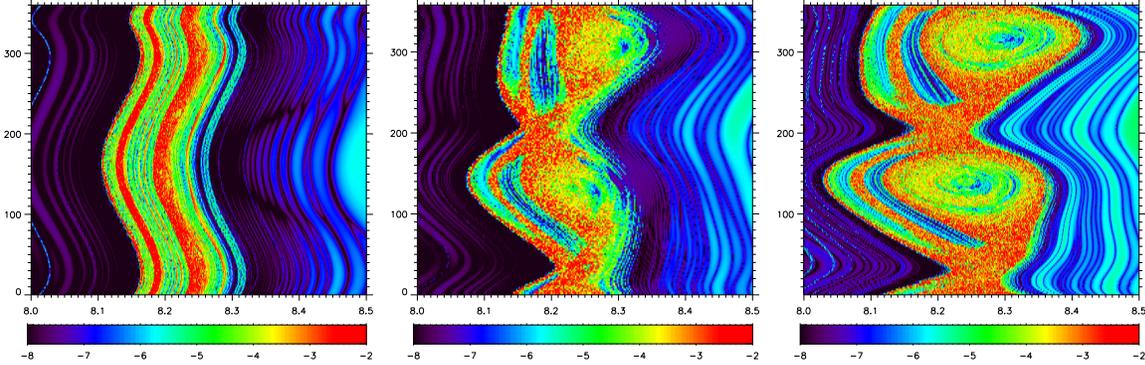


FIG. 3 – RMM 1 : 2 Jupiter-Saturne dans le plan (a_2, M_2) pour des excentricités de Jupiter et Saturne égales à 10^{-5} (à gauche), à la moitié de leurs valeurs actuelles (au milieu), et à leurs valeurs actuelles (à droite). Les autres valeurs initiales des variables elliptiques des planètes sont égales aux valeurs actuelles.

Sur la figure *fig.3*, nous représentons la résonance 1 : 2 dans le plan (a_2, M_2) pour des valeurs des excentricités initiales de Jupiter et Saturne égales à 10^{-5} (à gauche), à la

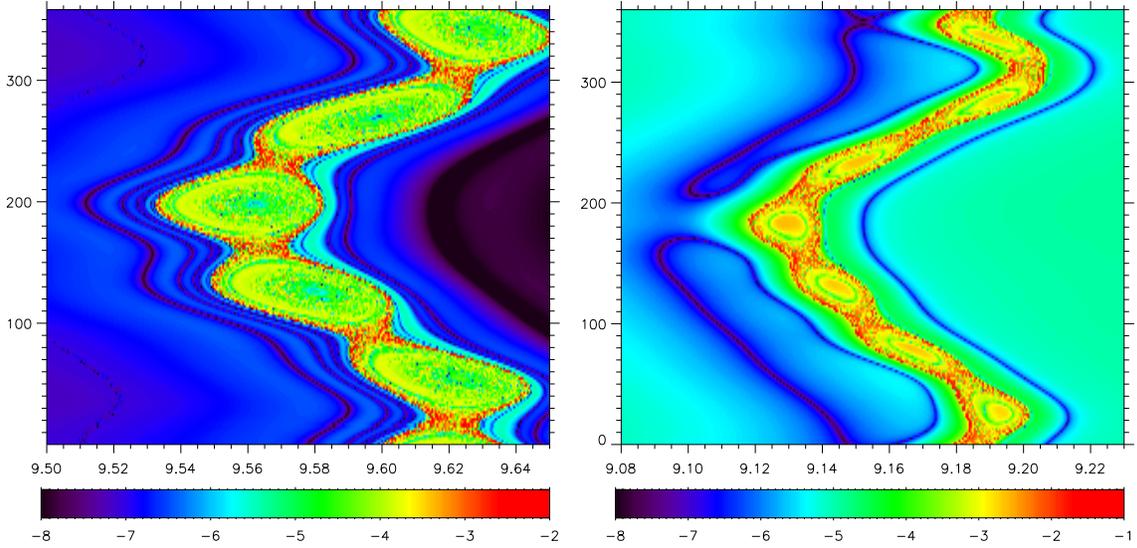


FIG. 4 – De gauche à droite, les RMM 1 : 2, 2 : 5 et 3 : 7 Jupiter-Saturne dans le plan (a_2, M_2) . Les autres valeurs initiales des variables elliptiques des planètes sont égales aux valeurs actuelles.

moitié de leurs valeurs actuelles (au milieu), et à leurs valeurs actuelles (à droite). Ici, ainsi que dans la suite de notre travail, le terme « valeurs actuelles » fait référence aux valeurs données par DE405 à la date en jours Juliens : 24522005 (10 octobre 2001). Comme on pouvait s’y attendre, la taille des îles résonantes est quasiment nulle pour des excentricités initiales voisines de 10^{-5} , puis augmente lorsque les excentricités initiales augmentent. Dans chacun de ces cas, la dynamique semble compliquée et plusieurs structures résonantes apparaissent. Les angles résonants de la RMM 1 : 2 de plus bas ordre sont

$$\Phi_j = \lambda_1 - 2\lambda_2 - \varpi_j$$

avec $j \in \{1, 2\}$. Le modèle du pendule avec l’angle Φ_1 est suffisant pour prédire le nombre et les valeurs de M_2 pour lesquelles ces ventres et noeuds apparaissent [RL01]. Les centres des îles correspondent à $\Phi_1 = k.360^\circ$ et les noeuds à $\Phi_1 = 180 + k.360^\circ$. Les valeurs de M_2 correspondantes dans l’espace des conditions initiales, sont :

$$\begin{aligned} M_2 &= (\lambda_1 + \varpi_1)/2 - \varpi_2 + k.180^\circ \\ M_2 &= (\lambda_1 + \varpi_1)/2 - \varpi_2 + 90 + k.180^\circ \end{aligned}$$

Dans ce modèle, il y a donc deux îles et deux centres. Les centres des îles sont atteints pour $M_2 \simeq 140^\circ$ et $M_2 \simeq 320^\circ$. Les noeuds quant à eux sont atteints pour $M_2 \simeq 50^\circ$ et $M_2 \simeq 230^\circ$. Ces prédictions correspondent relativement bien aux deux figures de droite de la figure *fig.3*. Ceci explique que les ventres et les noeuds de la RMM 1 : 2 soient atteints pour des valeurs de M_2 identiques lorsqu’on modifie les excentricités des planètes. Une approximation similaire permet d’expliquer que les RMM 2 : 5 et 3 : 7 contiennent

respectivement 5 et 7 îles dans le plan (a_2, M_2) , comme c'est le cas sur la figure *fig.4*. Par contre, le fait que ces îles soient atteintes pour différentes valeurs de a_2 n'est pas expliqué par ce modèle. Cette déformation en a_2 est exagérée par le fait que l'on utilise des coordonnées elliptiques non canoniques, qui sont construites à partir de positions et de vitesses héliocentriques, et serait moins prononcé dans des coordonnées canoniques construites à partir de positions héliocentriques et de vitesses barycentriques. Relativement à la taille des îles de résonances, ce décalage en demi-grand axe est plus important sur la figure *fig.4* que sur la figure *fig.3*. En effet, il existe des valeurs initiales de a_2 pour lesquelles le couple de planètes Jupiter-Saturne est dans la RMM 1 : 2 quelle que soit la valeur initiale de M_2 , alors que ce n'est pas le cas pour les RMM 2 : 5 et 3 : 7. Par contre, les décalages maximaux entre les centres des îles de résonances sont de l'ordre de 0.04 UA pour chacune de ces trois RMM. En examinant l'évolution des angles de libration Φ_1 et Φ_2 pour les mêmes conditions initiales que celles de la figure de droite de *fig.3*, nous avons constaté que dans la plupart des cas Φ_1 est en libration, alors que ce n'est pas le cas pour Φ_2 . La RMM 2 : 5 possède quatre angles résonants d'ordre minimal :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\varpi_1 \\
\phi_2 &= 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\varpi_1 + \varpi_2 \\
\phi_3 &= 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + \varpi_1 + 2\varpi_2 \\
\phi_4 &= 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\varpi_2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

En examinant l'évolution de ces angles pour des conditions initiales plaçant le couple Jupiter-Saturne dans des îles de la figure *fig.4*, nous n'avons observé que l'angle ϕ_4 en libration. Cependant le modèle du pendule avec l'angle ϕ_4 , ne prédit pas bien les valeurs de M_2 pour lesquelles ces îles sont atteintes.

Sur la figure *fig.5*, nous représentons les valeurs de la fréquence $n_1^{(1)} - 2n_2^{(1)}$ issues de l'intégration sur $[0, 100000]$ ans de la figure de droite de la figure *fig.3*. Pour chaque valeur de la condition initiale a_2 , on voit l'ensemble auquel appartient $n_1^{(1)} - 2n_2^{(1)}$ pour $M_2 \in [0, 360^\circ]$. Cet ensemble est un intervalle lorsqu'il ne coupe pas la RMM 1 : 2. Cet intervalle est plus large près de la résonance qui correspond au palier horizontal de la figure *fig.3*. Ceci est révélateur du fait que les valeurs de n_1 et de n_2 dépendent plus de la valeur initiale de M_2 près de la résonance. Lorsqu'on s'éloigne de la RMM cette dépendance diminue. Nous avons représenté en bleu les fréquences correspondant à $(a_2, M_2) \in [8, 8.5] \times \{340.04^\circ\}$, c'est-à-dire à une coupe horizontale passant par une île de la RMM 1 : 2 représentée sur la figure de droite de la figure *fig.3*. Par la suite, nous désignerons cette coupe par le terme : tranche elliptique. Les valeurs de $n_1^{(1)} - 2n_2^{(1)}$ représentées en vert correspondent à une coupe horizontale passant par un noeud, $(a_2, M_2) \in [8, 8.5] \times \{24.14^\circ\}$, par la suite nous désignerons cette coupe par le terme : tranche hyperbolique. Le palier vert est plus large que le palier bleu, et en dehors de la RMM, la courbe verte est plus pentue que la courbe bleue. Les variations de $n_1 - 2n_2$ au voisinage de la résonance sont donc plus grandes pour la tranche hyperbolique que pour la tranche elliptique.

Notons $\nu_{p,q}^{j,k} = pn_j - qn_k$. Comme nous le verrons au chapitre 3, ces fréquences jouent un rôle important dans la dynamique des voisinages des points de Lagrange équilatéraux.

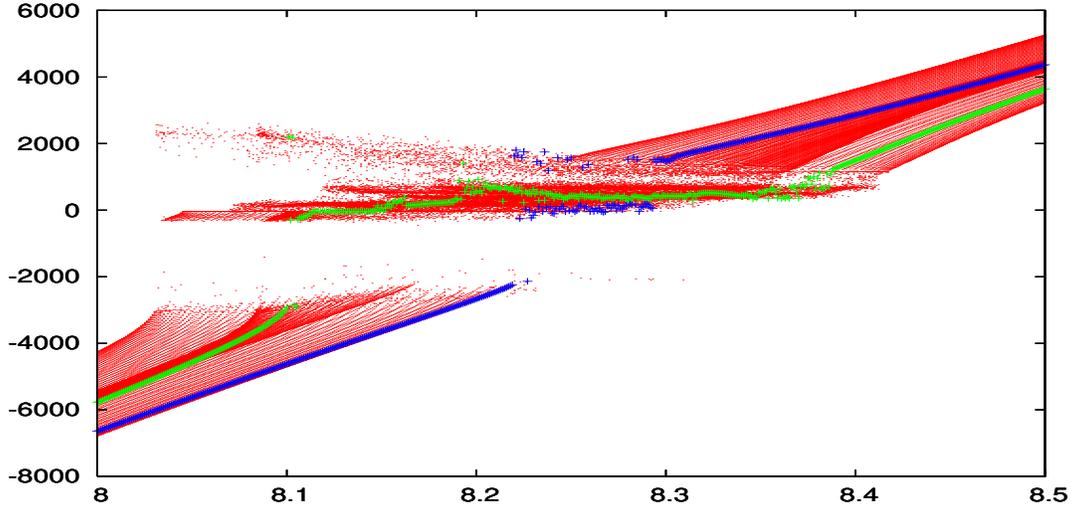


FIG. 5 – Cette figure est issue de la même intégration que la figure de droite de la figure *fig.3*. Elle représente l'ensemble des courbes $(a_2, n_1 - 2n_2)$ pour chacune des valeurs de M_2 intégrées. Les croix vertes correspondent à $M_2 \simeq 340.04$ (tranche elliptique), et les croix bleues à $M_2 \simeq 24.14$ (tranche hyperbolique).

Sur la figure du haut de la figure *fig.6*, nous représentons $\nu_{1,2}^{1,2}$, $\nu_{2,5}^{1,2}$, et $\nu_{3,7}^{1,2}$ en fonction de $a_2 \in [8, 9.7]$, en vert pour la tranche hyperbolique, et en rouge pour la tranche elliptique. Ces quantités se rapprochent de zéro lorsqu'on se rapproche de la RMM associée, c'est-à-dire proche des paliers de la figure *fig.5* pour $\nu_{1,2}^{1,2}$, proche de $a_2 \simeq 9.2$ pour $\nu_{3,7}^{1,2}$, et proche de $a_2 \simeq 9.62$ pour $\nu_{1,2}^{1,2}$. De même que nous l'avons remarqué au sujet de $n_1^{(1)} - 2n_2^{(1)}$ sur la figure *fig.5*, les courbes représentant $\nu_{p,q}^{1,2}$ pour les différentes valeurs de M_2 , se rapprochent lorsqu'on s'éloigne de la RMM $p : q$.

Sur le graphique du bas de la figure *fig.6*, nous représentons les fréquences séculaires de Jupiter et Saturne pour $a_2 \in [8, 9.7]$, en vert pour la tranche hyperbolique, et en rouge pour la tranche elliptique. De haut en bas apparaissent les fréquences g_2 , g_1 et s_2 . Près des séparatrices des RMM, ces fréquences subissent des variations importantes, mais loin des RMM ces fréquences varient lentement.

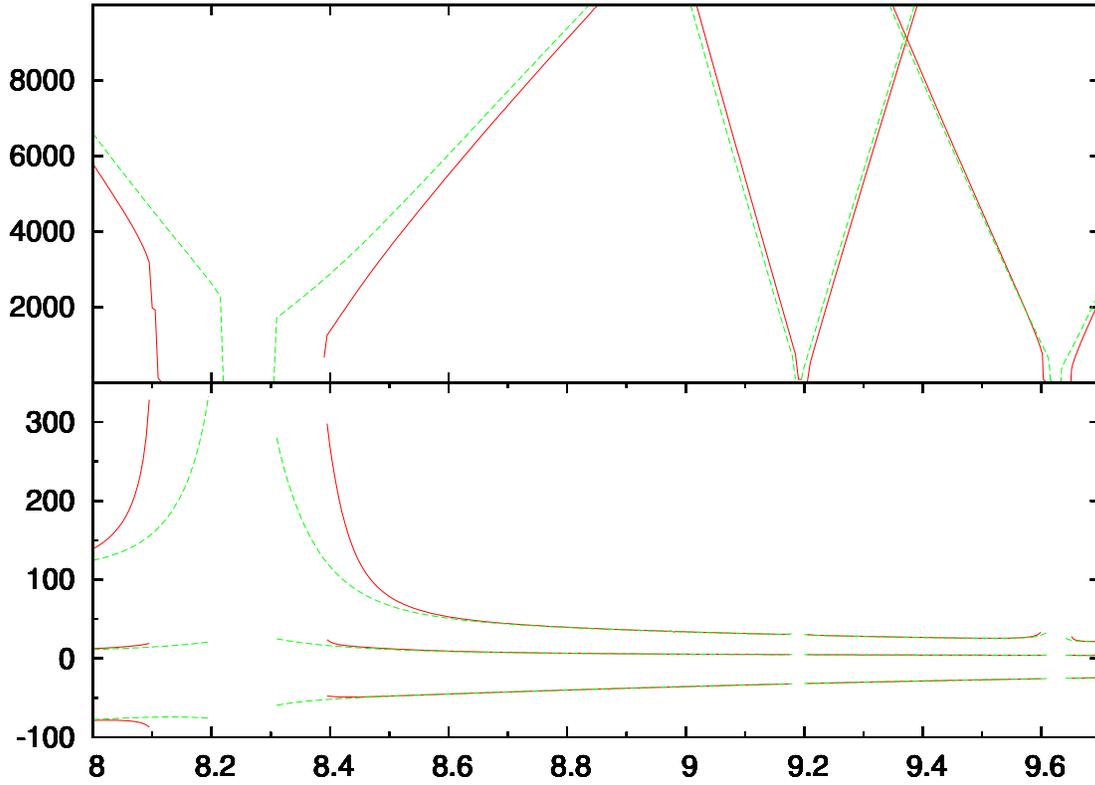


FIG. 6 – Evolution de fréquences fondamentales du système Soleil-Jupiter-Saturne en fonction de a_2 . En haut : valeur absolues des combinaisons de linéaires des moyens mouvements $|\nu_{1,2}^{1,2}|$, $|\nu_{2,5}^{1,2}|$, et $|\nu_{3,7}^{1,2}|$. En bas : de haut en bas, g_2 , g_1 et s_2 . Les lacunes apparaissant sur ces courbes correspondent aux RMM 1 : 2, 3 : 7 et 2 : 5 où les fréquences séculaires sont singulières. Les fréquences associées à la section elliptique ($M_2 \simeq 340.04^\circ$) sont représentées en rouge tandis que celles associées à la section hyperbolique ($M_2 \simeq 24.14^\circ$) sont représentées en vert.

2.2 Etude du système Soleil-Jupiter-Saturne en migration forcée : « traversée » de la RMM 1 : 2

Pour calculer les trajectoires du système Soleil-Jupiter-Saturne, nous utilisons un intégrateur symplectique \mathcal{SABA}_4 . Le fonctionnement de ces intégrateurs est décrit dans l'article de J. Laskar et P. Robutel [LR01]. Nous allons modifier cet intégrateur afin de modéliser de façon simple la migration planétaire.

Le hamiltonien du système Soleil-Jupiter-Saturne est de la forme :

$$\mathcal{H} = A + \epsilon B, \quad (2.2)$$

où A est la partie Képlérienne du hamiltonien, B est l'opposé de l'inverse de la distance mutuelle des planètes Jupiter-Saturne, et $\epsilon = Gm_1m_2$. Pour approximer une trajectoire \mathbf{X} du flot de \mathcal{H} en utilisant un intégrateur symplectique, on sépare \mathcal{H} en deux parties plus simples, A et ϵB , que l'on sait intégrer analytiquement. \mathbf{X} est solution du système différentiel suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = L_{\mathcal{H}}\mathbf{X} \quad (2.3)$$

où $L_{\mathcal{H}}$ est l'opérateur différentiel défini par $L_{\mathcal{H}}\mathbf{X} = \{\mathcal{H}, \mathbf{X}\}$. Les solutions du système différentiel (2.3) sont données formellement par l'expression $\mathbf{X}(t) = e^{tL_{\mathcal{H}}}\mathbf{X}_0$, avec $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t=0)$. Le schéma d'intégration pour calculer $\mathbf{X}(t+\tau)$ à partir de $\mathbf{X}(t)$ en utilisant l'intégrateur \mathcal{SABA}_4 , consiste à approximer l'opérateur $e^{\tau L_{\mathcal{H}}}$ par l'opérateur :

$$e^{\tau c_1 L_A} e^{\tau d_1 L_{\epsilon B}} e^{\tau c_2 L_A} e^{\tau d_2 L_{\epsilon B}} e^{\tau c_3 L_A} e^{\tau d_2 L_{\epsilon B}} e^{\tau c_2 L_A} e^{\tau c_1 L_A} e^{\tau d_1 L_{\epsilon B}},$$

où les valeurs des c_j , pour $j \in \{1, 2, 3\}$, et des d_j , pour $j \in \{1, 2\}$, sont données dans l'article de J. Laskar et P. Robutel [LR01] et vérifient $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ et $d_1 + d_2 = 1$. En utilisant ce schéma, on intègre en fait un autre hamiltonien proche de l'hamiltonien \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}_{IS} = \mathcal{H} + \mathcal{O}(\tau^8 \epsilon + \tau^2 \epsilon^2).$$

L'erreur commise sur l'hamiltonien intégré est donc en $\mathcal{O}(\tau^8 \epsilon + \tau^2 \epsilon^2)$. Cet intégrateur est très performant pour de petites valeurs de ϵ . Il est possible de l'améliorer en utilisant un correcteur (voir [LR01] pour plus de détails), on obtient alors l'intégrateur \mathcal{SABA}_{C4} approximant \mathcal{H} à des termes $\mathcal{O}(\tau^4 \epsilon^2 + \tau^6 \epsilon)$ près.

Dans le schéma d'intégration symplectique, pour calculer la solution $\mathbf{X}(t+\tau)$ à partir de $\mathbf{X}(t)$, on calcule successivement les solutions au temps $d_1\tau$ de ϵB , puis au temps $c_1\tau$ de A etc... Ici, A est la partie képlérienne du hamiltonien, intégrer A revient donc à déplacer Jupiter et Saturne sur des ellipses en utilisant la loi des aires. Pour modéliser la migration planétaire, on ajoute un déplacement constant en demi-grand axe dans la partie képlérienne de Saturne, $a_2 = a_2 + v_{mig} c_j \tau$, pour $j \in \{1, 2, 3\}$. On ajoute ainsi un forçage extérieur au système Soleil-Jupiter-Saturne. v_{mig} représente en quelque sorte la vitesse de migration de Saturne. Dans nos intégrations, la valeur de v_{mig} est constante.

Ce système forcé n'est pas conservatif. Une intégration de condition initiale \mathbf{X}_0 avec un pas de temps positif et $v_{mig} = v_0 \neq 0$, suivie d'une intégration de la même durée avec un pas de temps identique mais une vitesse de migration $v_{mig} = -v_0$, ne donnent pas des conditions finales voisines de \mathbf{X}_0 . L'hamiltonien et le moment cinétique total du système ne sont plus des intégrales premières du mouvement.

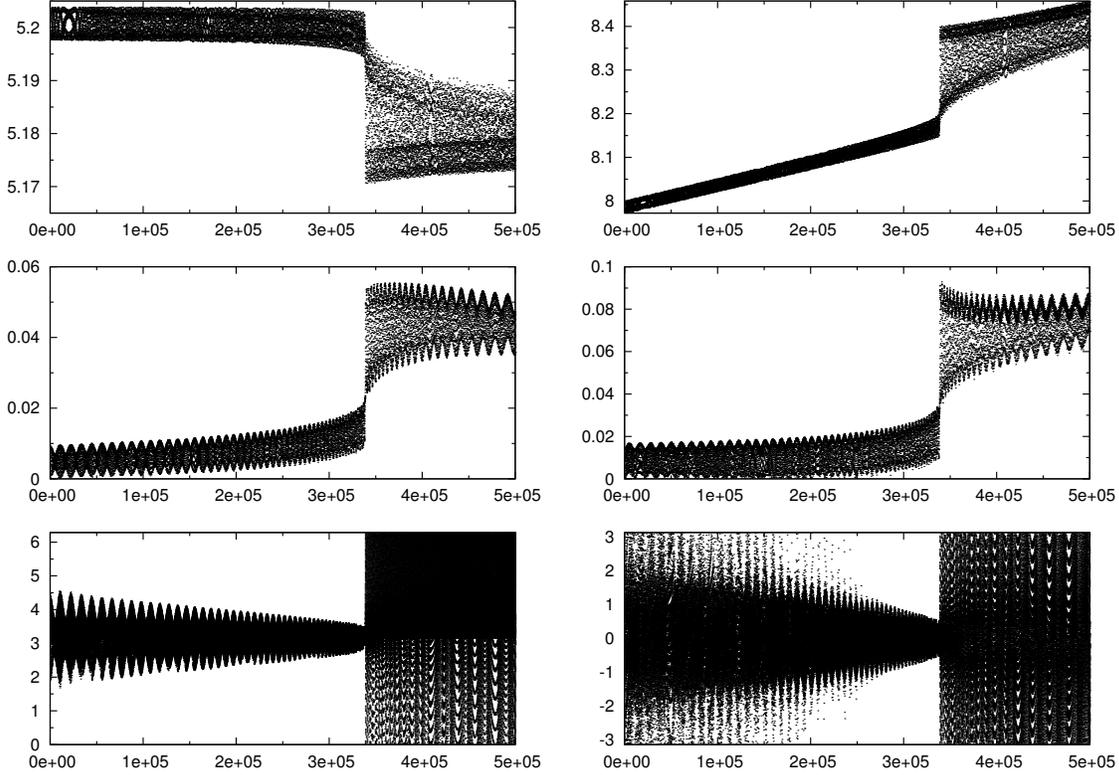


FIG. 7 – figure de gauche : de haut en bas a_1 , e_1 , et Φ_1 en fonction du temps; figure de droite : de haut en bas a_2 , e_2 , et Φ_2 en fonction du temps. Ces graphiques sont les résultats d'une intégration du système Soleil-Jupiter-Saturne en migration forcée avec une vitesse de migration $v_{mig} = 5 \cdot 10^{-7}$ sur 500000 ans avec un pas de temps $\tau = 0.2$ ans.

Sur la figure *fig.7*, nous donnons les résultats d'une intégration du système Soleil-Jupiter-Saturne avec l'intégrateur symplectique \mathcal{SABA}_{C4} dans lequel nous avons introduit une migration forcée de Saturne. Les valeurs initiales des éléments elliptiques des planètes sont leurs valeurs actuelles, excepté $a_2 = 8$. Ces conditions initiales ont été choisies de manière à croiser la RMM 1 : 2 Jupiter-Saturne pour $v_{mig} > 0$. Pour cette intégration nous avons pris $v_{mig} = 5 \cdot 10^{-7} UA/an$. Cette vitesse correspond à la dérive en demi-grand axe de Saturne observée en haut à droite de la figure *fig.7* pour $t \lesssim 340000$ ans. Proche de $t \simeq 340000$ ans, un saut brutal apparaît dans les demi-grands axes et excentricités de Jupiter et Saturne. Ce saut brutal correspond à ce que l'on a appelé plus haut le

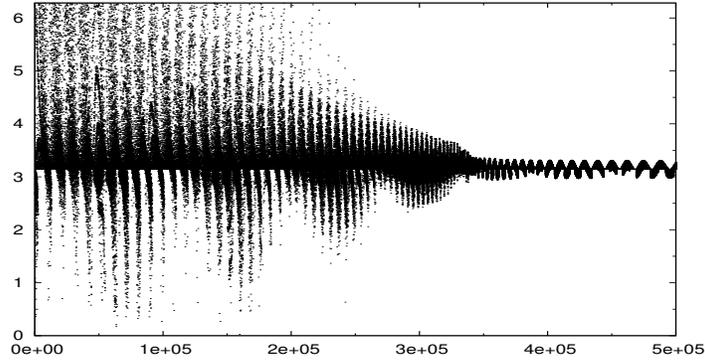


FIG. 8 – $\varpi_1 - \varpi_2$ en fonction du temps pour la même intégration du système Soleil-Jupiter-Saturne qu'à la figure *fig.7*.

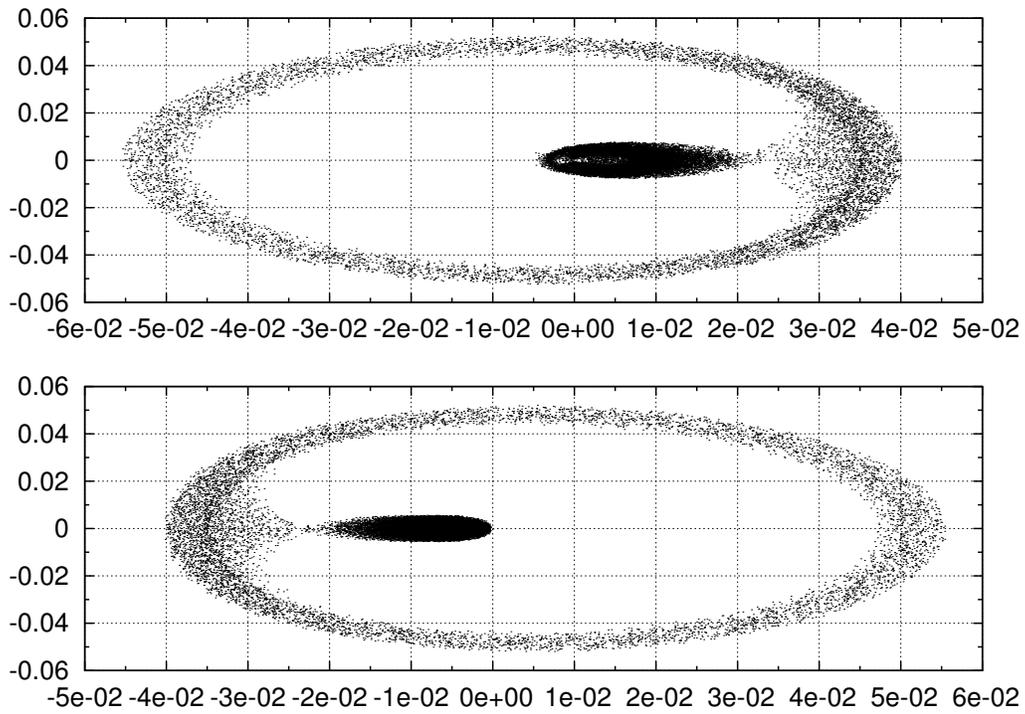


FIG. 9 – en haut : $\sigma_{\Phi_2} = e_2 e^{i(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2)}$, en bas : $\sigma_{\Phi_1} = e_1 e^{i(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1)}$, pour la même intégration du système Soleil-Jupiter-Saturne qu'à la figure *fig.7*.

« saut de la RMM 1 : 2 ». Lors de ce saut, le demi-grand axe de Saturne augmente brutalement, et celui de Jupiter diminue. Les excentricités des planètes quant à elles atteignent des valeurs comparables aux valeurs actuelles. L'angle Φ_1 est en libration pour $0 \leq t \lesssim 340000$ ans et l'angle Φ_2 est en libration pour $240000 \lesssim t \lesssim 340000$ ans. Cependant ces librations ne signifient pas pour autant que l'on soit dans une résonance. Pour mieux comprendre ce point, sur la figure *fig.9*, nous avons tracé l'évolution de $\sigma_{\Phi_2} = e_2 e^{i(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2)}$ (figure du haut) et de $\sigma_{\Phi_1} = e_1 e^{i(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1)}$ (figure du bas). Au début de l'intégration, les excentricités des planètes sont très petites, σ_{Φ_1} et σ_{Φ_2} oscillent proche de 0. puis, les centres de ces oscillations se déplacent progressivement, vers la gauche pour Jupiter et vers la droite pour Saturne. Cette phase correspond à l'augmentation des excentricités e_1 et e_2 , visible sur la figure *fig.7*, avant le saut de la RMM 1 : 2. En même temps que les centres des oscillations de σ_{Φ_1} et σ_{Φ_2} s'éloignent de l'origine, les amplitudes de librations de Φ_1 et Φ_2 diminuent, mais ceci n'est dû qu'à un effet de perspective, car les amplitudes des oscillations de σ_{Φ_1} et σ_{Φ_2} ne diminuent pas. Au bout de 340000 ans, σ_{Φ_1} et σ_{Φ_2} changent brutalement de comportement, pour décrire de larges librations autour de l'origine. ce changement radical de comportement est du au sens de migration de Saturne, qui implique que l'on franchisse les séparatrices de la RMM 1 : 2 proche d'un point hyperbolique. Si l'on inverse le sens de migration de Saturne lors du franchissement de la RMM 1 : 2, alors les planètes Jupiter-Saturne entrent dans la résonance, et continuent à migrer en se maintenant en résonance.

Sur la figure *fig.8*, nous avons tracé l'évolution de l'angle $\varpi_1 - \varpi_2 = \Phi_2 - \Phi_1$ en fonction du temps ; cet angle est en libration pour $240000 \lesssim t \lesssim 340000$ ans, ce qui est prévisible vu que Φ_1 et Φ_2 sont en libration sur cet intervalle de temps. Pour $t \gtrsim 340000$ ans, $\varpi_1 - \varpi_2$ est toujours en libration avec une plus faible amplitude qu'auparavant, alors que ni Φ_1 , ni Φ_2 ne sont en libration. Nous avons fait une autre intégration en prenant pour condition initiale $a_2 = 7.8$, et en gardant les mêmes valeurs des variables elliptiques initiales des planètes. Dans ce cas, ni Φ_1 , ni Φ_2 , ne sont en libration, par contre $\varpi_1 - \varpi_2$ est bien en libration après la RMM 1 : 2. Ce type de libration à déjà été observé par Marzari et Scholl [MS07]. Ces librations ne correspondent pas non plus à une résonance et l'égalité $g_1 = g_2$ n'est pas vérifiée.

2.3 Un exemple de migration des planètes externes du système solaire en interaction avec un disque de planétésimaux.

Comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, l'erreur commise sur le hamiltonien intégré à l'aide de l'intégrateur symplectique \mathcal{SABA}_{C4} , est en $\mathcal{O}(\tau^4 \epsilon^2 + \tau^6 \epsilon)$. Cet intégrateur est donc performant lorsque ϵ est petit, ou plus précisément lorsque les termes contenus dans ϵB restent petits devant A . Lorsque deux corps se rapprochent, l'inverse de leur distance mutuelle grandit. ϵB ne peut donc plus être considéré comme une per-

turbation, et les intégrateurs symplectiques ne sont plus un outil adapté pour calculer la trajectoire de ces corps. Il existe cependant des intégrateurs symplectiques hybrides permettant de palier à ce défaut (voir l'article de Chambers [Cha99]). Le principe de ces hybrides, consiste à mettre les inverses des distances mutuelles des corps en rencontres proches, dans la partie A de l'intégrateur symplectique. Plus précisément, considérons le hamiltonien $\mathcal{H} = A + \epsilon B$ d'un système contenant N corps numérotés de 1 à N , et une étoile représentée par l'indice 0, avec

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m_j} - G \frac{m_0 m_j}{\delta_{0j}} \\
&\quad - G \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \frac{m_j m_k}{\delta_{jk}} (1 - K(\delta_{jk})) \\
B &= -G \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \frac{m_j m_k}{\delta_{jk}} K(\delta_{jk}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où δ_{jk} est la distance mutuelle entre les corps j et k , et m_j est la masse du j -ième corps. La fonction $y \mapsto K(y)$ est dérivable excepté en deux points, elle vaut 1 lorsque y est grand, et 0 quand y est petit. Lorsque qu'il n'y a pas de rencontre proche, tous les $K(\delta_{jk})$ de l'équation (2.4) valent 1, et par conséquent cet intégrateur est un intégrateur symplectique normal. Lors de rencontres proches, il existe au moins une valeur du couple (j, k) pour laquelle $1 - K(\delta_{j,k}) \neq 0$. Des termes apparaissent donc dans A , le différenciant d'un intégrateur symplectique classique.

Nous avons utilisé un intégrateur de ce type programmé par J. E. Chambers et al., Mercury [Cha99], pour intégrer la trajectoire des planètes géantes en interaction avec un disque de planétésimaux de 40 masses terrestres. Ce disque est constitué de 1000 planétoïdes de masses identiques, de conditions initiales $e = I = \varpi = \Omega = 0$, et $(a, M) \in [12, 30] \times [0, 360^\circ]$. Les valeurs initiales du couple (a, M) sont choisies régulièrement espacées sur une grille de 10×100 . Les valeurs initiales des variables elliptiques des planètes sont leurs valeurs actuelles, excepté les demi-grands axes de Saturne, Uranus, et Neptune, qui valent respectivement 8.1, 13, et 18. Nous avons intégré ce système sur 5 millions d'années (5 Ma).

Sur la figure *fig.10*, nous avons représenté les mêmes variables que sur la figure *fig.7* sur l'intervalle de temps $t \in [0; 500000]$ ans. Le franchissement de la RMM 1 : 2, Jupiter-Saturne, se produit aux alentours de $t = 200000$ ans, très similairement à celui de la migration forcée du paragraphe précédent. Comme on pouvait s'y attendre, les courbes représentant les variables elliptiques de Jupiter et Saturne sont moins régulières que dans le cas de la migration forcée. Les sauts en demi-grands axes et excentricités marquant la RMM 1 : 2 sont très semblables à ceux de la migration forcée. Les excentricités maximales atteintes sont $e_2 \simeq 0.1$ et $e_1 \simeq 0.06$, alors qu'elles étaient $e_2 \simeq 0.09$ et $e_1 \simeq 0.05$, dans

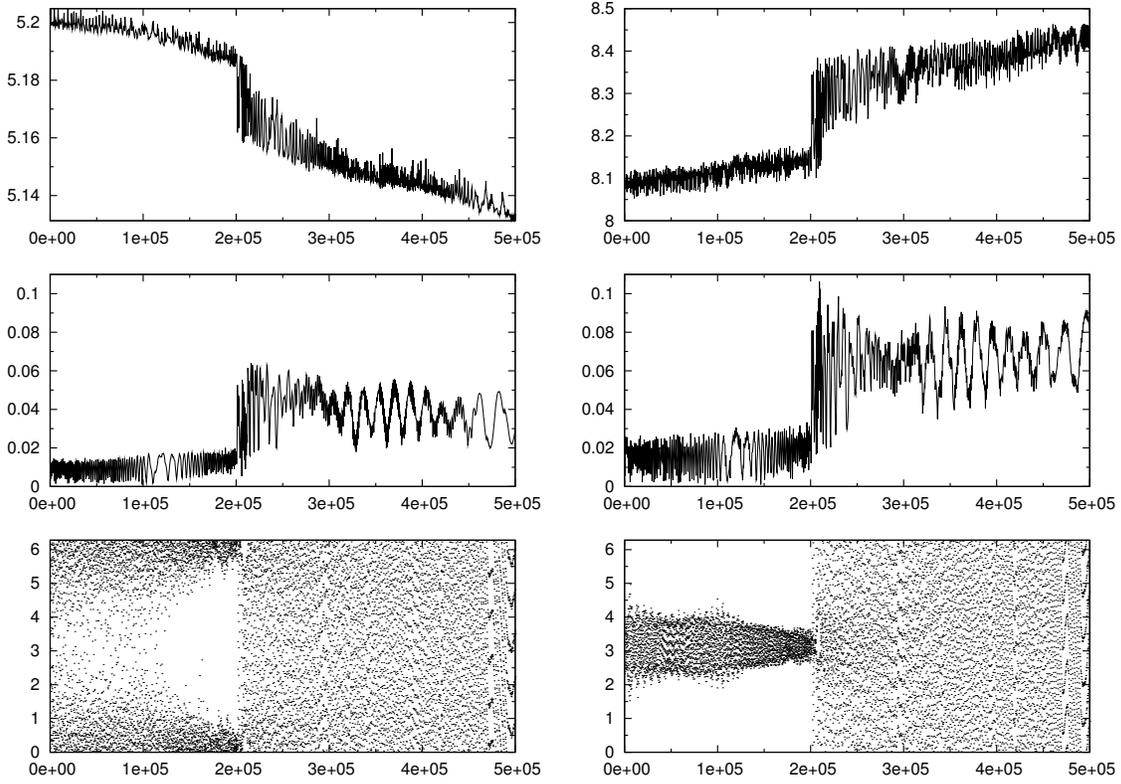


FIG. 10 – Résultats de l'intégration sur 500000 ans du système Jupiter-Saturne-Uranus-Neptune, en interaction avec un disque de planétésimaux de 40 Masses terrestres. A gauche : de haut en bas, a_1 , e_1 , Φ_1 , à droite : de haut en bas, a_2 , e_2 , Φ_2 .

