

OBSERVATOIRE DE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE  
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE  
D'ILE-DE-FRANCE

Doctorat  
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Dynamique des Systèmes Gravitationnels

Julien FROUARD

DYNAMIQUE ET STABILITÉ DES SATELLITES  
IRRÉGULIERS DE JUPITER

*Thèse dirigée par Marc Fouchard et Alain Vienne*

*Soutenue le 14 décembre 2010 devant un jury composé de :*

Bruno SICARDY (LESIA - Obs. de Paris)	Président du Jury
Carl MURRAY (Queen Mary University, Londres)	Rapporteur
Anne LEMAÎTRE (FUNDP, Namur)	Rapporteur
Ślawomir BREITER (Univ. Adam Mickiewicz, Poznań)	Examineur
Radu STOICA (Lab. Paul Painlevé - Univ. de Lille 1)	Examineur
Marc FOUCHARD (IMCCE - Univ. de Lille 1)	Directeur de thèse
Alain VIENNE (IMCCE - Univ. de Lille 1)	Directeur de thèse



# Remerciements

Je souhaiterais remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse sans qui ces trois années de travail n'auraient pas été possibles : Marc Fouchard et Alain Vienne. Ils ont su m'avoir fait confiance et leurs conseils et leurs encouragements m'ont été très utiles tout au long de cette thèse.

Je suis également profondément reconnaissant à Carl Murray et Anne Lemaître pour avoir accepté de juger ce travail, ainsi que Bruno Sicardy, Sławomir Breiter et Radu Stoica de l'intérêt qu'ils ont pu y porter.

Je tiens à remercier de manière générale les membres de l'IMCCE des équipes GAP et ASD ainsi que toute l'équipe administrative, pour leur accueil et les échanges et discussions que j'ai pu avoir avec eux. En particulier, je souhaiterais remercier Valéry Lainey pour ses constants encouragements et pour avoir eu avec lui nombre de discussions stimulantes. Un grand merci également à Philippe Robutel pour sa disponibilité et les conseils qu'il a pu me donner tout au long de ma thèse.

Je remercie également les doctorants et amis de l'IMCCE que j'ai cotoyé pour leur amitié et leur bonne humeur quotidienne : Pierre, David, Lucie, Serge, Laurène, Yohann, Alrick, Camille. Je souhaite aussi remercier l'équipe de choc informatique : Julien, Stéphane et Alain pour leur assistance et leur disponibilité lors des "pannes" informatiques.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à mes amis et ma famille et tout particulièrement Malynnda pour leur présence et leur soutien durant ces trois années.



## Résumé

La région dynamique des satellites irréguliers de Jupiter présente un enchevêtrement complexe de zones stables et chaotiques, à la limite des régions où un satellite est gravitationnellement lié à la planète. La nature fortement perturbée des orbites de ces satellites a toujours été un frein dans l'application de méthodes analytiques visant à explorer les différentes résonances importantes dans cette région.

L'objectif de ce travail est l'étude de ces résonances et de leur impact sur l'évolution à long terme des satellites. Pour ce faire une étude numérique a été entreprise. Des modèles analytiques et/ou numériques spécialisés ont également été développés dans cette thèse, dans les cas où ceux-ci présentent des approximations satisfaisantes du mouvement réel des satellites.

L'étude numérique a permis d'obtenir une image claire de la région dynamique globale où les satellites évoluent, ainsi qu'une représentation précise des régions où les familles de satellites sont situées. En premier lieu, les résultats montrent que la grande majorité des satellites possède des orbites chaotiques. En ce qui concerne leur diffusion à long terme et celle des trois familles de satellites connues, les familles *Ananke* et *Carme* montrent une très faible diffusion alors que celle de la famille *Pasiphae* et des satellites les plus éloignés est au contraire très importante. Les résonances les plus importantes agissant sur la dynamique des satellites ont ensuite été déterminées. En particulier, le rôle déterminant dans la chaotité des satellites des résonances impliquant la Grande Inégalité entre Jupiter et Saturne a été démontré.

Les modèles analytiques ont permis quant à eux d'étudier en détail des résonances et des perturbations précises et ciblées. La dynamique de la résonance d'évection a ainsi été étudiée analytiquement et numériquement, en permettant une comparaison entre ces deux méthodes. Un modèle analytique séculaire des perturbations directes des planètes sur les satellites a également été construit, et constitue un premier pas dans l'étude analytique de ces perturbations.

**Mots-clés :** satellites irréguliers de Jupiter, stabilité des orbites, résonances, évolution à long terme, chaos.



## Abstract

### Dynamics and stability of the Jovian irregular satellites

The dynamical region of the Jovian irregular satellites shows a complex web of regular and chaotic zones, near the limit where satellites are no more gravitationally bounded to the planet. The highly perturbed behavior of the orbits of the irregular satellites has always put a constraint on the use of analytical methods, which aim at studying the secular evolutions and the various important resonances in this region.

The goal of this work is the study of these resonances and their influence on the long-term evolution of the satellites. In this way a numerical study has been performed. Some analytical and/or numerical models have also been made during this thesis, in the cases where they show a good approximation of the real motion of the satellites.

The numerical study allowed to obtain a global picture of the dynamical region where the satellites evolve, as well as a precise display of the regions where the satellites families are located. First, the results show that the great majority of the satellites have chaotic orbits. Concerning their long-term stability and those of the three known families, the *Ananke* and *Carme* families show a very weak diffusion while that of the *Pasiphae* family and the outermost satellites is very strong. Secondly, the most important resonances acting on the dynamics of the satellites have been determined. In particular, the leading effect on the chaoticity of the satellites of the resonances implying the Great Inequality between Jupiter and Saturn has been proven.

The analytical models allowed the detailed study of particular resonances and perturbations. The evection resonance dynamics have been investigated in a numerical and an analytical way, which allowed for a comparative study of the two methods. Besides this, an analytical secular model modelling the direct perturbations of the planets on the motion of the satellites has been made, which represents a first step in the analytical study of these perturbations.

**Key words :** Jovian irregular satellites, stability of orbits, resonances, long-term evolution, chaos.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>I Introduction et présentation du système jovien</b>	<b>8</b>
<b>1 Description du système jovien</b>	<b>10</b>
1.1 Les différents types de satellites joviens . . . . .	10
1.1.1 Les satellites internes : <i>Metis, Adrastea, Amalthea, Thebe</i> . . . . .	10
1.1.2 Les satellites Galiléens : <i>Io, Europe, Ganymede, Callisto</i> . . . . .	11
1.1.3 Les satellites irréguliers . . . . .	11
1.2 Observations et caractéristiques physiques . . . . .	12
1.3 Origine des satellites . . . . .	13
1.3.1 Le problème de capture . . . . .	13
1.3.2 Les phénomènes de dissipation . . . . .	16
1.3.3 Capture des satellites durant la migration des planètes et modèle de Nice . . . . .	18
<b>2 Dynamique des satellites irréguliers de Jupiter et étude préliminaire des perturbations</b>	<b>20</b>
2.1 Dynamique des satellites . . . . .	21
2.1.1 Nécessité de modèles séculaires de degrés élevés . . . . .	21
2.1.2 Les résonances importantes . . . . .	22
2.1.3 Études dynamiques des satellites . . . . .	23
2.2 Perturbations secondaires . . . . .	23
2.2.1 Estimation analytique des perturbations . . . . .	24
2.2.2 Résonances de moyen mouvement possibles avec les satellites Galiléens	27
2.2.3 Résonances séculaires possibles avec les satellites Galiléens . . . . .	28
<b>II Etude numérique de la dynamique des satellites irréguliers de Jupiter</b>	<b>32</b>
<b>3 Méthodes numériques</b>	<b>34</b>
3.1 Intégrateurs symplectiques . . . . .	34
3.1.1 Hamiltoniens . . . . .	34
3.1.2 Schémas d'intégration symplectiques . . . . .	36
3.1.3 Intégration des problèmes képlériens - partie A . . . . .	37
3.1.4 Intégration des perturbations - partie B . . . . .	39
3.1.5 Contrôle de la valeur des hamiltoniens et des intégrations . . . . .	40
3.2 Indicateurs de chaos . . . . .	41
3.2.1 Les méthodes spectrales . . . . .	41

3.2.2	Les méthodes variationnelles : l'Exposant Maximal de Lyapunov . . .	41
3.2.3	Les méthodes variationnelles : les indicateurs rapides . . . . .	43
3.2.4	Comparaison de différents indicateurs rapides . . . . .	45
3.2.5	Les équations variationnelles . . . . .	47
3.2.6	Intégration des vecteurs tangents dans l'espace des phases étendu . .	48
<b>4</b>	<b>Dynamique des satellites irréguliers</b>	<b>52</b>
4.1	Intégrations numériques à long terme des satellites naturels . . . . .	52
4.1.1	Chaoticité des satellites . . . . .	53
4.1.2	Filtrage et analyse en fréquence du mouvement des satellites . . . .	54
4.2	Résultats concernant les résonances connues . . . . .	56
4.2.1	La résonance de Kozai ( $g = s$ ) . . . . .	56
4.2.2	La résonance $\nu_{\odot}$ ( $g = g_{\odot}$ ) . . . . .	57
4.3	Diffusion chaotique . . . . .	59
4.4	Cartes de stabilité . . . . .	63
4.4.1	Problème de trois corps restreint (R3BP) . . . . .	64
4.4.2	Problème de trois corps restreint quasi-périodique (R3BPQP) . . . .	64
4.4.3	Problème complet . . . . .	66
4.4.4	Influence de l'inclinaison initiale . . . . .	67
4.5	Les familles rétrogrades . . . . .	68
4.5.1	Famille <i>Ananke</i> . . . . .	69
4.5.2	Famille <i>Carme</i> . . . . .	71
4.5.3	Famille <i>Pasiphae</i> . . . . .	73
4.6	La région prograde . . . . .	74
4.7	Discussion . . . . .	76
<b>III</b>	<b>Résonance d'évection et perturbations planétaires directes</b>	<b>82</b>
<b>5</b>	<b>Étude de la résonance d'évection</b>	<b>84</b>
5.1	Introduction . . . . .	84
5.2	Modèle analytique . . . . .	85
5.2.1	Développement de la fonction perturbatrice en polynômes de Legendre	86
5.2.2	Comparaison de l'ordre des polynômes de Legendre . . . . .	87
5.2.3	Développement et moyennisation . . . . .	88
5.2.4	Transformation canonique de variables . . . . .	89
5.2.5	Résultats du modèle analytique . . . . .	90
5.3	Méthode de moyennisation numérique . . . . .	92
5.4	Discussion de la méthode analytique . . . . .	93
5.5	Surfaces de section . . . . .	95
5.5.1	Discussion . . . . .	97
5.5.2	Localisation de la résonance . . . . .	99
5.6	Résonance d'évection en tenant compte de l'aplatissement de la planète . .	100
5.6.1	Développement et moyennisation . . . . .	100
5.6.2	Résultats . . . . .	101
5.7	Conclusions . . . . .	102

---

<b>6</b>	<b>Perturbations planétaires directes du mouvement d'un satellite</b>	<b>104</b>
6.1	Introduction . . . . .	104
6.2	Le cas classique : développement de $R_{\odot}$ . . . . .	105
6.3	Développement de $R_2$ . . . . .	106
6.3.1	Développements préliminaires . . . . .	106
6.3.2	Expression de la fonction perturbatrice en fonction de l'anomalie vraie	107
6.4	Modèle séculaire . . . . .	108
6.5	Comparaisons numériques et applications . . . . .	108
6.5.1	Satellite terrestre . . . . .	108
6.5.2	<i>Carme</i> . . . . .	109
6.6	Conclusions . . . . .	110
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>112</b>
	<b>Notations</b>	<b>114</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>116</b>



# Introduction

L'étude de la dynamique et de la stabilité des objets composant le Système Solaire a derrière elle une longue histoire. Bien avant la création de la Mécanique Céleste "classique" grâce à la formulation de la loi universelle de la gravitation par Newton en 1687, on s'interrogeait déjà sur le devenir des objets observés à l'époque. A partir des travaux de Newton, qui introduisit un formalisme mathématique basé sur cette loi de la gravitation, les chercheurs avaient à présent en main les outils permettant l'étude de l'évolution des planètes sur des temps excédant la durée de vie humaine.

Les premiers objets célestes à être ainsi étudiés furent la Lune et les planètes du Système Solaire par Euler, Laplace et Lagrange dans les années 1740-1770. En particulier, la démonstration de la non-existence de perturbations séculaires au premier ordre dans le demi-grand axe des planètes par Laplace (1773), puis la théorie connue aujourd'hui sous le nom de *Laplace-Lagrange* obtenue pour les planètes, apparaissaient comme des preuves mathématiques de la stabilité immuable du Système Solaire. Le déterminisme célèbre prôné par Laplace était triomphant.

Les mécaniciens célestes suivants comme Le Verrier (qui découvrit Uranus en 1846 grâce à des calculs perturbatifs), améliorèrent la précision des modèles analytiques utilisés par Laplace et Lagrange, tout en restant attachés à ce déterminisme.

Cette vision déterministe cessa suite aux travaux d'Henri Poincaré (Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, 1893). Poincaré démontra en effet que les développements perturbatifs utilisés ne pouvaient être convergents, en raison des résonances présentes dans les systèmes étudiés. La solution parfaite, intégrable et immuable du mouvement des planètes n'existe donc pas. Poincaré découvrit le fait que certaines orbites pouvaient être instables, créant ainsi une base mathématique pour l'étude du chaos dans les systèmes dynamiques. Le mot "stable" se référera ainsi dans cette étude au caractère non chaotique d'une orbite donnée.

Il fallut ensuite attendre la seconde moitié du XXe siècle et l'avènement des ordinateurs pour prouver ces théories. A partir des années 1980, la découverte d'orbites chaotiques s'est intensifiée et s'est étendue à tous les types d'objets du Système Solaire. Après la découverte de la chaotité des orbites des planètes, le chaos a permis par exemple d'expliquer la répartition discontinue des astéroïdes de la ceinture principale et de la ceinture de Kuiper. Un grand nombre d'astéroïdes possèdent ainsi des orbites faiblement instables à très instables, de même que beaucoup d'astéroïdes Troyens. Les comètes à longues périodes sont connues comme étant des objets extrêmement chaotiques.

Les satellites irréguliers des planètes géantes ne dérogent pas à cette "règle" et je montrerai dans cette thèse que la majorité de ceux orbitant autour de Jupiter possèdent des orbites chaotiques. De manière générale, par rapport aux autres populations de petits corps du Système Solaire énoncées précédemment, les satellites irréguliers possèdent des orbites particulièrement perturbées. L'influence du Soleil est en effet très forte aux valeurs élevées de demi-grand axe qui caractérisent ces satellites. Cette perturbation solaire provoque des variations rapides et de grande amplitude des éléments orbitaux, limitant la construction de modèles analytiques fiables jusqu'à très récemment.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la dynamique et la stabilité des satellites irréguliers de Jupiter par des méthodes numériques et analytiques. Les méthodes numériques sont semblables à celles utilisées pour les études d'autres populations de petits corps ; elles sont

à base d'intégrations numériques à long terme, et de "cartes" dynamiques où de nombreuses orbites fictives sont calculées afin de donner une image dynamique globale de la région des satellites. Un indicateur de chaos est également utilisé, ainsi que des méthodes d'analyse comme un filtre numérique et l'analyse en fréquence. Ces outils m'ont permis de déterminer les résonances importantes qui influencent les satellites, ainsi que leur rôle dans la chaoticité de leurs orbites. Les intégrations à long terme m'ont en particulier permis d'étudier la diffusion chaotique des satellites. De plus, cette étude numérique a été l'occasion de comparer mes résultats avec ceux obtenus par les modèles analytiques présents dans la littérature.

Une autre partie de cette thèse fut dédiée à la résonance d'évection, qui a été étudiée analytiquement et numériquement. L'effet de cette résonance est en effet important pour les satellites orbitant à une grande distance de leur planète. Une comparaison entre les méthodes numérique et analytique et leurs précisions concernant la dynamique de la résonance est en particulier réalisée.

Enfin, la dernière partie de ce rapport de thèse concerne le développement d'un modèle analytique séculaire des perturbations planétaires *directes*. De manière générale dans les études analytiques du mouvement de satellites, cette perturbation est négligée, car extrêmement faible par rapport à d'autres effets comme la non-sphéricité de la planète. Elle est ici pour les satellites irréguliers Joviens la deuxième perturbation la plus importante après celle due au Soleil. Le développement de ce modèle séculaire simple constitue le point de départ d'une théorie plus complète dédiée à ce type de perturbation.

## Première partie

# Introduction et présentation du système jovien



# Chapitre 1

## Description du système jovien

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Les différents types de satellites joviens . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1.1	Les satellites internes : <i>Metis,Adrastea,Amalthea,Thebe</i> . . . . .	10
1.1.2	Les satellites Galiléens : <i>Io,Europe,Ganymede,Callisto</i> . . . . .	11
1.1.3	Les satellites irréguliers . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Observations et caractéristiques physiques . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.3</b>	<b>Origine des satellites . . . . .</b>	<b>13</b>
1.3.1	Le problème de capture . . . . .	13
1.3.2	Les phénomènes de dissipation . . . . .	16
1.3.3	Capture des satellites durant la migration des planètes et modèle de Nice . . . . .	18

### 1.1 Les différents types de satellites joviens

Jupiter est la planète la plus massive du Système Solaire. Sa masse par rapport au Soleil présente un rapport de  $\frac{1}{1047}$  et son rayon équatorial  $r_j$  est de 71492 km. Le système de satellites de Jupiter compte actuellement 63 satellites qui possèdent des caractéristiques orbitales très différentes suivant leurs distances à la planète. On y distingue les satellites internes, Galiléens et irréguliers.

#### 1.1.1 Les satellites internes : *Metis,Adrastea,Amalthea,Thebe*

Ces satellites, dont le premier fut découvert dès 1892 (*Amalthea*), sont très proches de Jupiter (entre  $1,8 r_j$  et  $3,1 r_j$ ). Ils possèdent de très faibles excentricités et inclinaisons et sont connus comme étant en interaction avec les anneaux de Jupiter. Voici leurs éléments orbitaux,  $T$  étant la période de révolution autour de Jupiter :

	$a$ (km)	$e$	$i$ (deg)	$T$ (heures)
Metis	128000.	0,0012	0,019	7,080
Adrastea	129000.	0,0018	0,054	7,152
Amalthea	181400.	0,0032	0,380	11,952
Thebe	221900.	0,0176	1,080	16,200

### 1.1.2 Les satellites Galiléens : *Io*, *Europe*, *Ganymede*, *Callisto*

Ces célèbres satellites, découverts le 7 janvier 1610 par Galilée, sont parmi les plus massifs du Système Solaire et présentent des aspects très variés. Leurs demi-grands axes varient entre  $5,9 r_j$  et  $27,3 r_j$  et tout comme la famille *Amalthea*, ils possèdent de très faibles excentricités et inclinaisons. Les trois premiers satellites sont également sous l'effet de la résonance Laplacienne, de la forme :

$$N_1 - 3N_2 + 2N_3 = 0,$$

$N$  représentant le moyen mouvement moyen des satellites.

	$a$ (km)	$e$	$i$ (deg)	$T$ (jours)
Io	421800.	0,0041	0,036	1,769
Europe	671100.	0,0094	0,466	3,551
Ganymede	1070400.	0,0013	0,177	7,155
Callisto	1882700.	0,0074	0,192	16,690

### 1.1.3 Les satellites irréguliers

Ces satellites lointains partagent de fortes excentricités et inclinaisons et dans le cas de Jupiter peuvent se diviser en deux groupes spatialement distincts. Les variations des éléments orbitaux de ces satellites étant rapides et de grande amplitude, il est préférable d'indiquer ici leurs éléments orbitaux moyens, calculés dans cette thèse (voir Section 4.1 et le tableau 4.1).

1. le groupe prograde, constitué de six satellites, possède des demi-grands axes variant entre 0,0495 UA et 0,1139 UA (de  $103,8 r_j$  à  $239 r_j$ ) et des excentricités allant de 0,1167 à 0,4229. Les inclinaisons de ce groupe se répartissent entre  $28,067^\circ$  et  $53,144^\circ$ . Ce groupe contient un ensemble plus compact de satellites : le sous-groupe *Himalia* contenant *Himalia*, *Elara*, *Lysithea* et *Leda*. A noter que *Themisto* et *Carmo* ont des paramètres orbitaux relativement éloignés de ce sous-groupe.
2. Le groupe rétrograde (47 objets), est le plus éloigné de Jupiter, avec des demi-grands axes entre 0,1288 UA et 0,1904 UA (de  $270,2 r_j$  à  $399,5 r_j$ ). Ces satellites ont des excentricités plus variées que le groupe prograde (de 0,098 à 0,4417). L'inclinaison de ce groupe se situe entre  $164,792^\circ$  et  $142,715^\circ$ . On peut y distinguer 3 familles, résultant de possibles impacts, les familles étant nommées en référence à leurs membres les plus massifs. Par ordre de demi-grand axe : la famille *Ananke* avec 10 satellites, la famille *Carme*, ayant 16 satellites, et la famille *Pasiphae*, avec 4 satellites. A noter *S/2003 J2*, très éloigné du groupe rétrograde et à un demi-grand axe de 0.1904 UA.

En dehors des considérations "arbitraires" sur les valeurs de demi-grand axes, d'excentricités et d'inclinaisons qui peuvent définir les satellites irréguliers, on peut leur donner une définition plus stricte (Sheppard, 2006) ; ce sont des satellites suffisamment éloignés de leur planète pour que la précession de leur plan orbital soit contrôlé principalement par le Soleil et non par la non-sphéricité de la planète. Ainsi de manière générale un satellite avec un demi-grand axe supérieur au demi-grand axe critique (Burns, 1986) :

$$a_{crit} \sim (2J_2 r_p^2 a_p^3 m_p / M_\odot)^{1/5} \quad (1.1)$$

est considéré comme irrégulier.  $J_2$  est le second coefficient harmonique zonal de la planète, représentatif de sa non-sphéricité,  $r_p$  est son rayon équatorial,  $m_p$  sa masse et  $a_p$  son demi-grand axe. Pour Jupiter,  $a_{crit} = 2321348.133$  km (0.0155 UA), ce qui assure largement

leur place aux satellites irréguliers, le plus proche étant à 7 393 216 km (0.0494 UA) de Jupiter.

On peut noter que le rayon de la sphère de Hill de Jupiter est bien supérieur aux demi-grands axes des satellites irréguliers. Le rayon de Hill  $r_H$  est défini comme :

$$r_H = a_p \left( \frac{m_p}{3m_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.2)$$

Pour Jupiter,  $r_H = 0.355$  UA.

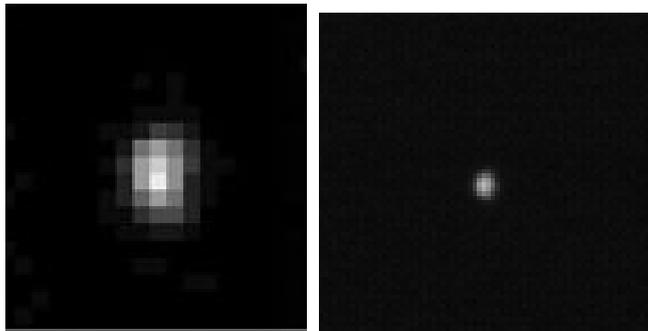
Dans la suite, je présente et résume les propriétés physiques connues des satellites et les scénarios de formation proposés pour expliquer leur présence. On pourra également se référer aux revues détaillées de Sheppard (2006) ou Nicholson *et al.* (2008). Je présenterai ensuite les études dynamiques effectuées sur ces satellites.

## 1.2 Observations et caractéristiques physiques

Les observations photométriques dans le visible et l'infrarouge montrent que les couleurs des satellites irréguliers sont neutres à modérément rouges et donc similaires aux astéroïdes C, P et D de la ceinture principale externe ainsi qu'aux Troyens de Jupiter et aux comètes éteintes (Sheppard 2006, Grav *et al.* 2004a, 2004b). Les couleurs des familles de satellites ne prouvent pas actuellement qu'elles proviennent chacune d'un objet parent. Pour finir, l'étude des huit satellites les plus brillants que sont *Pasiphae*, *Sinope*, *Ananke*, *Carme* et les quatre satellites du groupe prograde Himalia montrent que ce dernier apparaît plus rouge et plus concentré dans l'espace des couleurs que le groupe rétrograde (Grav *et al.* 2003).

Les observations spectroscopiques actuelles dans le visible et le proche infrarouge des satellites les plus brillants présentent des spectres pour la plupart linéaires, sans caractéristiques particulières et consistant avec des spectres d'astéroïdes de type C (Jarvis *et al.* 2000). Les albédos de ces satellites sont très bas (de 0.04 à 0.05), similaires une fois de plus aux astéroïdes C, P et D de la ceinture principale externe ainsi qu'aux Troyens de Jupiter (Fernandez *et al.* 2003).

Bien que des images précises de satellites irréguliers existent, comme dans le cas de *Phoebe* pour Saturne, les seules images obtenues aujourd'hui des satellites irréguliers de Jupiter sont celles distantes d'*Himalia* (Fig.1.1) et d'*Elara*. Les images d'*Himalia* ont été prises par la sonde Cassini et montrent une forme allongée, d'une taille de 150 x 200 km et d'un albedo de 0.05 (Porco *et al.* 2003). La sonde New Horizon a pris (5 et 7 mars 2007) des images d'*Elara* à une distance de 5 828 699 km (29 km/pixel sur 3 pixels) et d'*Himalia* à une distance de 5 455 777 km (27 km/pixel sur 7 pixels).



**Fig. 1.1** – Images d'*Himalia* prises par la sonde Cassini (gauche) et New Horizon (droite).

### 1.3 Origine des satellites

Il est aujourd'hui communément admis que les satellites Galiléens ont été formés dans le disque proto-planétaire de Jupiter. Si cette hypothèse a été proposée pour expliquer l'origine des satellites irréguliers, elle se heurte à plusieurs complications. Tout d'abord ces satellites sont caractérisés par de fortes excentricités et de fortes inclinaisons, au contraire des satellites intérieurs et Galiléens qui présentent quant à eux de très faibles valeurs. Les orbites très circulaires de ceux-ci sont caractéristiques d'une formation dans le milieu résistif du disque proto-planétaire de Jupiter. Les éléments orbitaux très élevés des satellites irréguliers sont donc peu compatibles avec une formation dans ce milieu résistif. Mais le fait le plus important discréditant l'hypothèse d'une formation *in situ* est le grand nombre d'objets évoluant sur des orbites rétrogrades. Il est en effet difficile de modéliser un changement de direction de prograde à rétrograde pour un satellite n'ayant jamais quitté l'orbite de Jupiter.

L'hypothèse la plus couramment étudiée est donc la capture par Jupiter de ces satellites. Ceci ouvre un grand champ d'études et pose de nouvelles questions, à savoir : de quelles régions du système solaire peuvent être originaires ces objets ? Depuis quand sont-ils capturés et par quel(s) mécanisme(s) ? Cette capture est-elle immuable ou les satellites peuvent-ils au contraire s'échapper dans l'avenir ? Dans la suite je présenterai les études s'étant intéressées au problème de capture uniquement gravitationnel, ainsi que les phénomènes de dissipation qu'on peut y ajouter. Je terminerai par les scénarios de formation liés au modèle de Nice et à la migration des planètes.

#### 1.3.1 Le problème de capture

Les études s'intéressant aux captures de satellites ont pour but de déterminer les orbites héliocentriques "sources" qui mènent à des captures par Jupiter et à des orbites correspondantes à celles des satellites irréguliers observés. Le problème de capture est un problème complexe car il est déjà, à son niveau le plus basique, un problème de trois corps (Soleil + Jupiter + satellite dans le cas présent) : de plus les orbites de captures étant chaotiques par définition, la grande majorité des études sont numériques. Je présente ici rapidement les outils numériques simples utilisés dans les problèmes de capture.

La distinction entre orbites gravitationnellement liées ou non à une planète est faite de manière classique en observant le signe de l'énergie orbitale du satellite par rapport à la planète :

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{GM_p}{r} = -\frac{GM_p}{2a}, \quad (1.3)$$

l'énergie étant négative dans le cas d'une orbite elliptique, quelles que soient les perturbations qui agissent sur l'orbite du satellite. L'énergie orbitale est bien sûr fixe dans le problème de deux corps. Dans les études numériques de capture présentées dans la suite, l'énergie orbitale des objets peut très fréquemment changer de signe en des temps très courts. Des conditions liées au nombre de révolutions du satellite autour du corps par lequel il a été capturé sont donc nécessaires.

Dans le problème de trois corps restreint circulaire la constante de Jacobi donne déjà des informations sur les orbites perpétuellement liées autour de la masse primaire (i.e. la plus importante) ou secondaire. La constante de Jacobi est une intégrale première du mouvement et s'écrit :

$$C_p = 2U - V^2 = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (1.4)$$

avec  $r_1$  et  $r_2$  étant les distances aux masses respectivement primaire et secondaire,  $(1 - \mu)$  étant la masse de la primaire,  $\mu$  la masse de la secondaire et  $n$  le moyen mouvement qui représente la vitesse angulaire des masses autour de leur barycentre (souvent prise égale à 1).

Un résultat classique de stabilité est lié à la valeur de la constante : pour qu'une particule puisse passer de la masse primaire à la secondaire ou l'inverse,  $C_p$  doit être inférieure à la valeur de la constante de Jacobi du point de Lagrange L1  $C_{L_1}$ . Celle-ci représente la valeur correspondant à la surface de vitesse nulle autour des deux masses au delà de laquelle le satellite ne peut s'échapper.

En appliquant la constante de Jacobi au point L1 avec une vitesse nulle on obtient (Murray & Dermott 1999) :

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3} \mu^{2/3} - 10\mu/3. \quad (1.5)$$

Ce résultat est limité au problème de trois corps restreint circulaire : pour le généraliser certains auteurs utilisent le paramètre de Tisserand  $T$  du satellite :

$$T = \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a_p}{a}(1 - e^2)} \cos(i). \quad (1.6)$$

Le paramètre de Tisserand est une approximation de la constante de Jacobi utilisée fréquemment pour l'étude des comètes. Cette approximation la rend valable pour des problèmes de plus de trois corps mais la rend temporairement limitée dans certaines situations comme les passages proches de planètes.

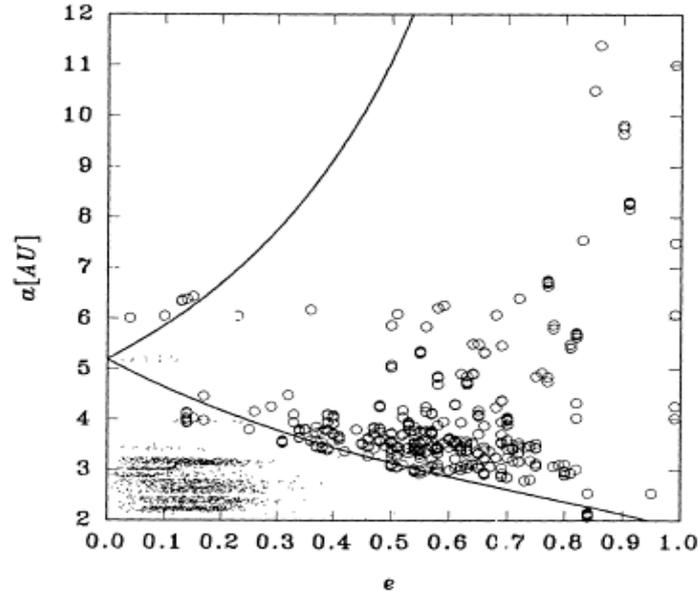
Pour déterminer les orbites "sources" d'où peuvent provenir les satellites irréguliers, on peut étudier deux approches : partir de l'objet actuellement capturé et faire une intégration numérique de son mouvement dans le passé pour essayer d'y trouver une libération (une capture dans le sens normal du temps), ou partir d'une distribution d'objets dans un certain espace des phases initial héliocentrique, et étudier leurs captures possibles par une intégration vers l'avenir (méthode de Monte-Carlo).

Cette deuxième approche a été fortement étudiée dans le problème de trois corps restreint circulaire ou elliptique. Ce modèle, bien que limité permet déjà en effet d'avoir une idée consistante des régions initiales de l'espace permettant une capture, tout en gardant le temps de calcul relativement peu élevé par rapport à des intégrations plus complètes du Système Solaire. Cette configuration limite également le nombre de paramètres initiaux libres à étudier.

Carusi et Valsecchi ont réalisé un travail de ce type en s'intéressant aux comètes à courte période de la famille de Jupiter (périodes  $\leq 20$  ans) (Carusi & Valsecchi, 1980, 1981, 1983). La Fig.1.2 montre un diagramme en demi-grand axe/excentricité des orbites héliocentriques menant à une capture par Jupiter. En intégrant dans le temps ces comètes (choisies en fonction de leurs paramètres de Tisserand), ils ont constaté que leurs captures sont des événements relativement fréquents, les mêmes objets pouvant être capturés plusieurs fois (Tableau 1.1).

Plus spécifiquement dans le contexte des satellites irréguliers de Jupiter, Michel Hénon (Hénon, 1970) détermina les régions héliocentriques stables, instables et celles à partir desquelles un objet peut être capturé, en faisant varier les positions initiales et la constante de Jacobi de l'objet. On peut également citer dans ce domaine les travaux de Huang & Innanen (1983), Hamilton & Burns (1991), Brunini *et al.* (1996a, 1996b) ou Hamilton & Krivov (1997). Le cas des satellites irréguliers de Saturne a été étudié par Turrini *et al.* (2008, 2009).

En étudiant les régions de conditions initiales menant à des captures et en s'intéressant plus particulièrement aux durées de ces captures dans le problème de trois corps restreint



**Fig. 1.2** – Éléments orbitaux héliocentriques menant à une capture dans le cas Soleil-Jupiter et des orbites de type satellites irréguliers. Sont également représentées les distributions actuelles des astéroïdes (points) et des comètes à courtes périodes (cercles). Figure tirée de Brunini (1996a) (diagramme similaire à Carusi & Valsecchi 1981).

**Tab. 1.1** – Exemples de dates de capture/libération par Jupiter pour 3 comètes à courtes périodes (tiré de Carusi & Valsecchi, 1980).

P/Kowal	P/Oterma	P/Gehrels 3
1901.9 - 1902.4	1902.3 - 1903.0	1783.9 - 1786.6
1944.3 - 1944.5	1934.5 - 1939.0	1833.6 - 1835.3

circulaire, Murison (1989) montre que les zones étroites situées entre les régions menant à des captures et les régions stables sont chaotiques et présentent des formes fractales. La complexité des structures observées dans ces régions limites ouvre un autre champ d'investigations (Brunini 1996b, Cordeiro *et al.* 1999).

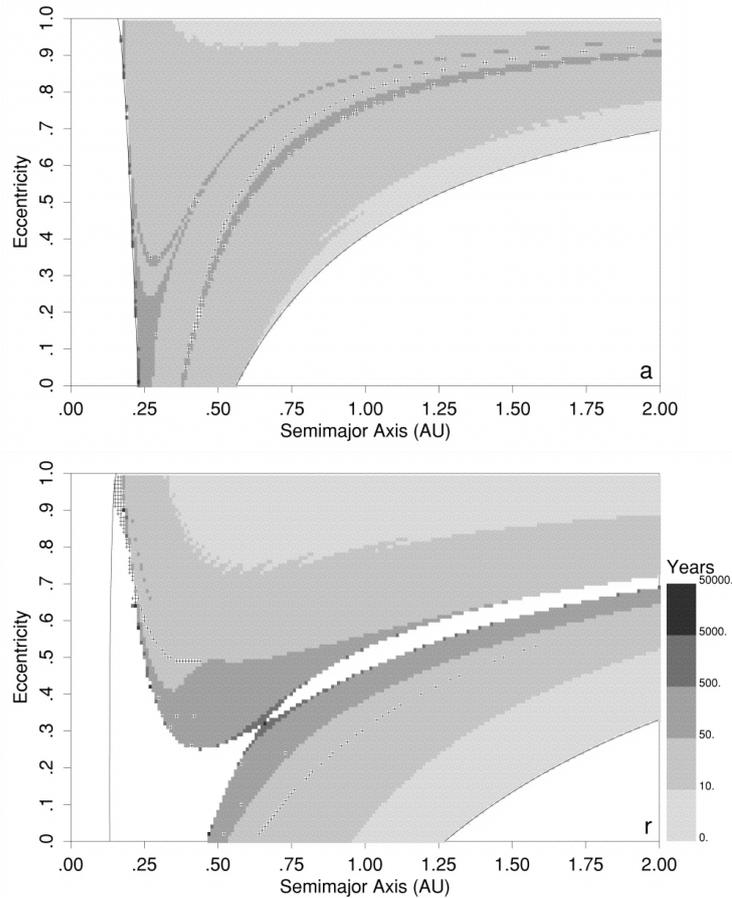
La découverte des orbites de quasi-satellites (Mikkola & Innanen 1997) pose la question des liens entre ces objets particuliers et les satellites irréguliers des planètes géantes. Les quasi-satellites ne sont techniquement pas des satellites (leur énergie orbitale par rapport à la planète est positive) et ils évoluent sur des orbites similaires aux planètes (mêmes demi-grand axes), bien que plus excentriques. Leur particularité est que leur longitude est en résonance 1 :1 avec celle de la planète, les faisant apparaître comme des satellites rétrogrades dans un référentiel tournant lié à la planète (les astéroïdes Troyens apparaissent eux quasiment fixes dans ce référentiel). Les orbites de ces objets ont été étudiées analytiquement entre autres par Mikkola & Innanen (1997), Namouni (1999) et Mikkola *et al.* (2006). Les études numériques (Wiegert *et al.* 2000, Shen & Tremaine 2008) montrent que les populations de quasi-satellites sont très stables autour de Neptune et Uranus sur des temps équivalents à l'âge du Système Solaire mais que ces zones stables sont très réduites pour Jupiter et inexistantes pour Saturne. Néanmoins des objets peuvent être capturés temporairement sur ce type d'orbites : Kinoshita & Nakai (2007) reportent la présence de quatre quasi-satellites temporaires autour de Jupiter.

Un objet ne peut être capturé par des moyens strictement gravitationnels (sans phénomène de dissipation) que temporairement et l'impossibilité d'une capture définitive a été démontrée dans le problème de trois corps restreint elliptique (Hopf, 1930). Les effets des phénomènes dissipatifs nécessaires étant beaucoup plus faibles que les effets gravitationnels, c'est pourquoi les objets capturés doivent l'être le plus longtemps possible pour que les effets dissipatifs interviennent de manière sensible sur la dynamique. Plusieurs études ont été réalisées utilisant des intégrations numériques du problème de trois corps (Vieira Neto & Winter 2001, Winter & Vieira Neto 2001, 2002, Vieira Neto *et al.* 2005, Domingos *et al.* 2006), ou de quatre corps (Kary & Dones 1996). Des temps de captures de 50.000 ans (limite inférieure) peuvent par exemple être trouvés pour le cas d'Uranus (Figure 1.3).

### 1.3.2 Les phénomènes de dissipation

Différents phénomènes dissipatifs spécifiques à la formation de Jupiter ou du système solaire ont été étudiés comme le frottement dû au gaz protoplanétaire, le changement de masse de Jupiter ou les collisions avec d'autres objets (satellites ou planétésimaux de passage, voir la section suivante). Les effets de marées dues à Jupiter ne sont pas dans la littérature considérés comme significatifs. En effet la taille des satellites et leurs distances à Jupiter sont trop faibles pour que leurs mouvements soient affectés significativement (Pollack *et al.* 1979).

L'effet d'un frottement dû à un milieu résistif (gaz et/ou poussières) jovien ou interplanétaire (Pollack *et al.* 1979, voir également Astakhov *et al.* 2003) est différent selon la taille de l'objet. Son effet n'est pas considéré comme significatif pour les objets les plus grands (> quelques 100 km), et est trop important pour des très petits objets qui auraient été fortement ralentis et seraient entrés en collision avec Jupiter en spiraland. En revanche pour des corps de quelques km à quelques dizaines de km le frottement pourrait avoir eu un impact important mais nécessite un faible temps d'exposition à cette force pour que les corps n'aient pas le temps de spiraler autour de Jupiter. En effet la durée de vie d'un satellite dans cet environnement est estimée à moins de  $10^5$  années. Čuk & Burns (2004a)



**Fig. 1.3** – Temps de capture par Uranus en fonction des excentricités et demi-grands axes initiaux. La particule est initialement au péricentre avec  $i=0^\circ$  (haut) et  $i=180^\circ$  (bas). Les signes ”+” indiquent les trajectoires menant à des collisions (figures tirées de Vieira Neto & Winter 2001).

ont vérifié cette hypothèse et ont pu déterminer sa validité dans la capture d’*Himalia*, mais grâce à un disque qui se serait évaporé sur une échelle de temps rapide ( $10^4$  années). Les autres satellites irréguliers, plus petits et rétrogrades pour la plupart, auraient une durée de vie encore plus courte dans ce disque, ce qui nécessiterait un mécanisme additionnel pour éviter leur collision avec la planète. A noter que c’est actuellement une hypothèse plausible pour expliquer la présence de *Triton* sur son orbite actuelle autour de Neptune.

L’hypothèse de la variation de masse de Jupiter a souvent été étudiée. Elle peut être vue comme suit : dans le problème de trois corps restreint circulaire, le mouvement d’une particule dans le champ gravitationnel de deux corps massifs est lié à la valeur de sa constante de Jacobi. La particule, par exemple en rotation initialement autour de la première masse, peut être capturée par la secondaire dès lors que sa constante de Jacobi est inférieure à celle du point de Lagrange L1. En revanche si la masse de cette secondaire vient à augmenter, la constante de Jacobi (qui est une fonction de cette masse) augmentera en conséquence, fermant le ”passage” au point L1 et emprisonnant la particule autour de la masse secondaire.

Cette hypothèse fut étudiée pour la première fois par Heppenheimer & Porco (1977). Dans ce scénario, les objets sont initialement placés dans la résonance de moyen mouvement 1 :1 avec Jupiter et, la masse de Jupiter augmentant, ces objets passent lentement sur des orbites planétocentriques. Ce scénario n’explique cependant pas la présence de satellites progrades et reste toujours très discutée. Par exemple Sheppard (2006) considère que le

changement de masse de Jupiter doit être au moins supérieur à 40% sur quelques centaines d'années. Une migration significative de Jupiter loin du soleil aurait aussi eu pour effet d'élargir la sphère de Hill de Jupiter (Brunini 1995) mais on peut noter que, d'après Beaugé *et al.* (2002), la migration nécessaire pour rendre une capture temporaire en capture permanente en quelques milliers d'années rend la sphère de Hill très instable, et a pour effet de détruire les systèmes de satellites.

Dans l'hypothèse de cette dissipation, des études de capture dans le contexte du problème de trois corps restreint ont été menées par de nombreux auteurs. Vieira Neto *et al.* (2004, 2006) ont ainsi étudié les effets de cette dissipation dans les cas rétrogrades et progrades en intégrant dans le passé le problème de trois corps restreint circulaire plan et en assumant une variation de masse de Jupiter linéaire sur des échelles de temps variant entre  $10^5$  et  $10^7$  ans (des variations de masse exponentielles peuvent être adoptées avec des résultats similaires). Leurs résultats montrent une faible dépendance avec l'échelle de temps retenue pour la variation de masse. Les satellites rétrogrades sont ainsi capturés dans leurs simulations quand Jupiter avait entre 62% et 93% de sa masse actuelle. Pour les satellites progrades, les valeurs sont entre 50% et 60%.

L'hypothèse faisant intervenir des collisions comme effet dissipatif fut proposé par Pollack *et al.* (1979). Il peut s'agir de collisions entre un satellite de Jupiter et un objet sur une orbite héliocentrique ou de collisions entre les satellites eux-mêmes (Nesvorný *et al.* 2003). Ces derniers montrent que les collisions de ce type ont pu être importantes dans le passé pour modéliser leurs distributions orbitales et dimensionnelles (voir section suivante dans le cadre du modèle de Nice). Les collisions entre satellites progrades et rétrogrades ont pu être en particulier un mécanisme important éliminant de larges fractions de satellites à des distances spécifiques de Jupiter. Les auteurs montrent également que la résonance de Kozai est un élément qui a pu empêcher certaines configurations orbitales menant à des collisions. Néanmoins, leurs résultats impliquent que cette résonance n'a probablement pas été un mécanisme de premier importance pour les captures, à cause du faible nombre de satellites actuellement présents dans cette résonance.

Ćuk & Burns (2004) ont intégré numériquement le groupe prograde des satellites irréguliers joviens vers le passé en prenant en compte un disque de gaz circumplanétaire autour de Jupiter : leurs résultats proposent une origine possible du corps parent des satellites dans la région des astéroïdes du groupe Hilda. Christou (2005) a également montré qu'une dispersion significative du groupe prograde a pu exister depuis sa création à cause des perturbations gravitationnelles entre les satellites.

### 1.3.3 Capture des satellites durant la migration des planètes et modèle de Nice

Ćuk & Gladman (2006) ont proposé une capture des satellites irréguliers durant le passage de Jupiter et Saturne dans leur résonance de moyen mouvement 1 :2. Bien que ce scénario produise des répartitions de satellites irréguliers satisfaisantes pour Saturne, les satellites irréguliers Joviens sont très mal reproduits. Les auteurs insistent sur le fait que dans ce scénario les résonances faisant intervenir la Grande Inégalité ( $5n_s - 2n_j$ ) de type :

$$5n_s - 2n_j - 2g - g_6, \quad (1.7)$$

peuvent jouer un rôle très important dans la déstabilisation des satellites de Saturne. Ce type de résonance est en outre très important dans la situation dynamique actuelle des satellites de Saturne (Ćuk & Burns 2004b, Turrini *et al.* 2008).

Nesvorný *et al.* (2007) ont également étudié la capture des satellites en utilisant un modèle de migration des planètes - le modèle de Nice - proposé par Tsiganis *et al.* (2005) (on

peut noter également une étude préliminaire par Beaugé et al. 2002). Dans cette hypothèse les satellites irréguliers auraient été capturés il y a  $\sim 3,9$  milliards d'années, bien après la formation des planètes géantes, dans un milieu non dissipatif, impliquant l'existence de plusieurs générations de satellites irréguliers. Ces générations auraient disparu du fait de passages proches de grands planétésimaux ou de corps de la taille de planètes à travers les systèmes de satellites durant la période de migration des planètes géantes. Les auteurs montrent ainsi que les systèmes de satellites irréguliers de Saturne, Uranus et Neptune sont un produit naturel du modèle de Nice et proviennent du disque primordial trans-planétaire, d'où sont originaires les astéroïdes Troyens et la ceinture de Kuiper. Malheureusement la répartition actuelle des satellites irréguliers de Jupiter est encore mal expliquée par ce modèle.

Le scénario proposé ci-dessus implique un type de capture faisant intervenir quatre corps (Soleil + 2 planètes géantes + satellite). Les rencontres proches entre planètes créant les zones chaotiques nécessaires aux captures des satellites, ceux-ci se retrouvant "prisonniers" après les rencontres proches. Vokrouhlický et al. (2008) ont étudié un système de capture différent ayant eu lieu durant la période de migration des planètes également décrite par le modèle de Nice où un des composants d'un astéroïde binaire est capturé par une planète lors d'une rencontre proche. Leurs résultats indiquent que ce processus est peu crédible du fait des différentes distributions orbitales obtenues et du faible nombre de captures. Ce type de capture est toutefois très plausible quant à la capture de *Triton* par Neptune.

