

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ILE DE FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

présentée par

Hervé MANCHE

pour obtenir le grade de
docteur de l'Observatoire de Paris
en Astronomie et Astrophysique

ÉLABORATION DE L'ÉPHÉMÉRIDE INPOP :
MODÈLE DYNAMIQUE ET AJUSTEMENTS AUX
DONNÉES DE TÉLÉMÉTRIE LASER LUNE

dirigée par

Jacques LASKAR
et
Agnès FIENGA

et soutenue le 12 janvier 2011
devant le jury composé de

Nicole CAPITAINE.....Examineur
Anne LEMAÎTRE Rapporteur
Gérard PETIT..... Rapporteur
Véronique DEHANT Examineur
Sergei KLIONER.....Examineur
Pierre EXERTIER.....Examineur
Jacques LASKAR.....Directeur de thèse
Agnès FIENGA.....Directeur de thèse

Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides
77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

Résumé

Cette thèse décrit la mise en place du modèle dynamique de l'éphéméride planétaire et lunaire INPOP (Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris) et son ajustement aux données de télémétrie laser Lune.

Dans une première partie sont exposées des généralités sur la modélisation des forces et moments qui s'exercent entre les corps du Système solaire. Ces interactions, qui conduisent aux équations du mouvement, comprennent les termes principaux newtoniens, des corrections induites par la relativité générale, des perturbations liées à la non sphéricité de certains corps ou au fait qu'il peuvent se déformer sous l'effet de contraintes internes (effets de marées).

La deuxième partie traite des ajustements aux données Lunar Laser Ranging (LLR), mesure du temps de trajet de la lumière entre une station terrestre et un réflecteur déposé à la surface de la Lune. Leur précision intrinsèque de quelques centimètres pour les plus récentes nécessite de tenir compte pour leur réduction d'effets physiques faibles, comme les mouvements de la croûte terrestre ou la déviation relativiste des rayons lumineux.

Enfin, la troisième partie décrit les constructions de trois solutions particulières. La première, conçue pour retrouver la solution DE405 du Jet Propulsion Laboratory, permet de valider le modèle dynamique. La deuxième, en corrige quelques inconsistances et intègre l'orientation de la Terre, dans le but de produire des solutions à long terme. La troisième version, dont le modèle dynamique est amélioré, est ajustée aux données LLR. Les résidus LLR et valeurs de paramètres ajustés sont comparés à ceux d'autres solutions publiées.

This thesis describes the set up of the dynamical model of the planetary and lunar ephemeris INPOP, and its adjustment to Lunar laser telemetry data.

The first part contains general considerations about the modeling of forces and torques exerted upon Solar System bodies. These interactions, leading to the equations of motions, take into account the Newtonian main term, corrections due to the general relativity, perturbations due to some non spherical bodies or their deformation due to intern constraints (tidal effects).

The second part deals with adjustments to Lunar Laser Ranging observations, the measurement of the light time travel between a station on the Earth and a reflector on the Moon. Their intrinsic precision reaches a few centimeters for the most recent ones. In the reduction process, it is thus necessary to take into account some very small physical effects, such as the displacement of the terrestrial crust or the relativistic deviation of light.

Finally, the third part describes the constructions of three particular solutions. The first one, designed to retrieve the Jet Propulsion Laboratory's solution DE405, allows to validate the dynamical model. The second one corrects some inconsistencies and includes the Earth's orientation, in order to compute long time solutions. The third one, which model is improved, is fitted to LLR observations. The LLR residuals and fitted parameters values are compared to other published solutions.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette étude :