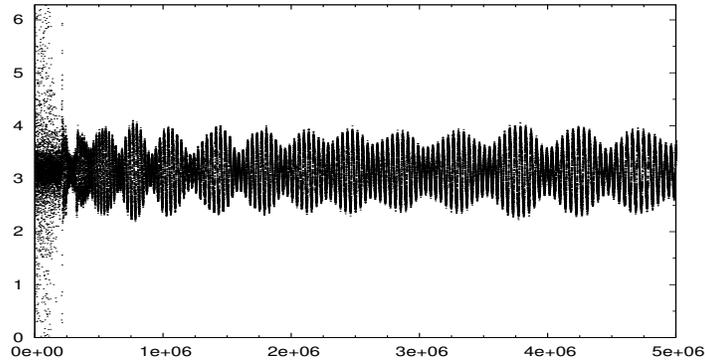


FIG. 11 – Ci-dessus, évolution de $\varpi_2 - \varpi_1$ en fonction du temps, lors de l'intégration sur 5 Ma du système Jupiter-Saturne-Uranus-Neptune, en interaction avec un disque de planétésimaux de 40 Masses terrestres.

le cas de la migration forcée. Lors de cette intégration, les angles qui entrent en libration sont les mêmes que pour la migration forcée. Tout d'abord Φ_1 entre en libration, puis Φ_2 et $\varpi_1 - \varpi_2$. L'évolution de $\varpi_1 - \varpi_2$ en fonction du temps, est représenté sur la figure *fig.11* sur une période de 5 Ma. Cet angle est en libration depuis le moment où Φ_2 entre en libration jusqu'à la fin de l'intégration. Sur la figure *fig.12*, nous avons représenté les demi-grands axes et excentricités des quatre planètes externes sur la totalité de la durée de l'intégration. Les indices 1, 2, 3, 4 font référence respectivement à Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Après le saut de la RMM 1 : 2, les excentricités des planètes diminuent peu à peu, le demi-grand axe de Jupiter continue à diminuer tandis que les demi-grands axes des autres planètes géantes continuent d'augmenter. Les vitesses de migration, \dot{a}_1 , \dot{a}_2 , \dot{a}_3 , \dot{a}_4 ne sont pas constantes, leurs valeurs absolues diminuent avec le temps. Ceci résulte du fait que le disque de planétésimaux, moteurs de la migration, se dépeuple peu à peu. La plupart de ces planétoïdes sont soit éjectés du système solaire, soit envoyés vers les confins du système solaire.

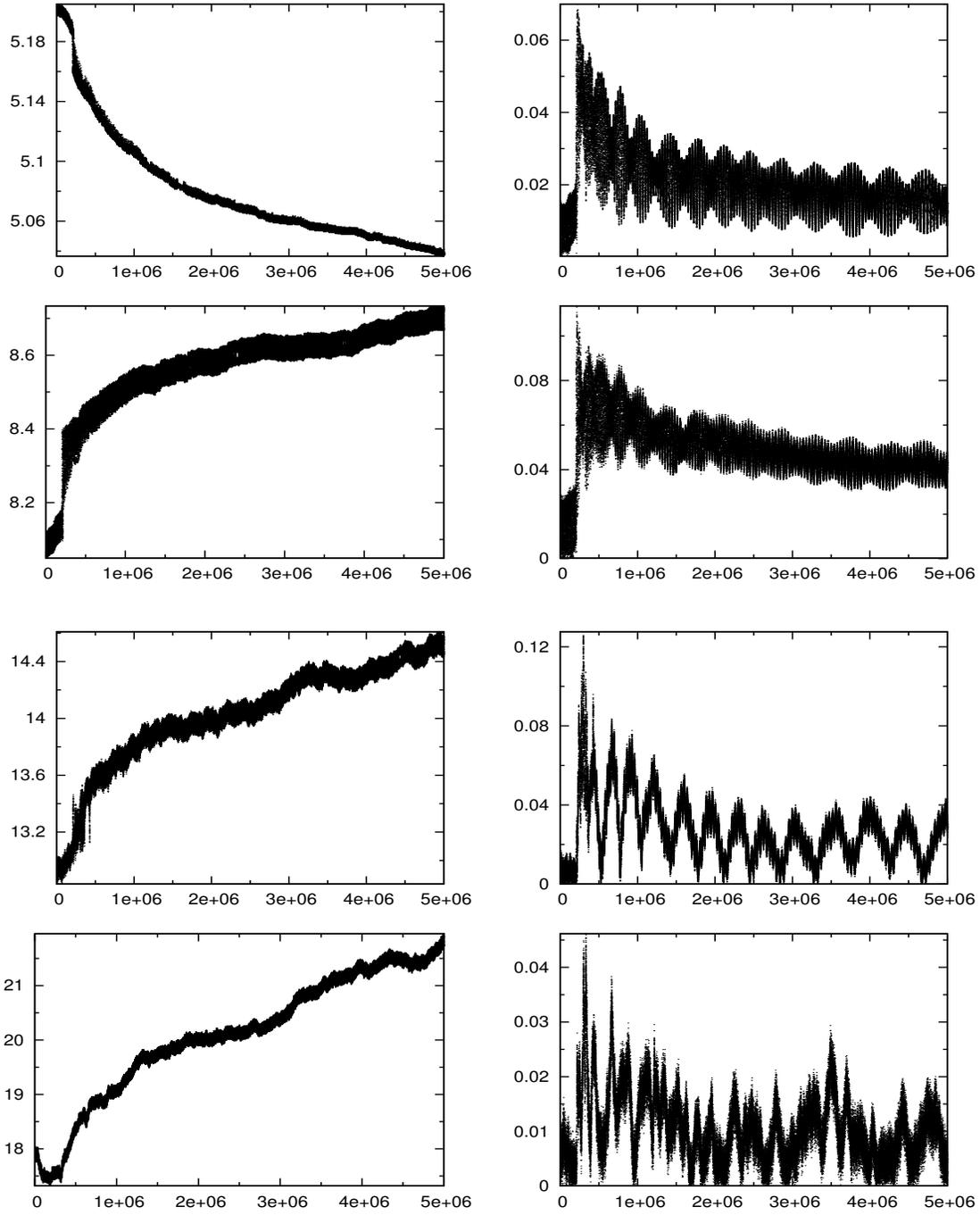


FIG. 12 – Résultats de l'intégration sur 5 Ma du système Jupiter-Saturne-Uranus-Neptune, en interaction avec un disque de planétésimaux de 40 Masses terrestres. A gauche : de haut en bas, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , à droite : de haut en bas, e_1 , e_2 , e_3 , e_4 .

2.4 Conclusion

La migration planétaire est un processus compliqué, qui dépend de nombreux paramètres. Nous avons présenté des modélisations de ce phénomène afin d'en donner un aperçu plus concret. Néanmoins le choix du nombre de planétoïde et de leur répartition ainsi que la position initiale des planètes est assez arbitraire. Dans les chapitres suivants, nous nous intéressons à l'évolution de la dynamique des troyens pendant la migration. Mais devant la diversité des scénarios possibles, nous avons décidé de contourner le problème en n'introduisant pas de migration planétaire dans nos intégrations. Nous supposons que la migration des planètes est suffisamment lente pour que l'on puisse analyser la dynamique des troyens dans le cadre des invariants adiabatiques (voir [Hen82]). Plus précisément, considérons un Hamiltonien qui dépend d'un paramètre $\lambda : H(q, p, \lambda)$. Supposons que λ varie lentement avec le temps, par exemple que $|\dot{\lambda}| \leq \epsilon$. On peut supposer que si ϵ est suffisamment petit, il existe un petit intervalle de temps sur lequel la trajectoire générée par les équations du mouvement du hamiltonien H , de condition initiale (q_0, p_0, λ_0) , reste proche de la trajectoire du « système figé » généré par le hamiltonien $H(q, p, \lambda_0)$ de condition initiale (q_0, p_0) . On peut donc approximer la dynamique des trajectoire du système $H(q, p, \lambda)$, en les découpant en une succession de solutions du système figé. La connaissance de la dynamique des systèmes figés permet donc de comprendre la dynamique du système non figé. Nous allons faire l'analyse de ces états figés, en considérant une succession de configurations planétaires. Ceci nous permettra de calculer les fréquences propres du système, et d'étudier les structures résonantes agissant sur les troyens. Dans les chapitre 4 et 5, nous étudions l'évolution des troyens de Jupiter et de Saturne pour des conditions initiales des planètes choisies le long de la tranche elliptique du paragraphe 2.1. La description des fréquences propres des planètes le long de la tranche elliptique, réalisée au paragraphe 2.1 nous sera utile pour prédire l'apparition des structures résonantes parmi les troyens de Jupiter et Saturne.

Chapitre 3

Etude générale des structures résonantes dans un essaim de troyens

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux troyens dans le sens général du terme, c'est-à-dire à des particules appartenant à l'éventuelle zone de stabilité avoisinant l'un des points de Lagrange de la p -ième planète d'un système planétaire constitué de N planètes en orbite autour d'une étoile. Nous supposons que ce système planétaire est suffisamment stable pour que les trajectoires des planètes puissent être approximées sur un intervalle de temps donné par des orbites quasi-périodiques. Nous ordonnons ces N planètes par ordre croissant des demi-grands-axes. Les fréquences fondamentales des planètes sont notées : $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, $\sigma_g = (g_1, \dots, g_N)$ et $\sigma_s = (s_1, \dots, s_N)$, avec n_j le moyen mouvement de la j -ième planète, g_j la fréquence associée à la precession du périhélie de la j -ième planète, et s_j la fréquence associée à la precession de la longitude du noeud ascendant de la j -ième planète.

S'ils existent, les troyens de la p -ième planète sont des particules en RMM 1 : 1 avec celle-ci. Le moyen mouvement des troyens est donc proche de celui de la p -ième planète. L'angle résonant $\Phi_{1:1} = \lambda_p - \lambda$ est en libration, la fréquence de libration ν associée à $\Phi_{1:1}$ est une des fréquences propres de la particule. D'autres particules, peuvent avoir une orbite en forme de fer à cheval entourant les deux points de Lagrange équilatéraux. Ces particules sont donc aussi dans la RMM 1 : 1 mais elles ne font pas l'objet de notre étude. A l'intérieur de cette RMM, les troyens peuvent rencontrer d'autres résonances. Nous proposons ci-dessous une méthode générale permettant de prévoir quelles structures résonantes sont susceptibles d'avoir un effet sur les troyens.

3.1 Cas du Problème à Trois Corps Restreints

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au PTCR, $N = p = 1$. Dans ce cas, les points de Lagrange L_4 et L_5 sont bien définis et sont des points fixes dans un repère tournant

avec la planète. Quand le mouvement de la planète est circulaire, un résultat classique dû à Gascheau (1843), garantie que ces points fixes sont linéairement stables si et seulement si les masses de la planète et de l'étoile vérifient l'inégalité : $27m_1M < (m_1 + M)^2$. Nous utilisons des masses relatives, par conséquent $M = 1$, et ces points fixes sont linéairement stables pour $m_1 \in [0; m_0]$, avec $m_0 = (1 - \sqrt{23/27})/2 \simeq 0.0385$. Pour une planète ayant une trajectoire elliptique, il existe également des critères de stabilité qui dépendent cette fois-ci de l'excentricité de la planète [MS05]. Quand les points équilatéraux de Lagrange sont linéairement stables, leurs fréquences propres vérifient :

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \mathcal{O}(\sqrt{m_1}) \\ g_0 &= \mathcal{O}(m_1) \\ s_0 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ces fréquences ont donc des ordres de grandeurs différents, $\nu_0 \gg g_0 \gg s_0$. Il existe des modèles qui donnent des approximations des fréquences propres (ν, g, s) des troyens dans l'ensemble du domaine de stabilité (voir par exemple [Mor99]). Selon ces modèles, les ordres de grandeurs de ces fréquences restent les mêmes dans l'ensemble de l'espace des fréquences des troyens, excepté pour s qui peut atteindre des valeurs en $\mathcal{O}(m_1)$ mais vérifie toujours $|s| < |g|$. Ceci rend peu probable l'existence de résonances n'impliquant que les fréquences propres de la particule. Les éventuelles résonances impliquent donc nécessairement les fréquences planétaires, appelées aussi fréquences de forçages. Dans le cas du PTCR, il n'y a qu'une fréquence de forçage, c'est le moyen mouvement n_1 de la planète. Les seules résonances possibles sont donc celles de la *Famille I* définies dans notre article [RB08], pour lesquelles les fréquences propres du système vérifient :

$$j\nu + kn_1 + lg + rs = 0, \quad (i, j, k, r) \in \mathbb{Z}^4, \tag{3.2}$$

avec $k + l + r = 0$. ν étant grand devant g et s , ces résonances sont susceptibles d'apparaître lorsque n_1/ν est proche d'un rationnel q . D'après l'équation 1.19 du paragraphe 1.4.2, la fréquence propre ν_0 du point de Lagrange du problème séculaire s'exprime simplement :

$$\nu_0 = n_1 \sqrt{\frac{27m_1}{4M}}.$$

En utilisant cette approximation, on en déduit que les résonances de la *Famille I* jouent un rôle important dans la dynamique des troyens, lorsque ν_0/n_1 est proche d'un rationnel q , ce qui se traduit par l'égalité :

$$m_1 = \frac{4q^2}{27}. \tag{3.3}$$

Dans le PTCR circulaire, ces résonances sont moins nombreuses que dans le problème elliptiques. En effet, dans le PTCR elliptique, l'apparition de l'angle ϖ_1 , fait apparaître pour chaque angle résonant de la *Famille I* du problème circulaire, une sous-famille

d'angles résonants. Ceci augmente les possibilités de recouvrement entre les éléments de cette famille.

3.2 Cas d'un système à $N + 2$ corps restreints

Pour $N > 1$, les points de Lagrange équilatéraux ne sont pas solutions des équations du mouvement du système à $N + 2$ corps restreints. Cependant, comme nous l'avons montré au chapitre 1.3.3, pour des valeurs de $\epsilon = \max\{m_j | 1 \leq j \leq N, m_j \neq p\}$ suffisamment petites, le problème séculaire à l'ordre un des masses planétaires admet des points fixes, $\mathbf{L}_{4,5}(\epsilon)$, voisins des points d'équilibres équilatéraux. Dans le problème non séculaire, ces points peuvent être remplacés par des orbites quasi-périodiques [Gab03]. Les simulations numériques montrent que, pour des valeurs de ϵ suffisamment petites, il existe des zones de stabilités proches des points équilatéraux de Lagrange. Les particules appartenant à cette zone de stabilité sont les troyens auxquels nous nous intéressons. Considérons l'influence de la j -ième planète sur les troyens coorbitant avec la p -ième. Afin de faciliter notre analyse, nous allons séparer la perturbation due à la j -ième planète en deux parties que nous appellerons influences directe et indirecte. L'influence directe est due à l'attraction gravitationnelle de la j -ième planète sur les troyens. L'influence indirecte provient de l'interaction entre les planètes p et j . Cette interaction perturbe leurs trajectoires qui ne sont par conséquent plus keplériennes.

En terme de fréquences, le principal effet de la perturbation directe est de modifier les fréquences (ν, g, s) des troyens. Au paragraphe 1.5, nous avons donné des approximations des fréquences propres et des coordonnées des points de Lagrange $\mathbf{L}_{4,5}(\epsilon)$ en fonction de cette perturbation (voir équations 1.58, et 1.59). Cette approximation n'est valable qu'aux points de Lagrange, mais elle permet de donner une idée de l'ordre de grandeur de l'action de la j -ième planète sur les troyens de la p -ième planète. D'après cette approximation, cette influence est plus importante dans le cas où $j < p$ que dans le cas où $j > p$. En appliquant cette approximation au système solaire, nous avons pu constater que ν est très peu affecté par la j -ième planète, tandis que g et s le sont plus notablement. De telle sorte qu'à l'exception des troyens de Jupiter ($p = 5$), les actions directes des autres planètes modifient fortement la dynamique du PTCR.

L'action indirecte agit de manière plus subtile : l'introduction d'une planète supplémentaire fait apparaître trois fréquences de forçage, susceptibles de se combiner avec les fréquences du système pour faire apparaître de nouvelles résonances dans l'espace des troyens. Par exemple, les résonances impliquant n_p sont affectées par l'apparition des fréquences séculaires des autres planètes. Ces fréquences de forçage augmentent les possibilités de résonances, nous incitant à étendre les résonances de la *Famille I* aux relations du type :

$$i\nu + jn_p = -(kg + ls + \mathbf{k}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}_g + \mathbf{l}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_s), \quad (3.4)$$

avec $i \neq 0$, $j \neq 0$, $\mathbf{k}_g \in \mathbb{Z}^N$, $\mathbf{l}_s \in \mathbb{Z}^N$, et $j + k + l + \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{1} + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1} = 0$. Dans cette écriture, le point représente un produit scalaire, et $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^N$. L'enrichissement de cette famille peut générer de larges régions chaotiques dues à des recouvrements entre ces résonances.

L'augmentation du nombre de fréquences de forçage peut également faire apparaître de nouvelles résonances séculaires. Comme le montre le tableau tab.1.1, dans le système solaire, excepté les fréquences g des troyens de Jupiter, les fréquences séculaires de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ sont très proches des fréquences propres associées aux périhélie et aux longitudes des noeuds des planètes. Les résonances séculaires du type $g = cte$ jouent donc un rôle important. Dans le cas des troyens de Jupiter, la résonance $s = s_6$ (l'indice 6 faisant ici référence à Saturne) limite la zone de stabilité des troyens de Jupiter ayant de faibles inclinaisons.

De même que dans l'article [RB08], nous appelons *Famille III*, la famille des résonances séculaires définies par les relations du type :

$$kg + ls + \mathbf{k}_g \cdot \sigma_g + \mathbf{l}_s \cdot \sigma_s = 0, \quad (3.5)$$

avec $k + l + \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{1} + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1} = 0$. Nous verrons au paragraphe 4.2.1, que cette famille joue un rôle important dans la dynamique des troyens de Saturne. Comme nous l'avons dit plus haut, g et s ne sont pas du même ordre de grandeur. Parmi ces résonances on peut donc distinguer deux sous-familles importantes, celle des résonances de *Famille III* vérifiant $k = 0$, et celles vérifiant $k \neq 0$.

L'ajout de la j -ième planète rend possible des résonances en moyen mouvement avec les troyens de la p -ième planète. Etant donné que $n \simeq n_p$, ces RMM coïncident avec des RMM entre les planètes p et j . Proche de la RMM $\alpha : \beta$ entre la p -ième et la j -ième planète, la quantité $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j} = \alpha n_p - \beta n_j$ est du même ordre de grandeur que les fréquences séculaires des planètes. Si les planètes sont loin de la RMM $\alpha : \beta$, $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$ est du même ordre de grandeur que les moyens mouvements des planètes. Entre ces deux extrêmes, il existe donc des configurations intermédiaires pour lesquelles $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$ est du même ordre de grandeur que $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{m_p})$, rendant possible des relations résonnantes entre ν et $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$. Ceci nous conduit à introduire la famille de résonances que nous appelons *Famille II*, définie par les relations du type :

$$i\nu - q\nu_{\alpha,\beta}^{p,j} = -(kg + ls + \mathbf{k}_g \cdot \sigma_g + \mathbf{l}_s \cdot \sigma_s), \quad (3.6)$$

avec $q(\beta - \alpha) + k + l + \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{1} + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1} = 0$. Cette famille joue un rôle dans la dynamique des troyens des planète géantes de notre système solaire. Remarquons que si $\beta = 0$, nous retrouvons la définition des éléments de la *Famille I*. Si $\alpha = 0$ cette équation ressemble à celle de la *Famille I*, mais implique le moyen mouvement d'une planète qui n'est pas co-orbitale avec les troyens. Nous n'avons pas identifié de résonances de ce type dans l'espace des fréquences des troyens des planètes géantes. Nous supposons que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, afin que ces résonances soient bien associées à une RMM entre les planètes p et j . Si $N > 2$, cette famille peut-être définie de manière encore plus générale si l'on considère les RMM à trois corps, impliquant les moyens mouvements de 3 planètes. Des résonances de ce type

pourraient jouer un rôle dans l'évolution de la dynamique des troyens d'Uranus lors de la migration planétaire. L'étude de ces résonances n'est pas traitée dans notre ouvrage. Néanmoins, les méthodes de localisation de la *Famille II* que nous mettons en place dans les chapitres 4 et 5 sont aussi applicables à ce genre de résonances, mais les RMM à plus de 2 corps étant plus petites que celles à 2 corps, il est probable que l'effet de ces résonances apparentées à la *Famille II* soit moins important.

Plus proche de la RMM $\alpha : \beta$, $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$ est de l'ordre de grandeur de $g = \mathcal{O}(m_p)$, ce qui nous conduit à introduire la famille de résonances que nous appelons *Famille IV*, définie par les relations du type :

$$kg + q\nu_{\alpha,\beta}^{p,j} = -(ls + \mathbf{k}_g \cdot \sigma_g + \mathbf{l}_s \cdot \sigma_s), \quad (3.7)$$

avec $q(\alpha - \beta) + k + l + \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{1} + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{1} = 0$. Dans un système planétaire à N planètes avec $N > 1$, ces quatre familles de résonances peuvent donc agir sur les troyens. Devant la diversité de ces familles, on peut penser qu'il est improbable qu'aucune de ces familles n'apparaisse dans l'espace des fréquences des troyens, ce qui rend leur étude d'autant plus intéressante.

Chapitre 4

Application aux troyens de Jupiter

La majorité du travail présenté dans ce chapitre a été exposé dans notre article [RB08]. Il nous a semblé pertinent de réexposer ces résultats, pour donner plus de cohérence à notre travail. Nous allons étudier l'évolution des structures résonantes décrites ci-dessus, dans l'essaim des troyens de Jupiter. Robutel et Gabern ont montré dans l'article [RG06], que le système Soleil-Jupiter-Saturne + particule, contient l'essentiel de la dynamique de ces troyens. Notre étude s'applique à ce système à quatre corps restreint. Afin d'être cohérent avec les notations de la section 3, nous faisons référence à Jupiter par l'indice 1, et à Saturne par l'indice 2, les quantités sans indice sont celles de la particule sans masse. Ainsi les demi-grands axes de Jupiter et Saturne sont notés (a_1, a_2) , leurs moyens mouvements (n_1, n_2) , et leurs fréquences séculaires $\sigma_g = (g_1, g_2)$ et $\sigma_s = (0, s_2)$. Comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, les résonances de la *Famille IV* doivent jouer un rôle dans la dynamique des troyens proches des RMM. Dans la configuration actuelle des planètes, Jupiter et Saturne sont proches de la RMM 2 : 5. Des résonances de la *Famille IV* devraient donc apparaître dans l'espace des fréquences des troyens. Comme le montrent les résultats de l'article [RG06], c'est effectivement le cas. Plusieurs résonances de la *Famille IV* apparaissent, vérifiant des relations du même type que l'équation (3.7) avec $k = 4$ et $q = 1$. Nous verrons comment évoluent les éléments de la *Famille IV* lorsqu'on change la géométrie du système au paragraphe 4.2.1. Plus loin des RMM, nous nous attendons à voir apparaître des résonances de la *Famille II*. Dans leur configuration actuelle, Jupiter et Saturne sont loin de la RMM 1 : 2, et des éléments de la *Famille II* associés à $\nu_{1,2}^{1,2}$ apparaissent clairement dans l'espace des fréquences des troyens [RG06]. Du fait de cette distance, ces éléments sont associés à des valeurs de $i = 5$ et $q = -2$ dans l'équation (3.6). Nous étudions l'effet des éléments de la *Famille II* pour différentes configurations spatiales du système Jupiter-Saturne au paragraphe 4.2.1. Les résonances des *Famille I* et *Famille III*, jouent un rôle important dans la dynamique des troyens actuels. Mais à part très près de la RMM 1 : 2, ces familles ne sont quasiment pas affectées par la migration planétaire, elles requièrent donc moins d'étude que les familles *II* et *IV*.

4.1 Modèle à un paramètre

Afin de comprendre comment agissent les structures résonantes dans l'essaim des troyens lorsqu'on change la configuration spatiale du système Jupiter-Saturne, nous considérons une succession de conditions initiales des planètes. Les fréquences propres des planètes dépendent principalement du rapport de leurs demi-grands-axes. En conséquence, nous décidons de ne modifier qu'un seul paramètre : la valeur initiale du demi-grand axe de Saturne a_2 . Nous nous ramenons ainsi à un modèle à un paramètre. Pour chaque valeur du paramètre a_2 , nous intégrons le Soleil, Jupiter, Saturne, et un ensemble de troyens (considérés comme des particules sans masse). Les valeurs du demi-grand axe de Saturne sont choisies entre 8 et 9.625, les autres conditions initiales des planètes sont égales à leurs valeurs actuelles. L'avantage de ce modèle, c'est que les conditions initiales des troyens ne dépendent pas des valeurs du paramètre a_2 . Dans chaque intégration, nous intégrons 8000 particules sans masses, pour des valeurs de $(a, e) \in \mathcal{A} = [5.2035; 5.4030] \times [0.05; 0.30]$ sur une grille de 200×40 conditions initiales uniformément réparties. Les autres variables elliptiques des particules sont fixes : $\sigma = \lambda - \lambda_1 - 60 = 0$, $\sigma_g = \varpi - \varpi_1 = -60$, $\Omega = \Omega_1$, et $I = I_1 + I^*$. Etant donné que l'apparition des structures résonantes dépend de l'inclinaison initiale [RG06], nous considérons trois valeurs de I^* différentes : 2° , 20° , et 30° . Pour chaque valeur de I^* , cet ensemble de conditions initiales est noté \mathcal{D}_{I^*} . Notons \mathcal{F} , l'application qui, à chaque troyen du domaine \mathcal{D}_{I^*} , associe ses fréquences propres, (ν, g, s) . L'image de \mathcal{F} est l'espace des fréquences des troyens, notons la $\Theta_{I^*} = \mathcal{F}(\mathcal{D}_{I^*})$. Il est important de mentionner le fait que l'espace des fréquences des troyens présente deux symétries. La première, par rapport à la courbe de l'espace des conditions initiales des troyens, qui est proche de la droite d'équation $a = a_1(t = 0) \simeq 5.2035$, et la deuxième par rapport à une courbe proche de la droite d'équation $e = e_1(t = 0) \simeq 0.0489$. De part et d'autre de ces courbes, il existe des conditions initiales dont les fréquences propres associées sont identiques. Les trajectoires de ces particules ne sont pas les mêmes, mais elles appartiennent au même tore invariant. D'un point de vue dynamique, ces trajectoires sont donc équivalentes. Ces symétries nous permettent de nous restreindre à un ensemble de conditions initiales du type $\{(a, e); a \geq a_1(t = 0), e \geq e_1(t = 0)\}$.

Nos intégrations numériques sont réalisées à l'aide d'un intégrateur symplectique \mathcal{SABA}_4 avec un pas d'intégration de 0.2 an. Les troyens et les planètes sont intégrés sur deux tranches de temps consécutives de 5 Ma. Sur chacune de ces tranches d'intégrations, nous calculons les fréquences propres des particules qui n'ont pas été éjectées de la RMM 1 : 1. Notre analyse de \mathcal{D}_{I^*} repose sur trois informations complémentaires. L'information la plus simple est donnée par le taux d'éjection $n_{e_j}^{I^*}(a_2)$, égal au nombre de troyens échappant à la RMM 1 : 1 avant la fin de l'intégration (10Ma), divisé par le nombre initial de troyens intégrés (8000). Ce taux d'éjection dépend, bien sûr, du domaine intégré par le biais de I^* et de la valeur du paramètre a_2 . Etant donné que notre intégrateur ne prend pas en compte les rencontres proches avec Jupiter, ce taux d'éjection est sans doute surestimé. Néanmoins, $n_{e_j}^{I^*}(a_2)$ reste un indicateur de l'instabilité globale des troyens considérés (voir fig.17). Les autres informations sont tirées du calcul des fréquences propres des troyens.

De la même façon qu'au paragraphe 2.1 où on utilise les variations du moyen mouvement de Saturne comme indicateur d'instabilité permettant de représenter des cartes de diffusion de la dynamique des planètes, on utilise ici les variations de la fréquence de libration des troyens pour réaliser des cartes de diffusions de \mathcal{D}_{I^*} . Ces cartes nous permettent de visualiser les déformations de la zone de stabilité quand on modifie la valeur du paramètre a_2 . L'étude de Θ_{I^*} permet d'identifier les structures résonantes agissant sur la dynamique des troyens, et de comprendre ainsi les causes du changement de forme de cette zone de stabilité. Une fois connue l'évolution des fréquences planétaires pour $a_2 \in [8; 9.625]$ (étudiées au paragraphe 2.1), il est possible de prédire quelles structures résonantes sont présentes dans l'espace des fréquences des troyens, à condition de connaître les bornes du domaine Θ_{I^*} . Dans ce but, nous supposons que ces bornes ne dépendent pas de la valeur de a_2 , ce qui est une bonne approximation dans le cas des troyens de Jupiter. Nous utilisons la valeurs des bornes suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta_2 &\subset [7700; 9150] \times [310; 445] \times [-45; -7.5] \\ \Theta_{20} &\subset [7400; 8660] \times [285; 350] \times [-40; -3.5] \\ \Theta_{30} &\subset [7000; 8138] \times [251; 280] \times [-30; 0.6] \end{aligned} \tag{4.1}$$

où ces fréquences sont exprimées en secondes d'arc par an. Ces produits d'intervalles sont respectivement les projections de Θ_{I^*} sur les droites engendrées par ν , g , et s , que nous noterons $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$, $\pi_g(\Theta_{I^*})$, et $\pi_s(\Theta_{I^*})$. Remarquons que les bornes inférieures de ν et s sont un peu arbitraires, car les particules correspondantes ont des trajectoires pour lesquelles l'approximation quasi-périodique n'est pas très bonne, ce qui rend moins pertinente l'utilisation des fréquences propres. En fait, l'action directe de Saturne sur l'essaim des troyens translate les bornes de Θ_{I^*} . Une bonne approximation de ces translations des fréquences est donnée par celles du point de Lagrange du problème séculaire $\mathbf{L}_4(\epsilon)$, représentées sur la figure *fig.1*. D'après cette approximation les bornes de $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$ varient d'environ 0.7 sur l'intervalle $a_2 \in [8.1; 9.625]$, alors que celles de $\pi_g(\Theta_{I^*})$ varient d'environ 10. Ces bornes varient donc très peu relativement à l'ordre de grandeur de ces fréquences, et c'est pourquoi nous considérons qu'elles sont indépendantes de a_2 . Ceci nous permettra de prédire avec une bonne précision l'apparition des familles *II* et *IV* dans l'espace des fréquences des troyens. Les bornes de $\pi_s(\Theta_{I^*})$, varient de façon plus conséquente puisqu'elles varient d'environ une dizaine de secondes d'arc alors que $|s| < 50$. Notre approximation est donc un peu moins bonne concernant cette fréquence, et nous tiendrons compte de ce fait dans notre analyse des résonances séculaires.

4.2 Analyse de l'évolution des familles de résonances

Le but de notre travail est d'analyser de façon exhaustive les structures résonantes susceptibles de déstabiliser les troyens de Jupiter pendant la migration planétaire. Comme nous l'avons annoncé au chapitre 4.1, nous limitons notre étude aux valeurs de a_2 com-

prises entre 8 et 9.625, et aux espaces de conditions initiales \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_{20} et \mathcal{D}_{30} . Dans un premier temps, connaissant les bornes des domaines Θ_{I^*} , connaissant l'évolution des fréquences planétaires (cf 2.1) et connaissant les relations définissant les 4 grandes familles de résonances susceptibles d'apparaître dans Θ_{I^*} , nous mettons en place des méthodes permettant de prédire les grands évènements affectant la dynamique des troyens. Dans un deuxième temps, nous vérifions nos prédictions en les confrontant aux résultats de nos simulations numériques. Les taux d'éjection, $n_{ej}^{I^*}(a_2)$, sont représentés sur les trois fenêtres du haut de la figure *fig.17*, et correspondent respectivement, de bas en haut, à $I^* = 2^\circ$, $I^* = 20^\circ$, et $I^* = 30^\circ$. La fenêtre du bas permet de prédire l'apparition de la *Famille II* et sera expliquée au chapitre 4.2.2. Pour chaque valeur de l'inclinaison I^* , de nombreux pics d'instabilité apparaissent. Le but de notre travail est de comprendre quelles structures sont la cause de ces zones instables, et la manière dont ces structures agissent sur les troyens. Sans étude préalable, il est facile de reconnaître sur ces graphiques, l'effet des RMM entre Jupiter et Saturne. Le chaos généré sur la trajectoire des planètes par ces RMM induit une instabilité uniformément répartie sur l'ensemble de l'essaim des troyens. Les pics d'instabilité correspondant apparaissent donc pour les mêmes valeurs de a_2 dans chacun des domaines \mathcal{D}_{I^*} intégrés. L'effet de la RMM 1 : 2 correspond aux plateaux apparaissant pour $a_2 < 8.4$, celui de la RMM 3 : 7 correspond aux pics d'instabilités vers $a_2 \simeq 9.2$, et celui de la RMM 2 : 5 apparaît pour $a_2 > 9.62$ A.U.. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 3.2, les éléments de la *Famille IV* apparaissent dans un voisinage proche des RMM. Ils contribuent à l'augmentation de l'instabilité au voisinage des séparatrices des RMM. Comme nous le verrons au chapitre 4.2.1, l'évolution des familles *II* et *IV* dépend de I^* . Les éléments de la *Famille II*, devraient apparaître plus loin des RMM, et nous verrons au chapitre 4.2.2 qu'ils sont la cause des autres pics d'instabilité.

Concernant l'évolution de la *Famille I*, nous avons expliqué au chapitre 3.1, que dans le cadre de l'approximation linéaire séculaire du PTCR, la présence de cette famille au voisinage des points équilatéraux ne dépend pas de la valeur de n_1 . De plus, nous avons vu au paragraphe 1.5.3.2, que dans le cadre du problème séculaire, la présence de Saturne modifie très peu la valeur de ν au voisinage des points équilatéraux. Par conséquent, la présence de ces résonances dépend surtout de la masse de Jupiter et non des conditions initiales des planètes. Dans la configuration actuelle, les résonances de la *Famille I* associées à $(i, j) \in \{(11, 1), (12, 1), (13, 1)\}$ (3.4) agissent sur les troyens. En analysant les résultats de nos simulations numériques, nous avons effectivement observé que cette famille ne se déplace quasiment pas dans l'espace des fréquences des troyens. A part très près de la RMM 1 : 2, la *Famille I* n'est donc quasiment pas affectée par la migration planétaire. Elle joue néanmoins un rôle dans l'évolution de la dynamique des troyens. En effet, quand une résonance d'une autre famille se rapproche des troyens subissant l'effet de la *Famille I*, le recouvrement de ces deux familles déstabilise plus les troyens qu'ils ne le seraient isolément par chacune de ces familles. Les éléments de la *Famille III* évoluent un petit peu plus, mais pas suffisamment pour expliquer les variations importantes des taux d'éjection $n_{ej}^{I^*}(a_2)$. La résonance séculaire affectant le plus la dynamique des troyens, est la résonance $s = s_2$. Comme on le voit sur la figure *fig.6* du chapitre 2.1, la fréquence $s_2(a_2)$

augmente lentement sur l'intervalle $[8; 9.625]$ excepté, bien sûr, proche des séparatrices des RMM. Elle vaut environ -50 proche de la RMM $1 : 2$. Lorsque a_2 est petit, s_2 n'appartient donc pas à $\pi_s(\Theta_{I^*})$, et la résonance séculaire $s = s_2$ n'apparaît donc pas dans l'espace des fréquences des troyens. Lorsqu'on s'éloigne de la RMM $1 : 2$, s_2 augmente lentement pour atteindre -25 proche de la RMM $2 : 5$. Or $-25 \in \pi_s(\Theta_{I^*})$ pour les trois valeurs de I^* que nous avons considérées. quand a_2 augmente, la résonance $s = s_2$ apparaît donc progressivement parmi les troyens de faible inclinaison pour gagner ensuite les troyens plus inclinés. Cependant, nous avons vu au paragraphe 1.5.3.2 (figure *fig.1*) que dans l'approximation linéaire séculaire, s est une fonction croissante de a_2 , valant environ -14 proche de la RMM $1 : 2$ et atteignant -7 proche de la RMM $2 : 5$. Ces variations séculaires correspondent étonnamment bien aux translations observées sur $\pi_s(\Theta_{I^*})$ causées par l'influence directe de Saturne. Cette translation va dans le même sens que celle des bornes de $\pi_s(\Theta_{I^*})$, ce qui a pour effet d'atténuer le déplacement de la résonance séculaire $s = s_2$. Il en résulte que cette résonance n'apparaît jamais proche du point équilatéral et reste toujours confinée au bord de la zone de stabilité des troyens. D'autres résonances séculaires intéressantes sont celles définies par la relation :

$$g = (k_1 + 1)g_2 - k_1g_1 \quad (4.2)$$

avec $k_1 \geq 0$. L'ordre de ces résonances est $2k_1 + 2$. Ces résonances sont donc d'autant plus susceptibles de jouer un rôle important dans la dynamique des troyens que l'excentricité des troyens est grande et que k_1 est petit. Près de la RMM $1 : 2$, comme le montre la figure *fig.6*, la fréquence séculaire g_2 augmente considérablement, rendant possible ce genre de relations pour de petites valeurs de k_1 . Connaissant la valeur des fréquences séculaires, ainsi que les bornes de $\pi_g(\Theta_{I^*})$ et la relation (4.2), il est facile de prédire les valeurs de a_2 pour lesquelles ces résonances apparaissent dans Θ_{I^*} . Ces prédictions sont résumées dans le tableau Tab.4.1. Ces résonances sont rencontrées d'autant plus proches de la RMM $1 : 2$, que I^* est petit, et les intervalles de demi-grand axes a_2 pour lesquels ces résonances apparaissent sont d'autant plus fins que I^* est grand. Comme on peut le voir en replaçant les intervalles définis dans le tableau Tab.4.1 sur la figure *fig.17*, les résonances associées à $k_1 = 0$ sont noyées dans l'instabilité générée par le franchissement de la séparatrice de la RMM $1 : 2$. De même que la *Famille IV*, la résonance séculaire associée à $k_1 = 1$ doit contribuer à la montée d'instabilité sur le bord de la RMM $1 : 2$, pour $I^* \in \{2^\circ, 20^\circ\}$. Celles associées à $k_1 = 2$ peuvent jouer un rôle dans la dynamique des troyens, néanmoins leur rôle est très ponctuel, et nous verrons au chapitre 4.2.2 qu'il est négligeable devant l'effet de la *Famille II*.