Nesvorný et al. (2003) ont montré que la population primordiale des satellites irréguliers a été modélisée de manière très importante par des collisions, créant le groupe prograde, et les familles rétrogrades *Ananke* et *Carme* (Nesvorný et al. 2004). Cette hypothèse a été récemment reprise par Bottke et al. (2010). Leurs résultats montrent que la différence actuelle entre les distributions de tailles des satellites irréguliers et celles des Troyens et des objets originaires du disque primordial peut être expliquée par la fréquence des collisions entre satellites ayant eu lieu à l'époque de leurs captures. Leurs simulations indiquent également que ces collisions (et la perte de masse des systèmes de satellites qui en résulte) se sont échelonnées sur quelques centaines de millions d'années après leur capture. Les répartitions de satellites observées aujourd'hui pourraient donc dater de  $\sim 3,5$  milliards d'années.

## Chapitre 2

# Dynamique des satellites irréguliers de Jupiter et étude préliminaire des perturbations

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Dynamique des satellites</b>	<b>21</b>
2.1.1	Nécessité de modèles séculaires de degrés élevés	21
2.1.2	Les résonances importantes	22
2.1.3	Études dynamiques des satellites	23
<b>2.2</b>	<b>Perturbations secondaires</b>	<b>23</b>
2.2.1	Estimation analytique des perturbations	24
2.2.2	Résonances de moyen mouvement possibles avec les satellites Galiléens	27
2.2.3	Résonances séculaires possibles avec les satellites Galiléens	28

Les approches utilisées pour l'étude dynamique des satellites irréguliers sont sensiblement identiques à celles utilisées pour d'autres populations de petits corps, comme les astéroïdes de la ceinture principale, les objets transneptuniens ou les satellites Troyens. On peut cependant noter un nombre d'études dynamiques plus faible par rapport aux autres populations précitées, de part la découverte tardive de la majorité des satellites connus aujourd'hui, et leurs orbites fortement perturbées, nécessitant des modèles analytiques d'ordres élevés.

Avant d'aborder ces études dynamiques il faut noter que la définition de la longitude du péricentre est modifiée pour les orbites rétrogrades, modifiant de la même façon la valeur de la fréquence associée  $g$  :

$$\begin{aligned} \text{orbite prograde : } & \varpi = \Omega + \omega, & g = \nu_H + \nu_G \\ \text{orbite rétrograde : } & \varpi = \Omega - \omega, & g = \nu_H - \nu_G \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est la longitude du noeud,  $\omega$  l'argument du péricentre et  $\nu_H$  et  $\nu_G$  sont leurs fréquences respectives. La longitude du noeud est inchangée par rapport à sa définition classique, de même que sa fréquence associée :  $s = \nu_H$ .

Tous les éléments orbitaux décrits dans la suite sont, sauf mention contraire, exprimés dans le repère jovicentrique.

## 2.1 Dynamique des satellites

Les satellites sont caractérisés en premier lieu par leurs distances importantes à la planète ; en effet leur ratio typique en demi-grand axe ( $\frac{a}{a_{\odot}}$ ) où  $a_{\odot}$  est le demi-grand axe du Soleil, peut par exemple atteindre  $\frac{1}{27}$  pour le satellite jovien le plus éloigné (en comparaison le ratio Lune/Soleil est de  $\frac{1}{390}$ ). Très perturbés par le Soleil en première approximation, les satellites présentent donc de larges oscillations de leurs éléments orbitaux. Une conséquence directe de cette forte perturbation est que la séparation classique entre angles “lents” et “rapides” où les fréquences correspondantes du moyen mouvement et des précessions sont souvent séparées de plusieurs ordres de grandeurs ici ne tient plus. En effet, généralement, pour les satellites irréguliers, les périodes typiques de précession des angles séculaires ne sont pas supérieures à 50 fois les périodes de révolution, excepté les cas particuliers de satellites dans des résonances séculaires.

### 2.1.1 Nécessité de modèles séculaires de degrés élevés

Cette particularité a été le problème principal dans l’application de méthodes analytiques. En effet, la méthode de perturbation classique consistant à moyenniser au premier ordre des masses<sup>1</sup> les anomalies moyennes du satellite et du Soleil (juste la suppression des termes contenant les anomalies moyennes dans le développement de la fonction perturbatrice due au Soleil) (“Scissor averaging”, Ferraz-Mello 2007) qui rencontre un grand succès lorsqu’elle est appliquée à d’autres types de populations de petits corps, ici a peu d’efficacité. Le problème vient du fait qu’une moyennisation simple de l’anomalie moyenne du Soleil supprime des termes importants dans la fonction perturbatrice, en particulier le terme d’évection ( $2\varpi - 2\lambda_{\odot}$ ) qui a un effet important sur la fréquence du péricentre du satellite. Yokoyama et al. (2003) ont clairement montré qu’un développement au premier ordre perturbatif est insuffisant pour une étude qualitative, et ce même en utilisant des polynômes de Legendre élevés. En fait le nombre de termes pris en compte dans la fonction perturbatrice est peu important : les auteurs ont pu montrer que la méthode de moyennisation numérique de Schubart (Moons 1994) qui est une méthode au premier ordre perturbatif mais non limité par le ratio ( $\frac{a}{a_{\odot}}$ ) reste insuffisante.

Ce problème est en fait le même que celui rencontré par Newton lui-même lors de l’élaboration de sa théorie de la Lune, où la période de précession prédite par le modèle moyenné (18 ans) était deux fois plus longue que celle observée.

Aujourd’hui, plusieurs travaux se sont penchés sur ce problème en développant et en utilisant des méthodes de perturbations de degrés plus élevés : Čuk & Burns (2004) ont développé un modèle séculaire à l’ordre 2 en tenant compte de l’évection par une méthode de variation des constantes similaire à celle utilisée par Brouwer & Clemence (1961) dans leur théorie analytique du mouvement de la Lune. Aucun développement en excentricité n’est utilisé et les calculs sont effectués en utilisant le 2<sup>ème</sup> polynôme de Legendre, mais pour plus de précision leur modèle est complété par des termes ad-hoc provenant de polynômes d’ordres supérieurs.

Beaugé et al. (2006) ont développé un modèle séculaire plus précis s’appuyant sur le développement de Kaula (Kaula 1962) de la fonction perturbatrice solaire et une méthode de perturbation en séries de Lie jusqu’au 3<sup>ème</sup> ordre. Les fonctions génératrices correspondantes étant explicitement calculées dans leur modèle, celui-ci peut donner accès aux éléments propres et aux fréquences fondamentales des satellites.

---

<sup>1</sup>Au lieu de la masse, les fonctions perturbatrices pour les problèmes de satellites privilégient le rapport des demi-grands axes comme étant le “petit paramètre” sur lequel est ensuite construit la méthode de perturbation.

### 2.1.2 Les résonances importantes

Un soin particulier a été mené concernant l'étude de la résonance séculaire  $\nu_{\odot} = \dot{\varpi} - \dot{\varpi}_{\odot}$  (Saha & Tremaine 1993, Whipple & Shelus 1993, Beaugé & Nesvorný 2007, Nesvorný et al. 2003, Yokoyama et al. 2003, Čuk & Burns 2004, Correa Otto et al. 2009) qui est une des résonances séculaires les plus importantes influençant les satellites.

Dans la région des satellites irréguliers, les modèles séculaires ont montré que si la fréquence de précession du noeud  $s$  varie relativement peu, la fréquence de précession du péricentre  $g$  couvre au contraire un large intervalle de valeurs et peut en particulier devenir nulle. La fréquence de précession du Soleil  $g_{\odot}$  étant faible, on trouve donc la résonance  $\nu_{\odot} = g - g_{\odot}$  quasiment au même endroit. Les satellites rétrogrades *Pasiphae* et *Sinope* sont connus comme étant temporairement en libration dans cette résonance ; cette étude montre que d'autres satellites le sont également (voir Section 4.2.2). Depuis la découverte de la résonance  $\nu_{\odot}$  par Saha & Tremaine (1993) et Whipple & Shelus (1993), sa dynamique a été étudiée en établissant des modèles de la résonance par Yokoyama et al. (2003) et Beaugé & Nesvorný (2007) qui ont démontré l'existence de deux modes de libration ( $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$  avec  $\alpha = \varpi - \varpi_{\odot}$ ). Correa Otto et al. (2009) ayant montré que le modèle séculaire d'ordre 3 de Beaugé et al. (2006) n'était pas suffisamment précis pour une étude détaillée de cette résonance, les auteurs ont montré avec une méthode numérique que la libration  $\alpha = 0$  apparaît pour des valeurs d'inclinaison moyenne du satellite  $\langle i \rangle \gtrsim 150^{\circ}$  tandis que la libration  $\alpha = \pi$  est valable pour  $\langle i \rangle \lesssim 140^{\circ}$ .

À cause de leurs fortes excentricités et leurs fortes inclinaisons, les satellites irréguliers sont très perturbés par la résonance de Kozai ( $g = s$ ). Trois satellites sont connus pour être en libration : *Carpo*, *Themisto* et *Euporie*. Dans cette étude j'ai déterminé également la libration de *2003J18* (voir Section 4.2.1). À cause de l'importance de cette résonance pour les satellites irréguliers de nombreux travaux y ont été dédiés (Beaugé et al. 2006, Beaugé & Nesvorný 2007, Carruba et al. 2002a, Čuk & Burns 2004, Nesvorný et al. 2003, Yokoyama et al. 2003). L'expression de la fonction perturbatrice de Kozai classique obtenue avec une moyennisation des anomalies moyennes au premier ordre s'écrit (voir par exemple Morbidelli 2002 ou Carruba et al. 2002a pour le portrait de phase de la résonance) :

$$R_{\odot} = \frac{GM_{\odot}a^2}{a_{\odot}^3} \left[ \frac{1}{8}(1 + \frac{3}{2}e^2)(3 \cos(I)^2 - 1) + \frac{15}{16}e^2 \sin(I)^2 \cos(2\omega) \right]. \quad (2.1)$$

Cette approximation est d'ordre  $(\frac{a}{a_{\odot}})^2$ . Toujours au premier ordre perturbatif, la résonance a été étudiée en utilisant une approximation jusqu'au terme  $(\frac{a}{a_{\odot}})^4$  (Yokoyama et al. 2003) ou avec une méthode semi-analytique sans expansion en ratio de demi-grand axe (Nesvorný et al. 2003). Avec ces approximations, les points de bifurcation de la résonance Kozai ne dépendent ni du demi-grand axe, ni de la direction du mouvement orbital du satellite, deux caractéristiques qui changent avec le fait d'utiliser des modèles analytiques d'ordres perturbatifs supérieurs (Beaugé et al. 2006, Čuk & Burns 2004). Ce fait peut être clairement constaté de manière numérique sur des cartes de stabilité (Hinse et al. 2010).

Si la résonance d'évection ( $g - n_{\odot}$ ) est très importante dans la précision des modèles séculaires (Čuk & Burns 2004), des orbites résonantes stables ne peuvent être trouvées dans des modèles dynamiques réalistes (Nesvorný et al. 2003, Frouard et al. 2010) car la résonance se trouve dans des zones chaotiques. En revanche dans des modèles dynamiques plus simples comme le problème de trois corps restreint plan et circulaire, la résonance peut être étudiée de manière analytique (Yokoyama et al. 2008, Frouard et al. 2010). Cette étude constitue l'objet du Chapitre 5.

### 2.1.3 Études dynamiques des satellites

Concernant l'étude dynamique des satellites joviens, un pas important a été réalisé avec les travaux de Saha & Tremaine (1993). Avec des méthodes semi-analytiques et numériques, les auteurs ont étudié la dynamique des 8 satellites connus à cette date : ils confirmèrent la présence de *Pasiphae* et *Sinope* dans la résonance séculaire  $\nu_{\odot}$  détectée par Whipple & Shelus (1993). Ils calculèrent l'Exposant Caractéristique Maximal de Lyapunov à partir des intégrations numériques de *Pasiphae*, *Sinope*, *Himalia* et *Leda* sur une période de 2 millions d'années. Leurs résultats montrent la présence possible de chaos, principalement pour *Sinope*, dont l'origine vient probablement du chevauchement de résonances entre la résonance  $\nu_{\odot}$  et la résonance de moyen mouvement 6 :1 avec le Soleil.

Des travaux postérieurs montrent que la totalité des satellites connus en 2003 (35 objets) reste en orbite autour de la planète sur un temps très long (Nesvorný et al. 2003, Yokoyama et al. 2003) et les éléments moyens trouvés pour ces satellites montrent leur organisation en familles (Nesvorný et al. 2003, 2004), un fait important qui a été confirmé analytiquement (Beaugé & Nesvorný 2007). En ce qui concerne les études de stabilité de la structure de l'espace des phases de la région des satellites, des intégrations numériques de satellites fictifs (Yokoyama et al. 2003, Carruba et al. 2002a, Nesvorný et al. 2003, Hinse et al. 2010) confirment une situation dynamique différente entre les régions progrades et rétrogrades (Hénon 1969, 1970). L'étude de la structure dynamique de la région des satellites joviens avec la détermination des différentes résonances de moyen mouvement importantes a été réalisée dans le cadre du problème de trois corps par Hinse et al. (2010).

## 2.2 Perturbations secondaires

Jusqu'à présent, les études analytiques ont été réalisées dans le cadre du problème de trois corps restreint, centré sur Jupiter et où le corps perturbateur (Soleil) possède une orbite fixe, elliptique et plane (Čuk & Burns 2004) ou inclinée (Beaugé et al. 2006, Beaugé & Nesvorný 2007). Les perturbations indirectes des planètes géantes sur le mouvement du satellite consistent à prendre en compte dans ces modèles une variation séculaire réaliste de l'orbite solaire (voir par exemple Laskar 1988). Je montrerai dans l'étude numérique de la dynamique des satellites (Chapitre 4) que les perturbations indirectes ont une influence importante en apportant dans le mouvement du Soleil la fréquence de la Grande Inégalité.

Si de telles perturbations indirectes ne constituent pas quelque chose d'inédit dans leur ajout à un modèle analytique, ce n'est en revanche pas le cas des perturbations directes dues aux planètes géantes. En effet l'écriture et le développement de leurs fonctions perturbatrices est compliquée par le fait que leurs orbites, dans le système de référence jovicentrique, ne peuvent être vues comme des ellipses avec Jupiter pour foyer. Une tentative de formulation analytique à ce problème est présentée dans le chapitre 6. Bien sûr ces perturbations sont aisément prises en compte dans des intégrations numériques.

Une autre source de perturbations agissant sur les satellites provient des satellites Galiléens *Io*, *Europe*, *Ganymède* et *Callisto*. Ces satellites massifs se situent à des distances de Jupiter variant de 0.002812 à 0.01255 UA, alors que le satellite irrégulier le plus proche de Jupiter, *Thémisto*, possède un péricentre moyen  $\langle q \rangle = \langle a \rangle(1 - \langle e \rangle)$  égal à 0.0368 UA. Les satellites Galiléens sont bien sûr très peu massifs comparés aux planètes géantes, de  $\frac{1}{41465746}$  à  $\frac{1}{13421807} M_{\odot}$ , soit 1000 fois moins massifs.

Leurs perturbations séculaires sur le mouvement d'un satellite ne sont pas difficiles à obtenir, bien qu'il ne soit pas certain que dans le cas d'un développement des fonctions perturbatrices exprimé en polynômes de Legendre, c'est à dire en ratio de distances à Jupiter ( $\frac{r}{r_{gal}}$ ), une méthode de perturbation au premier ordre (en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ) soit suffisante.

Comme pour le cas des planètes géantes, ces perturbations peuvent être facilement prises en compte dans des intégrations numériques, bien que la vitesse de calcul en soit fortement réduite. En effet le pas d'intégration étant adapté à la plus petite période du système dynamique, ici celle de *Io* ( $\sim 1,8$  jour), des problèmes de calcul se posent si l'optique est d'intégrer numériquement un grand nombre d'orbites fictives ou de réaliser des simulations à très long terme.

Haghighipour & Jewitt (2008) ont étudiés, pour les quatre planètes géantes, la zone entre les satellites massifs et les satellites irréguliers, où aucun objet n'a encore été observé. Leurs résultats montrent que sous l'action des satellites massifs, une partie significative de cette zone peut être vidée sur des échelles de temps correspondant à  $10^5 - 10^6$  années, bien que des intégrations numériques plus longues ( $> 10^7$  années) soient nécessaires pour observer les effets séculaires des satellites massifs sur les parties les plus extérieures de cette zone et statuer sur sa stabilité.

La dernière perturbation secondaire s'exerçant sur les satellites irréguliers est celle correspondant à la non-sphéricité de Jupiter. Son effet est important pour les orbites proches de la planète mais décroît rapidement avec le demi-grand axe et est mineur dans la région des satellites irréguliers. Nesvorny et al. (2003) montrent numériquement que la dynamique globale dans la sphère de Hill de Jupiter est très peu affectée par cette non-sphéricité.

### 2.2.1 Estimation analytique des perturbations

Dans cette partie je tente d'estimer analytiquement l'amplitude des perturbations directes dues aux planètes géantes, aux satellites Galiléens et à la non-sphéricité de Jupiter sur le mouvement des satellites. J'ai choisi de montrer l'amplitude du moyen mouvement et des deux fréquences de précessions provoquées par chaque perturbation : dans chaque cas la fonction perturbatrice moyenne  $\langle R \rangle$  est obtenue en moyennant analytiquement ou numériquement la fonction perturbatrice  $R$  sur tous les angles qu'elle contient. Les équations de Lagrange donnent ensuite les fréquences associées à chaque angle du satellite :

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \left( \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} - \frac{e \cos i}{(1 - e^2) \sin i} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i}. \quad (2.4)$$

En Fig.2.1, on montre l'influence de ces différentes perturbations sur les fréquences de révolution et de précessions de satellites irréguliers typiques. Plusieurs méthodes sont utilisées en fonction du corps perturbateur :

- La perturbation due au Soleil provient du modèle analytique d'ordre 2 de Čuk & Burns (2004), mais de surcroît moyennée sur les longitudes du péricentre et du noeud, de façon à obtenir un problème entièrement intégrable. Il doit être noté que de cette manière, le cycle de Kozai est approximé et qu'aucune libration n'est possible ; les fréquences sont donc mal approximées (c'est surtout le cas de la fréquence de l'argument du péricentre) car les satellites réels possèdent de fortes excentricités et inclinaisons. Toutefois, on peut vérifier que cette erreur n'excède pas  $2^\circ$  /an pour les

satellites réels les plus excentriques et inclinés, ce qui n'est pas dommageable pour une vision qualitative de l'amplitude des perturbations.

- Les perturbations dues aux satellites Galiléens viennent de l'expansion de leurs fonctions perturbatrices à l'ordre 4 en excentricité et en inclinaison développée par Murray & Dermott (1999). De la même manière, ces fonctions perturbatrices sont moyennées sur tous les angles  $(\lambda, \varpi, \Omega, \lambda_{gal}, \varpi_{gal}, \Omega_{gal})$  (sous réserve qu'une simple moyennisation au premier ordre sur les angles soit pertinente). La forme moyennée des fonctions perturbatrices  $R_{gal}$  s'écrit pour chaque satellite Galiléen :

$$\langle R_{gal} \rangle = \frac{GM_{gal}}{a} \left[ \begin{aligned} & f_1 + (e^2 + e_{gal}^2)f_2 + (s^2 + s_{gal}^2)f_3 \\ & + e_{gal}^4 f_4 + e^2 e_{gal}^2 f_5 + e^4 f_6 \\ & + (e^2 s^2 + e_{gal}^2 s^2 + e^2 s_{gal}^2 + e_{gal}^2 s_{gal}^2) f_7 \\ & + (s^4 + s_{gal}^4) f_8 + s^2 s_{gal}^2 f_9 \end{aligned} \right],$$

où  $s = \sin \frac{1}{2}i$ ,  $s_{gal} = \sin \frac{1}{2}i_{gal}$  et où les  $f_i$  sont des fonctions dépendantes des demi-grands axes à travers des coefficients de Laplace.

- Les perturbations des planètes géantes sont déterminées de manière semi-analytique. Chaque fonction perturbatrice  $R_p(\vec{X}, \vec{X}_p)$  due à la planète  $P$  s'exprime grâce aux vecteurs du satellite  $\vec{X}$  et de la planète  $\vec{X}_p$  exprimés dans le repère jovicentrique ; si l'orbite de la planète est elliptique du point de vue jovicentrique,  $\vec{X}_p$  peut être exprimé grâce aux éléments orbitaux de la planète. Le cas échéant, comme ici, j'exprime  $\vec{X}_p$  en fonction des éléments orbitaux de l'orbite héliocentrique de la planète et des éléments orbitaux de l'orbite jovicentrique du Soleil (voir Chapitre 6). La moyennisation des fonctions perturbatrices sur les angles  $(\lambda, \varpi, \Omega, \lambda_p, \varpi_p, \Omega_p, \lambda_\odot, \varpi_\odot, \Omega_\odot)$  se fait par une méthode de Monte-Carlo :

$$\langle R_p \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_p(\vec{\phi}_k), \quad (2.5)$$

où chaque  $\vec{\phi}_k$  contient les neuf angles du système pris avec des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[0 : 2\pi]$ .

Enfin, les dérivées partielles  $\frac{\partial \langle R_p \rangle}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial \langle R_p \rangle}{\partial e}$  et  $\frac{\partial \langle R_p \rangle}{\partial i}$  nécessaires au calcul des équations de Lagrange sont déterminées numériquement par des schémas de dérivation de type :

$$\frac{\partial \langle R_p \rangle}{\partial x} = \frac{\langle R_p \rangle(x+h) - \langle R_p \rangle(x-h)}{2h}, \quad (2.6)$$

d'ordre  $h^2$  ou bien d'ordres supérieurs, avec  $h \ll 1$ . Cette méthode est également appliquée aux planètes internes.

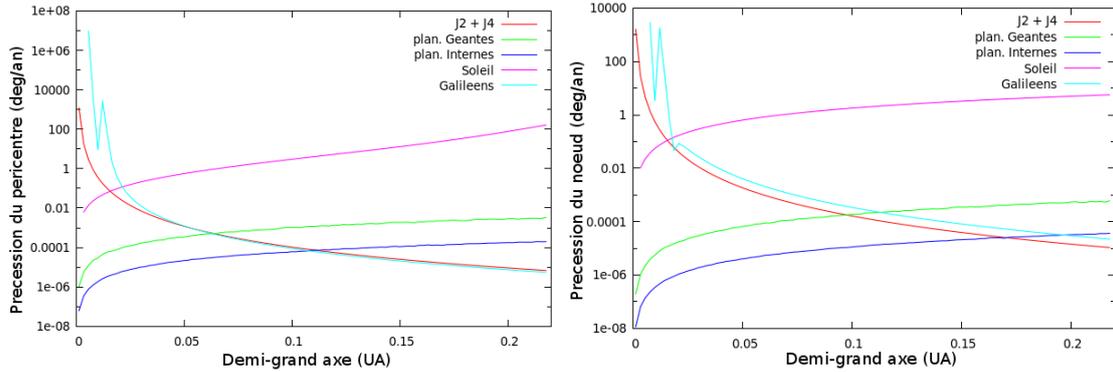
- la perturbation séculaire due aux  $J_2$  et  $J_4$  de Jupiter provient de l'expression moyennée classique du potentiel gravitationnel de Jupiter limité aux 2<sup>nd</sup> et 4<sup>eme</sup> polynômes de Legendre (Duriez 2002) :

$$\langle R_{J_2} \rangle = GM_{Jup} J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (2.7)$$

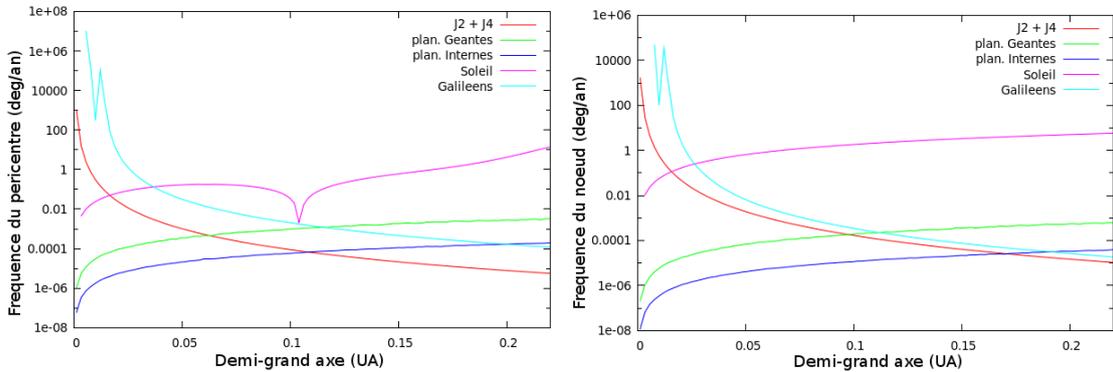
$$\langle R_{J_4} \rangle = -GM_{Jup} J_4 \frac{a_e^4}{a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{105}{64} \sin^4 i \right). \quad (2.8)$$

On note que  $\langle R_{J_4} \rangle$  a également été moyennée par rapport à l'argument du péricentre  $\omega$ .

Les figures 2.1 à 2.4 montrent les variations des fréquences de précession des satellites en fonction du demi-grand axe et dues à différentes perturbations. Chaque figure correspond à des excentricités et des inclinaisons moyennes représentatives des groupes et familles des satellites irréguliers (le demi-grand axe des familles est indiqué pour chaque figure). Pour faciliter la clarté, les fréquences sont indiquées en valeurs absolues et tracées en échelle logarithmique.



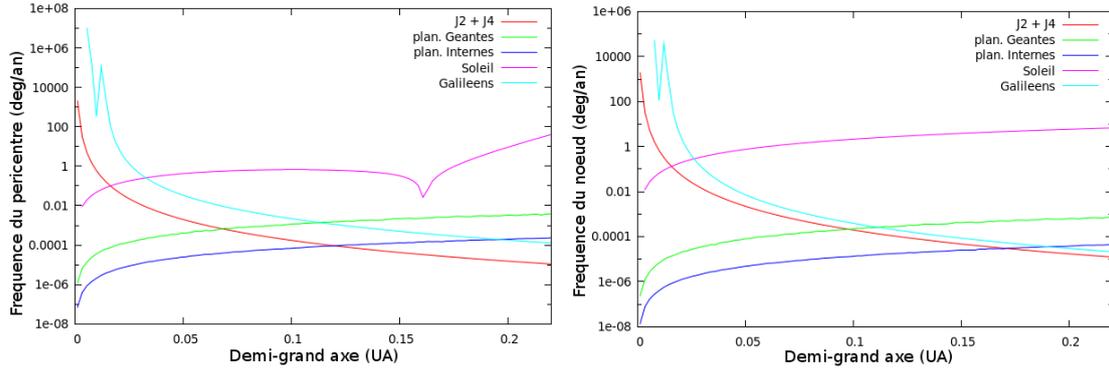
**Fig. 2.1** – Fréquences de précession en deg/an pour un satellite prograde représentatif du groupe prograde. Excentricité moyenne : 0.15, inclinaison moyenne : 28°. (Demi-grand axe moyen du groupe prograde : 0.078 UA).



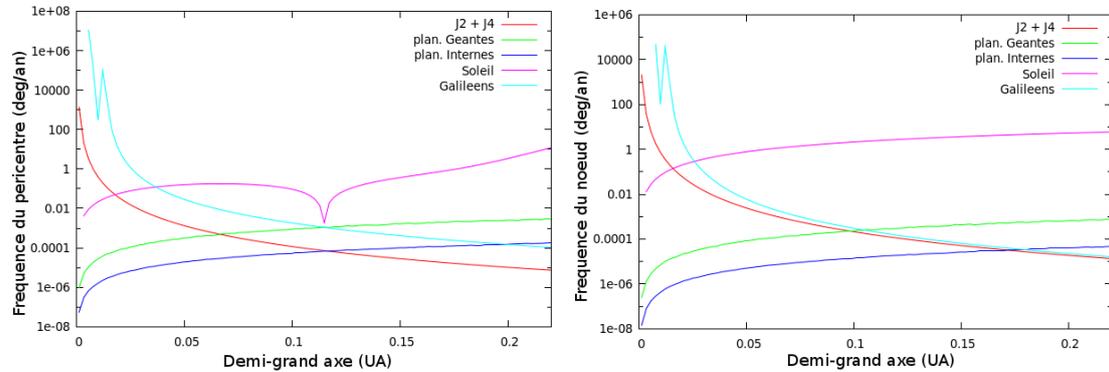
**Fig. 2.2** – Fréquences de précession en deg/an pour un satellite rétrograde représentatif de la famille *Ananke*. Excentricité moyenne : 0.24, inclinaison moyenne : 148°. (Demi-grand axe moyen de la famille *Ananke* : 0.14 UA).

La perturbation solaire est bien sûr la plus importante pour les demi-grands axes correspondant aux satellites réels. La seconde perturbation en importance est celle correspondant aux planètes géantes : plus faible de plusieurs ordres de grandeur comparé à la perturbation solaire, elle augmente légèrement avec le demi-grand axe du satellite et dépend très peu de son excentricité et de son inclinaison. On note cependant que pour les satellites progrades, elle est surpassée par l'influence des satellites Galiléens concernant la fréquences de révolution et de précession de la longitude du noeud. La perturbation des satellites Galiléens décroît de manière significative avec le demi-grand axe et sa valeur maximum se situe dans la zone de ces satellites, où les pics observés correspondent à des demi-grands axes très proches de ces satellites massifs.

Les perturbations les plus mineures sont celles correspondant à la non-sphéricité de Jupiter et celles des planètes internes. L'effet du  $J_2$  et du  $J_4$  décroît fortement avec le demi-grand axe du satellite. Pour finir, l'influence des planètes internes suit une évolution



**Fig. 2.3** – Fréquences de précession en deg/an pour un satellite rétrograde représentatif de la famille *Carme*. Excentricité moyenne : 0.26, inclinaison moyenne : 164°. (Demi-grand axe moyen de la famille *Carme* : 0.154 UA).



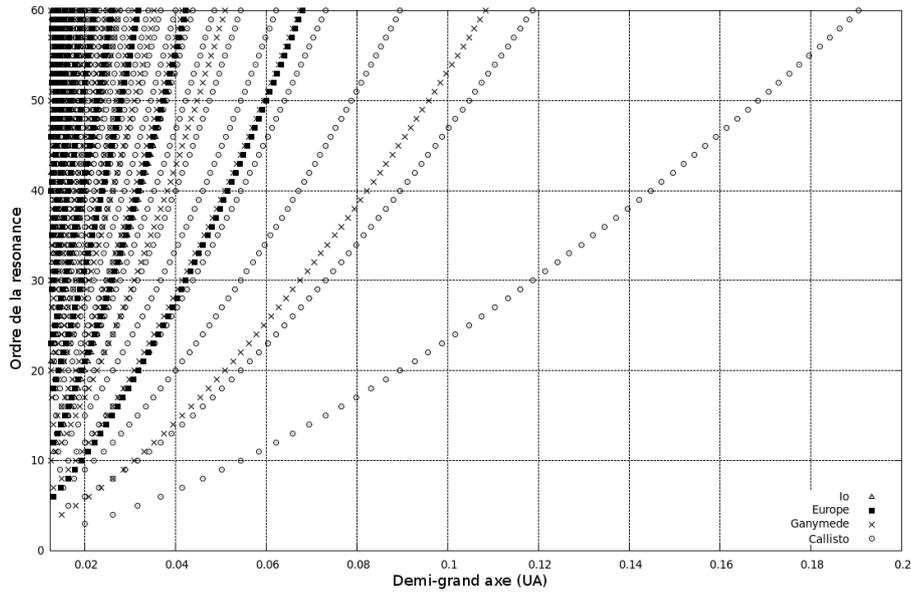
**Fig. 2.4** – Fréquences de précession en deg/an pour un satellite rétrograde représentatif de la famille *Pasiphae*. Excentricité moyenne : 0.4, inclinaison moyenne : 148°. (Demi-grand axe moyen de la famille *Pasiphae* : 0.158 UA).

similaire à celle des planètes géantes, diminuée d'un facteur  $10^3$ .

Des figures 2.1 à 2.4, on peut conclure que l'évolution séculaire des satellites réels et de leurs régions est largement dominée par un problème de deux corps perturbé par le Soleil. Cette comparaison est cependant limitée : les perturbations dues aux résonances de moyen mouvements et séculaires ne peuvent être étudiées puisque les fonctions perturbatrices sont moyennées sur tous les angles. Dans le même ordre d'idée, l'évolution à long terme des excentricités et des inclinaisons des satellites Galiléens et des planètes (suivant par exemple l'approximation de Laplace-Lagrange) n'apparaît pas dans cette étude.

## 2.2.2 Résonances de moyen mouvement possibles avec les satellites Galiléens

Les résonances de moyen mouvement possibles entre satellites Galiléens et irréguliers de la forme  $k_1 n + k_2 n_{gal}$  sont généralement d'ordres ( $|k_1| + |k_2|$ ) élevés. La figure 2.5 montre l'ordre des résonances entre un satellite irrégulier et *Ganymède* et *Callisto* en fonction du demi-grand axe nominal (e.g. non perturbé) de la résonance. Les résonances possibles avec *Io* et *Europe* ne sont pas indiquées car d'ordres plus élevés dans la zone des satellites irréguliers. En fait pour des demi-grands axes donnés et supérieurs à 0.026 UA, les résonances d'ordres les moins élevés sont d'abord les résonances de type  $k_2 : 1$  avec *Callisto* et  $k_2 \geq 3$ , viennent ensuite leurs harmoniques  $k_2 : 2$  avec  $k_2 \geq 6$ , puis les résonances de



**Fig. 2.5** – Ordre des résonances de moyen mouvement entre un satellite irrégulier et les satellites Galiléens en fonction du demi-grand axe nominal de la résonance.

type  $k_2 : 1$  avec  $k_2 \geq 8$  avec *Ganymède*. On peut ensuite trouver les résonances de type  $k_2 : 3$  avec *Callisto* et  $k_2 \geq 9$ .

*Themisto* est le satellite irrégulier qui possède le demi-grand axe le plus faible ( $\langle a \rangle = 0.0495$  UA), proche d’une résonance 8 :1 avec *Callisto*, viennent ensuite les résonances 15 :2 et 16 :2 avec *Callisto*, puis 19 :1 avec *Ganymède*.

Les résonances d’ordres les plus faibles pour *Himalia*, *Elara*, *Lysithea* et *Leda* sont les résonances 14 :1, 15 :1, 16 :1 avec *Callisto*, suivies par les résonances 28 :2 à 32 :2 avec *Callisto* puis de 33 :1 à 37 :1 avec *Ganymède*. Le demi-grand axe de *Carpo* le place près de la résonance 27 :1 avec *Callisto*.

Les satellites rétrogrades ont ensuite des demi-grands axes où des résonances avec *Callisto* de 33 :1 à 59 :1 peuvent être trouvées. Il est intéressant de noter que la région instable déterminée par Haghhighipour & Jewitt (2008) se situe en deçà de 0.0214 – 0.025 UA ; en effet pour des demi-grands axes inférieurs à cette valeur, de nombreuses résonances d’ordre faibles très proches les unes des autres peuvent être trouvées. En se chevauchant, elles peuvent ainsi rendre la zone chaotique.

### 2.2.3 Résonances séculaires possibles avec les satellites Galiléens

Les résonances séculaires sont potentiellement plus influentes pour la dynamique des satellites irréguliers car les fréquences de précession des deux types de satellites sont parfois très proches, permettant particulièrement pour *Ganymède* et *Callisto* la présence de résonances séculaires d’ordres très faibles, et donc de forte importance. Le tableau suivant résume les fréquences de précession de la longitude du péricentre  $g$  ainsi que de la longitude du noeud  $s$  pour les quatre satellites Galiléens et les satellites irréguliers en deg/an. Les fréquences minimum et maximum des satellites irréguliers sont indiquées.

Satellite	$g$	$s$
Io	57.75	-48.44
Europe	14.19	-11.91
Ganymède	2.66	-2.61
Callisto	0.67	-0.64
irréguliers progrades	-3.18 / 1.51	-3.18 / -0.67
irréguliers rétrogrades	-0.81 / 2.58	2.58 / 4.69

Les fréquences séculaires fondamentales des satellites Galiléens proviennent de Lainey et al. (2006), et celles des satellites irréguliers viennent de l'étude numérique présentée en Section 4.1.2. Comme dans toutes les études précédentes des satellites irréguliers, la perturbation des satellites Galiléens est négligée dans cette thèse, mais il serait intéressant d'étudier leur influence, tout au moins avec un modèle séculaire.





## Deuxième partie

# Etude numérique de la dynamique des satellites irréguliers de Jupiter



## Chapitre 3

# Méthodes numériques

### Sommaire

---

<b>3.1 Intégrateurs symplectiques . . . . .</b>	<b>34</b>
3.1.1 Hamiltoniens . . . . .	34
3.1.2 Schémas d'intégration symplectiques . . . . .	36
3.1.3 Intégration des problèmes képlériens - partie A . . . . .	37
3.1.4 Intégration des perturbations - partie B . . . . .	39
3.1.5 Contrôle de la valeur des hamiltoniens et des intégrations . . . . .	40
<b>3.2 Indicateurs de chaos . . . . .</b>	<b>41</b>
3.2.1 Les méthodes spectrales . . . . .	41
3.2.2 Les méthodes variationnelles : l'Exposant Maximal de Lyapunov . . . . .	41
3.2.3 Les méthodes variationnelles : les indicateurs rapides . . . . .	43
3.2.4 Comparaison de différents indicateurs rapides . . . . .	45
3.2.5 Les équations variationnelles . . . . .	47
3.2.6 Intégration des vecteurs tangents dans l'espace des phases étendu . . . . .	48

---

*Je présente ici l'étude de la dynamique à long terme des satellites irréguliers de Jupiter qui a constitué l'essentiel de mon travail de thèse. Avant d'aborder les résultats obtenus concernant la dynamique et la stabilité des satellites irréguliers, je vais présenter dans les parties suivantes les principaux outils numériques que j'ai implémentés et utilisés pour les obtenir ; il s'agit principalement d'un intégrateur symplectique et d'un outil de détection du chaos. Une méthode de filtrage numérique a également été utilisée dans cette étude et sera présentée dans la suite, avec les résultats.*

### 3.1 Intégrateurs symplectiques

#### 3.1.1 Hamiltoniens

Afin d'intégrer numériquement les satellites, j'ai tout d'abord utilisé un intégrateur classique, le RADAU RA-15 (Everhart 1985). J'ai ensuite décidé d'implémenter et d'utiliser un intégrateur de type symplectique. Les intégrateurs symplectiques sont en effet plus rapides que les intégrateurs classiques type Runge-Kutta comme le RADAU et possèdent la particularité de conserver la valeur des hamiltoniens intégrés de manière bornée, c'est à dire sans dérive séculaire.

La construction d'un intégrateur symplectique repose sur la décomposition de l'hamiltonien régissant la dynamique en parties additives aisément intégrables séparément. L'hamiltonien décrivant la dynamique d'une particule autour d'un objet de référence

ponctuel de masse  $m_p$  et perturbé par  $N$  corps ponctuels (le problème restreint) s'écrit (Morbidelli 2002) :

$$H_{rest}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{s}_j) = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{Gm_p}{r} - G \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{1}{d_j} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j}{s_j^3} \right), \quad (3.1)$$

avec les coordonnées canoniques cartésiennes de la particule dénotées par  $r_1, r_2, r_3$  et ses moments conjugués par  $v_1, v_2, v_3$ . Les coordonnées cartésiennes des  $N$  corps perturbateurs à l'instant  $t$  dans le même référentiel sont représentées par les vecteurs  $\mathbf{s}_j$  et l'on a  $\mathbf{d}_j = \mathbf{r} - \mathbf{s}_j$ . Les équations de Hamilton décrivant l'évolution temporelle des variables s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.2)$$

Appliqués à l'hamiltonien du problème restreint (3.1), on obtient :

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} + G \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\mathbf{d}}{d_j^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{d}_j = \mathbf{s}_j - \mathbf{r}$ . L'hamiltonien (3.1) est naturellement décomposé en parties intégrables séparément de manière triviale. En effet les premier et deuxième termes ( $\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{Gm_p}{\|\mathbf{r}\|}$ ) réécrits en variables de Delaunay ( $L, G, H, M, \omega, \Omega$ ) représentent l'hamiltonien d'un problème képlérien :

$$H_{kep}(L, -, -, -, -, -) = -\frac{G^2 m_p^2}{2L^2} \quad (3.5)$$

dont la solution analytique est connue (voir la section suivante pour plus de détails). La perturbation  $-G \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\|\Delta_j\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j}{\|\mathbf{s}_j\|^3} \right)$  ne dépend pas des moments  $\mathbf{v}$  et est donc aisément intégrable.

Les positions des corps perturbateurs  $\mathbf{s}_j$  sont dépendantes du temps ; leurs évolutions dans l'hamiltonien (3.1) sont donc forcées. La représentation des  $\mathbf{s}_j(t)$  pour un temps donné peut donc provenir d'une théorie analytique (par exemple Bretagnon & Francou 1988) ou numérique, par un intégrateur de type RADAU ou symplectique. Ici l'objectif étant d'intégrer numériquement des orbites réelles ou fictives sur de longues durées de l'ordre de 100.000 à 100 millions d'années, les  $\mathbf{s}_j$  proviennent d'une intégration numérique de l'orbite des corps perturbateurs, réalisée pendant l'intégration numérique de la particule ou faite au préalable. Dans cette étude, les corps perturbateurs agissant sur le mouvement de la particule sont le Soleil et les trois planètes géantes *Saturne*, *Uranus* et *Neptune*, Jupiter étant définie comme le centre du repère.

Pour ce faire, j'ai intégré numériquement l'hamiltonien de type planétaire représentant le mouvement des 4 planètes géantes autour du soleil, de manière également symplectique. Contrairement au problème restreint, l'hamiltonien du problème planétaire héliocentrique ne peut être si aisément séparé en parties intégrables. En effet en premier lieu la simple substitution de coordonnées héliocentriques dans l'hamiltonien du problème de  $N$  corps barycentrique ne constitue pas un changement de variables canoniques et ne permet donc pas la conservation de la forme hamiltonienne des équations du mouvement (Morbidelli 2002). Il est donc nécessaire de chercher un changement de variables canoniques, qui puisse ensuite permettre la partition de l'hamiltonien en parties intégrables.

Il est possible d'arriver à ce résultat en utilisant les coordonnées canoniques de Jacobi (Wisdom et Holmann 1991) ou les coordonnées canoniques "héliocentriques" de Poincaré

(Laskar & Robutel 1995 ; Goździewski et al. 2008). En utilisant ces dernières, on obtient l'hamiltonien  $H_{plan} = H_0 + H_1$  avec

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{R}_i^2}{m_i} - \sum_{i=1}^N \frac{Gm_{\odot}m_i}{r_i} \quad (3.6)$$

et

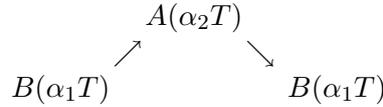
$$H_1 = \frac{1}{2m_{\odot}} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (3.7)$$

$H_0$  est bien l'hamiltonien d'un problème képlérien, tandis que  $H_1$  peut être de nouveau séparé en deux parties dont chacune est intégrable séparément.

### 3.1.2 Schémas d'intégration symplectiques

La théorie sous-jacente aux constructions de schémas symplectiques peut être trouvée de manière complète et détaillée dans de nombreux articles et manuels, par exemple Chambers (1999) et Laskar & Robutel (2001).

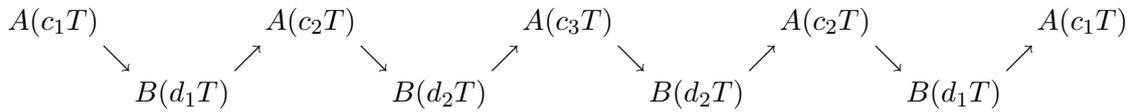
Le premier schéma d'intégration de ce type (*leapfrog*) a été popularisé par Wisdom & Holman (1991). Il consiste à alterner le calcul des équations du mouvement lié au problème képlérien (partie A) et aux perturbations (partie B) qui sont intégrables séparément (voir section précédente) et calculés pour des sous-pas de temps  $\alpha_i T$ . Pour un pas de temps  $T$  donné, on a l'intégration suivante :



**Fig. 3.1** – Schéma d'intégration symplectique  $SBAB_1$  (*leapfrog*).

avec  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  et  $\alpha_2 = 1$ . De nombreux autres schémas d'intégration d'ordre supérieurs ont été proposés, utilisant des coefficients  $\alpha_i$  positifs ou négatifs. Dans cette étude, j'ai utilisé les schémas d'intégration symétriques avec coefficients positifs proposés par Laskar & Robutel (2001).

Pour l'intégration de l'hamiltonien du satellite  $H_{rest}$ , j'ai utilisé un schéma d'intégration de type  $SABA_4$  :



**Fig. 3.2** – Schéma d'intégration symplectique  $SABA_4$  de l'hamiltonien  $H_{rest}$ .

avec les coefficients :

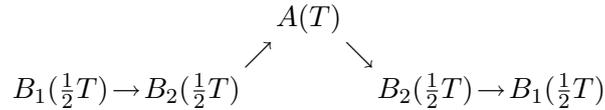
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{70}, \\ c_2 &= \sqrt{525+70\sqrt{30}} - \frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{70}, \\ c_3 &= \frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}, \\ d_1 &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{30}}{72}, \\ d_2 &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{30}}{72}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que  $(d_1 + d_2 + d_2 + d_1) = 1$  et que  $(c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_1) = 1$ .

Le pas de temps  $T$  de l'intégrateur est généralement fixé à  $\frac{1}{20}$  ou  $\frac{1}{30}$  de la plus petite période considérée, qui est ici la période de révolution du satellite. Les pas de temps utilisés pour l'intégration de cet hamiltonien sont de 0,01 et 0,04 année pour les satellites respectivement progrades et rétrogrades. Ils sont quasiment identiques à ceux utilisés par Nesvorný et al. (2003). Avec ce choix la différence maximale relative de l'hamiltonien  $H_{rest}^*$  (voir la Section 3.1.5) reste inférieure à  $10^{-8}$  sur la période d'intégration maximum (100 millions d'années). Aucune évolution séculaire de la valeur de l'hamiltonien n'a été observée sur cette période.

L'hamiltonien des planètes géantes  $H_{plan}$  est calculé simultanément, mais son pas de temps est fixé par le pas de temps utilisé pour l'intégration de  $H_{rest}$ . La plus petite période correspondant à la dynamique de  $H_{plan}$  est celle de Jupiter (11,85 ans). Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser un schéma d'intégration aussi précis que le précédent pour cet hamiltonien, ce qui mènerait à une précision d'intégration inutilement élevée et à un temps d'intégration trop conséquent. Un schéma plus simple peut être utilisé, comme le *leapfrog* (*SBAB1*).

En revanche, la partie perturbations de cet hamiltonien contient des coordonnées et des moments (Eq.3.7). La partie B de l'intégration doit donc être séparée en deux parties  $B_1$  (correspondant aux  $\mathbf{R}_i$  de l'Eq.3.7) et  $B_2$  (correspondant aux  $\mathbf{r}_i$  de l'Eq.3.7) intégrables séparément. On obtient donc pour  $H_{plan}$  :



**Fig. 3.3** – Schéma d'intégration symplectique  $SB_1B_2AB_2B_11$  de l'hamiltonien  $H_{plan}$ .

En pratique, ce *SBAB1* doit être effectué chaque fois que le schéma d'intégration du satellite nécessite les positions actualisées des planètes. Il est donc calculé avant chaque partie *B* de l'intégration de  $H_{rest}$ . Or comme on le voit dans le schéma d'intégration de  $H_{rest}$  (Fig.3.2), la durée entre chaque partie *B* oscille entre  $d_1T$  et  $d_2T$ . Le pas de temps effectif utilisé pour intégrer  $H_{plan}$  n'est donc pas fixe et varie régulièrement entre  $d_1T$  et  $d_2T$ . J'ai pu toutefois vérifier que la différence maximale relative de l'hamiltonien  $H_{plan}$  reste inférieure à  $10^{-9}$  sur 100 millions d'années. Comme pour  $H_{rest}^*$ , aucune évolution séculaire de la valeur de l'hamiltonien n'a été observée sur cette période.