- mes directeur et directrice de thèse, Jacques Laskar et Agnès Fienga, pour le temps qu'ils ont consacré à encadrer ce travail et les conseils qu'ils m'ont apportés. Plus important encore, ils m'ont permis de travailler sur un sujet grâce auquel j'ai passé les années les plus enrichissantes de ma vie professionnelle.
- les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail, et plus encore d'avoir eu le courage de lire une prose laborieuse. Je suis conscient de l'effort que cela représente, en particulier pour les rapporteurs Anne Lemaître et Gérard Petit, ainsi que pour Sergei Klioner, seul membre non francophone.
- Mickael Gastineau pour sa patience. Sans sa grande compétence, en particulier en informatique, ce travail n'aurait que difficilement pu aboutir.
- les doctorants de l'IMCCE, en particulier Petr Kuchynka, Jocelyn Couetdic, Julien Boddossian, François Farago, Thierry Combot et Dorothée Husson. Une mention spéciale à Gwenaël Boué, dont l'intelligence aurait pu être déprimante s'il n'avait pas été aussi disponible pour apporter son aide et répondre à mes interrogations.
- plus généralement, les autres personnels de l'IMCCE, chercheurs, ITA et doctorants, qui m'ont permis de travailler dans de bonnes conditions.
- les personnels du SYRTE, en particulier Nicole Capitaine pour son aide au sujet de l'orientation de la Terre, Pierre Teyssandier pour les discussions concernant la relativité générale, et surtout Sébastien Bouquillon et Gérard Francou pour leur expertise dans la réduction des données Lunar Laser Ranging.
- Sergei Klioner, excellent pédagogue, pour sa capacité à expliquer presque simplement des concepts difficiles. Son aide a été précieuse, non seulement pour les échelles de temps, mais aussi pour les quelques aspects de la relativité générale implémentés dans INPOP.
- Anita Gomez, pour m'avoir accepté en DEA et permis de poursuivre avec cette thèse.
- à ma famille, pour m'avoir supporté, dans les deux sens du terme.

Table des matières

I	Modélisation des interactions	14
1	Interactions entre masses ponctuelles	15
1.1	Force de Newton	15
1.1.1	Cas particulier d'un corps et de son satellite	15
1.1.1.1	Interaction interne au système	16
1.1.1.2	Action d'un corps externe	16
1.2	Corrections relativistes	18
1.3	Barycentre du système et choix du repère	19
1.3.1	Cas d'interactions newtoniennes	19
1.3.2	Cas relativiste	20
1.3.3	Barycentre des éphémérides numériques DE	22
1.3.4	Intégration / Placement du Soleil	23
1.3.4.1	Méthode INPOP	23
1.3.4.2	Méthode des éphémérides DE	23
2	Interaction entre un corps non sphérique et un corps ponctuel	25
2.1	Expression du potentiel	25
2.2	Particularités de quelques harmoniques	27
2.2.1	Harmonique de degré 0	27
2.2.2	Harmoniques de degré 1	28
2.2.3	Harmoniques de degré 2	28
2.2.3.1	Lien avec la matrice d'inertie	28
2.2.3.2	Expression de Mac Cullagh	29
2.3	Calcul des forces exercées sur les corps	29
2.4	Moment exercé sur le corps étendu	30
2.4.1	Cas général - degré du potentiel quelconque	30
2.4.2	Moment de degré 2	31
3	Changements de repères	32
3.1	Intégration de l'orientation	32
3.1.1	Angles d'Euler et matrice de passage	32
3.1.2	Vecteur instantané de rotation	33
3.1.3	Equation d'Euler	33
3.1.4	Cas d'un corps rigide	34
3.1.5	Cas d'un corps déformable	34
3.1.6	Réduction des erreurs sur l'angle rapide de rotation propre ψ	35
3.1.6.1	Description de la méthode : introduction de $\tilde{\psi}$	35
3.1.6.2	Test dans un cas simple	35
3.2	Forçage par un modèle - orientation de la Terre	36
3.2.1	De l'ICRF à l'équateur moyen J2000	37