	$k_1 = 0$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$
$I^* = 2^\circ$	$a_2 < 8.39$	$a_2 \in [8.41, 8.425]$	$a_2 \in [8.43, 8.45]$
$I^* = 20^\circ$	$a_2 < 8.395$	$a_2 \in [8.425, 8.43]$	$a_2 \in [8.45, 8.46]$
$I^* = 30^\circ$	$a_2 < 8.4$	$a_2 \in [8.435, 8.44]$	$a_2 \in [8.47, 8.475]$

TAB. 4.1 – Ce tableau résume les valeurs du paramètre a_2 pour lesquelles $(k_1 + 1)g_2 - k_1g_1 \in \pi_g(\Theta_{I^*})$.

4.2.1 Analyse de la *Famille IV*

4.2.1.1 Prédiction de l'évolution de la *Famille IV*

Dans cette section, nous concentrons notre attention dans le voisinage proche de la RMM 2 : 5. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 4, dans ce voisinage nous nous attendons à voir apparaître des éléments de la *Famille IV*. D'après notre raisonnement, Il existe trois autres régions où l'on s'attend à voir apparaître la *Famille IV* dans l'intervalle des valeurs du paramètre $a_2 \in [8; 9.625]$: juste après la RMM 1 : 2, juste avant la RMM 3 : 7, et juste après la RMM 3 : 7. Nous avons choisi le voisinage de la RMM 2 : 5 pour illustrer la traversée de l'essaim des troyens par la *Famille IV*, pour deux raisons. D'une part, il nous a semblé pertinent de démarrer notre étude au voisinage de la situation actuelle. D'autre part, c'est là où l'influence de la *Famille IV* sur la dynamique des troyens est la plus spectaculaire. Les résonances de la *Famille IV*, sont définies par la relation (3.7). Elles impliquent les fréquences $\nu_{1,2}^{2,5}$, g , s et les fréquences séculaires des planètes. Comme on le voit sur la figure 6, les variations des fréquences séculaires des planètes sont petites comparées à celles de $\nu_{2,5}$. De plus, g_1 , g_2 , s_2 et s sont petites comparées à g . De ces deux propriétés, on déduit que la présence de la *Famille IV* dans Θ_{I^*} dépend principalement de la valeur de $\nu_{1,2}^{2,5}(a_2)$. Si le terme de droite de l'équation (3.7) est petit devant kg , une bonne approximation de cette équation de résonance est donnée par la condition :

$$-\nu_{2,5}^{1,2} \in \frac{k}{q}\pi_g(\Theta_{I^*}). \quad (4.3)$$

Cette relation simple permet d'obtenir une approximation des valeurs de a_2 pour lesquelles les éléments de la *Famille IV* apparaissent dans Θ_{I^*} . Cette prédiction est résumée par la figure *fig.13*. Sur cette figure, nous avons tracé la courbe représentative de la fonction $f : a_2 \mapsto -\nu_{1,2}^{2,5}(a_2)$ sur l'intervalle $a_2 \in [9.575; 9.603]$. Cette fonction décroît régulièrement sur l'intervalle $[9.575; 9.602]$. Proche de $a_2 \simeq 9.602$, un changement violent de pente marque le début de la RMM 2 : 5. Les valeurs de a_2 pour lesquelles la relation (4.3) est vérifiée, sont matérialisées par des rectangles. Plus précisément, la fonction f étant continue et monotone sur cet intervalle, elle réalise une bijection de $f^{-1}((k/q)\pi_g(\Theta_{I^*}))$ vers $(k/q)\pi_g(\Theta_{I^*})$. Les rectangles représentés sur la figure *fig.13* sont les produits cartésiens de ces deux intervalles, nous les notons $R_{I^*}^k$. Pour plus de clarté, nous limitons notre étude

aux résonances pour lesquelles $q = 1$. Selon les équations (4.1) et (4.3), le positionnement de la *Famille IV* dépend de l'inclinaison I^* . Pour mieux comprendre cette dépendance, nous étudions l'espace des fréquences pour deux inclinaisons : $I^* = 2^\circ$ et $I^* = 20^\circ$. Les rectangles $R_{I^*}^k$ correspondants sont coloriés respectivement en gris clair et gris foncé. La valeur de k associée à chaque rectangle est indiquée dans un coin par l'étiquette kg avec $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, en bas à gauche pour $I^* = 2^\circ$, et en haut à droite pour $I^* = 20^\circ$. Trois propriétés permettent de comprendre l'évolution de la *Famille IV* en fonction de a_2 et de I^* . Ces propriétés sont visibles sur la figure *fig.13* :

1. à k fixé, les hauteurs et largeurs des côtés de $R_{I^*}^k$ sont des fonctions décroissantes de I^* ,
2. à k fixé, ces rectangles sont décalés vers la droite quand I^* augmente,
3. à I^* fixé, ces rectangles sont décalés vers la droite quand k diminue.

Ces propriétés sont dues au fait que la fonction f est décroissante et concave, et que la largeur et les bornes de $\pi_g(\Theta_{I^*})$ sont des fonctions décroissantes de I^* (voir [RG06]). D'après la première de ces propriétés, lors d'une migration planétaire (variation lente et monotone du paramètre a_2), un élément de la *Famille IV* agit d'autant plus longtemps sur les troyens qu'ils ont une faible inclinaison. Selon la seconde propriété, lorsque a_2 augmente, les éléments de la *Famille IV* associés à une valeur de k fixée apparaissent d'abord parmi les troyens de faible inclinaison pour gagner ensuite les troyens de plus haute inclinaison. Une autre conséquence de la première de ces propriétés est qu'à faible inclinaison, les rectangles R_2^3 et R_2^4 ont une intersection non nulle, alors que les rectangles R_{20}^k pour $k \in \{3, 4, 5\}$ sont disjoints deux à deux.

4.2.1.2 Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous allons illustrer les prédictions précédentes par des simulations numériques. Dans le but de simplifier la présentation de notre travail, nous faisons deux simplifications. Premièrement, l'entier q de la relation (3.7) est fixé, à $q = 1$. Par conséquent, les éléments de la *Famille IV* rencontrés avant la RMM 2 : 5 correspondent à des valeurs de k positives. Deuxièmement, nous ne considérons que les éléments de la *Famille IV* avec $\mathbf{l}_s = (0, 0)$ et $l = 0$ dans la formule (3.7), c'est-à-dire ceux n'impliquant pas les fréquences séculaires s et s_2 . Cette omission est justifiée pour de petites inclinaisons. Même pour des inclinaisons $I^* = 20^\circ$, les principales résonances de la *Famille IV* sont indépendantes de s et s_2 (voir [RB08]). Pour prendre en compte ces simplifications, nous récrivons la relation (3.7) sous la forme suivante :

$$g = -\frac{\nu_{2,5}}{k} + \frac{k-3}{k}g_1 + \frac{k'}{k}(g_2 - g_1) \quad (4.4)$$

Cette reformulation présente l'avantage de mettre en avant certaines propriétés de la *Famille IV*.

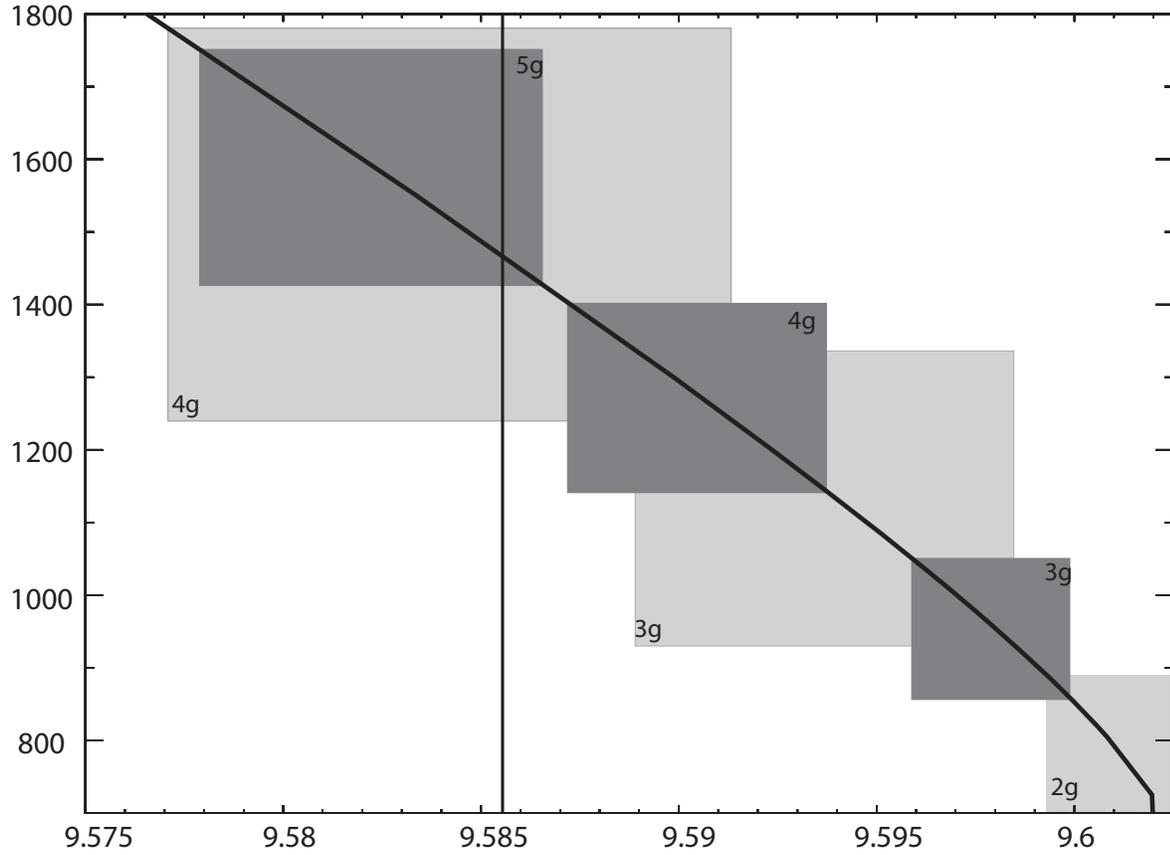


FIG. 13 – Cette courbe représente l'évolution de $-\nu_{2,5}^{1,2}(a_2)$ pour $a_2 \in [9.575, 9.62]$. Les rectangles gris clair et gris foncé mettent en valeur les configurations pour lesquelles la relation (4.3) est vérifiée, respectivement pour $I^* = 2^\circ$ et $I^* = 20^\circ$. Les étiquettes kg pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, apposées dans un coin de ces rectangles, indiquent que pour ces valeurs de a_2 , $\nu_{2,5}^{1,2} \in k\pi_g(\Theta_{I^*})$. La configuration actuelle est matérialisée par une droite verticale d'équation $a_2 = 9.5855$.

1. à a_2 fixé, le terme de droite de l'équation (4.4) est une constante que nous noterons g_r dont la valeur dépend de k et k' .
2. Toujours à a_2 fixé : tant que k et k' ne sont pas trop grands, on a :

$$|-\nu_{1,2}^{2,5}| \gg |(k-3)g_1 + k'(g_2 - g_1)|.$$

Les résonances sont donc atteintes pour des valeurs de g proches de $-\nu_{1,2}^{2,5}/k$. Ainsi les éléments de la *Famille IV* apparaissent-ils regroupés en sous-familles associées à une valeur du paramètre k . Dans chaque k -sous-famille, une résonance est entièrement définie par la valeur du paramètre k' .

3. Pour une valeur donnée de k , les éléments de la k -sous-famille sont représentés par des plans parallèles espacés d'une distance $(g_2 - g_1)/k$. Notons que cette distance est une fonction décroissante de k . De plus, ces plans sont rangés par ordre croissant, dans le sens où g_r est une fonction croissante de k' .

L'ordre des éléments de la *Famille IV* définis par l'équation (4.4) vaut :

$$|k| + |k'| + |k - 3 - k'|.$$

Nous résumons les valeurs de ces ordres pour $(k, k') \in \{2, 3, 4, 5\} \times \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ dans le tableau tab.4.2.

	$k' = -3$	$k' = -2$	$k' = -1$	$k' = 0$	$k' = 1$	$k' = 2$	$k' = 3$
$k = 2$	7	5	3	3	5	7	9
$k = 3$	9	7	5	3	5	7	9
$k = 4$	11	9	7	5	5	7	9
$k = 5$	13	11	9	7	7	7	9

TAB. 4.2 – ordre de la *Famille IV* au voisinage de la RMM 2 : 5

Remarquons qu'à k fixé, les ordres minimaux sont atteints pour $k' = 0$, mais ce minimum peut être atteint pour d'autres valeurs de k' . En effet, pour $k = 2$, il y a deux résonances d'ordre 3, celles associées à $k' = -1$ et $k' = 0$. Seule la sous-famille de la *Famille IV* associée à $k = 3$ possède une unique résonance d'ordre minimal. A l'exception de ces résonances d'ordre minimal, à k fixé, l'ordre augmente de deux lorsque $|k'|$ augmente d'une unité.

Nous avons constaté (voir [RB08]) que l'instabilité générée dans Θ_{I^*} par une k -sous-famille est la plus forte lorsque les éléments correspondant à $k' = 0$ occupent le centre de la zone de stabilité des troyens. Ce qui est naturel puisque c'est dans cette configuration que le plus de résonances de faible ordre sont présentes dans l'espace des fréquences des troyens. Les prédictions réalisées par la figure fig.13, négligent les termes $(k-3)/k g_1 + k'/k(g_2 - g_1)$ dans l'équation (4.4). Les résonances dont on prédit le mieux la présence dans Θ_{I^*} par les rectangles $R_{I^*}^k$, sont donc celles d'ordre minimal correspondant à $k' = 0$. La méthode

que nous avons mise en place pour effectuer notre prédiction est donc bonne dans le sens où elle prédit la présence d'une résonance d'ordre minimal, générant le plus d'instabilité. D'après la figure *fig.13* on voit que lorsque a_2 augmente, cette résonance d'ordre minimal traverse d'autant plus vite l'essaim des troyens que k est petit. Cependant, il faut prendre en considération le fait, qu'à chacun des rectangles $R_{I^*}^k$, correspond en fait une k -sous-famille. Les intervalles en demi-grands axes pour lesquels les éléments d'une k -sous-famille apparaissent dans Θ_{I^*} sont donc plus larges que les bases des rectangles $R_{I^*}^k$. Comme nous le dit la troisième propriété énoncée ci-dessus, les distances séparant les éléments d'une même k -sous-famille, augmentent lorsque k diminue, ce qui élargit d'autant plus le domaine en a_2 pour lequel les éléments d'une k -sous-famille apparaissent que k est petit. D'autre part, nous voyons sur le tableau *tab.4.2* que l'ordre d'une résonance associée à k' augmente lorsque k augmente. Ceci vient corroborer les résultats que nous avons exposés dans l'article [RB08], selon lesquels les k -sous familles déstabilisent d'autant plus les troyens que k est petit.

Dans l'article [RB08], nous avons identifié et décrit le passage des résonances associées à $k \in \{2, 3, 4\}$ dans l'équation (4.4). Nous avons constaté que le passage de ces résonances dans \mathcal{D}_{I^*} (pour $I^* < 30$) suit toujours le même scénario. Nous avons schématisé le passage d'une de ces résonances par la figure *fig.14*. Cette figure représente l'espace des conditions initiales (a, e) des troyens. Les deux côtés symétriques par rapport à l'axe $a = a_1$ ont été représentés. La droite horizontale est l'axe des demi-grands axes d'équation $e = e_1$, et la droite verticale l'axe des excentricités d'équation $a = a_1$. La courbe tracée en pointillé marque la limite de la zone de stabilité. Considérons des intégrations de notre modèle pour des valeurs croissantes de a_2 le rapprochant de la RMM 2 : 5. En même temps que le système planétaire Jupiter-Saturne se rapproche de la RMM 2 : 5, la fréquence $-\nu_{2,5}^{1,2}/k$ décroît vers 0. En conséquence, la fréquence résonante g_r , d'un élément de la k -sous-famille, décroît aussi jusqu'à entrer dans Θ_{I^*} . Les conditions initiales des particules déstabilisées par la résonance $g = g_r$ se regroupent autour de courbes. Ces courbes sont numérotées de (0) à (3) sur la figure *fig.14*. Les deux portions de courbes (0), représentent les conditions initiales des particules touchées par cette résonance, juste après son apparition. Quand a_2 croît, g_r décroît, et les résonances se rapprochent du centre de la zone de stabilité (courbes (1)) pour atteindre le point équilatéral. Les deux portions de courbes se rejoignent alors pour en donner une seule : la courbe (2). Après s'être rapprochée du point équilatéral, cette résonance se déplace vers les particules plus excentriques (courbe (3)), avant de sortir de Θ_{I^*} .

Afin d'enrichir ces résultats, nous avons choisi ici d'illustrer le passage de cette famille de résonance en considérant un autre domaine de conditions initiales pour les troyens. Au lieu de considérer différentes valeurs initiales de l'excentricité, nous faisons varier leur anomalie moyenne initiale M . Pour chaque intégration, nous calculons la trajectoire de 8000 particules. 200 valeurs initiales des demi-grands-axes et 40 valeurs initiales de l'anomalie moyenne sont réparties de manière uniforme dans le domaine $\mathcal{B} = [5.2035, 5.4030] \times [40.627^\circ, 118.627^\circ]$. Les autres variables elliptiques sont fixées égales à : $\varpi = 60$, $e = 0.05$ $\Omega = \Omega_1$, $I = I_1$. Nous notons ce domaine de conditions initiales

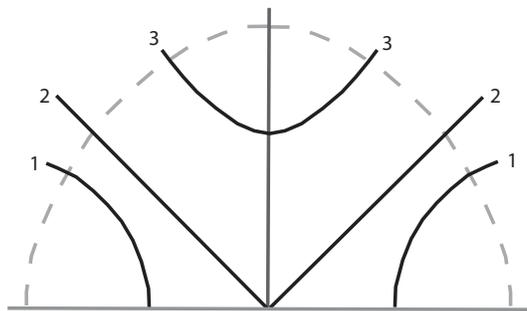


FIG. 14 – Ce schéma représente de manière globale, le déplacement d’une résonance de la *Famille IV* à travers l’essaim des troyens dans le plan des conditions initiales (a, e) , lorsque la valeur de a_2 varie. L’axe des abscisses a pour équation $e = e_1$ et l’axe des ordonnées $a = a_1$. La courbe en pointillé représente la limite approximative de la zone de stabilité. Les courbes noires localisent la même résonance pour différentes valeurs initiales de a_2 . Elles sont numérotées de 0 à 3 pour des valeurs décroissantes de la fréquence g des particules qui subissent cette résonance.

\mathcal{G} . Nous faisons les mêmes calculs que ceux décrits au chapitre 4.1, en remplaçant \mathcal{D}_{I^*} par \mathcal{G} , et en nous limitant à des valeurs de $a_2 \in [9.59911, 9.60178]$. Remarquons que $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$; en effet les 200 troyens d’excentricité initiale 0.05, et d’anomalie moyenne initiale $M = M_1$, appartiennent à la fois à \mathcal{G} et à \mathcal{D}_{I^*} . Sur la figure *fig.13*, nous voyons que, pour $a_2 \in [9.59911, 9.60178]$, des éléments de la *Famille II* associés à $k = 2$ balayent Θ_2 . Comme $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, ces éléments de la *Famille II* devraient également apparaître dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. C’est ce que nous vérifions sur la figure *fig.15*. Sur la partie gauche de cette figure, nous montrons les cartes de diffusion dans le plan \mathcal{B} , les figures *a, b, c, d, e, f* correspondant respectivement aux valeurs du paramètre a_2 suivantes : 9.59911, 9.60008, 9.60032, 9.60057, 9.60130, 9.60178. Sur la partie droite de la figure *fig.15*, nous avons représenté les espaces des fréquences (g, s) correspondant.

Le point de Lagrange équilatéral a pour valeurs initiales du demi-grand axe et de l’anomalie moyenne : $(a_{L_4}, M_{L_4}) = (5.2035, 73.6275^\circ)$. Il apparaît la plupart du temps au milieu de la zone de stabilité. Comme nous l’avons expliqué au chapitre 4.1, l’existence d’une symétrie par rapport à une courbe proche de l’hyper-plan d’équation $a = a_1$ nous permet de nous restreindre aux conditions initiales vérifiant $a > a_1$. Remarquons que ces zones de stabilité sont plus larges du côté des grandes valeurs initiales de M que du côté des petites. Ceci est dû à la proximité de Jupiter. Afin de faire la correspondance entre l’espace des conditions initiales et l’espace des fréquences, nous avons marqué les fréquences (g_{L_4}, s_{L_4}) du point équilatéral, par une croix sur les figures de droite de la figure *fig.15*. La fréquence séculaire g_{L_4} est presque toujours la borne inférieure de l’ensemble $\pi_g(\mathcal{F}(\mathcal{G}))$. Contrairement aux projections des cartes en fréquence dans l’espace des conditions initiales (a, e) [RB08], ici, il n’est pas facile de visualiser la correspondance entre \mathcal{G} et la projection de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Ceci est dû à une dégénérescence de \mathcal{F} sur \mathcal{G} que nous allons

expliquer ci-dessous.

Les fréquences propres des particules de conditions initiales $M = cte$ s'alignent sur une courbe \mathcal{C}_M dans l'espace des fréquences. Pour différentes valeurs de M , les courbes \mathcal{C}_M sont très proches les unes des autres, de telle sorte qu'on a :

$$\forall M \in [40, 118], \mathcal{C}_M \subset \mathcal{C}_{M_{L_4}}. \quad (4.5)$$

C'est pourquoi les courbes \mathcal{C}_M sont difficiles à distinguer les unes des autres. Afin de les dissocier, nous avons translaté celles de la figure *fig.15.a* sur la figure *fig.16*. Sur la figure *fig.16*, les fréquences les plus proches du point équilatéral (g_{L_4}, s_{L_4}) sont marquées par une croix. Les fréquences correspondant à une même valeur initiale de M sont alignées sur une courbe décroissante $s(g)$. Le coté gauche de la courbe correspondant aux conditions initiales $(a, M) \in [5.2035, 5.4030] \times \{M_{L_4}\}$ est marqué par la croix matérialisant (g_{L_4}, s_{L_4}) . Cette courbe n'a pas été translatée. Les courbes \mathcal{C}_M sont translatées proportionnellement à $M - M_{L_4}$ de telle sorte que les courbes correspondant à $M > M_{L_4}$ apparaissent au-dessous et celles associées à $M < M_{L_4}$ au-dessus de $\mathcal{C}_{M_{L_4}}$. La plus longue de ces courbes est $\mathcal{C}_{M_{L_4}}$ ce qui explique l'inclusion 4.5. Plus M s'éloigne de M_{L_4} , plus \mathcal{C}_M est courte et décalée vers la droite. Les conditions initiales des particules ayant les mêmes fréquences propres s'alignent sur les lignes de niveaux de la fonction \mathcal{F} sur \mathcal{G} . Ces lignes de niveaux encerclent le point équilatéral. Elles ressemblent à des cercles déformés, plus écrasés du côté des conditions initiales $M < M_{L_4}$, où les particules sont plus proches de Jupiter. La dégénérescence de \mathcal{F} sur \mathcal{G} ressemble donc à une invariance par symétrie de révolution autour du point équilatéral. Si les fréquences (ν, g, s) d'une particule vérifient une relation de résonance, alors toutes les particules dont les conditions initiales appartiennent à la ligne de niveau $\mathcal{F} = (\nu, g, s)$, sont aussi dans cette résonance. Par conséquent, les résonances agissent sur des anneaux de conditions initiales de \mathcal{G} .

C'est effectivement ce qu'on observe sur les cartes de diffusion de la figure *fig.15*, où l'on observe de nombreuses zones instables en formes de demi-anneaux encerclant le point équilatéral. Rappelons que, pour avoir une idée de la dynamique des particules ayant un demi-grand axe initial plus petit que a_2 , il suffit de faire une symétrie par rapport à l'axe d'équation $a = a_2$. Ces demi-anneaux de particules instables se prolongent donc en anneaux lorsqu'on considère aussi les particules de conditions initiales $a < a_2$. Par la suite, nous repèrerons ces anneaux en donnant la valeur approximative du demi-grand axe où ils intersectent l'axe $M \simeq M_{L_4}$, c'est-à-dire la valeur maximale du demi-grand axe atteint par cet anneau.

La *Famille II* se déplace beaucoup plus lentement que la *Famille IV* dans l'espace des fréquences des troyens et, sur ces figures, a_2 ne varie pas suffisamment pour que l'on puisse apprécier le déplacement de la *Famille II*. Les changements de formes de la zone de stabilité visibles sur la *fig.15* sont donc dus aux éléments de la *Famille IV* qui traversent l'espace des fréquences $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Il est intéressant de repérer où les résonances des familles *I*, *II* et *III* sont localisées afin de comprendre où elles peuvent se recouvrir avec la *Famille IV*. C'est sur la figure *fig.15.a* que la *Famille IV* perturbe le moins la dynamique des

troyens, c'est donc sur celle-ci que les autres familles sont le plus visibles et qu'il est plus commode de les localiser.

L'anneau d'instabilité (rouge) apparaissant sur la figure *fig.15.a*, atteignant le demi-grand axe $a \simeq 5.34$ est dû au recouvrement de la résonance séculaire $s = s_2$ et des éléments de la *Famille I* définis par la relation (3.4) avec $j = 13$ et $k = 1$. Sur les figures *fig.15.b*, *fig.15.c* et *fig.15.d*, cet anneau de particules est éjecté de la zone de stabilité car les éléments de la *Famille IV* viennent se mêler au recouvrement des familles *I* et *II*. L'anneau jaune atteignant le demi-grand axe $a \simeq 5.31$ est dû à l'effet de la *Famille II* défini par $(\alpha, \beta, i, q, k, l, l_s) = (1, 2, 5, 2, 0, 0, 0)$ dans la relation (3.6). Cette résonance facilite aussi l'éjection des particules de cet anneau lorsque les éléments de la *Famille IV* s'en rapprochent. C'est ce qui apparaît sur les figures *fig.15.b*, *fig.15.c*, *fig.15.d*, *fig.15.e*.

Pour mettre en évidence la présence des résonances de la *Famille IV*, nous avons représenté des demi-droites d'équation

$$g = gr = -\frac{\nu_{2,5}}{k} + \frac{k-3}{k}g_1 + \frac{k'}{k}(g_2 - g_1),$$

sur les figures de droite de la figure *fig.15* représentant le plan (g, s) . Les demi-droites représentées au-dessus de l'espace des fréquences $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ correspondent à $k = 2$. La résonance d'ordre minimal correspondant à $k' = 0$ est tracée en ligne continue alors que les autres, correspondant à $k' \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, sont tracées en pointillé. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, ces résonances apparaissent rangées par ordre croissant, dans le sens où g_r est une fonction croissante de k' , ce qui facilite leur identification à partir de la résonance correspondant à $k' = 0$. Le tableau tab.4.3 permet d'identifier les anneaux de particules sur lesquelles agissent des éléments de la *Famille IV*. Dans ce tableau, pour chaque carte de diffusion représentée sur la figure *fig.15* et pour chaque valeur de k' définissant une résonance présente dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, nous donnons la valeur du demi-grand axe où cet anneau intersecte l'axe $M = M_{L_4}$.

	$k' = -4$	$k' = -3$	$k' = -2$	$k' = -1$	$k' = 0$	$k' = 1$	$k' = 2$	$k' = 3$	$k' = 4$
<i>fig.15.a</i>	5.305	5.33	5.35	5.37	5.38				
<i>fig.15.b</i>		5.203	5.275	5.31	5.34	5.36	5.38	> 5.39	
<i>fig.15.c</i>			5.245	5.3	5.32	5.35	5.365	> 5.39	
<i>fig.15.d</i>			5.22	5.28	5.31	5.34	5.365	5.38	
<i>fig.15.e</i>					5.26	5.31	5.33	5.355	5.375
<i>fig.15.f</i>						5.26	5.3	5.33	5.355

TAB. 4.3 – Localisation des éléments de la *Famille IV* définis par la relation (4.4) avec $k = 2$ et $k' \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ sur les cartes de diffusion représentées sur la partie gauche de la figure *fig.15*. Pour chaque anneau de conditions initiales subissant l'effet d'une de ces résonances, nous indiquons la valeur du demi-grand axe maximal atteint.

Sur la figure *fig.15.a*, les résonances de la *Famille IV* associés à $k = 2$ et $k' \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ commencent à apparaître dans le plan (g, s) . Un anneau de particules

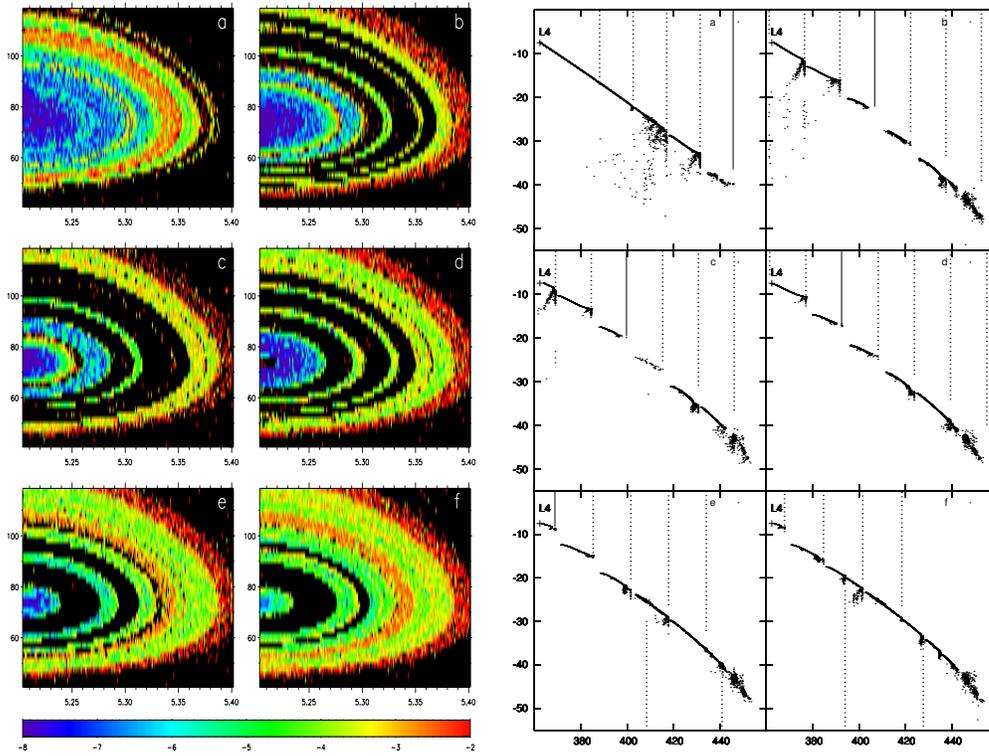


FIG. 15 – Cette figure est formée de deux blocs, sur celui de droite apparaissent les cartes de diffusions dans le plan (a, M) , et sur celui de gauche, la projection de l'espace des fréquences $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ dans le plan (g, s) . Les figures a, b, c, d, e, f correspondent respectivement aux valeurs initiales du demi-grand axe de Saturne : 9.59911, 9.60008, 9.60032, 9.60057, 9.60130, 9.60178.

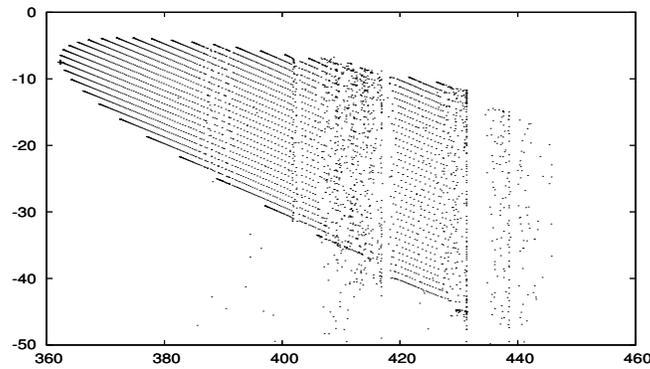


FIG. 16 – Représentation des fréquences (g, s) des troyens, pour la même intégration que celle de la figure *fig.15*. Les fréquences s sont translatées proportionnellement à $M - L_{L_4}$, où M est l'anomalie moyenne initiale, pour visualiser les courbes $\mathcal{C}_{M L_4}$ décrites dans le texte.

subsiste entre les résonances d'ordres minimaux correspondant à $k' = -1$ et $k' = 0$ qui sculptent le bord de la zone de stabilité. La résonance associée à $k' = -4$ est très proche de la résonance de la *Famille II*, localisée vers $a \simeq 5.305$, cependant elle est d'ordre 11 et a donc peu d'effet. Les résonances associées à $k' = -3$ et $k' = -2$ apparaissent sur les bords de la région où se recouvrent les familles *I* et *III*. La résonance définie par $k' = -2$, contribue à éjecter quelques particules sur le bord externe de l'anneau d'instabilité rouge vers $a \simeq 5.34$. Sur la figure *fig.15.b*, les résonances de la *Famille IV* de faibles ordres se rapprochent du point équilatéral et creusent des anneaux dans la zone de stabilité. Les résonances de plus faibles ordres associées à $k' = -1$ et $k' = 0$ recouvrent respectivement les éléments des familles *II* et *I*, éjectant de larges anneaux de particules. La résonance définie par $k' = -2$ commence à dépeupler la zone centrale de stabilité.

Sur la figure *fig.15.c*, les anneaux de particules éjectées par ces résonances continuent à se rapprocher du centre de la zone de stabilité. La résonance correspondant à $k' = -2$ dépeuple le centre de la zone de stabilité sur la figure *fig.15.d*. Cette figure prouve que des anneaux de lacunes liés à la *Famille IV*, balayent la totalité de \mathcal{G} . Cette configuration où le centre de la zone de stabilité est vidé par un élément de la *Famille IV* est très intéressante, car elle montre qu'une situation similaire à celle des troyens de Saturne peut apparaître parmi les troyens de Jupiter. En effet, l'influence de la *Famille II* contribue à vider la région proche du point équilatéral de Saturne. Nous verrons au chapitre 5 qu'il existe de nombreuses autres configurations des planètes pour lesquelles la région proche du point équilatéral de Saturne est stable. Les comportements de ces deux populations de troyens ne sont donc pas si éloignés et notre modèle permet de comprendre leurs similitudes et leurs différences.

Sur la figure *fig.15.e*, les résonances associées à $k' = -2$ et $k' = -1$, sont sorties de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, tandis que la résonance associée à $k' = 0$ éjecte un large anneau de particules dont les conditions initiales encerclent le point équilatéral de Jupiter. Il doit donc exister une configuration planétaire intermédiaire, pour une valeur du paramètre $a_2 \in [9.60057, 9.60130]$, pour laquelle la résonance d'ordre minimal correspondant à $k' = -1$, éjecte le centre de la zone de stabilité de la RMM 1 : 1. Sur la figure *fig.15.e*, les résonances de la *Famille IV* correspondant à de faibles ordres sont moins nombreuses et le nombre de troyens éjectés a diminué sur l'extérieur de la zone de stabilité, qui reste néanmoins relativement instable. Ce domaine reste occupé par les résonances associées à de plus grandes valeurs de k' , de plus des éléments de la *Famille IV* associés à $k = 1$ commencent à y faire leur apparition. Sur les figures de droite *fig.15.e* et *fig.15.f* représentant le plan (g, s) , nous avons tracé des portions de droites au-dessous de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, d'équation $g = g_r$ pour $(k, k') = (1, -9)$ et $(k, k') = (1, -8)$. Si elles sont encore peu visibles sur la figure *fig.15.e*, leur influence est plus crédible sur la figure *fig.15.f* où elles marquent plus sensiblement l'espace des fréquences et correspondent à des anneaux de particules (jaunes) vers $a \simeq 5.35$ et $a \simeq 5.37$. Les résonances associées à $k = 1$ et à de plus faibles valeurs de k' ne sont pas observables. En effet, pour de plus grandes valeurs de $a_2 \simeq 9.602$, les planètes Jupiter et Saturne franchissent la séparatrice de la RMM 2 : 5, engendrant un chaos global sur l'ensemble de l'essaim des troyens.

La traversée des k -sous-familles de la *Famille IV* peut donc se décomposer en trois étapes. La première, pendant laquelle les résonances correspondant à $k < 0$ entrent dans l'espace des fréquences des troyens, la deuxième, où les résonances d'ordre minimales occupent le centre de la zone de stabilité, et la troisième pendant laquelle les résonances définies par $k > 0$, sortent peu à peu de la zone de stabilité. Bien sûr, le sens dans lequel se succèdent ces étapes dépend, d'une part, du sens de variation de a_2 et, d'autre part, du sens de variation de $|\nu_{2,5}^{1,2}|$. Il est donc inversé de l'autre côté de la RMM 2 : 5. En effet, lorsque a_2 continue d'augmenter après la RMM 2 : 5, $|\nu_{2,5}^{1,2}|$ devient croissant. Les droites d'équation $g = g_r$ balayent donc l'espace des fréquences des troyens en sens contraire. Les anneaux d'instabilité correspondant aux résonances de la *Famille IV* dans l'espace des conditions initiales naissent au centre de la zone de stabilité pour rejoindre progressivement ses bords. On peut généraliser ce processus aux *Famille IV* associées aux autres RMM pour des valeurs croissantes de a_2 , les éléments de la *Famille IV* précédant une RMM balayent l'espace des conditions initiales de l'extérieur vers le centre, et ceux succédant la RMM le balayent du centre vers l'extérieur. Dans un cas, le balayage de la *Famille IV* pourrait avoir tendance à chasser les troyens vers l'extérieur de la zone de stabilité, alors que, dans l'autre, il pourrait avoir tendance à amener des particules vers le centre de la zone de stabilité. Mais d'autres raisonnements sont possibles et il faudrait de plus amples études pour confirmer cette hypothèse. Cette analyse dans le plan des conditions initiales (a, M) vient généraliser l'analyse dans le plan des conditions initiales (a, e) que nous avons présentée dans l'article [RB08]. En effet, nos résultats laissent penser qu'on peut avoir une bonne idée de la dynamique des particules de conditions initiales réparties uniformément dans l'espace (a, e, M) , à partir de celles du plan (a, e) , en effectuant une symétrie de révolution autour de l'axe d'équations $M = M_4$ et $a = a_4$.