Le calcul des équations du mouvement lié aux parties *A* et *B* est montré en détail dans les sections suivantes.

### 3.1.3 Intégration des problèmes képlériens - partie A

La partie képlérienne d'un intégrateur symplectique consiste à déterminer l'anomalie moyenne d'un corps à un temps donné grâce à la solution de l'hamiltonien képlérien (3.5) :

$$\dot{M} = \frac{\partial H_{kep}}{\partial L} = \frac{G^2 m_p^2}{L^3} = \left( \frac{Gm_p}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} = n \Rightarrow M(t) = nt + M(0) \quad (3.8)$$

A ce sujet une très nombreuse littérature décrivant des méthodes numériques fiables et rapides est disponible. La méthode la plus classique est de simplement faire le changement de variables  $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \rightarrow (a, e, i, M, \omega, \Omega)$ , déterminer la nouvelle anomalie moyenne  $M(t)$  grâce

à (3.8), calculer l'anomalie excentrique  $E$  du corps connaissant son excentricité  $e$  et son anomalie moyenne  $M$  en résolvant l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E \quad (3.9)$$

de manière numérique ou en utilisant une approximation  $M = f(E)$  à un certain ordre en excentricité, et enfin revenir aux coordonnées cartésiennes  $(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ .

Suivant Wisdom et Holmann (1991), les changements de variables peuvent être évités en utilisant les fonctions de Gauss  $f$  et  $g$  grâce aux relations :

$$\mathbf{x}(t) = f(t)\mathbf{x}(t_0) + g(t)\mathbf{v}(t_0) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{f}(t)\mathbf{x}(t_0) + \dot{g}(t)\mathbf{v}(t_0) \quad (3.11)$$

Les fonctions de Gauss et leurs dérivées sont définies par (Murray & Dermott 1999) :

$$f(t, t_0) = \frac{a}{r_0} \{\cos(E - E_0) - 1\} + 1, \quad (3.12)$$

$$g(t, t_0) = (t - t_0) + \frac{1}{n} \{\sin(E - E_0) - (E - E_0)\}, \quad (3.13)$$

$$\dot{f}(t, t_0) = -\frac{a^2}{rr_0} n \sin(E - E_0), \quad (3.14)$$

$$\dot{g}(t, t_0) = \frac{a}{r} \{\cos(E - E_0) - 1\} + 1. \quad (3.15)$$

Le  $\Delta E = E - E_0$  peut être en particulier déterminé numériquement en connaissant  $\Delta M$  et  $E_0$ , et en résolvant cette formulation de l'équation de Kepler :

$$\Delta M = n\Delta t = \Delta E - e \cos E_0 \sin \Delta E + e \sin E_0 (1 - \cos \Delta E) \quad (3.16)$$

Ces formules restent valables tant que l'orbite considérée est elliptique. Si l'orbite devient hyperbolique, comme il sera parfois le cas dans les intégrations numériques de cette étude, l'équation de Kepler (hyperbolique) devra être résolue :

$$M = e \sinh E - E \quad (3.17)$$

Il est possible de résoudre les cas elliptiques et hyperboliques avec une équation unique en utilisant la formulation *universelle* de l'équation de Kepler (Mikkola & Innanen 1999). Cette formulation fait appel aux fonctions  $c$  et  $G$  (Stumpff 1962; Stiefel & Scheifele) :

$$c_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z)^j}{(n+2j)!} \quad \text{et} \quad G_n(\beta, X) = X^n c_n(\beta X^2). \quad (3.18)$$

Des relations de récurrence importantes pour ces fonctions sont indiquées dans Mikkola & Innanen (1999). En notant :

$$\beta = \frac{2GM}{r_0} - \mathbf{v}_0^2, \quad \eta_0 = r_0 \cdot v_0 \quad \text{et} \quad \zeta_0 = GM - \beta r_0, \quad (3.19)$$

la forme *universelle* de l'équation de Kepler (*Hauptgleichung*) s'écrit :

$$r_0 X + \eta_0 G_2 + \zeta_0 G_3 = h, \quad (3.20)$$

qu'il faut résoudre numériquement pour  $X$ ,  $h$  étant le pas de temps considéré. Une fois que  $X$  est déterminé, les fonctions de Gauss  $f$  et  $g$  et leurs dérivées, réécrites dans ces nouvelles variables, sont calculées :

$$f = 1 - k^2 M \frac{G_2}{r_0}, \quad g = h - k^2 G_3, \quad (3.21)$$

$$\dot{f} = -\frac{k^2 G_1}{r_0 r}, \quad \dot{g} = 1 - \frac{k^2 G_2}{r}, \quad (3.22)$$

avec  $r = r_0 + \eta_0 G_1 + \zeta_0 G_2$ . Les relations (3.10-3.11) sont ensuite utilisées pour avancer le problème képlérien.

Pour résoudre numériquement l'*Hauptgleichung*, j'ai utilisé une stratégie similaire à celle de l'intégrateur symplectique *Mercury* (Chambers 1999). La méthode de Newton (Press et al. 1992) est utilisée en premier lieu et si sa convergence n'est pas assurée au bout d'un certain nombre d'itérations (ici 10), une méthode plus robuste est utilisée. La méthode de Laguerre, réputée pour converger quelle que soit la valeur initiale, est alors choisie et un grand nombre d'itérations est utilisé (ici 100). En pratique, d'après les tests effectués, la méthode de Newton converge difficilement pour des excentricités très élevées :  $e \gtrsim 0.995$ .

Cette méthode est utilisée pour l'avancement des problèmes képlériens des deux hamiltoniens : satellite et planètes géantes.

### 3.1.4 Intégration des perturbations - partie B

L'intégration du mouvement des corps correspondant à la partie 'perturbations' de l'intégrateur est plus aisée que la partie képlérienne. Pour l'hamiltonien du satellite  $H_{rest}$ , le mapping correspondant à cette partie s'écrit :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - h \sum_{j=1}^N G m_j \left( \frac{\mathbf{d}}{d_j^3} - \frac{\mathbf{s}_j}{s_j^3} \right), \quad (3.24)$$

avec  $\mathbf{d}_j = \mathbf{r} - \mathbf{s}_j$  et où  $h$  est le pas de temps considéré.

Pour l'hamiltonien du problème planétaire, on a vu précédemment que la partie correspondant aux perturbations (Eq.3.7) devait être séparée en deux pour qu'elles soient intégrables séparément. La partie correspondant à  $\frac{1}{2m_\odot} (\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i)^2$  ( $B_1$ ) donne (Goździewski et al. 2008) :

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \frac{h}{m_\odot} \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_j, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i. \quad (3.26)$$

La partie correspondant à  $-\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{G m_i m_j}{\Delta_{ij}}$  ( $B_2$ ) donne :

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i - h \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (3.28)$$

### 3.1.5 Contrôle de la valeur des hamiltoniens et des intégrations

Pour vérifier la bonne précision des intégrations numériques, la valeur des hamiltoniens doit être déterminée en cours d'intégration afin de vérifier leur conservation.

Vérifier la valeur numérique de l'hamiltonien du problème planétaire  $H_{plan}$  (Eqs. 3.6-3.7) ne pose aucun problème. En revanche, du fait de la dépendance en temps des  $\mathbf{s}_j$  présents dans l'hamiltonien du problème restreint (3.1), celui-ci n'est pas autonome. Pour le rendre indépendant du temps, la solution classique est d'étendre l'espace des phases en faisant apparaître dans l'hamiltonien le moment conjugué  $T$  qui correspondra à la coordonnée  $\tau$  assimilée au temps. Ainsi le nouvel hamiltonien

$$H_{rest}^* = T + H_{rest} \quad (3.29)$$

est autonome. Les équations du mouvement de la particule (3.3-3.4) n'en sont pas modifiées, et l'on a maintenant pour le nouveau degré de liberté  $(T, \tau)$  :

$$\dot{T} = -\frac{\partial H_{rest}^*}{\partial \tau}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H_{rest}^*}{\partial T} = 1. \quad (3.31)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$\dot{T} = \sum_{j=1}^4 Gm_j \left[ \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{v}_j}{d_j^3} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j}{s_j^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j)(\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{v}_j)}{s_j^5} \right], \quad (3.32)$$

avec  $\mathbf{d}_j = \mathbf{r} - \mathbf{s}_j$ . L'évolution de  $T$  ne dépend que des coordonnées  $\mathbf{r}$  et  $\tau$  (à travers  $\mathbf{s}_j(\tau)$  et  $\mathbf{v}_j(\tau)$ ), et sera donc calculé durant la partie  $B$  de l'intégration. Les valeurs de conservation des hamiltoniens indiquées en Section 3.1.2 ( $10^{-8}$  pour  $H_{rest}^*$  et  $10^{-9}$  pour  $H_{plan}$ ) montrent que la précision de l'intégration est satisfaisante.

Afin de vérifier l'intégration numérique des planètes de façon complète, j'ai réalisé une intégration des planètes géantes dans le but de vérifier les fréquences séculaires fondamentales du système. De plus les satellites étant en interaction avec des résonances séculaires, il est capital d'en avoir une définition satisfaisante.

Le système intégré étant celui des 4 planètes géantes (purement gravitationnel et newtonien), j'ai choisi de comparer les fréquences avec celles déterminées par Carpino et al. (1987) qui utilisent le même système dynamique (voir également Applegate et al. 1986). Par souci de correspondre au plus près au travail des auteurs précités, la détermination des fréquences est effectuée de la manière la plus proche possible.

Les planètes géantes sont intégrées numériquement pendant 15,42 millions d'années avec un pas de temps de 0,04 année. À partir des éléments osculateurs échantillonnés tous les 5 ans, un filtre passe-bas<sup>1</sup> est utilisé, avec  $T_{pass} = 10.000$  ans et  $T_{stop} = 4900$  ans. Les éléments filtrés sont ensuite échantillonnés tous les 3750 ans, puis analysés grâce à l'algorithme d'analyse en fréquence FMFT (Šidlichovský & Nesvorný 1996).

Le tableau ci-dessous présente les fréquences séculaires fondamentales des planètes géantes en arcsec/an obtenues par Carpino et al. (1987) et dans cette étude :

<sup>1</sup>Une présentation complète du filtre utilisé, ainsi que des paramètres qui s'y réfèrent, est réalisée en Section 4.1.2

	Carpino et al. (1987)	Cette étude	Différence relative
$g_5$	4.244701	4.244612	$0, 21.10^{-4}$
$g_6$	28.238558	28.241055	$0, 88.10^{-4}$
$g_7$	3.086955	3.087537	$1, 89.10^{-4}$
$g_8$	0.672678	0.672705	$0, 94.10^{-4}$
$s_6$	-26.339174	-26.336645	$0, 96.10^{-4}$
$s_7$	-2.992646	-2.993244	$2, 00.10^{-4}$
$s_8$	-0.691433	-0.691939	$7, 32.10^{-4}$

Les différences relatives entre les fréquences sont très satisfaisantes. Après cette partie dédiée à l'intégrateur numérique, je présente dans la suite l'indicateur de chaos utilisé dans cette étude.

## 3.2 Indicateurs de chaos

Un grand nombre d'indicateurs ou de méthodes numériques permettent aujourd'hui la détection du chaos dans les systèmes dynamiques. Ces différents indicateurs peuvent être globalement classés en deux grands groupes de philosophies différentes : les méthodes ayant pour base les Exposants de Lyapunov et les méthodes spectrales. On peut trouver une présentation des différentes méthodes dans Morbidelli (2002).

### 3.2.1 Les méthodes spectrales

Les méthodes spectrales cherchent à reconnaître le caractère quasi-périodique d'une orbite et sont basées sur des méthodes de traitement du signal. La plus connue est sans doute l'analyse en fréquence (Laskar 2003), qui consiste à comparer les fréquences fondamentales d'une orbite obtenues à partir de deux parties consécutives d'une intégration numérique. On obtient ainsi un index de diffusion  $d = \frac{f_1 - f_2}{f_1}$  (Robutel & Laskar 2001 ; Robutel & Gabern 2006) qui reflète la diffusion chaotique des fréquences d'une orbite et donc sa non quasi-périodicité.

Une autre méthode spectrale régulièrement utilisée est le nombre spectral (Ferraz-Mello 2005). Le spectre d'une orbite quasi-périodique présente un nombre limité de fréquences importantes dont l'amplitude décroît rapidement, au contraire d'une orbite fortement chaotique où de nombreuses fréquences possèdent des amplitudes similaires. Le décompte du nombre de fréquences dont l'amplitude est supérieure à un certain seuil est donc une indication de la chaotité d'une orbite. On peut trouver des applications de cette méthode par Michtchenko & Ferraz-Mello (2001) et Callegari & Yokoyama (2010).

De nombreuses autres méthodes existent. Par exemple le "0 - 1 test" (Gottwald & Melbourne 2009) utilise une variante de la fonction d'autocorrélation appliquée à une fonction mêlant les différents degrés de liberté du système dynamique étudié. Le calcul de cet indicateur est très simple, toutefois la détermination de la chaotité des orbites est généralement plus longue que pour les indicateurs précédents.

### 3.2.2 Les méthodes variationnelles : l'Exposant Maximal de Lyapunov

Une présentation exhaustive de la théorie des exposants de Lyapunov, de leur utilisation et de leur implémentation numérique peut être trouvée dans de nombreux articles et manuels, et on peut ainsi se référer par exemple à Benettin et al. (1980a, 1980b) et Skokos (2010). Je présente ici de manière rapide les bases de cette méthode.

Celle-ci repose sur le fait que deux orbites chaotiques s'éloignent l'une de l'autre de manière exponentielle avec le temps, à la différence d'orbites stables où cette divergence est linéaire. En considérant deux orbites  $\mathbf{x}_1(t)$  et  $\mathbf{x}_2(t)$ , la divergence exponentielle est de la forme :

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = \alpha e^{\lambda t}, \quad (3.33)$$

où  $\lambda > 0$  est l'exposant maximal de Lyapunov et possède une valeur finie. De manière pratique, on peut donc vérifier la chaotité d'une orbite  $\mathbf{x}_1(t)$  en intégrant numériquement une seconde orbite  $\mathbf{x}_2(t)$  initialement très proche et en calculant leur distance au cours du temps. L'exposant maximal de Lyapunov est une valeur théorique, justifiant la limite en  $+\infty$ , et s'obtient par :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|}{\|\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)\|}. \quad (3.34)$$

En pratique, on calcule la valeur temporaire :

$$MLE(t) = \frac{1}{t} \log \frac{\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|}{\|\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)\|}. \quad (3.35)$$

Cette méthode (*two nearby orbits* dans la littérature) a été utilisée de manière extensive dans un grand nombre de domaines ainsi qu'en mécanique céleste (par exemple Laskar 1990 ; Murray & Holmann 1999 ; Varadi et al. 2003).

Cette méthode est cependant numériquement imprécise dans certains cas (Tancredi et al. 2001 ; Morbidelli 2002). Par exemple elle produit facilement des erreurs numériques liées à la précision machine pour une séparation initialement réduite des orbites. De plus cette méthode est inadaptée au cas d'orbites chaotiques mais bornées. On peut également noter que le choix de l'orbite "clone" est toujours sujet à caution, celle-ci pouvant être représentative d'une région dynamique différente de l'orbite de référence, aussi proches soient elles. Il est donc préférable de calculer chaque fois qu'il est possible l'évolution du vecteur tangent associé à l'orbite étudiée. Dans un système dynamique défini par  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , en introduisant  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ , le calcul du vecteur entre les deux orbites :

$$\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1), \quad (3.36)$$

devient :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_1). \quad (3.37)$$

Un développement limité au premier ordre de  $f(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x})$  donne :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}_1). \quad (3.38)$$

Le calcul d'une orbite supplémentaire proche est donc remplacé par le calcul du vecteur tangent (les *équations variationnelles*) :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \delta\mathbf{x}, \quad (3.39)$$

qui nécessite le calcul de la matrice jacobienne de  $f(\mathbf{x})$ . L'équation (3.35) devient alors :

$$MLE(t) = \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}(0)\|}. \quad (3.40)$$

Toutefois, le calcul des équations variationnelles - outre le fait d'augmenter considérablement le temps de calcul - est quelquefois trop compliqué suivant la forme de

$f(\mathbf{x})$  et la méthode utilisant deux orbites proches est plus pratique à mettre en oeuvre et la seule à pouvoir être utilisée (par exemple Laskar, 1990).

Sans entrer plus avant dans les détails, on peut montrer qu'il existe un spectre d'exposants de Lyapunov pour un système dynamique donné : un système hamiltonien ayant  $N$  degrés de libertés et un mapping ayant  $2N$  degrés de libertés possèdent chacun  $2N$  exposants de Lyapunov. Les méthodes numériques pour déterminer chaque exposant sont explicitées dans Benettin et al. (1980b) et Skokos (2010). En particulier, ces exposants  $\chi_i$  sont organisés suivant :

$$\chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_N \geq \chi_{N+1} \geq \dots \geq \chi_{2N-1} \geq \chi_{2N}. \quad (3.41)$$

De plus, les exposants vérifient la relation :

$$\sum_{i=1}^{2N} \chi_i = 0, \quad (3.42)$$

et sont organisés en paires de valeurs de signes opposés :

$$\chi_i = -\chi_{2N-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.43)$$

Les  $\chi_i$  d'un système hamiltonien vérifient également :

$$\chi_N = \chi_{N+1} = 0. \quad (3.44)$$

En pratique, la chaoticité d'un système dynamique est caractérisée en premier lieu par le plus grand exposant de Lyapunov :  $\chi_1 = \lambda$ .

### 3.2.3 Les méthodes variationnelles : les indicateurs rapides

L'évolution de la norme du vecteur tangent est la partie la plus importante d'un indicateur de chaos basé sur les exposants de Lyapunov. Plusieurs méthodes existent pour tirer parti au mieux de cette évolution : le FLI, le MEGNO, le GALI, le OFLI, le RLI. Je présente dans la suite les trois premiers indicateurs, qui sont le plus utilisés actuellement.

Le FLI (Froeschlé et al. 1997) est une simplification de l'équation (3.40) :

$$FLI(t) = \log \|\delta \mathbf{x}(t)\|. \quad (3.45)$$

En pratique l'exposant maximal de Lyapunov  $\lambda$  converge très lentement et l'orbite étudiée doit être intégrée numériquement pendant un temps conséquent afin d'en obtenir une approximation correcte. Le FLI ne cherche pas à obtenir  $\lambda$  mais juste à déterminer la forme de la divergence de  $\delta \mathbf{x}(t)$  et en ce sens, il permet la détection du chaos inhérent à une orbite de manière bien plus rapide qu'en observant l'évolution du MLE.

Le MEGNO (Cincotta & Simó 2000) s'inspire du FLI, mais en ajoutant une fonction de poids et une moyennisation au calcul de l'exposant maximal de Lyapunov. L'équation (3.34) peut s'écrire sous forme intégrale :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\|\delta \dot{\mathbf{x}}(t')\|}{\|\delta \mathbf{x}(t')\|} dt'. \quad (3.46)$$

Le MEGNO, comme le FLI et le MLE, supprime la limite en  $+\infty$  et y ajoute une fonction de poids, rendant plus importante l'évolution tardive du vecteur tangent :

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\|\delta \dot{\mathbf{x}}(t')\|}{\|\delta \mathbf{x}(t')\|} t' dt'. \quad (3.47)$$

En utilisant la moyennisation suivante :

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(t') dt', \quad (3.48)$$

$\bar{Y}(t)$  tendra vers 2 pour une orbite stable ou montrera une évolution linéaire de type  $\frac{\lambda}{2}t$  pour une orbite chaotique. La fonction de poids permet d'accorder moins d'importance à la partie initiale de l'évolution du vecteur tangent, qui dépend d'effets quasi-périodiques. En ce sens, le MEGNO converge plus rapidement vers la valeur de  $\lambda$  qu'avec l'utilisation de la formule classique (3.40). On doit cependant garder à l'esprit que l'évolution du MLE dépend de l'évolution macroscopique de l'orbite qui peut à tout moment subir des changements de régimes, modifiant l'évolution du MLE de manière imprévisible, même si ces changements sont de plus en plus amortis durant l'évolution de l'orbite.

De nombreuses études en Mécanique Céleste utilisent le MEGNO. Le fait que cet indicateur soit absolu (il tend vers 2 pour une orbite stable) et non relatif comme le FLI ou le GALI (voir la suite) facilite grandement la comparaison de plusieurs orbites. Un autre avantage de cette valeur absolue vient du fait qu'étant calculée en même temps que l'intégration numérique de l'orbite, celle-ci peut être éventuellement stoppée si elle est détectée comme chaotique afin d'économiser le temps d'intégration, comme dans l'algorithme GAMP (Goździewski et al. 2008).

Le GALI (Skokos et al. 2007) est basé sur l'utilisation de plusieurs vecteurs tangents et s'inspire de la définition et du calcul du spectre des exposants de Lyapunov. Ces  $k$  vecteurs tangents, initialement linéairement indépendants au début de l'intégration et renormalisés à chaque pas de temps, deviennent dépendants dans le cas d'une orbite chaotique, et l'hypervolume défini par ces vecteurs tend vers 0.

Le calcul du GALI (Skokos et al. 2008) se définit comme suit. Si les vecteurs  $\mathbf{w}_k$  s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{12N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{22N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & \cdots & w_{k2N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{2N} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{2N} \end{bmatrix}$$

le GALI d'ordre  $k$  est déterminé par :

$$GALI_k = \sqrt{\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)}. \quad (3.49)$$

Chaque  $GALI_k$  suit ensuite une évolution temporelle bien distincte, constante ou tendant vers 0. Pour le cas d'une orbite stable, on a :

$$GALI_k(t) \sim \begin{cases} \text{constant si } 2 \leq k \leq N \\ \frac{1}{t^{2(k-N)}} \text{ si } N < k \leq 2N \end{cases}$$

tandis que pour une orbite chaotique,

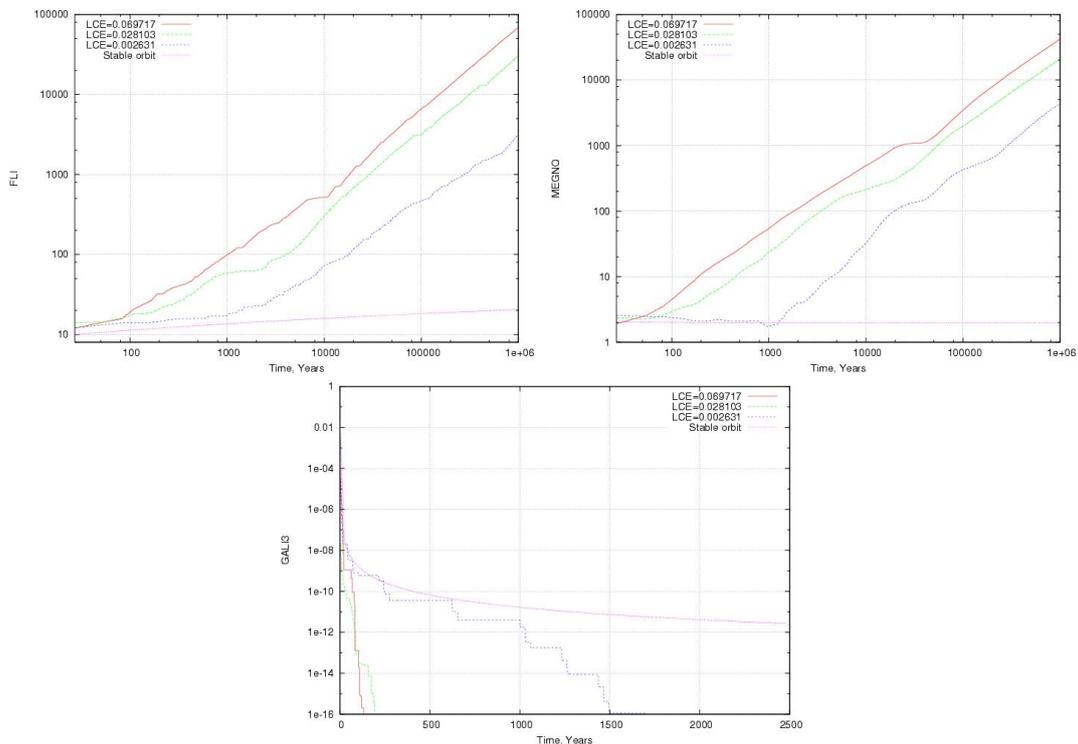
$$GALI_k \sim e^{-[(\chi_1 - \chi_2) + (\chi_1 - \chi_3) + \cdots + (\chi_1 - \chi_k)]t}. \quad (3.50)$$

Ici, comme pour le FLI et le MEGNO, un critère indiquant le niveau de chaoticité de plusieurs orbites peut être la comparaison de leur valeur du GALI pour un temps donné. Certaines orbites chaotiques tendent toutefois vers 0 en des temps très courts, particulièrement pour des  $k$  élevés, atteignant ainsi la limite numérique de l'ordinateur. L'indicateur de chaoticité peut alors être la comparaison du temps d'intégration nécessaire au GALI pour atteindre une certaine (faible) valeur.

### 3.2.4 Comparaison de différents indicateurs rapides

Afin de choisir un indicateur rapide, performant et adapté aux orbites des satellites irréguliers, j'ai comparé trois indicateurs basés sur l'utilisation des vecteurs tangents : le FLI, le MEGNO et le GALI.

Le modèle dynamique utilisé dans la suite pour les tests est le problème de trois corps restreint plan et circulaire où un satellite fictif est en orbite autour de Jupiter et perturbé par le Soleil. La figure 3.4 montre l'évolution typique des indicateurs pour une orbite stable et trois orbites chaotiques. Le MLE de chaque orbite chaotique a été calculé sur 100 millions d'années et est indiqué sur les figures (dénoté par  $LCE$ ). Le FLI et le MEGNO sont tracés en échelle log-log afin de faciliter leur comparaison.



**Fig. 3.4** – Évolutions du FLI, du MEGNO et du  $GALI_3$  pour une orbite stable et trois orbites chaotiques.

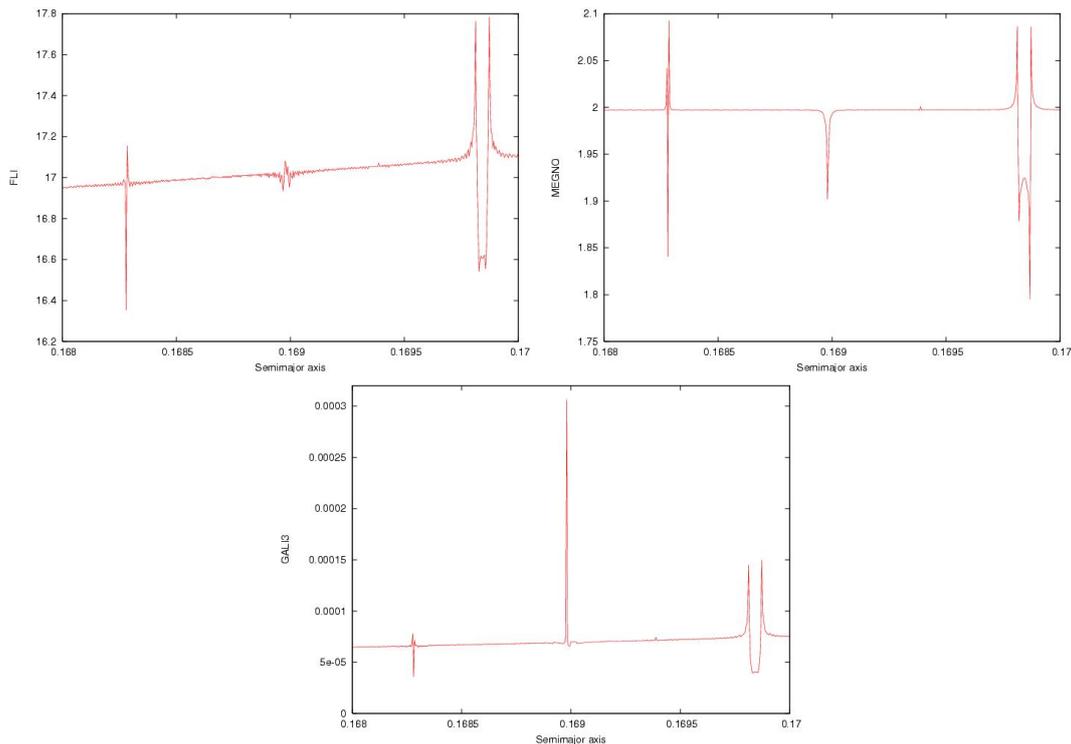
On peut voir sur la Fig.3.4 la relative similarité dans les évolutions du FLI et du MEGNO. Celui-ci montre des évolutions plus régulières dues à sa moyennisation additionnelle.

Pour l'orbite stable, on peut noter la caractéristique du MEGNO à tendre vers la valeur de 2 alors que le FLI suit une évolution en  $\log(t)$ . Le système dynamique utilisé pour la détermination des vecteurs tangents possédant deux degrés de liberté, l'évolution de  $GALI_3$  suit donc pour cette orbite l'évolution en  $\frac{1}{t^2}$  prévue théoriquement.

L'orbite chaotique qui possède le MLE le plus faible ( $MLE=0.002631$ ) reste très proche de 2 en début d'intégration pour le MEGNO, pour être finalement détectée comme chaotique à partir de  $\sim 1000$  ans. Ce temps de détection est sensiblement identique pour le FLI et le  $GALI_3$ .

Concernant les orbites chaotiques, les indicateurs suivent de manière générale les prédictions théoriques : les valeurs  $\frac{FLI}{t}$ ,  $2\frac{MEGNO}{t}$  et  $-\frac{\log(GALI_3)}{2t}$  donnent des estimations du MLE de chaque orbite. On peut cependant noter que les estimations du  $GALI_3$

sont moins satisfaisantes, du fait du faible temps d'intégration disponible pour évaluer le MLE avant que le  $GALI_3$  n'atteigne la précision machine. C'est ici une caractéristique du GALI : l'indicateur ne peut être calculé que pendant un temps d'intégration limité lorsque les orbites sont chaotiques, ce qui implique une estimation moins précise du MLE. Le choix du nombre de vecteurs tangents utilisés pour calculer le GALI permet la détection d'orbites chaotiques en un temps d'intégration encore plus court (ici en utilisant par exemple les  $GALI_k$  avec  $k=4,5,6$ ), mais au détriment de l'évaluation du MLE et du temps machine nécessaire au calcul des vecteurs tangents supplémentaires.

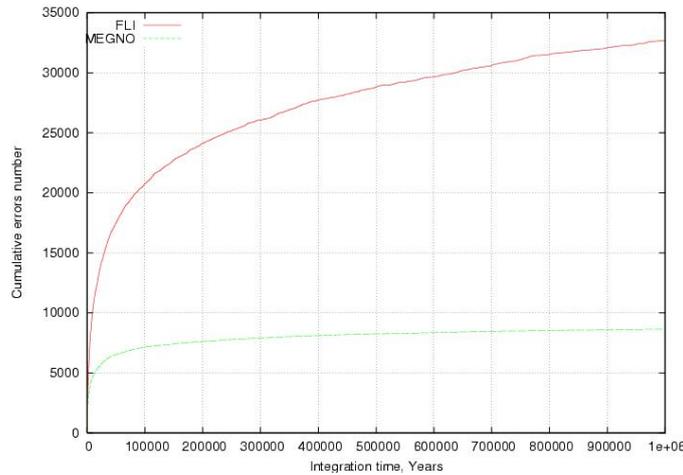


**Fig. 3.5** – Chaoticité d'un ensemble d'orbites avec un demi-grand axe initial variant de 0.168 à 0.17 UA. L'excentricité initiale et les angles initiaux sont nuls. Les valeurs finales du FLI et du MEGNO sont représentées pour un temps d'intégration de 10.000 ans. Pour le  $GALI_3$ , l'inverse du temps nécessaire aux orbites pour atteindre  $GALI_3 = 10^{-11}$  est indiqué en ordonnée.

La Fig.3.5 montre l'évaluation du FLI, du MEGNO et du  $GALI_3$  de plusieurs orbites avec des excentricités initiales nulles et un demi-grand axe initial variant de 0.168 à 0.17 UA. Les angles initiaux sont nuls. Le temps d'intégration est de 10.000 ans pour le FLI et le MEGNO, et l'inverse du temps nécessaire pour que le  $GALI_3$  atteigne un certain seuil (ici  $10^{-11}$ ) est indiqué. Toutes les orbites intégrées sont situées dans une zone où la grande majorité des orbites sont stables. De fait, parmi les orbites quasi-périodiques, on distingue sur la Fig.3.5 trois résonances principales, entourées d'orbites faiblement instables.

Les résonances et orbites instables sont clairement visibles avec les trois indicateurs. On peut cependant remarquer que pour le FLI et le  $GALI_3$ , la valeur finale des orbites quasi-périodiques sont dépendantes du demi-grand initial de l'orbite. En effet il peut être prouvé que l'évolution des vecteurs tangents pour des orbites quasi-périodiques dépend des éléments orbitaux initiaux (Guzzo et al. 2002a). Le MEGNO est donc également sujet à cette variation, mais sa moyennisation supplémentaire "efface" cette différence, imposant aux orbites quasi-périodiques une valeur très proche de 2. Si l'identification des orbites instables ne pose pas de difficultés sur la Fig.3.5, il peut en être autrement sur des cartes de

stabilité globales où les éléments orbitaux initiaux peuvent avoir des valeurs très différentes. Le MEGNO semble donc offrir une meilleure visibilité et permettre une comparaison plus aisée entre les orbites.



**Fig. 3.6** – Nombre d’erreurs cumulées concernant l’ordre de chaotité de 100 orbites pour le FLI et le MEGNO. Les angles initiaux sont nuls.

Une dernière comparaison entre FLI et MEGNO est indiquée en Fig.3.6. On peut voir en Fig.3.4 que les évolutions du FLI et du MEGNO ne sont pas parfaitement linéaires. Si un grand nombre d’orbites chaotiques était représenté sur la Fig.3.4, on pourrait donc s’attendre à ce que l’ordre de chaotité de ces différentes orbites change au cours du temps. En faisant l’hypothèse que cet ordre de chaotité converge vers l’ordre réel pour le FLI et le MEGNO, on peut compter le nombre d’erreurs (le nombre de croisements) cumulées entre ces orbites au cours du temps. J’ai donc intégré durant 1 million d’années une centaine d’orbites chaotiques présentes dans le problème restreint plan et circulaire, et comparé le nombre d’erreurs cumulées pour le FLI et le MEGNO. On peut voir sur la Fig.3.6 que le nombre d’erreurs du MEGNO est très inférieur à celui du FLI pour un temps d’intégration donné. De même le MEGNO semble converger vers l’ordre de chaotité réel bien plus rapidement que le FLI.

En conclusion, j’ai choisi le MEGNO comme indicateur de chaos dans cette étude. Comparé au FLI et au GALI, il offre l’avantage d’être un indicateur “absolu” en raison de sa valeur théorique fixe pour les orbites stables, importante pour les cartes de stabilité où les orbites possèdent des éléments orbitaux initiaux très différents. On peut noter que le MEGNO converge également plus rapidement que le FLI. Quand à la rapidité de détection du chaos, on pourrait utiliser un  $GALI_k$  avec un  $k$  élevé et qui permettrait une détection plus rapide du chaos, mais une partie de cette étude vise à déterminer le MLE de satellites réels sur des temps très longs, calcul qui n’est pas adapté au GALI. De plus, le nombre de vecteurs tangents à calculer avec un tel  $GALI_k$  rendrait les intégrations à long terme impraticables.

### 3.2.5 Les équations variationnelles

Le vecteur tangent au mouvement de la particule utilisé pour le calcul du MEGNO est calculé à partir de l’hamiltonien du problème restreint  $H_{rest}$ . Différentes stratégies d’intégration sont disponibles pour déterminer l’évolution du vecteur tangent. Comme l’intégrateur utilisé dans cette étude partitionne le calcul du mouvement de la particule de

manière symplectique, j'ai choisi de calculer l'évolution du vecteur tangent suivant le même schéma symplectique. En effet, cette méthode apparaît comme la plus précise et minimise ainsi le risque d'erreur sur la chaotité des orbites. On peut trouver une comparaison de différentes méthodes d'intégration de vecteurs tangents dans Skokos & Gerlach (2010).

Pour le problème restreint, le calcul de l'incrément du vecteur tangent correspondant à la partie 'perturbations' de l'intégrateur ne pose pas de difficultés : Mikkola & Innanen (1999) en donnent une expression compacte :

$$\Delta\delta\mathbf{v} = -h \sum_{j=1}^N Gm_j \left[ \frac{\delta\mathbf{r}}{d_j^3} - 3 \frac{\mathbf{d}_j(\mathbf{d}_j \cdot \delta\mathbf{r})}{d_j^5} \right] \quad (3.51)$$

avec  $\mathbf{d}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$  et où  $h$  est le pas de temps considéré.

Le calcul de l'incrément du vecteur tangent correspondant à la partie képlérienne de l'intégrateur est moins triviale, et peut être directement effectuée dans les variables 'universelles' par différentiation du problème képlérien, en suivant le formulaire de Mikkola & Innanen (1999). De la même manière que pour l'avancement du problème de deux corps vu précédemment, ce calcul fait intervenir les fonctions  $c$  et  $G$ , ainsi que les formes variationnelles des fonctions de Gauss  $f$  et  $g$ .

N'étant pas intéressé en premier lieu par la détermination de la chaotité des planètes elles-mêmes dans notre intégrateur, je n'ai pas implémenté les équations variationnelles correspondantes à l'hamiltonien du problème planétaire  $H_{plan}$ . On peut néanmoins trouver l'expression correspondante utilisant les coordonnées de Jacobi dans Mikkola & Innanen (1999) ou les variables de Poincaré dans Goździewski et al. (2008).

### 3.2.6 Intégration des vecteurs tangents dans l'espace des phases étendu

Les hamiltoniens décrivant la dynamique des planètes géantes ( $H_{plan}$ ) et du satellite ( $H_{rest}^*$ ) sont autonomes. En effet, on a vu qu'en étendant l'espace des phases de l'hamiltonien  $H_{rest}$  (Section 3.1.5), on peut déterminer l'évolution de  $T$ , permettant de vérifier la bonne intégration des hamiltoniens avec l'intégrateur symplectique.

Habituellement pour le problème restreint de la Mécanique Céleste le calcul des vecteurs tangents n'est déterminé que dans l'espace à 3 dimensions, c'est à dire uniquement grâce aux dérivées partielles des forces agissant sur le satellite par rapport à ses coordonnées et moments  $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ . Mais en toute rigueur, ce calcul devrait être étendu aux variables  $(T, \tau)$ . A quel point cela modifie-t-il l'évolution du vecteur tangent ?

Je dérive dans la suite les équations du mouvement du vecteur tangent dans l'espace des phases étendu. L'hamiltonien du problème restreint complet s'écrit :

$$H_{rest}^*(\mathbf{v}, T, \mathbf{r}, \tau) = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{Gm_p}{r} + T - G \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{1}{d_j(\tau)} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j(\tau)}{s_j^3(\tau)} \right). \quad (3.52)$$

avec  $\mathbf{d}_j = \mathbf{r} - \mathbf{s}_j$ .  $H_{rest}^*$  est de la forme  $H_{rest}^* = H_0 + H_1$  avec :

$$H_0 = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{Gm_p}{r} + T. \quad (3.53)$$

Les équations variationnelles de  $H_0$  sont calculées durant les étapes A de l'intégrateur symplectique.  $H_0$  dépendant de manière simple de  $T$ , et ne dépendant pas de  $\tau$ , les équations variationnelles pour la partie A sont facilement modifiées.  $H_1$  est calculé durant les étapes B, et la modification des équations variationnelles est plus complexe. Je présente donc dans la suite les équations variationnelles uniquement liées à  $H_1$ .

Si les variables sont vectorisées de la manière suivante :

$$\mathbf{x} = \{r_1, r_2, r_3, v_1, v_2, v_3, T, \tau\}, \quad (3.54)$$

la force  $f(\mathbf{x})$  correspondant à  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) = \{0, 0, 0, -\frac{\partial H_{rest}^*}{\partial r_1}, -\frac{\partial H_{rest}^*}{\partial r_2}, -\frac{\partial H_{rest}^*}{\partial r_3}, -\frac{\partial H_{rest}^*}{\partial \tau}, 0\}. \quad (3.55)$$

La matrice jacobienne  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1^2} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_2} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial t} \\ -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_2} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2^2} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial r_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial t} \\ -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_3} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial r_3} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3 \partial t} \\ -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial t} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial t} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3 \partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'intégration d'un vecteur tangent  $\mathbf{w}$  suivant l'expression (3.39) est donc :

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 = 0 \\ \dot{w}_2 = 0 \\ \dot{w}_3 = 0 \\ \dot{w}_4 = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1^2} w_1 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_2} w_2 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_3} w_3 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial t} w_8 \\ \dot{w}_5 = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_2} w_1 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2^2} w_2 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial r_3} w_3 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial t} w_8 \\ \dot{w}_6 = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial r_3} w_1 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial r_3} w_2 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3^2} w_3 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3 \partial t} w_8 \\ \dot{w}_7 = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_1 \partial t} w_1 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_2 \partial t} w_2 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r_3 \partial t} w_3 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} w_8 \\ \dot{w}_8 = 0 \end{pmatrix}$$

L'implémentation dans l'intégrateur symplectique des dérivées de type  $\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_i \partial r_j}$  avec  $i, j = 1, 3$  est explicité dans l'expression (3.51). Le calcul de  $\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_i \partial t}$  avec  $i = 1, 3$  peut s'écrire sous forme vectorielle et est facilité par l'expression de  $\dot{T}$  déjà calculée en Section 3.1.5 :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \mathbf{r} \partial t} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.56)$$

Après quelques calculs on obtient l'expression vectorielle :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \mathbf{r} \partial t} = \sum_{i=1}^N Gm_i \left[ \frac{\mathbf{v}_i}{d_i^3} - 3 \frac{(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{d}_i}{d_i^5} - \frac{\mathbf{v}_i}{r_i^3} + 3 \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} \right]. \quad (3.57)$$

La dernière dérivée supplémentaire à calculer est  $\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}$ . Après quelques calculs, on obtient :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^N Gm_i \left[ \frac{(\mathbf{d}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i) - v_i^2}{d^3} + 3 \frac{(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2}{d^5} - \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i)}{r_i^3} + 3 \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)[(\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i) + v_i^2]}{r_i^5} - 15 \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2}{r_i^7} \right] \quad (3.58)$$

On rappelle que ces calculs supplémentaires par rapport aux équations variationnelles classiques sont accomplis durant l'étape B de l'intégrateur symplectique. En pratique la

détermination des dérivées supplémentaires alourdit considérablement le temps de calcul, et rend également obligatoire le calcul des accélérations jovicentriques du Soleil et des planètes géantes ; en effet les  $\dot{\mathbf{v}}_i$  sont nécessaires dans l'équation (3.58).

J'ai donc comparé pour différentes orbites, régulières et chaotiques, le comportement de  $\mathbf{w}^{(8)}$  (vecteur tangent étendu) et  $\mathbf{w}^{(6)}$  (vecteur tangent classique). Les comparaisons indiquent que les deux évolutions sont très similaires et se réduisent avec le temps d'intégration, en particulier la différence de norme  $D(t) = \|\mathbf{w}^{(8)}(t) - \mathbf{w}^{(6)}(t)\|$  se comporte comme  $D(t) \propto \frac{1}{t}$  pour des orbites stables et est pratiquement négligeable pour des orbites chaotiques. J'utilise donc dans cette thèse la définition classique du calcul du vecteur tangent.



## Chapitre 4

# Dynamique des satellites irréguliers

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Intégrations numériques à long terme des satellites naturels</b>	<b>52</b>
4.1.1	Chaoticité des satellites	53
4.1.2	Filtrage et analyse en fréquence du mouvement des satellites	54
<b>4.2</b>	<b>Résultats concernant les résonances connues</b>	<b>56</b>
4.2.1	La résonance de Kozai ( $g = s$ )	56
4.2.2	La résonance $\nu_{\odot}$ ( $g = g_{\odot}$ )	57
<b>4.3</b>	<b>Diffusion chaotique</b>	<b>59</b>
<b>4.4</b>	<b>Cartes de stabilité</b>	<b>63</b>
4.4.1	Problème de trois corps restreint (R3BP)	64
4.4.2	Problème de trois corps restreint quasi-périodique (R3BPQP)	64
4.4.3	Problème complet	66
4.4.4	Influence de l'inclinaison initiale	67
<b>4.5</b>	<b>Les familles rétrogrades</b>	<b>68</b>
4.5.1	Famille <i>Ananke</i>	69
4.5.2	Famille <i>Carme</i>	71
4.5.3	Famille <i>Pasiphae</i>	73
<b>4.6</b>	<b>La région prograde</b>	<b>74</b>
<b>4.7</b>	<b>Discussion</b>	<b>76</b>

---

### 4.1 Intégrations numériques à long terme des satellites naturels

Dans cette partie sont présentés les résultats obtenus grâce aux outils numériques présentés plus haut.

La première phase de cette étude a été d'intégrer numériquement le mouvement de tous les satellites irréguliers connus sur une période de 100 millions d'années. Les positions initiales des corps ont été obtenues grâce au service d'éphémérides du JPL à la date du 1<sup>er</sup> janvier 2008 à 00 :00 :00.0000 (CT) (date julienne : 2454466.5). Le modèle dynamique est celui du "Système Solaire externe" : les satellites sont en révolution autour de Jupiter et sont perturbés par *Saturne*, *Uranus* et *Neptune*<sup>1</sup>. Les planètes internes n'étant pas prises

<sup>1</sup>On pourra se référer au Chapitre 2 pour une discussion sur les différentes perturbations et la justification du choix de ce modèle dynamique.

en compte, en première approximation une correction barycentrique de la position initiale des planètes géantes a été faite afin d'additionner les masses des planètes internes dans celle du Soleil. De la même manière les masses des satellites sont ajoutées à celle des planètes correspondantes.

Au cours de l'intégration, les éléments orbitaux moyens des satellites ont également été déterminés. Ils peuvent être comparés à ceux calculés par Nesvorný et al. (2003) et montrent des valeurs très similaires.

Pour les intégrations à long terme (comme pour les cartes de stabilité présentées par la suite), plusieurs conditions d'arrêts de l'intégration ont été implémentées et sont vérifiées à chaque pas de temps. L'intégration numérique est stoppée si la distance du satellite à la planète est inférieure au demi-grand axe du satellite massif le plus éloigné (*Callisto* avec un demi-grand axe de 0.0125 UA). Le satellite est alors considéré comme étant entré dans la zone des satellites Galiléens, où les perturbations dynamiques sont très importantes (Haghighipour & Jewitt 2008) et est considéré comme perdu. De la même manière, un satellite est considéré comme éjecté si sa distance excède la sphère de Hill de Jupiter à 0.355 UA (Eq.1.2), et si son énergie orbitale est positive au même instant.

#### 4.1.1 Chaoticité des satellites

Le Tableau 4.1 montre la valeur finale du MEGNO obtenue, une estimation du temps de Lyapunov  $T_L$  ( $= \frac{1}{MLE}$ ), ainsi que les éléments orbitaux moyens pour chaque satellite connu. La vaste majorité des satellites apparaît comme étant chaotique et seuls trois satellites qui constituent le coeur du groupe prograde (*Himalia*, *Lysithea* et *Leda*) ne montrent pas de signes de chaos sur le temps total d'intégration. On peut voir dans le Tableau 4 :1 que les objets les plus chaotiques sont situés soit dans la famille *Pasiphae*, ou bien n'appartiennent pas à une famille définie.