3.2.2	Précession	37
3.2.3	Nutation	38
4	Déformation des corps non ponctuels	40
4.1	Marées solides	40
4.1.1	Harmonique de degré $n=0$	41
4.1.2	Harmonique de degré $n=1$	41
4.1.3	Harmoniques de degrés $n \geq 2$	42
4.1.4	Expressions des variations des coefficients de degré 2	43
4.1.5	Effet de marées dissipatifs	43
4.1.6	Prise en compte dans DE405	43
4.1.7	Prise en compte dans DE200	44
4.2	Déformation due au spin	45
4.2.1	Harmonique de degré $n=0$	46
4.2.2	Harmonique de degré 2	46
4.2.3	Prise en compte avec dissipation	47
4.3	Influence dans les équations du mouvement	47
4.3.1	Calcul des forces	47
4.3.2	Équation d'Euler pour un corps déformable	48
	4.3.2.1 Changements dans la matrice d'inertie	48
	4.3.2.2 Dérivée de la matrice d'inertie	49
5	Interactions avec un corps à symétrie de révolution en rotation rapide	52
5.1	Forces et moments "rigides"	53
5.1.1	Élimination de l'angle rapide ψ - expressions dans \mathcal{B}_1	53
5.1.2	Expressions dans \mathcal{B}_0	54
	5.1.2.1 Harmonique C_{20}	54
	5.1.2.2 Harmonique C_{30}	54
	5.1.2.3 Harmonique C_{40}	54
5.1.3	Conclusion	55
5.2	Forces et moments dus à la déformation de la Terre	55
5.2.1	Variation de la matrice d'inertie dans \mathcal{B}_1	57
5.2.2	Variation de la matrice d'inertie dans \mathcal{B}_0	57
	5.2.2.1 Harmonique ΔC_{20}	58
	5.2.2.2 Autres harmoniques	58
5.2.3	Conclusion	59
5.3	Calcul de l'orientation du corps	59
5.3.1	Orientation moyennée sur l'angle rapide	59
5.3.2	Théorème du moment cinétique	59
	5.3.2.1 Corps soumis aux moments de degré 2	60
	5.3.2.2 Cas général	60
6	Estimation des déphasages	62
6.1	Positions relatives des corps dans l'ICRF à $t - \tau$	63
6.1.1	Méthode 1 : ordre 1 sur les coordonnées cartésiennes	63
6.1.2	Méthode 2 : ordre 0 sur les éléments elliptiques	64
6.1.3	Méthode 3 : ordre 2 sur les coordonnées cartésiennes	65
6.1.4	Méthode 4 : ordre 1 sur les éléments elliptiques	67
6.1.5	Méthode 5 : "mini" intégration du système Soleil-Planètes-Pluton-Lune	70
6.1.6	Méthode 6 : "mini" intégration du système Soleil-Terre-Lune	71
6.2	Repère sélénocentrique déphasé	72

6.2.1	Méthode 1 : premier ordre en τ sur les angles d'Euler	72
6.2.2	Méthode 2 : ordre 2 en τ sur les angles d'Euler via un mouvement libre .	73
6.2.3	Méthode 3 : ordre 2 en τ sur les angles d'Euler via le moment de la Terre	73
6.2.4	Methode 4 : intégration RK4 entre t et $t - \tau$	76
7	Interaction entre deux corps étendus non sphériques	78
7.1	Énergie potentielle d'interaction	79
7.1.1	Termes de degré 0	80
7.1.2	Termes de degré 1	80
7.1.3	Termes de degré 2	80
7.2	Calcul du moment	83
7.2.1	Moment pour deux solides quelconques	83
7.2.2	Lien avec DE405	85
8	Anneau d'astéroïdes	87
8.1	Corps dans le plan de l'anneau	87
8.1.1	Corps intérieur à l'anneau	88
8.1.2	Corps extérieur à l'anneau	89
8.2	Cas général d'un corps en dehors du plan de l'anneau	89
II	Réduction et ajustements aux données Laser Lune Ranging	91
9	Réduction des données laser Lune	92
9.1	Positionnement du point d'émission ou de réception	94
9.1.1	Coordonnées des stations	94
9.1.2	Tectonique des plaques	96
9.1.3	Effets de marées solides	97
9.1.3.1	Modèle simplifié	98
9.1.3.2	Modèle complet IERS 2003	98
9.1.3.3	Effet sur le LLR	98
9.1.4	Charge atmosphérique	99
9.1.5	Charge océanique	100
9.1.6	Marée polaire	102
9.1.7	Passage du GTRF au GCRF	103
9.1.8	Passage du GCRF à l'ICRF	105
9.2	Échelles de temps	106
9.2.1	Généralités	106
9.2.2	Intégration de TT-TDB dans INPOP	108
9.2.3	Comparaison avec TE405	110
9.2.4	Effets sur la réduction des données	111
9.3	Coordonnées des réflecteurs	111
9.3.1	Déplacement dû aux marées solides	112
9.3.2	Déformation due au spin	113
9.3.3	Passage du "LCRS" au BCRS	115
9.4	Délai induit par la déviation relativiste de la lumière	115
9.5	Délai troposphérique	116
9.6	Corrections de biais éventuels sur les mesures	118