Les éléments de la *Famille IV* devraient avoir une influence sur la dynamique des troyens au voisinage de chacune des RMM Jupiter-Saturne. Mais, dans certains cas, ces configurations sont tellement chaotiques qu'il n'est pas possible d'identifier ces résonances. C'est le cas, par exemple, des éléments de la sous-famille associée à $k = 1$ et $k' > -8$ dans l'équation 4.4. C'est également le cas des sous-familles de la *Famille IV* au voisinage de la RMM 1 : 2. Par contre, en raison du faible chaos qu'elles génèrent, la *Famille IV* est facilement observable au voisinage de la RMM 3 : 7. Dans l'article [RB08], nous donnons un exemple de l'apparition de la sous-famille associée à $(\alpha, \beta, q, k) = (3, 7, 1, 2)$ dans l'équation (3.7). Ceci confirme le fait que la *Famille IV* agit de façon très générale sur l'essaim des troyens de Jupiter.

4.2.2 Analyse de la *Famille II*

Nous prédisons la présence de la *Famille II* dans Θ_{I^*} en utilisant un procédé analogue à celui utilisé pour détecter la présence de la *Famille IV* au paragraphe précédent. En négligeant le terme de droite de l'équation (3.6), une approximation de cette condition de résonance est donnée par la relation :

$$\frac{i}{q}\nu_{\alpha,\beta}^{1,2} \in \pi_\nu(\Theta_{I^*}). \quad (4.6)$$

Cette relation met en évidence le fait que les éléments de cette famille apparaissent regroupés en sous-familles définies par les valeurs de (α, β, i, q) . Le couple (α, β) fait référence à la RMM à laquelle sont associés les éléments de cette sous-famille. La fréquence $\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}(a_2)$ est négative avant la RMM $\alpha : \beta$ (i.e pour des valeurs de a_2 plus petites que celles pour lesquelles la RMM est atteinte) et positive après. Or les fréquences de libration des troyens sont choisies arbitrairement positives ; en conséquence, les éléments de la *Famille II* associés à une RMM $\alpha : \beta$ apparaissent pour des valeurs de i/q négatives avant la RMM $\alpha : \beta$, et pour des valeurs de i/q positives après la RMM. La valeur absolue de $\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$ augmente lorsqu'on s'éloigne de la RMM $\alpha : \beta$, par conséquent lorsqu'on s'éloigne de la RMM, les sous familles apparaissent dans l'essaim des troyens pour des valeurs croissantes de $|i/q|$. Connaissant les bornes de $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$ définies par les expressions (4.1), et l'évolution des fréquences planétaires représentées sur la figure (fig.6), la relation (4.6) permet de prédire l'apparition de cette famille dans Θ_{I^*} . Sur la fenêtre du bas de la figure fig.17, nous traçons l'évolution de $(i/q)\nu_{1,2}^{1,2}$ en rouge, de $(i/q)\nu_{3,7}^{1,2}$ en noir, et de $(i/q)\nu_{2,5}^{1,2}$ en bleu, dans la fenêtre $[8.3, 9.625] \times [7000, 9150]$, pour différentes valeurs de i/q . Les valeurs de i/q sont écrites sur les courbes représentatives de $(i/q)\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$, vers le haut ($\nu \simeq 8600$) de la fenêtre pour $(\alpha, \beta) = (1, 2)$, vers le milieu ($\nu \simeq 8200$) pour $(\alpha, \beta) = (3, 7)$, et vers le bas ($\nu \simeq 7800$) pour $(\alpha, \beta) = (2, 5)$. Les domaines $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$ pour $I^* = 2^\circ$, $I^* = 20^\circ$ et $I^* = 30^\circ$ sont matérialisés respectivement par les rectangles de couleur grise, rose, et bleue claire. Nous nous attendons à voir apparaître les éléments de la *Famille II* respectivement dans Θ_2 , Θ_{20} et Θ_{30} , lorsque $\frac{i}{q}\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$ entre dans les fenêtres grise, rose et bleue claire. Bien sûr, cette prévision ne prend pas en compte les termes de droite de l'équation (3.6). L'erreur commise sur la localisation de ces résonances est le produit de $-(kg + ls + \mathbf{k}_g \cdot \sigma_g + \mathbf{I}_s \cdot \sigma_s)/q$ par l'inverse de la pente de $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$. La plus grande des fréquences composant cette combinaison linéaire de fréquences séculaires est g . Par ce procédé, on localise donc le mieux les résonances pour lesquelles $k = 0$. Néanmoins, comme $g \ll \nu$, les résonances pour lesquelles $k \neq 0$ sont proches de celle vérifiant $k = 0$. Les sous-familles de la *Famille II* peuvent avoir un effet important sur la dynamique des troyens et modifier ou détruire leur zone de stabilité. Cette influence doit donc apparaître sur les courbes des taux d'éjection. Pour relier nos prédictions aux variations des taux d'éjection $n_{ej}^{I^*}(a_2)$, il faut tracer des traits verticaux sur les demi-grands axes pour lesquels $(i/q)\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$ entre et sort de Θ_{I^*} . Nous n'avons pas tracé ces traits pour ne pas charger excessivement cette figure.

Entre les RMM du couple Jupiter-Saturne 1 : 2 et 3 : 7, trois pics d'instabilité apparaissent pour lesquels le taux d'éjection atteint quasiment 100%. Ces pics, de gauche à droite, correspondent remarquablement bien aux entrées respectives dans Θ_{I^*} , de $3\nu_{1,2}^{1,2}$, de $2\nu_{1,2}^{1,2}$, et de $\nu_{1,2}^{1,2}$. Nous en déduisons que ces pics d'instabilité sont dus à l'effet d'éléments de la *Famille II* associés aux valeurs du couple $(i, q) \in \{(1, 3); (1, 2); (1, 1)\}$ dans la relation (3.6). Dans l'article [MLTG05], Morbidelli et al., ont montré que l'instabilité générée par

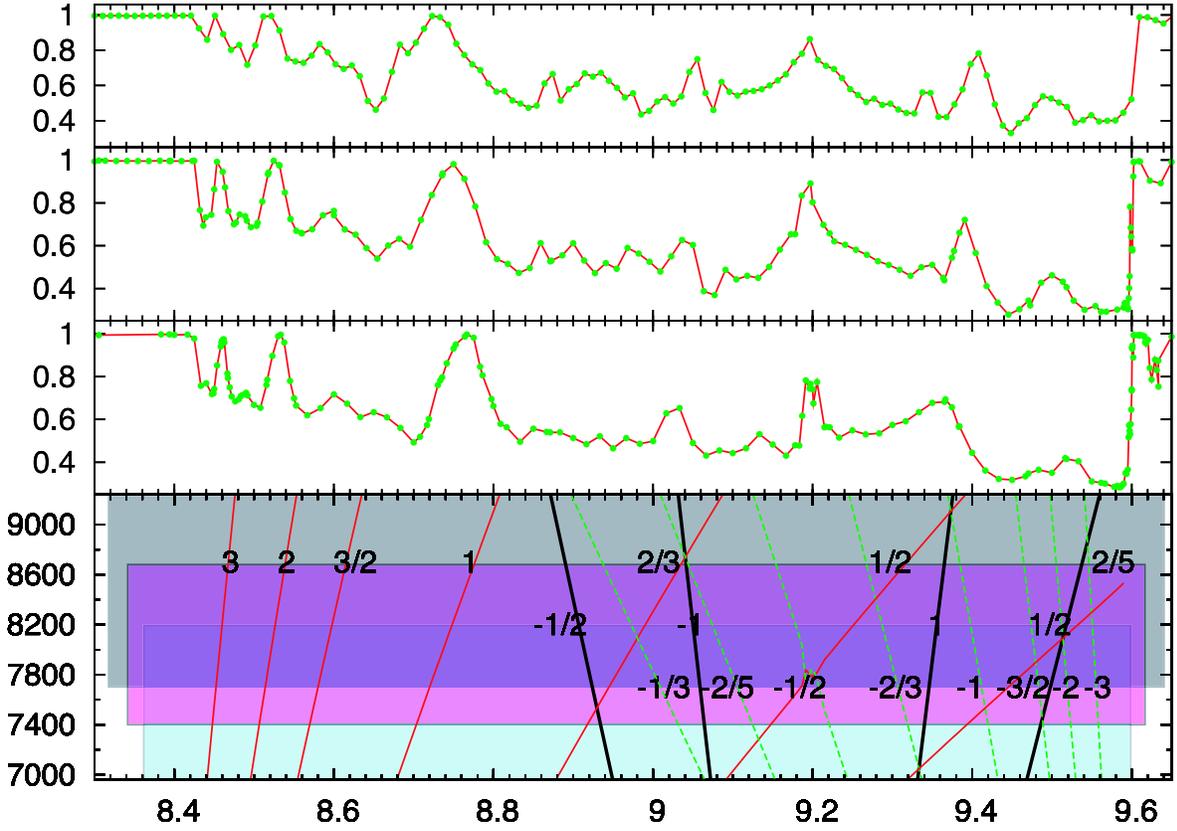


FIG. 17 – Sur les trois fenêtres du haut, de haut en bas : $n_{e_j}^{30}(a_2)$, $n_{e_j}^{20}(a_2)$, et $n_{e_j}^2(a_2)$, pour $a_2 \in [8.3, 9.625]$. Sur la figure du bas, nous avons tracé les multiples rationnels de $\nu_{1,2}^{1,2}$, $\nu_{3,7}^{1,2}$ et $\nu_{2,5}^{1,2}$, respectivement en rouge, en noir, et en vert. Les rationnels inscrits sur les courbes $(i/q)\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$ indiquent les valeurs de i/q correspondantes. Les rectangles gris, rose, et bleu clair correspondent aux intervalles des valeurs atteintes par ν respectivement dans Θ_2 , Θ_{20} et Θ_{30} .

les sous-familles associées à $(i, q) \in \{(1, 3); (1, 2)\}$, permet de capturer des troyens. Par contre, la sous-famille associée à $(i, q) = (1, 1)$ n'apparaît pas dans leurs calculs car elle est en dehors du domaine qu'ils ont étudié. Dans notre modèle, nous voyons apparaître un large pic d'instabilité loin de la RMM 1 : 2. Cette distance au premier abord surprenante, est due, d'une part, à la faible pente de la courbe $\nu_{1,2}^{1,2}(a_2)$ et, d'autre part, au fait que les fréquences de libration des troyens de Jupiter sont grandes comparées à celles des troyens des autres planètes du système solaire. Dans notre modèle, la pente de la courbe $\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}(a_2)$ dépend essentiellement de β et augmente lorsque β augmente. Plus β est petit et plus les sous familles de la *Famille II* apparaîtront donc loin des RMM. En effet, nous voyons sur la fenêtre du bas de la figure *fig.17*, que la sous-famille de la *Famille II* associée à $(\alpha, \beta, i, q) = (1, 2, 1, 1)$ apparaît au milieu de Θ_2 à environ 0.36 de la RMM 1 : 2, alors que la sous-famille associée à $(\alpha, \beta, i, q) = (2, 5, 1, 1)$ apparaît à environ 0.21 de la RMM 2 : 5 et celle associée à la RMM 3 : 7 à environ 0.15 de la RMM 2 : 5.

Les fonctions $3\nu_{1,2}^{1,2}$, $2\nu_{1,2}^{1,2}$ et $\nu_{1,2}^{1,2}$ sont croissantes alors que l'intervalle $\pi_\nu(\Theta_{I^*})$ diminue quand I^* augmente. Par conséquent, notre modèle prédit que ces pics d'instabilité devraient être décalés vers la gauche (i.e. vers de plus petites valeurs de a_2) lorsque l'inclinaison augmente. Autrement dit, lorsque a_2 augmente, ces sous familles devraient apparaître en premier parmi les troyens les plus inclinés. Ce décalage dépend de la pente des courbes $i\nu_{1,2}^{1,2}$. Par conséquent, ce décalage devrait être moins important pour de plus grandes valeurs de I^* . C'est effectivement ce que nous observons sur la figure *fig.17*. ce décalage est le plus visible sur le pic provoqué par la sous-famille associée à $j = 1$. Ce pic est translaté d'à peu près 0.2 UA entre 2° et 20° . Cette dépendance en inclinaison est une propriété qui peut aider à dissocier l'effet des différentes sous-familles. Par exemple, autour de $a_2 \simeq 9.38$, nous voyons un large pic d'instabilité pour lequel le taux d'éjection n_{ej}^2 atteint 70%. Pour ces valeurs de a_2 , à la fois, $(1/2)\nu_{1,2}^{1,2}$, $\nu_{3,7}^{1,2}$ et $-\nu_{2,5}^{1,2}$ appartiennent à $\pi_\nu(\Theta_2)$. Il y a donc possibilité de recouvrement entre les trois sous-familles associées, et il est difficile de quantifier la contribution de chacune à l'instabilité globale. Comme $(1/2)\nu_{1,2}^{1,2}$, et $\nu_{3,7}^{1,2}$ sont croissantes, les sous-familles associées sont décalées vers la gauche (i.e de plus petites valeurs de a_2) lorsque l'inclinaison augmente. La pente de $-\nu_{2,5}^{1,2}$ étant négative la sous-famille associée est décalée vers la droite (i.e : de plus grandes valeurs de a_2) pour de plus grandes valeurs de l'inclinaison. Par ailleurs, on voit que, pour $I^* \in \{20, 30\}$, un pic d'instabilité de magnitude similaire ($n_{ej}^{20} \simeq 70\%$) apparaît légèrement décalé vers la droite alors qu'une petite bosse d'instabilité ($n_{ej}^{20} \simeq 50s$) apparaît décalée vers la gauche. On peut donc penser que le maximum de ce pic d'instabilité devrait être produit en grande partie par des éléments de la *Famille II* associés à $(\alpha, \beta, i, q) = (2, 5, 1, -1)$.

Dans le but de vérifier cette conjecture, nous représentons la projection de Θ_2 pour $a_2 \simeq 9.3842$ sur le plan (ν, g) sur la partie droite de la figure *fig.18*. Afin de mettre en avant les résonances de la *Famille II*, nous avons tracé des portions de droites correspondant aux équations du type (3.6). La portion de droite représentée sur la partie gauche de cette figure, a pour équation $\nu = -\nu_{2,5}^{1,2} - g - 2g_2$. On distingue effectivement un alignement de fréquences le long de cette droite vers $\nu \simeq 8200$. Cette équation impliquant le terme $-g$,

les fréquences des particules qui sont dans cette résonance sont alignées sur une droite décroissante. Les demi-grand axes initiaux de ces particules sont regroupés autour de $a_2 \simeq 5.35$ sur la figure de gauche, et ont un indice de diffusion élevé, voisin de 10^{-2} . Plus proche du centre de la zone de stabilité, apparaît un intervalle de demi-grands axes initiaux pour lesquels les troyens ont un indice de diffusion similairement élevé, $a \in [5.25, 5.31]$. Cette instabilité est causée par la présence d'éléments de la *Famille II* pour lesquelles $k = 0$ dans l'équation (3.6). Pour les identifier dans le plan (ν, g) , nous avons tracé les portions de droites d'équation $\nu = \nu_{2,5}^{1,2} + (k'' - 3)g_2 - k''g_1$. Ces droites sont représentées sur la figure *fig.18*, par des droites verticales proches de $\nu \simeq 8700 \simeq \nu_{2,5}^{1,2}$. Elles correspondent, de gauche à droite, à $k'' = -1$, $k = 0$ et $k = 1$. Ces résonances sont donc effectivement présentes dans l'espace des fréquences des troyens et les déstabilisent fortement. Lorsque a_2 augmente, les zones d'influence de ces résonances s'éloignent du centre de la zone de stabilité. De manière plus générale, lorsque a_2 augmente, les éléments de la *Famille II* associées à des RMM qui n'ont pas encore été traversées balayent l'essaim des troyens des petits demi-grands axes vers les grands demi-grands axes, alors que les éléments de la *Famille II* associées à des RMM qui ont déjà été traversées, balayent l'essaim des troyens en sens inverse.

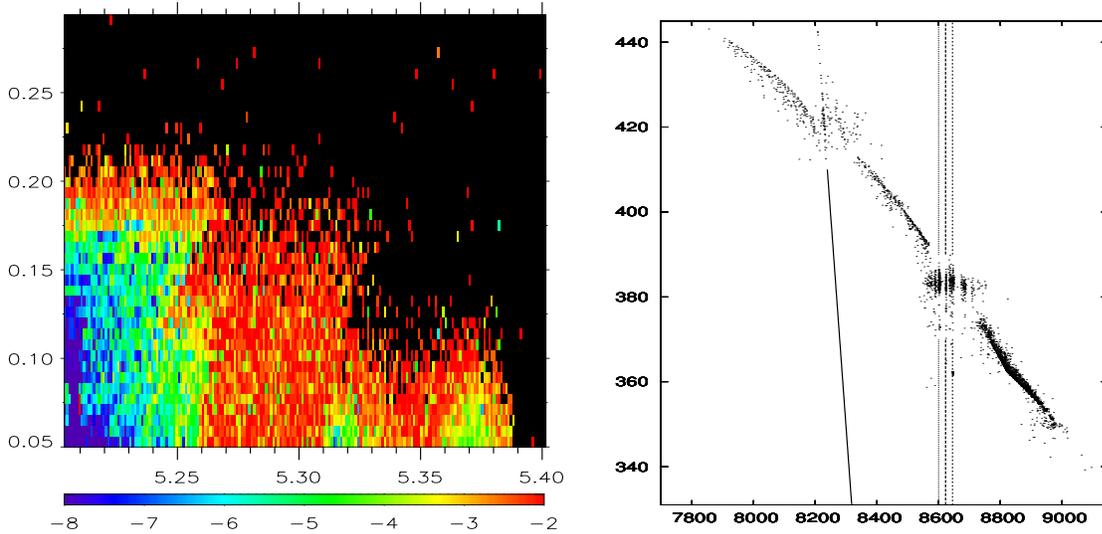


FIG. 18 – A gauche la carte de diffusion et à droite la projection de l'espace des fréquences Θ_2 sur le plan (ν, g) , pour une intégration de \mathcal{D}_2 avec $a_2 = 9.3842$. Sur la figure de droite nous avons tracé des portions de droites de manière à mettre en évidence la présence des éléments de la *Famille II*. Ces droites ont pour équation respective de gauche à droite : $\nu = -\nu_{2,5}^{1,2} - g - 2g_2$, $\nu = \nu_{2,5}^{1,2} - 4g_2 + g_1$, $\nu = \nu_{2,5}^{1,2} - 3g_2$, $\nu = \nu_{2,5}^{1,2} - 2g_2 - g_1$.

Un autre cas où des résonances de la *Famille II* associées aux trois RMM peuvent avoir une influence sur les troyens apparaît pour des valeurs de a_2 proches de 9.04. dans ce voisinage de a_2 , l'instabilité augmente, formant une bosse sur la courbe n_{ej}^2 dont le

sommet avoisine 62%. Or, sur la fenêtre du bas de la figure *fig.17*, on voit que les courbes représentatives de $(2/3)\nu_{1,2}^{1,2}$, $-\nu_{3,7}^{1,2}$ et $-(2/5)\nu_{2,5}^{1,2}$ sont concourantes dans le domaine des fréquences Θ_2 . Au voisinage de $a_2 = 9.04$, des sous-familles associées aux trois RMM peuvent donc avoir un effet sur les troyens inclinés de deux degrés. Lorsque I^* augmente, cette bosse est décalée vers la droite alors que $(2/3)\nu_{1,2}^{1,2}$ est croissante. On peut donc penser que cette bosse est due principalement aux sous familles de la *Famille II* associées à $(\alpha, \beta, i, q) \in \{(2, 5, 5, -2), (3, 7, 1, -1)\}$ dans l'équation (3.6).

Un troisième cas similaire est visible vers $a_2 \simeq 9.52$, où on note une faible augmentation des taux d'éjections. Pour cette valeur de a_2 on a :

$$(2/5)\nu_{1,2}^{1,2} = (1/2)\nu_{3,7}^{1,2} = -2\nu_{2,5}^{1,2} \in \pi_\nu(\Theta_2) \cap \pi_\nu(\Theta_{20}) \cap \pi_\nu(\Theta_{30}).$$

Pour chacune des trois inclinaisons considérées, les trois sous-familles associées à $(\alpha, \beta, i, q) \in \{(1, 2, 5, 2), (3, 7, 2, 1), (2, 5, 1, -2)\}$ peuvent donc se recouvrir. Lorsque a_2 croît, l'augmentation de l'instabilité due au recouvrement de ces trois sous-familles, est la dernière hausse d'instabilité notable avant d'atteindre la situation actuelle ($a_2 \simeq 9.58$).

Pour ce qui est des résonances séculaires, nous avons vu au chapitre 4.2 que les intervalles des valeurs de a_2 pour lesquelles les résonances séculaires $g = (k_1 + 1)g_2 - k_1g_1$ apparaissent dans Θ_{I^*} , sont décalés vers la droite quand I^* augmente. Ceci est dû à la décroissance de la courbe représentative de $a_2 \mapsto g_2(a_2)$. Nous avons aussi vu que pour $I^* \geq 20^\circ$, seules les résonances séculaires associées à $k_1 \geq 2$ ne sont pas noyées dans le plateau d'instabilité associé à la RMM 1 : 2. La résonance séculaire de plus faible ordre susceptible de se distinguer sur la courbe n_{ej}^2 est donc celle associée à $k_1 = 2$, définie par la relation $g = 3g_2 - 2g_1$. D'après le tableau tab.4.1, cette résonance apparaît à deux degrés pour $a_2 \in [8.43, 8.45]$, ce qui correspond à un tout petit pic d'instabilité sur la courbe n_{ej}^2 , entre le plateau d'instabilité de la RMM 1 : 2 et le pic d'instabilité de l'élément de la *Famille II* associé à $3\nu_{1,2}^{1,2}$. Lorsque I^* augmente, cette résonance séculaire est décalée vers la droite sur la figure *fig.17* alors que la *Famille II* est décalée vers la gauche. Ainsi, pour $I^* = 20^\circ$, l'effet de cette résonance séculaire se mêle à celui de la *Famille II* alors que, pour $I^* = 30^\circ$, cette résonance séculaire apparaît après la sous-famille de la *Famille II* associé à $3\nu_{1,2}^{1,2}$. Néanmoins, ces résonances séculaires apparaissent pour des intervalles de valeurs de a_2 très petits comparés à ceux pour lesquels agit la *Famille II* et l'instabilité générée par la *Famille II* semble prédominer. Sur ce point, nous sommes en désaccord avec Marzari et Scholl qui donnent un rôle plus important à ces résonances séculaires dans leur article [MS07]. Cependant, ces résultats ne sont pas contradictoires car nos modèles sont très distincts. Dans leur analyse, Marzari et Scholl intègrent les troyens en considérant un des scénarios possibles de migration planétaire. Lors de cette migration, ils regardent quelles structures sont susceptibles d'éjecter ou de capturer des troyens. Notre démarche est différente, considérant que de multiples scénarios de migration planétaire sont plausibles, nous avons décidé de ne pas considérer de migration planétaire mais plutôt d'explorer la dynamique des troyens pour différentes configurations planétaires. Le but de notre travail est donc de localiser et d'analyser toutes les structures résonantes susceptibles de

déstabiliser ou de capturer des troyens lors de la migration planétaire.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'évolution de la dynamique des troyens de Jupiter pour des configurations planétaires situées le long de la tranche elliptique définie au paragraphe 2.1, correspondant à la valeur initiale $M_2 \simeq 340.04$. Il est légitime de se demander quelle serait l'évolution de la dynamique des troyens, pour d'autres valeurs initiales de M_2 . Dans notre article [RB08], nous avons fait cette étude le long de la tranche hyperbolique décrite au paragraphe 2.1, qui correspond à la valeur initiale $M_2 \simeq 24.14$. Nous avons constaté que les structures résonantes rencontrées le long de cette tranche sont les mêmes. Les pics d'instabilité causés par le passage de la *Famille II* n'apparaissent pas exactement pour les mêmes valeurs initiales du demi-grand axe a_2 . Ceci est dû au fait que l'apparition de cette famille dans l'espace des fréquences des troyens dépend principalement des valeurs de n_1 et n_2 . Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, loin des RMM, les moyens mouvements des planètes dépendent peu de la valeur initiale de M_2 . Lorsqu'on se rapproche des RMM, cette dépendance augmente. Cette propriété est visible sur la figure *fig.5*, où l'enveloppe des fréquences $\nu_{1,2}^{1,2} = n_1 - 2n_2$ rétrécit quand on s'éloigne de la RMM 1 : 2. Il en résulte que, sur la tranche hyperbolique, les pics d'instabilité dûs à la *Famille II* apparaissent décalés par rapport à la tranche elliptique et que ce décalage est d'autant plus petit que ces éléments apparaissent loin des RMM. La pente des courbes $\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}(a_2)$ n'est pas la même selon la valeur initiale de M_2 . Il en résulte que la largeur de ces pics d'instabilité dépend aussi de la valeur initiale de M_2 . En particulier, nous voyons sur la figure *fig.6*, que la pente de la courbe représentant $\nu_{1,2}^{1,2}$ pour la tranche hyperbolique est plus petite que celle de la tranche elliptique. Il en résulte que, lorsque a_2 augmente en s'éloignant de la RMM 1 : 2, les éléments de la *Famille II* associés à $(\alpha, \beta, i, q) = (1, 2, 1, 3)$ restent plus longtemps dans l'espace des fréquences des troyens. Néanmoins, les mêmes résonances de la *Famille II* apparaissent indépendamment de la valeur initiale de M_2 et leur comportement global est très similaire. De manière plus générale, nous pensons que les valeurs initiales des phases des planètes affectent peu le comportement global de la *Famille II*. Connaissant l'évolution des fréquences planétaires, le travail réalisé dans ce chapitre permet de prédire le passage des familles *II* et *IV* dans l'espace des fréquences des troyens. Quel que soit le déplacement de la planète perturbatrice, les méthodes que nous avons présentées permettent donc à peu de frais, de prédire le comportement de ces familles. Néanmoins, dans un modèle réaliste de migration planétaire, la planète en co-rotation avec les troyens se déplace également. C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, nous donnons une méthode permettant de prédire le passage de ces familles lorsque la planète co-orbitale se déplace. Ceci permettra, de manière plus globale, de prédire le passage de ces familles quel que soit le modèle de migration, à condition que la vitesse de migration des planètes soit suffisamment lente pour que l'on puisse se situer dans le cadre de la théorie des invariants adiabatiques.

Chapitre 5

Application aux troyens de Saturne

De nombreuses recherches ont été menées afin de déterminer pourquoi aucun astéroïde n'a été observé au voisinage des points équilatéraux de Saturne. Dans le problème à trois corps restreint Soleil-Saturne + particule, avec Saturne en mouvement circulaire uniforme, un résultat classique de Gascheau (1843), énoncé au paragraphe 3.1, assure que ces points fixes sont linéairement stables. Cependant, comme nous l'avons vu dans le problème séculaire 1.5.3.4, les valeurs des fréquences séculaires g et s des points de Lagrange sont fortement affectées par la présence de Jupiter. Ceci indique que l'effet direct (défini au paragraphe 3.2) de Jupiter sur les fréquences séculaires des troyens de Saturne est important. Jupiter perturbe donc fortement le PTCR. En effet, plusieurs travaux ont montré que les points équilatéraux de Saturne sont instables. En 1989, Innanen et Mikkola [IM89] ont calculé numériquement la trajectoire de particules sans masse placées initialement en ces points et ont trouvé que, sous l'influence des quatre planètes géantes, ces particules s'échappent de la RMM 1 : 1 au bout d'environ 300000 ans. Ils attribuèrent ce fait à la double influence de la proximité de la RMM 2 : 5 et d'une résonance séculaire. En déplaçant le demi-grand axe de cette particule de 1%, ils ont trouvé des orbites stables sur la durée de leur intégration (10Ma). Ce fait surprenant fut confirmé par les travaux de Holman et Wisdom en 1993 [HW93] qui calculèrent les trajectoires de particules sans masse réparties autour des points équilatéraux de Saturne et subissant l'influence des 4 planètes géantes, sur une période de 20 Ma. En regardant les conditions initiales des particules stables dans le plan (a, λ) , ils observèrent un trou dans la zone de stabilité des troyens de Saturne. De la Barre et al. [dKV96] ont montré en 1996 que des particules peuvent survivre dans cette zone de stabilité sur de plus grandes périodes de temps (412 Ma). En 2002, Marzari et al. [MTS02] ont poursuivi cette étude en intégrant 35 particules sur $4.5 \cdot 10^9$ ans, avec une inclinaison initiale de 0° , une excentricité propre de l'ordre de 0.05, et une amplitude de libration d'environ 80° . A la fin de leur intégration 10 corps restent dans la zone de stabilité. Cependant, ces recherches d'estimation sur la viabilité d'une population de troyens de Saturne ne prennent pas en compte la migration planétaire et les possibles variations de la forme de la zone de stabilité. Ce thème a été abordé par

Nesvorny et Dones [ND02], qui étudièrent plus spécifiquement l’effet de la RMM 2 : 5 dans le modèle bi-circulaire, en ne gardant que les termes du développement de Fourier du potentiel gravitationnel de Jupiter qui ont un lien avec la RMM 2 : 5. En considérant 7 configurations initiales des planètes, de manière à éloigner le couple Jupiter-Saturne de cette RMM, ils ont observé des changements de formes de la zone de stabilité des troyens de Saturne, montrant que dans ce modèle, l’effet déstabilisant de la RMM 2 : 5 diminue lorsqu’on s’éloigne de la RMM.

Dans ce chapitre, nous travaillons sur le même système à quatre corps restreint qu’au chapitre précédent, Soleil-Jupiter-Saturne + particule sans masse. Cette fois-ci, nous nous intéressons à la dynamique de particules qui sont initialement proches du point équilatéral de Saturne. Nous reprenons les mêmes notations qu’au chapitre précédent, l’indice 1 fait référence à Jupiter, l’indice 2 à Saturne, et les variables sans indice sont celles de la particule sans masse. Nous allons utiliser notre analyse des 4 grandes familles de résonances décrite au chapitre 3 afin de comprendre leur action sur les troyens de Saturne, pour de nombreuses configurations planétaires choisies le long de la tranche elliptique étudiée au paragraphe 2.1. Cette étude diffère de celle des troyens de Jupiter par le fait que cette fois-ci les conditions initiales des troyens change à chaque intégration. Dans un premier temps, nous mettons donc en place un modèle permettant de prédire l’évolution des bornes de l’espace des fréquences des troyens, en fonction de la valeur initiale du demi-grand axe de Saturne. Nous utilisons ensuite ce modèle afin de prédire l’évolution des structures résonnantes agissant sur les troyens de Saturne.

5.1 Modèle à un paramètre

Dans le but d’analyser l’évolution des structures résonnantes de l’essaim des troyens de Saturne, nous utilisons le même modèle à un paramètre qu’au chapitre précédent (4.1). Les résonances de la *Famille III* ont un rôle plus important sur la dynamique des troyens de Saturne que sur ceux de Jupiter. La présence des résonances séculaires dépend fortement de l’inclinaison initiale des troyens et c’est pourquoi nous avons décidé d’explorer le plan des conditions initiales (a, I) plutôt que (a, e) . Pour une succession de valeurs initiales de a_2 dans l’intervalle $[8, 9.625]$, nous calculons les trajectoires du Soleil, de Jupiter, de Saturne et d’un ensemble de particules sans masse potentiellement troyens de Saturne. Nous ne changeons pas les autres conditions initiales des planètes qui sont prises égales aux valeurs actuelles. Pour chaque configuration des planètes, nous intégrons 5551 particules, pour 91 valeurs initiales du demi-grand axe et 61 valeurs initiales de l’inclinaison réparties uniformément dans le domaine $(a, I) \in [a_2, a_2 + 0.24] \times [I_2, I_2 + 20^\circ]$. Les valeurs initiales des autres variables elliptiques sont fixées à : $\sigma = \lambda - \lambda_2 - 60 = 0$, $\sigma_g = \varpi - \varpi_2 - 60 = 0$, $\Omega = \Omega_2$, et $e = cte$. Si l’inclinaison de Saturne I_2 est la même pour toutes les intégrations, le demi-grand axe de Saturne a_2 est modifié à chaque intégration et, par conséquent, la population des troyens intégrés se déplace. Pour chaque valeur

de e , cet ensemble de conditions initiales est noté $\mathcal{D}_e(a_2)$. Afin d’alléger les notations, la variable a_2 sera souvent omise. De même qu’au chapitre précédent, nous notons \mathcal{F} l’application qui à chaque troyen du domaine \mathcal{D}_e associe ses fréquences propres (ν, g, s) . L’image de \mathcal{D}_e par cette application est notée $\Theta_e = \mathcal{F}(\mathcal{D}_e)$. L’espace des fréquences des troyens de Saturne possède aussi une symétrie proche de l’hyper-surface d’équation $a = a_2 \simeq 9.5855$; c’est pourquoi nous pouvons restreindre notre étude à des conditions initiales vérifiant $a > a_2$. Nous réalisons des intégration numériques identiques à celles du chapitre précédent en ne changeant que le domaine des conditions initiales des troyens intégrés et les valeurs initiales de a_2 que nous avons choisies de façon à identifier au mieux les structures résonantes en action. Dans notre étude, nous utilisons les mêmes outils que précédemment. Nous avons analysé de nombreuses cartes en fréquences et cartes de diffusion. L’indice de diffusion que nous utilisons pour faire les cartes de diffusion est le même qu’au chapitre précédent, $n_{dif} = \log(|\nu^2 - \nu^1|/\nu^1)$, où ν^1 et ν^2 sont les fréquences de libration de la particule calculées respectivement sur les intervalles de temps $[0, 5Ma]$ et $[5, 10Ma]$. De même qu’au chapitre précédent l’information la plus simple est donnée par le taux de troyens éjectés au bout de $10Ma$. Nous noterons $n_{ej}^e(a_2)$ le nombre de Troyens échappant à la RMM 1 : 1 au bout de $10Ma$ divisé par le nombre initial de troyens (5551). Cette notation met en évidence le fait que ce taux dépend du domaine intégré et de la position initiale de Saturne par le biais de e et a_2 . Si la plupart de nos intégrations correspondent à $e = 0.045$, nous réaliserons également des intégrations pour d’autres valeurs initiales de e afin de comprendre comment les structures résonantes se comportent pour d’autres excentricités.

5.2 Etude de l’espace des fréquences

Dans le modèle linéaire séculaire du PTCR, nous avons vu (3.1) que $\nu_0 = \mathcal{O}(\sqrt{m_p})$, $g_0 = \mathcal{O}(m_p)$ et $s_0 = 0$, où l’indice p fait référence à la planète co-orbitale avec les troyens, et l’indice 0 au fait qu’il s’agit des fréquences propres des points équilatéraux. La masse de Saturne étant environ trois fois plus petite que celle de Jupiter, il en résulte que les fréquences propres ν_0 et g_0 des points équilatéraux de Saturne, sont plus petites que celles des points équilatéraux de Jupiter. Si le PTCR séculaire suffit à donner un ordre de grandeur de ν au voisinage des points équilatéraux L_4 et L_5 de Saturne, nous avons vu (1.5.3.4) que Jupiter apporte une contribution importante aux valeurs de g^{int} et s^{int} . En reprenant les notations du paragraphe 1.5.3.3. Les fréquences $(\nu_0, g^{int}, s^{int})$ sont une bonne approximation des fréquences (ν, g, s) des particules proches de L_4 . Lorsqu’on s’éloigne du centre de la zone de stabilité, les fréquences propres des troyens varient. Afin de pouvoir utiliser notre modèle et prédire l’apparition des 4 familles de résonances dans l’espace des troyens de manière plus précise, nous avons besoin de connaître l’évolution des bornes de Θ_e en fonction de a_2 . Cette étude fait l’objet des paragraphes suivants. Au paragraphe 5.2.1, nous commençons par étudier la situation actuelle. Nous verrons que l’espace des

fréquences des troyens est tronqué par des éléments de la *Famille II* et la résonance séculaire $g = 2g_2 - g_1$. Cette configuration ne peut donc pas être utilisée pour étudier les bornes du domaine auquel appartiennent les fréquences des troyens. C'est pourquoi nous avons cherché une configuration plus stable pour laquelle l'espace des fréquences des troyens apparaît dans son intégralité. Cette étude est présentée au paragraphe 5.2.2 et nous permettra d'extrapoler les valeurs des bornes du domaine des fréquences pour les autres valeurs du paramètre a_2 .