Grâce aux éléments orbitaux moyens des satellites, les familles dynamiques découvertes par Nesvorný et al. (2003) et Beaugé & Nesvorný (2007) par proximité des éléments orbitaux propres des satellites ont pu être retrouvées et je propose également l'appartenance de deux satellites non étudiés par les auteurs précités. À cette fin je n'ai pas utilisé ici les équations de Gauss (Nesvorný et al. 2003) qui relient la taille d'une famille de satellites en demi-grand axe, excentricité et inclinaison, avec la vitesse relative de ses membres par rapport à leur corps "parent" (selon l'hypothèse où la famille provient de la rupture d'un objet plus massif). On peut estimer que la proximité au sens des éléments orbitaux moyens des satellites en question avec leurs familles est convaincante : le satellite *Thelxinoe* dans la famille *Ananke*, et *Herse* dans la famille *Carme*. Les satellites non étudiés par Nesvorný et al. (2003) sont indiqués dans le Tableau 4.1 par un astérisque.

Pour vérifier la similarité des ces résultats avec ceux de Saha & Tremaine (1993), j'ai déterminé l'Exposant Maximal de Lyapunov des satellites *Ananke*, *Carme*, *Pasiphae* et *Sinope* avec une intégration de 2 millions d'années et obtenu leurs résultats qui indiquent que sur cette période d'intégration plus limitée seule l'orbite de *Sinope* montre des signes clairs d'une évolution chaotique (voir la figure 2c de l'article précité). Il est important de noter que la valeur du MLE déterminée par ces auteurs ( $\sim 5000$  ans) est du même ordre que celle trouvée dans cette étude ( $\sim 8000$  ans) : cette cohérence entre les deux temps d'intégration montre le haut degré de chaos de l'orbite de *Sinope*, où la valeur du LCE converge rapidement.

Comme indiqué précédemment, les premiers 15% de l'évolution du MEGNO ne sont pas utilisés pour déterminer le MLE. Cependant, pour quelques satellites, on peut observer que le MLE est plus lent à converger, autorisant une régression linéaire satisfaisante de sa partie finale seulement pour les derniers 50 – 60% de son évolution. Pour les satellites concernés

(*Elara*, *Themisto*, *Carme*, *Callirhoe*, *Helike* et *Hegemone*), de nouvelles estimations plus précises des MLEs ont été effectuées, ayant pour effet l'obtention de valeurs légèrement supérieures. On peut noter le cas particulier de *Helike*, où le MLE ne semble pas converger durant le temps d'intégration considéré : la valeur du temps de Lyapunov  $T_L$  de ce satellite donné dans le Tableau 4.1 correspond aux derniers 85% de l'évolution du MEGNO et doit être considéré avec précaution.

#### 4.1.2 Filtrage et analyse en fréquence du mouvement des satellites

En utilisant leur modèle analytique, Beaugé & Nesvorný (2007) ont pu déterminer les fréquences séculaires fondamentales (propres) de chaque satellite. Leur modèle étant basé sur le problème de trois corps restreint, il est intéressant de vérifier les valeurs qu'ils ont calculées analytiquement, avec un modèle numérique qui prend en compte les perturbations des planètes géantes. Pour ce faire, j'ai intégré numériquement de nouveau chaque satellite avec le but de déterminer leurs fréquences  $g$  (fréquence de précession du péricentre) et  $s$  (fréquence de précession du noeud).

Comme il a été montré précédemment que l'évolution de la grande majorité des satellites est chaotique, leurs orbites ne peuvent se situer sur des tores quasi-périodiques, et leurs fréquences fondamentales ne peuvent donc pas être définies. On ne peut ainsi espérer la convergence d'algorithmes basés sur l'analyse de Fourier. Néanmoins, comme la majorité des satellites ne sont pas fortement chaotiques, et en particulier pour les plus stables, on peut espérer qu'une définition satisfaisante de leurs fréquences "stables" peut être déterminée. La durée d'intégration nécessaire pour la détermination des fréquences séculaires ne doit pas être trop importante afin d'éviter les effets de diffusion chaotique, mais doit être suffisante pour pouvoir déterminer convenablement les fréquences les plus importantes du système.

A cet effet :

- Un temps d'intégration de 1.050.000 ans a donc été choisi, ce qui est suffisant pour résoudre les fréquences séculaires de *Jupiter*, *Saturne* et *Uranus*.
- Les pas d'intégration sont de 0.01 année et 0.04 année. Conserver les résultats pour chaque pas de temps et utiliser leur totalité comme données d'entrées dans l'algorithme d'analyse en fréquence est inenvisageable. Les résultats de l'intégration ont donc été échantillonnés tous les 8 ans.
- Afin d'éviter le phénomène d'aliasing due à l'échantillonnage et provenant des hautes fréquences qui correspondent au moyen mouvement du satellite (typiquement de  $130^\circ/an$  à  $1030^\circ/an$ ), j'ai utilisé un filtre numérique passe-bas basé sur une fenêtre numérique afin de corriger les évolutions séculaires des angles  $\varpi$  et  $\Omega$  du satellite.

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour réaliser un filtre passe-bas. La méthode du fenêtrage en est une et parmi les différentes fenêtres disponibles (fenêtre de Hann, Hamming, Blackmann, etc) régulièrement utilisées pour le traitement de signal, j'ai choisi d'utiliser la fenêtre de Kaiser (Kaiser & Reed 1977) déjà utilisée en Mécanique Céleste (Quinn et al. 1991).

Étant donné une série temporelle  $y_m$  obtenue par l'intégration numérique présentée plus haut, son évolution filtrée est déterminée par :

$$\bar{y}_k = \sum_{m=-M}^M d_m y_{k-m}, \quad (4.1)$$

où les  $2M + 1$  coefficients  $d_m$  représentent le filtre.

Les coefficients de la fenêtre de Kaiser sont donnés par la formule :

$$d_m = C \frac{\sin 2\pi m x_0}{\pi m} I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \right), \quad (4.2)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce<sup>2</sup>,  $C$  est une constante de normalisation déterminée en imposant  $\sum_{m=-M}^M d_m = 1$  et  $\beta$ ,  $x_0$  et  $M$  sont trois paramètres influant sur les performances du filtre.

Un filtre passe-bas est caractérisé par :

- sa bande passante (de 0 à la fréquence  $w_{pass}$ ) où sa réponse en fréquence n'est pas exactement 1 mais oscille autour de cette valeur avec une amplitude maximum appelée *ripple*,
- sa plage de transition (de  $w_{pass}$  à  $w_{stop}$ ) où sa réponse en fréquence chute brutalement de 1 à 0,
- sa bande "morte" (de  $w_{stop}$  à l'infini) où sa réponse en fréquence n'est pas exactement 0 mais oscille autour de cette valeur avec une amplitude maximum appelée l'atténuation.

Le paramètre  $x_0$  de la fenêtre de Kaiser situe la fréquence de coupure (milieu de la transition entre  $w_{pass}$  et  $w_{stop}$ ) exprimée dans l'échelle  $w/w_s$  où  $w$  est la fréquence et  $w_s$  la fréquence d'échantillonnage. Augmenter le paramètre  $\beta$  dans la formule (4.2) permet de réduire la largeur de la plage de transition, au détriment du *ripple* et de l'atténuation, qui augmentent en conséquence. Quand à la longueur de l'échantillon ( $2N + 1$ ), augmenter  $N$  permet de réduire la largeur de la plage de transition, ici au détriment du temps de calcul.

Les spécifications du filtre pour les intégrations numériques des satellites progrades et rétrogrades, ainsi que pour l'intégration des planètes effectuée en Section 3.1.5 sont données dans le tableau suivant :

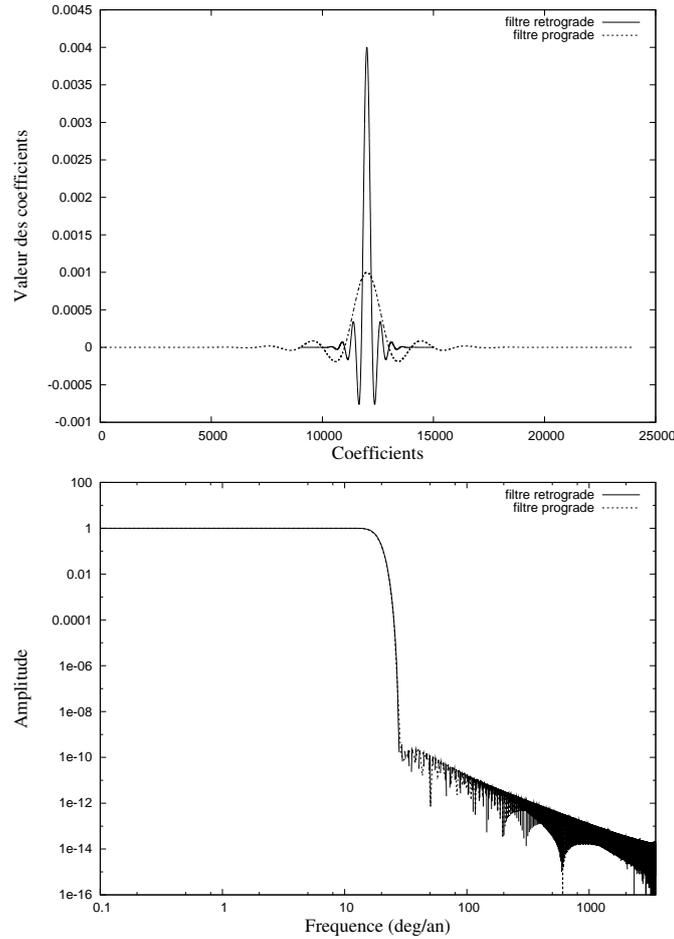
	prograde	rétrograde	planètes
paramètre $\beta$	20		20
paramètre $x_0$	0.0005	0.002	0.00073
nombre de points	24001	6001	24001
frequency pass ( $w_{pass}$ )	9°/an		0,033°/an
frequency stop ( $w_{stop}$ )	27,72°/an		0,073°/an
<i>ripple</i>	8.10 <sup>-7</sup>		1.10 <sup>-11</sup>
atténuation	4.10 <sup>-10</sup>		3.10 <sup>-10</sup>

Les valeurs des coefficients  $d_m$  ainsi que la réponse en fréquence du filtre pour les choix de paramètres correspondant aux satellites prograde et rétrograde sont montrées en Fig.4.1.

La fréquence maximale séculaire que nous cherchons à déterminer étant approximativement 6°/an, j'ai choisi une valeur de  $w_{pass}$  supérieure afin d'éviter toute modification en-deça de cette fréquence. La nouvelle fréquence d'échantillonnage correspondante aux données de sortie échantillonnées tous les 8 ans étant de  $w_s = 45°/an$ , cela satisfait la condition  $w_s \geq w_{stop} + w_{pass}$ , afin d'éviter tout problème d'aliasing parmi les fréquences inférieures à la fréquence  $w_{pass}$  (Carpino et al. 1987). Un exemple de l'utilisation du filtre concernant l'excentricité du satellite *Pasithee* est montré en Fig.4.2.

<sup>2</sup>On peut par exemple obtenir cette fonction à partir de son développement en série :

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!^2} \quad (4.3)$$



**Fig. 4.1** – Valeurs des coefficients et réponse en fréquence du filtre pour les choix de paramètres correspondant aux satellites prograde et rétrograde.

L'algorithme d'analyse en fréquences FMFT<sup>3</sup> (Šidlichovský & Nesvorný 1996) peut être ensuite appliqué aux séries temporelles des éléments équinoxiaux  $k + ih$  et  $q + ip$  définis par :

$$\begin{aligned} k &= e \cos(\varpi), & h &= e \sin(\varpi), \\ q &= \sin(i/2) \cos(\Omega), & p &= \sin(i/2) \sin(\Omega). \end{aligned}$$

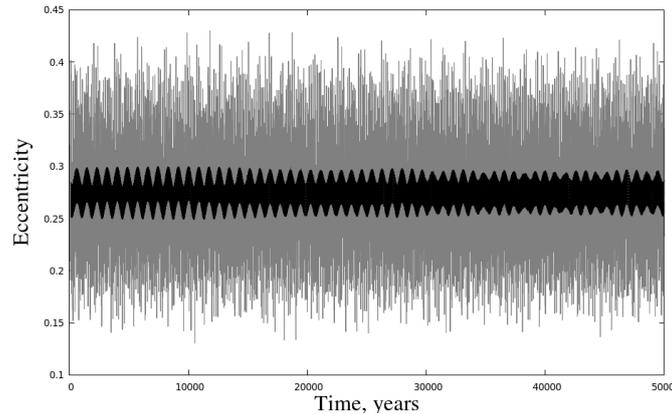
Les fréquences séculaires et les périodes des satellites sont listées dans le Tableau 4.2. On peut noter que les fréquences séculaires des satellites dans chacune des familles *Ananke* et *Carme* sont très similaires. Ces fréquences nous aideront dans la suite pour déterminer les résonances proches des satellites.

## 4.2 Résultats concernant les résonances connues

### 4.2.1 La résonance de Kozai ( $g = s$ )

Concernant la résonance de Kozai, bien que la plupart des satellites apparaissent comme perturbés par la résonance mais dans un mode de circulation, on peut trouver la libration du satellite prograde *Carpo* autour de  $90^\circ$  durant les 100 millions d'années

<sup>3</sup>Librement disponible à l'adresse <http://www.boulder.swri.edu/~davidn/fmft/fmft.html>



**Fig. 4.2** – Évolution de l’excentricité osculatrice de *Pasithee* sur 50.000 ans. L’excentricité filtrée obtenue à travers la fenêtre de Kaiser est également indiquée.

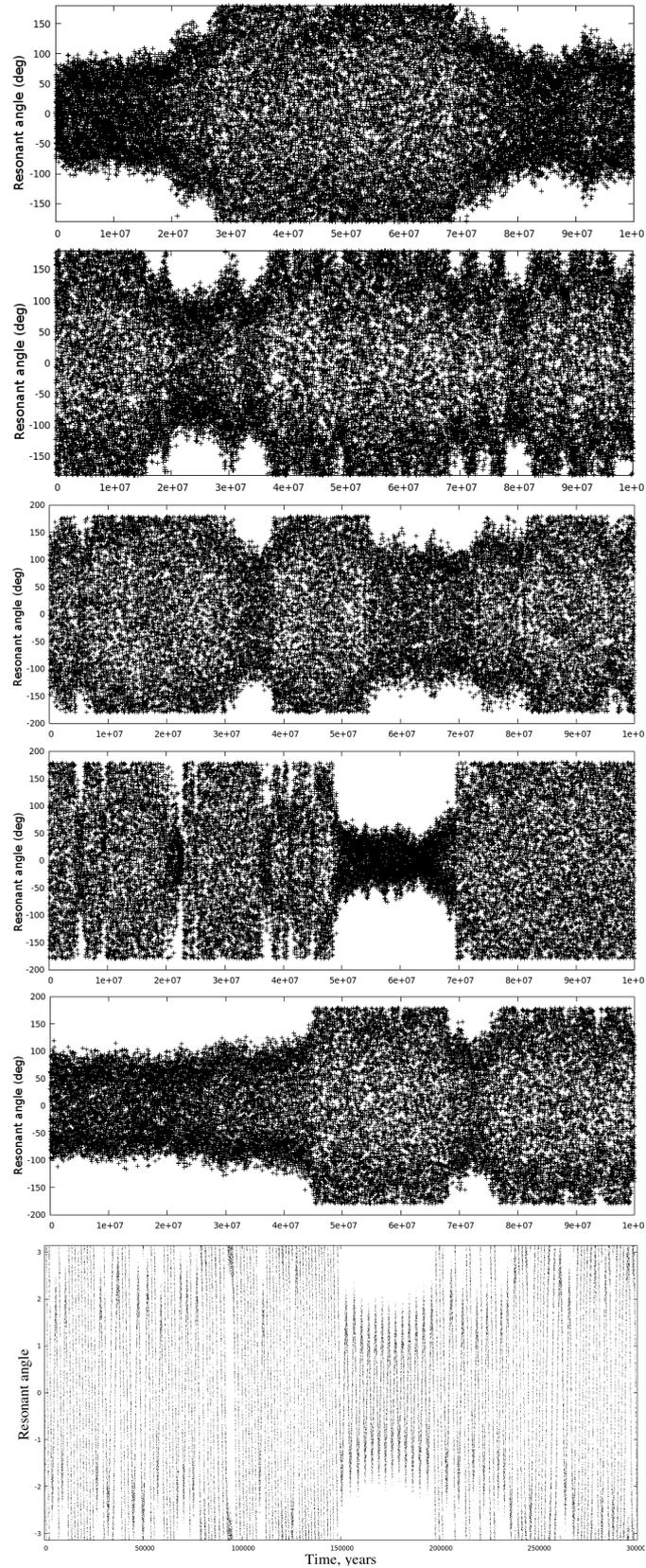
d’intégration et la proximité de *Themisto* (également prograde) par rapport à la résonance déterminée par de précédents auteurs (Beaugé & Nesvorný 2007). Le satellite *Euporie* apparaît comme étant dans la résonance de Kozai pour toute la durée d’intégration (Nesvorný et al. 2003, Čuk & Burns 2004), son argument du péricentre  $\omega$  étant en libration autour de  $90^\circ$ . Bien que son mouvement soit chaotique, ce satellite montre une diffusion chaotique très limitée (voir la Section 4.3 et le Tableau 4.2), et  $\omega$  possède une déviation maximum de  $\pm 30^\circ$  autour de sa valeur de libration durant le temps d’intégration.

La cas de *2003J18* est très intéressant : en effet on peut déterminer que son mouvement alterne parfois entre circulation et libration dans la résonance, et parfois entre les deux centres de libration de la résonance ( $\pm 90^\circ$ ). Ce satellite est de loin le plus chaotique des satellites irréguliers Joviens, mais son mouvement ne semble pas montrer une forte diffusion chaotique dans l’espace des éléments propres (voir la Section 4.3 et le Tableau 4.2).

#### 4.2.2 La résonance $\nu_\odot$ ( $g = g_\odot$ )

Concernant la résonance  $\nu_\odot$ , on peut déterminer la libration temporaire des satellites *Pasiphae* (libration autour de  $\varpi - \varpi_\odot = 0$ ) et *Sinope* (libration autour de 0) qui sont déjà connues, mais mis à part ces deux objets, on peut trouver trois satellites qui présentent de longues périodes de libration autour de 0 : *Cyllene*, *Helike* et *Hegemone*. L’évolution de leur argument résonant est présenté en Fig.4.3.

Ces satellites possèdent en effet de longues périodes de précession de leurs péricentres comme indiqué dans le Tableau 4.2. Une inspection de ces périodes de manière générale montre que la fréquence de précession de la longitude du péricentre ( $g$ ) de *2003J02* est exceptionnellement faible : en effet ce satellite alterne entre circulation et libration dans la résonance  $\nu_\odot$  autour de 0 (voir Fig.4.3). Néanmoins on peut noter une mauvaise convergence de l’algorithme d’analyse en fréquence pour *2003J02*, rendant les valeurs obtenues difficilement fiables. En effet cet objet est le satellite Jovien connu le plus lointain et se situe dans une zone très chaotique. J’ai donc effectué deux intégrations numériques avec des pas d’intégration de 0,01 et 0,04 an afin de vérifier leurs influences sur les résultats. *2003J02* ne survit pas aux deux intégrations de 100 millions d’années : il est éjecté après 11,3 millions d’années pour un pas de temps de 0,01 an (différence relative maximum de l’hamiltonien :  $4,5 \cdot 10^{-9}$ ) et après 73 millions d’années pour un pas de temps de 0,04 an (différence relative maximum de l’hamiltonien :  $1,8 \cdot 10^{-8}$ ). Dans les deux cas le satellite semble s’échapper grâce au mécanisme de Kozai : peu avant son éjection son inclinaison devient inférieure à  $135^\circ$  tandis que son excentricité dépasse 0.75, le faisant sortir de



**Fig. 4.3** – Évolution de l'angle résonant  $\varpi - \varpi_{\odot}$  pour les satellites (de haut en bas) : *Pasiphae*, *Sinope*, *Cyllene*, *Helike*, *Hegemone* et *2003J02*.

la sphère de Hill de Jupiter (0.355 AU) avec une énergie orbitale positive par rapport à Jupiter.

Malgré tout, on peut difficilement statuer sur son instabilité macroscopique à l'heure actuelle et je donne dans le Tableau (4.2) les résultats correspondant à l'intégration numérique effectuée avec un pas de temps de 0,01 an. Le MEGNO étant très linéaire pour l'évolution de ce satellite, j'ai utilisé la relation simple citée plus haut dans le but d'obtenir le MLE à partir du MEGNO, et on peut noter que même si les évolutions orbitales sont différentes dans les deux intégrations, les temps de Lyapunov obtenus sont très proches l'un de l'autre (1687 et 1806 années).

On peut également trouver parmi les satellites "orphelins" plusieurs autres objets en libérations temporaires dans la résonance mais beaucoup moins affectés par celle-ci : *Autonoe*, *Sponde*, *Orthosie* et *2003J10* dont les arguments résonants sont en libration autour de  $\pi$  pour des périodes typiques de l'ordre de 500.000 à un million d'années.

### 4.3 Diffusion chaotique

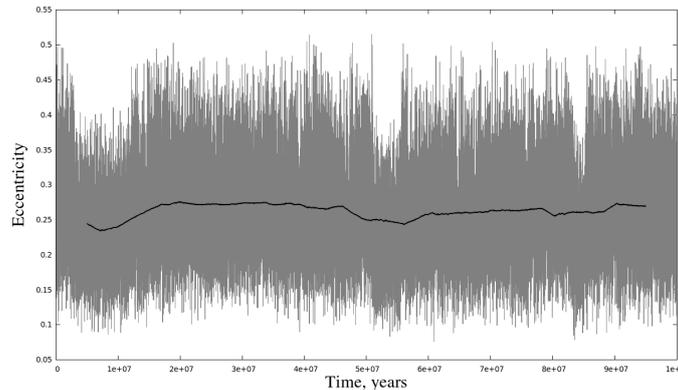
Afin d'étudier la diffusion chaotique des satellites, j'ai utilisé une méthode de moyennisation de l'évolution des satellites par moyenne glissante de manière similaire à Morbidelli & Nesvorný (1999). A partir des résultats de l'intégration numérique de 100 millions d'années d'un satellite échantillonnés tous les 4.000 ans, ses éléments orbitaux  $x = [a, e, i]$  peuvent être remplacés par leurs valeurs moyennes :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{t'=t-5Myr}^{t'=t+5Myr} x(t'), \quad (4.4)$$

où  $N$  est le nombre de points dans chaque fenêtre moyennée. Cela revient à imposer  $d_m = \frac{1}{2N+1}$  dans l'équation (4.1). Si la longueur des fenêtres est suffisamment longue (ici j'ai choisi 10 millions d'années, qui est une valeur communément utilisée pour ce type de moyennisation en dynamique des astéroïdes : voir par exemple l'article précité, Nesvorný et al. 2002 ou bien Carruba et al. 2003), les résultats de cette méthode de moyennisation peuvent être considérés comme des éléments "propres" numériquement définis.

Rappelons que les éléments propres d'une orbite peuvent être définis analytiquement à l'aide d'une méthode de perturbation appliquée à un système dynamique, et qui vise à supprimer la dépendance de ce système par rapport à ses angles ou ses coordonnées, à un degré de perturbation donné. La partie rendue intégrable par cette méthode de perturbations reflète donc l'évolution "propre" du système (toujours à un degré de perturbation donné). En particulier la méthode de perturbation montre que les éléments osculateurs sont constitués d'une partie fixe (les éléments propres) et d'une partie dépendante du temps à travers des fréquences fixées (les fréquences propres) (voir par exemple Ferraz-Mello 2007). Pour une orbite stable, des méthodes numériques comme l'analyse de Fourier ou une méthode plus poussée comme l'analyse en fréquence convergent vers ces éléments et fréquences propres (Laskar 1995). De même une moyennisation numérique des actions en fonction du temps converge vers les actions propres de l'orbite considéré. En revanche lorsque l'orbite est chaotique, ces éléments et fréquences propres fixés n'existent plus. Si on tente quand même de les définir numériquement sur des périodes de temps suffisamment courtes pour obtenir l'approximation d'un mouvement stable, on constate que ces fréquences obtenues changent avec le temps : c'est la diffusion chaotique. En faisant donc l'approximation que le chaos est suffisamment faible sur des périodes de temps consécutives, on peut déterminer des éléments et fréquences propres (temporaires) pour chaque période et ensuite observer leurs variations en fonction du temps.

Alors que des orbites quasi-périodiques vont présenter des  $\langle x(t) \rangle$  constants durant le temps d'intégration ou des oscillations limitées provenant de longues périodes non moyennées, des orbites chaotiques vont présenter des variations non quasi-périodiques. Un exemple de cette méthode de moyennisation est présentée en Fig.4.4 pour le satellite rétrograde *Sinope*. On peut noter que cette méthode implique une perte de données de 5 millions d'années au début et à la fin de l'intégration.



**Fig. 4.4** – Évolutions des excentricités oscultrices et moyennées de *Sinope* sur 100 millions d'années. La solution moyennée est calculée à partir de l'équation (4.4).

On peut trouver des exemples de variation des fréquences moyennes dans Laskar (1990) ou d'éléments moyens dans Carruba et al. (2002) et Laskar (1994).

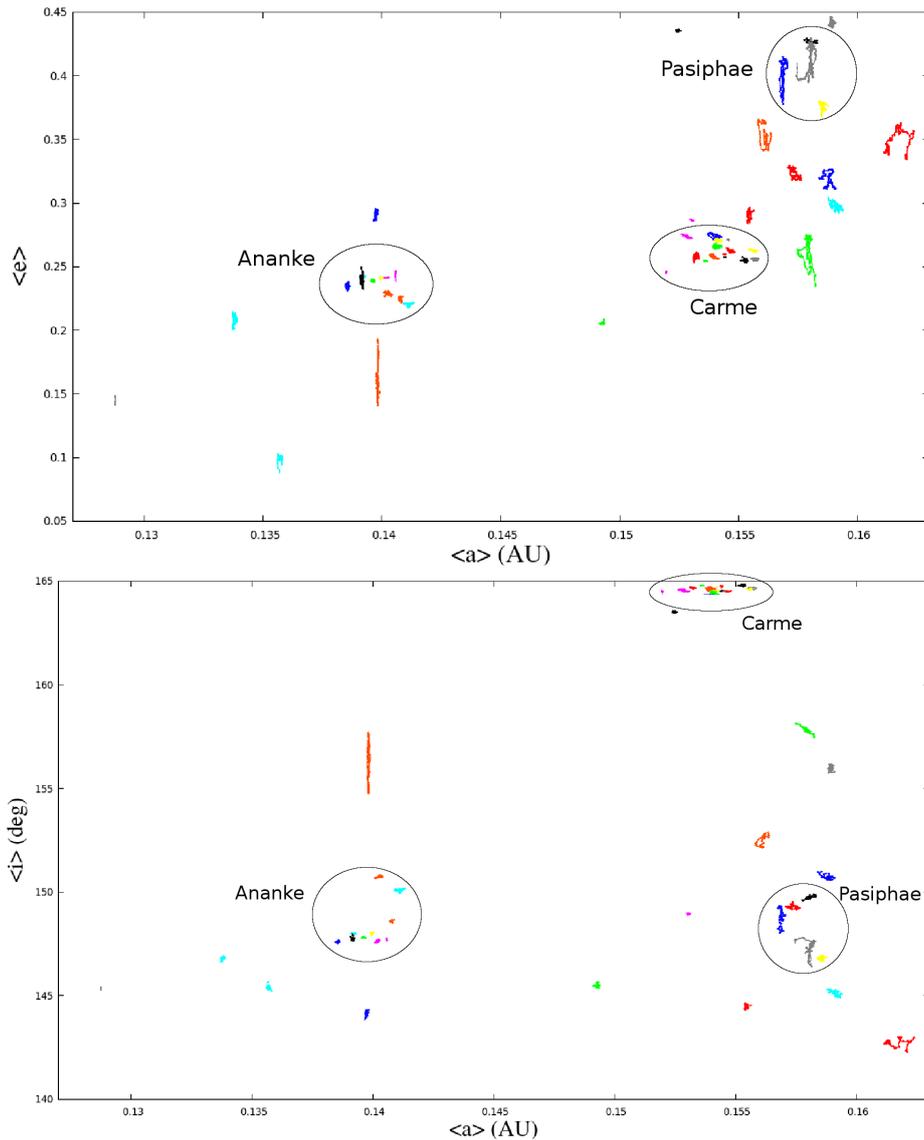
En procédant de la sorte pour tous les satellites irréguliers, on peut montrer l'évolution à long terme du groupe rétrograde demi-grand axe/excentricité et demi-grand axe/inclinaison en Fig.4.5. Des ellipses indiquant les familles dynamiques connues (Nesvorný et al. 2003, Beaugé & Nesvorný 2007) sont également indiquées. À partir des figures, on peut observer une diffusion chaotique importante concernant la famille *Pasiphae* et les satellites possédant une excentricité importante dans l'intervalle de demi-grand axe moyen  $\langle a \rangle = [0.155 : 0.165]$  UA. Ces satellites présentent des évolutions moyennes typiques dans le RMM 6 :1 avec de fortes oscillations en excentricité et inclinaison tandis que leur diffusion en demi-grand axe est plus limitée.

Dans le même esprit que Knežević & Milani (2000) et pour mieux différencier les différentes magnitudes de diffusion entre les satellites, j'ai déterminé pour chaque évolution moyenne  $\langle x(t) \rangle$  l'écart-type :

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \langle x_i \rangle - \langle \bar{x} \rangle \right)^2} \quad (4.5)$$

avec  $\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle$ , ainsi que l'excursion maximale  $\Delta_{\langle x \rangle} = \langle x_{max} \rangle - \langle x_{min} \rangle$  pour le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison. Les résultats sont listés dans le Tableau 4.1.

Constrastant avec la famille *Pasiphae*, les familles *Ananke* et *Carme* montrent une diffusion chaotique plus limitée en demi-grand axe, excentricité et inclinaison. On peut noter le cas intéressant du satellite *Helike* situé à un demi-grand axe quasi constant de 0.1398 UA, qui montre sur la Fig.4.5 d'importantes diffusions verticales en excentricité et en inclinaison, correspondant à une évolution dans la RMM 7 :1 avec le Soleil. En particulier l'argument  $n - 7n_{\odot} + s - 4g + 11s_6 - 2g_7$  est en libration pour les premiers 30.000 ans



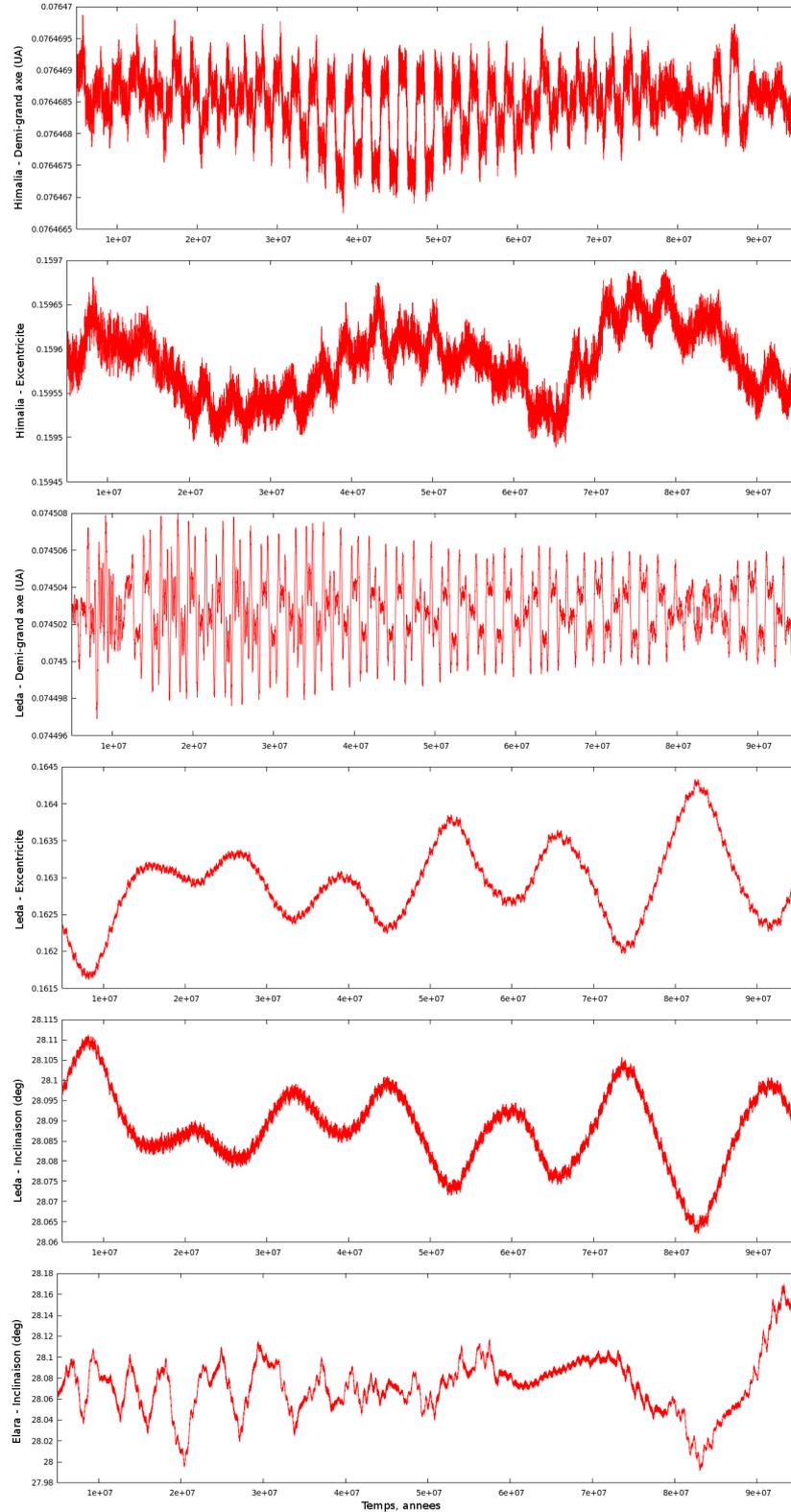
**Fig. 4.5** – Diffusion chaotique des satellites rétrogrades sur 100 millions d’années en demi-grand axe/excentricité et demi-grand axe/inclinaison. Les couleurs de chaque satellite sont conservées entre les deux figures. Les ellipses indiquent les familles rétrogrades.

d’intégration, et ensuite alterne entre libration et circulation en raison de la chaotité de l’orbite.

Dans les sections précédentes ce satellite a déjà été trouvé temporairement en libration dans la résonance séculaire  $\nu_{\odot}$  (Fig.4.3). En fait les périodes de forte excentricité de l’orbite due à la RMM 7 :1 mettent le satellite dans la résonance  $\nu_{\odot}$  ; ces périodes de forte excentricité sont ainsi parfaitement corrélées avec les périodes de libration dans la résonance  $\nu_{\odot}$  montrées en Fig.4.3. Je n’ai pas indiqué l’évolution chaotique du satellite *S2003/J2* sur la Fig.4.5, car dans les intégrations numériques réalisées, comme vu précédemment en Section 4.2.2, ce satellite est éjecté du système de Jupiter dans le temps d’intégration étudié.

Concernant les satellites progrades, on peut aisément remarquer l’existence de très longues périodes présentes dans leurs évolutions, en effet leurs évolutions moyennes montrent des oscillations quasi-périodiques caractéristiques (voir Fig.4.6). On constate par

exemple dans les évolutions moyennes de *Himalia*, *Elara* et *Leda* des fréquences variant de  $\sim 1.1$  millions d'années dans le demi-grand axe d'*Himalia* et *Leda*, jusqu'à  $\sim 33$  millions d'années dans l'excentricité d'*Himalia*.



**Fig. 4.6** – Évolutions moyennes en demi-grand axe, excentricité et inclinaison des satellites progrades *Himalia*, *Leda* et *Elara*.

## 4.4 Cartes de stabilité

Tandis que les intégrations à long terme des satellites irréguliers connus donnent des informations limitées sur la dynamique sous-jacente de la région des satellites, davantage d'informations peuvent être tirées de cartes de stabilité. Comme on s'intéresse à présent à la structure dynamique globale agissant sur les satellites, j'ai intégré numériquement un grand nombre d'orbites fictives dont les éléments orbitaux initiaux ont été choisis sur des grilles de  $600 \times 600$  orbites en demi-grand axe et excentricité, ou demi-grand axe et inclinaison. Afin de mettre en lumière les différents mécanismes, j'ai utilisé différents modèles dynamiques explicités dans la suite. Chaque orbite fictive est intégrée numériquement sur une période de 100.000 ans pour les cartes de stabilité rétrogrades, et sur 25.000 ans pour la carte prograde. Pour chaque carte, les angles initiaux des orbites ont été pris à 0, excepté pour la carte de la Fig.4.7 (haut) où  $\varpi(0) = 90^\circ$ .

En pratique, la première orbite fictive de la carte de stabilité est intégrée numériquement avec les orbites des planètes géantes. Les positions de celles-ci sont stockées en même temps dans un tableau une fois pour toutes, ce qui permet un gain de temps considérable dans l'intégration des orbites de satellites fictives suivantes. La taille limitée des tableaux explique le temps d'intégration plus limité du cas prograde.

Comme les éléments orbitaux des satellites irréguliers présentent de manière caractéristique de larges oscillations, les cartes de stabilité sont fortement dépendantes des éléments orbitaux initiaux choisis pour les orbites des satellites fictifs. Bien sûr on peut s'attendre à observer les mêmes structures dynamiques (résonances, zones stables ou chaotiques) en changeant ces éléments orbitaux initiaux. On peut en voir un exemple en Fig.4.5.

Une autre complication est la difficulté récurrente que l'on rencontre dans des études de stabilité similaires lorsqu'il s'agit d'indiquer la "position" de plusieurs objets réels sur de telles cartes de stabilité, en effet les orbites des objets réels ne peuvent avoir tous leurs éléments orbitaux initiaux identiques à ceux utilisés pour calculer la carte.

Afin de surmonter le premier problème, et limiter le second, j'ai bien présenté les cartes de stabilité en fonction des éléments orbitaux "libres" (demi-grand axe, excentricité et inclinaison) mais moyennés sur la durée d'intégration. De plus, ceci permet une meilleure comparaison avec les résultats fournis par les modèles analytiques qui sont habituellement donnés en termes de variables moyennes (lorsque le modèle analytique ne dépend plus des anomalies moyennes des corps) ou propres (le modèle ne dépend plus des angles). Il faut toutefois être conscient que les éléments moyens des cartes de stabilité sont calculés sur des durées limitées (100.000 ou 25.000 ans) et ne peuvent avoir une précision comparable aux éléments moyens des satellites réels calculés sur 100 millions d'années. Pour finir, cette façon de présenter les orbites en éléments moyens permet la visualisation de fines résonances séculaires, difficilement observables en éléments orbitaux initiaux. Ce choix de représentation explique pourquoi, même si les éléments orbitaux initiaux sont choisis sur des grilles rectangulaires, la forme des cartes de stabilité dépend de la dynamique de la région étudiée et apparaît déformée, d'une manière similaire qui peut rappeler les travaux utilisant des cartes de fréquences.

Intéressons-nous tout d'abord au cas des satellites rétrogrades. Afin de montrer les différentes résonances et les mécanismes dynamiques et la manière dont ils apparaissent, j'ai créé des cartes pour trois modèles dynamiques (Fig.4.7) :

- le problème de trois corps (Soleil + Jupiter + satellite) avec le Soleil ayant une orbite fixe, elliptique et inclinée (R3BP : Fig.4.7 haut),
- le problème de trois corps (Soleil + Jupiter + satellite) avec le Soleil sur son orbite quasi-périodique actuelle (R3BPQP : Fig.4.7 milieu),

- le problème complet utilisé précédemment dans cette étude pour les intégrations numériques à long terme des satellites réels qui est un problème de 6 corps restreint : Soleil + 4 planètes géantes + satellite (R6BP : Fig.4.7 bas).

L'inclinaison initiale de ces cartes est de  $150^\circ$ .

#### 4.4.1 Problème de trois corps restreint (R3BP)

Le premier de ces modèles dynamiques (R3BP : Fig.4.7 haut) présente la dynamique principale prévue par les modèles analytiques, et en particulier la résonance séculaire  $\nu_\odot$ , reconnaissable comme la large résonance horizontale qui traverse la carte. Cette résonance sera utilisée comme repère dans la suite de cette étude. Dans ce modèle les arguments résonnants ont la forme générale :

$$k_1n + k_2n_\odot + k_3g + k_4s \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^4 k_i = 0. \quad (4.6)$$

Les résonances de moyen mouvement sont clairement visibles comme les bandes quasi-verticales présentes sur toute la carte, et en particulier dans les demi-grands axes les plus élevés. Le demi-grand axe nominal des RMMs  $k_1n + k_2n_\odot$  présentes dans la sphère de Hill de Jupiter (0.355 UA) est représenté en Fig.4.8. L'ordre des résonances représente la valeur ( $|k_1| + |k_2|$ ) et est un indicateur de l'importance de la résonance. Seules les MMRs d'ordre inférieur à 59 sont représentées.

On peut en outre remarquer sur les cartes de stabilités la structure en "multiplets" (Morbidelli 2002) de plusieurs MMRs dans les demi-grands axes élevés, qui correspondent à plusieurs arguments différents dans une même RMM. On peut également distinguer la famille de résonances  $n_\odot + k_4s \approx 0$  ayant une forme oblique.

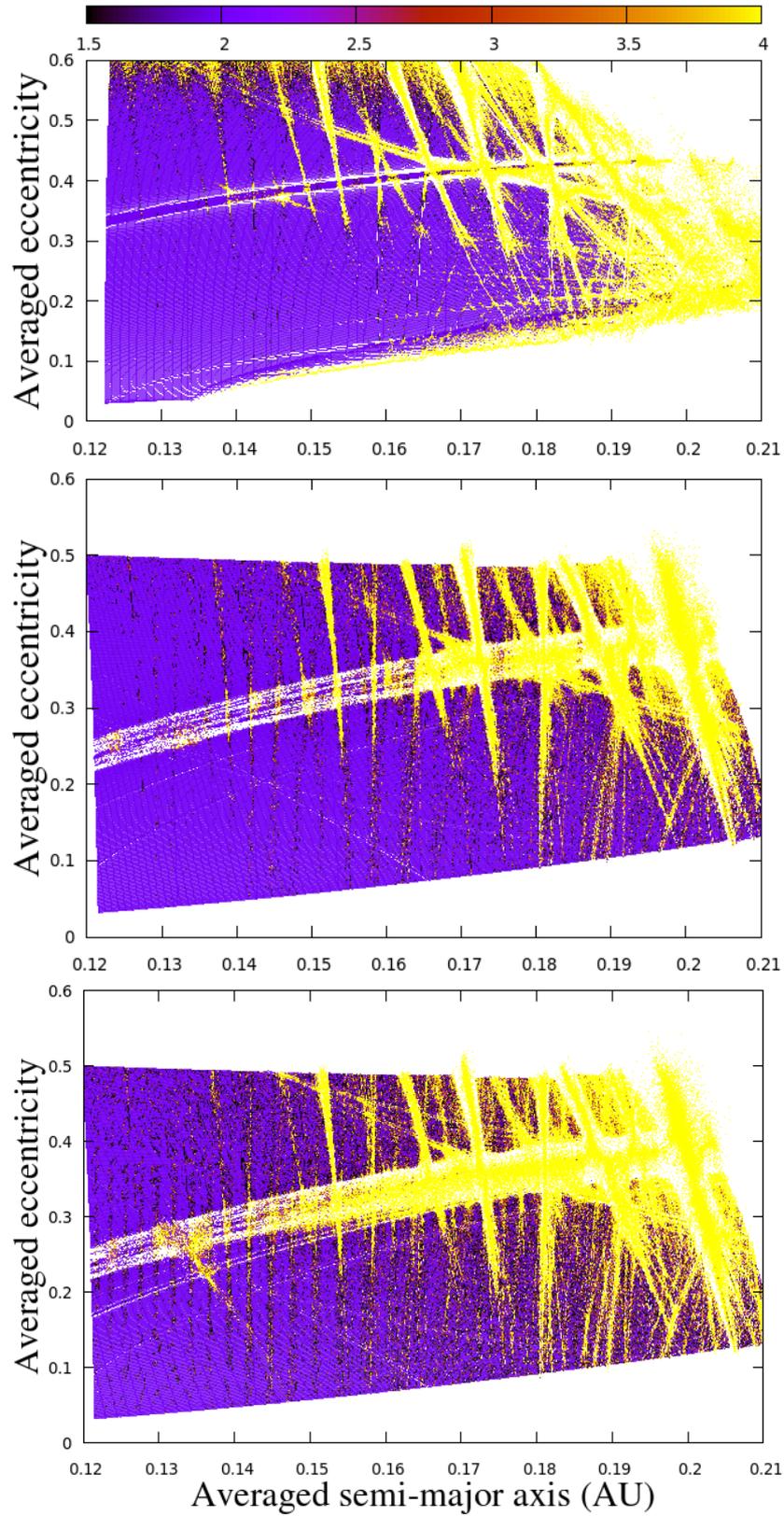
L'identification des résonances de ce modèle, et de manière générale pour toutes les autres résonances indiquées dans cette étude sauf mention contraire, a été réalisée en traçant l'argument critique de la résonance en question, et en employant également des méthodes de Fourier pour déterminer les fréquences en jeu.

#### 4.4.2 Problème de trois corps restreint quasi-périodique (R3BPQP)

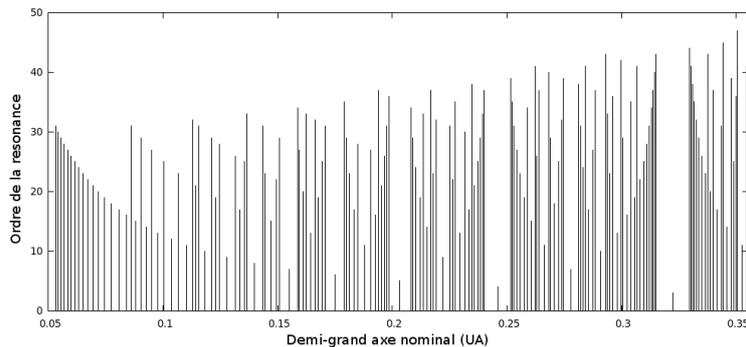
Le second modèle étudié (R3BPQP, fig.4.7 milieu) a été obtenu en intégrant numériquement le système complet, mais sans prendre en compte l'effet des perturbations directes de *Saturne*, *Uranus* et *Neptune* sur le mouvement du satellite. L'orbite du Soleil est donc quasi-périodique et son spectre peut être trouvé par exemple dans Aplegate et al. (1986), Carpino et al. (1987) ou Robutel & Gabern (2006). Les résonances peuvent désormais être créées entre les fréquences du satellite et toutes les fréquences du Système Solaire externe contenues dans le spectre de l'orbite du Soleil.

Dans le modèle R3BPQP, les principales résonances du R3BP sont conservées et on peut observer que la résonance  $\nu_\odot$  s'est considérablement élargie et est davantage chaotique : en effet dans ce modèle la longitude du péricentre du Soleil n'est plus fixe, et il est maintenant possible de trouver près de  $\nu_\odot$  des arguments plus généraux de type  $(\varpi - \Phi)$  avec  $\Phi$  un des angles séculaires des planètes géantes, variant très lentement (voir Beaugé & Nesvorný 2007), provoquant un chevauchement de résonances entre ces différents arguments.

La principale différence par rapport au R3BP est l'apparition de plusieurs résonances séculaires liées à la Grande Inégalité  $\nu_{GI} = 2n_{jupiter} - 5n_{saturne}$  entre Jupiter et Saturne. Cette inégalité possède une fréquence de  $1467''/an$  (883 ans) et la proximité du Système



**Fig. 4.7** – Cartes de stabilité en demi-grand axe et excentricité de la région rétrograde pour différents modèles : R3BP (haut), R3BPQP (milieu) et modèle complet (bas). L'inclinaison initiale est de  $150^\circ$ .



**Fig. 4.8** – Demi-grand axe nominal des résonances de moyen mouvement  $k_1n + k_2n_\odot$  dans la sphère de Hill de Jupiter. L'ordre de la résonance correspond à  $(|k_1| + |k_2|)$ .

Solaire actuel par rapport à cette résonance peut être observé dans Michtchenko & Ferraz-Mello (2001). La Grande Inégalité a un effet important sur l'orbite des deux planètes, et a posé un problème récurrent (comme l'inégalité  $\nu_{1,2} = n_{uranus} - 2n_{neptune}$ ) dans la construction de théories séculaires du Système Solaire ou des planètes géantes (voir par exemple Bretagnon 1982, Simon & Bretagnon 1984, Laskar 1986, 1988). En effet la proximité du Système Solaire à cette résonance induit un problème de petits diviseurs (Morbidelli 2002) préjudiciable à la convergence des théories séculaires.

Les résonances dans ce modèle ont la forme générale :

$$jg + ks + p\nu_{GI} + l_\odot g_\odot + \sum_{i=6}^8 l_i g_i + \sum_{i=6}^8 m_i s_i = 0, \quad (4.7)$$

où la loi de d'Alembert doit être assurée, impliquant  $j + k - 3p + l_\odot + \sum_{i=6}^8 (l_i + m_i) = 0$ . En particulier, un certain nombre de résonances de la forme :

$$p_1 g + p_2 \nu_{GI} \approx 0, \quad (4.8)$$

peuvent être trouvées sur toute la carte de stabilité. En effet dans les cartes de la Fig. (4.7), suivant les résultats analytiques de Čuk & Burns (2004) et Beaugé et al. (2006), tandis que la fréquence du noeud  $s$  rencontre de faibles variations et est toujours positive pour les orbites rétrogrades étudiées, la fréquence du péricentre  $g$  peut avoir des valeurs très différentes selon les éléments orbitaux considérés.  $g$  est positif pour des éléments orbitaux situés *sous* la résonance séculaire  $\nu_\odot$ , prenant des valeurs de plus en plus faibles tandis que l'orbite approche de la résonance, tandis que pour des orbites situées *au-dessus* de la résonance la fréquence  $g$  est négative, avec  $|g|$  augmentant avec la distance avec la résonance. Ceci explique pourquoi on peut aisément trouver avec l'équation (4.8) des résonances avec un  $p_1$  positif ou négatif, en ayant fixé une valeur de  $p_2$ .

En particulier on peut trouver *sous*  $\nu_\odot$  les résonances  $g + \nu_{GI}$  et  $2g + \nu_{GI}$  qui ont approximativement la même forme que  $\nu_\odot$ , et *au-dessus*  $\nu_\odot$  on peut trouver, conformément à la discussion précédente, leurs contreparties "symétriques"  $g - \nu_{GI}$  (qui est d'une grande importance pour la famille *Carme*) et  $2g - \nu_{GI}$ , grâce à des intégrations numériques d'orbites dans cette région.

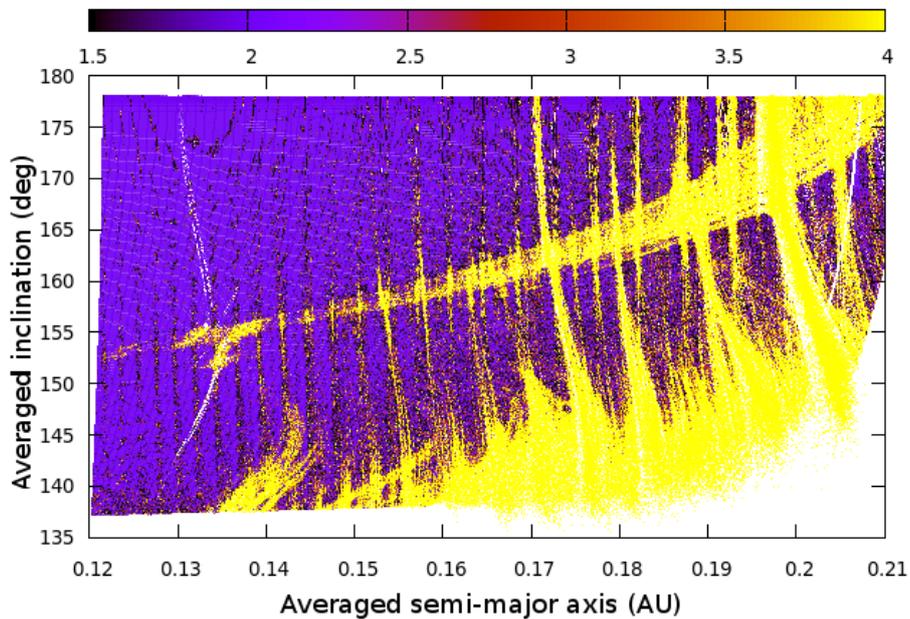
#### 4.4.3 Problème complet

Le dernier modèle dynamique étudié est le modèle complet (Fig.4.7 bas). L'introduction des perturbations directes des planètes géantes sur le mouvement du satellite ajoute

davantage de chaos à l'image dynamique globale, rendant les résonances plus diffuses en comparaison des modèles précédents. On peut noter que les résonances du type de l'équation (4.8) paraissent maintenant plus larges, comme pour le cas de  $2g + \nu_{GI}$ .

#### 4.4.4 Influence de l'inclinaison initiale

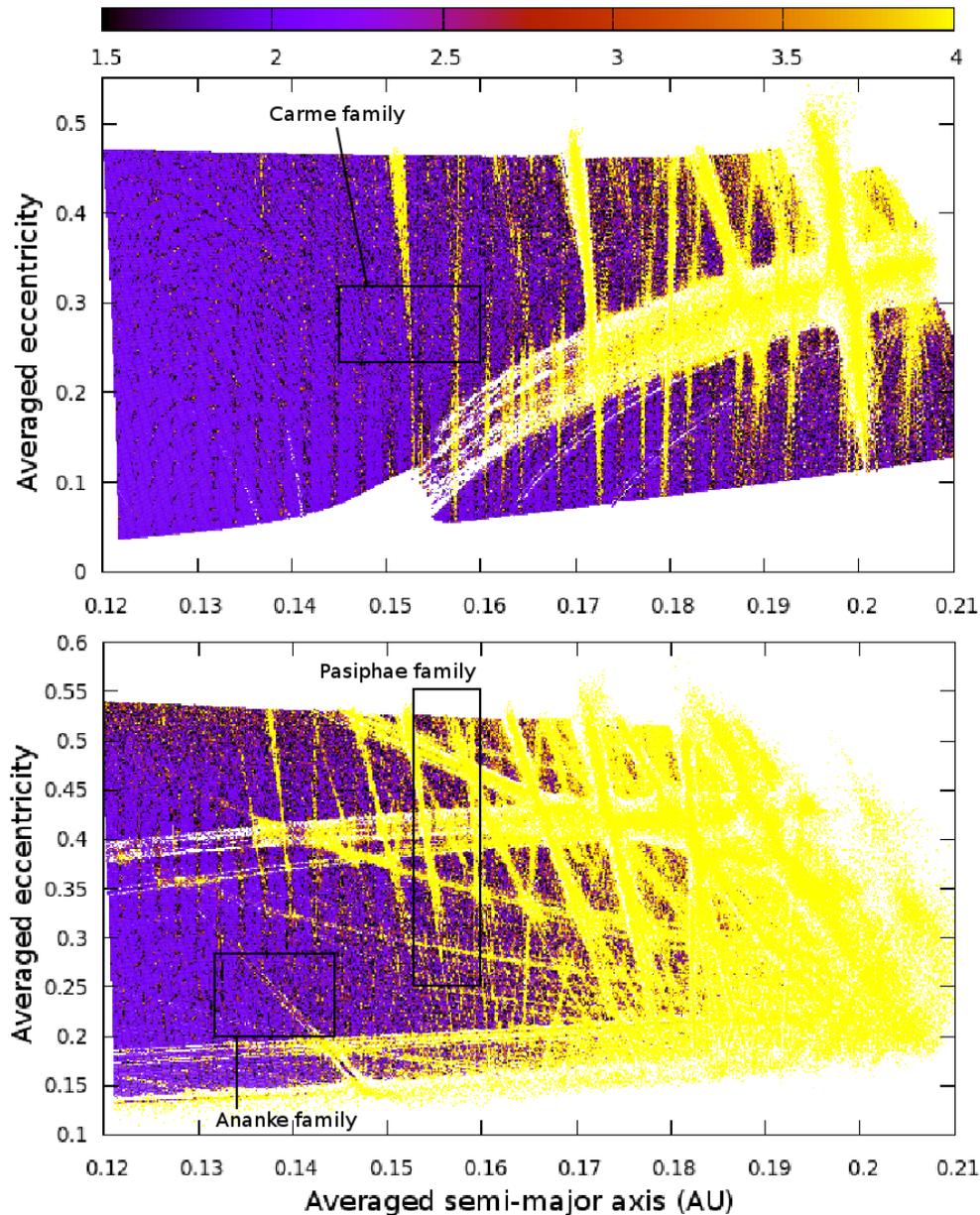
Afin d'observer l'effet de l'inclinaison initiale choisie sur les cartes précédentes, j'ai réalisé plusieurs cartes de stabilité avec le modèle complet. En particulier la carte en demi-grand axe/inclinaison montrée en Fig.4.9 est le complément de la Fig.4.7 (bas). On peut se référer à la Fig.7 (droite) de Hinse et al. (2010) concernant le modèle R3BP.



**Fig. 4.9** – Carte de stabilité en demi-grand axe/inclinaison pour le modèle dynamique complet. L'excentricité initiale est de 0.2.

Avec les différentes RMMs, la résonance  $\nu_{\odot}$  est clairement visible comme la large résonance qui traverse la carte quasi-horizontalement et qui se termine dans le coin haut droit de la carte. Le chaos présent dans le coin bas droit provient de la résonance Kozai (Beaugé & Nesvorný 2007) et du chevauchement des RMMs.

En Fig.4.10 sont également montrés des cartes similaires à la carte Fig.4.8 (bas) avec des inclinaisons initiales de  $160^{\circ}$  et  $140^{\circ}$ . Chacune de ces cartes possède donc une valeur d'inclinaison moyenne différente et en les comparant il est possible de vérifier que la position en éléments orbitaux de la résonance  $\nu_{\odot}$  est en très bon accord avec les résultats analytiques de Beaugé & Nesvorný (2007) (voir leur Fig.9). On peut noter en particulier le fait que la position de la résonance se déplace de manière sensible vers des excentricités élevées quand augmente l'inclinaison. La carte possédant une inclinaison initiale de  $140^{\circ}$  est comparativement plus chaotique dû à la proximité des orbites avec la résonance de Kozai. Sur ces cartes sont également indiquées la position et la taille des cartes de stabilité utilisées pour étudier les familles rétrogrades en détail (sections suivantes).



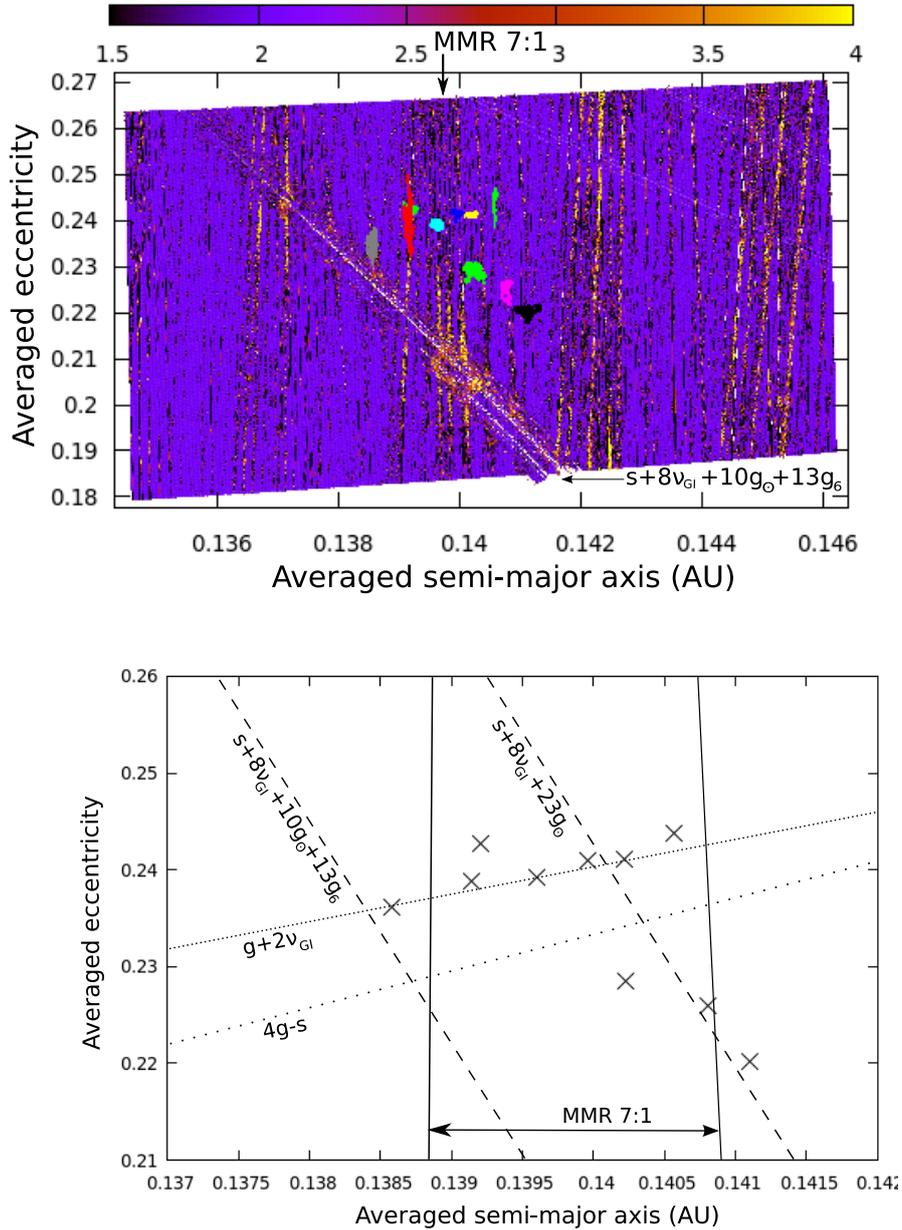
**Fig. 4.10** – Cartes de stabilité en demi-grand axe et excentricité de la région rétrograde avec une inclinaison initiale de  $160^\circ$  (haut) et  $140^\circ$  (bas). Les positions et tailles des cartes correspondant aux familles rétrogrades sont indiquées par des rectangles noirs.

## 4.5 Les familles rétrogrades

Afin d'étudier en détail les familles rétrogrades, j'ai réalisé des cartes de stabilité pour chacune de ces familles. A l'exception du demi-grand axe et de l'excentricité, les éléments orbitaux initiaux ont été choisis comme égaux à ceux des satellites *Ananke*, *Carme* et *Pasiphae* dans une méthode similaire à celle de Michtchenko & Ferraz-Mello (2001) et Guzzo (2005,2006). La diffusion dans l'espace des éléments orbitaux des membres de ces familles est également montrée sur les cartes. On peut noter qu'une telle méthode serait "rigoureuse" seulement s'il s'agissait d'étudier l'orbite du satellite utilisé pour calculer la carte de stabilité. Toutefois la proximité en éléments orbitaux des satellites appartenant à une même famille réduit les différences dynamiques entre ses membres, et rend une carte

unique utilisable.

#### 4.5.1 Famille *Ananke*



**Fig. 4.11** – Carte de stabilité détaillée de la famille *Ananke* avec la diffusion chaotique en éléments orbitaux des satellites connus de cette famille (haut). Un schéma des principales résonances avec les positions moyennes des satellites connus est également montré (bas).

La Fig.4.11 est dédiée à la famille *Ananke*. En premier lieu, on peut observer que les membres de la famille sont répartis autour de la RMM 7 :1 avec le Soleil à un demi-grand axe moyen  $\langle a \rangle \sim 0.14$  AU. Les différentes lignes verticales de cette résonance qui se situe dans l'intervalle  $\langle a \rangle \in [0.139 : 0.141]$  correspondent à différentes combinaisons de  $n - 7n_{\odot}$  avec des angles séculaires du satellite ou des planètes, et l'évolution à long terme de certains des satellites réels est clairement influencée par ces résonances. Bien sûr plusieurs autres

RMMs peuvent être observées sur la carte.

Plusieurs arguments à longues périodes correspondant à l'équation (4.7) peuvent être trouvées sur la carte. D'une grande importance est la famille résonante de type  $s + 8\nu_{GI}$ . En effet la résonance remarquable qui peut être observée sur la carte correspond à l'argument  $s + 8\nu_{GI} + 10g_{\odot} + 13g_6$ , bien qu'il soit possible que d'autres arguments puissent être trouvés au même endroit. La direction de la résonance sur la carte indique la direction générale où la fréquence de la longitude du noeud  $s$  est constante, ainsi les orbites avec  $s = \text{constante}$  sont localisées sur la carte sur des lignes parallèles à cette résonance. En particulier les trois satellites *Thelxinoe*, *Iocaste* et *Hermippe* sont placés suivant une telle direction (voir la Fig.4.11 bas), où la fréquence de l'évolution de  $s + 8\nu_{GI}$  est plus proche de zéro. Par exemple *Thelxinoe* montre une période très longue de  $s + 8\nu_{GI} + 23g_{\odot}$ , tandis que *Iocaste* est en libration dans la résonance  $s + 8\nu_{GI} + 20s_7 + 3s_6$  pour les premiers 60.000 ans d'intégration (Fig.4.12).

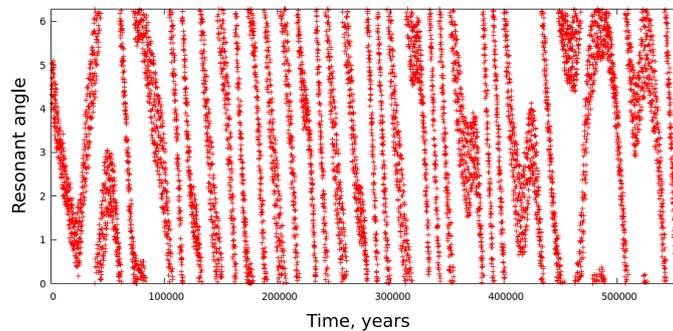


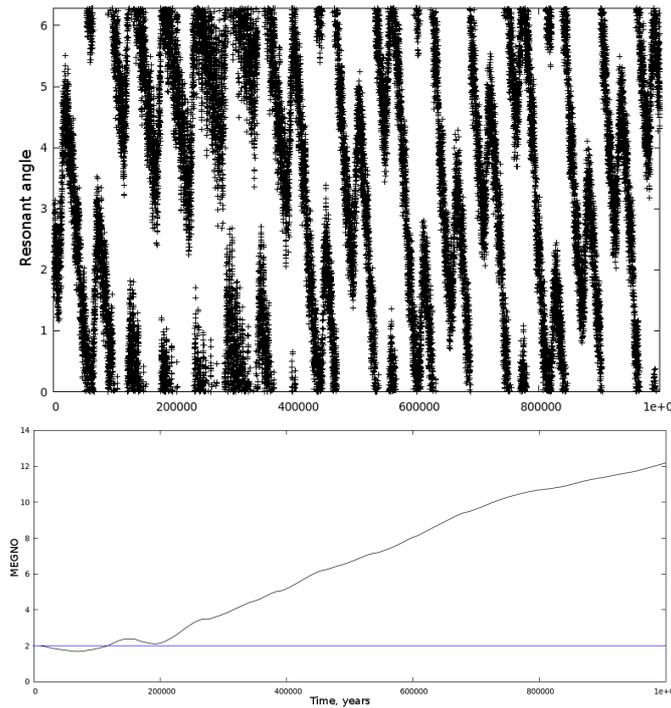
Fig. 4.12 – Évolution de l'angle  $s + 8\nu_{GI} + 20s_7 + 3s_6$  pour *Iocaste*.

En calculant les fréquences fondamentales des orbites fictives de la Fig.4.11 avec une transformée de Fourier (Press et al. 1992), on peut trouver que l'argument  $4g - s \simeq 0$  correspond à une courbe qui passe par la famille, bien qu'aucun satellite n'ait été trouvé dans cette résonance.

La combinaison des arguments  $s + 8\nu_{GI}$  et  $4g - s$  dans cette région implique que  $g + 2\nu_{GI} \simeq 0$ . Les satellites formant le reste de la famille *Ananke* ( $\langle e \rangle \sim 0.24$ ) suivent ce type d'argument. En particulier, la figure 4.13 montre les évolutions de l'angle résonant  $g + 2\nu_{GI} + g_{\odot} + 2g_6 + 3g_7$  et du MEGNO pour *2003J16* (couleur grise sur la Fig.4.11) durant 1 million d'années. L'angle résonant est en libration pendant 400.000 ans puis circule comme l'orbite montre des signes évidents de comportement chaotique. Les autres satellites de la famille *Ananke* montrent des évolutions similaires.

Ces résultats peuvent être vus également à partir de l'analyse en fréquence de la famille *Ananke* (Table 4.2), où les périodes de précession du péricentre  $T_{\varpi}$  des satellites sont d'environ la moitié de la période de la Grande Inégalité (883 ans) et où les périodes de précession du noeud  $T_{\Omega}$  sont proches de  $\frac{1}{8}$  de cette valeur.

On peut noter la présence de chaos due au chevauchement des résonances séculaires et de moyen mouvement, et postuler que le chaos observé pour la famille *Ananke* provient principalement du chevauchement de la résonance séculaire  $s + 8\nu_{GI} + 10g_{\odot} + 13g_6$  et de la RMM 7 :1, tandis que plusieurs autres résonances plus faibles appartenant à la famille  $s + 8\nu_{GI}$  rencontrent également la MMR 7 :1 dans d'autres régions de la carte.



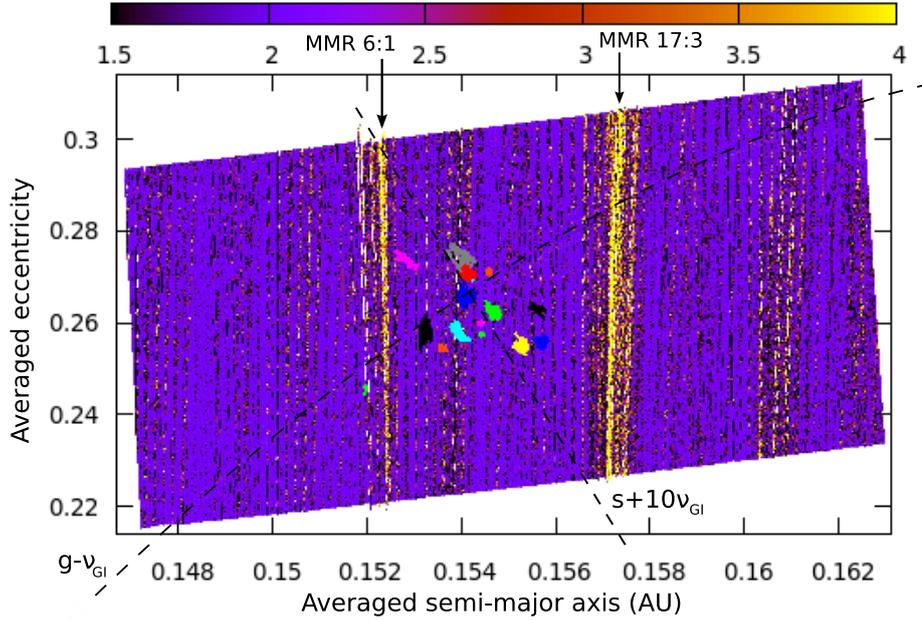
**Fig. 4.13** – Évolution du satellite *2003J16*. Angle résonant angle  $g + 2\nu_{GI} + g_{\odot} + 2g_6 + 3g_7$  (haut) et MEGNO (bas).

#### 4.5.2 Famille *Carme*

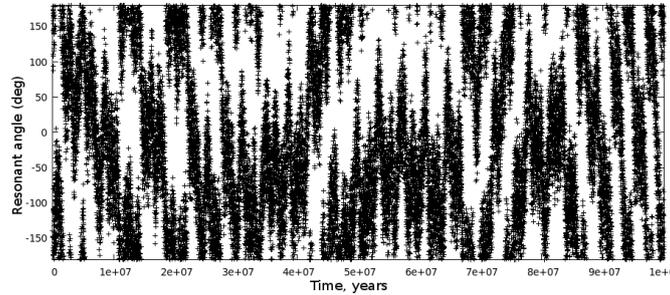
La famille *Carme* est présentée en détail en Fig.4.14. La famille (à l'exception de *200J17*) se situe entre les résonances chaotiques 7 :1 à un demi-grand axe  $\langle a \rangle = 0.152$  UA (sur la gauche) et la MMR 17 :3 à un demi-grand axe  $\langle a \rangle = 0.157$  UA (sur la droite). Les RMMs semblent être plus chaotiques dans cette région dynamique et on note que les multiplets peuvent se chevaucher : par exemple la bande chaotique verticale qui correspond à la RMM 17 :3 contient non seulement cette résonance, mais aussi des multiplets de la RMM 6 :1 de la forme  $n - 6n_{\odot} + g + 2s$ .

La résonance séculaire  $g - \nu_{GI}$  est présente sur la carte et dessine une courbe approximativement linéaire depuis le coin bas gauche au coin haut droit de la carte, passant à travers la famille *Carme*. Cette résonance ne peut être aperçue sur la Fig.4.14 due à sa taille réduite, mais un élargissement de la carte permet de la détecter, grâce à l'utilisation des éléments moyens. Bien qu'aucun des membres de la famille ne semble être exactement dans la résonance, les positions moyennes de certains satellites en sont très proches et sont fortement influencées. Par exemple l'évolution de l'angle  $g - \nu_{GI} - 3g_6 - g_8 + g_{\odot} - s_8$  alterne entre libration et circulation pour *Kale* durant les premiers 7 millions d'années, mais un meilleur exemple est donné par l'évolution de l'angle  $g - \nu_{GI} - 2g_6 - 2s_8$  pour *2003J9* qui montre des périodes de libration pouvant durer 40 millions d'années (voir Fig4.15).

Comme pour le cas de la famille *Ananke*, cette influence de la Grande Inégalité est confirmée par l'analyse en fréquence de la famille *Carme* (Table4.2) où les périodes de précession du péricentre des satellites sont proches de la période de la Grande Inégalité. De la même manière, les fréquences de précession du noeud  $s$  pour ces satellites sont très proches d'une commensurabilité  $s + 10\nu_{GI}$ . En effet j'ai trouvé que les satellites de cette famille sont fortement influencés par cette résonance. Ils satisfont à des commensurabilités



**Fig. 4.14** – Carte de stabilité détaillée de la famille *Carme* avec la diffusion chaotique en éléments orbitaux des satellites connus de cette famille. Les positions des résonances séculaires  $g - \nu_{GI}$  et  $s + 10\nu_{GI}$  sont indiquées par des lignes en pointillés.



**Fig. 4.15** – Évolution de l'angle résonant  $g - \nu_{GI} - 2g_6 - 2s_8$  pour *2003J9*.

de la forme :

$$s + 10\nu_{GI} + l_{\odot}g_{\odot} + \sum_{i=6}^8 l_i g_i + \sum_{i=6}^8 m_i s_i \quad (4.9)$$

avec  $l_{\odot} + \sum_{i=6}^8 (l_i + m_i) = -29$ . Par exemple j'ai pu déterminer une libration de 200.000 ans de l'argument  $s + 10\nu_{GI} + l_4 g_6 + 4g_8 + 17s_8$  pour *Pasithee*, et une libration de 450.000 ans de l'angle  $s + 10\nu_{GI} + 4g_6 + 4s_7 + 20s_8 + s_6$  pour *Kallichore*. Ce type de résonance n'apparaît pas sur la carte de stabilité (Fig.4.14), dû probablement au temps d'intégration limité de la carte (100.000 ans). En effet les diffusions chaotiques déterminées pour certains des satellites de la famille (100 millions d'années) ont clairement des formes dirigées dans la direction de la résonance. La localisation de cette résonance sur la Fig.4.14 a été déterminée en calculant les fréquences des orbites fictives de la carte.

### 4.5.3 Famille *Pasiphae*

La famille *Pasiphae* est détaillée en Fig.4.16. Sur la carte, la diffusion chaotique des satellites de la famille *Pasiphae* est superposée, mais aussi la diffusion de certains satellites qui n'appartiennent pas aux familles connues : *Autonoe*, *Eurydome*, *Hegemone* et *Sponde*. J'ai choisi ces satellites de manière à ce que leurs inclinaisons moyennes correspondent approximativement à celles de la carte de stabilité pour des valeurs identiques de demi-grand axe et d'excentricité moyennes. Comme les résonances séculaires dans la région des satellites irréguliers sont très sensibles à l'inclinaison et pour éviter de fausses interprétations, j'ai limité le nombre de satellites indiqués en autorisant des différences en inclinaison moyenne de quelques degrés seulement.

Contrastant avec les deux premières familles rétrogrades, la région dynamique de la famille *Pasiphae* est bien plus chaotique et la "toile" résonante est clairement visible. Pour davantage de clarté, la Fig.4.16 montre également un schéma de certaines résonances séculaires et de moyen mouvement importantes, ainsi que la diffusion chaotique des satellites.

Les éléments les plus importants qu'on peut observer sont les deux RMMs (6 :1 and 23 :4) qui entourent la majorité des satellites, et la résonance séculaire  $\nu_{\odot}$  (S1) qui ici encore sépare la carte horizontalement. Comme vu précédemment, à cet endroit la fréquence de la longitude du péricentre  $g$  tend vers zéro et change de signe, permettant à la résonance  $\nu_{\odot}$  d'apparaître, mais aussi à des résonances du type :

$$g + l_{\odot}g_{\odot} + \sum_{i=6}^8 l_i g_i + \sum_{i=6}^8 m_i s_i \quad (4.10)$$

où  $l_{\odot} + \sum_{i=6}^8 (l_i + m_i) = -1$ .

Plusieurs résonances peuvent être trouvées proche de la position où  $g \sim 0$  et j'ai trouvé des résonances impliquant la Grande Inégalité (S2) du type :

$$jg + \nu_{GI} + l_{\odot}g_{\odot} + \sum_{i=6}^8 l_i g_i + \sum_{i=6}^8 m_i s_i \quad (4.11)$$

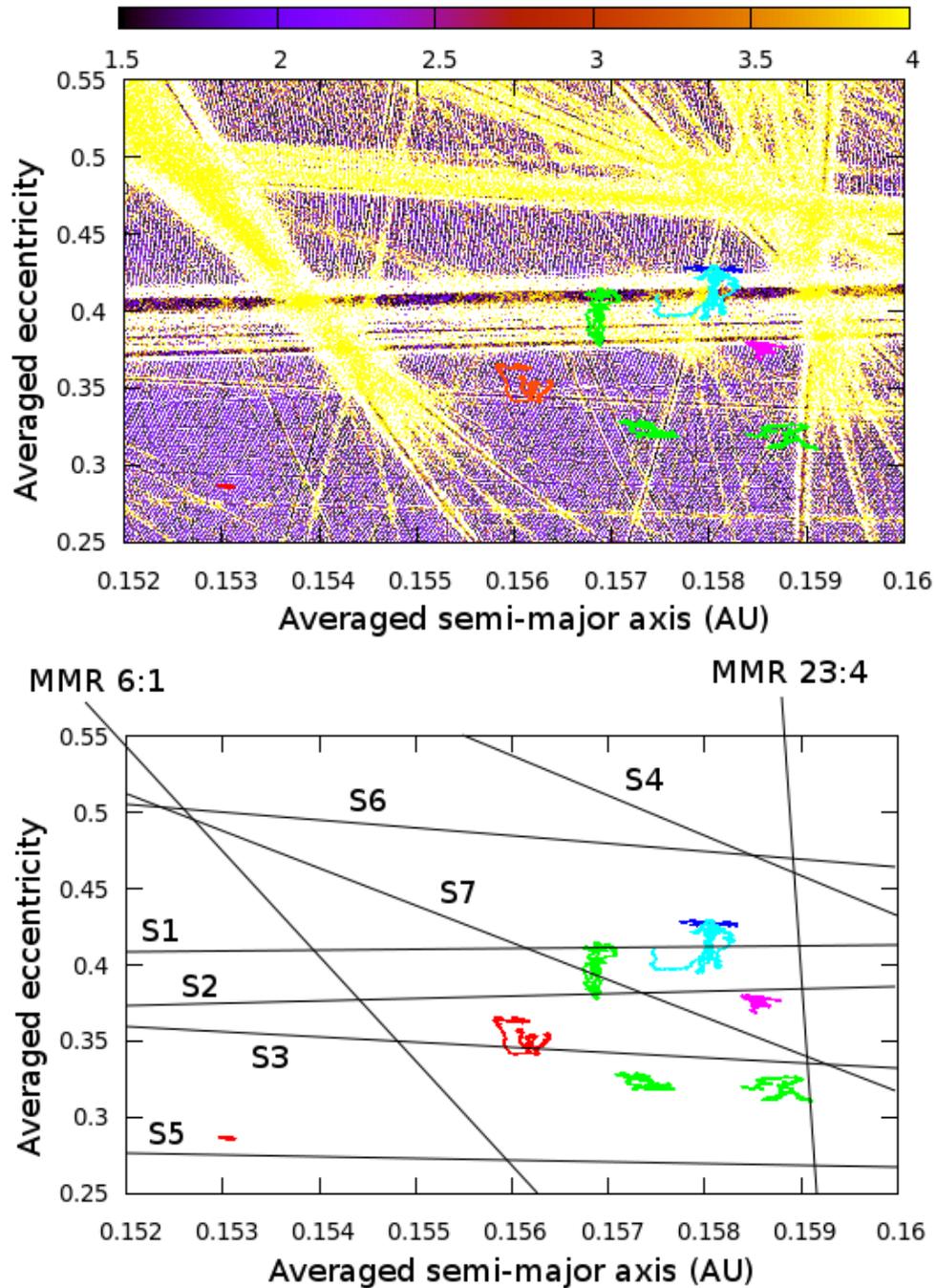
où  $j \geq 2$  and  $j + l_{\odot} + \sum_{i=6}^8 (l_i + m_i) = 3$ , tandis que la résonance  $g + \nu_{GI}$  est indiquée par S3.

Comme  $g$  augmente quand l'excentricité diminue, des résonances de type :

$$g + p\nu_{GI} \quad (4.12)$$

avec  $p \geq 2$  sont présentes, comme la résonance  $g + 2\nu_{GI}$  indiquée par S5. On note qu'on peut également trouver la résonance  $4g + s$  approximativement au même endroit, et les résonances  $2g + s$  et  $3g + s$  discutées par Beaugé & Nesvorný (2007) sont trouvées à des excentricités faibles et ne peuvent donc pas apparaître sur la carte de stabilité.

Au-dessus de la résonance  $\nu_{\odot}$ ,  $g$  est négatif et les résonances  $g - \nu_{GI}$  (S6) et  $g - 2\nu_{GI}$  (S4) peuvent être trouvées. Bien que ces résonances rencontrent la RMM 23 :4 proche de la famille *pasiphae*, le chaos observé pour les satellites réels pourrait provenir uniquement du chevauchement entre  $\nu_{\odot}$  avec les résonances de type (4.10) et (4.11), mais également avec la résonance  $s + 11\nu_{GI}$  (S7) qui rencontre les autres résonances très proche de la position moyenne de *Pasiphae*. En effet l'évolution chaotique de ce satellite semble visiter la résonance  $\nu_{\odot}$ , ainsi que les résonance correspondant aux types décrits par les Eqs.(4.10) et (4.11).

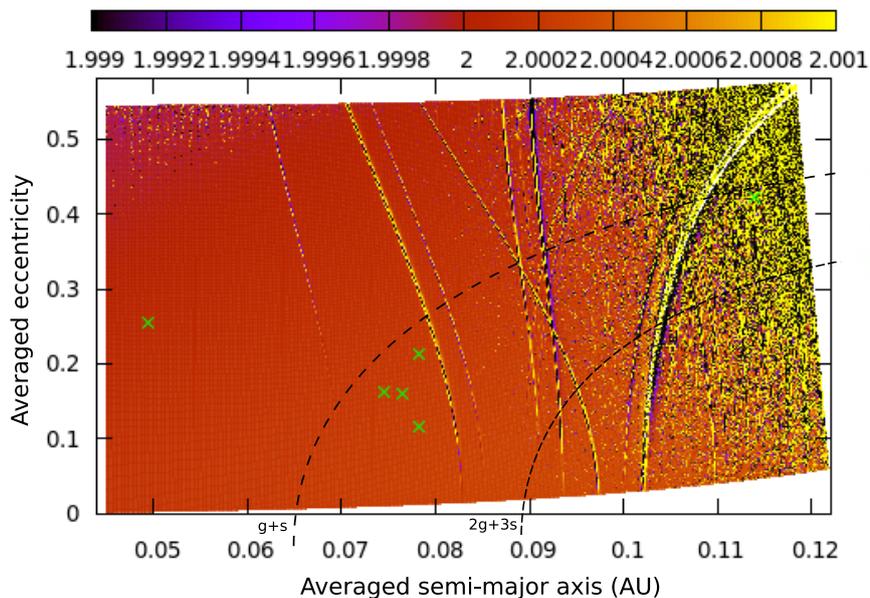


**Fig. 4.16** – Cartes de stabilité de la famille *Pasiphae* family (haut) et schéma des résonances principales (bas). La diffusion chaotique en éléments orbitaux des satellites réels de la famille et de *Autonoë*, *Eurydome*, *Hegemone* et *Sponde* est également indiquée.

## 4.6 La région prograde

La région prograde est détaillée en Fig.4.17. De la même manière que pour les familles rétrogrades, j'ai intégré numériquement des cartes de stabilité utilisant les éléments orbitaux initiaux d'un satellite typique; ici *Himalia*, avec le demi-grand axe et l'excentricité pris comme paramètres libres. Comme mentionné par Hinse et al. (2010), on peut voir que la région prograde, qui est plus proche de la planète, est bien moins perturbée et

dynamiquement “active” que le région rétrograde. A l’exception de la résonance chaotique située à droite de la carte qui peut être identifiée comme la résonance  $g + 8\nu_{GI} + 20g_{\odot} + 3g_6$  et son entourage immédiat, où la valeur du MEGNO est dans l’intervalle  $[10-20]$ , aucune orbite chaotique n’est trouvée par le MEGNO. C’est pourquoi j’ai restreint l’échelle du MEGNO sur la carte dans un intervalle très restreint de  $10^{-3}$  autour de la valeur stable de 2. En effet le MEGNO permet de détecter et distinguer les orbites quasi-périodiques des orbites résonantes et des orbites instables situées sur les séparatrices de résonances (Cincotta & Simó 2000).



**Fig. 4.17** – Carte de stabilité en demi-grand axe/excentricité de la région prograde. Les éléments orbitaux moyens des satellites progrades connus sont indiqués par des croix vertes.

Les positions moyennes des six satellites progrades connus sont indiquées sur les cartes avec des croix car leur diffusion chaotique est difficilement visible avec l’échelle de demi-grand axe et d’excentricité utilisée. Sur la carte sont indiqués les positions de *Themisto* et *Carpo*, mais leurs inclinaisons moyennes ne correspondent pas à celles de la carte pour des valeurs identiques de demi-grand axe moyen et d’excentricité moyenne, et donc cette carte ne peut être utilisée pour étudier leur stabilité.

*Himalia*, *Leda*, *Lysithea* et *Elara* en particulier sont situés près de la résonance  $g + s$ , qui peut être trouvée près de la position donnée analytiquement par Beaugé & Nesvorný (2007), comme la résonance  $2g + 3s$ . Ces résonances ne sont pas détectées par le MEGNO, ou par une structure particulière qui pourrait être visible avec l’utilisation des éléments moyens. Encore une fois la position de ces résonances sur la carte de stabilité provient de la détermination des fréquences fondamentales des orbites de la carte.

Toutefois, plusieurs résonances sont clairement visibles sur la carte de stabilité. *Himalia*, *Leda*, *Lysithea* et *Elara* en particulier sont placés près d’une résonance satisfaisant  $g - s + 7\nu_{GI} \sim 0$ . Cette résonance appartient à la famille définie par :

$$g - s + p\nu_{GI} + l_{\odot}g_{\odot} + \sum_{i=6}^8 l_i g_i + \sum_{i=6}^8 m_i s_i \quad (4.13)$$

où  $p + l_{\odot} + \sum_{i=6}^8 (l_i + m_i) = 0$ , et où les différentes résonances possibles partagent la même direction sur la carte de stabilité. Parmi ce groupe prograde réduit, *Elara* est le satellite le plus proche de la résonance  $g - s + 7\nu_{GI} \sim 0$ , à la fois en demi-grand axe, excentricité et inclinaison (un argument résonant exact satisfaisant l'équation (4.13) n'a pas pu être déterminé avec précision pour ce satellite) et est le seul objet à avoir été détecté comme ayant une orbite chaotique. Le chaos d'*Elara* provient donc peut-être d'un possible chevauchement de la résonance  $g - s + 7\nu_{GI} \sim 0$  avec la résonance  $g + s$ , bien que des intégrations numériques plus longues seraient nécessaires afin de confirmer cette hypothèse.

## 4.7 Discussion

Un des principaux résultats présenté dans cette étude est la présence de commensurabilités impliquant la Grande Inégalité dans ou très proche des familles rétrogrades *Ananke*, *Carme* et *Pasiphae*, comme du groupe prograde. Parmi ces résonances, celles impliquant la fréquence de précession du péricentre  $g$  sont typiquement d'un ordre faible.

La Grande Inégalité, outre le fait d'avoir une grande importance dans l'évolution de Jupiter et Saturne (voir Section 4.4.2), a une influence importante dans la dynamique de certains groupes de petits corps. Ferraz-Mello (1996) et Ferraz-Mello et al. (1998) ont montré que cette inégalité est responsable de l'évolution chaotique d'astéroïdes situés dans la résonance de moyen mouvement 2 :1 de la ceinture principale, expliquant le manque d'astéroïdes dans cette zone (*Hécuba gap*). Carruba et al. (2004) ont expliqué son implication dans les résonances secondaires trouvées dans la résonance Kozai.

Ćuk & Burns (2004b) ont montré que la Grande Inégalité est dynamiquement importante pour les satellites irréguliers progrades de Saturne. Ils ont démontré en particulier que des satellites fictifs satisfaisant l'argument  $2g + \nu_{GI} + g_6 = 0$  (qui implique  $T_{\varpi} = 1850$  ans) sont instables sur de courtes échelles de temps. Cette résonance induit de cette manière une grande instabilité qui pourrait avoir eu un effet de balayage des objets capturés par Saturne dans le passé (Ćuk & Gladman 2006). Les satellites progrades de Saturne connus ne sont pas dans cette résonance, mais sont localisés à des inclinaisons situées de part et d'autre de l'inclinaison résonante.

La situation n'est pas aussi claire en ce qui concerne les satellites rétrogrades de Saturne, bien que les auteurs précités attirent l'attention sur le cas de *Thrymr* qui possède une période de précession proche de la Grande Inégalité. D'une manière générale, en étudiant les valeurs des fréquences de précession des satellites irréguliers de Saturne, Uranus et Neptune déterminés analytiquement par Beaugé & Nesvorný (2007), il semble, à l'inverse du système Jovien, qu'il n'y ait pas d'agglomérations importantes de satellites proches de commensurabilités impliquant la Grande Inégalité, peut-être à l'exception d'un groupe de huit satellites de Saturne incluant *Suttungr* et *Mundilfari* proche de la commensurabilité  $4g - 3\nu_{GI}$ .

D'un autre côté, des satellites individuels sont très proches de certaines résonances comme les satellites de Saturne *2004S7* ( $s + 3\nu_{GI}$ ) et *Bergelmir* ( $s + 2\nu_{GI}$ ), le satellite d'Uranus *Ferdinand* ( $3g - \nu_{GI}$ ) ou le satellite de Neptune *Psamathe* ( $s + \nu_{GI}$ ). On peut voir que les commensurabilités de type  $s + p\nu_{GI}$  pour les satellites de Saturne, Uranus et Neptune sont d'ordres plus faibles (et donc potentiellement plus importantes) que pour le cas de Jupiter, où les satellites possèdent des valeurs plus élevées de  $s$ . Bien que des simulations numériques soient nécessaires, il n'y a donc pas de raisons a priori de trouver une importance moindre de la Grande Inégalité pour les satellites rétrogrades de Saturne, Uranus et Neptune.

Les modèles impliquant la capture des satellites irréguliers des planètes géantes durant la période de migration des planètes, causée par la diffusion gravitationnelle due au disque primordial de planétésimaux (Nesvorný et al. 2007; Bottke et al. 2010) répondent de manière convaincante au problème de la formation et de l'origine de ces satellites. Étudier l'évolution des différentes résonances décrites dans cette étude pendant la migration planétaire, comme considérée par Tsiganis et al. (2005) ou Hahn & Malhotra (1999), nécessiterait des intégrations numériques minutieuses mais quelques points peuvent être discutés de manière qualitative.

Ces modèles de migration montrent que Jupiter et Saturne ont migré vers l'intérieur et l'extérieur respectivement. En particulier, ils impliquent qu'il n'y a pas eu de changement drastique de la fréquence de précession de Jupiter  $g_5$  (bien que son amplitude ait été modifiée, voir Morbidelli et al. 2009), ainsi on peut seulement espérer un changement minime dans la position de la résonance  $\nu_\odot$  durant cette période. Ce n'est pas le cas pour les résonances impliquant la Grande Inégalité. Utilisons la relation donnant l'évolution temporelle des demi-grand axes  $a_5(t)$  et  $a_6(t)$  donnée par Malhotra (1995)<sup>4</sup> :

$$a(t) = a_f - \Delta a \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (4.14)$$

où  $a_f$  est le demi-grand axe observé aujourd'hui,  $\Delta a$  est le changement en demi-grand axe (égal à -0,2 UA pour Jupiter et 0,8 UA pour Saturne), et  $\tau (= 2.10^6)$  est l'échelle de temps caractéristique de la migration, et prenons comme conditions initiales Jupiter et Saturne après la traversée de leur résonance de moyen mouvement 1 :2.

En utilisant la relation (4.14), on peut voir que les résonances d'ordre faible de type  $jk + k\nu_{GI}$  ont probablement traversées tout l'espace des phases décrit par les cartes de stabilité des figures (4.7) et (4.10) durant la période de migration. En utilisant la même relation (4.14), Carruba et al. (2004) ont montré qu'un mécanisme similaire s'est produit dans la région où les satellites sont en libration dans la résonance Kozai. Leurs résultats indiquent qu'un balayage important des objets à l'intérieur de la résonance Kozai, et dû à des résonances secondaires impliquant la Grande Inégalité, a été à l'oeuvre durant la migration de Jupiter et Saturne.