5.2.1 Présentation de la situation actuelle

Dans la situation actuelle, les fréquences ν , g , et s des troyens sont proches de $\nu_0 \simeq 1918$, $g^{int} \simeq 60$ et $s^{int} \simeq -18$. Les fréquences des planètes sont telles que $\nu_{2,5}^{1,2} \simeq 1467$, cette fréquence est du même ordre de grandeur que ν ; c'est pourquoi les troyens de Saturne subissent l'influence de la *Famille II*. D'autre part, $2g_2 - g_1 \simeq 52$, est aussi du même ordre de grandeur que g , ce qui explique la présence de la résonance séculaire $g = 2g_2 - g_1$ dans Θ_e . Ces résonances des familles *II* et *III* contribuent à déstabiliser les troyens de Saturne. Sur la partie gauche de la figure *fig.19* nous montrons une carte de diffusion issue d'une intégration du système planétaire actuel et des particules appartenant au domaine de conditions initiales $(a, e) \in [9.3, 9.85] \times [0, 0.15]$, les autres variables elliptiques initiales étant les mêmes que celles du point équilatéral. Contrairement aux troyens de Jupiter pour lesquels une large zone de stabilité entoure L_4 , il apparaît que les particules proches du point équilatéral de Saturne sont éjectées mais que, lorsqu'on modifie le demi-grand axe initial de la particule de 0.125 UA, il existe des trajectoires stables. Ces trajectoires stables se regroupent autour de deux îles symétriques vers $a \simeq 9.4$ et $a \simeq 9.75$. Ceci résulte de la symétrie par rapport à l'axe d'équation $a = a_2$ dont nous avons parlé au paragraphe précédent. Afin de mieux comprendre la répartition des particules stables dans l'espace, nous avons également regardé la forme de la zone de stabilité dans la direction des anomalies moyennes. En effet, dans l'espace de conditions initiales (a, e) , il semble que ces deux zones de stabilité symétriques sont séparées. En fait la zone de stabilité est connexe par arcs. Pour comprendre ce point, sur la partie droite de la figure *fig.19* nous montrons une autre carte de diffusion où l'on fait varier les conditions initiales (a, M) dans le domaine $[9.35, 9.8] \times [300, 420]$ en prenant les mêmes valeurs initiales de ϖ , I et Ω que celles du point équilatéral. L'excentricité initiale est fixée $e = 0.045$ de manière à intersecter le domaine des conditions initiales des particules stables du plan (a, e) dans sa partie la plus large et la plus stable. Le segment de conditions initiales $(a, e) \in [9.35, 9.8] \times \{0.045\}$ de la figure de gauche est le même que le segment $(a, M) \in [9.35, 9.8] \times \{340\}$ de la figure de droite de la figure *fig.19*. On voit ainsi que les particules stables forment un anneau encerclant le point équilatéral. La zone de stabilité des troyens de Saturne est donc connexe par arcs. De même que pour les troyens de Jupiter, on peut avoir une vision d'ensemble de la dynamique des troyens en étudiant l'espace des variables elliptiques initiales associées aux actions (a, e, I) , et en considérant qu'il existe une dégénérescence de l'application

fréquence \mathcal{F} dans la direction des anomalies moyennes, ressemblant à une invariance par rotation, à une déformation continue près.

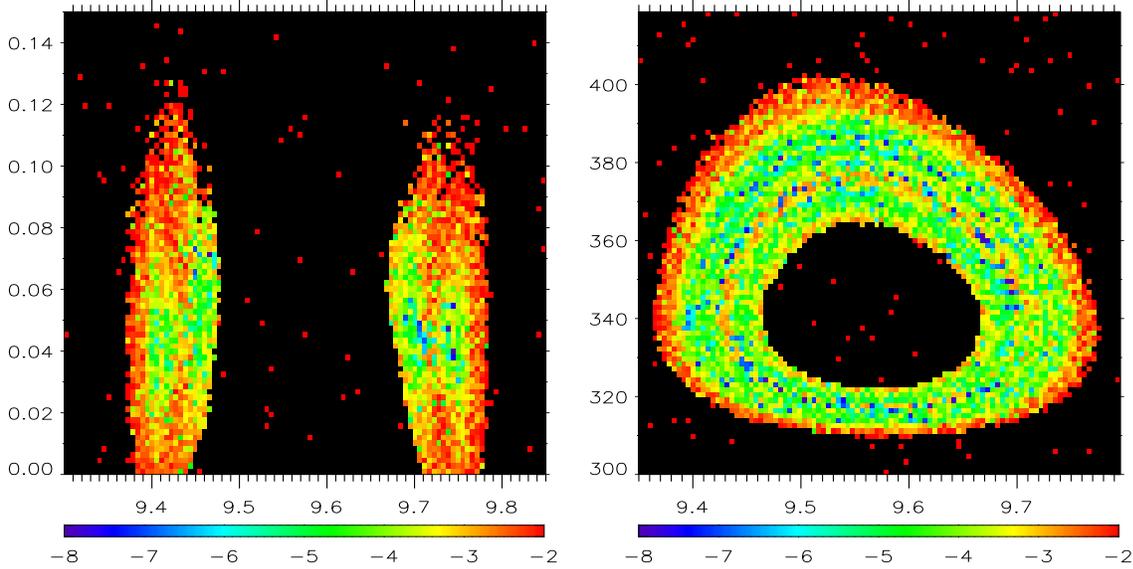


FIG. 19 – Ces figures sont des cartes de diffusion des troyens de Saturne sur deux plans de conditions initiales : à gauche (a, e) (avec $M \simeq 340$) et à droite (a, M) (pour $e = 0.045$), en gardant toutes les autres conditions initiales des troyens constantes et pour des conditions initiales de Jupiter-Saturne actuelles. Ces résultats sont issus d’intégrations sur $10Ma$ avec le même intégrateur que celui décrit au paragraphe 5.1.

Sur l’image de gauche de la figure *fig.20* nous représentons la projection de $\Theta_e(a_2)$ pour $e = 0.045$, dans le plan (g, ν) . La carte de diffusion correspondante est représentée sur la partie droite de la figure *fig.20*. La position du point équilatéral correspond à l’angle inférieur gauche de cette carte de diffusion $(a, I) = (a_2, I_2) \simeq (9.5855, 2.4856)$. Ce troisième domaine de conditions initiales permet de comprendre la forme de l’anneau de particules stables dans la direction des inclinaisons. Dans cette configuration planétaire, les troyens de Saturne sont nettement plus instables que ceux de Jupiter ; néanmoins, bon nombre de ces particules devraient être stables sur de plus grandes échelles de temps car elles ont un indice de diffusion inférieur à 10^{-4} . Sur la figure de gauche de la figure *fig.20*, une accumulation de fréquences le long de la droite d’équation $g = 2g_2 - g_1 \simeq 52$ est visible proche de l’axe des ordonnées. Ces fréquences correspondent aux conditions initiales $(a, I) \simeq (9.7, 12)$ dont l’indice de diffusion est codé par du rouge sur la figure *fig.20*, ce qui indique que $n_{dif} \simeq 10^{-2}$. Ces particules sont donc fortement déstabilisées par cette résonance. Il est difficile de comprendre, au premier abord, de quelle manière les familles *II* et *III* déstabilisent ces troyens. On peut même se demander si l’absence de troyens au point équilatéral de Saturne est due à l’effet direct de Jupiter, ou bien s’il est causé par ces résonances. Dans ce dernier cas, il devrait exister d’autres configurations

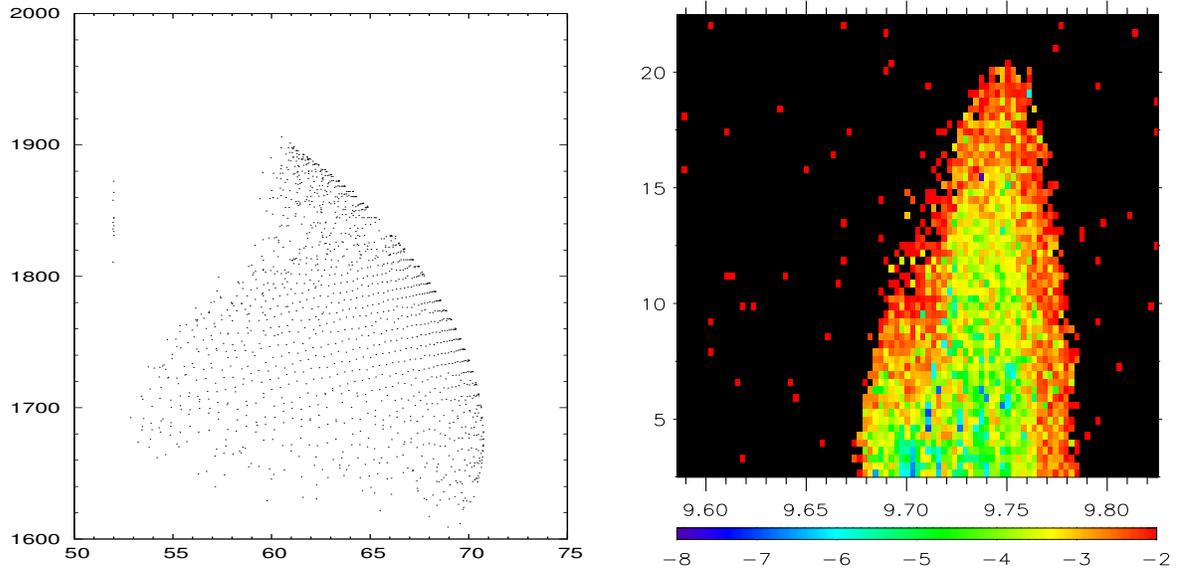


FIG. 20 – Ces figures sont issues d’une intégration de $\mathcal{D}_{0.045}$ pour une configuration des planètes Jupiter et Saturne correspondant à la situation actuelle, $a_2 = 9.5855$. Sur la figure de gauche, apparaît la projection dans le plan (g, ν) de l’espace des fréquences $\Theta_{0.045}$. Sur la figure de droite, nous avons représenté la carte de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0.045}$.

planétaires pour lesquelles le voisinage proche du point équilatéral de Saturne devrait être stable. Nous avons effectivement trouvé de telles configurations. Nous présentons l’une d’entre elles au paragraphe suivant.

5.2.2 Etude d’une configuration plus stable

Pour $a_2 \simeq 9.4467$, nous avons trouvé une large zone de stabilité au voisinage du point équilatéral de Saturne. Sur la partie droite de la figure *fig.21*, nous représentons la carte de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0.045}(9.4467)$. Sur cette figure apparaît une zone de stabilité, dont quasiment la moitié des particules ont un indice de diffusion inférieur à 10^{-5} . Dans ce cas, les troyens de Saturne semblent aussi stables que ceux de Jupiter. Ce qui laisse penser que lors de la migration planétaire, les planètes ont dû se rapprocher de configurations pour lesquelles des astéroïdes peuvent se maintenir dans la RMM 1 : 1 avec Saturne. Il est donc possible que Saturne ait eu une population de troyens importante pendant la migration planétaire. Sur la figure de gauche, nous pouvons voir que l’espace des fréquences (g, ν) arbore une forme pyramidale similaire à celle des troyens de Jupiter. Le point équilatéral n’appartient pas à $\mathcal{D}_{0.045}$ car l’excentricité initiale de Saturne est supérieure à 0.045 ; néanmoins pour simplifier, nous appellerons « point équilatéral », la particule appartenant au domaine des conditions initiales $\mathcal{D}_{0.045}$ vérifiant $(a, I) = (a_2, I_2)$,

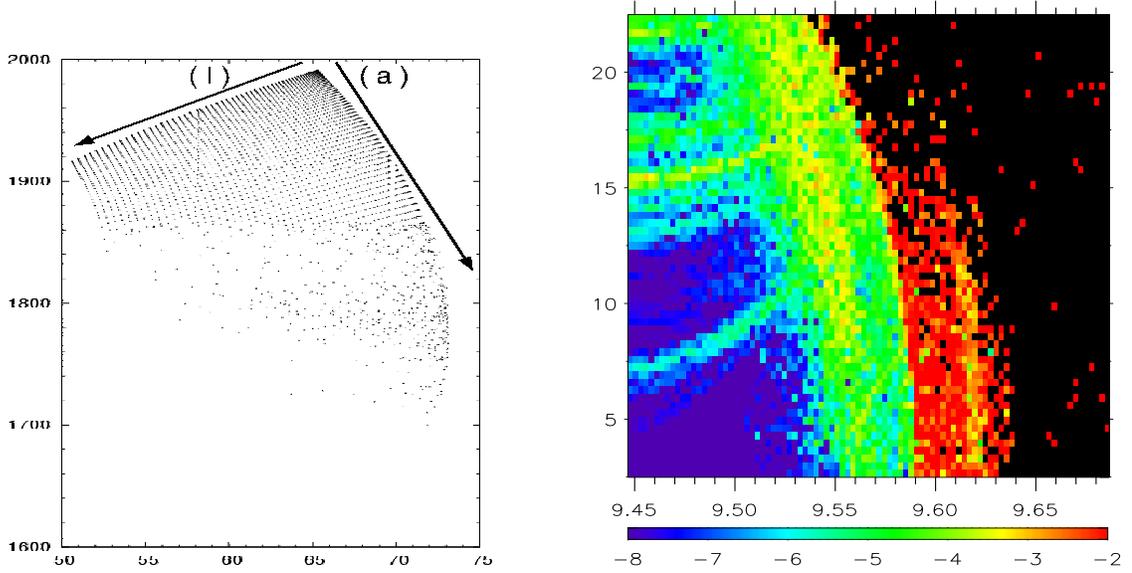


FIG. 21 – Ces figures sont issues d’une intégration de $\mathcal{D}_{0.045}$, pour $a_2 = 9.4467$. Sur la figure de gauche apparaît la projection dans le plan (g, ν) de l’espace des fréquences $\Theta_{0.045}$. Sur la figure de droite nous avons représenté la carte de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0.045}$.

et nous désignerons par $(g_{L_4}, \nu_{L_4}, s_{L_4})$ ses fréquences propres. Les fréquences (g_{L_4}, ν_{L_4}) correspondent au sommet de la forme pyramidale du domaine (g, ν) . La valeur maximale de la fréquence de libration des troyens est donc atteinte au point équilatéral. Cette propriété est indépendante de l’excentricité initiale e du domaine \mathcal{D}_e intégré et joue un rôle important dans le scénario du passage des éléments de la *Famille II* dans $\Theta_{0.045}$. Le maillage de conditions initiales $\mathcal{D}_{0.045}$ est plus fin dans la direction des demi-grands axes que dans la direction des inclinaisons. C’est pourquoi sur la figure *fig.21*, les fréquences (g, ν) des troyens se regroupent sur des courbes correspondant à une même valeur de l’inclinaison initiale. Les valeurs croissantes du demi-grand axe initial sont indiquées par la flèche (a) . Lorsque I augmente, cette courbe se décale dans la direction indiquée par la flèche (I) . En partant du bord gauche du domaine des fréquences (g, ν) , on voit que les fréquences (g, ν) s’alignent sur des courbes décroissantes plus ou moins parallèles. Chacune de ces courbes correspond à une valeur constante de l’inclinaison initiale et à des valeurs croissantes du demi-grand axe. Ceci permet de comprendre, que ν décroît lorsqu’on s’éloigne du point de Lagrange dans la direction des demi-grands axes. La fréquence g des troyens diminue quand leur inclinaison initiale augmente alors qu’elle augmente quand leur demi-grand axe initial augmente.

Une autre façon de comprendre la correspondance entre l’espace des conditions initiales et l’espace des fréquences consiste à localiser les particules vérifiant $g = C$ ou $\nu = D$, avec C et D des constantes appartenant respectivement à $\pi_g(\mathcal{D}_{0.045})$ et $\pi_\nu(\mathcal{D}_{0.045})$. Cette localisation est d’autant plus intéressante qu’elle nous permettra de distinguer facilement

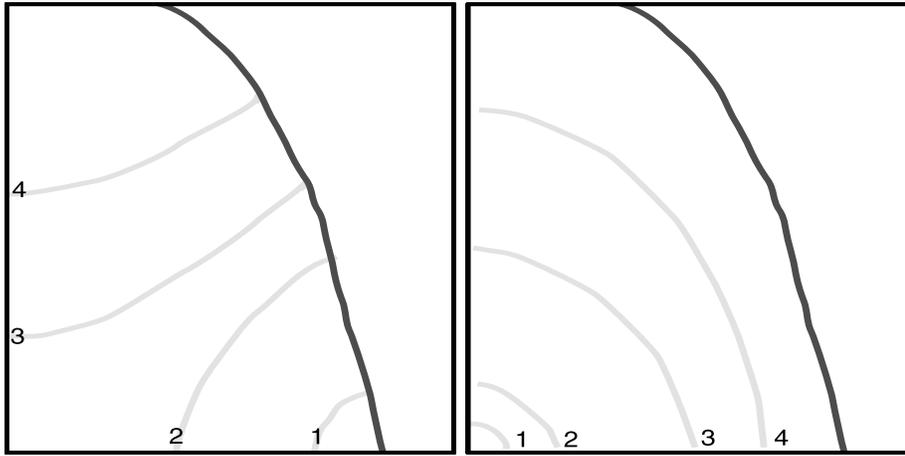


FIG. 22 – Ces dessins schématisent la localisation des conditions initiales (a, I) des particules ayant la même fréquence séculaire g (à gauche) ou la même fréquence de libration ν (à droite). A gauche, nous avons représenté quatre courbes gris clair correspondant à $g = C_j$ avec C_1, C_2, C_3 et C_4 des constantes rangées par ordre décroissant. De façon analogue, sur la figure de droite, quatre courbes gris clair correspondent à $\nu = D_j$ avec D_1, D_2, D_3 et D_4 des constantes rangées également par ordre décroissant. La valeur de j est indiquée sur les courbes correspondantes. La courbe gris foncé délimite la zone de stabilité des troyens de Saturne.

les éléments de la *Famille III* de ceux de la *Famille II*. Afin de faciliter ce travail, nous avons schématisé la localisation de ces particules dans l'espace des conditions initiales sur la figure *fig.22*. Les droites d'équation $g = C$ sont des droites verticales sur la figure de gauche de la figure *fig.21*. Lorsque $C > g_{L_4}$, les conditions initiales des particules vérifiant $g = C$ sont regroupées sur des courbes ressemblant à des portions de paraboles intersectant l'axe $I = I_2$, semblables aux courbes 1 et 2 de la figure de gauche de la figure *fig.22*. Lorsque C diminue, cette portion de parabole grandit, intersectant l'axe d'équation $I = I_2$ plus proche du point équilatéral. Lorsque $C < g_{L_4}$, ces courbes ressemblent à des portions de paraboles intersectant l'axe d'équation $a = a_2$. Lorsque C diminue, ces courbes s'éloignent progressivement du point équilatéral, comme c'est le cas des courbes 3 et 4 du schéma de gauche de la figure *fig.22*. Ces courbes, dans l'espace des conditions initiales, sont caractéristiques des résonances séculaires de la *Famille III* définies par l'équation 3.5. Deux de ces résonances sont identifiables sur la figure *fig.21*. En effet, dans le plan (g, ν) on voit une lacune de fréquences le long de la droite d'équation $g = 69.7$ qui correspond à la résonance $g = 3g_2 - 2g_1$. Les conditions initiales des particules subissant l'effet de cette résonance sont alignées sur une courbe intermédiaire entre les courbes 1 et 2 de la figure de gauche de la figure *fig.22*, intersectant l'axe des abscisses vers $a = 9.56$. Leur indice de diffusion est codé par du jaune. Un autre alignement de fréquences apparaît dans le plan (g, ν) vers $g = 58.2$, résultant de l'effet de la résonance $g = g_1 + g_2 - s_2$. L'effet de cette résonance contribue à augmenter l'indice de diffusion des particules alignées le long d'une

courbe semblable à la numéro 4 du schéma de gauche de la figure *fig.22*, intersectant l'axe des inclinaisons vers 15° . En fait, cette résonance recouvre une autre résonance séculaire $s = 2g_1 - g_2 \simeq -17.71$, qui n'est pas visible dans le plan (g, ν) , mais apparaît très clairement dans le plan (s, ν) . Sur la figure *fig.23*, nous avons représenté la projection de $\Theta_{0.045}$ sur le plan (s, ν) . Les flèches (a) et (I) indiquent la correspondance entre l'espace des conditions initiales et leurs images par l'application fréquence. Un alignement de fréquences sur la droite verticale d'équation $s = -17.71$ apparaît très clairement, révélant la présence de la résonance $s = 2g_1 - g_2$. Les particules subissant l'effet de résonances du type $s = cte$ ont des conditions initiales se regroupant autour de courbes très similaires à celles du type $g = cte$.

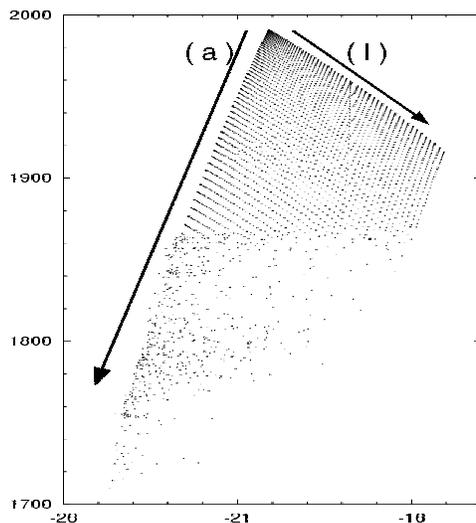


FIG. 23 – Cette figure est issue de la même intégration que la figure *fig.21*. Elle représente la projection de $\Theta_{0.045}$ sur le plan (s, ν) .

Les courbes d'équation $\nu = D$ correspondent à des droites horizontales sur la figure de gauche de la figure *fig.22*. Ces droites coupent les deux bords de l'ensemble des valeurs prises par les fréquences (g, ν) . Par conséquent, l'ensemble des conditions initiales des particules vérifiant $\nu = D$ sont regroupées sur des courbes ayant la forme d'arcs de cercles entourant le point de Lagrange. Lorsque D diminue, ces arcs de cercles grandissent en s'éloignant du point de Lagrange, comme c'est le cas des courbes d'indices 1, 2, 3, et 4 sur la figure de droite de la figure *fig.22*. Cette forme, dans l'espace des conditions initiales, est caractéristique des éléments de la *Famille II*. Les éléments de la *Famille II* n'apparaissent pas dans l'espace des fréquences de la figure *fig.22* mais sont visibles pour cette configuration planétaire à de plus hautes excentricités. Ces schémas, localisant les résonances des famille *II* et *III* dans l'espace des conditions initiales, sont valables pour la plupart des autres configurations planétaires que nous avons explorées.

5.2.3 Etude des bornes de l'espace des fréquences

Dans le cas des troyens de Jupiter, nous avons considéré que les bornes des domaines atteints par les fréquences ν , g et s sont indépendantes de la valeur initiale de a_2 . Nous avons pu faire cette approximation pour deux raisons : d'une part, la position des points équilatéraux de Jupiter ne dépend pas de a_2 et, d'autre part l'influence directe de Saturne sur les troyens de Jupiter modifie peu leurs fréquences propres. Dans le cas des troyens de Saturne nous ne pouvons pas faire cette approximation. D'après les expressions (1.20), ν_0 est proportionnelle à n_2 qui est directement lié à a_2 . Les expressions de g^{int} et s^{int} (1.48) contiennent aussi un terme proportionnel à n_2 ainsi qu'un autre terme proportionnel à n_1 . Nous avons vu, au paragraphe (1.5.3.4), que ces termes apportent une contribution importante à la valeur de ces fréquences. Ainsi l'influence directe de Jupiter sur les troyens de Saturne modifie notablement les valeurs de g et s . Cependant, à part dans de rares exceptions, la forme globale du domaine $\Theta_e(a_2)$ est conservée. Pour chaque valeur initiale de a_2 , nous considérerons que l'ensemble $\Theta'_e(a_2)$ des valeurs qui sont susceptibles d'être atteintes par les fréquences des troyens de Saturne, est le même que $\Theta_e(9.4467)$ à une translation près. Les éléments de l'ensemble $\Theta'_e(a_2)$ sont les fréquences qu'auraient les troyens de Saturne du domaine \mathcal{D}_e s'ils n'étaient pas déstabilisés par les structures résonantes des 4 familles. Remarquons que $\Theta_e(a_2) \subset \Theta'_e(a_2)$, mais qu'on n'a pas forcément égalité entre ces deux ensembles car les résonances des 4 familles peuvent contribuer à tronquer l'espace des fréquences, comme c'est le cas dans la configuration actuelle. Mais afin de simplifier la rédaction, nous identifierons ces deux ensembles dans les paragraphes suivants. Une bonne approximation des translations de $\Theta'_e(a_2)$ dans les directions ν , g et s , est donnée par les variations des fréquences propres du point de Lagrange du problème séculaire. D'après les résultats du paragraphe 1.5.3.4, lorsque a_2 augmente, ν_0 et g^{int} diminuent tandis que s^{int} augmente. Les fréquences (ν, g, s) de tous les troyens de Saturne subissent une translation très proche de celles de $(\nu_0, g^{int}, s^{int})$. Par exemple, l'espace des fréquences de la situation actuelle, représenté sur la figure *fig.20*, ressemble à l'image d'une portion de $\Theta_e(9.4467)$, représenté sur la figure *fig.21*, par la translation :

$$(\nu, g) \longmapsto (\nu + 42.5, g + 2.31).$$

Nous représentons les variations de ces bornes, lorsque a_2 varie entre 8.4 et 9.625, sur la figure *fig.24*. Les deux courbes tracées sur le graphique du haut de cette figure représentent les valeurs minimales et maximales atteintes par ν dans $\Theta'_e(a_2)$. Pour une valeur de a_2 donnée, l'ensemble des valeurs situées entre ces deux courbes représente l'intervalle $\pi_\nu(\Theta'_e)$ des fréquences ν possibles pour les particules de $\mathcal{D}_{0.045}$. Rappelons que la courbe du haut correspond également à une approximation de la valeur de ν des particules qui sont proches du point équilatéral. Sur les graphiques du milieu et du bas, nous avons tracé respectivement les bornes des domaines $\pi_g(\Theta'_e)$ et $\pi_s(\Theta'_e)$. Sur chacun de ces graphiques, nous avons ajouté entre les courbes représentant les bornes, une courbe représentant la fréquence atteinte au point équilatéral. Ces courbes donnent une vue

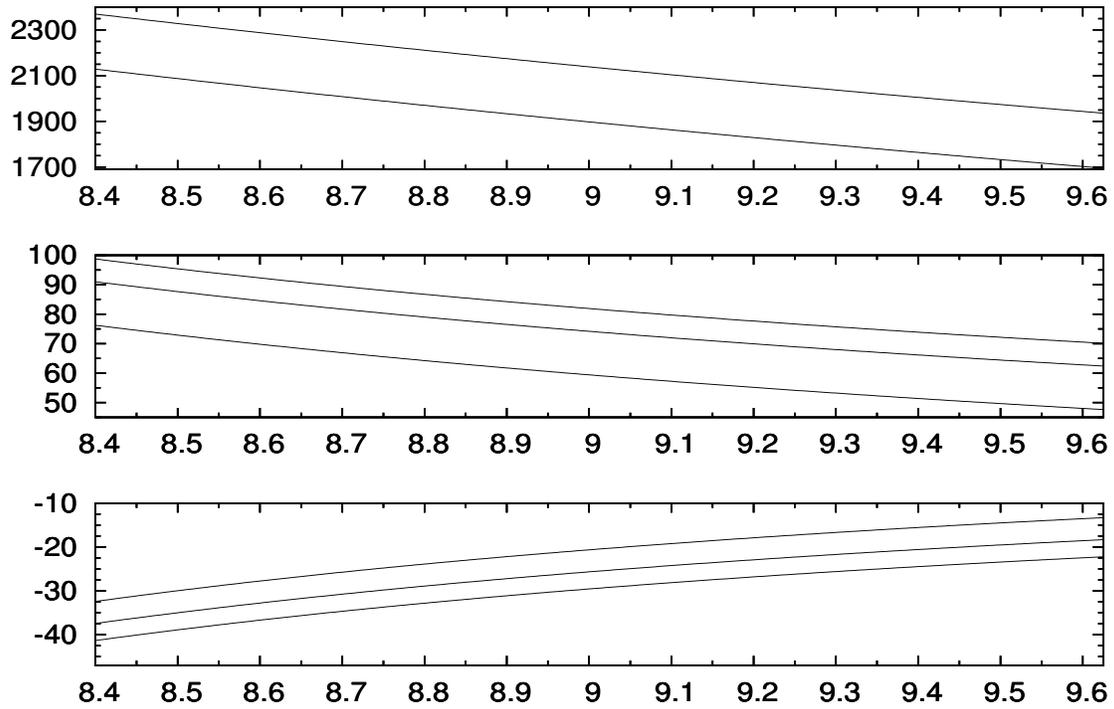


FIG. 24 – Sur cette figure nous avons représenté l'évolution des bornes du domaine $\Theta'_{0.045}(a_2)$. Sur la figure du haut : Evolution des fréquences maximales et minimales pouvant être atteintes par ν ; sur la figure du milieu : evolution des fréquences maximales et minimales pouvant être atteintes par g , entre ces deux courbes nous avons ajouté une courbe correspondant à la valeur de g_{L_4} ; sur la figure du bas : evolution des fréquences maximales et minimales pouvant être atteintes par s . Entre ces deux courbes apparaît une courbe correspondant à la valeur de s_{L_4} .

d'ensemble des domaines des fréquences possibles pour (ν, g, s) . Connaissant par ailleurs les fréquences de forçage des planètes, nous sommes en mesure de localiser et d'identifier les structures résonnantes agissant sur les troyens de Saturne.

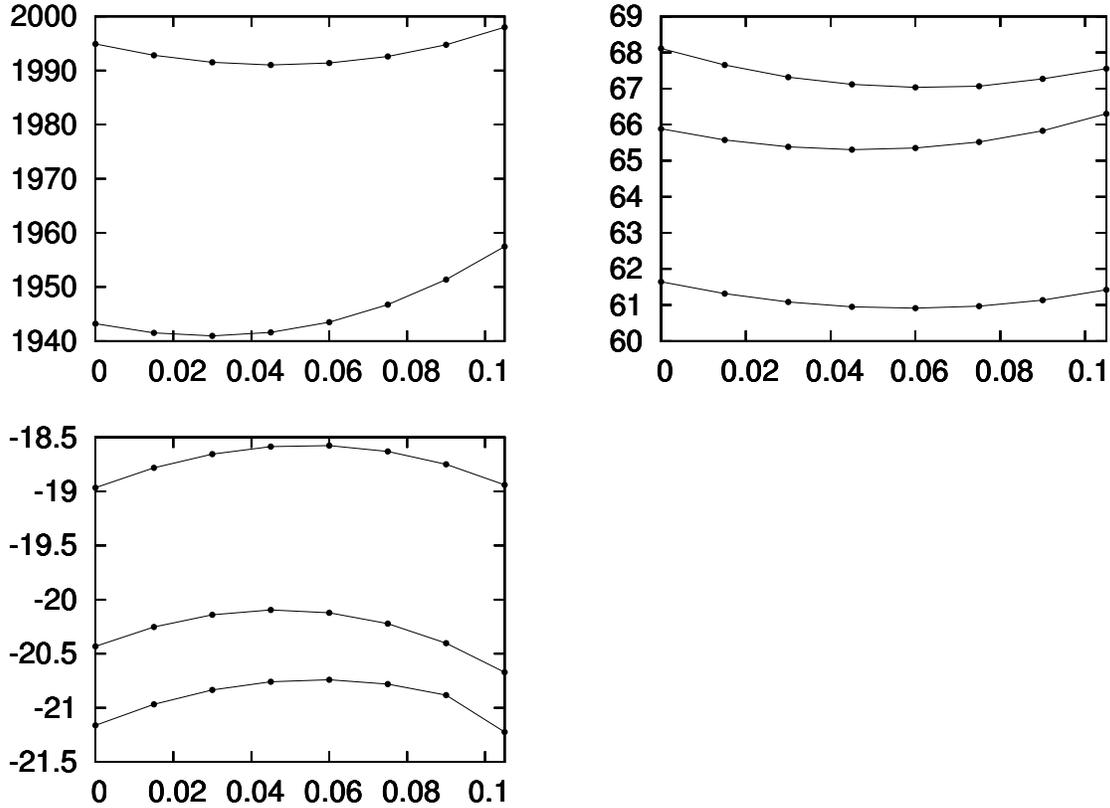


FIG. 25 – Evolution des bornes des domaines des fréquences en fonction de l'excentricité pour $e \in [0, 0.105]$; en haut à gauche : valeurs maximales et minimales atteintes par ν ; en haut à droite, de haut en bas : valeur maximale atteinte par g , g_{L_4} , et valeur minimale de g ; En bas à gauche, de haut en bas : valeur maximale atteinte par s , s_{L_4} , et valeur minimale de s ; pour plus de précision se reporter au texte.

Cette étude est, pour l'instant, limitée aux troyens ayant une excentricité valant 0.045. Afin de comprendre l'évolution de ces bornes pour d'autres excentricités, nous avons intégré les particules des domaines \mathcal{D}_e pour $a_2 = 9.4467$, et 8 valeurs initiales de l'excentricité uniformément réparties dans l'intervalle $[0, 0.105]$. Cette étude est limitée par le fait que la forme de la zone de stabilité change quand l'excentricité augmente. En effet, plus l'excentricité augmente, plus les résonances séculaires déstabilisent les particules, rétrécissant la zone de stabilité. C'est pourquoi nous restreignons l'étude des bornes de l'espace des fréquences, aux particules dont les conditions initiales appartiennent à un sous-ensemble de \mathcal{D}_e que nous notons \mathcal{G}_e , correspondant à $(a, I) \in [9.4467, 9.52] \times [I_2, 12.5]$. Sur la figure *fig.25*, nous représentons l'évolution en fonction de l'excentricité des bornes

des domaines $\pi_\nu(\mathcal{F}(\mathcal{G}_e))$, $\pi_g(\mathcal{F}(\mathcal{G}_e))$, et $\pi_s(\mathcal{F}(\mathcal{G}_e))$, respectivement en haut à gauche, en haut à droite, et en bas à gauche. Sur les graphiques correspondant aux bornes de g et s , nous avons ajouté une troisième courbe montrant l'évolution des fréquences g_{L_4} et s_{L_4} . Ces courbes apparaissent entre les deux courbes représentant l'évolution des bornes de $\mathcal{F}(\mathcal{G}_e)$. Toutes ces courbes possèdent soit un minimum local, soit un maximum local. Ces extremums ne sont pas atteints exactement pour les mêmes valeurs de l'excentricité, mais on voit qu'ils se regroupent autour de $e \simeq 0.045$. De part et d'autre de cette excentricité, on trouve des excentricités pour lesquelles les bornes de $\mathcal{F}(\mathcal{G}_e)$ ont des valeurs similaires. Les bornes de l'espace des fréquences semblent donc évoluer de façon quasi-symétrique de part et d'autre de $e \simeq 0.045$. Ceci est moins vrai pour la courbe représentant le minimum des valeurs atteintes par ν , qui atteint des valeurs plus élevées pour les grandes excentricités que pour les petites. Globalement, il apparaît que le domaine $\mathcal{F}(\mathcal{G}_e)$ varie peu avec l'excentricité, ses bornes subissent des modifications de l'ordre de 1%. En généralisant ce résultat aux autres valeurs du paramètre a_2 , nous en déduisons que les structures résonantes agissent sur les troyens ayant des excentricités initiales différentes, pour des valeurs de a_2 très proches les unes des autres.

5.3 Analyse de l'évolution des 4 familles de résonances dans l'essaim des troyens de Saturne

De même que pour les troyens de Jupiter, nous tentons d'étudier toutes les structures résonantes jouant un rôle important dans la dynamique des troyens de Saturne pendant la migration planétaire. Pour cela, nous utilisons le modèle décrit au paragraphe 5.1. Ayant étudié les bornes du domaine Θ_e et connaissant l'évolution des fréquences planétaires (2.1), nous utilisons des méthodes analogues à celles du chapitre 4 afin de prédire les résonances susceptibles d'apparaître dans Θ_e . Dans un deuxième temps, nous vérifions nos prédictions en les confrontant aux résultats de nos simulations numériques.

Nous représentons le taux de particules éjectées, $n_{ej}^{0.045}(a_2)$, correspondant aux intégrations des domaine $\mathcal{D}_{0.045}(a_2)$ pour $a_2 \in [8.3, 9.625]$, sur la fenêtre du milieu de la figure *fig.26*. Chaque point de cette courbe correspond à une intégration décrite au paragraphe 5.1. Cette courbe est plus irrégulière que celles correspondant aux troyens de Jupiter, et de nombreux pics d'instabilité apparaissent. De même que pour les troyens de Jupiter, 3 de ces pics correspondent aux RMM. Un large plateau d'instabilité apparaît pour $a_2 \leq 8.57$, la portion de ce plateau correspondant à $a_2 \leq 8.4$ est due à l'effet de la RMM 1 : 2. Nous verrons ci-dessous que de nombreuses structures résonantes contribuent à prolonger ce plateau d'instabilité. Les RMM 3 : 7 et 2 : 5 correspondent aux pics d'instabilité situés respectivement vers $a_2 \simeq 9.195$ et $a_2 \geq 9.6$. L'effet de la RMM 4 : 9 est aussi visible aux alentours de $a_2 = 8.98$. Nous allons utiliser notre analyse des familles de résonances afin d'attribuer les autres pics d'instabilité aux résonances qui les provoquent. Les 4 familles de résonances ne jouent pas toutes un rôle important dans la dynamique des

troyens. La discussion suivante a pour but d'écarter les familles ayant un rôle mineur et de centrer notre étude sur celles ayant un impact important sur la dynamique des troyens de Saturne.

La présence d'éléments de la *Famille I* dans l'espace des fréquences des troyens d'une planète p est essentiellement due à la commensurabilité de n_p et ν . En effet, en négligeant les termes de droite de l'équation (3.4) impliquant les fréquences séculaires, les éléments de la *Famille I* apparaissent dans l'espace des fréquences des troyens lorsque $-j/in_p$ est du même ordre de grandeur que la fréquence de libration des troyens. Dans le cas des troyens de Jupiter et de Saturne, la valeur de la fréquence de libration ne dépend que très peu de la planète perturbatrice. En conséquence, comme dans le cas du PTCR, la présence d'éléments de la *Famille I* dans l'espace des fréquences de ces troyens, dépend essentiellement de la masse de la planète dont on considère les troyens, et non des conditions initiales des planètes. Des résonances de la *Famille I* associées à $j = -1$ et $i \in \{11, 12, 13, 14\}$ dans la relation (3.4), apparaissent clairement dans l'espace des fréquences des troyens de Jupiter. Ceci est dû au fait que Jupiter a une masse importante. Des résonances de la *Famille I* correspondant à $j = -1$ et des valeurs de i plus petites agiraient sur les troyens d'un planète de masse plus grande. Saturne ayant une masse plus faible, les résonances de la *Famille I* pour lesquelles $(-j/i)n_p \in \Theta_e$ correspondent à $j = -1$ et $i \in \{22, 23, 24, 25\}$ dans la relation 3.4. Si ces résonances avaient un effet important sur les troyens de Saturne, elles devraient apparaître dans Θ_e , quelle que soit la valeur initiale de a_2 . Comme nous pouvons le voir sur la figure *fig.21* du paragraphe 5.2.2, ces résonances ne sont pas observables dans $\Theta_{0,045}$, ni dans Θ_e pour d'autres valeurs de e . Cette famille a donc peu d'effet sur les troyens de Saturne.