En ce qui concerne les résonances de moyen mouvement entre les satellites et le Soleil de type  $pn = (p + q)n_\odot$ , la variation en demi-grand axe  $\Delta_a$  de leurs positions nominales durant cette période est donnée par la simple relation :

$$\Delta_a = \Delta_{a_5} \left(\frac{p+q}{p}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{m_5 + m_\odot}{m_5}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad (4.15)$$

où  $\Delta_{a_5}$  est le changement en demi-grand axe de Jupiter (0,2 AU) et  $m_5$  et  $m_\odot$  sont les masses de Jupiter et du Soleil. Cette relation donne un déplacement de  $\sim 0,01$  UA vers la planète pour les RMMs trouvées près des familles de satellites (RMMs 6 :1, 17 :3, 23 :4, 7 :1). Ces déplacements sont importants et dépassent de beaucoup les tailles des familles de satellites. Elles sont données ici à titre indicatif et il serait intéressant d'étudier leurs influences sur les orbites des satellites par des intégrations numériques appropriées.

<sup>4</sup>Le Modèle de Nice (Tsiganis et al. 2005) prédit une période de rencontres proches entre Saturne, Uranus et Neptune au début de la période de migration des planètes, et suivant juste la traversée de la RMM 1 :2 entre Jupiter et Saturne. Ces résultats contredisent le scénario de migration régulière prévu par Malhotra (1995) et Hahn & Malhotra (1999). Toutefois les évolutions exponentielles de Malhotra (1995) dans le cas de Jupiter et Saturne sont similaires avec les évolutions orbitales de ces planètes prévues par le Modèle de Nice pour ce qui concerne la période *postérieure* à celle des rencontres proches. J'utiliserai donc la relation 4.14 dans la suite. On peut cependant noter que les récentes modélisations du Modèle de Nice (Morbidelli et al. 2010) semblent contredire une migration planétaire exponentielle de Jupiter et Saturne.

**Tab. 4.1** – Résultats de l'intégration numérique des satellites sur 100 millions d'années : pour chaque satellite est indiqué le demi-grand axe moyen  $\langle a \rangle$ , l'excentricité moyenne  $\langle e \rangle$ , l'inclinaison moyenne  $\langle i \rangle$ , la valeur finale du MEGNO et le temps de Lyapunov estimé (années). À partir de l'évolution moyenne des satellites (voir Section 4.3), sont indiqués l'écart type  $\sigma$  ( $\times 10^{-5}$ ) et l'excursion maximale  $\Delta$  ( $\times 10^{-5}$ ) pour le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison. Les astérisques (\*) signalent les satellites non étudiés par Nesvorný et al. (2003).

Satellite	$\langle a \rangle$	$\langle e \rangle$	$\langle i \rangle$	Megno	$T_L$	$\sigma_a$	$\sigma_e$	$\sigma_i$	$\Delta_a$	$\Delta_e$	$\Delta_i$
	(UA)		(deg)			(UA)		(deg)	(UA)		(deg)
Groupe prograde											
Himalia	0.0765	0.1597	28.602	1.81	stable	0.05	3.92	39.6	0.31	20.10	266.7
Elara	0.0783	0.2122	28.067	9.60	4098361	0.21	8.42	2790.6	1.07	46.38	17583.9
Lysithea	0.0782	0.1167	27.644	2.00	stable	0.04	88.32	1122.2	0.24	313.38	4085.4
Leda	0.0745	0.1630	28.086	2.01	stable	0.18	53.00	943.6	1.11	271.48	4931.0
Themisto	0.0495	0.2546	44.389	545.04	69444	0.03	401.74	5524.2	0.12	2239.23	34151.5
Carpo (*)	0.1139	0.4229	53.144	1490.97	33557	5.41	264.32	5194.8	26.88	1095.74	24442.0
Famille <i>Ananke</i>											
Ananke	0.1406	0.2438	147.705	162.53	306129	1.24	205.56	3049.6	7.07	866.93	13248.8
Iocaste	0.1408	0.2260	148.635	285.43	173039	3.33	104.74	3116.0	20.57	556.34	17444.8
Praxidike	0.1400	0.2410	148.011	1146.58	33886	2.79	58.04	4676.9	0.05	284.77	22918.0
Harpalyke	0.1396	0.2392	147.807	1049.08	42952	4.43	52.07	1426.4	22.30	273.06	6352.3
Thyone	0.1402	0.2411	147.619	848.01	57206	4.72	26.45	4348.9	22.68	133.20	20367.7
Hermippe	0.1411	0.2202	150.084	62.34	859049	10.23	73.82	4905.6	47.50	405.81	28528.3
Euanthe	0.1392	0.2427	148.000	1454.65	33312	5.04	46.18	1754.2	24.26	229.10	8438.8
2003J16 (*)	0.1386	0.2362	147.628	884.23	59312	3.60	169.65	4209.0	20.15	802.68	19353.9
Mneme (*)	0.1391	0.2388	147.752	106.93	466919	4.01	324.56	7705.3	20.86	1802.96	40557.9
Thelxinoe (*)	0.1402	0.2286	150.713	134.79	383527	7.77	84.58	3459.7	37.80	472.33	19479.7
Famille <i>Carme</i>											
Carme	0.1547	0.2619	164.519	556.27	56179	6.55	84.41	2206.4	35.98	416.92	11406.1
Kalyke	0.1557	0.2558	164.651	1174.44	43545	5.78	70.18	2640.3	36.75	321.74	12780.2
Erinome	0.1540	0.2736	164.372	210.13	255461	12.07	135.98	1066.0	61.52	618.31	5061.9
Isonoe	0.1536	0.2543	164.792	52.56	926900	4.04	38.19	1182.5	18.15	158.05	6719.7
Taygete	0.1544	0.2599	164.748	51.24	902368	2.41	24.76	3657.0	13.49	122.30	18690.9
Chaldene	0.1533	0.2582	164.683	128.75	396116	5.59	108.18	2563.5	27.37	835.70	12059.9
Pasithee	0.1527	0.2744	164.572	169.37	365565	10.47	80.63	3783.3	49.80	398.23	17440.4
Kale	0.1540	0.2659	164.466	947.10	55335	8.06	105.95	4057.5	40.50	573.26	19154.0
Aitne	0.1541	0.2705	164.550	1366.89	36578	7.03	78.87	1650.4	38.29	350.12	10304.4
Eukelade (*)	0.1542	0.2698	164.722	58.85	765413	1.81	30.16	804.2	10.46	132.23	4096.1
2003J05 (*)	0.1553	0.2554	164.782	472.66	109538	6.38	81.31	2781.6	34.90	494.19	12618.4
Arche (*)	0.1544	0.2573	164.526	17.64	2812262	2.03	12.87	1273.9	11.77	88.06	7112.3
Kallichore (*)	0.1540	0.2579	164.636	604.61	77760	8.19	99.66	4509.3	45.26	454.62	23867.7
2003J19 (*)	0.1556	0.2632	164.641	496.83	113623	7.05	64.11	1743.6	38.58	394.83	8151.2
2003J9 (*)	0.1546	0.2709	164.550	29.73	1573482	2.46	36.17	0428.3	12.65	198.53	2266.1
Suite du tableau à la page suivante											

Suite du tableau précédent											
Satellite	$\langle a \rangle$	$\langle e \rangle$	$\langle i \rangle$	Megno	$T_L$	$\sigma_a$	$\sigma_e$	$\sigma_i$	$\Delta_a$	$\Delta_e$	$\Delta_i$
	(UA)		(deg)			(UA)		(deg)	(UA)		(deg)
Herse (*)	0.1520	0.2457	164.465	97.41	504692	0.89	41.03	4216.8	5.06	204.93	19813.3
Famille <i>Pasiphae</i>											
Pasiphae	0.1568	0.4012	148.712	4089.53	9087	6.25	1006.23	35600.8	36.04	3811.57	136968.2
Megaclite	0.1581	0.4263	149.752	916.06	73282	12.07	79.53	5973.0	59.91	500.91	36264.9
2003J04 (*)	0.1586	0.3753	146.822	2672.96	17519	6.63	233.38	5942.7	41.75	1266.15	34420.8
Cyllene (*)	0.1580	0.4136	147.213	5464.17	9772	17.73	971.95	32673.5	88.79	3553.04	140856.3
Autres satellites											
Autonoe	0.1588	0.3187	150.759	4870.90	10116	18.14	465.55	11633.6	74.00	1649.62	449531.8
Callirhoe	0.1591	0.2964	145.072	3088.88	12820	13.91	237.06	10839.3	64.20	1223.68	468475.3
Helike (*)	0.1398	0.1631	156.207	3561.37	15742	2.75	1770.12	101714.9	18.03	5317.68	3034247.6
Aoede (*)	0.1589	0.4417	155.930	2518.58	18446	5.94	177.45	12345.3	34.64	935.99	468323.0
2003J23 (*)	0.1554	0.2892	144.482	2042.03	26659	5.21	274.02	7912.4	31.90	1346.63	360419.6
Eurydome	0.1530	0.2863	148.928	120.76	407729	3.48	39.67	3034.7	17.86	205.63	146036.5
Hegemone (*)	0.1561	0.3561	152.479	3687.31	8771	14.71	818.84	21359.9	60.21	2544.48	766995.9
Euporie	0.1288	0.1482	145.425	86.72	608869	0.52	148.24	3551.8	3.33	781.07	182316.4
Sponde	0.1573	0.3215	149.245	2058.82	21836	13.77	336.61	8770.1	61.33	1202.19	431989.5
Orthosie	0.1397	0.2916	144.120	1389.60	38452	3.59	240.42	10202.6	19.51	1056.06	494229.6
Sinope	0.1579	0.2630	157.814	5890.24	8009	18.92	1005.06	16314.9	83.41	4119.96	710624.0
2003J02 (*)	0.1904	0.3800	154.290	3349.03	1687	-	-	-	-	-	-
2003J03 (*)	0.1338	0.2090	146.820	56.89	978744	4.65	295.51	6123.5	22.42	1489.61	32446.0
2003J10 (*)	0.1525	0.4358	163.536	513.58	97757	4.54	56.60	3171.6	26.16	208.43	15917.6
Kore (*)	0.1616	0.3483	142.715	17505.48	2475	36.90	792.35	17126.7	130.63	2937.66	77155.1
2003J15 (*)	0.1493	0.2060	145.472	352.21	135390	5.75	84.95	5806.9	29.31	460.46	33523.3
2003J18 (*)	0.1357	0.0980	145.388	39219.53	1363	6.40	245.59	10204.4	24.65	1481.72	47437.5

**Tab. 4.2** – Résultats de l'analyse en fréquence des satellites : pour chaque satellite est indiqué la fréquence de l'argument du péricentre  $\nu_G$  ( $^\circ$ /an), la fréquence de la longitude du noeud  $\nu_H$  ( $^\circ$ /an), la période de la longitude du péricentre  $T_\varpi$  (années) et la période de la longitude du noeud  $T_\Omega$  (années) obtenues grâce à l'analyse en fréquence du mouvement des satellites sur un million d'années.

Satellite	$\nu_G$	$\nu_H$	$T_\varpi$	$T_\Omega$	Satellite	$\nu_G$	$\nu_H$	$T_\varpi$	$T_\Omega$
Groupe prograde					Famille <i>Pasiphae</i>				
Himalia	2.5797	-1.2291	266.56	292.90	Pasiphae	4.4349	4.4361	306318.75	81.15
Elara	2.8101	-1.3565	247.68	265.38	Megaclite	4.7022	4.5514	2386.17	79.09
Lysithea	2.7418	-1.2314	238.35	292.35	2003J04	3.9728	4.3322	1001.74	83.09
Leda	2.4847	-1.1913	278.34	302.18	Cyllene	4.5649	4.5259	9239.19	79.54
Themisto	0.5276	-0.6675	2574.42	539.37	Autres satellites				
Carmo	0.0000	-3.1797	113.22	113.22	Autonoe	3.8960	4.2355	1060.29	84.99
Famille <i>Ananke</i>					Callirhoe	3.0037	4.0498	344.13	88.89
Ananke	2.4820	3.2626	461.23	110.34	Helike	2.8745	3.1565	1276.42	114.05
Iocaste	2.4663	3.2370	467.08	111.21	Aoede	5.2110	4.6872	687.29	76.80
Praxidike	2.4842	3.2390	476.93	111.14	2003J23	2.7794	3.8778	327.74	92.83
Harpalyke	2.4491	3.2243	464.41	111.65	Eurydome	3.2230	3.8562	568.51	93.35
Thyone	2.4492	3.2471	451.15	110.86	Hegemone	4.2174	4.2186	305742.95	85.33
Hermippe	2.6216	3.2489	573.93	110.80	Euporie	0.0000	2.5800	139.53	139.53
Euanthe	2.4942	3.2228	494.10	111.70	Sponde	3.6617	4.1331	763.70	87.10
2003J16	2.3888	3.1808	454.57	113.18	Orthosie	2.5253	3.3484	437.35	107.51
Mneme	2.4306	3.2058	464.38	112.29	Sinope	4.0673	4.0685	306390.30	88.48
Thelxinoe	2.7534	3.2594	711.39	110.44	2003J02	5.5669	5.5668	3729657.55	64.66
Famille <i>Carme</i>					2003J03	1.9824	2.9323	379.01	122.77
Carme	4.4477	4.0788	975.66	88.26	2003J10	5.2918	4.4821	444.63	80.31
Kalyke	4.4523	4.1014	1025.80	87.77	Kore	3.2990	4.2687	371.24	84.33
Erinome	4.4727	4.0770	909.88	88.29	2003J15	1.9092	3.4159	238.93	105.39
Isonoe	4.4030	4.0240	949.81	89.46	2003J18	0.6013	2.6896	172.39	133.85
Taygete	4.4452	4.0659	949.17	88.54					
Chaldene	4.4031	4.0172	932.91	89.61					
Pasithee	4.4539	4.0346	858.54	89.22					
Kale	4.4491	4.0643	935.57	88.57					
Aitne	4.4755	4.0787	907.28	88.26					
Eukelade	4.4818	4.0818	900.07	88.19					
2003J05	4.4499	4.0880	994.81	88.06					
Arche	4.4212	4.0560	985.65	88.75					
Kallichore	4.4168	4.0417	959.69	89.07					
2003J19	4.4829	4.1144	977.01	87.49					
2003J9	4.4861	4.0947	919.68	87.91					
Herse	4.3052	3.9376	979.33	91.42					



## Troisième partie

# Résonance d'évection et perturbations planétaires directes



## Chapitre 5

# Étude de la résonance d'évection

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>84</b>
<b>5.2</b>	<b>Modèle analytique</b>	<b>85</b>
5.2.1	Développement de la fonction perturbatrice en polynômes de Legendre	86
5.2.2	Comparaison de l'ordre des polynômes de Legendre	87
5.2.3	Développement et moyennisation	88
5.2.4	Transformation canonique de variables	89
5.2.5	Résultats du modèle analytique	90
<b>5.3</b>	<b>Méthode de moyennisation numérique</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Discussion de la méthode analytique</b>	<b>93</b>
<b>5.5</b>	<b>Surfaces de section</b>	<b>95</b>
5.5.1	Discussion	97
5.5.2	Localisation de la résonance	99
<b>5.6</b>	<b>Résonance d'évection en tenant compte de l'aplatissement de la planète</b>	<b>100</b>
5.6.1	Développement et moyennisation	100
5.6.2	Résultats	101
<b>5.7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>102</b>

---

### 5.1 Introduction

Cette partie de ma thèse est dévolue à l'étude de la résonance d'évection ( $\lambda_{\odot} - \varpi$ ). L'importance de cette résonance est apparue lors de tests numériques préliminaires dans le cadre du problème de trois corps restreint et circulaire, où la stabilité de l'orbite d'un satellite en diverses régions de la phère de Hill de Jupiter était étudiée. Dans un tel modèle, cette résonance constitue en effet pour les orbites progrades la dernière région stable hors des limites définies par la Constante de Jacobi (Section 1.3.1, voir par exemple Murray & Dermott 1999). Une connaissance approfondie de la dynamique induite par cette résonance est donc intéressante pour l'étude de la stabilité orbitale au-dessous de laquelle l'orbite du satellite est liée à la planète, et au-dessus de laquelle l'éjection de satellites sur des orbites héliocentriques peut éventuellement se produire.

Dans leur description de la théorie lunaire, Brouwer et Clémence (1962) présentent le terme d'évection en  $\cos(2\lambda' - 2\varpi)$ , avec  $\varpi$  la longitude du périastre du satellite et  $\lambda'$  la longitude du corps perturbateur, qui apparaît dans le développement de la fonction perturbatrice solaire, comme la “plus grande correction périodique dans la longitude de la Lune”

et la résonance a été d'une grande importance pour la dynamique de la lune dans le passé (Touma & Wisdom, 1998). Pour les orbites lointaines comme celles des satellites irréguliers des planètes géantes, cette correction est cruciale, comme le montre les récents modèles analytiques (Yokoyama et al. 2003 ; Čuk & Burns 2004 ; Beaugé & Nesvorný 2007). La dynamique de la résonance elle-même a été étudiée pour la première fois par Michel Hénon dans son étude numérique du problème restreint des trois corps (Hénon 1969,1970), où il montre que, dans l'approximation de Hill, cette résonance apparaît comme une bifurcation d'une famille d'orbites simples périodiques (du nom de “  $g$  ” dans ses articles) pour une valeur de demi-grand axe de  $a = 0,45 r_h$  où  $r_h$  est le rayon de Hill de la planète. Toutefois, cette résonance n'a pu être trouvée dans ces études pour les orbites rétrogrades. Hamilton & Krivov (1997) ont étudié les mouvements orbitaux des satellites éloignés en utilisant une constante de Tisserand généralisée et ont déterminé les caractéristiques de base de la résonance d'évection : les orbites résonantes progrades sont allongées vers le corps perturbateur et leur modèle montre en coordonnées polaires ( $e \cos \alpha, e \sin \alpha$ ) où  $\alpha = \varpi - \lambda'$  est l'argument de la résonance, une forme de huit caractéristique centrée sur  $e = 0$ . Cette dynamique spécifique apparaît pour une valeur de demi-grand axe de  $a = 0,53 r_h$ , et présente deux points elliptiques à  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$ .

Les orbites rétrogrades se révèlent être allongées perpendiculairement dans la direction du perturbateur, mais la forme en huit observée également dans cette direction a été perçue comme étant une erreur due aux approximations liées à la méthode utilisée par les auteurs. L'importance de la résonance d'évection sur la stabilité des satellites a été soulignée par Nesvorný et al. (2003), où il est démontré que les effets du corps perturbateur sur un satellite situé dans la résonance peuvent s'accumuler à chaque passage du satellite à l'aphélie et provoquer une dérive importante des orbites, qui peut potentiellement causer l'éjection du corps.

La dynamique de la résonance a été étudiée avec un modèle analytique en utilisant un développement de la fonction perturbatrice pour la première fois par Yokoyama et al. (2008). La “forme en huit” de la résonance pour le problème plan a été confirmée par les auteurs, tant pour le cas prograde que rétrograde, et l'apparition de la résonance a été calculée comme étant  $0,529 r_h$  et  $0,6933 r_h$  pour les cas respectivement prograde et rétrograde.

Toutefois, par des intégrations numériques, j'ai pu constater que les orbites résonantes peuvent être trouvées plus près de la planète que ne le prédisent les modèles analytiques et qu'elles ne semblent pas suivre exactement la forme de huit trouvée par les auteurs précédents. Le but de cette étude est, en premier lieu, de montrer et d'expliquer les limites associées aux modèles analytiques de la résonance, et d'autre part de recourir à des méthodes numériques dans le but de localiser et d'étudier la résonance elle-même. Comme cette thèse est dirigée vers l'étude de la stabilité des satellites irréguliers de Jupiter, les résultats de cette étude seront appliqués dans ce contexte. On montrera également un résultat supplémentaire sur la dynamique de la résonance obtenu lorsque l'on prend en compte l'aplatissement de la planète dans le modèle analytique. Contrairement aux orbites des satellites lointains étudiés dans la plus grande partie de cette étude, je montre que cette modification n'affecte que les orbites très proches de la planète, dans une région dynamique où les méthodes analytiques développées peuvent être appliquées de manière satisfaisante.

## 5.2 Modèle analytique

Pour déterminer les limites d'utilisation des modèles analytiques, j'ai suivi la méthode décrite par Yokoyama et al. (2008) pour la construction d'un modèle analytique de la

résonance basée sur un développement de la fonction perturbatrice  $(\frac{r}{R_\odot})$ . En outre, j'ai utilisé une méthode semi-numérique pour vérifier ces résultats.

### 5.2.1 Développement de la fonction perturbatrice en polynômes de Legendre

Comme dans Yokoyama et al. (2008) et nombre d'études analytiques de satellites, le développement de la fonction perturbatrice utilise les polynômes de Legendre. Je considère dans tous les calculs suivants le mouvement d'un satellite en orbite autour d'une planète et perturbé par le Soleil (indiqué par l'indice  $\odot$ ) dans un système planétocentrique. Le plan de référence est le plan de l'orbite décrite par le mouvement képlérien du Soleil autour de la planète. La fonction perturbatrice  $R_\odot$  liée au Soleil de masse  $m_\odot$  agissant sur le mouvement du satellite peut être écrite en utilisant un développement en polynômes de Legendre :

$$R_\odot = \frac{k^2 m_\odot}{r_\odot} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_\odot}\right)^l P_l[\cos(S)], \quad (5.1)$$

utilisant les polynômes de Legendre qui peuvent être définis de manière explicite par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}. \quad (5.2)$$

Les premiers polynômes de Legendre s'écrivent :

$$\begin{aligned} P_0(u) &= 1, \\ P_1(u) &= u, \\ P_2(u) &= \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \\ P_3(u) &= \frac{1}{2}(5u^3 - 3u), \\ P_4(u) &= \frac{1}{8}(35u^4 - 30u^2 + 3), \\ P_5(u) &= \frac{1}{8}(63u^5 - 70u^3 + 15u), \\ P_6(u) &= \dots \end{aligned}$$

Grâce à  $P_0(u)$  et  $P_1(u)$  les polynômes peuvent également être déterminés grâce à la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (5.3)$$

Dans l'expression de  $R_\odot$  ci-dessus,  $k$  est la constante gravitationnelle de Gauss et  $S$  est l'angle entre les rayons vecteurs du satellite et le Soleil dans le repère planétocentrique. Le terme en  $\cos(S)$  dans l'équation (5.1) peut être développé en utilisant les coordonnées cartésiennes des objets  $(x, y, z, x_\odot, y_\odot, z_\odot)$ ,  $r$  et  $R_\odot$  étant les normes des rayons vecteurs :

$$\cos(S) = \frac{x x_\odot}{r r_\odot} + \frac{y y_\odot}{r r_\odot} + \frac{z z_\odot}{r r_\odot}. \quad (5.4)$$

En utilisant les éléments elliptiques définis par  $f$  l'anomalie vraie,  $\omega$  l'argument du péricentre,  $\Omega$  la longitude du noeud, et  $I$  l'inclinaison, on a les relations (Murray & Dermott, 1999) :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I), \\ \frac{y}{r} &= \sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I), \\ \frac{z}{r} &= \sin(\omega + f) \sin(I). \end{aligned}$$

et des expressions similaires pour  $\frac{x_\odot}{r_\odot}$ ,  $\frac{y_\odot}{r_\odot}$ , et  $\frac{z_\odot}{r_\odot}$ .

### 5.2.2 Comparaison de l'ordre des polynômes de Legendre

Puisque les polynômes apparaissent comme des puissances de  $(\frac{r}{r_\odot})$  dans l'équation (5.1), et en raison de la distance (présumée) élevée en demi-grand axe de la résonance à la planète, la validité de l'ordre d'approximation du modèle doit être étudiée avant d'utiliser tout résultat analytique. Pour pouvoir conclure clairement sur les approximations faites à l'aide des différents ordres des polynômes par rapport au mouvement réel, j'ai représenté dans la figure 5.1 des cartes de stabilité pour un satellite de Jupiter dans le problème plan, et avec les conditions initiales  $\lambda(0) = \varpi(0) = \lambda_\odot(0) = 0$ , le demi-grand axe initial et l'excentricité étant choisis dans les intervalles  $a \in [0.1 : 0.2]$  UA et  $e \in [0 : 1[$  respectivement. Sont prises comme constantes le demi-grand axe du Soleil  $a_\odot = 5.202$  UA et la masse de Jupiter  $m_{jup} = \frac{1}{1047.56}$ .

Pour chaque orbite, le temps d'intégration total  $\tau$  a été divisé en deux échantillons consécutifs  $\tau_a$  et  $\tau_b$  de même durée et l'excentricité maximale  $e_{max}$  atteinte par le satellite pour chaque échantillon a été déterminée. Le code de couleur est donné par l'index :

$$I = \frac{e_{max}^{\tau_b} - e_{max}^{\tau_a}}{e_{max}^{\tau_b}} \quad (5.5)$$

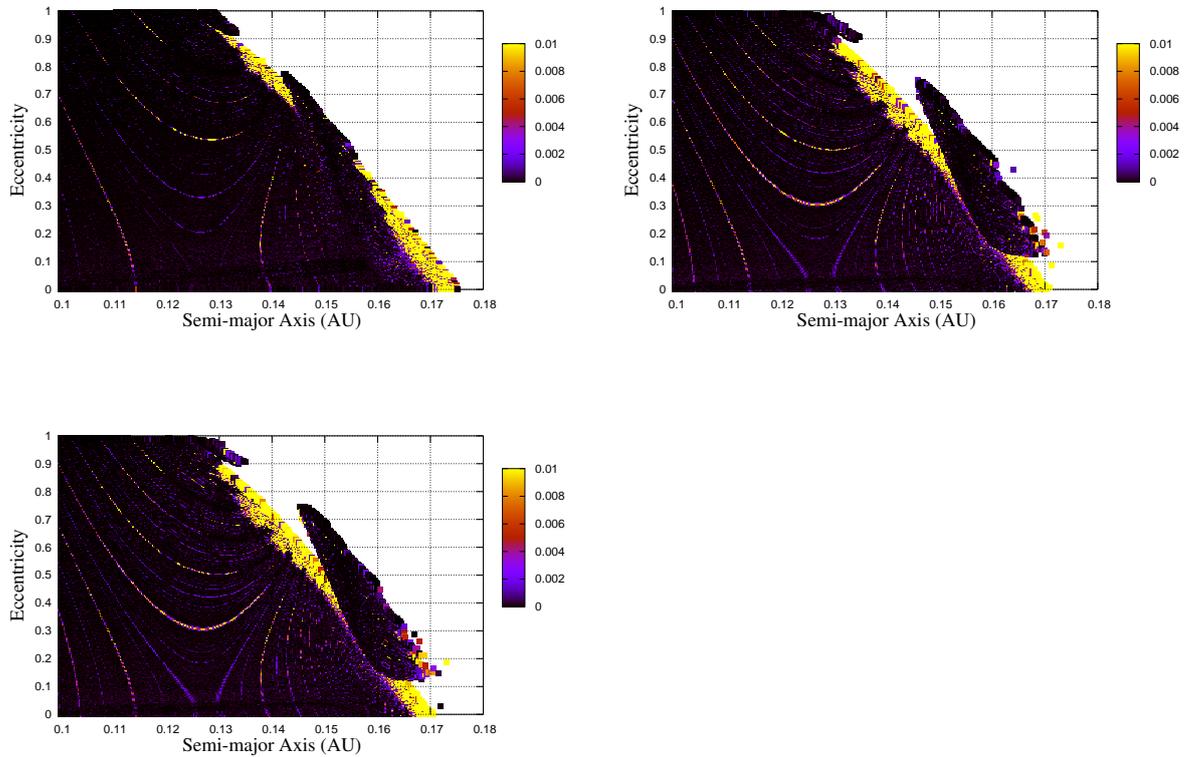
qui est un critère de stabilité permettant la détection des orbites chaotiques et résonantes par rapport à celles quasi-périodiques (voir Morbidelli, 2002, pour une discussion de cette méthode). L'index  $I$  tend vers 0 pour des orbites quasi-périodiques. A l'inverse, les orbites chaotiques possèdent des valeurs de  $I \neq 0$ . Cette méthode est également sensible aux résonances et aux orbites où l'excentricité présente des variations de très longues périodes, en dépit de leur stabilité. L'échelle de couleur indique donc les orbites stables en noir, et chaotiques ou résonantes en niveaux de couleur. Sur les figures, les zones blanches indiquent les orbites initiales qui ont été éjectées de la sphère de Hill de Jupiter, tout en ayant une orbite hyperbolique par rapport à la planète.

Le critère de stabilité  $I$  (Eq.5.5) a été utilisé préférentiellement à un indicateur de chaos classique comme le MEGNO, qui nécessite le calcul d'équations variationnelles et qui est utilisé plus tard dans cette étude. Ceci est dû à la complexité de la dérivation des équations variationnelles dans le cas des polynômes de Legendre exprimés en coordonnées cartésiennes, qui sont des expressions plus complexes que les équations variationnelles des équations complètes du mouvement.

Puisque nous sommes intéressés à la stabilité des satellites irréguliers, ces cartes sont d'une grande importance et permettent un repérage facile des différentes zones résonantes et chaotiques. L'intégration a été réalisée en simulant le mouvement avec le 2<sup>nd</sup> polynôme de Legendre uniquement (à savoir le terme quadrupolaire), puis en ajoutant le 3<sup>rd</sup> polynôme de Legendre (le terme octupolaire) et enfin en utilisant les équations complètes du mouvement.

Des intégrations effectuées dans la suite en utilisant cette fois le MEGNO (voir section 3.2.3) montrent que les orbites chaotiques sont celles situées en bordure de la zone où les satellites sont éjectées, et sont indiquées par une couleur jaune.

En observant les différences, à la limite de la stabilité, entre les orbites de ces trois cartes, on peut conclure de la Fig.5.1 qu'un développement utilisant seulement le 2<sup>nd</sup> polynôme de Legendre n'est pas en mesure de reproduire correctement la dynamique présente à la limite de stabilité donnée par les équations complètes du mouvement. On peut noter que, dans ces cartes, la résonance d'évection est représentée par la zone de stabilité détachée de la grande, entourée par des régions où les satellites sont éjectés du système, et située dans l'intervalle  $a \in [0, 145 - 0, 17]$  UA. D'autre part, un développement effectué jusqu'au 3<sup>ème</sup> ordre semble être suffisant pour approximer le mouvement réel à



**Fig. 5.1** – Cartes de stabilité pour un satellite prograde Jovien pour  $\tau = 1000$  ans en utilisant comme développement de la fonction perturbatrice le  $2^{nd}$  polynôme de Legendre (**haut**), en y ajoutant le  $3^{eme}$  polynôme de Legendre (**milieu**), et en utilisant les équations complètes du mouvement (**bas**).

cette limite de stabilité. On peut cependant noter qu'un développement utilisant uniquement le  $2^{nd}$  polynôme peut quand même être utilisé comme base de départ pour étudier le comportement séculaire des satellites réels (voir Čuk & Burns 2004), car ces objets sont plus proches de la planète.

### 5.2.3 Développement et moyennisation

Dans le cas plan, on suppose que  $I = I_{\odot} = 0$  donc  $z = z_{\odot} = 0$ . L'orbite du Soleil est choisie comme étant circulaire, donc  $e_{\odot} = 0$  et  $\omega_{\odot} = 0$ , ce qui implique  $f_{\odot} = \lambda_{\odot}$ ,  $\lambda_{\odot}$  étant la longitude moyenne du Soleil. Puisqu'un modèle analytique basé uniquement sur les  $2^{nd}$  polynôme de Legendre est insuffisant pour notre propos, j'ai étendu la méthode de Yokoyama et al. (2008) au troisième ordre.

La réduction au cas plan, avec le corps perturbateur sur une orbite circulaire, de l'Eq.5.4 induit que  $\cos(S) = \cos(f - \lambda_{\odot} + \varpi)$  si l'on considère une orbite prograde, ce qui implique que  $\varpi = \omega + \Omega$ .

En considérant tout d'abord le  $2^{nd}$  polynôme de Legendre, la fonction perturbatrice est :

$$R_2 = \frac{k^2 m_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 [(3 \cos^2(S) - 1)]. \quad (5.6)$$

Comme l'on s'intéresse uniquement à l'argument critique de la résonance d'évection

( $\varpi - \lambda_{\odot}$ ), j'ai moyennisé  $R_2$  en fonction de l'anomalie moyenne  $M$  du satellite :

$$\langle R_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2 dM. \quad (5.7)$$

Cette moyenne est effectuée en utilisant les relations de moyennisation exactes en forme fermée du problème des deux corps :  $\langle (\frac{r}{a})^2 \rangle = 1 + \frac{3}{2}e^2$ ,  $\langle (\frac{r}{a})^2 \cos(2f) \rangle = \frac{5}{2}e^2$  et  $\langle (\frac{r}{a})^2 \sin(2f) \rangle = 0$ .

En utilisant ces équations, on obtient une expression moyenne de la fonction perturbatrice qui est valable pour toutes les valeurs de l'excentricité du satellite, et qui s'écrit :

$$\langle R_2 \rangle = \frac{k^2 m_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{15}{4}e^2 \cos(2\varpi - 2\lambda_{\odot}) \right]. \quad (5.8)$$

Cette formule est identique à l'équation 3.4 de Yokoyama et al. (2008).

Si l'on considère un développement en polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre 3, l'expression correspondante s'écrit :

$$R_3 = R_2 + \frac{k^2 m_{\odot} a^3}{2a_{\odot}^4} \left( \frac{r}{a} \right)^3 [(5 \cos^3(S) - 3 \cos(S))], \quad (5.9)$$

où il est nécessaire de développer et de moyenner les expressions  $(\frac{r}{a})^3 \cos^3(S)$  et  $(\frac{r}{a})^3 \cos(S)$ .

À cet effet, j'utilise les formules de moyennisation suivantes calculées à l'aide d'un manipulateur algébrique :

$$\begin{aligned} \langle (\frac{r}{a})^3 \cos(3f) \rangle &= -\frac{35}{8}e^3, \\ \langle (\frac{r}{a})^3 \sin(3f) \rangle &= 0, \\ \langle (\frac{r}{a})^3 \cos(f) \rangle &= -\frac{5}{2}e - \frac{15}{8}e^3, \\ \langle (\frac{r}{a})^3 \sin(f) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

L'expression finale moyennisée est :

$$\langle R_3 \rangle = \langle R_2 \rangle + \frac{k^2 m_{\odot} a^3}{2a_{\odot}^4} \left[ \frac{3}{4} \left( -\frac{5}{2}e - \frac{15}{8}e^3 \right) \cos(\varpi - \lambda_{\odot}) - \frac{175}{32}e^3 \cos(3\varpi - 3\lambda_{\odot}) \right]. \quad (5.10)$$

Afin d'étudier la dynamique de la résonance, il faut placer le problème sous une forme intégrable, ce qui peut être réalisé en choisissant des variables canoniques appropriées dans le formalisme hamiltonien du problème. Tel est l'objectif de la section suivante.

#### 5.2.4 Transformation canonique de variables

Le problème est placé sous forme hamiltonienne en utilisant les variables de Delaunay  $(L, G, L_{\odot}, l, g, l_{\odot})$ . Les variables de Delaunay sont définies<sup>1</sup> dans le cas plan par :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} \quad , \quad l = M \\ G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad , \quad g = \omega \equiv \varpi \\ L_{\odot} & \quad , \quad l_{\odot} = M_{\odot} \equiv \lambda_{\odot}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En toute rigueur, les variables de Delaunay *modifiées* devraient être utilisées dans le cas plan. L'utilisation de ces variables menant à une dynamique et des résultats identiques, je présente ici le calcul plus simple effectué avec les variables de Delaunay classiques.

L'hamiltonien correspondant à la fonction perturbatrice développée au 2<sup>nd</sup> ordre est :

$$H_2 = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_{\odot}L_{\odot} - \langle R_2 \rangle(L, G, L_{\odot}, g, l_{\odot}), \quad (5.11)$$

où  $\mu = k^2 m_{jup}$ . Notre hamiltonien dans ces variables est donné par :

$$H_2 = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_{\odot}L_{\odot} - \frac{k^2 m_{\odot} L^4}{2\mu^2 a_{\odot}^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left[ 1 - \left( \frac{G}{L} \right)^2 \right] + \frac{15}{4} \left[ 1 - \left( \frac{G}{L} \right)^2 \right] \cos(2g - 2l_{\odot}) \right). \quad (5.12)$$

L'hamiltonien ci-dessus possède deux degrés de liberté  $(G, L_{\odot}, g, l_{\odot})$ . En effet, comme celui-ci est indépendant de  $l$ , le moment conjugué correspondant  $L = \sqrt{\mu a}$  est constant. Le terme additif  $-\frac{\mu^2}{2L^2}$  peut donc être supprimé de l'Eq.(5.12). On cherche donc un changement de variable canonique permettant de réduire l'hamiltonien à une dimension, et qui est :

$$\begin{pmatrix} G & g \\ L_{\odot} & l_{\odot} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 & \alpha_1 \\ P_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

avec la fonction génératrice correspondante  $S(P_1, P_2, g, l_{\odot}) = (g - l_{\odot})P_1 + l_{\odot}P_2$ , qui implique les relations suivantes entre les anciennes et les nouvelles variables :

$$\begin{aligned} P_1 &= G & , & & \alpha_1 &= g - l_{\odot} \\ P_2 &= L_{\odot} + G & , & & \alpha_2 &= l_{\odot}. \end{aligned}$$

Dans ces variables résonantes, le moment  $P_2$  est constant et le terme  $n_{\odot}P_2$  peut être supprimé de l'hamiltonien. Ainsi formulé, l'hamiltonien possède un degré de liberté  $(P_1, \alpha_1)$  et s'écrit (le signe de l'hamiltonien est inversé, afin de correspondre à Yokoyama et al. 2008) :

$$H_2 = n_{\odot}P_1 + \frac{k^2 m_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left[ \frac{-3}{4} \frac{P_1^2}{\mu a} + \frac{15}{4} \left( 1 - \frac{P_1^2}{\mu a} \right) \cos(2\alpha_1) \right]. \quad (5.13)$$

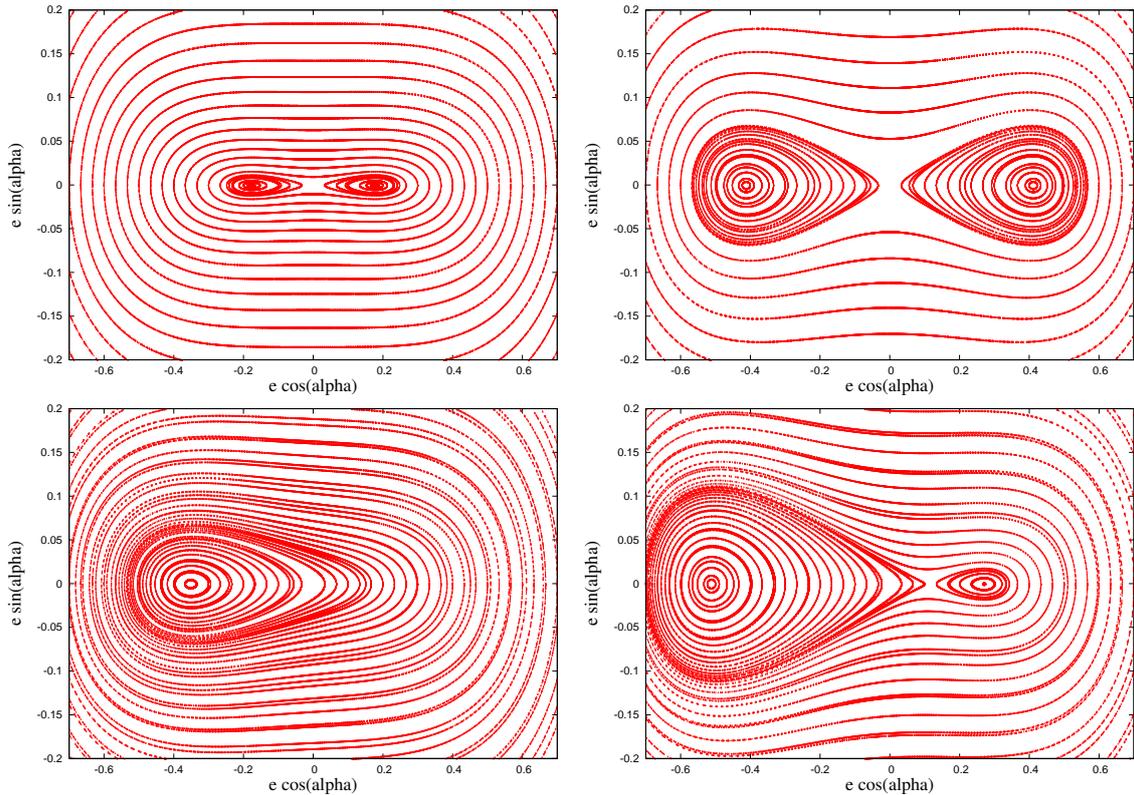
En utilisant la même méthode, on peut trouver l'hamiltonien correspondant à un développement de la fonction perturbatrice au troisième ordre :

$$H_3 = H_2 + \frac{k^2 m_{\odot} a^3}{2a_{\odot}^4} \left[ \frac{-15}{8} \left( 1 - \frac{P_1^2}{\mu a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{45}{32} \left( 1 - \frac{P_1^2}{\mu a} \right)^{\frac{3}{2}} \cos(\alpha_1) - \frac{175}{32} \left( 1 - \frac{P_1^2}{\mu a} \right)^{\frac{3}{2}} \cos(3\alpha_1) \right]. \quad (5.14)$$

### 5.2.5 Résultats du modèle analytique

Des tests ont montré que l'inclusion de l'ordre supérieur (4<sup>eme</sup> polynôme) dans le développement de la fonction perturbatrice moyenne entraîne des différences négligeables dans l'étude de la résonance, ce qui confirme les résultats de la comparaison effectuée en Section 5.2.2, qui concerne le cas non moyenné. Avant de présenter les résultats, on peut noter que l'hamiltonien défini par l'équation (5.14) peut éventuellement donner des valeurs de libration de  $\alpha_1$  autres que celles présentées dans la suite : cependant dans ce cas-là leurs moments correspondants  $P_1$  sont négatifs, ce qui est une impossibilité pour des valeurs physiques de  $a$  et  $e$  (car  $P_1 = G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$ ), donc cette étude est limitée aux cas où  $P_1 \geq 0$ . De plus,  $P_1(e)$  (avec  $a$  constant) est une fonction bijective seulement dans ce cas et on peut donc montrer la dynamique du modèle en utilisant les coordonnées  $(e, \alpha_1)$ , au lieu des coordonnées canoniques  $(P_1, \alpha_1)$ . Dans la suite,  $\alpha_1$  est dénoté  $\alpha$  pour plus de clarté.

En Fig.5.2 sont montrés les portraits dynamiques de la résonance obtenus grâce aux modèles aux 2<sup>nd</sup> et 3<sup>eme</sup> ordres pour le cas prograde dans les coordonnées polaires  $(e \cos \alpha,$

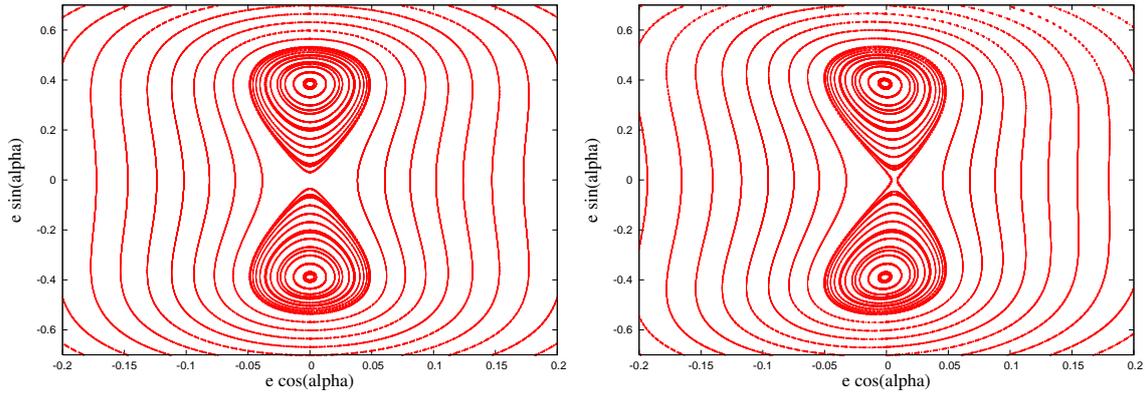


**Fig. 5.2** – Modèle analytique moyenné. Dynamique de la résonance d'évection pour un satellite prograde en utilisant le modèle  $H_2$  pour  $a = 0,19$  UA (**haut gauche**) et  $a = 0,2$  UA (**haut droite**), et  $H_3$  pour  $a = 0,19$  UA (**bas gauche**) et  $a = 0,2$  UA (**bas droite**).

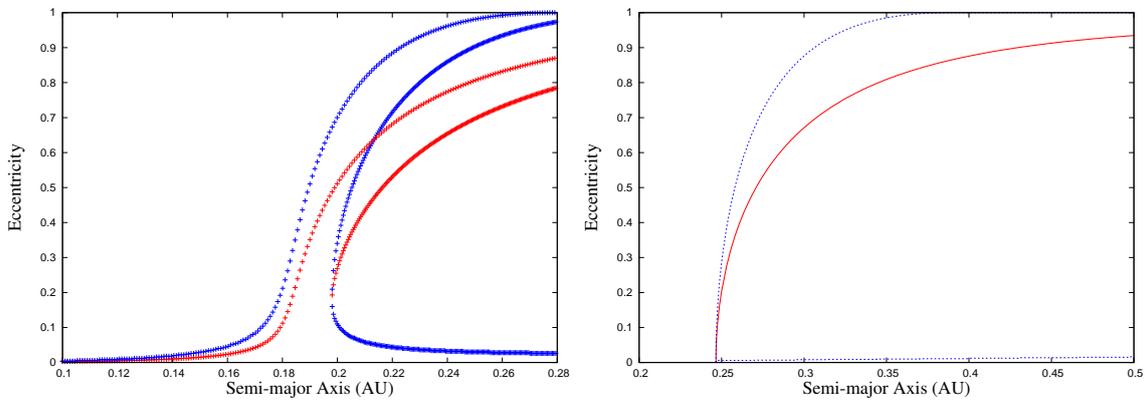
$e \sin \alpha$ ) avec  $\alpha = \varpi - \lambda_{\odot}$ . Le contraste entre les deux modèles est important. Malgré la présence de deux îles résonantes à  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$  dans les deux approximations, on peut discerner une différence claire concernant la taille des îles et également leurs formations ; le modèle au 2<sup>nd</sup> ordre ( $H_2$ ) prédit l'apparition de ces deux îles pour  $a = 0,1878$  UA, tandis que pour le modèle au 3<sup>eme</sup> ordre ( $H_3$ ), l'une des îles ( $\alpha = \pi$ ) apparaît à  $a = 0$  UA et l'autre ( $\alpha = 0$ ) apparaît à  $a = 0,1976$  UA.

Pour les orbites rétrogrades, je suis la convention de Saha & Tremaine (1993) concernant la définition des éléments orbitaux rétrogrades dans le développement (e.g. la définition rétrograde de  $\varpi = \Omega - \omega$ ). Dans la figure (5.3) sont indiqués les portraits dynamiques de la résonance pour le cas rétrograde. D'après Yokoyama et al. (2008), en utilisant  $H_2$ , la résonance apparaît à  $0,6933 r_h = 0,245$  UA et les îles de libration se déplacent à  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ . Le terme de 3<sup>eme</sup> ordre modifie légèrement la dynamique ; le point hyperbolique a maintenant une excentricité non-nulle ( $e = 0,0121$  pour le demi-grand axe de la Fig.5.3) avec  $\alpha = 0$  et les centres de libration se déplacent vers des valeurs croissantes de  $|\alpha|$  avec l'augmentation du demi-grand axe ( $\alpha = \pm 93.29^\circ$  dans la Fig.5.3).

Le comportement global de la résonance en termes de demi-grand axe et d'excentricité prédite par le modèle analytique  $H_3$  est montré en Fig.5.4. Dans la figure de gauche (cas prograde), la position des points stables elliptiques (courbes fines) et de leurs séparatrices correspondantes (courbes en gras) sont indiquées pour les deux îles résonantes. L'île  $\alpha = \pi$  débute à  $a = 0$  et  $e = 0$  et seule sa séparatrice supérieure est tracée ; sa séparatrice inférieure reste à  $e = 0$ . La deuxième île  $\alpha = 0$  apparaît à partir de  $a = 0,1976$  UA. Son centre de libration et sa séparatrice supérieure ont un comportement similaire à l'île précédente, et sa séparatrice inférieure, qui est le point hyperbolique de la résonance,



**Fig. 5.3** – Modèle analytique moyenné. Dynamique de la résonance d'évection pour un satellite rétrograde en utilisant  $H_2$  pour  $a = 0,26$  UA (**gauche**), et avec  $H_3$  pour  $a = 0,26$  UA (**droite**).



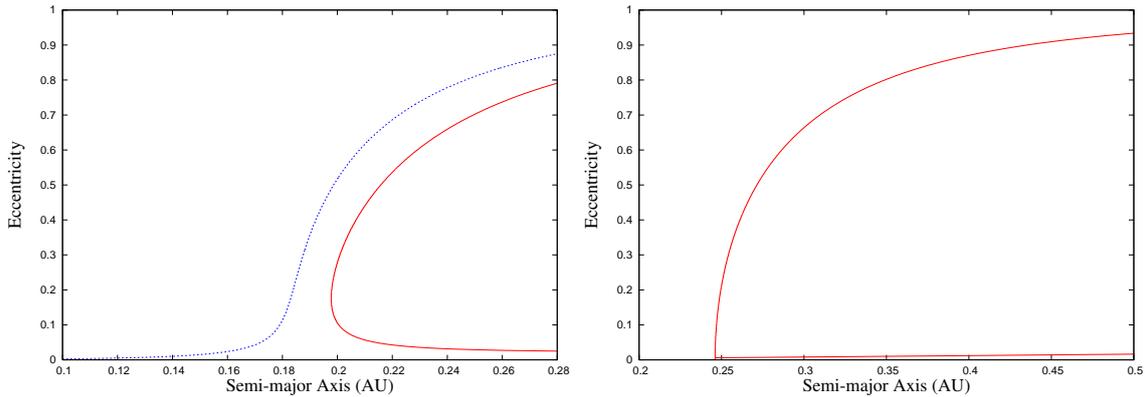
**Fig. 5.4** – Modèle analytique moyenné. Position de la résonance d'évection pour un satellite prograde (**gauche**) et rétrograde (**droite**) en utilisant le modèle  $H_3$ . **Gauche** : points elliptiques (courbes rouges), séparatrices et point hyperbolique (courbes bleues). **Droite** : séparatrice supérieure (courbe du haut), point elliptique (courbe du milieu), point hyperbolique (courbe du bas).

diminue asymptotiquement à  $e = 0$  avec l'augmentation du demi-grand axe. Pour le cas rétrograde (figure de droite), la séparatrice supérieure et le point elliptique sont indiqués respectivement par la courbe supérieure et par celle du milieu, et le point hyperbolique par la courbe de très faible excentricité.

### 5.3 Méthode de moyennisation numérique

Afin de vérifier et d'étendre les résultats obtenus ci-dessus grâce au modèle analytique, j'ai utilisé une procédure de moyennisation numérique de la fonction perturbatrice. Cette méthode a déjà été appliquée auparavant en Section 2.2.1. La fonction perturbatrice en coordonnées cartésiennes  $R(\vec{X}, \vec{X}_\odot)$ , où  $\vec{X}, \vec{X}_\odot$  représentent les vecteurs de position du satellite et du Soleil respectivement, est développée en éléments elliptiques  $R(a, e, E, \varpi, a_\odot, \lambda_\odot)$ , où  $E$  dénote l'anomalie excentrique du satellite. La dépendance de  $R$  dans la longitude du satellite est moyennée numériquement suivant la procédure (où le changement de variables provient de l'équation de Kepler) :

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E) R dE. \quad (5.15)$$



**Fig. 5.5** – Modèle numérique moyenné. Position des points elliptiques et hyperboliques de la résonance pour des orbites progrades (**gauche**) et rétrogrades (**droite**).

Les angles restants sont fixés à des valeurs correspondant à la résonance d'évection :

- cas prograde :  $\varpi = \lambda_{\odot}$  et  $\varpi = \lambda_{\odot} - \pi$ ,
- cas rétrograde :  $\varpi = \lambda_{\odot} + \frac{\pi}{2}$  et  $\varpi = \lambda_{\odot} + \frac{3\pi}{2}$ .

J'ai montré que pour les orbites rétrogrades, les centres de libration se déplacent légèrement et  $\alpha$  n'est plus  $\pm\frac{\pi}{2}$ , mais la différence dans la position de la résonance exacte est marginale, par exemple l'erreur en excentricité est inférieure à 0,01 pour  $a = 0,5$  UA (et l'erreur diminue quand le demi-grand axe diminue). Cette méthode est applicable pour toutes les valeurs d'excentricités et n'est pas limitée par le rapport  $\frac{a}{a_{\odot}}$ , contrairement au développement de Legendre analytique classique. La fréquence  $\dot{\varpi}$  peut ainsi être obtenue en utilisant la "forme séculaire" de l'équation de Lagrange correspondante :

$$\dot{\varpi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e}, \quad (5.16)$$

qui est calculée grâce à un schéma numérique de dérivée partielle et comparée au moyen mouvement de Jupiter afin d'obtenir les points elliptiques et hyperboliques de la résonance. Les résultats représentés sur la Fig.5.5 montrent un très bon accord avec les positions des points elliptiques et hyperboliques données par le modèle analytique  $H_3$ , et les courbes sont confondues avec les courbes correspondantes de la Fig.5.4.

## 5.4 Discussion de la méthode analytique

On peut constater plusieurs choses dans ces résultats et en particulier pour ce qui est de l'écart entre la dynamique provoquée par  $H_2$  et  $H_3$ . Malgré son infériorité dans le rapport  $(\frac{r}{r_{\odot}})$  qui est d'un ordre de grandeur par rapport au terme d'ordre 2 (voir Section 5.2.1), le terme correspondant au 3<sup>eme</sup> polynôme de Legendre joue un rôle majeur dû à la présence du  $e$  dans sa formulation. Ceci est à comparer à la seule présence de  $e^2$  dans le 2<sup>nd</sup> polynôme, qui induit ainsi un terme plus petit. On peut noter que la "forme en huit" de la dynamique de la résonance a également été constatée par Hamilton & Krivov (1997), mais la construction de leur constante de Tisserand généralisée a été faite en utilisant uniquement le 2<sup>nd</sup> polynôme de Legendre, afin d'introduire la longitude du Soleil dans leur modèle. Concernant le modèle utilisé dans cette étude, j'ai montré que les termes supérieurs du développement (d'ordre  $> 3$  dans le rapport  $\frac{r}{r_{\odot}}$ ) deviennent négligeables dans l'intervalle de demi-grand axe étudié et n'introduisent pas de changements notables, comme le montre la Fig.5.5.

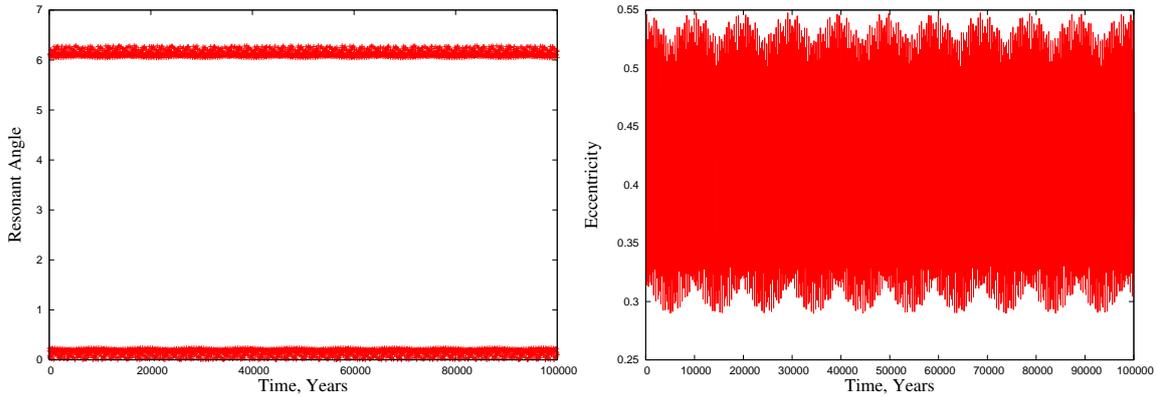
La principale conséquence de l'inclusion du terme de  $3^{eme}$  est la perte de symétrie entre les deux îles résonantes de la Fig.5.2. Les îles ont maintenant des évolutions distinctes, ce qui implique qu'elles ont différentes tailles à des valeurs données de demi-grand axe. On peut noter que l'île ( $\sigma = \pi$ ) peut maintenant être trouvée pour toutes valeurs de demi-grand axe.

Cependant, malgré la précision fournie par le terme d'ordre 3 ou par les termes d'ordres supérieurs, le modèle analytique ne parvient toujours pas à décrire la dynamique réelle, puisque l'on peut trouver numériquement des orbites résonantes à des valeurs de demi-grand axe et d'excentricité inférieures à celles prédites par le modèle, comme le montre un exemple en Fig.5.6. Dans la figure Fig.5.1, on peut cependant montrer que le développement non moyenné au  $3^{eme}$  ordre semble être suffisant pour décrire correctement le mouvement réel.

Il est difficile de comparer ces résultats purement numériques aux prédictions données par le modèle analytique. En effet j'utilise la forme normale donnée par l'équation (5.14), mais sans avoir écrit la fonction génératrice correspondante (voir par exemple Ferraz-Mello 2007) qui permet de déterminer la relation entre éléments osculateurs et moyens (ici, moyennées sur l'anomalie moyenne du satellite). Dans certains cas en Mécanique Céleste, cette différence est minime car le problème étudié est peu perturbé, ou bien il suffit de savoir qu'une telle relation régulière existe entre éléments osculateurs et moyens. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser une méthode de perturbation qui permet explicitement le calcul de la fonction génératrice, comme la méthode des séries de Lie. Toutefois, cela implique un développement de la fonction perturbatrice en séries de Fourier afin de garder les choses simples, et cela introduit surtout un développement en excentricité de la fonction perturbatrice (par opposition à la méthode de moyennisation utilisée précédemment qui est valable pour toutes valeurs de l'excentricité), ce qui limite les applications du modèle à des excentricités faibles ou modérées. Cela serait dommageable au regard des hautes excentricités atteintes par les satellites dans les régions lointaines.

Pour avoir une idée des éléments orbitaux moyens réels qui correspondent à la résonance exacte, on peut intégrer numériquement des orbites résonantes et déterminer les éléments orbitaux moyens sur le temps d'intégration. Cette méthode montre, comme le font apparaître les sections suivantes, qu'un écart important entre éléments moyens numériques et analytiques persiste. Comme le problème ne vient pas de l'ordre de précision du développement de la fonction perturbatrice, c'est la méthode de perturbation au premier ordre qui en est responsable. Il faudrait donc déterminer l'hamiltonien moyen  $\bar{H}(G, L_{\odot}, g, l_{\odot})$  à des ordres perturbatifs supérieurs. Un problème similaire apparaît dans l'étude de la résonance  $\nu_{\odot}$  pour les satellites lointains (Correa Otto et al. 2010). Leurs résultats montrent qu'un traitement perturbatif au  $3^{eme}$  ordre des masses reste insuffisant pour étudier la dynamique de cette résonance de manière précise.

Dans la suite, j'utilise une méthode plus directe et numérique à l'aide de surfaces de section afin d'analyser la résonance. Toutefois, si la forte perturbation empêche ici d'utiliser de manière simple un modèle analytique issu d'une moyennisation au premier ordre perturbatif, on peut choisir de l'appliquer dans une région où il est "sûr" comme dans le cas de la Section 5.6. Dans cette section, la résonance d'évection est étudiée dans une région plus proche de la planète où la perturbation solaire est faible, en prenant en compte l'aplatissement de la planète, et en utilisant le modèle analytique développé dans les sections précédentes.



**Fig. 5.6** – Évolution de l'angle critique de la résonance d'évection (**gauche**) et de l'excentricité (**droite**) pour un satellite prograde avec les éléments orbitaux initiaux  $a = 0,155$  UA et  $e = 0,5$ . Les angles initiaux sont pris comme étant nuls.

## 5.5 Surfaces de section

Afin d'étudier précisément le problème plan, on peut profiter de la bi-dimensionnalité de l'hamiltonien du problème exprimé dans le référentiel tournant évoluant avec le moyen mouvement de Jupiter, et utiliser la méthode des surfaces de section (sections de Poincaré, abrégées par PSS). L'hamiltonien correspondant dans le référentiel tournant (voir par exemple Valtonen & Karttunen 2006) est donné par :

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x y - P_y x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (5.17)$$

où  $x, y, P_x, P_y$  sont, respectivement, les coordonnées et les moments de la particule dans le référentiel tournant centré sur le barycentre du système,  $\mu$  est la masse de la planète,  $1 - \mu$  est la masse du Soleil, et on a les distances :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2}. \end{aligned}$$

La PSS est ensuite construite à partir du mouvement de la particule dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  en choisissant une surface  $S$  (par exemple  $y = 0$ ) et en traçant les coordonnées restantes  $(x, \dot{x})$  chaque fois que la particule traverse la surface  $S$  avec  $\dot{y} > 0$ . La dynamique des différentes orbites peut alors être représentée pour la même valeur de la constante de Jacobi  $C$  (voir Section 1.3.1), qui est la seule intégrale du mouvement du système :

$$C = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (5.18)$$

On peut souligner que la PSS correspond au mouvement perturbé et complet de la particule par rapport à un modèle analytique construit à partir d'une approximation de la fonction perturbatrice.

Dans la suite je vais faire le lien entre surfaces de section et cartes de stabilité afin de bien cerner la résonance d'évection. En Fig.5.7 sont montrées deux cartes de stabilité correspondant au même problème que celui défini par l'équation (5.17). Les orbites des satellites fictifs sont intégrées jusqu'à 1000 périodes de Jupiter, et correspondent à des orbites progrades avec les conditions initiales  $\lambda(0) = \lambda_{\odot}(0) = \varpi(0) = 0$  (péricentre en conjonction avec le Soleil, carte supérieure), et  $\lambda(0) = \lambda_{\odot}(0) = 0, \varpi(0) = \pi$  (péricentre en

opposition avec le Soleil, carte inférieure). La carte supérieure de la Fig.5.7 est similaire à la dernière carte de la Fig.5.1, à la fois concernant le modèle et les conditions initiales, mais ici le temps d'intégration est  $\sim 12$  fois supérieur, et le MEGNO a été utilisé comme indicateur du chaos (Cincotta et al. 2003).

Dans les cartes de la Fig.5.7, les régions blanches indiquent les satellites qui ont été éjectés du système de Jupiter, avec les mêmes critères que pour la Fig.5.1. On peut identifier la limite de stabilité pour des orbites initialement circulaires à un demi-grand axe de  $a = 0,17$  AU, ce qui est cohérent avec la valeur  $a = 0,48 r_h$  déterminée par Alvarellos (1996). La couleur bleu foncé indique des orbites stables, tandis que les couleurs de bleu clair à jaune montrent les différents niveaux de chaoticité des orbites instables.

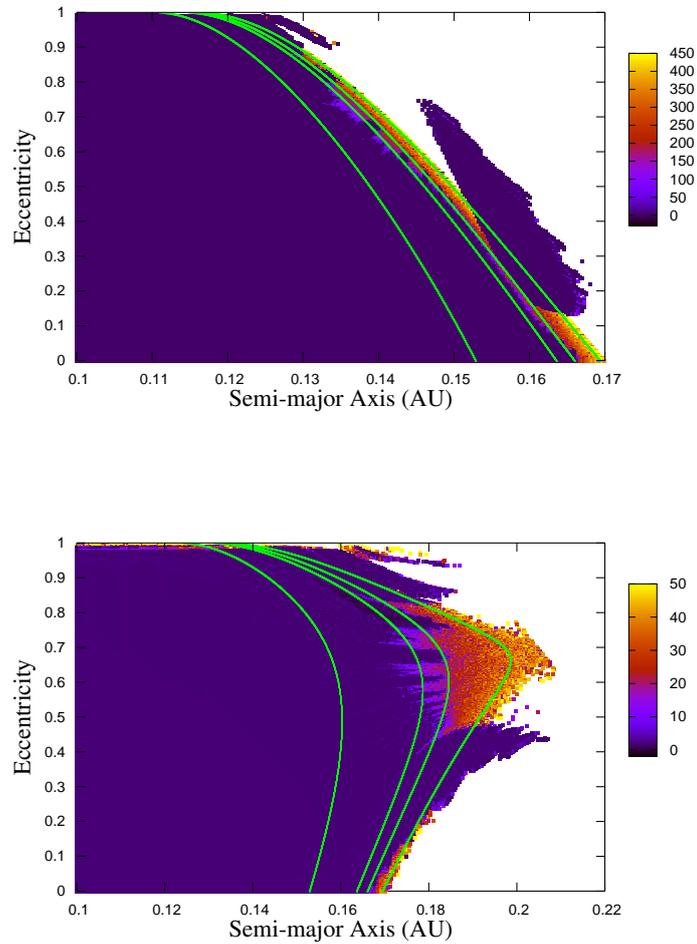
D'après les études citées auparavant (et les simulations numériques effectuées dans cette étude), nous savons que la résonance d'évection dans le cas prograde possède deux îles de libration, situées à  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$ . Ceci explique le choix des conditions initiales pour les cartes de stabilité, qui sont prévues pour placer le satellite fictif dans chaque île au début de l'intégration numérique. Sur les cartes sont indiquées quatre courbes possédant une valeur différente de la constante de Jacobi, et qui correspondent aux surfaces de section représentées en Fig.5.8 ; ces courbes ont les valeurs  $C = 3,041, 3,0395, 3,0392$  et  $3,0388$ . On peut alors expliquer la dynamique indiquée dans les cartes de stabilité avec les surfaces de section.

Pour la valeur la plus élevée de la constante de Jacobi ( $C = 3,041$ ), on peut reconnaître au centre de la figure l'orbite périodique correspondant à la famille des orbites périodiques simples "g" (Hénon 1969,1970) et la libration  $\alpha = \pi$  n'est pas encore autorisée pour cette valeur de  $C$ . On peut déterminer son apparition pour  $C = 3.0402552$ .

Pour  $C = 3.0395$  (la deuxième figure), nous pouvons voir plusieurs résonances d'ordre peu élevées apparaître ainsi que du chaos présent en raison du chevauchement entre ces résonances et de la diffusion de leurs séparatrices. L'orbite périodique  $g$  (maintenant la résonance d'évection  $\alpha = \pi$ ) s'est déplacée vers la gauche. On peut voir une bonne correspondance avec les cartes de stabilité de la Fig.5.7, où la courbe de Jacobi correspondante est dans la région faiblement chaotique.

Pour  $C = 3,0392$ , le point hyperbolique de la résonance a été créé et correspond à "l'orbite critique" " $g_1$ " dans Hénon (1970), et produit la deuxième île résonante centrée en  $x = 1,033$ , qui correspond à l'argument d'évection  $\alpha = 0$  (l'apparition de l'île a été constatée pour  $C = 3,0392409$ ). Dans Hénon (1970), l'île correspondant à l'orbite originale  $g$  est divisée en son centre par l'orbite critique  $g_1$ , créant deux îles de libration de taille similaire dont les centres sont les orbites elliptiques  $g'$ . Ce n'est pas le cas ici, où la bifurcation a créé une île de très petite taille comparée à l'autre. Cette différence peut être causée par l'approximation de Hill qui n'est pas utilisée dans cette étude. Pour la même valeur de  $C$ , nous pouvons observer qu'après la bifurcation, le chaos lié au point hyperbolique est encore confiné, mais il est sur le point d'être mélangé avec celui déjà présent, ce qui donne un chaos presque généralisé sur la surface de section. De toute évidence, nous observons ce phénomène sur les cartes de stabilité, où la courbe iso-jacobienne passe désormais dans les zones stables résonantes et fortement chaotiques. Les orbites quasi-périodiques ne survivent qu'à des excentricités élevées. La carte montre également, en conformité avec la surface de section, que la courbe iso-jacobienne passe par la zone de stabilité "détachée", qui correspond à l'île résonante nouvellement créée.

Enfin, pour  $C = 3,0388$  (dernière surface de section), une valeur légèrement supérieure à la valeur correspondant au point de Lagrange  $L_1$  ( $C_{L_1} = 3.0387559$ ), donc juste avant l'éjection possible de la particule, le chaos est généralisé.



**Fig. 5.7** – Cartes de stabilité obtenues pour un satellite prograde Jovien avec le MEGNO et 4 courbes de constante de Jacobi différentes. Les conditions initiales correspondent au péricentre du satellite en conjonction avec le Soleil (**haut**), et au péricentre du satellite en opposition au Soleil (**bas**).

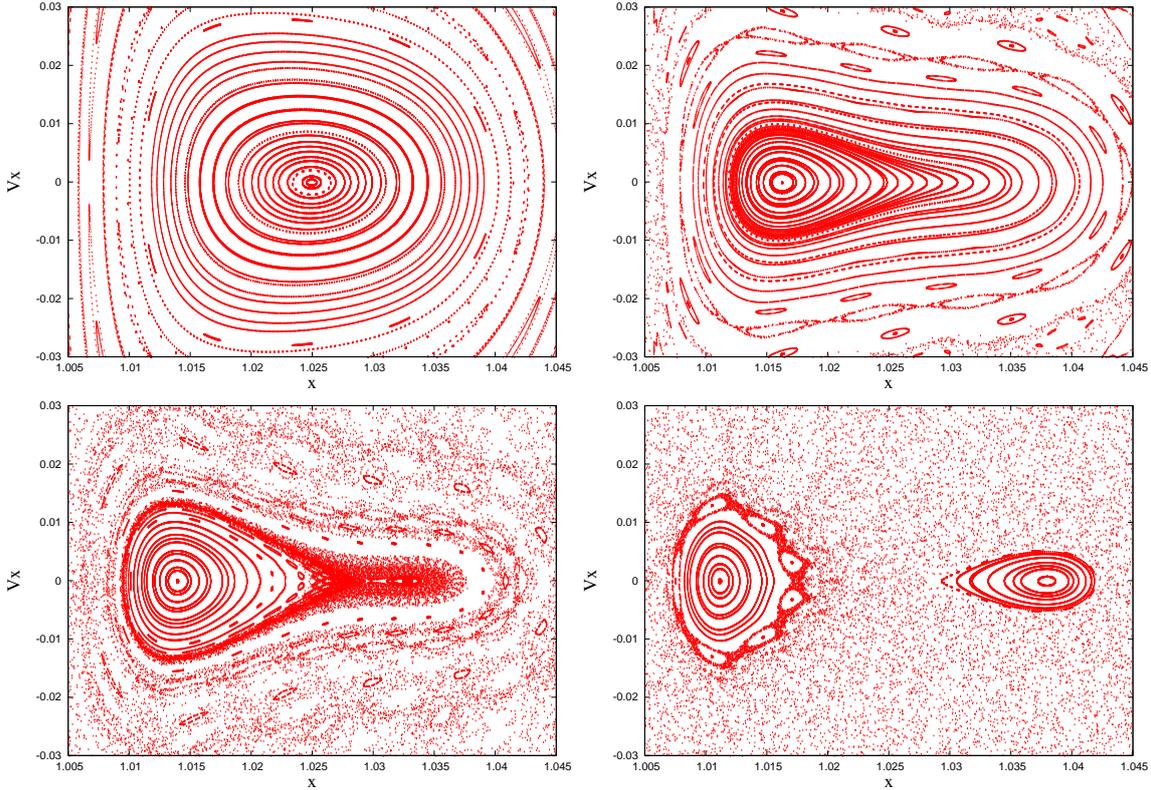
### 5.5.1 Discussion

On peut tout d'abord noter que les deux îles de libration sont très sensibles aux conditions initiales choisies pour la surface de section ; l'orbite du satellite est en résonance dans l'une des îles si l'angle résonant  $\alpha$  est très proche de l'une des valeurs exactes de la résonance (c'est-à-dire,  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$ ) au début de l'intégration. En fait, on peut voir dans les Figs.5.7 et 5.8 que les îles ne sont entourées que par des régions chaotiques.

La principale différence apportée par la surface de section est que l'île  $\alpha = \pi$  est créée à une valeur spécifique de  $C$  ; l'orbite centrale périodique pour  $C \geq 3.0402552$  (voir le graphique en haut à gauche dans la Fig.5.8) correspond à l'orbite périodique  $g$ .

Peut-on tirer des conclusions sur le modèle analytique avec l'aide des surfaces de section présentées précédemment ? Les figures 5.2 et 5.8 ne peuvent être facilement comparées en raison bien sûr des différentes coordonnées, repères et méthodes utilisés. Néanmoins, les formes des îles résonantes dans les deux figures sont étonnamment similaires.

Dans le modèle analytique (Fig.5.2), pour une valeur de  $a$  fixée, on peut obtenir les



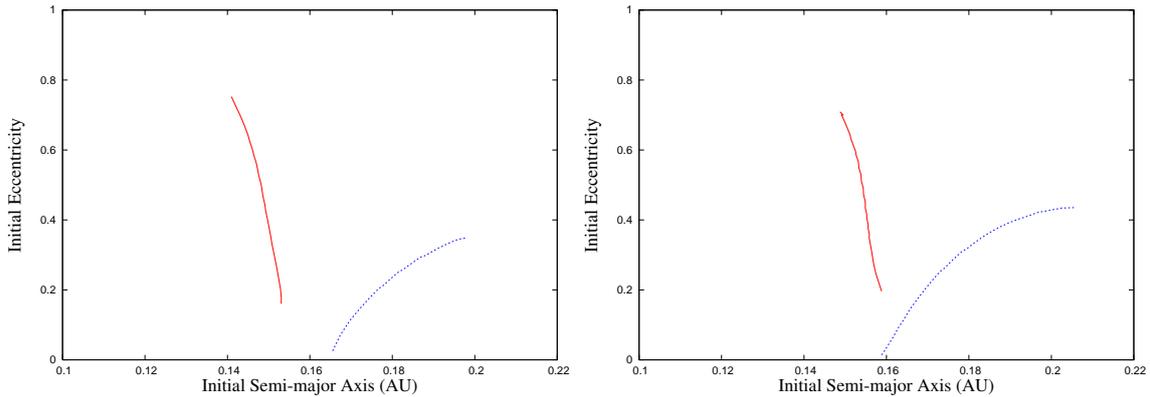
**Fig. 5.8** – Surface de section. De haut en bas et de gauche à droite :  $C = 3,041$ ,  $C = 3,0395$ ,  $C = 3,0392$ , et  $C = 3,0388$ .

valeurs des excentricités correspondant à la résonance exacte sur la ligne  $e \sin \alpha = 0$ . Les valeurs de la résonance exacte sont  $e_r^{\alpha=0}$  pour  $\varpi = \lambda$  et  $e_r^{\alpha=\pi}$  pour  $\varpi = \lambda + \pi$  (si les deux îles sont présentes). Les variables utilisées dans le modèle sont des variables moyennes ; les variables oscultrices sont de la forme  $x^{osc} = x^{moy} + \varepsilon f_x(a^{osc}, e^{osc}, \lambda^{osc}, \lambda_{\odot}^{osc}, \varpi^{osc})$  où  $\varepsilon$  représente l'ordre de grandeur de la perturbation par rapport au problème non perturbé. La Fig.5.2 apparaîtrait donc déformée en utilisant des variables oscultrices.

Les orbites résonantes exactes peuvent être déterminées sur les surfaces de section sur la ligne  $V_x = 0$ . Du fait du choix de la surface de section ( $y = 0$ ,  $\dot{y} > 0$ ), les orbites initiales commençant leur mouvement sur la ligne  $V_x = 0$  possèdent les mêmes valeurs de  $\lambda^{osc}$  et  $\lambda_{\odot}^{osc}$ ,  $\varpi^{osc}$  étant alors égal soit à  $\lambda^{osc}$  (satellite au péricentre), soit à  $\lambda^{osc} + \pi$  (satellite à l'apocentre). Les deux paramètres libres sur  $V_x = 0$  sont donc le demi-grand axe et l'excentricité. On peut voir sur la Fig.5.7 que sur chaque courbe représentant une valeur de  $C$ , le demi-grand axe change relativement peu comparé à l'excentricité. Les orbites initiales d'une surface de section possèdent donc les mêmes angles initiaux, ont des demi-grand axes proches mais des excentricités variant de 0 à 1. Les orbites périodiques exactes correspondent aux valeurs d'excentricité oscultrice  $e_r^{\alpha=0}$  et  $e_r^{\alpha=\pi}$ . De plus la Fig.5.7 indique qu'un changement de la valeur de  $C$  implique un changement de demi-grand axe.

Les deux lignes  $e \sin \alpha = 0$  (modèle analytique) et  $V_x = 0$  (surfaces de section) sont donc finalement très proches dynamiquement. De la même manière on peut en conclure que la taille des îles dans les surfaces de section correspond surtout à des différences d'excentricité, bien plus que de demi-grand axe. L'évolution de la taille des îles (ainsi que de leur forme) en excentricité est donc similaire dans les deux méthodes.

Concernant le modèle  $H_2$ , la dynamique prédite par ce modèle (îles de même taille et apparaissant pour la même valeur de demi-grand axe) est similaire à celle obtenue avec



**Fig. 5.9** – Position de la résonance d'évection d'après les surfaces de section en éléments orbitaux initiaux. **Haut** :  $\lambda_{\odot}(0) = 0, \lambda(0) = \pi$ . Courbe de gauche : libration  $\alpha = \pi$  avec  $\varpi(0) = \pi$ , courbe de droite : libration  $\alpha = 0$  avec  $\varpi(0) = 0$ . **Bas** :  $\lambda_{\odot}(0) = 0, \lambda(0) = 0$ . Courbe de gauche : libration  $\alpha = 0$  avec  $\varpi(0) = 0$ , courbe de droite : libration  $\alpha = \pi$  avec  $\varpi(0) = \pi$ .

des surfaces de section utilisant l'approximation de Hill (voir Hénon 1970).

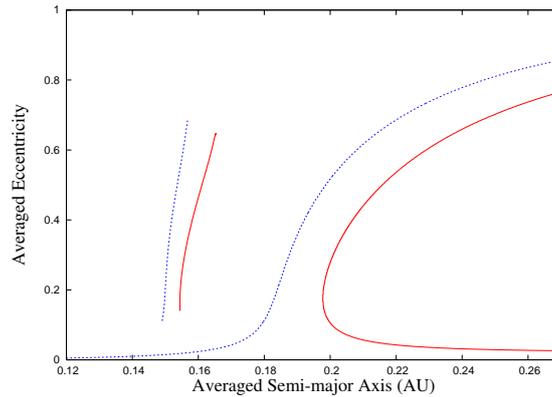
Les surfaces de section prouvent donc que la dynamique de la résonance (mais pas sa position exacte, voir la section suivante) est bien représentée par le modèle analytique  $H_3$  en ce qui concerne la taille des îles résonantes et leur forme.

La résonance d'évection pour des orbites rétrogrades ne peut être trouvée au moyen des surfaces de section. La famille d'orbites périodiques simples “ $f$ ” Hénon (1970) ne montre en effet aucune bifurcation. La résonance est en fait localisée dans une région fortement chaotique. Si des orbites peuvent être trouvées de manière numérique en libration autour des centres  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ , c'est toujours de manière temporaire, et ces orbites alternent ensuite entre circulation et/ou libration autour de l'autre point elliptique après un certain laps de temps.

### 5.5.2 Localisation de la résonance

La figure 5.9 indique les centres de libration donnée par les surfaces de section pour plusieurs valeurs des variables oscultrices initiales. Puisqu'on analyse le problème complet, les centres de la résonance dépendent des variables oscultrices initiales. On peut noter que l'utilisation d'une méthode de perturbation plus sophistiquée que celle utilisée en Section 2 aurait apporté une dépendance similaire à l'égard des variables initiales. Dans les deux diagrammes de la Fig.5.9, les courbes de gauche et de droite correspondent respectivement aux librations  $\alpha = \pi$  et  $\alpha = 0$ .

Dans la Fig.5.10 sont présentées les positions des deux îles de la résonance données par les surfaces de section en éléments moyens (les deux courbes de gauche), de même que les valeurs prédites par le modèle semi-analytique (Section 5.3, Fig.5.5). Les éléments moyens ont été obtenus en moyennant sur le temps d'intégration le demi-grand axe et l'excentricité des orbites trouvées par les surfaces de section et reportées sur la Fig.5.9. On peut apprécier l'intervalle entre les courbes trouvées par les deux méthodes, qui illustre le manque de précision du modèle analytique et souligne le fait que la forte perturbation solaire nous empêche de l'utiliser. En revanche dans la section suivante, j'applique ce modèle analytique dans un cas où il est utilisable, c'est-à-dire quand la perturbation solaire est suffisamment faible, pour des satellites très proches de la planète.



**Fig. 5.10** – Position de la résonance d'évection d'après les surfaces de section en éléments orbitaux moyens (les deux courbes de gauche) et grâce au modèle semi-analytique (les deux courbes de droite). L'île  $\alpha = \pi$  est indiquée par la courbe pointillée, l'île  $\alpha = 0$  par la courbe solide.

## 5.6 Résonance d'évection en tenant compte de l'aplatissement de la planète

Afin d'étudier l'effet de la résonance très proche de la planète, je pars du modèle analytique décrit dans la Section 5.2, et prends en compte la correction due à la seconde harmonique du développement du potentiel gravitationnel de la planète (le  $J_2$ ). En effet, sans cet effet, la fréquence du péricentre du satellite près de la planète n'est pas suffisamment élevée pour être comparable au moyen mouvement du Soleil, et ne permet pas l'apparition de la résonance d'évection. L'aplatissement de la planète a l'effet bien connu d'augmenter la fréquence du péricentre d'un satellite. On peut noter que cet effet d'aplatissement n'est que local, et j'ai vérifié que la dynamique de la résonance dans la région extérieure discutée dans les sections précédentes n'est pas modifiée. J'ai également vérifié à quel point la description de la perturbation solaire peut être améliorée en utilisant différents ordres d'approximation comme dans la Section 5.2.2, et on peut en conclure qu'en raison du faible ratio ( $\frac{a}{a_\odot}$ ), le polynôme d'ordre 2 seul est suffisant (hamiltonien  $H_2$ ).

La résonance d'évection prenant en compte l'aplatissement de la planète a été étudiée auparavant par Touma & Wisdom (1998) dans le cas du système Terre-Lune. Les auteurs y développent un modèle semblable à celui exposé dans cette étude, mais dans le contexte du problème de trois corps massifs plan et en utilisant les coordonnées de Jacobi.

Cette résonance pour les cas de la Terre et de Mars a également été étudiée analytiquement par Breiter (1999, 2000). Le modèle utilisé est semblable à celui présenté dans cette étude, mais y est plus complet car il prend en compte l'inclinaison du satellite, et des perturbations additionnelles comme l'obliquité de la planète et l'influence d'un quatrième corps (la Lune dans le cas de la Terre).

Pour obtenir le terme analytique supplémentaire qui dépend de l'aplatissement de la planète, on procède dans la suite avec une méthode similaire à celle utilisée au début de cette étude.

### 5.6.1 Développement et moyennisation

Le potentiel gravitationnel d'une planète formulée en coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \phi)$ , où l'axe de révolution du corps coïncide avec son axe de rotation, s'écrit, en suivant Duriez

(2002), comme :

$$U(r, -, \phi) = \frac{k^2 m}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 P_2[\sin(\phi)] - J_4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 P_4[\sin(\phi)] - \dots \right] \quad (5.19)$$

où  $m$  est la masse de la planète,  $a_e$  est son rayon équatorial, et les  $J_n$  sont les harmoniques zonaux. Les  $P_n$  sont les polynômes de Legendre définis en Section 5.2.1. Cette simplification où les axes de révolution et de rotation de la planète sont confondus limite l'application du modèle à des planètes qui possèdent une valeur suffisamment faible de leur obliquité  $\epsilon$  pour être considérée comme négligeable, ce qui est le cas pour Jupiter ( $\epsilon = 3.12^\circ$ ), Mercure ( $\epsilon \sim 0.1^\circ$ ), et Vénus (rotation rétrograde :  $\epsilon = 177.3^\circ$ ). Toutefois, pour les deux dernières planètes toutes les valeurs d'excentricité des orbites de satellites résonantes impliquent que leurs péricentres soient à l'intérieur du rayon physique de la planète. Pour Jupiter, seule la partie de forte excentricité de la résonance induit cet effet. Les coefficients physiques de Jupiter sont  $a_e = 71398$  km et  $J_2 = 0.01475$ .

La perturbation gravitationnelle de la planète causée exclusivement par le  $2^{nd}$  polynôme de Legendre dans l'équation (5.19), et ne faisant donc intervenir que le coefficient  $J_2$  est donnée par :

$$U_{J_2} = -k^2 m J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left[ \frac{3}{2} \sin^2(\phi) - \frac{1}{2} \right]. \quad (5.20)$$

Suivant des calculs classiques et en utilisant la relation de moyennisation par rapport à l'anomalie moyenne du satellite  $\langle \left( \frac{a}{r} \right)^3 \rangle = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}$ , d'une manière semblable à celle utilisée en Section 5.2.3, on obtient l'expression de  $U_{J_2}$  moyennée sur l'anomalie moyenne du satellite :

$$\langle U_{J_2} \rangle = k^2 m J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2(i) \right] (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.21)$$

### 5.6.2 Résultats

Lorsque  $i = 0$ , le potentiel (5.21) exprimée en variables résonantes ( $P_1, \alpha_1$ ) devient :

$$\langle U_{J_2} \rangle = \frac{1}{2} k^2 m J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left( \frac{P_1^2}{\mu a} \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.22)$$

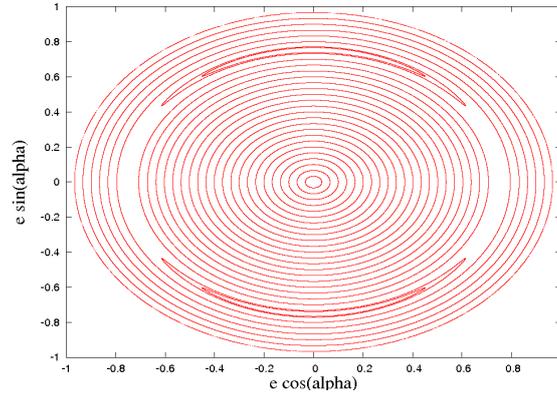
Le portrait de phase de la résonance en coordonnées polaires pour des orbites progrades de demi-grand axe  $a = 0.00515$  UA est montré en Fig.5.11 (les orbites rétrogrades résonantes n'ont pas pu être trouvées). L'effet de l'aplatissement de la planète est de changer les centres de libration de la résonance par  $\frac{\pi}{2}$ . La résonance semble également être plus étroite.

Un exemple numérique d'une orbite résonante intégrée avec les équations complètes du mouvement est montré en Fig.5.12.

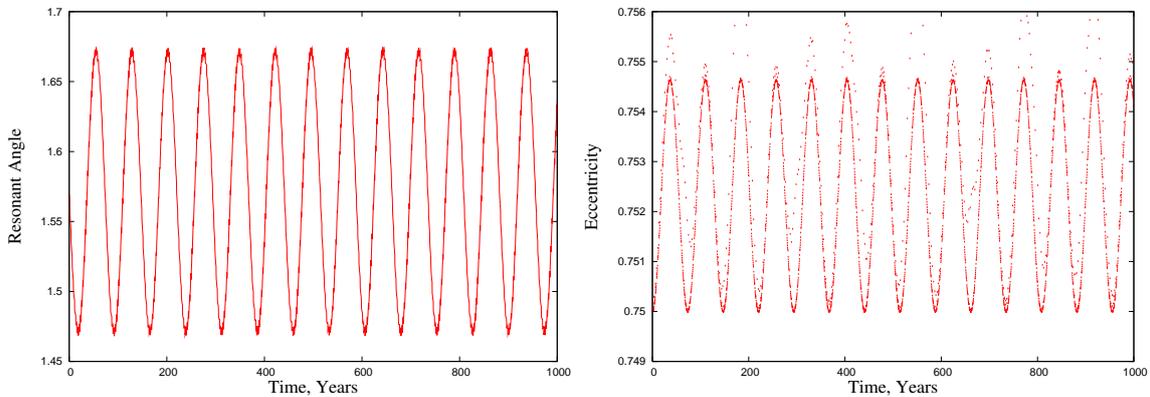
Dans la Fig.5.13, la résonance exacte et sa largeur en demi-grand axe et excentricité sont affichées. Le demi-grand axe moyen des quatre principaux satellites massifs de Jupiter (satellites Galiléens : *Io*, *Europe*, *Ganymede* et *Callisto*)<sup>2</sup> sont également indiqués par des lignes verticales. Sous l'effet de la résonance, on note que le péricentre de l'orbite du satellite se trouve à l'intérieur du rayon physique de Jupiter lorsque la séparatrice supérieure de la résonance dépasse  $a = 0.01176$  UA pour  $e = 0,959$ . Pour la résonance exacte, les valeurs critiques sont  $a = 0,01628$  UA avec  $e = 0,971$ .

La forme de la résonance exacte en demi-grand axe et excentricité déterminée par Touma & Wisdom (1998) dans le cas du système Terre-Lune est très similaire à la forme tracée en Fig.5.13.

<sup>2</sup>Les valeurs des demi-grand axes moyens des satellites proviennent du site du JPL : [http : //ssd.jpl.nasa.gov/?sat\\_lem](http://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_lem)



**Fig. 5.11** – Modèle analytique moyenné. Portrait dynamique de la résonance d'évection pour un satellite de Jupiter prograde avec un demi-grand axe  $a = 0,00515$  UA, en tenant compte du  $J_2$  de Jupiter.



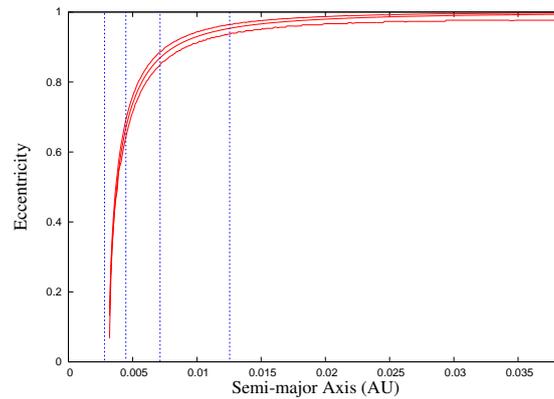
**Fig. 5.12** – Évolutions de l'angle résonant (**haut**) et de l'excentricité (**bas**) d'une orbite numériquement intégrée avec les équations complètes du mouvement. Les éléments orbitaux initiaux sont  $a = 0.00515$  UA,  $e = 0,75$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\varpi = \frac{\pi}{2}$  et  $\lambda_{\odot} = 0$ .

## 5.7 Conclusions

Dans ce chapitre j'ai étudié la dynamique de la résonance d'évection en utilisant tout d'abord un modèle analytique, et en étendant les calculs de Yokoyama et al. (2008). Le modèle analytique étendu montre une dynamique différente de celle du modèle précédent, principalement en ce qui concerne la création des îles de libration. De plus, j'ai pu montrer avec une méthode semi-analytique indépendante que de nouvelles extensions du modèle ne modifiait pas la dynamique prédite par notre modèle dans la région orbitale étudiée.

Toutefois, malgré ces améliorations, puisque ce modèle analytique montre une précision limitée par rapport aux intégrations numériques directes en raison de la méthode de moyennisation choisie, j'ai eu recours à l'utilisation de surfaces de section afin de les comparer avec le modèle analytique, de localiser précisément la résonance et d'étudier ses caractéristiques. La comparaison montre que le modèle analytique étendu, tout en restant imprécis sur la position de la résonance, reproduit les caractéristiques principales de sa dynamique. Grâce aux surfaces de section, on peut déterminer l'apparition de la résonance dans le système Jovien pour les valeurs moyennes de demi-grand axe  $a = 0,42 r_h$  et  $a = 0,435 r_h$  pour respectivement les îles de libration  $\alpha = \pi$  et  $\alpha = 0$ .

En outre, comme la résonance peut se trouver beaucoup plus proche de la planète en raison de son aplatissement, j'ai indiqué sa position et sa largeur en terme de demi-grand



**Fig. 5.13** – Position et largeur de la résonance d'évection en demi-grand axe et excentricité pour un satellite prograde proche de Jupiter. Les demi-grand axes moyens des satellites Galiléens sont indiqués par des lignes verticales.

axe et d'excentricité.

Toutefois, il reste d'importantes questions concernant la résonance ; par exemple la dépendance de la résonance à l'inclinaison des orbites et à l'excentricité du corps perturbateur sont d'un intérêt particulier pour les problèmes de capture/éjection et pour les études dynamiques des satellites irréguliers. Pour la même raison, la persistance (ou non) de la résonance quand les orbites sont soumises à d'autres perturbations, telles que des satellites massifs, des planètes, ou des forces non-gravitationnelles, est également pertinente.

## Chapitre 6

# Perturbations planétaires directes du mouvement d'un satellite

### Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>104</b>
<b>6.2</b>	<b>Le cas classique : développement de <math>R_{\odot}</math></b>	<b>105</b>
<b>6.3</b>	<b>Développement de <math>R_2</math></b>	<b>106</b>
6.3.1	Développements préliminaires	106
6.3.2	Expression de la fonction perturbatrice en fonction de l'anomalie vraie	107
<b>6.4</b>	<b>Modèle séculaire</b>	<b>108</b>
<b>6.5</b>	<b>Comparaisons numériques et applications</b>	<b>108</b>
6.5.1	Satellite terrestre	108
6.5.2	<i>Carme</i>	109
<b>6.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>110</b>

## 6.1 Introduction

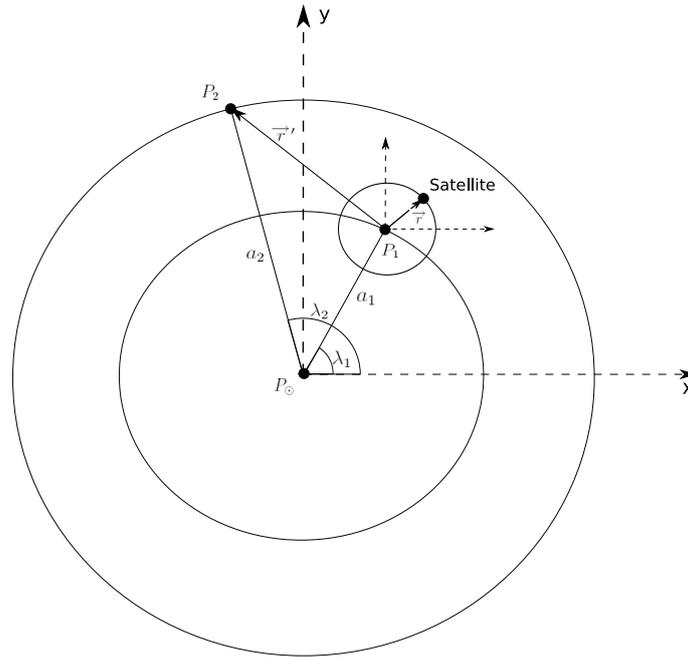
On a vu précédemment (Section 2.2.1) que la perturbation directe des planètes géantes *Saturne*, *Uranus* et *Neptune* sur les satellites irréguliers est supérieure pour la plupart des satellites aux perturbations engendrées par les satellites Galiléens. Il serait donc intéressant d'avoir des prédictions analytiques des fréquences séculaires de précession provoquées par ces planètes. Ce chapitre est une tentative pour élaborer un simple modèle analytique en ce sens.