En utilisant la même méthode qu'au chapitre précédent, les résonances de la *Famille IV* définies par la relation (3.7), devraient agir sur les troyens de Saturne lorsque

$$-\nu_{2,5}^{1,2} \in \frac{k}{q}\pi_g(\Theta_e).$$

Dans le cas des troyens de Jupiter, nous avons vu que l'ordre de grandeur de la fréquence g étant en $\mathcal{O}(m_1)$, ces résonances apparaissent très proche des RMM et contribuent à l'augmentation de l'instabilité proche des RMM. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, les valeurs des fréquences g des troyens de Saturne sont beaucoup plus faibles que celles des troyens de Jupiter. Il en résulte que les éléments de la *Famille IV* agissent sur les troyens de Saturne tellement proches des RMM qu'ils ne sont pas observables. Les pics d'instabilité visibles sur la fenêtre du milieu de la figure *fig.26* ne sont donc pas causés par des résonances appartenant aux familles *I* et *IV*.

Nous allons voir que les deux familles restantes, la *II* et la *III*, agissent fortement sur les troyens de Saturne. C'est le cas dans la situation actuelle où nous avons vu qu'une résonance séculaire et la proximité d'une sous-famille de la *Famille II* contribuent à emputer la zone de stabilité des troyens de son centre. De manière plus générale, comme nous le montrons sur la figure *fig.24*, les valeurs atteintes par la fréquence g des troyens de Saturne varient entre 50 et 100. Ces fréquences sont donc du même ordre de gran-

deur que les fréquences séculaires des planètes et on peut s'attendre à voir apparaître de nombreuses résonances séculaires du type $g = -(\mathbf{k}_g \cdot \sigma_g + \mathbf{l}_s \cdot \sigma_s)$, en reprenant les notations de l'équation (3.5). Les valeurs atteintes par la fréquence s varient entre -41 et -13 et sont donc également proches des fréquences séculaires des planètes. Cependant, les résonances séculaires impliquant s sont moins nombreuses et jouent un rôle moins important que les précédentes. Nous étudions l'évolution des résonances de la *Famille III* au paragraphe 5.3.2. Lorsque la valeur initiale de a_2 parcourt l'intervalle $[8.4, 9.625]$, le domaine des fréquences atteintes par ν varie entre 1700 et 2360. Les fréquences de libérations des éventuels troyens de Saturne sont donc environ 4 fois inférieures à celles de troyens de Jupiter. Par conséquent, les éléments de la *Famille II* devraient agir sur les troyens de Saturne plus proches des RMM que pour les troyens de Jupiter. Nous verrons au paragraphe 5.3.1 que cette famille joue aussi un rôle important dans la dynamique des troyens au cours de la migration planétaire.

5.3.1 Analyse de la *Famille II*

5.3.1.1 Prédiction de l'apparition de la *Famille II*

De la même façon que pour les troyens de Jupiter, nous réalisons une prédiction de l'apparition des éléments de la *Famille II* dans Θ_e , en négligeant le terme de droite de l'équation (3.6). On obtient ainsi une condition de résonance simplifiée similaire à la relation (4.6) :

$$\frac{i}{q} \nu_{\alpha,\beta}^{1,2} \in \pi_\nu(\Theta_e). \quad (5.1)$$

Rappelons que les éléments de cette famille apparaissent regroupés en sous-famille définie par les valeurs de (α, β, i, q) , le couple (α, β) faisant référence à la RMM à laquelle sont associés les éléments de cette sous-famille. Contrairement aux cas de troyens de Jupiter, ici les bornes du domaine des fréquences de libration des troyens varient avec a_2 . En effet, nous avons vu ci-dessus que ν_0 augmente proportionnellement à n_2 lorsque a_2 diminue. Nous allons utiliser cette propriété afin de simplifier la relation (5.1). En utilisant les bornes de $\pi_\nu(\Theta_{0,045})$ pour la configuration stable décrite au paragraphe 5.2.2, lorsque ν est minimale, on a $\nu/n_2 \simeq 0.0378$ et, quand ν est maximale $\nu/n_2 \simeq 0.0443$. On a donc $\nu/n_2 \in [0.0378, 0.0443]$. Selon l'approximation linéaire séculaire, ν/n_2 est presque constant et nous supposons que $\forall a_2 \in [8.4, 9.625], \nu/n_2 \in [0.0378, 0.0443]$. On peut ainsi prévoir que les éléments de la *Famille II* associés au quadruplet (α, β, i, q) entrent dans $\Theta_{0,045}$ lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{i}{qn_2} \nu_{\alpha,\beta}^{1,2} \in [0.0378, 0.0443]. \quad (5.2)$$

Afin de visualiser pour quelles valeurs de a_2 cette relation est vérifiée, sur la fenêtre du

bas de la figure *fig.26*, nous avons représenté des fonctions du type $i/(qn_2)\nu_{1,2}^{1,2}$, $i/(qn_2)\nu_{3,7}^{1,2}$, et $i/(qn_2)\nu_{2,5}^{1,2}$ respectivement en rouge, en vert et en bleu. Les valeurs des coefficients i/q sont écrites sur les courbes correspondantes, en bas pour les courbes associées à la RMM 1 : 2, en haut pour celles associées à la RMM 3 : 7 et au milieu pour celles associées à la RMM 2 : 5. Nous avons représenté ces fonctions dans l'intervalle des images $[0.0378, 0.0443]$. De cette façon, il est facile de visualiser pour quelles valeurs de a_2 la relation (5.2) est vérifiée. Nous pouvons ainsi prédire que la sous-famille de la *Famille II* associée à (α, β, i, q) doit apparaître dans $\Theta_{0.045}$, pour l'intervalle des valeurs de a_2 correspondant à l'apparition de $i/(qn_2)\nu_{\alpha,\beta}^{1,2}$ sur cette figure. Cette méthode permet de comprendre que le passage de sous-familles de la *Famille II* dans $\Theta_{0.045}$ sont la cause de bon nombre des pics d'instabilité visibles sur la fenêtre du milieu de la figure *fig.26*.

Dans la situation actuelle, $a_2 \simeq 9.5855$, ce qui correspond à un minimum local de la courbe $n_{ej}^{0.045}$. Dans l'intervalle précédent la configuration actuelle $a_2 \in [9.4, 9.5855]$, nous voyons que la courbe $n_{ej}^{0.045}$ possède 4 maximums locaux correspondant au passage de $i/q\nu_{2,5}^{1,2}$ dans $\Theta_{0.045}$. Ces pics d'instabilité sont dû à la présence de sous-familles de la *Famille II*, associées à la RMM 2 : 5 et aux couples $(i, q) \in \{(-1, 4), (-1, 3), (-1, 2), (-1, 1)\}$. Pour chacun de ces pics, l'instabilité la plus forte apparaît lorsque la courbe $i/q\nu_{2,5}^{1,2}$ atteint le haut de la fenêtre dans laquelle nous l'avons représentée. Ainsi, comme dans le cas des troyens de Jupiter, les sous-familles de la *Famille II* déstabilisent le plus les troyens lorsque $i/q\nu_{2,5}^{1,2}$ est très proche de la fréquence de libration du point équilatéral. Ces pics d'instabilité proches de la situation actuelle sont très intéressants. En effet, ils montrent que, lors de la migration planétaire, les troyens de Saturne ont dû être fortement déstabilisés par ces sous-familles de résonances. Notamment les sous-familles de résonances associées à $(i, q) \in \{(-1, 2), (-1, 1)\}$ dépeuplent la quasi-totalité de $\mathcal{D}_{0.045}$ en 10 Ma. Or l'action de ces sous-familles sur les troyens de Saturne a dû être d'autant plus longue que c'est justement à la fin du processus de la migration planétaire que les demi-grands axes et les moyens mouvements des planètes varient le plus lentement. De plus, la densité d'astéroïdes étant plus faible à la fin de la migration planétaire, il est plus difficile de capturer des troyens pendant cette phase. Ces arguments nous conduisent à penser que, même si une population conséquente de troyens a pu exister lors de la migration planétaire, il est peu probable qu'elle ait survécu jusqu'à la fin de cette migration.

De nombreux pics d'instabilité sont aussi présents de part et d'autre de la RMM 3 : 7. A droite de la RMM 3 : 7, c'est-à-dire pour des valeurs de a_2 plus grandes que celles provoquant la RMM, trois pics d'instabilité apparaissent provoqués par les sous-familles de la *Famille II* associées à $(i, q) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$. A gauche de la RMM 3 : 7, nous voyons que les sous-familles correspondant à des valeurs opposées de i/q déstabilisent aussi les troyens de Saturne pour $(i, q) \in \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3)\}$. Notons que, vers $a_2 \simeq 9.005$, les courbes $-1/(5n_2)\nu_{2,5}^{1,2}$ et $1/(6n_2)\nu_{1,2}^{1,2}$ se croisent et que le recouvrement des deux sous-familles associées contribue à déstabiliser les troyens de Saturne. Nous verrons ci-dessous que, dans cette configuration, une résonance séculaire agit aussi, proche du point équilatéral. A gauche de ce pic en apparaît un autre, vers $a_2 \simeq 8.98$, qui n'est pas seulement dû à l'effet de la *Famille II* mais aussi à une RMM d'ordre élevé, la RMM Jupiter-Saturne

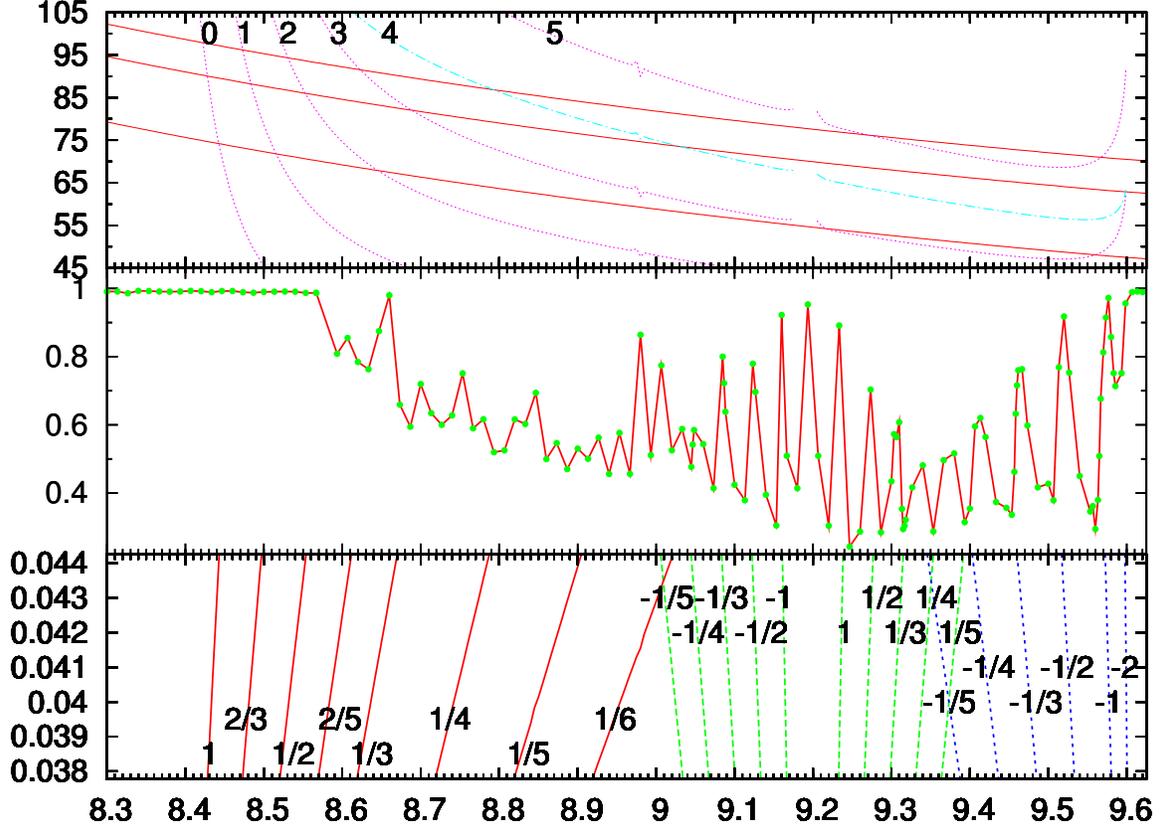


FIG. 26 – Sur la fenêtre du milieu, nous représentons l'évolution de $n_{e_j}^{0.045}$ en fonction de $a_2 \in [8.3, 9.625]$. La fenêtre du bas sert à localiser l'influence de la *Famille II*, nous y représentons les fonctions du type $i/(qn_2)\nu_{1,2}^{1,2}$, $i/(qn_2)\nu_{3,7}^{1,2}$, et $i/(qn_2)\nu_{2,5}^{1,2}$ respectivement en rouge, en vert et en bleu, dans l'intervalle des valeurs possibles pour ν/n_2 (pour plus de détail se référer au texte). Les coefficients i/q sont écrits sur les courbes correspondantes. La fenêtre du haut sert à localiser l'influence de la *Famille III*. Les variations, des bornes du domaine $\pi_g(\Theta_{0.045})$, et de g_{L_4} , y sont représentées en rouge. Les autres courbes, sont désignées par les indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, et sont les représentations respectives de $(g_1 + g_2)/2$, g_2 , $(3g_2 - g_1)/2$, $2g_2 - g_1$, $g_2 + g_1 - s_2$, $3g_2 - 2g_1$.

4 : 9. L'effet de cette RMM est également repérable par une petite irrégularité des courbes mauves de la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, qui représentent des combinaisons linéaires des fréquences séculaires.

L'effet des éléments de la *Famille II* associés à la RMM 1 : 2 est moins clairement identifiable sur la courbe $n_{ej}^{0.045}$. Nous verrons au paragraphe 5.3.2 que de nombreuses résonances séculaires contribuent aussi à déstabiliser les troyens de Saturne et qu'il est plus difficile de dissocier leur effet de celui de la *Famille II* lorsqu'on se rapproche de la RMM 1 : 2. On peut néanmoins identifier 3 pics d'instabilité causés par 3 sous-familles associées à $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ et à $(i, q) \in \{(2, 5), (1, 3), (1, 4)\}$, vers $a_2 \simeq 8.61$, $a_2 \simeq 8.66$ et $a_2 \simeq 8.78$.

5.3.1.2 Analyse du passage d'une sous-famille de la *Famille II*

Dans les paragraphes précédents, nous avons mis en place un modèle permettant de prédire de manière globale pour quelles valeurs de a_2 la *Famille II* agit sur les troyens de Saturne. Dans ce paragraphe, nous étudions de manière plus détaillée le passage de la sous-famille de la *Famille II* associée à $(\alpha, \beta, i, q) = (2, 5, -1, 3)$ dans l'équation (5.1). D'après les prédictions réalisées sur la figure *fig.26*, cette sous-famille déstabilise les troyens lorsque $a_2 \in [9.46, 9.5]$. Sur la figure *fig.27*, nous représentons les cartes de diffusion et les fréquences (g, ν) , issues des intégrations de $\mathcal{D}_{0.045}$ pour les valeurs initiales de a_2 suivantes : 9.4533, 9.4566, 9.4600, 9.4616, 9.4666, 9.4733. Ces figures sont désignées par des lettres et rangées par ordre alphabétique pour des valeurs croissantes de a_2 , en minuscule pour les cartes de diffusion et en majuscule pour les cartes en fréquences. La première de ces figures, désignée par la lettre *a*, est proche de la configuration stable que nous avons décrite au paragraphe 5.2.2. Les mêmes résonances séculaires apparaissent quasiment au même endroit que sur la carte de diffusion de la figure *fig.21*. Comme on le voit sur la fenêtre du bas de la figure *fig.26*, pour cette valeur de a_2 , la courbe représentant $-1/(3n_2)\nu_{2,5}^{1,2}$ n'est pas encore entrée dans l'intervalle des valeurs de ν/n_2 . Néanmoins, cette prédiction de la *Famille II* néglige les termes de droite de la relation 5.1. Avec cette méthode, nous localisons le mieux les résonances d'ordre minimal, qui sont aussi celles qui déstabilisent le plus les troyens. Des résonances d'ordres élevés peuvent donc agir au voisinage des domaines où nous prédisons leur apparition. C'est le cas sur la figure *fig.27.a*, où des éléments de la *Famille II* d'ordres élevés commencent à apparaître et augmentent l'indice de diffusion de particules dont les conditions initiales sont regroupées autour de courbes encerclant le point équilatéral. Ces courbes sont schématisées sur la partie droite de la figure *fig.22*. Sur la carte de diffusion *fig.27.a*, elles apparaissent en bleu clair et intersectent l'axe $I = I_2$ pour des valeurs de a_2 appartenant à l'intervalle $[9.465, 9.48]$. Le domaine des fréquences (g, ν) représenté sur la figure *fig.27.A* est très similaire à celui de la figure *fig.21*.

Sur la figure *fig.27.b*, les éléments de la *Famille II* qui étaient présents sur la figure *fig.27.a* se sont écartés du point équilatéral, tandis que d'autres éléments d'ordres moins élevés apparaissent au centre de la zone de stabilité. Les résonances de la *Famille II* et

de la *Famille III* se recouvrent et contribuent à éjecter des particules, créant une lacune autour de l'intervalle $a \in [9.48, 9.55]$. Les particules des régions où agissaient les résonances séculaires sont éjectées. Les bords du domaine des fréquences (g, ν) de la figure *fig.27.B* gardent la même allure. De manière plus globale, les domaines des fréquences de ces 6 configurations planétaires apparaissent comme des portions du domaine représenté sur la figure *fig.27.B*. Ce domaine est sculpté par les résonances de la *Famille II*.

La configuration la plus instable est atteinte pour $a_2 \simeq 9.46$, pour laquelle $\nu_0 \simeq -1/3\nu_{2,5}^{1,2}$. Par conséquent, les éléments de plus bas ordres agissent proches du centre de la zone de stabilité. Cette situation est représentée sur les figures désignées par la lettre *c* où la zone de stabilité apparaît coupée en deux par la *Famille II*. Deux îlots de particules stables subsistent, l'un entourant le point équilatéral, et l'autre s'en écartant de 0.12 UA. Cette configuration est à rapprocher de la zone de stabilité de la configuration actuelle (voir *fig.20*) où des éléments de la *Famille II* agissent également proche du point équilatéral. Ces situations sont donc très semblables, seul l'ordre de la sous-famille en action diffère, ce qui est lié au fait que, dans la configuration actuelle, la *Famille II* éjecte les particules proche du point équilatéral alors que ce n'est pas le cas ici. Lorsque a_2 augmente, les résonances d'ordres minimaux de la *Famille II* balayent le domaine des fréquences (g, ν) de haut en bas. En conséquence, les bords du domaine où les résonances de la *Famille II* éjectent des particules de la zone de stabilité suivent l'évolution décrite par les courbes de niveau $\nu = D_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sur le schéma de droite de la figure *fig.22*. Quand a_2 augmente, elles se décalent vers l'extérieur de la zone de stabilité et, par conséquent, l'îlot de stabilité entourant le point équilatéral grandit progressivement tandis que le deuxième îlot disparaît peu à peu. C'est ce qui apparaît sur les figures désignées par les lettres *d*, *e* et *f*.

Les bornes du domaine Θ_e changeant peu avec l'excentricité (voir *fig.25*), les mêmes résonances de la *Famille II* devraient donc apparaître au même endroit dans tous les domaines Θ_e indépendamment du paramètre e . Les résonances séculaire du type $g = cte$ ont un effet plus important sur les particules ayant une excentricité plus élevée. D'autre part, les relations de résonances définissant la *Famille II* peuvent impliquer la fréquence g associée à la précession du périhélie. Il est donc probable que la largeur de ces résonances augmente avec l'excentricité, favorisant les recouvrements des éléments des familles *II* et *III*. Le passage de la *Famille II* devrait ainsi déstabiliser plus fortement les domaines \mathcal{D}_e pour de plus grandes excentricités. Nous avons intégré le domaine $\mathcal{D}_{0,075}$ pour les mêmes valeurs initiales du demi-grand axe de Saturne que $\mathcal{D}_{0,045}$. Les cartes de diffusion et les cartes en fréquence de l'espace (g, ν) sont représentées sur la figure *fig.28*. Les lettres apposées sur chacune des fenêtres de cette figure font référence aux mêmes configurations planétaires que celles de la figure *fig.27*.

La fréquence maximale de $\pi_\nu(\Theta_{0,075})$ est supérieure de 1.3 à celle de $\pi_\nu(\Theta_{0,045})$. Ces domaines sont donc très proches ; par conséquent, les résonances en action sur chacune des figures de la *fig.28* apparaissent au même endroit que celles agissant sur les figures de la *fig.27*. Sur la figure *fig.28.a*, les résonances d'ordre élevé qui apparaissaient en bleu clair au centre de la zone de stabilité de la figure *fig.27.a*, suffisent à éjecter les particules

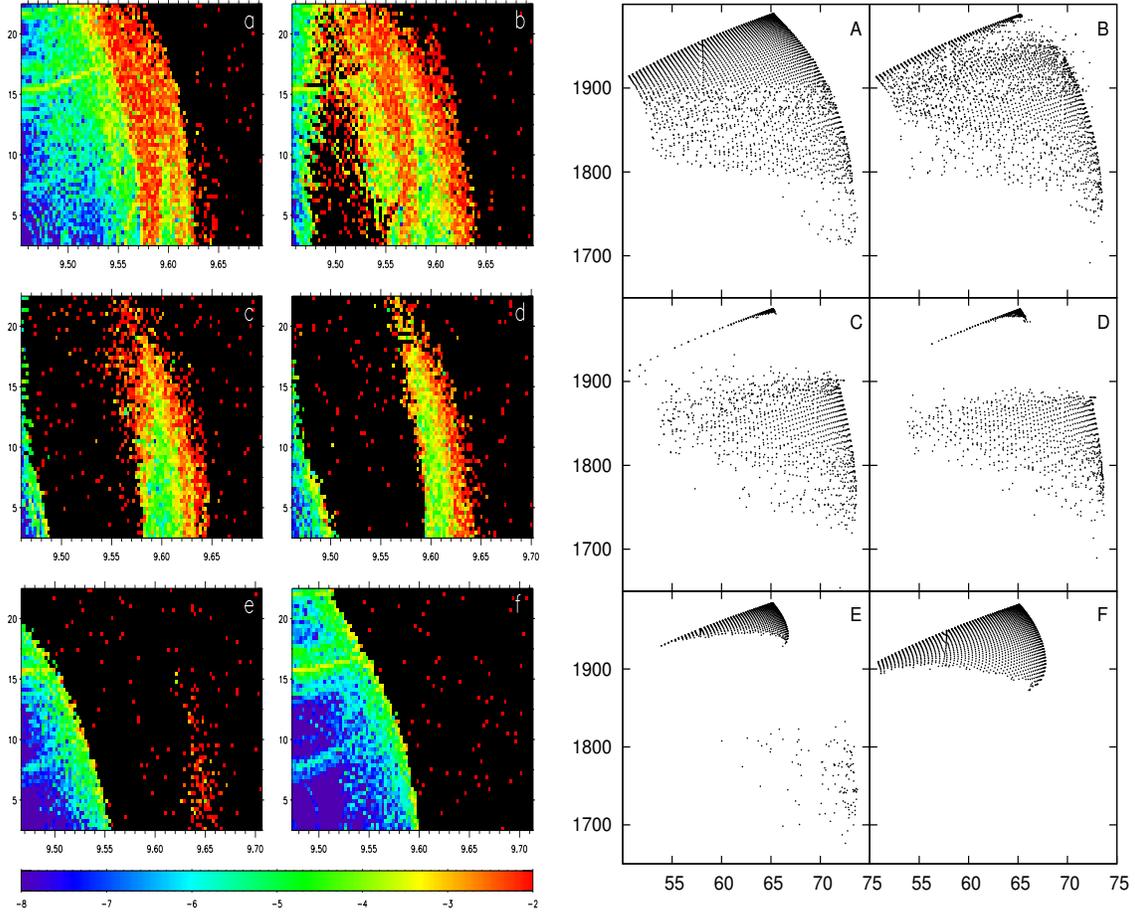


FIG. 27 – Cette figure est constituée de deux blocs, sur celui de gauche apparaissent les cartes de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0.045}$, et sur celui de droite la projection de $\Theta_{0.045}$ sur le plan (g, ν) . Les figures désignées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* correspondent respectivement aux valeurs initiales de a_2 suivantes : 9.4533, 9.4566, 9.4600, 9.4616, 9.4666, 9.4733. Les cartes en fréquences correspondantes sont désignées par des lettres majuscules.

du centre de la zone de stabilité. Des particules instables subsistent aux alentours de $a \simeq 9.60$. Ces deux régions, où il reste des particules, se rejoignent à haute inclinaison, formant une arche. Sur les figures *fig.28.b*, *fig.28.c* et *fig.28.d*, de plus en plus de résonances de la *Famille II* occupent l'espace des fréquences $\Theta_{0.075}$, ejectant les particules du bras droit de la zone de stabilité. Les figures *fig.28.e* et *fig.28.f* sont très semblables à celles de la figure *fig.27*. Ces résultats confirment que les éléments de la *Famille II* agissent en même temps dans les domaines \mathcal{D}_e , pour différentes valeurs de e , et déstabilisent plus les particules les plus excentriques.

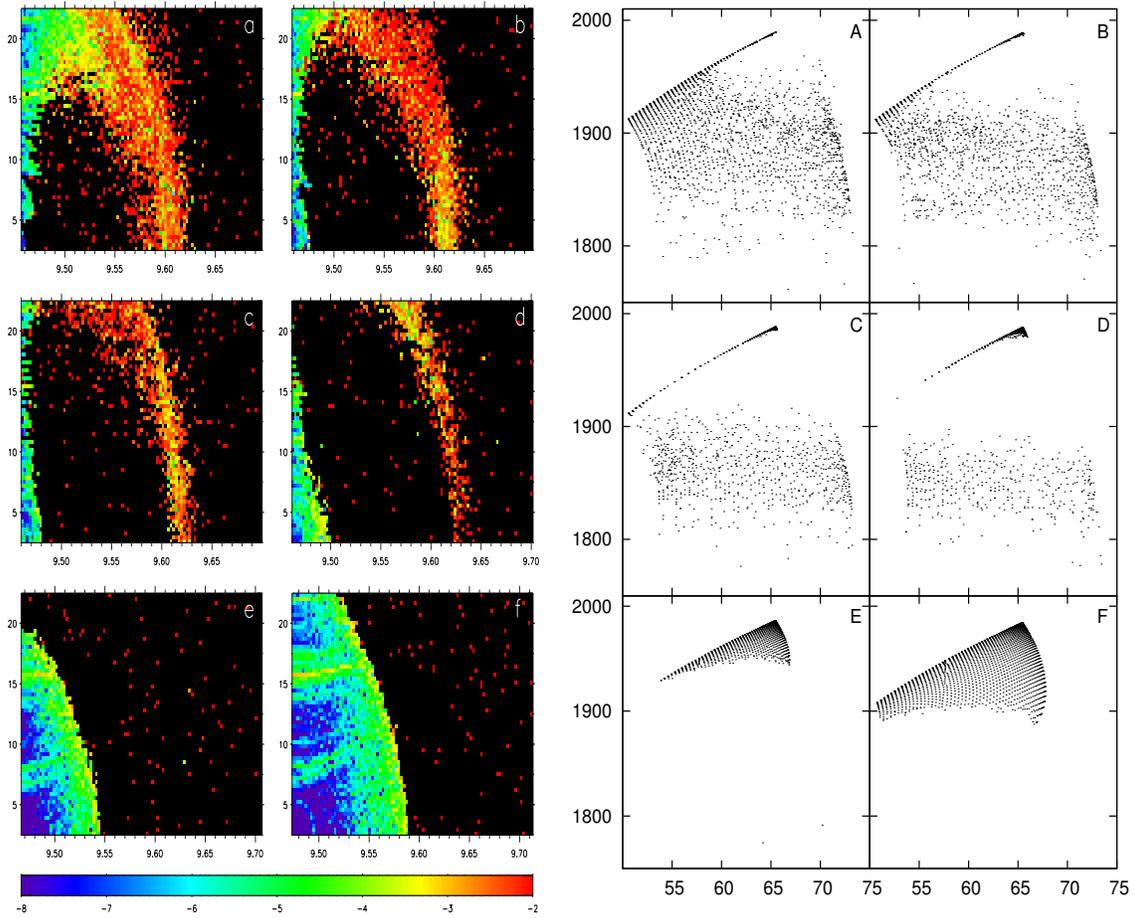


FIG. 28 – Cette figure est la même que la figure *fig.29*, mais pour une excentricité initiale des troyens plus grande, $e = 0.075$.

5.3.2 Analyse de la *Famille III*

Dans le cas des troyens de Jupiter, nous avons vu que les résonances de la *Famille III* du type $g = f(g_1, g_2, s_2)$ jouent un rôle négligeable comparé à ceux des *Famille IV* et *II*. Ces résonances séculaires apparaissent très proches de la RMM 1 : 2 et seulement pour des conditions initiales de a_2 appartenant à de très petits intervalles. La fréquence g des troyens de Saturne étant plus petite que celle des troyens de Jupiter, elle est plus proche des fréquences séculaires planétaires. C'est pourquoi les résonances de la *Famille III* ont un effet plus important sur la dynamique des troyens de Saturne, notamment celles vérifiant des relations du type :

$$kg = k_1g_1 + k_2g_2 + l_2s_2, \quad (5.3)$$

avec k, k_1, k_2 , et l_2 , des entiers relatifs vérifiant la relation de d'Alembert $k_1 + k_2 + l_2 = k$. Notons $\mathbf{k} = (k, k_1, k_2, l_2)$, et $C_{\mathbf{k}} = (k_1g_1 + k_2g_2 + l_2s_2)/k$. Dans notre modèle, $C_{\mathbf{k}}$ dépend de la valeur initiale de a_2 . Les résonances définies par la relation (5.3) devraient agir sur les troyens de Saturne lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$C_{\mathbf{k}}(a_2) \in \pi_g \Theta_e. \quad (5.4)$$

Afin de visualiser pour quelles valeurs de a_2 des relations de ce type sont vérifiées, nous avons représenté, sur la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, l'évolution des bornes du domaine $\pi_g(\Theta_{0.045})$ et de g_{L_4} en rouge. Ces bornes ont été étudiées au paragraphe 5.2.3. Les autres courbes de la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, représentent des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des fréquences séculaires. Ces courbes sont désignées par les indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, et sont les représentations des fonctions qui, aux valeurs initiales de $a_2 \in [8.3, 9.625]$, associent respectivement :

$$\begin{aligned} C_{(2,1,1,0)}(a_2) &= \frac{g_1 + g_2}{2}, \\ C_{(1,0,1,0)}(a_2) &= g_2, \\ C_{(2,-1,3,0)}(a_2) &= \frac{3g_2 - g_1}{2}, \\ C_{(1,-1,2,0)}(a_2) &= 2g_2 - g_1, \\ C_{(1,1,1,-1)}(a_2) &= g_2 + g_1 - s_2, \\ C_{(1,-2,3,0)}(a_2) &= 3g_2 - 2g_1. \end{aligned}$$

Nous avons représenté les fonctions n'impliquant que les fréquences g_1 et g_2 en mauve, et celle impliquant s_2 en bleu clair. Les fréquences séculaires g_1 , g_2 et s_2 ne sont pas définies à l'intérieur des RMM, c'est pourquoi des lacunes apparaissent sur ces courbes aux voisinages des RMM Jupiter-Saturne 3 : 7 et 2 : 5. Sur les courbes 3 et 5, une irrégularité apparaît vers $a_2 \simeq 8.98$, marquant le passage de la RMM 4 : 9. Lorsque les courbes indicées de 0 à 5 pénètrent dans l'aire comprise entre les courbes rouges du haut et du bas, il existe des troyens dont la fréquence de précession du périhélie vérifie $g = C_{\mathbf{k}}$. Par conséquent l'élément de la *Famille III* défini par cette relation apparaît dans $\Theta_{0.045}$. Ces résonances déstabilisent le plus les troyens lorsque la courbe représentative de $C_{\mathbf{k}}$ est proche de la courbe représentative de g_{L_4} . Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, les valeurs absolues des fréquences séculaires des planètes augmentent de manière significative lorsqu'on se rapproche des RMM. En particulier, g_2 subit des variations importantes au voisinage de la RMM. Il en résulte que les résonances séculaires $g = (g_1 + g_2)/2$, $g = g_2$ et $g = (3g_2 - g_1)/2$, traversent l'espace des fréquences $\Theta_{0.045}$ respectivement pour $a_2 \in [8.425, 8.44]$, $a_2 \in [8.475, 8.515]$, et $[8.53, 8.63]$. Des recouvrements entre les résonances séculaires et les éléments de la *Famille II* contribuent à prolonger le plateau d'instabilité de la RMM 1 : 2. De même, lorsque a_2 augmente en se rapprochant de la RMM 2 : 5, les combinaisons linéaires des fréquences séculaires subissent des variations importantes. Ainsi les courbes 3 et 4 se rapprochent-elles de g_{L_4} , ce qui signifie que l'influence des résonances $g = 2g_2 - g_1$ et $g = g_2 + g_1 - s_2$ augmente. De manière plus globale, ce mécanisme implique que les éléments de la *Famille III* de faibles ordres balayent l'essaim des troyens proches des RMM. Plus loin des RMM, la valeur absolue des fréquences séculaires des planètes diminue lentement quand le demi-grand axe de Saturne augmente. En conséquence, les courbes 3 et 4 restent plus longtemps entre les bornes de $\pi_g(\Theta_e)$ et les résonances $g = 2g_2 - g_1$ et $g = g_2 + g_1 - s_2$ balayent lentement l'espace des fréquences $\Theta_{0.045}$, respectivement pour $a_2 \in [8.6, 9.2]$ et $a_2 > 8.8$.

La configuration stable étudiée au paragraphe 5.2.2 pour $a_2 \simeq 9.4467$, est proche d'un minimum local de $n_{e_j}^{0.045}$. Nous avons vu au paragraphe 5.2.2, que pour cette configuration des planètes, les troyens de Saturne possèdent une large zone de stabilité où l'effet des résonances séculaires apparaît clairement. Utilisons cette configuration pour vérifier nos prédictions. Pour $a_2 \simeq 9.4467$, nous voyons que les courbes 4 et 5 de la fenêtre du haut de la figure *fig.26* sont entre les courbes rouges représentant les bornes des valeurs atteintes par g . C'est pourquoi les résonances séculaires $g = 2g_2 - g_1$ et $g = g_2 + g_1 - s_2$ apparaissent dans $\Theta_{0.045}$. Les conditions initiales des particules subissant leur influence sont regroupées autour de courbes schématisées sur la partie gauche de la figure *fig.22*. Elles ressemblent à des portions de paraboles, intersectant l'axe des demi-grands axes si $g > g_{L_4}$, et intersectant l'axe des inclinaisons si $g < g_{L_4}$. Ainsi, sur la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, on voit que pour $a_2 \simeq 9.4467$, la courbe 4 est au dessous de la courbe représentative de g_{L_4} . La résonance $g = g_2 + g_1 - s_2$ affecte donc des particules dont les conditions initiales sont regroupées autour d'une courbe ressemblant aux courbes 1 et 2 du schéma de gauche de la figure *fig.22*. Pour $a_2 \simeq 9.4467$, la courbe 5 est au-dessus de la courbe représentative de g_{L_4} . Par conséquent, la résonance $g = 2g_2 - g_1$ affecte des

particules dont les conditions initiales sont regroupées autour d'une courbe ressemblant aux courbes 3 et 4 de ce même schéma. Plus généralement, pour une valeur donnée de a_2 , la position de $C_{\mathbf{k}}(g_1, g_2, g_3)$ par rapport à la courbe représentative de g_{L_4} permet de prédire quels sont les troyens affectés par la résonance $g = C_{\mathbf{k}}$.

Nous allons étudier de manière plus détaillée le passage de la résonance $g = 2g_2 - g_1$ dans l'essaim des troyens. Sur la figure *fig.29*, nous représentons les cartes de diffusion et les cartes en fréquences du domaine $\mathcal{D}_{0,045}$, correspondant aux valeurs initiales de a_2 suivantes : 8.62, 8.633, 8.660, 8.673, 8.686, 8.726. Les cartes de diffusion sont désignées par des lettres minuscules et les cartes en fréquences par des lettres majuscules. Elles sont rangées par ordre alphabétique pour des valeurs initiales de a_2 croissantes. Sur les figures représentant le domaine (g, ν) , nous localisons cette résonance séculaire en représentant en pointillé une portion de la droite verticale d'équation $g = 2g_2 - g_1$. Lorsque a_2 augmente, cette droite balaye le plan (g, ν) de droite à gauche, tandis que le domaine des fréquences est décalé vers la gauche beaucoup plus lentement. Sur les deux premières figures, cette droite se rapproche du point équilatéral. Dans l'espace des conditions initiales, cette résonance déstabilise les particules situées autour de courbes similaires aux courbes 1 et 2 du schéma de gauche de la figure *fig.22*, intersectant l'axe des demi-grands axes vers $a \simeq 8.665$ sur la figure *fig.29.a* et vers $a \simeq 8.645$ sur la figure *fig.29.b*. Sur la figure *fig.29.c*, cette résonance est très proche du point de Lagrange et la quasi totalité des particules sont éjectées. Dans cette configuration, la *Famille III* n'est pas la seule cause d'instabilité car les éléments de la sous-famille de la *Famille II* associée à $(\alpha, \beta, i, q) = (1, 2, 1, 3)$ agissent proche du point équilatéral. Sur la figure suivante, *fig.29.d*, la résonance $g = 2g_2 - g_1$ a franchi le point équilatéral et ejecte des particules regroupées sur une courbe dont la forme est schématisée par la courbe 3 de la partie gauche de la figure *fig.22*. Quelques éléments de la *Famille II* apparaissent dans le domaine des fréquences (g, ν) représenté sur la figure *fig.29.D*. Nous avons tracé trois portions de droites horizontales d'équation $\nu = ((n_1 - 2n_2) + kg_2 - (k - 1)g_1)/3$ pour $k \in \{-4, -3, -2, -1\}$ apparaissant de bas en haut pour des valeurs de k croissantes. Des points s'accumulent au niveau des trois premières de ces droites. Les particules correspondantes sont fortement déstabilisées par ces résonances de la *Famille II*, ainsi que par la proximité de la résonance séculaire ; elles ont pour la plupart un indice de diffusion codé en rouge sur la figure *fig.29.d*, et son regroupées entre le point équilatéral et la zone de particules éjectées par la résonance séculaire. Cette situation a les deux caractéristiques principales de la situation actuelle : des éléments de la *Famille II* sont proches du point équilatéral, et une résonance séculaire agit sur les particules les plus inclinées. Lorsque a_2 parcourt l'intervalle $[8.3, 9.625]$, cette situation apparaît fréquemment dans l'essaim des troyens. En effet, sur la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, on voit qu'il y a presque toujours des résonances du type $g = cte$ dans $\pi_g(\theta_{0,045})$. Le passage plus rapide des éléments de la *Famille II* provoque donc des situations similaires, où le recouvrement des familles *II* et *III* déstabilise les troyens.