On étudie donc la dynamique d'un satellite en révolution autour d'une planète  $P_1$ , elle-même en révolution autour d'une étoile  $P_{\odot}$ . Autour de  $P_{\odot}$  tourne également une seconde planète  $P_2$  (Fig.6.1). Les orbites des planètes  $P_1$  et  $P_2$  sont supposées fixes, circulaires et planes. La perturbation agissant sur l'orbite du satellite s'écrit :

$$R = R_{\odot} + R_2 \quad (6.1)$$

où  $R_{\odot}$  représente la perturbation due à  $P_{\odot}$  et  $R_2$  celle due à  $P_2$ .

Afin de développer un modèle analytique du mouvement du satellite perturbé par  $P_{\odot}$  et  $P_2$ , le système de référence doit être centré sur  $P_1$ . La perturbation due à  $P_{\odot}$  peut être développée en éléments orbitaux de manière classique (Section 6.2), mais ce n'est pas le cas de la perturbation due à  $P_2$  (Section 6.3).



**Fig. 6.1** – Schéma indiquant les positions du satellite, des deux planètes  $P_1$  et  $P_2$  et du corps central  $P_\odot$  composant le problème.

## 6.2 Le cas classique : développement de $R_\odot$

Le but de cette section est de rappeler les bases du développement de la fonction perturbatrice classique, quand le corps perturbateur peut être décrit par des éléments osculateurs elliptiques autour de la planète de référence où orbite le satellite ( $P_\odot$  autour de  $P_1$ ). En effet ce développement est semblable en plusieurs points au développement de la fonction perturbatrice  $R_2$  développée dans la section suivante. Il est donc décrit sommairement dans cette section afin d'introduire les notions qui seront utiles dans la suite.

La fonction perturbatrice due à  $P_\odot$  s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$R_\odot = GM_\odot \left( \frac{1}{d} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot}{r^3} \right) \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot$ .

Quand le rapport des normes  $(\frac{r}{r_\odot})$  est faible, comme dans le cas de satellites, on peut développer ce potentiel en fonction de ce petit paramètre en polynômes de Legendre :

$$R_\odot = \frac{GM_\odot}{r_\odot} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_\odot} \right)^l P_l(\cos \phi) \quad (6.3)$$

où  $\phi$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_\odot$  et dont le cosinus s'écrit en particulier :

$$\cos \phi = \frac{x x_\odot}{r r_\odot} + \frac{y y_\odot}{r r_\odot} + \frac{z z_\odot}{r r_\odot} \quad (6.4)$$

Le satellite et le corps perturbateur  $P_\odot$  ayant tous deux une orbite elliptique ayant pour foyer le corps de référence  $P_1$ , leurs coordonnées cartésiennes peuvent être exprimées en fonction de leurs angles orbitaux grâce aux relations :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I), \\ \frac{y}{r} &= \sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I), \\ \frac{z}{r} &= \sin(\omega + f) \sin(I). \end{aligned}$$

et leurs expressions similaires pour  $\frac{x_{\odot}}{r_{\odot}}$ ,  $\frac{y_{\odot}}{r_{\odot}}$ , et  $\frac{z_{\odot}}{r_{\odot}}$ .

Si on arrête le développement (6.3) au 2<sup>nd</sup> polynôme de Legendre, et que l'on moyenne la fonction perturbatrice  $R_{\odot}$  sur les longitudes du satellite et du corps perturbateur, on obtient la perturbation "Kozai" classique :

$$\langle R_{\odot} \rangle_{M, M_{\odot}} = \frac{GM_{\odot} a^2}{a_{\odot}^3} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (3 \cos^2(I) - 1) + \frac{15}{16} e^2 \sin^2(I) \cos(2w) \right] \quad (6.5)$$

## 6.3 Développement de $R_2$

### 6.3.1 Développements préliminaires

Le point de départ du développement de la fonction perturbatrice due à  $P_2$  reste un développement en polynômes de Legendre (6.3), mais à la différence du cas classique,  $\mathbf{r}'$  ne peut s'exprimer en éléments elliptiques ayant pour référence  $P_1$ . L'objectif de cette section est d'obtenir un développement de l'expression  $\frac{1}{r'}$ , qui sera utile dans la suite.

En utilisant le fait que les planètes  $P_1$  et  $P_2$  ont chacune une orbite képlérienne autour de  $P_{\odot}$ , on utilise la simple composition de vecteurs  $\mathbf{r}' = \overrightarrow{P_{\odot}P_2} - \overrightarrow{P_{\odot}P_1}$ . Si la dynamique orbitale de  $P_1$  et  $P_2$  autour de  $P_{\odot}$  est simplifiée à des mouvements plans et circulaires, on peut écrire :

$$\mathbf{r}' = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 \cos(\lambda_2) - a_1 \cos(\lambda_1) \\ a_2 \sin(\lambda_2) - a_1 \sin(\lambda_1) \\ 0 \end{vmatrix}$$

où  $a_k$  et  $\lambda_k$  sont respectivement le demi-grand axe et la longitude de la k-ième planète.

L'inverse de la norme de  $\mathbf{r}'$  apparaissant dans le développement de la fonction perturbatrice donne :

$$\frac{1}{r'} = \left[ a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \right]^{(-\frac{1}{2})}. \quad (6.6)$$

Une expression du même type apparaît également dans le développement de la fonction perturbatrice classique (due à un perturbateur elliptique, voir Murray & Dermott, 1999, p.236). On souhaite ici développer  $\frac{1}{r'}$  en fonction d'arguments contenant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette expression peut être développée de plusieurs manières, soit en polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a_2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l P_l[\cos(\lambda_2 - \lambda_1)], \quad (6.7)$$

ou en coefficients de Laplace<sup>1</sup> :

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2a_2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\lambda_2 - \lambda_1), \quad (6.9)$$

avec  $\alpha = \frac{a_1}{a_2} < 1$ .

<sup>1</sup>Les coefficients de Laplace peuvent s'écrire sous forme de séries :

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{j!} \alpha^j F(\alpha^2) \quad (6.8)$$

où  $F(x)$  est la fonction hypergéométrique.

Le développement en polynômes de Legendre est moins aisé à manipuler car il fait intervenir des puissances de  $\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$  à travers les polynômes de Legendre. J'utiliserai donc les coefficients de Laplace pour développer  $(\frac{1}{r'})^{2i+1}$  :

$$\frac{1}{r'^{2i+1}} = \frac{1}{2a_2^{2i+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (6.10)$$

La puissance  $2i+1$  de  $\frac{1}{r'}$  ci-dessus n'est pas restrictive car seules des puissances impaires de  $\frac{1}{r'}$  apparaîtront dans le développement de  $R_2$ .

### 6.3.2 Expression de la fonction perturbatrice en fonction de l'anomalie vraie

En prenant uniquement en compte le  $2^{nd}$  polynôme de Legendre afin d'exprimer la fonction perturbatrice  $R_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{GM_2}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2(\cos \phi) \\ &= -\frac{GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 + \frac{3GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 \cos^2(\phi) \end{aligned}$$

Le carré du cosinus s'écrit, en factorisant les termes dépendant de l'anomalie vraie  $f$  et après quelques calculs :

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi &= \left(\frac{x}{r} \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \frac{y'}{r'}\right)^2 \\ &= \cos(2f) \left[ \left(\frac{x'}{r'}\right)^2 A_1 + \frac{x'y'}{r'^2} A_2 + \left(\frac{y'}{r'}\right)^2 A_3 \right] \\ &\quad + \sin(2f) \left[ \left(\frac{x'}{r'}\right)^2 B_1 + \frac{x'y'}{r'^2} B_2 + \left(\frac{y'}{r'}\right)^2 B_3 \right] \\ &\quad + \left(\frac{x'}{r'}\right)^2 A_4 + \frac{x'y'}{r'^2} A_5 + \left(\frac{y'}{r'}\right)^2 A_6 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \cos(2\omega) (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega \cos^2 I) - \frac{1}{2} \sin(2\omega) \cos I \sin 2\Omega \\ A_2 &= \cos(2\omega) \left(\frac{1}{2} \sin 2\Omega (1 + \cos^2 I)\right) + \sin(2\omega) \cos I (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega) \\ A_3 &= \frac{1}{2} \cos(2\omega) (\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega \cos^2 I) + \frac{1}{2} \sin(2\omega) \cos I \sin 2\Omega \\ A_4 &= \frac{1}{2} (\cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega \cos^2 I) \\ A_5 &= \frac{1}{2} (\sin 2\Omega - \sin 2\Omega \cos^2 I) \\ A_6 &= \frac{1}{2} (\sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega \cos^2 I) \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \sin(2\omega) (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega \cos^2 I) - \frac{1}{2} \cos(2\omega) \cos I \sin 2\Omega \\ B_2 &= -\sin(2\omega) \left(\frac{1}{2} \sin 2\Omega (1 + \cos^2 I)\right) + \cos(2\omega) \cos I (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega) \\ B_3 &= -\frac{1}{2} \sin(2\omega) (\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega \cos^2 I) + \frac{1}{2} \cos(2\omega) \cos I \sin 2\Omega \end{aligned}$$

On a donc la fonction perturbatrice suivante :

$$\begin{aligned} R_2 &= -\frac{GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 + \frac{3GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 \cos(2f) [x'^2 A_1 + x'y' A_2 + y'^2 A_3] \\ &\quad + \frac{3GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 \sin(2f) [x'^2 B_1 + x'y' B_2 + y'^2 B_3] \\ &\quad + \frac{3GM_2}{2r'^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2 [x'^2 A_4 + x'y' A_5 + y'^2 A_6]. \end{aligned}$$

Cette expression peut maintenant être développée en fonction de l'anomalie moyenne du satellite  $M$  à un certain degré en excentricité à travers les expressions  $\frac{r}{a}$ ,  $\cos(2f)$  et  $\sin(2f)$  grâce aux développements elliptiques classiques (Brouwer & Clemence 1961, Murray & Dermott 1999). De même,  $R_2$  est développé en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par  $\frac{1}{r'}$  grâce au développement exposé dans la section précédente.  $R_2$  peut également être directement moyennée sur l'anomalie moyenne du satellite, puis sur les longitudes des planètes (section suivante).

## 6.4 Modèle séculaire

La fonction perturbatrice  $R_2$  peut être moyennée exactement sur l'anomalie moyenne  $M$  du satellite et sans utiliser de développement en excentricité en utilisant les expressions classiques du problème des deux corps :

$$\begin{aligned}\langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \rangle &= 1 + \frac{3}{2}e^2, \\ \langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f \rangle &= \frac{5}{2}e^2, \\ \langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f \rangle &= 0.\end{aligned}$$

C'est une moyennisation au premier ordre perturbatif, et le modèle reste valable pour toute valeur de l'excentricité du satellite. Afin d'obtenir un modèle purement séculaire, la moyennisation est étendue aux longitudes des planètes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Le développement en coefficients de Laplace (Eq.6.10) se réduit alors aux termes  $j = 0$ , et  $j = -1, 1$  à cause de l'apparition des arguments  $(j\lambda_2 - j\lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2)$  et  $(j\lambda_2 - j\lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_2)$  dans le développement de  $R_2$ . On obtient donc la fonction perturbatrice séculaire :

$$\begin{aligned}\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2} &= -\frac{GM_2}{4} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \frac{a^2}{a_2^3} b_{\frac{3}{2}}^{(0)}(\alpha) \\ &\quad + \frac{15GM_2}{8} \frac{a^2}{a_2^5} e^2 \left[ \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \frac{1}{2}a_1 a_2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)}(\alpha) \right] \cos(2\omega) \sin^2(I) \\ &\quad + \frac{3GM_2}{4} \frac{a^2}{a_2^5} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \left[ \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \frac{1}{2}a_1 a_2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)}(\alpha) \right] [1 + \cos^2(I)].\end{aligned}$$

$\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2}$  ne dépend plus que de l'argument du péricentre du satellite  $\omega$ . Le problème possède alors un degré de liberté et devient donc intégrable mais n'est pas explicite. On peut noter que la dynamique due exclusivement à  $\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2}$  est très semblable à celle due à la perturbation Kozai classique (Eq.6.5) dans le sens où celle-ci possède deux îles de libration à  $\omega = \frac{\pi}{2}$  et  $\omega = -\frac{\pi}{2}$ . Les fréquences en jeu sont toutefois beaucoup plus faibles que pour la perturbation Kozai.

On peut ensuite intégrer numériquement l'évolution séculaire des éléments orbitaux  $e, i, \omega, \Omega$  du satellite grâce aux équations de Lagrange et les comparer avec une intégration numérique des équations complètes du mouvement.

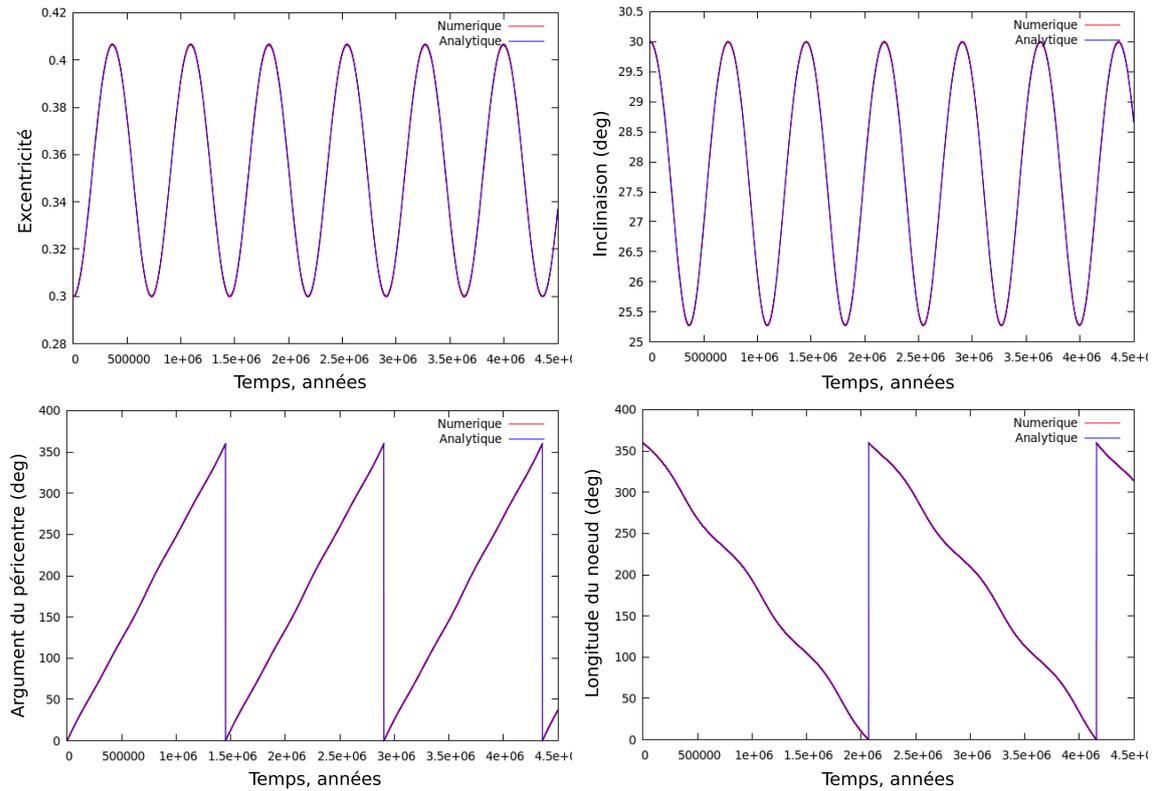
L'avantage d'une telle expression moyennée sur les courtes périodes est l'obtention des fréquences et évolutions séculaires du satellite, ainsi qu'une très grande rapidité d'intégration numérique.

## 6.5 Comparaisons numériques et applications

### 6.5.1 Satellite terrestre

J'ai donc comparé en Fig.6.2 l'évolution séculaire uniquement donnée par la fonction perturbatrice séculaire  $\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2}$  avec une intégration numérique où un satellite est en révolution autour de la planète  $P_1$  (demi-grand axe et masse de la Terre), et perturbé uniquement par la planète  $P_2$  (demi-grand axe et masse de Jupiter). De cette manière l'évolution des éléments orbitaux du satellite (hormis la longitude moyenne) ne dépend que de la perturbation due à  $P_2$ . Cette situation ne se produit évidemment jamais dans la réalité, mais le fait d'omettre la perturbation due à  $P_\odot$  permet d'observer directement l'effet de  $P_2$  sur l'orbite du satellite.

Dans cette intégration numérique les planètes  $P_1$  et  $P_2$  possèdent toutes deux des orbites circulaires, planes et fixes (pas de perturbations mutuelles). Les éléments orbitaux initiaux du satellite (prograde) sont  $a = 0,025$  UA,  $e = 0,3$  et  $I = 30$ ; les angles initiaux sont pris égaux à zéro.



**Fig. 6.2** – Évolutions de l'excentricité, inclinaison, argument du péricentre et longitude du noeud d'un satellite fictif obtenues par une intégration numérique et par le modèle séculaire.

On peut voir sur la Fig.6.2 que les évolutions des angles séculaires - argument du péricentre et longitude du noeud - ainsi que de l'excentricité et de l'inclinaison sont fidèlement reproduites par le modèle séculaire. On peut en conclure que pour cet exemple :

- le 2<sup>nd</sup> polynôme de Legendre semble suffisant pour approximer la dynamique. Celui-ci est factorisé par  $(\frac{r}{r'})^2$  où  $r'$  oscille dans l'intervalle  $[a_2 - a_1 : a_2 + a_1]$ . Dans cet exemple  $(\frac{r}{r'})^2$  varie donc dans l'intervalle  $[6.10^{-8} : 7.10^{-7}]$ .
- la méthode de perturbation au premier ordre est également suffisante. Les variations à courtes périodes (dans ce modèle non physique) sont en effet de très faibles amplitudes : d'au maximum  $8.10^{-6}$  pour l'excentricité et de  $0.0002^\circ$  pour l'inclinaison.

### 6.5.2 *Carme*

Ce deuxième exemple concerne un satellite rétrograde Jovien possédant une orbite du type de celle de *Carme*. Les éléments orbitaux moyens du satellite présentés dans le Tableau 5.1) ont été utilisés. Les angles initiaux sont égaux à zéro. J'ai comparé deux intégrations : l'une concernant la perturbation séculaire due au Soleil en utilisant l'hamiltonien Kozai au deuxième ordre perturbatif développé par Čuk & Burns (2004), et l'autre en lui adjoignant la perturbation directe due à Saturne à travers la perturbation  $\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2}$ . Le temps d'intégration est de 250.000 ans et les fréquences des longitudes du péricentre et du noeud dans les deux intégrations sont obtenues par analyse en fréquence.

Les fréquences obtenues avec les deux intégrations, ainsi que leurs différences sont présentées dans le tableau suivant :

	Kozai seul	Kozai + $R_2$	$\Delta f$
$g$	-1239.355	-1240.503	1.148
$s$	14174.926	14176.382	1.456

Rappelons que d'après le Tableau 4.2, les fréquences séculaires de *Carme* obtenues en intégrant les équations complètes du mouvement sont  $g=-1328.04''/\text{an}$  et  $s=14683.68''/\text{an}$ .

Les différences de fréquences  $\Delta_g$  et  $\Delta_s$  entre les deux intégrations correspondent à des périodes  $T_{\Delta_g} = \sim 1.129.000$  ans et  $T_{\Delta_s} = \sim 890.100$  ans, qui peuvent également s'évaluer de manière approximative en traçant et en observant les évolutions séculaires des angles uniquement dues à  $\langle R_2 \rangle_{M, \lambda_1, \lambda_2}$ , comme dans l'exemple précédent. Ces fréquences sont conformes aux estimations données en Section 2.2.1 (Fig.2.3) par moyennisation numérique de la fonction perturbatrice due aux planètes géantes et sont typiques de la région des satellites irréguliers Joviens.

On peut noter que dans cet exemple,  $(\frac{r}{r'})^2$  varie dans l'intervalle  $[0,00011 : 0,00127]$ .

## 6.6 Conclusions

Un modèle séculaire de la fonction perturbatrice due à un corps dont l'orbite autour de l'objet de référence ne peut être représentée par une orbite osculatrice elliptique a été développé. L'expression qui en résulte est intégrable et permet la détermination des fréquences séculaires induites par ce corps. Cette étude est un premier pas dans la quantification de ces perturbations de manière analytique. L'étape suivante consiste à développer la fonction perturbatrice  $R_2$  en fonction de l'anomalie moyenne du satellite et des longitudes des planètes. De cette manière, il sera possible d'avoir accès à chaque argument composant la dynamique de cette perturbation. Par exemple, Winter et al. (2009) ont montré que les satellites *Romulus* et *Remus* de l'astéroïde *Sylvia* sont en libration dans une résonance d'évection avec Jupiter quand l'aplatissement de *Sylvia* n'est pas pris en compte. Ce développement permettrait d'étudier cette résonance de manière analytique.



# Conclusion et Perspectives

Plusieurs types de résonances influencent les satellites irréguliers de Jupiter. Excepté les résonances de moyen mouvement avec le Soleil ( $6:1$ ) et séculaires ( $\nu_{\odot}$  et Kozai) déjà connues, le travail réalisé dans cette thèse montre l'importance de résonances séculaires impliquant la Grande Inégalité entre Jupiter et Saturne. Loin d'être placé "au hasard" dans la sphère de Hill de Jupiter, chacune des trois familles de satellites se situe en effet sur, ou très proche, d'une ou plusieurs résonances de ce type. Une perspective immédiate de travail consisterait à étudier le déplacement de ces résonances durant la période de migration des planètes comme prévu, par exemple, par le modèle de Nice.

L'étude qualitative réalisée à ce sujet dans la Section 4.7 indique que les résonances ont probablement visité l'espace des éléments orbitaux de façon importante par rapport à leurs positions actuelles. Il serait cependant intéressant d'étudier ces déplacements et les effets dynamiques qui en résulteraient avec des intégrations numériques précises dans un scénario de migration des planètes.

Un autre résultat important concerne la chaotité des satellites. Du groupe prograde, seuls trois satellites (*Himalia*, *Lysithea* et *Leda*) apparaissent comme étant quasi-périodiques. Les 50 satellites restant possèdent des orbites chaotiques, et les MLE des orbites sont en général représentatifs de leur diffusion chaotique. Les familles *Ananke* et *Carme* montrent ainsi une diffusion très limitée comparée à la famille *Pasiphae* et aux autres satellites situés à des demi-grand axes élevés.

Les cartes de stabilité dédiées au groupe prograde et aux familles rétrogrades confirment cette situation dynamique. La région correspondant à la famille *Pasiphae* est en effet très chaotique et on observe que de nombreuses résonances de moyen mouvement et séculaires se chevauchent. Cette situation contraste avec les régions correspondant aux familles *Ananke* et *Carme*, où seul un chaos faible est présent.

Une comparaison concernant 1) la position des résonances séculaires et 2) les valeurs des fréquences séculaires des satellites, entre les résultats numériques obtenus et les prédictions des modèles analytiques existants (Ćuk & Burns 2004; Beaugé & Nesvorný 2007), a également été menée. Les résultats indiquent des précisions satisfaisantes de la part des modèles, ainsi qu'une plus grande exactitude pour la valeur de la fréquence de précession du noeud que pour celle du péricentre.

L'étude de la résonance d'évection par des moyens analytiques et numériques à permis d'étendre un modèle existant (Yokoyama et al. 2008). Le modèle étendu montre une dynamique générale bien plus conforme à la réalité, mais encore inexacte. La méthode numérique a ainsi permis de localiser précisément la résonance. J'ai également déterminé la position de la résonance près de la planète quand la non-sphéricité de celle-ci est prise en compte. Une perspective intéressante de travail concernerait, entre autres, le rapport de cette résonance à l'excentricité du corps perturbateur et aux perturbations de corps massifs autres que le Soleil.

Finalement, un modèle séculaire a été construit afin d'étudier l'influence des perturbations planétaires directes sur le mouvement d'un satellite. Ce modèle montre une très bonne précision comparé à une intégration numérique. Il reste à développer ce modèle de manière complète, c'est à dire sans moyennisation, en fonction de l'anomalie moyenne du satellite et des longitudes des planètes. Pour continuer dans cette voie il faudrait également

y prendre en compte l'excentricité et l'inclinaison des planètes, de façon à pouvoir étudier, par exemple, des résonances séculaires entre un satellite et la planète  $P_2$ .

Une perturbation non prise en compte dans l'étude de la dynamique des satellites irréguliers est celle des satellites Galiléens. Son étude serait intéressante car leur effet sur les satellites irréguliers les plus proches de la planète est toujours mal connu. De plus, il serait intéressant d'étendre les travaux d'Haghighipour & Jewitt (2008) concernant la stabilité de la région entre satellites Galiléens et irréguliers en y incluant la perturbation solaire. Celle-ci pourrait en effet avoir pour conséquence de permettre la présence de résonances séculaires entre les deux types de satellites dans cette zone de transition, les fréquences de ces satellites étant très proches.

# Notations utilisées

$"/an$  : arcsecondes par an

$k$  =  $0,01720209895 \text{ UA}^{3/2} \text{ jour}^{-1} M_{\odot}^{-1/2}$  : Constante gravitationnelle de Gauss  
 $G$  =  $6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  : Constante gravitationnelle  
 $M_{\odot}$  =  $1.98911 \times 10^{30} \text{ kg}$  : Masse solaire  
1 UA =  $1.495978707 \times 10^{11} \text{ m}$  : Unité astronomique



---

# Bibliographie

- Alvarellos, J. (1996). Master's thesis. *San José State Univ.*
- Applegate, J. H., Douglas, M. R., Gursel, Y., Sussman, G. J., and Wisdom, J. (1986). The outer solar system for 200 million years. *The Astronomical Journal*, 92 :176–194.
- Astakhov, S. A., Burbanks, A. D., Wiggins, S., and Farrelly, D. (2003). Chaos-assisted capture of irregular moons. *Nature*, 423 :264–267.
- Barrio, R., Borczyk, W., and Breiter, S. (2009). Spurious structures in chaos indicators maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40.
- Beaugé, C. and Nesvorný, D. (2007). Proper Elements and Secular Resonances for Irregular Satellites. *The Astronomical Journal*, 133 :2537–2558.
- Beaugé, C., Nesvorný, D., and Dones, L. (2006). A High-Order Analytical Model for the Secular Dynamics of Irregular Satellites. *The Astronomical Journal*, 131 :2299–2313.
- Beaugé, C., Roig, F., and Nesvorný, D. (2002). Effects of Planetary Migration on Natural Satellites of the Outer Planets. *Icarus*, 158 :483–498.
- Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J. (1980a). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1 : Theory. *Meccanica*.
- Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J. (1980b). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2 : Numerical application. *Meccanica*.
- Bottke, W. F., Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Morbidelli, A. (2010). The Irregular Satellites : The Most Collisionally Evolved Populations in the Solar System. *The Astronomical Journal*, 139 :994–1014.
- Brasser, R., Morbidelli, A., Gomes, R., Tsiganis, K., and Levison, H. F. (2009). Constructing the secular architecture of the solar system II : the terrestrial planets. *Astronomy & Astrophysics*, 507 :1053–1065.
- Breiter, S. (1999). Lunisolar Apsidal Resonances at low Satellite Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 74 :253–274.
- Breiter, S. (2000). The Prograde C7 Resonance for Earth and Mars Satellite Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 77 :201–214.
- Bretagnon, P. (1982). Theory for the motion of all the planets - The VSOP82 solution. *Astronomy & Astrophysics*, 114 :278–288.

- Bretagnon, P. and Francou, G. (1988). Planetary theories in rectangular and spherical variables - VSOP 87 solutions. *Astronomy & Astrophysics*, 202 :309–315.
- Brouwer, D. and Clemence, G. M. (1961). *Methods of celestial mechanics*.
- Brunini, A. (1996). On the Satellite Capture Problem Capture and stability regions for planetary satellites. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 64 :79–92.
- Brunini, A. and Conicet, P. (1995). Capture of Planetesimals by the Giant Planets. *Earth Moon and Planets*, 71 :281–284.
- Brunini, A., Giordano, C. M., and Orellana, R. B. (1996). Capture conditions in restricted three-body problem. *Astronomy & Astrophysics*, 314 :977–982.
- Burns, J. A., Carruba, V., Nesvorný, D., Cuk, M., and Tsiganis, K. (2004). Chaos and Effects of Planetary Migration for the Saturnian Satellite Kiviuq. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 36 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 860–+.
- Burns, J. A. and Matthews, M. S., editors (1986). *Satellites*.
- Carpino, M., Milani, A., and Nobili, A. M. (1987). Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets. *Astronomy & Astrophysics*, 181 :182–194.
- Carruba, V., Burns, J. A., Bottke, W., and Nesvorný, D. (2003). Orbital evolution of the Gefion and Adeona asteroid families : close encounters with massive asteroids and the Yarkovsky effect. *Icarus*, 162 :308–327.
- Carruba, V., Burns, J. A., Nicholson, P. D., and Gladman, B. J. (2002). On the Inclination Distribution of the Jovian Irregular Satellites. *Icarus*, 158 :434–449.
- Carruba, V., Nesvorný, D., Burns, J. A., Čuk, M., and Tsiganis, K. (2004). Chaos and the Effects of Planetary Migration on the Orbit of S/2000 S5 Kiviuq. *The Astronomical Journal*, 128 :1899–1915.
- Carusi, A. and Valsecchi, G. B. (1980). Effects of a close encounter with Jupiter on different populations of planet-crossing objects. *Moon and Planets*, 22 :133–139.
- Carusi, A. and Valsecchi, G. B. (1981). Temporary satellite captures of comets by Jupiter. *Astronomy & Astrophysics*, 94 :226–228.
- Carusi, A. and Valsecchi, G. B. (1983). Temporary satellite captures of comets. In C.-I. Lagerkvist & H. Rickman, editor, *Asteroids, Comets, and Meteors*, pages 331–337.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304 :793–799.
- Christou, A. A. (2005). Gravitational scattering within the Himalia group of jovian prograde irregular satellites. *Icarus*, 174 :215–229.
- Cincotta, P. M., Giordano, C. M., and Simó, C. (2003). Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 182 :151–178.
- Cincotta, P. M. and Simó, C. (2000). Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *A&AS*, 147 :205–228.

- Cordeiro, R. R., Martins, R. V., and Leonel, E. D. (1999). Complexity of Capture Phenomena in the Conservative and the Dissipative Restricted Three-Body Problems. *The Astronomical Journal*, 117 :1634–1642.
- Correa Otto, J., Leiva, A. M., Giuppone, C. A., and Beaugé, C. (2010). Mapping the  $\nu_{\odot}$  secular resonance for retrograde irregular satellites. *MNRAS*, 402 :1959–1968.
- Ćuk, M. and Burns, J. A. (2004a). Gas-drag-assisted capture of Himalia’s family. *Icarus*, 167 :369–381.
- Ćuk, M. and Burns, J. A. (2004b). On the Secular Behavior of Irregular Satellites. *The Astronomical Journal*.
- Ćuk, M. and Gladman, B. J. (2006). Irregular satellite capture during planetary resonance passage. *Icarus*, 183 :362–372.
- Domingos, R. C., Winter, O. C., and Yokoyama, T. (2006). Stable satellites around extrasolar giant planets. *MNRAS*, 373 :1227–1234.
- Duriez, L. (2002). *Cours de Mécanique Céleste Classique*.
- Everhart, E. (1985). An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In A. Carusi & G. B. Valsecchi, editor, *Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht : Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985., p.185*, pages 185–+.
- Fernández, Y. R., Sheppard, S. S., and Jewitt, D. C. (2003). The Albedo Distribution of Jovian Trojan Asteroids. *The Astronomical Journal*, 126 :1563–1574.
- Ferraz-Mello, S. (1996). A Symplectic Mapping Approach to the Study of the Stochasticity in Asteroidal Resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65 :421–437.
- Ferraz-Mello, S., editor (2007). *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance*, volume 345 of *Astrophysics and Space Science Library*.
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., and Callegari, N. (2005). Extrasolar Planetary Systems. In R. Dvorak, F. Freistetter, & J. Kurths, editor, *Chaos and Stability in Planetary Systems*, volume 683 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 219–271.
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., and Roig, F. (1998). The Determinant Role of Jupiter’s Great Inequality in the Depletion of the Hecuba Gap. *The Astronomical Journal*, 116 :1491–1500.
- Froeschlé, C., Gonczi, R., and Lega, E. (1997). The fast Lyapunov indicator : a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt. *Planet. Space Sci.*, 45 :881–886.
- Frouard, J., Fouchard, M., and Vienne, A. (2010a). About the dynamics of the evection resonance. *Astronomy & Astrophysics*, 515 :A54+.
- Frouard, J., Vienne, A., and Fouchard, M. (2010b). The long-term dynamics of the Jovian irregular satellites. *submitted to Astronomy & Astrophysics*.

- Gottwald, G. A. and Melbourne, I. (2009). On the validity of the 0-1 test for chaos. *Nonlinearity*, 22 :1367–1382.
- Goździewski, K., Breiter, S., and Borczyk, W. (2008). The long-term stability of extrasolar system HD37124. Numerical study of resonance effects. *MNRAS*, 383 :989–999.
- Grav, T. and Holman, M. J. (2004). Near-Infrared Photometry of the Irregular Satellites of Jupiter and Saturn. *ApJ*, 605 :L141–L144.
- Grav, T., Holman, M. J., and Fraser, W. C. (2004). Photometry of Irregular Satellites of Uranus and Neptune. *ApJ*, 613 :L77–L80.
- Grav, T., Holman, M. J., Gladman, B. J., and Aksnes, K. (2003). Photometric survey of the irregular satellites. *Icarus*, 166 :33–45.
- Guzzo, M. (2002). Long-Term Stability Analysis of Quasi Integrable Degenerate Systems Through the Spectral Formulation of the Nekhoroshev Theorem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83 :303–323.
- Guzzo, M. (2005). The web of three-planet resonances in the outer Solar System. *Icarus*, 174 :273–284.
- Guzzo, M. (2006). The web of three-planet resonances in the outer Solar System. II. A source of orbital instability for Uranus and Neptune. *Icarus*, 181 :475–485.
- Guzzo, M., Knežević, Z., and Milani, A. (2002a). Probing the Nekhoroshev Stability of Asteroids. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83 :121–140.
- Guzzo, M., Lega, E., and Froeschlé, C. (2002b). On the Numerical Detection of the Effective Stability of Chaotic Motions in Quasi-integrable Systems. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 163 :1–25.
- Haghighipour, N. and Jewitt, D. (2008). a Region Void of Irregular Satellites around Jupiter. *The Astronomical Journal*, 136 :909–918.
- Hahn, J. M. and Malhotra, R. (1999). Orbital Evolution of Planets Embedded in a Planetary Disk. *The Astronomical Journal*, 117 :3041–3053.
- Hamilton, D. P. and Burns, J. A. (1991). Orbital stability zones about asteroids. *Icarus*, 92 :118–131.
- Hamilton, D. P. and Krivov, A. V. (1997). Dynamics of Distant Moons of Asteroids. *Icarus*, 128 :241–249.
- Henon, M. (1969). Numerical exploration of the restricted problem, V. *Astronomy & Astrophysics*, 1 :223–238.
- Henon, M. (1970). Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill’s case : Non-periodic orbits. *Astronomy & Astrophysics*, 9 :24–36.
- Heppenheimer, T. A. and Porco, C. (1977). New contributions to the problem of capture. *Icarus*, 30 :385–401.
- Hinse, T. C., Christou, A. A., Alvarellos, J. L. A., and Goździewski, K. (2010). Application of the MEGNO technique to the dynamics of Jovian irregular satellites. *MNRAS*, 404 :837–857.

- Hopf, E. (1930). *Math. Ann.*, 103 :710.
- Huang, T. and Innanen, K. A. (1983). The gravitational escape/capture of planetary satellites. *The Astronomical Journal*, 88 :1537–1548.
- Jarvis, K. S., Vilas, F., Larson, S. M., and Gaffey, M. J. (2000). JVI Himalia : New compositional evidence and interpretations for the origin of Jupiter’s small satellites. *Icarus*, 145 :445–453.
- Kaiser, J. F. and Reed, W. A. (1977). Data smoothing using low-pass digital filters. *Review of Scientific Instruments*, 48 :1447–1457.
- Kary, D. M. and Dones, L. (1996). Capture Statistics of Short-Period Comets : Implications for Comet D/Shoemaker-Levy 9. *Icarus*, 121 :207–224.
- Kaula, W. M. (1962). Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *The Astronomical Journal*, 67 :300–+.
- Kinoshita, H. and Nakai, H. (2007). Quasi-satellites of Jupiter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 98 :181–189.
- Knežević, Z. and Milani, A. (2000). Synthetic Proper Elements for Outer Main Belt Asteroids. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 78 :17–46.
- Lainey, V., Duriez, L., and Vienne, A. (2006). Synthetic representation of the Galilean satellites’ orbital motions from L1 ephemerides. *Astronomy & Astrophysics*, 456 :783–788.
- Laskar, J. (1986). Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory. *Astronomy & Astrophysics*, 157 :59–70.
- Laskar, J. (1988). Secular evolution of the solar system over 10 million years. *Astronomy & Astrophysics*, 198 :341–362.
- Laskar, J. (1990). The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88 :266–291.
- Laskar, J. (1994). Large-scale chaos in the solar system. *Astronomy & Astrophysics*, 287 :L9–L12.
- Laskar, J. (1995). Frequency map analysis of an hamiltonian system. In D. Benest & C. Froeschle, editor, *Chaos and diffusion in Hamiltonian systems*, pages 223–+.
- Laskar, J. (2003). Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions. *ArXiv Mathematics e-prints*.
- Laskar, J. and Robutel, P. (1995). Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62 :193–217.
- Laskar, J. and Robutel, P. (2001). High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80 :39–62.
- Malhotra, R. (1995). The Origin of Pluto’s Orbit : Implications for the Solar System Beyond Neptune. *The Astronomical Journal*, 110 :420–+.

- Michtchenko, T. A. and Ferraz-Mello, S. (2001). Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets. *The Astronomical Journal*, 122 :474–481.
- Mikkola, S. and Innanen, K. (1997). Orbital Stability of Planetary Quasi-Satellites. In R. Dvorak & J. Henrard, editor, *The Dynamical Behaviour of our Planetary System*, pages 345–+.
- Mikkola, S. and Innanen, K. (1999). Symplectic Tangent Map for Planetary Motions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 74 :59–67.
- Mikkola, S., Innanen, K., Wiegert, P., Connors, M., and Brassler, R. (2006). Stability limits for the quasi-satellite orbit. *MNRAS*, 369 :15–24.
- Morbidelli, A. (2002). *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*, London : Taylor & Francis, 2002.
- Morbidelli, A., Brassler, R., Gomes, R., Levison, H. F., and Tsiganis, K. (2010). Evidence from the Asteroid Belt for a Violent Past Evolution of Jupiter’s Orbit. *The Astronomical Journal*, 140 :1391–1401.
- Morbidelli, A., Brassler, R., Tsiganis, K., Gomes, R., and Levison, H. F. (2009). Constructing the secular architecture of the solar system. I. The giant planets. *Astronomy & Astrophysics*, 507 :1041–1052.
- Morbidelli, A. and Nesvorný, D. (1999). Numerous Weak Resonances Drive Asteroids toward Terrestrial Planets Orbits. *Icarus*, 139 :295–308.
- Murison, M. A. (1989). The fractal dynamics of satellite capture in the circular restricted three-body problem. *The Astronomical Journal*, 98 :2346–2359.
- Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, 1999.
- Murray, N. and Holman, M. (1999). The Origin of Chaos in the Outer Solar System. *Science*, 283 :1877–+.
- Namouni, F. (1999). Secular Interactions of Coorbiting Objects. *Icarus*, 137 :293–314.
- Nekhoroshev, N. N. (1977). An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable hamiltonian systems. *Russian Mathematical Surveys*, 32.
- Nesvorný, D., Alvarellos, J. L. A., Dones, L., and Levison, H. F. (2003). Orbital and Collisional Evolution of the Irregular Satellites. *The Astronomical Journal*, 126 :398–429.
- Nesvorný, D., Morbidelli, A., Vokrouhlický, D., Bottke, W. F., and Brož, M. (2002). The Flora Family : A Case of the Dynamically Dispersed Collisional Swarm? *Icarus*, 157 :155–172.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Morbidelli, A. (2007). Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters. *The Astronomical Journal*, 133 :1962–1976.
- Nicholson, P. D., Cuk, M., Sheppard, S. S., Nesvorný, D., and Johnson, T. V. (2008). *Irregular Satellites of the Giant Planets*, pages 411–424.
- Novaković, B., Tsiganis, K., and Knežević, Z. (2010). Chaotic transport and chronology of complex asteroid families. *MNRAS*, 402 :1263–1272.

- Pavlovic, R. and Knezevic, Z. (2009). Fulfilment of the Conditions for the Application of the Nekhoroshev Theorem Using Extended Hamiltonian. *Publications de l'Observatoire Astronomique de Beograd*, 86 :139–144.
- Pollack, J. B., Burns, J. A., and Tauber, M. E. (1979). Gas drag in primordial circum-planetary envelopes - A mechanism for satellite capture. *Icarus*, 37 :587–611.
- Porco, C. C., West, R. A., McEwen, A., Del Genio, A. D., Ingersoll, A. P., Thomas, P., Squyres, S., Dones, L., Murray, C. D., Johnson, T. V., Burns, J. A., Brahic, A., Neukum, G., Veverka, J., Barbara, J. M., Denk, T., Evans, M., Ferrier, J. J., Geissler, P., Helfenstein, P., Roatsch, T., Throop, H., Tiscareno, M., and Vasavada, A. R. (2003). Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings. *Science*, 299 :1541–1547.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*.
- Quinn, T. R., Tremaine, S., and Duncan, M. (1991). A three million year integration of the earth's orbit. *The Astronomical Journal*, 101 :2287–2305.
- Robutel, P. and Gabern, F. (2006). The resonant structure of Jupiter's Trojan asteroids - I. Long-term stability and diffusion. *MNRAS*, 372 :1463–1482.
- Robutel, P. and Laskar, J. (2001). Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. Short Period Dynamics of Massless Particles. *Icarus*, 152 :4–28.
- Saha, P. and Tremaine, S. (1993). The orbits of the retrograde Jovian satellites. *Icarus*, 106 :549–+.
- Shen, Y. and Tremaine, S. (2008). Stability of the Distant Satellites of the Giant Planets in the Solar System. *The Astronomical Journal*, 136 :2453–2467.
- Sheppard, S. S. (2006). Outer irregular satellites of the planets and their relationship with asteroids, comets and Kuiper Belt objects. In L. Daniela, M. Sylvio Ferraz, & F. J. Angel, editor, *Asteroids, Comets, Meteors*, volume 229 of *IAU Symposium*, pages 319–334.
- Simon, J. L. and Bretagnon, P. (1984). A motion theory for Jupiter and Saturn over a 6000 yr span Solution JASON84. *Astronomy & Astrophysics*, 138 :169–178.
- Skokos, C. (2010). The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation. In J. Souchay & R. Dvorak, editor, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 790 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 63–135.
- Skokos, C., Bountis, T., and Antonopoulos, C. (2008). Detecting chaos, determining the dimensions of tori and predicting slow diffusion in Fermi-Pasta-Ulam lattices by the Generalized Alignment Index method. *European Physical Journal Special Topics*, 165 :5–14.
- Skokos, C., Bountis, T. C., and Antonopoulos, C. (2007). Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems : The Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 231 :30–54.
- Skokos, C. and Gerlach, E. (2010). Numerical integration of variational equations. *Phys. Rev. E*, 82(3) :036704–+.

- Stiefel, E. L. and Scheifele, G. (1971). *Linear and regular celestial mechanics ; perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory.*
- Stumpff, K. (1962). *Himmelsmechanik. Bd.1 : Das Dreikoerperproblem.*
- Takeda, H., Matsuda, T., Sawada, K., and Hayashi, C. (1985). Drag on a Gravitating Sphere Moving through a Gas. *Progress of Theoretical Physics*, 74 :272–287.
- Tancredi, G., Sánchez, A., and Roig, F. (2001). a Comparison Between Methods to Compute Lyapunov Exponents. *The Astronomical Journal*, 121 :1171–1179.
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., and Levison, H. F. (2005). Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435 :459–461.
- Tsiganis, K., Knežević, Z., and Varvoglis, H. (2007). Reconstructing the orbital history of the Veritas family. *Icarus*, 186 :484–497.
- Turrini, D., Marzari, F., and Beust, H. (2008). A new perspective on the irregular satellites of Saturn - I. Dynamical and collisional history. *MNRAS*, 391 :1029–1051.
- Turrini, D., Marzari, F., and Tosi, F. (2009). A new perspective on the irregular satellites of Saturn - II. Dynamical and physical origin. *MNRAS*, 392 :455–474.
- Šidlichovský, M. and Nesvorný, D. (1996). Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65 :137–148.
- Varadi, F., Runnegar, B., and Ghil, M. (2003). Successive Refinements in Long-Term Integrations of Planetary Orbits. *ApJ*, 592 :620–630.
- Vieira Neto, E. and Winter, O. C. (2001). Time Analysis for Temporary Gravitational Capture : Satellites of Uranus. *The Astronomical Journal*, 122 :440–448.
- Vieira Neto, E., Winter, O. C., and Melo, C. F. (2005). The use of the two-body energy to study problems of escape/capture. In Z. Knežević & A. Milani, editor, *IAU Colloq. 197 : Dynamics of Populations of Planetary Systems*, pages 439–444.
- Vieira Neto, E., Winter, O. C., and Yokoyama, T. (2004). The effect of Jupiter’s mass growth on satellite capture. Retrograde case. *Astronomy & Astrophysics*, 414 :727–734.
- Vieira Neto, E., Winter, O. C., and Yokoyama, T. (2006). Effect of Jupiter’s mass growth on satellite capture. The prograde case. *Astronomy & Astrophysics*, 452 :1091–1097.
- Vokrouhlický, D., Nesvorný, D., and Levison, H. F. (2008). Irregular Satellite Capture by Exchange Reactions. *The Astronomical Journal*, 136 :1463–1476.
- Whipple, A. L. and Shelus, P. J. (1993). A secular resonance between Jupiter and its eighth satellite? *Icarus*, 101 :265–271.
- Wiegert, P., Innanen, K., and Mikkola, S. (2000). The Stability of Quasi Satellites in the Outer Solar System. *The Astronomical Journal*, 119 :1978–1984.
- Winter, O. C., Boldrin, L. A. G., Vieira Neto, E., Vieira Martins, R., Giulianti Winter, S. M., Gomes, R. S., Marchis, F., and Descamps, P. (2009). On the stability of the satellites of asteroid 87 Sylvia. *MNRAS*, 395 :218–227.
- Winter, O. C. and Vieira Neto, E. (2001). Time analysis for temporary gravitational capture. Stable orbits. *Astronomy & Astrophysics*, 377 :1119–1127.

- Winter, O. C. and Vieira Neto, E. (2002). Distant stable direct orbits around the Moon. *Astronomy & Astrophysics*, 393 :661–671.
- Wisdom, J. and Holman, M. (1991). Symplectic maps for the n-body problem. *The Astronomical Journal*, 102 :1528–1538.
- Yokoyama, T., Santos, M. T., Cardin, G., and Winter, O. C. (2003). On the orbits of the outer satellites of Jupiter. *Astronomy & Astrophysics*, 401 :763–772.
- Yokoyama, T., Vieira Neto, E., Winter, O. C., Sanchez, D. M., and de Oliveira Brasil, P. I. (2008). On the evection resonance and its connection to the stability of outer satellites. *Mathematical Problems in Engineering*.