Lorsque a_2 augmente, la résonance séculaire $g = 2g_2 - g_1$ qui apparaît sur les figures *fig.29.E* et *fig.29.F* se déplace vers la gauche dans le plan (g, ν) . Elle s'éloigne du point équilatéral vers les troyens plus inclinés. Sur les figures *fig.29.e* et *fig.29.f*, on voit que

la zone des troyens éjectés par cette résonance se déplace plus lentement. Sur la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, on voit que lorsque a_2 continue d'augmenter, la courbe 3 représentant $g = 2g_2 - g_1$ descend de plus en plus lentement dans $\pi_g(\Theta_{0.045})$ pour en sortir proche de la RMM 3 : 7. Ce qui signifie que cette résonance touche des troyens de plus en plus inclinés pour $a_2 \in [8.66, 9.2]$. Il est curieux de constater que l'influence de cette résonance réapparaît proche de la RMM 2 : 5 pour $a_2 \geq 9.57$, touchant des troyens de moins en moins inclinés lorsque a_2 augmente.

Le balayage du domaine Θ_e par ces résonances, pour d'autres valeurs initiales de e , est très similaire. Afin de confirmer cette hypothèse énoncée au paragraphe précédent, nous avons intégré le domaine $\mathcal{D}_{0.075}$ pour les mêmes valeurs initiales de a_2 que pour la figure *fig.29*. Nous présentons les résultats issus de ces intégrations sur la figure *fig.30*. L'évolution de la zone de stabilité se déroule en suivant le même scénario. Sur chacune de ces figures, les résonances agissent de la même manière que sur la figure *fig.29*, l'instabilité qu'elles génèrent semble plus forte. Ceci apparaît clairement sur la figure *fig.30.d*, où la plupart des particules ont un indice de diffusion supérieur à 10^{-3} , alors qu'il subsistait une île de particules ayant un indice de l'ordre de 10^{-4} sur la figure *fig.29.d*.

De manière plus générale, la plupart des résonances séculaires suivent la même évolution que la résonance $g = 2g_2 - g_1$. Lorsque a_2 augmente, éloignant le couple Jupiter-Saturne de la RMM 1 : 2, elles entrent rapidement dans l'essaim des troyens. Les courbes $C_{\mathbf{k}}(a_2)$ étant convexes sur l'intervalle $[8.3, 9.625]$, la vitesse avec laquelle ces résonances balayent l'essaim des troyens ralentit. Lors d'une migration, ces résonances agissent donc d'autant plus longtemps sur les troyens que leur inclinaison est grande. Ce processus est inversé lorsque a_2 augmente en se rapprochant d'une RMM, comme c'est le cas proche de la RMM 2 : 5. Nous avons centré notre analyse sur les résonances du type $g = cte$ qui sont les résonances séculaires jouant le rôle le plus important dans la dynamique des troyens. Les résonances séculaires du type $s = cte$ peuvent aussi être localisées en utilisant une méthode analogue, utilisant cette fois-ci les bornes de $\pi_s(\Theta_e)$ décrites au paragraphe 5.2.3. En particulier, ceci permet de prédire que la résonance séculaire $s = 2g_1 - g_2$, est présente pour $a_2 \in [8.58; 9.6]$. Elle est présente dans la configuration stable décrite au paragraphe 5.2.2, et devrait également contribuer à déstabiliser des particules dans la configuration actuelle. Néanmoins, l'effet des résonances du type $g = cte$ semble prédominer.

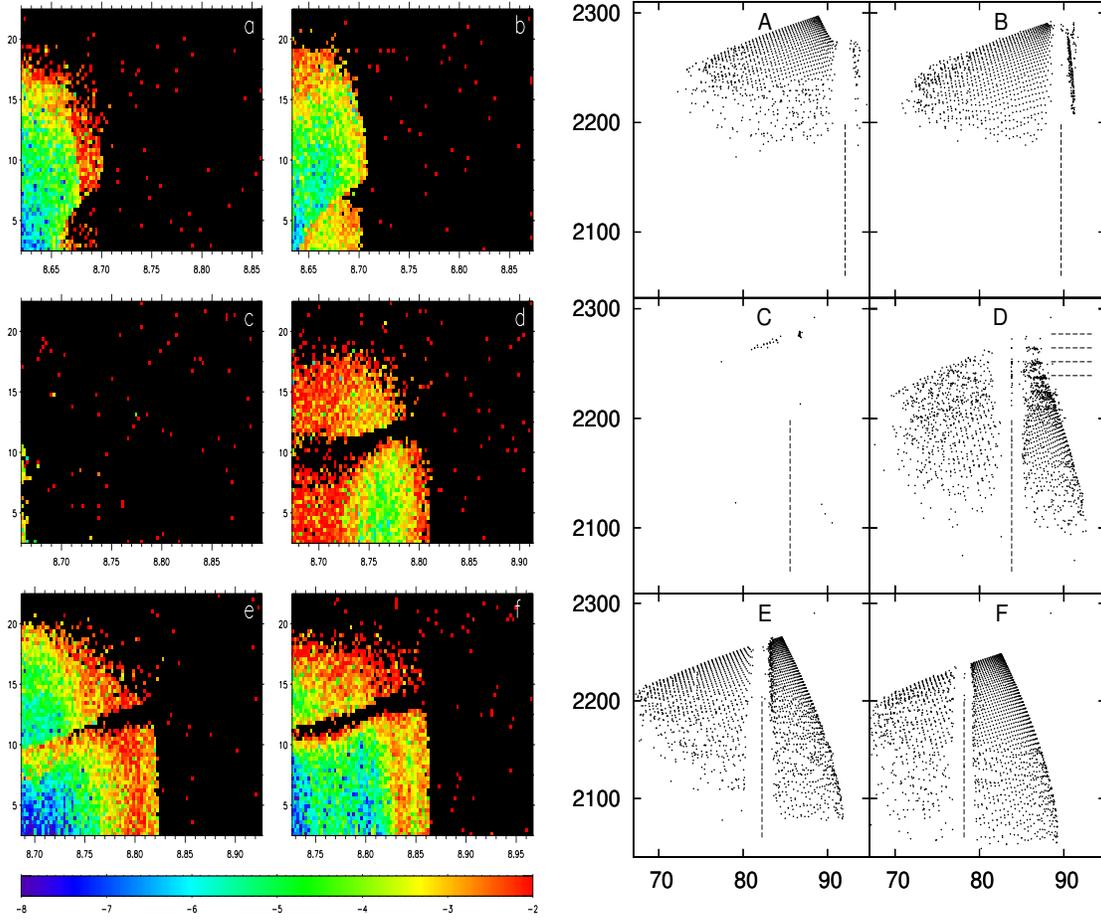


FIG. 29 – Cette figure est constituée de deux blocs, sur celui de gauche apparaissent les cartes de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0.045}$, et sur celui de droite la projection de $\Theta_{0.045}$ sur le plan (g, ν) . Les figures désignées par les lettres a, b, c, d, e, f correspondent respectivement aux valeurs initiales de a_2 suivantes : 8.62, 8.633, 8.660, 8.673, 8.686, 8.726. Les cartes en fréquences correspondantes sont désignées par des lettres majuscules. Sur chacune des figures A, B, C, D, E, F nous avons tracé la droite d'équation $g = 2g_2 - g_1$. Sur la figure D , les portions de droites horizontales ont pour équation, $3\nu = (n_1 - 2n_2 + kg_2 - (k-1)g_1)/3$ pour $k \in \{-4, -3, -2, -1\}$. Elles sont parcourues de bas en haut pour des valeurs de k croissantes.

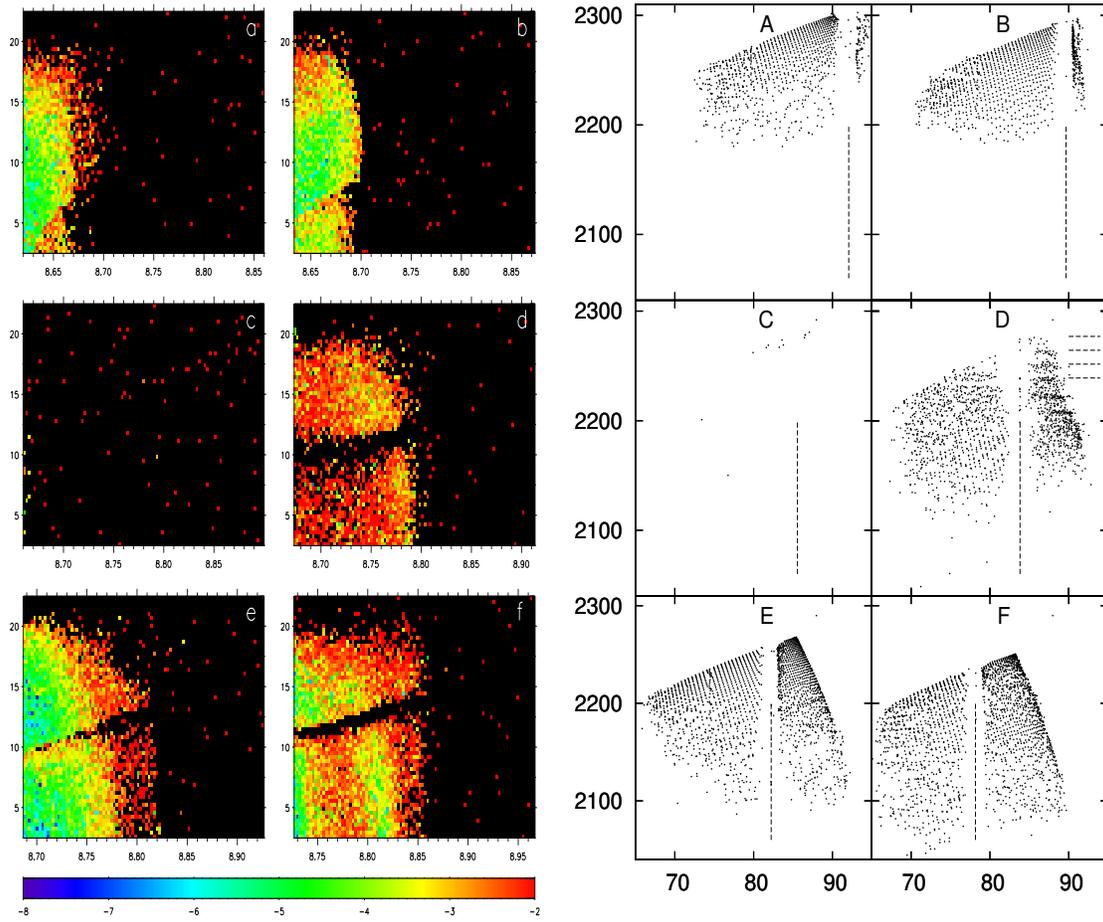


FIG. 30 – Cette figure est la même que la figure *fig.29*, mais pour une excentricité initiale des troyens plus grande, $e = 0.075$.

5.3.3 Analyse de configurations proches de la situation actuelle

Malgré la perturbation forte de Jupiter, nous avons vu que les changements de forme de Θ_e en fonction de la valeur initiale a_2 , sont modélisables par une simple translation (5.2.3). Ceci nous a permis de schématiser de manière globale le balayage de \mathcal{D}_e par les familles *II* et *III*. Cette analyse permet de comprendre le passage de ces résonances dans la plupart des cas. Nous présentons ici des configurations pour lesquelles la proximité de la RMM 2 : 5 déforme l'espace des fréquences Θ_e de manière plus complexe. Ce phénomène apparaît proche de la situation actuelle ($a_2 \simeq 9.5855$), pour des valeurs de a_2 appartenant à l'intervalle $[9.56, 9.58]$. D'après les prédictions réalisées par la *fig.26*, pour ces valeurs de a_2 , les familles *II* et *III* devraient apparaître dans Θ_e . En effet, pour ces valeurs de a_2 , la courbe $-\nu_{2,5}^{1,2}$ traverse $\pi_\nu(\Theta_{0.045})$ indiquant la proximité de la sous-famille associée à $(\alpha, \beta, i, q) = (2, 5, -1, 1)$. Le passage de cette sous-famille provoque le dernier pic d'instabilité précédant la configuration actuelle, visible sur la courbe représentative de $n_{ej}^{0.045}$ pour $a_2 \in [9.56, 9.58]$. Remarquons que cette sous-famille contient des éléments ayant des ordres plus faibles que toutes les autres sous-familles de la *Famille II* associées à la RMM 2 : 5. Par conséquent il est logique que ce soit celle qui déstabilise le plus les troyens de Saturne. Sur la fenêtre du haut de la figure *fig.26*, pour $a_2 \in [9.56, 9.58]$, trois courbes sont proches de $\pi_g(\Theta_{0.045})$. Ceci indique la présence des résonances séculaires $g = 3g_2 - 2g_1$, $g = g_1 + g_2 - s_2$, et $g = 2g_2 - g_1$.

Afin d'étudier l'influence de ces résonances sur les troyens, nous avons représenté, sur la figure *fig.31*, les résultats des intégrations de $\mathcal{D}_{0.045}$ pour les 8 valeurs initiales de a_2 suivantes : 9.560, 9.563, 9.565, 9.567, 9.570, 9.573, 9.577, 9.580. Les cartes de diffusions sont désignées par des lettres minuscules et les cartes en fréquences par des lettres majuscules. Elles sont rangées par ordre alphabétique pour des valeurs initiales de a_2 croissantes. Sur les figures *fig.31.a*, *fig.31.b*, et *fig.31.c*, une bande rouge verticale apparaît proche du point équilatéral. Ces taches correspondent à des particules dont nous n'avons pas trouvé la fréquence de libration. Cette lacune est due au fait que, pour minimiser le temps de calcul, nous ne calculons que les 5 premiers termes du développement en fréquence de $ae^{i\lambda}$ sur les deux intervalles de temps $[0, 5Ma]$ et $[5Ma, 10Ma]$. Ces taches correspondent à des particules pour lesquelles ν ne fait pas partie des 5 premières fréquences du développement. Nous n'avons donc pas pu calculer l'indice de diffusion de ces particules. Néanmoins, ces cas sont isolés et ne gênent pas l'analyse globale de ces figures. Sur la figure *fig.31.A*, nous observons un phénomène que nous n'avons pas encore rencontré : la forme globale du domaine des fréquences $\Theta_{0.045}$ n'est plus la même. La forme pyramidale rencontrée dans la plupart des autres configurations semble être tordue en son sommet. Cette distorsion de l'espace des fréquences est probablement causée par le recouvrement des résonances en moyens mouvements troyen-Saturne 1 : 1, et Jupiter-troyen 2 : 5. La proximité de la RMM 2 : 5 semble avoir pour effet d'augmenter la fréquence g des troyens qui sont proches du point équilatéral. Cette augmentation est d'autant plus grande que les troyens sont proches du point équilatéral. La courbe des fréquences suivant le bord droit de cette

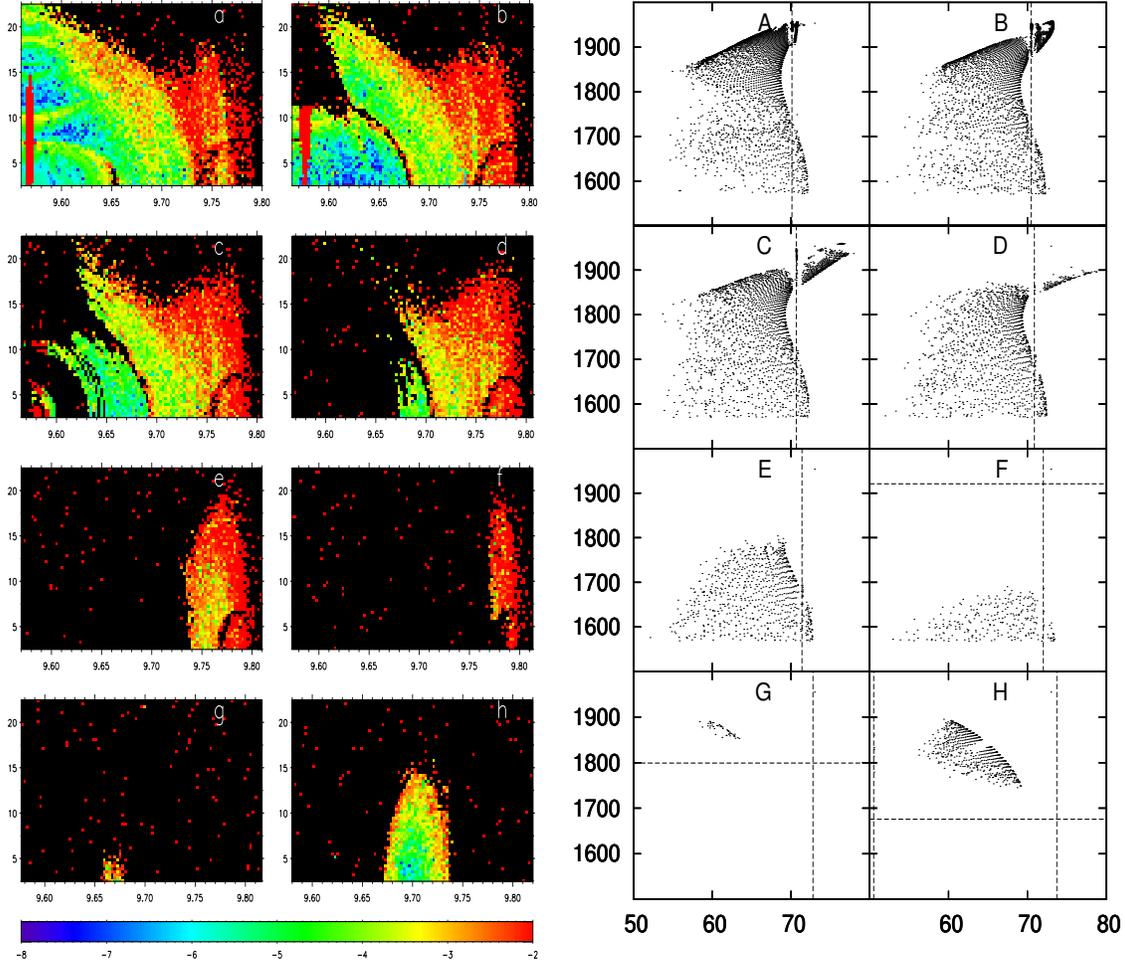


FIG. 31 – Cette figure est constituée de deux blocs, sur celui de gauche apparaissent les cartes de diffusion du domaine $\mathcal{D}_{0,045}$, et sur celui de droite la projection de $\Theta_{0,045}$ sur le plan (g, ν) . Les figures désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h correspondent respectivement aux valeurs initiales de a_2 suivantes : 9.56, 9.563, 9.565, 9.567, 9.57, 9.573, 9.577, 9.58. Les cartes en fréquence sont désignées par des lettres majuscules. Les droites verticales représentées sur les figures A, B, C, D, E, F, G, H entre $g = 70$ et $g = 80$ correspondent à la résonance d'équation $g = 3g_2 - 2g_1$. Sur la figure G , proche de l'axe $g = 50$, nous avons représenté la droite d'équation $g = 2g_2 - g_1$. Les droites horizontales apparaissant sur les figures F, G et H ont pour équation $\nu = -\nu_{2,5}^{1,2}$.

pyramide tordue correspond aux conditions initiales $(a, I) \in [a_2, a_2 + 0.24] \times \{I_2\}$. Cette distorsion a un effet singulier : la résonance d'équation $g = 3g_2 - 2g_1$ coupe deux fois ce bord. Cette résonance est matérialisée par la droite verticale tracée sur la figure *fig.31.A*. Les particules subissant l'effet de cette résonance sont donc séparées en deux parties, l'une proche du centre de la zone de stabilité et l'autre plus éloignée. La première apparaît sur la figure *fig.31.a*, et ressemble à une arche qui encercle le point équilatéral. Cette arche est jaune et intersecte l'axe $I = I_2$ vers $a = 9.65$. La deuxième éjecte bon nombre de particules sur une courbe du même type que la courbe 1 de la partie gauche de la figure *fig.22*, intersectant l'axe des demi-grands axes vers $a = 9.74$. L'espace des fréquences est moins déformé loin du centre de la zone de stabilité. En conséquence, l'évolution de cette résonance sur la portion éloignée du point équilatéral, suit le scénario décrit au paragraphe 5.3.2. Lorsque a_2 augmente, cette portion est lentement décalée vers les plus grands demi-grands axes, sur les figures *fig.31.B, C,D,E,F*. Par contre, proches du point équilatéral, les fréquences g des troyens augmentent de manière significative. Lorsque a_2 augmente, cette augmentation est plus grande que la translation de la droite $g = 3g_2 - 2g_1$. Il en résulte que l'arche de particules subissant l'effet de la résonance $g = 3g_2 - 2g_1$ s'éloigne du point équilatéral. Elle intersecte l'axe des demi-grands axes pour $a \simeq 9.68$ sur la figure *fig.31.b*, pour $a \simeq 9.69$ sur la figure *fig.31.c*, et pour $a \simeq 9.71$ sur la figure *fig.31.d*. Cette résonance séculaire s'éloigne des fréquences des troyens sur les deux dernières figures, alors que la résonance $g = 2g_2 - g_1$ s'en rapproche. La droite d'équation $g = 2g_2 - g_1$ est représentée par une droite verticale proche de $g = 51$ sur la figure *fig.31.h*. Quand a_2 augmente jusqu'à atteindre sa valeur actuelle, l'inclinaison des troyens affectés par cette résonance, diminue progressivement pour atteindre 12° dans la configuration actuelle. A l'effet de ces résonances vient s'ajouter celui d'une autre résonance séculaire : $s = 2g_1 - g_2$. Les particules perturbées par cette résonance sont regroupées autour d'une courbe du même type que la numéro 4 du schéma de gauche de la figure *fig.22*, intersectant l'axe $a = a_2$ vers $I = 10$. Lorsque a_2 augmente, la résonance $s = 2g_1 - g_2$ agit sur des troyens moins inclinés, et les résonances $s = 2g_1 - g_2$ et $g = 2g_2 - g_1$ se recouvrent, contribuant à déstabiliser les particules des figures *fig.31.b, c, d, e*. Les droites horizontales représentées sur les figures *fig.31.F, G, H*, représentent la droite d'équation $\nu = -\nu_{2,5}^{1,2}$. Cette droite indique autour de quelles valeurs de ν sont regroupés les éléments de la sous-famille de la *Famille II* pour lesquels $(\alpha, \beta, i, q) = (2, 5, -1, 1)$ dans la relation (3.6). C'est donc sur les figures *fig.31.F* et *fig.31.G* que la *Famille II* est le plus proches du point équilatéral. Sur les figures *fig.31.f*, et *g*, on voit que presque tous les Troyens sont éjectés ou fortement déstabilisés. Le rétrécissement de la zone de stabilité sur les figures *fig.31.e* et *fig.31.f*, peut être expliqué par l'entrée de plus en plus d'éléments de la *Famille II* dans $\Theta_{0,045}$ qui s'éloignent ensuite du point équilatéral quand a_2 augmente. Lorsque $-\nu_{2,5}^{1,2}$ diminue pour atteindre 1800 sur la figure *fig.31.G*, une nouvelle zone de stabilité commence à poindre vers $a \simeq 9.67$. Cette zone grandit sur la figure *fig.31.h*, se rapprochant de la forme de la zone de stabilité des troyens de la configuration actuelle.

Cette analyse permet de mieux comprendre la dynamique des troyens avec des configurations planétaires proches de la configuration actuelle. La situation semble complexe

car au moins trois résonances séculaires et une sous-famille de la *Famille II* perturbent fortement la dynamique des troyens. L'évolution de la zone de stabilité laisse penser que lors d'une migration planétaire (lente augmentation de a_2), une population de troyens a peu de chances de survivre.

5.4 Conclusion

Lors de la migration planétaire, la taille et la forme de la zone de stabilité des troyens de Saturne subit des variations fréquentes et importantes. Ces changements radicaux sont dus aux passages d'éléments des familles *II* et *III* dans l'espace des fréquences des troyens. Les éléments de la *Famille III* définis par des équations du type $g = C_{\mathbf{k}}$ sont présents tout le long de la migration. Lorsque a_2 augmente, ces résonances traversent lentement l'espace des troyens, tandis que les éléments de la *Famille II* le parcourent plus rapidement. Ces deux mécanismes déstabilisant les troyens de Saturne apparaissent simultanément pour de nombreuses configurations planétaires, et ce n'est pas un hasard si on les retrouve dans la situation actuelle. Nous avons étudié séparément l'influence de ces deux familles, ceci nous a permis de schématiser la manière dont les éléments de ces 2 familles balayent les troyens. Cette étude permet aussi de mieux comprendre comment ces résonances tronquent la zone de stabilité des troyens dans la configuration actuelle. Ainsi, dans la configuration actuelle, notre modèle met en avant la présence d'une autre résonance séculaire contribuant à déstabiliser les troyens de Saturne, qui n'avait pas encore été identifiée, sans doute en raison de son faible impacte, la résonance $g = g_2 + g_1 - s_2$. Le modèle à un paramètre que nous avons mis en place présente donc un double intérêt. D'une part, il permet d'analyser les familles de résonances qui balayent l'essaim des troyens lors de la migration planétaire, dans le cadre des invariants adiabatiques. D'autre part, l'étude du modèle à un paramètre, permet de dissocier l'effet des différentes structures résonantes, et de les analyser séparément. De même que pour de nombreux problèmes mathématiques, l'étude asymptotique de l'évolution d'un système en fonction d'un paramètre, permet de mieux le comprendre pour une valeur donnée de ce paramètre. Dans cette perspective, nous avons analysé l'évolution de la dynamique des troyens pour des configurations planétaires se rapprochant de la situation actuelle. Dans ce voisinage, l'espace des fréquences des troyens subit des distorsions importantes, rendant la dynamique des troyens singulièrement compliquée.

A l'issue de ce travail, nous sommes en mesure de tirer deux conclusions importantes sur l'évolution d'une hypothétique population de troyens de Saturne lors de la migration planétaire. Premièrement, nous avons montré qu'il existe des configurations planétaires pour lesquelles les troyens de Saturne sont remarquablement stables, ce qui prouve qu'une population conséquente de troyens de Saturne a pu exister pendant la migration planétaire. Ce résultat est bien sûr nuancé par le fait que dans notre modèle, nous ne considérons pas l'influence d'Uranus et de Neptune. Néanmoins, l'influence de Jupiter étant de loin la plus forte, l'introduction de ces planètes ne devrait pas changer ce résultat.

Deuxièmement, nous avons vu que peu avant d'atteindre la situation actuelle, les troyens de Saturne ont été très fortement déstabilisés. De plus, les planètes Uranus et Neptune doivent contribuer à augmenter cette instabilité. Il est donc très improbable qu'une population de troyens ait pu survivre à la migration planétaire. Si d'autres travaux avaient déjà montré qu'il était improbable qu'une population importante de troyens de Saturne ait survécu pendant plusieurs milliards d'années, notre résultat est plus fort, puisque nous montrons qu'il est fort probable que cette zone du système solaire ait été désertée par les astéroïdes avant la fin de la migration planétaire.

Le modèle mis en place dans ce chapitre généralise celui du chapitre précédent, dans la mesure où il prend en compte le déplacement des troyens et de leurs planètes co-orbitales. Nous sommes désormais capables de l'appliquer à n'importe quelle population de troyens, pour un modèle de migration planétaire quelconque, à condition que les planètes migrent suffisamment lentement. La suite logique de ce travail serait d'appliquer nos méthodes d'analyse aux populations de troyens d'Uranus et de Neptune. Nous n'avons pas eu le temps de poursuivre ce travail dans le cadre de cette thèse. Nous avons vu que la *Famille II* agit de manière très générale aux voisinages des points équilatéraux d'un système planétaire. Le chapitre suivant a pour but d'illustrer une fois de plus l'importance de cette famille sur l'évolution de la dynamique des troyens. Par manque de temps, nous nous sommes contentés de mettre en avant la présence de cette famille, aux voisinages des points équilatéraux de Neptune dans la configuration actuelle.

Chapitre 6

Les troyens de Neptune dans la configuration planétaire actuelle

Avant 2001, on n'avait jamais observé d'astéroïdes au voisinage des points équilatéraux de Neptune et on se demandait s'il en existait. Entre 2001 et 2007, 6 possibles troyens de Neptune ont été observés au voisinage de L_4 . Leur trajectoire n'est pas encore suffisamment bien connue pour qu'on puisse affirmer avec certitude qu'il s'agit bien de troyens. Néanmoins, les 4 premiers, qui ont été découverts avant 2005, ont plus de chance d'être effectivement des troyens. Nesvorny et Dones [ND02] ont calculé numériquement la trajectoire d'une population fictive de troyens de Neptune dans le système solaire externe. Ils ont observé qu'au bout de 4 Ga 50% des particules initiales étaient toujours dans la RMM 1 : 1. Ainsi, dans la configuration planétaire actuelle, une population importante de troyens de Neptune pourrait être stable sur une échelle de temps comparable à l'âge du système solaire. Peu après sa formation, Neptune a subi une migration importante. Selon les modélisations de Levison et al [LMV⁺08], Uranus et Neptune ont pu se croiser, échangeant ainsi leur ordre de positionnement par rapport au Soleil. Au début de leur intégration, le demi-grand axe de Neptune vaut environ 12, puis il se rapproche de sa valeur actuelle pour atteindre 30 à la fin de l'intégration. Durant cette intégration, l'excentricité de Neptune a aussi connu des variations importantes (> 0.1) avant de décroître vers sa valeur actuelle. Dans leur article [KMM03], Kortenkamp et al. analysent l'effet de la migration des planètes sur les troyens de Neptune. Ils intègrent la trajectoire de 1000 troyens avec deux modèles de migrations planétaires, pour lesquelles la vitesse de migration des planètes décroît exponentiellement sur les échelles de temps $\tau = 10^6$, et $\tau = 10^7$. Avec la migration la plus rapide, au bout de $5\tau = 5 \cdot 10^6$ ans, 35% des troyens initiaux demeurent dans la RMM 1 : 1, alors qu'il en reste seulement 5% au bout de $5\tau = 5 \cdot 10^7$ avec la migration la plus lente. Ils attribuent cette instabilité aux passages des résonances de la *Famille II* associées à la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune. Ceci confirme l'importance de cette famille sur la dynamique des troyens. Dans ce chapitre, nous allons identifier ces résonances dans la configuration planétaire actuelle. Dans le modèle séculaire circulaire, nous avons vu au chapitre 1.5.5, que ces trois planètes apportent des contributions significatives aux

valeurs des fréquences séculaires de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ (voir tab.1.2), ce qui traduit l'importance de l'influence directe de ces planètes sur les troyens de Neptune. C'est pourquoi, dans notre analyse des troyens de Neptune, aucune des planètes géantes ne peut être négligée. Nous analysons donc la dynamique des troyens de Neptune dans le cadre du Problème à Six Corps Restreint (PSCR) : Soleil-Jupiter-Saturne-Uranus-Neptune+particule sans masse. Afin d'être cohérents avec les notations du paragraphe 3, les variables faisant référence à Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune seront désignées respectivement par les indices 1, 2, 3, et 4. Les demi-grands axes de ces planètes sont donc notés (a_1, a_2, a_3, a_4) , leurs moyens mouvements $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, leurs fréquences séculaires $\sigma_g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ et $\sigma_s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$.

6.1 Modèle

Nous calculons numériquement la trajectoire des troyens de Neptune dans le cadre du PSCR à l'aide du même intégrateur symplectique \mathcal{SABA}_4 que celui utilisé dans les deux chapitres précédents, adapté à ce système. Les troyens et les planètes sont intégrés sur deux tranches consécutives de 20 Ma, avec un pas de temps de 0.2 an. Sur chacune de ces tranches d'intégration, nous calculons les fréquences propres des troyens qui n'ont pas été éjectés de la RMM 1 : 1. Ceci nous permet de calculer l'indice de diffusion d'une particule, $n_{dif} = \log(|\nu^2 - \nu^1|/\nu^1)$, où ν^1 et ν^2 sont les fréquences de libration de la particule, calculées respectivement sur les intervalles de temps $[0, 20Ma]$ et $[20Ma, 40Ma]$. Les conditions initiales des planètes sont proches de leurs valeurs actuelles. Les conditions initiales des troyens sont choisies dans un voisinage du point équilatéral précédant Neptune. A chaque intégration, nous intégrons 20400 particules sans masse, pour des valeurs de (a, I) réparties sur une grille de 300×68 conditions initiales dans le domaine $\in [30, 30.5] \times [I_4, I_4 + 40]$, avec I_4 l'inclinaison initiale de Neptune. Les autres variables elliptiques des particules sont fixes : $\sigma = \lambda - \lambda_4 - 60 = 0$, $\sigma_g = \varpi - \varpi_4 = 60$, $\Omega = \Omega_4$, et e . Nous avons fait trois intégrations pour les valeurs initiales de l'excentricité e suivantes : 0, 0.02, 0.04. Pour chaque valeur initiale de e , cet ensemble de conditions initiales est noté \mathcal{D}_e . L'image de \mathcal{D}_e par l'application fréquence \mathcal{F} est noté Θ_e .

6.2 Analyse des structures résonantes dans l'essaim des troyens de Neptune

Nous avons étudié, au paragraphe 1.5.5, la position et les valeurs des fréquences propres du point fixe $\mathbf{L}_4(\epsilon)$, dans le problème circulaire séculaire. Nous avons vu que la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ et les valeurs de ses fréquences propres sont plus affectées par les planètes intérieures que par les planètes extérieures. D'après la ligne du bas du tableau tab.1.1, $(\nu_0^{tot}, g_0^{tot}, s_0^{tot}) \simeq (147, 2, -0.7)$. Ces quantités donnent l'ordre de grandeur des fréquences (ν, g, s) des troyens de Neptune, elles sont environ dix fois plus petites que celles des

troyens de Saturne. Les fréquences propres des troyens peuvent se combiner avec les 11 fréquences propres des planètes du système solaire externe, pour provoquer des résonances dans l'essaim des troyens. Les fréquences des planètes sont aussi appelées fréquences de forçage. Dans la configuration actuelle, elles valent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= (n_1, n_2, n_3, n_4) = (109256.49, 43996.32, 15424.19, 7865.03) \\
\sigma_g &= (g_1, g_2, g_3, g_4) = (4.24, 28.23, 3.09, 0.67) \\
\sigma_s &= (s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, -26.34, -2.99, -0.69).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Sur la figure *fig.32*, nous avons représenté les cartes de diffusion de \mathcal{D}_0 , $\mathcal{D}_{0.02}$, et $\mathcal{D}_{0.04}$, issues de nos intégrations. Une large zone de stabilité apparaît, rétrécissant lorsque l'excentricité augmente. Le demi-grand axe initial de Neptune vaut $a_4 \simeq 30.048$. Comme nous le voyons sur ces figures, le centre de la zone de stabilité est décalé d'environ 0.19. Ce décalage est dû à l'influence des planètes Jupiter, Saturne et Uranus et était déjà visible dans le problème séculaire. En effet, nous avons vu au paragraphe 1.5.5, que le point fixe $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ du problème séculaire à l'ordre un des masses planétaires, est décalé d'environ 0.05. Ce décalage est d'autant plus important que Neptune est la dernière planète du système solaire et que la position de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ est plus décalée par les planètes internes que par les planètes externes. Sur chacune de ces cartes de diffusions, des zones de couleurs différentes marquent la présence de structures résonantes. Les mêmes structures apparaissent sur chacune de ces figures et c'est pourquoi nous nous contenterons, ci-dessous, d'étudier l'espace des fréquences des particules appartenant à \mathcal{D}_0 . De manière globale, les particules ayant une plus grande excentricité sont moins stables. Les troyens de Neptune ayant une excentricité initiale supérieure à 0.11 sont éjectées de la RMM 1 : 1 en moins de 10 Ma. Remarquons la présence d'îles de particules particulièrement stables dont l'indice de diffusion est codé en bleu, vers $I \simeq 20^\circ$, $I \simeq 32^\circ$ et $I \simeq 37^\circ$. Nous n'avons pas atteint la limite de la zone de stabilité dans la direction des inclinaisons. D'autres travaux [DLS08] ont montré que les troyens de Neptune peuvent atteindre de plus hautes inclinaisons ($0 < I < 70$). Notre but n'est pas de faire une étude exhaustive des troyens de Neptune, mais plutôt d'y montrer l'influence de la *Famille II*. Pour économiser du temps de calcul, nous avons limité notre étude à des troyens vérifiant $I < I_4 + 40$.

Ces cartes de diffusion semblent toutes les trois posséder un axe de symétrie proche de la droite d'équation $a = 30.24$ UA. Il ne faut pas prendre en compte les points rouges qui apparaissent au voisinage de cette droite. Ils correspondent à des particules dont la fréquence de libration n'apparaît pas parmi les 5 premiers termes du développement en fréquences et dont nous n'avons donc pas pu déterminer l'indice de diffusion. Néanmoins, ces points sont peu nombreux et ne gênent pas notre analyse. L'axe de symétrie proche de la droite d'équation $a = 30.24$ sépare l'espace des conditions initiales \mathcal{D}_e en deux parties que nous notons \mathcal{D}_e^g et \mathcal{D}_e^d respectivement pour la partie gauche ($a < 30.24$) et la partie droite ($a > 30.24$). Les images de ces domaines de conditions initiales par l'application fréquence, que nous notons $\Theta'_e = \mathcal{F}(\mathcal{D}_e^d)$ et $\Theta''_e = \mathcal{F}(\mathcal{D}_e^g)$, sont très proches l'une de l'autre. Ceci est dû au fait que, de part et d'autre de cet axe de symétrie, il existe des particules ayant les mêmes fréquences propres. Nous nous contenterons donc d'étudier Θ'_e

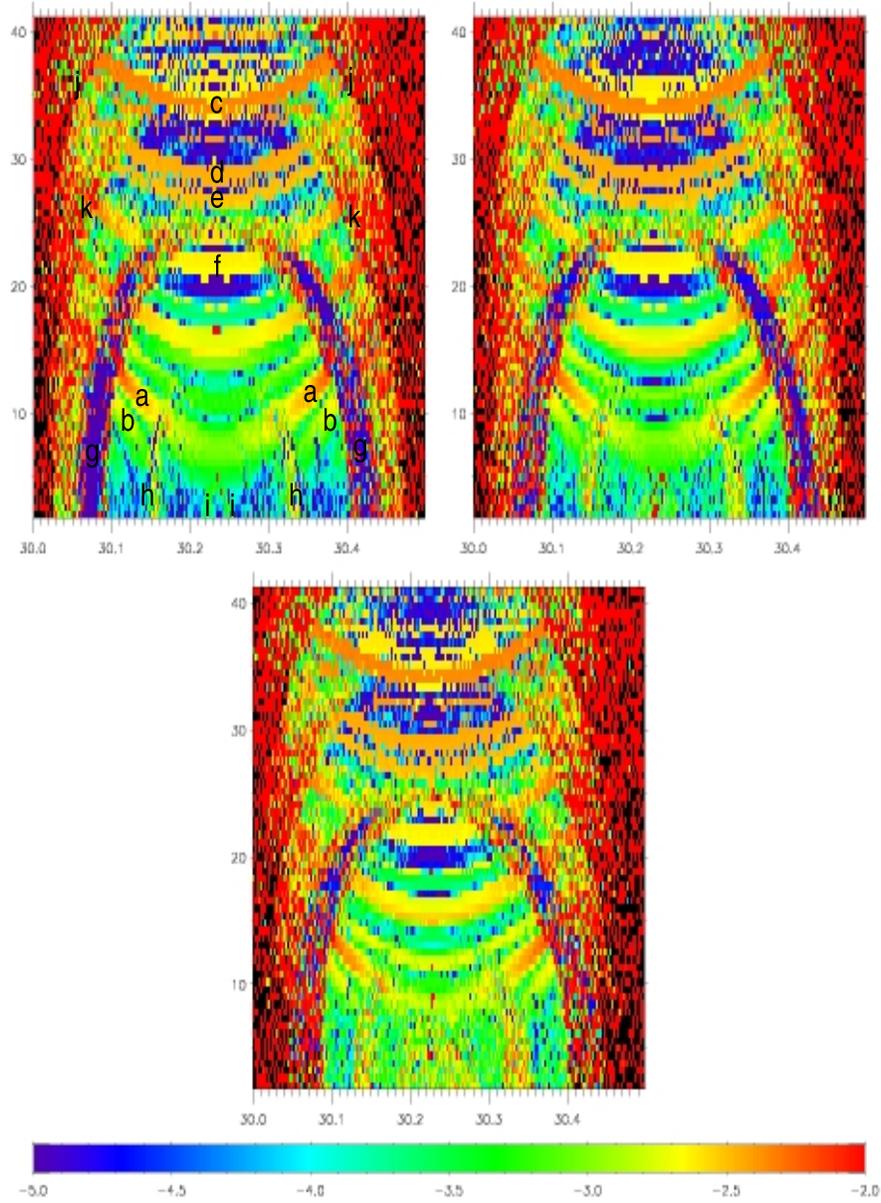


FIG. 32 – Cartes de diffusion issues de l'intégration des domaines : \mathcal{D}_0 (en haut à gauche), $\mathcal{D}_{0.02}$ (en haut à droite), et $\mathcal{D}_{0.02}$ (en bas), sur deux tranches de 20 Ma. Les couleurs codent l'indice de diffusion n_{dif} défini au paragraphe 6.1. Les lettres par ordre alphabétique de a à k nous serviront à localiser des résonances dans le texte.

et \mathcal{D}_e^d , ce qui nous permettra de mieux comprendre la correspondance entre l'espace des conditions initiales et l'espace des fréquences des troyens.

Sur la figure *fig.33*, nous représentons les projections de l'espace des fréquences Θ'_0 sur les plans (g, ν) et (s, ν) , respectivement à gauche et à droite. Ces espaces de fréquences ressemblent à des pyramides déformées dont le sommet représente les fréquences des particules du centre de la zone de stabilité $(a, I) \simeq (30.24, I_4)$. Le maillage de conditions initiales \mathcal{D}_0^g est plus fin dans la direction des demi-grands axes que dans la direction des inclinaisons; c'est pourquoi les fréquences s'accumulent sur des courbes correspondant à une même valeur de l'inclinaison. Les valeurs croissantes du demi-grand axe sont indiquées par la flèche (a) . Lorsque I augmente, cette courbe se décale dans la direction indiquée par la flèche (I) . La forme globale de ces projections de l'espace des fréquences ressemblent à celles des troyens de Saturne représentées sur les figures *fig.21* et *fig.23*. Il en résulte que les résonances des familles *II* et *III* apparaissent sur les cartes de diffusion du domaine \mathcal{D}_e^d , de façon très similaire à celles décrites par les schémas de la figure *fig.22*. Cependant, sur la figure de gauche de la figure *fig.33*, il apparaît que l'espacement entre les courbes des fréquences correspondant à une même valeur initiale de l'inclinaison, varie significativement vers $g \simeq 1.94$. Cette déformation de l'espace des fréquences est à rapprocher de celle des troyens de Saturne proche de la RMM 2 : 5 Jupiter-Saturne représentés sur la figure *fig.31*. Ici, la proximité de la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune complique la dynamique des troyens de Neptune, modifiant l'allure globale de leur espace des fréquences. Cette déformation est aussi visible sur le domaine (s, ν) où un creux apparaît sur le bord gauche de la pyramide vers $s \simeq -0.7$. Ceci modifie l'allure des résonances dans l'espace des conditions initiales, au voisinage du centre de la zone de stabilité.

D'après les valeurs des moyens mouvants n_3 et n_4 données par les expressions (6.1), le couple de planètes Uranus-Neptune est très proche de la RMM 1 : 2. En reprenant les notations du paragraphe 3.2, on a $\nu_{3,4}^{1,2} = n_3 - 2n_4 \simeq -305.87$. La fréquence $-\nu_{3,4}^{1,2}$ est proche de $2\nu_0^{tot}$, par conséquent la dynamique des troyens devrait être perturbée par des éléments de la *Famille II* associés à $(i, q) = (-1, 2)$ dans l'équation (3.6).

Sur les deux parties de la figure *fig.33*, nous remarquons des accumulations de fréquences autour de droites horizontales, qui sont révélatrices de l'influence de la *Famille II*. Sur la partie gauche de la figure *fig.33*, nous avons tracé trois droites horizontales, ayant pour équation de bas en haut $\nu = (2n_4 - n_3 + s_2 - 2g_1 + s_3 - s_4)/2$, $\nu = (2n_4 - n_3 - g_2)/2$, $\nu = (2n_4 - n_3 + s_4 + s_3 - 3g_1)/2$. La deuxième de ces droites, met en évidence la présence de la résonance de la *Famille II* d'équation $\nu = (2n_4 - n_3 - g_2)/2$. Cette résonance est très clairement identifiable. Les conditions initiales des particules qui sont dans cette résonance, correspondent à une zone bleue localisée par la lettre g sur la figure en haut à droite de la figure *fig.32*. Elles s'alignent sur une portion de parabole tournée vers le bas et intersectant l'axe des demi-grands axes. La portion de cette parabole appartenant à \mathcal{D}_0^d , est très similaire à la courbe 3 du schéma de droite de la *fig.22*, ce qui confirme la similitude entre les résonances des troyens de Saturne et de Neptune que nous avons mentionnée ci-dessus. Contrairement aux troyens de Jupiter et de Saturne, que la *Famille II* déstabilise tellement qu'on a eu du mal à l'identifier autrement que par les lacunes

qu'elles creusent dans leur zone de stabilité. Dans les troyens de Neptune, la résonance $\nu = (2n_4 - n_3 - g_2)/2$ est suffisamment large pour qu'une zone plus stable apparaisse en son centre. Sur la figure *fig.32*, on voit que l'épaisseur de cette résonance diminue lorsque l'inclinaison augmente. ce qui la fait ressembler à deux cornes se rejoignant en leur sommet, symétriques par rapport à l'axe séparant \mathcal{D}_0^d et \mathcal{D}_0^g . Bon nombre des particules qui sont dans cette résonance ont un indice de diffusion de l'ordre de 10^{-5} , ce qui indique que leurs trajectoires sont parmi les plus stables de cette zone de stabilité. Ceci est nuancé par le fait que l'indice de diffusion n_{dif} mesure les variations de la fréquence de libration ν ; or les particules de cette résonances vérifient justement une relation du type $\nu = cte$, il est donc possible que ces particules diffusent le long de cette résonance sans que l'on mesure cette instabilité. Il serait donc intéressant d'étudier le mouvement de particules appartenant au centre de ces résonances pour vérifier ce point. De plus, ces particules sont sûrement de bonnes candidates pour détecter les librations de l'angle $\sigma_\nu = 2\phi - 2\lambda_4 + \lambda_3 + \varpi_2$, avec ϕ l'angle résonant des coordonnées angles actions associées à la RMM 1 : 1 d'un troyen. L'observation de ces librations nous permettrait de mesurer la période de libration de σ_ν . Par contre, la proximité des séparatrices de cette résonance génère du chaos, ce qui est révélé par la présence de particules dont l'indice de diffusion est codé en rouge sur les bords de cette résonance. Lors de la migration planétaire, des résonances de la *Famille II* balayent l'essaim des troyens. Les troyens de Neptune sont donc sûrement déstabilisés quand les séparatrices des résonances de la *Famille II* se rapprochent, ce qui explique l'effet déstabilisateur de ces résonances mis en valeur par Kortenkamp et al. dans leur article [KMM03]. Néanmoins, ces figures mettent en valeur le fait que les résonances de la *Famille II* déstabilisent beaucoup moins les troyens de Neptune qu'elles ne déstabilisent les troyens de Jupiter et Saturne. C'est sûrement une des raisons pour laquelle des troyens de Neptune ont pu survivre à la migration planétaire, alors que de nombreux éléments de la *Famille II* associés à la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune les ont perturbés vers la fin de la migration.

Lorsque l'excentricité augmente, la largeur des résonances séculaires impliquant la fréquence g augmente. Ces résonances et les éléments de la *Famille II* se recouvrent, générant plus d'instabilité. En effet, sur la figure représentant la carte de diffusion de $\mathcal{D}_{0.02}$, les particules qui sont dans cette résonance apparaissent au même endroit, mais leur indice de diffusion augmente. Sur la carte de diffusion de $\mathcal{D}_{0.04}$, cette résonance de la *Famille II* apparaît pour les mêmes valeurs de a et I que sur les deux figures précédentes. Les particules qui subissent l'influence de cette résonance sont moins stables, certaines sont même éjectées de la RMM 1 : 1. Cette instabilité est générée par le recouvrement de cette résonance et de résonances séculaires qui sont plus difficiles à identifier.

Plus proche du centre de la zone de stabilité, une autre paire de cornes plus petites apparaît, localisée par la lettre h sur la figure *fig.32*. Les fréquences de ces particules sont proches de la droite d'équation $\nu = (2n_4 - n_3 + s_4 + s_3 - 3g_1)/2 \simeq 144.72$, représentée sur la figure *fig.33*. Ceci indique la présence d'autres éléments de la *Famille II* associés aux mêmes valeurs de (α, β, i, q) dans l'équation (3.6) que la précédente. Très proche du centre de la zone de stabilité, une autre résonance de la *Famille II* est visible, nous l'avons

désignée par la lettre i sur la figure *fig.32*.

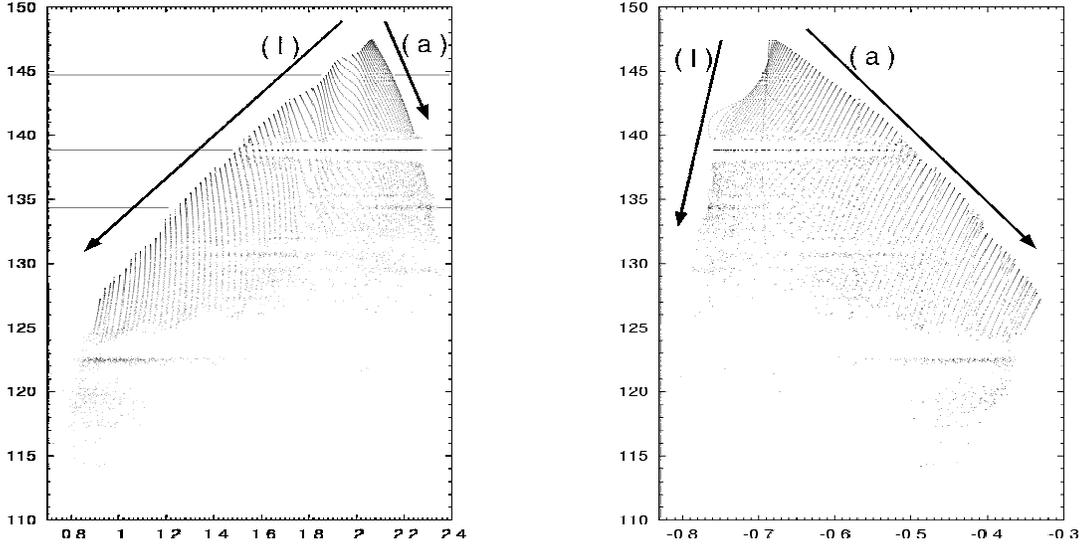


FIG. 33 – A gauche et à droite apparaissent respectivement les projections de Θ'_0 sur les plans (g, ν) et (s, ν) . Sur la figure de gauche nous avons ajouté trois portions de droites qui ont pour équations, de bas en haut : $\nu = (2n_4 - n_3 + s_2 - 2g_1 + s_3 - s_4)/2 \simeq 134.37$, $\nu = (2n_4 - n_3 - g_2)/2 \simeq 138.82$, et $\nu = (2n_4 - n_3 + s_4 + s_3 - 3g_1)/2 \simeq 144.72$.

Une autre accumulation de fréquences apparaît proche de la droite horizontale d'équation $\nu = 122.35$. Or, dans la situation actuelle, $-2/5(n_3 - 2n_4) \simeq -122.35$. Ces particules subissent donc l'influence de résonances de la *Famille II* associée à $\nu \simeq -2/5\nu_{3,4}^{1,2}$. Etant donné la présence de très petites fréquences comme g , s , g_3 , g_4 , s_3 , et s_4 , il est difficile d'identifier avec certitude ces résonances. La résonance qui a le plus d'influence semble être $\nu = 2/5(2n_4 - n_3 - s)$, ce qui est cohérent avec le fait que l'inclinaison initiale de ces particules soit grande. Sur les cartes de diffusion de la figure *fig.32*, l'effet de cette résonance apparaît proche du bord de la zone de stabilité, au voisinage d'une portion de parabole tournée vers le bas désignée par la lettre j . Cette résonance contribue à déstabiliser les particules sur le bord de la zone de stabilité. D'autres résonances de la *Famille II* semblent avoir un rôle semblable dans la zone désignée par la lettre k , il pourrait s'agir entre autre, de la résonance $\nu = (2n_4 - n_3 + s_2 - 2g_1 + s_3 - s_4)/2 \simeq 134.37$, mais elle n'apparaît pas très clairement dans l'espace des fréquences des troyens et en raison de son ordre élevé, nous n'en sommes pas convaincus.

Notons $(\nu_{L_4}, g_{L_4}, s_{L_4}) \simeq (147.4, 2.066, -0.68)$, ces fréquences sont celles des sommets des pyramides représentant les projections de Θ'_e visibles sur la figure *fig.33*. Par analogie avec les troyens de Saturne, la forme des résonances séculaires du type $g = cte$ et $s = cte$, dans l'espace des conditions initiales, dépend de la position de ces fréquences par rapport

à g_{L_4} et s_{L_4} . Plus précisément, soit C une fréquence constante, les résonances séculaires du type $s = C$ ont des allures distinctes sur les cartes de diffusion *fig.32*, selon que $C < s_{L_4}$ ou que $C > s_{L_4}$. Dans le cas où $C < s_{L_4}$, les conditions initiales des particules de \mathcal{D}_0^d vérifiant $s = C$, se regroupent autour d'une courbe semblable aux courbes 1 et 2 du schéma de gauche de la figure *fig.22*. Cependant, quand C est proche de s_{L_4} , ces courbes sont déformées par la proximité de la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune.

C'est le cas de la résonance $s = s_4 \simeq -0.6917$, car $s_4 < s_{L_4}$. Son effet est visible dans le domaine (s, ν) de la figure *fig.33*, légèrement à gauche de la droite d'équation $s = s_{L_4}$ passant par le sommet de la pyramide. Nous l'avons localisée sur la figure *fig.32* par la lettre *b*. Néanmoins, en raison de la déformation de l'espace des fréquences causé par la proximité de la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune, la forme de cette résonance dans l'espace des conditions initiales n'est pas exactement celle schématisée par la figure *fig.32*. Plus on se rapproche du centre de la zone de stabilité et plus cette déformation est importante.

Si $C < s_{L_4}$, les particules de \mathcal{D}_0^d dont les fréquences vérifient $s = C$ se regroupent sur une portion de parabole semblable aux courbes 3 et 4 du schéma de gauche de la figure *fig.22*. Cette analyse est aussi valable pour les résonances du type $g = cte$, de même que pour les troyens de Neptune. Etant donné que g et s sont très proches, des résonances impliquant à la fois g et s sont aussi possibles. En particulier, nous avons identifié la présence de la résonance $s + g = 2g_4$, que nous avons localisée sur la carte de diffusion de \mathcal{D}_0^d par la lettre *a*, sa forme ressemble à celle du type $s = C < s_{L_4}$. Lorsque cette résonance séculaire se rapproche de la *Famille II*, le recouvrement entre ces deux résonances génère du chaos et déstabilise plus les particules. C'est ce qui apparaît sur la figure *fig.32*, où l'indice des particules qui sont proches des résonances désignées par les lettres *g* et *a* apparaît codé en rouge.

D'autres résonances séculaires apparaissent, nous les avons désignées sur la figure *fig.32* par les lettres *c, d, e, f*. Elles ont des formes très semblables à celles de résonances du type $s = C < s_{L_4}$ et $g = C < g_{L_4}$. Néanmoins, ces résonances ne sont pas clairement identifiables dans l'espace des fréquences Θ_e . De plus, la présence d'un grand nombre de petites fréquences séculaires du même ordre de grandeur que g et s , complique leur identification. Nous n'avons pas jugé intéressant de consacrer à ce travail un temps qui pourrait se révéler déraisonnablement long comparé à l'intérêt du résultat escompté.

Comme dans le cas des troyens de Saturne, les familles de résonance ayant un rôle important dans la dynamique des troyens de Neptune sont les familles *II* et *III*. Il en va sûrement de même, lors de la migration planétaire. Comparé au modèle avec lequel nous avons étudié les troyens de Saturne, le nombre de degrés a considérablement augmenté, ce qui complique l'identification des résonances séculaires. Nous avons mis en évidence l'influence de la *Famille II* sur la dynamique des troyens. Cette analyse pourrait être prolongée à d'autres configurations planétaires. Néanmoins, chacune de ces intégrations requièrent environ 20 fois plus de temps de calcul que celle des troyens de Jupiter et Saturne et c'est une des raisons pour lesquelles nous n'avons pas eu le temps d'explorer plus la dynamique des troyens de Neptune. Cette analyse fera peut-être l'objet de futurs travaux. Néanmoins, on peut déjà avoir une idée de la manière dont les résonances de

la *Famille II* agit sur les troyens de Neptune, par analogie avec les troyens de Saturne. Dans le chapitre précédent, nous avons analysé le passage des résonances de la *Famille II* dans les troyens de Saturne, lorsque Jupiter-Saturne se rapproche de la RMM 2 : 5. Très similairement, lorsque le couple de planètes Uranus-Neptune se rapproche de la RMM 1 : 2, les résonances de la *Famille II* associées à $\nu \simeq -1/2\nu_{3,4}^{1,2}$ ballayent le domaine \mathcal{D}_e des troyens de Neptune, du centre vers l'extérieur. Elles finissent par sortir de l'espace des fréquences des troyens. Puis, lorsqu'on continue à se rapprocher de la RMM 1 : 2, les résonances du type $\nu \simeq -\nu_{3,4}^{1,2}$ vont commencer à faire leur apparition dans Θ_e . Mais en raison du sens de migration globale des planètes, il est peu vraisemblable qu'une telle situation ait été rencontrée lors de la migration planétaire. Pour avoir une idée réaliste de l'évolution d'Uranus et Neptune vers la fin de leur migration planétaire, il faut donc imaginer que ces planètes se rapprochent de la RMM 1 : 2 et finissent par s'arrêter dans la configuration actuelle. Les résonances de la *Famille II* qui ont traversé l'essaim des troyens de Neptune sont donc celles associées à $\nu \simeq q/i\nu_{3,4}^{1,2}$ avec $(q, i) \in \{(-1, 3), (-1, 4), (-1, 5), \dots\}$. C'est effectivement ce qu'ont observé Kortenkamp et al. dans leur article [KMM03]. Les résonances de la *Famille II* présentes dans la configuration actuelle, sont donc celles qui apparaissent dans les troyens de Neptune avec l'ordre le plus petit. Il est donc probable que ce soient celles qui déstabilisent le plus les troyens de Neptune. Or, comme nous avons pu le voir, leur effet est beaucoup moins fort que celui observé sur les troyens de Jupiter et Saturne. Ceci provient sans doute, d'une part, de l'éloignement de ces planètes et, d'autre part, de leurs plus faibles masses. Lors de leur migration, les troyens de Neptune sont donc beaucoup moins déstabilisés que les troyens de Saturne. Ceci pourrait expliquer en partie, que des troyens de Neptune aient pu survivre à la migration planétaire, malgré le fait que les planètes Uranus et Neptune soient aussi proches de la RMM 1 : 2. Néanmoins l'évolution des résonances séculaires jouent aussi un rôle important dans la dynamique de troyens de Neptune. De plus, selon le modèle de Nice, lors de la migration planétaire, l'excentricité de Neptune a connu des variations importantes avant de décroître vers sa valeur actuelle [LMV⁺08]. Il faudrait donc étudier de manière plus précise l'évolution des troyens de Neptune dans le cadre de la migration planétaire, en prenant en compte ces caractéristiques.

Conclusion

Dans le PTCR, les points de Lagrange équilatéraux L_4 et L_5 , sont des points fixes linéairement stables. Lorsqu'on ajoute d'autres planètes que celle hébergeant les troyens, ces points fixes disparaissent. On peut donc se demander ce que deviennent ces structures. Dans le problème séculaire à N -corps restreint ($N > 3$), avec des planètes en mouvement circulaire uniforme, nous avons montré que, si les masses des planètes perturbatrices (ϵ) sont suffisamment petites, des points fixes se substituent à L_4 et L_5 . Ces points fixes que nous avons noté $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ et $\mathbf{L}_5(\epsilon)$, ne sont plus les points équilatéraux, mais s'en écartent d'une quantité qui est en $\mathcal{O}(\epsilon)$. Nous avons donné des expressions analytiques simples estimant ces translations. Dans cette approximation, les planètes perturbatrices qui sont plus proches de l'étoile que la planète hébergeant les troyens, affectent plus la position des points fixes, que les planètes qui en sont plus éloignées. Cette propriété explique en partie que le centre de la zone de stabilité des troyens de Neptune, soit plus éloigné de ses points équilatéraux que ceux des autres planètes géantes. Alors qu'au contraire, le centre de la zone de stabilité des troyens de Jupiter, est plus proche de ses points équilatéraux que ceux des autres planètes géantes.

Dans le problème non séculaire, un théorème élaboré par A. Jorba et C. Simo [JS96], assure que si les masses des planètes perturbatives sont suffisamment petites et sous certaines hypothèses de non résonance et de non dégénérescence de l'hamiltonien, des orbites quasi-périodiques dont les fréquences propres sont celles des planètes, se substituent aux points fixes L_4 et L_5 . De plus, ces orbites quasi-périodiques tendent vers les points équilatéraux lorsque les masses des planètes perturbatives tendent vers zéro. Sous l'effet d'une petite perturbation quasi-périodique, les points fixes L_4 et L_5 deviennent des orbites quasi-périodiques oscillant autour des points fixes $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ et $\mathbf{L}_5(\epsilon)$ du problème séculaire.

L'application du théorème de Floquet permet d'approximer ces orbites si le nombre de degrés de liberté du système est petit. Or, lorsque le nombre de planètes augmente, le nombre de degrés de liberté augmente rapidement, compliquant considérablement le problème. C'est pourquoi la recherche de ces orbites, aux voisinages des points équilatéraux des planètes de notre système solaire, n'a pas encore abouti. On ne sait même pas si de telles structures existent. Il existe néanmoins des travaux qui répondent à cette question dans le cadre de problèmes simplifiés. Dans sa thèse [Gab03], F. Gabern a calculé ces orbites quasi-périodiques pour des systèmes contenant au plus 3 fréquences de forçage. Au début de ma thèse, nous avons travaillé sur ce point par des méthodes purement analytiques. Ce travail n'a pas eu de succès. Récemment, Philippe Robutel a eu

l'idée d'un algorithme, qui converge dans certains cas, en quelques itérations vers ces orbites (quand elles existent). Par exemple, dans le modèle bi-circulaire Jupiter-Saturne, cet algorithme converge vers une orbite quasi-périodique se substituant à L_4 , qui ne dépend que des fréquences n_1 et n_2 de Jupiter et Saturne. En décomposant le demi-grand axe de cette orbite en séries des fréquences de n_1 et n_2 , nous avons pu constater que le terme constant de cette série est très proche du demi-grand axe de $\mathbf{L}_4(\epsilon)$ calculé analytiquement. Ce qui confirme notre analyse.

Au voisinage des orbites quasi-périodiques se substituant aux points équilatéraux, les trajectoires des particules sans masse dépendent de trois fréquences supplémentaires, ν , g , s , qui sont les fréquences propres des troyens. Au début de ma thèse, nous espérions construire une forme normale au voisinage de cette orbite quasi-périodique. Ce qui nous aurait permis en quelque sorte de « détordre » l'espace des fréquences des troyens. De toute façon, le domaine de convergence de cette forme normale aurait été limité par la présence de résonances impliquant les fréquences propres des troyens. Mais les variables angles-actions de cette forme normale auraient été de bonnes variables, dans lesquelles nous comptions étudier numériquement ces résonances. Malheureusement nous avons dû nous rendre à l'évidence que ce projet était trop ambitieux pour être réalisé dans le cadre de ma thèse. De plus, la présence proche du centre de la zone de stabilité des troyens, d'une dégénérescence de l'application fréquence, confine le domaine de la zone de stabilité sur lequel nous pouvons espérer réussir à « détordre » l'espace des fréquences des troyens. Dans la suite de notre travail, nous nous sommes donc contentés de travailler avec des variables elliptiques, qui sont tout de même plus proches des variables angles-actions que les variables cartésiennes.

Afin de donner une vision globale du réseau de résonances agissant sur les troyens, nous avons classé les résonances agissant sur une population de troyens, en 4 grandes familles. Cette classification est en fait une généralisation de l'analyse faite par P. Robutel et F. Gabern dans l'article [RG06]. La *Famille I* apparaît lorsque la fréquence de libration ν des troyens, et le moyen mouvement de la planète les hébergeant (la p -ième planète) sont commensurables. La présence de cette famille dans l'essaim des troyens dépend principalement de la masse de la p -ième planète, et non de la configuration du système planétaire. La *Famille III* est constituée des résonances séculaires. Au paragraphe 5.3, nous avons donné des méthodes permettant de prédire pour quelles configurations planétaires, les résonances de cette famille apparaissent. De manière assez générale, lorsque la masse de la p -ième planète diminue, la fréquence g des troyens diminue également, se rapprochant des fréquences séculaires des planètes, ce qui augmente les possibilités de commensurabilité entre g et les autres fréquences séculaires du système. Les familles *II* et *IV* sont étroitement liées aux RMM planétaires. Proche d'une RMM $\alpha : \beta$ entre la p -ième et la j -ième planète, la fréquence $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j} = \alpha n_p - \beta n_j$, est de l'ordre de grandeur des fréquences séculaires planétaires. Lorsque les planètes p et j s'éloignent de la RMM, $|\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}|$ augmente. Proche des RMM, lorsque $|\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}| \simeq \mathcal{O}(m_p)$, les fréquences g et $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$ sont commensurables, et la *Famille IV* apparaît alors dans l'espace des fréquences des troyens. Plus loin de la RMM $\alpha : \beta$, quand $|\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}| \simeq \mathcal{O}(\sqrt{m_p})$, les fréquences ν et $\nu_{\alpha,\beta}^{p,j}$ deviennent commensu-

rables, ce qui fait apparaître la *Famille II*. Lorsque m_p diminue, les fréquences g et ν des troyens diminuent également. En conséquence, les familles *IV* et *II* apparaissent pour des configurations planétaires qui se rapprochent des RMM. Lorsque ces familles sont trop proches de RMM, leur effet se noie dans celui des RMM. Il en résulte que si la *Famille IV* a un rôle important sur la dynamique des troyens de Jupiter, elle n'apparaît pas dans la dynamique des troyens de Saturne. A fortiori, la *Famille IV* n'agit donc pas sur les troyens d'une planète ayant une masse inférieure à celle de Saturne. La *Famille II* joue un rôle important dans la dynamique des troyens des planètes externes de notre système solaire. La mise en place d'un modèle analytique modélisant l'évolution des fréquences planétaires aux voisinages des RMM, permettrait de donner des expressions analytiques, estimant à quelles distances des RMM, les résonances des familles *II* et *IV* entrent en action. Il serait alors sans doute possible de donner les intervalles de valeurs de m_p , pour lesquels les familles *II* et *IV* agissent sur les troyens.

Nous avons utilisé cette analyse des 4 familles de résonances afin de prédire quelles sont les résonances qui perturbent la dynamique des troyens lors de la migration planétaire. Il est fort probable que la capture ou l'éjection de troyens dans la RMM 1 : 1 avec la p -ième planète, passe par des rencontres proches avec cette planète. Or, les résonances qui déstabilisent fortement les troyens, favorisent les échanges de particules entre les troyens et des particules qui sont proches de l'orbite de la planète hébergeant les troyens. Si l'on veut comprendre ces échanges de particules, il est donc essentiel de connaître les résonances qui ont un impact important sur la dynamique des troyens, et d'être en mesure de prédire pour quelles configurations planétaires elles apparaissent. Nous avons élaboré des méthodes qui permettent de faire ces prédictions. L'évolution de la quantité de troyens piégés dans la RMM 1 : 1 avec la p -ième planète au cours de la migration planétaire dépend de nombreux paramètres : des positions des planètes, de leurs vitesses de migration, et de la densité d'astéroïdes au voisinage de l'aire balayée par la p -ième planète. Ces nombreux paramètres dépendent du modèle de migration choisi, et bien que l'on ait fait de grand progrès dans ce domaine ces dernières années, il y a beaucoup trop d'inconnues pour que l'on puisse arriver à un modèle unique.

Néanmoins, les différences apparaissant dans l'évolution des troyens de Jupiter et de Saturne, permettent de donner des indices expliquant la présence ou l'absence de troyens à la fin de la migration planétaire. Les planétoïdes sont le moteur de la migration planétaire, et plus les planètes se rapprochent de la configuration actuelle, plus la densité d'astéroïdes et de planétoïdes diminue aux voisinages des trajectoires des planètes. Il est donc probable que le passage d'une résonance générant une forte instabilité aux voisinages des points équilatéraux, permette de capturer des troyens si elle survient relativement tôt dans le processus de migration planétaire, quand la densité d'astéroïdes est encore grande. Par contre, si cette instabilité apparaît vers la fin de la migration, il est probable que les troyens soient éjectés de la RMM 1 : 1, sans que d'autres puissent être capturés. L'absence de résonances générant une instabilité forte sur les troyens à la fin de la migration planétaire, semble donc être une condition nécessaire pour qu'une population de troyens puisse survivre. Dans le cas des troyens de Jupiter, c'est justement vers la fin de la migration que le

taux d'éjection est le plus faible, ce qui explique qu'autant d'astéroïdes se soient maintenus dans la RMM 1 : 1 avec Jupiter. Pour les troyens de Saturne, par contre, la situation est radicalement différente. Nous avons trouvé de nombreuses configurations planétaires pour lesquelles une large zone de stabilité se déploie autour des points équilatéraux de Saturne. Il est donc probable qu'une population importante de troyens de Saturne ait existé avant la fin de la migration planétaire. Mais vers la fin de la migration planétaire, ils furent fortement déstabilisés par des éléments de la *Famille II* associés à la RMM 2 : 5 Jupiter-Saturne. L'influence de ces sous-familles de la *Famille II* a dû éjecter les éventuels troyens de Saturne, sans permettre d'en piéger de nouveaux. Il est donc probable que les troyens de Saturne aient déserté cette région du système solaire avant la fin de la migration planétaire. Une étude plus précise, avec un intégrateur tolérant les rencontres proches, et modélisant la migration planétaire au voisinage des configurations pour lesquelles apparaissent ces sous-familles de résonances, permettrait de comprendre vers quelles régions du système solaire se sont échappés les ex-troyens de Saturne. Enfin, vers la fin de la migration planétaire, les troyens de Neptune ont subi l'influence d'éléments de la *Famille II* associés à la RMM 1 : 2 Uranus-Neptune. Néanmoins les troyens de Neptune semblent être beaucoup moins affectés par la *Famille II* que les troyens de Jupiter et Saturne. C'est peut-être une des raisons pour laquelle des troyens de Neptune ont pu survivre à cette phase de l'histoire du système solaire. Néanmoins l'évolution des résonances séculaires jouent aussi un rôle important dans la dynamique de troyens de Neptune. De plus, selon le modèle de Nice, lors de la migration planétaire, l'excentricité de Neptune a connu des variations importantes avant de décroître vers sa valeur actuelle [LMV⁺08]. Il faudrait donc étudier de manière plus précise l'évolution des troyens de Neptune dans le cadre de la migration planétaire, en prenant en compte ces caractéristiques. Cette étude mériterait d'être approfondie en utilisant les méthodes d'analyse que nous avons développées.

Bibliographie

- [BC61] D. Brouwer and G. Clemence. *Method of celestial mechanics*. Academic Press, 1961.
- [Cha99] J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304 :793–799, April 1999.
- [dKV96] C. M. de La Barre, W. M. Kaula, and F. Varadi. A Study of Orbits near Saturn’s Triangular Lagrangian Points. *Icarus*, 121 :88–113, May 1996.
- [DLS08] R. Dvorak, C. Lhotka, and R. Schwarzs. The dynamics of inclined Neptune Trojans. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, pages 37–+, July 2008.
- [Gab03] F. Gabern. *On the dynamics of the Trojan asteroids*. PhD thesis, Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi Universitat de Barcelona, 2003.
- [GLTM05] R. Gomes, H. F. Levison, K. Tsiganis, and A. Morbidelli. Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435 :466–469, May 2005.
- [GML04] R. S. Gomes, A. Morbidelli, and H. F. Levison. Planetary migration in a planetesimal disk : why did Neptune stop at 30 AU? *Icarus*, 170 :492–507, August 2004.
- [Hen82] J. Henrard. The adiabatic invariant - The use in celestial mechanics. In V. Szebehely, editor, *NATO ASIC Proc. 82 : Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics*, pages 153–171, 1982.
- [HW93] M. J. Holman and J. Wisdom. Dynamical stability in the outer solar system and the delivery of short period comets. *Astron. J.*, 105 :1987–1999, May 1993.
- [IM89] K. A. Innanen and S. Mikkola. Studies on solar system dynamics. I - The stability of Saturnian Trojans. *Astron. J.*, 97 :900–908, March 1989.
- [JS96] A. Jorba and C. Simó. On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996.
- [KMM03] S. J. Kortenkamp, R. Malhotra, and T. Michtchenko. Survival of Trojan-Type Companions of Neptune During Primordial Planet Migration. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 35 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1017–+, May 2003.

- [Las03] J. Laskar. Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions. *ArXiv Mathematics e-prints*, May 2003.
- [LMV⁺08] H. F. Levison, A. Morbidelli, C. Vanlaerhoven, R. Gomes, and K. Tsiganis. Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune. *Icarus*, 196 :258–273, July 2008.
- [LR95] J. Laskar and P. Robutel. Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62 :193–217, July 1995.
- [LR01] J. Laskar and P. Robutel. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80 :39–62, July 2001.
- [MBR01] T. Michtchenko, C. Beaugé, and F. Roig. Planetary migration and the effects of mean motion resonances on Jupiter’s Trojan asteroids. *Astron. J.*, 122 :3485–3491, 2001.
- [MD99] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar system dynamics*. Solar system dynamics by Murray, C. D., 1999, 1999.
- [MF01] T. A. Michtchenko and S. Ferraz-Mello. Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System. *Icarus*, 149 :357–374, February 2001.
- [MLTG05] A. Morbidelli, H. F. Levison, K. Tsiganis, and R. Gomes. Chaotic capture of Jupiter’s Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435 :462–465, May 2005.
- [Mor99] M. H. M. Morais. A secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, 350 :318–326, October 1999.
- [MS05] K. R. Meyer and D. S. Schmidt. Elliptic relative equilibria in the N-body problemstar, open. *Journal of Differential Equations*, 214 :256–298, 2005.
- [MS07] F. Marzari and H. Scholl. Dynamics of Jupiter Trojans during the 2 :1 mean motion resonance crossing of Jupiter and Saturn. *MNRAS*, 380 :479–488, September 2007.
- [MTS02] F. Marzari, P. Tricarico, and H. Scholl. Saturn Trojans : Stability Regions in the Phase Space. *Astrophys. J.*, 579 :905–913, November 2002.
- [ND02] D. Nesvorný and L. Dones. How Long-Lived Are the Hypothetical Trojan Populations of Saturn, Uranus, and Neptune ? *Icarus*, 160 :271–288, December 2002.
- [RB08] P. Robutel and J. Bodossian. The resonant structure of Jupiter’s Trojans asteroids-II. What happens for different configurations of the planetary system. *ArXiv e-prints*, September 2008.
- [RG06] P. Robutel and F. Gabern. The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids I : Long-term stability and diffusion. *MNRAS*, 372 :1463–1482, 2006.

- [RL01] P. Robutel and J. Laskar. Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. Short Period Dynamics of Massless Particles. *Icarus*, 152 :4–28, July 2001.
- [TGML05] K. Tsiganis, R. Gomes, A. Morbidelli, and H. F. Levison. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435 :459–461, May 2005.