10 Ajustements par moindres carrés	121
10.1 Généralités sur les moindres carrés	121
10.1.1 Linéarisation - équations normales	121
10.1.2 Matrices de variance-covariance et de corrélation	122
10.1.3 Décomposition en valeurs singulières	123
10.1.4 Pondérations des observations	123
10.2 Dérivées partielles	123
10.2.1 Calcul	123
10.2.2 Vérification des procédures avec des observations idéales	124
10.3 Sélection des paramètres à ajuster	126
10.3.1 Élimination des plus petites valeurs propres	126
10.3.2 Élimination des paramètres dégradant le moins les résidus	127
10.3.3 Élimination des paramètres fortement corrélés	128
10.3.4 Sélection selon le rapport σ/α	129
10.4 Tests de stabilité des paramètres	129
10.4.1 Suppression aléatoire de données	130
10.4.2 Suppression de données sur une période glissante	130
10.4.3 Test “bootstrap”	133
10.4.4 Conclusion	133
III Solutions INPOP successives	135
11 INPOP05	136
11.1 Construction d’INPOP05	136
11.1.1 INPOP04a-INPOP04b	137
11.1.2 Perturbations des astéroïdes	139
11.1.3 J_2 solaire	142
11.1.4 Déformation de la Lune	143
11.1.5 Problème du J_2 de la Lune	145
11.1.6 Marées solides terrestres	147
11.1.7 Orientation de la Terre	148
11.1.7.1 DE200	149
11.1.7.2 DE403	150
11.1.7.3 DE405	150
11.1.7.4 Tests de différents modèles de précession	151
11.1.7.5 Choix de la précession de Williams (1994)	156
11.1.8 Interaction forme-forme	156
11.2 Comparaisons INPOP05-DE405	158
11.3 Additifs à (Fienga et al., 2008)	164
11.3.1 Influence du placement du Soleil	164
11.3.2 Forçage par les astéroïdes	165
11.3.3 Combinaison Soleil actualisé - forçage des astéroïdes	168
12 INPOP06	170
12.1 Changements dans le modèle dynamique	170
12.1.1 Astéroïdes	170
12.1.1.1 Solution 1 - modèle complet relativiste et newtonien	170
12.1.1.2 Solution 2 - modèle complet newtonien et partiel relativiste	171
12.1.1.3 Solution 3 - modèle partiel relativiste et newtonien	172
12.1.1.4 Solution 4 - modèle partiel relativiste et newtonien	172

12.1.1.5	Comparaison des solutions et choix du modèle dynamique	172
12.1.2	Orientation de la Terre	174
12.1.2.1	Équation différentielle	175
12.1.2.2	Ajustement sur une théorie de l'orientation de la Terre	175
12.1.2.3	Comparaisons intégration / forçage	176
12.1.2.4	Variation séculaire du J_2	178
12.1.2.5	Ralentissement de la vitesse de rotation	179
12.1.3	Anneau d'astéroïdes	180
12.2	Ajustements	182
12.2.1	Aux données planétaires	182
12.2.2	Contraintes sur la Lune	182
13	INPOP08	185
13.1	Changements dans le modèle dynamique	185
13.1.1	Anneau d'astéroïdes	185
13.1.1.1	Dérive du du Système solaire	185
13.1.1.2	Intégration de ses équations du mouvement	186
13.1.1.3	Anneau solidaire du Soleil	187
13.1.2	Orientation de la Terre	189
13.1.2.1	Définition du pôle REN2000-P03	189
13.1.2.2	Introduction de la précession géodésique	190
13.1.2.3	Prise en compte des moments dus aux J_3 et J_4	192
13.1.2.4	Conclusion	192
13.1.3	Orientation de la Lune	194
13.2	Ajustement aux données LLR	195
13.2.1	Sélection et pondération des observations	196
13.2.2	Contraintes sur les dérives des stations	199
13.2.3	Contraintes apportées par les observations planétaires	201
13.2.4	Élimination successive des paramètres mal déterminés	202
13.3	Choix de la solution INPOP08	205
13.3.1	Valeurs des paramètres	206
13.3.1.1	Paramètres dynamiques	206
13.3.1.2	Coordonnées des réflecteurs	208
13.3.1.3	Coordonnées des stations	210
13.3.1.4	Nombres de Love h_2 et k_2 de la Lune	211
13.3.1.5	Biais	212
13.3.2	Résidus INPOP08	214
13.4	Critiques envers la solution	214
13.4.1	Ecart-types des résidus Apollo	214
13.4.2	Signaux du CERGA et d'Haleakala	217
13.4.2.1	Réduction des données LLR avec des solutions externes	218
13.4.2.2	Résidus publiés d'autres solutions	221
13.4.2.2.1	DE403	222
13.4.2.2.2	DE421	222
13.4.2.2.3	EM-3	223
13.4.2.2.4	S2000	226
13.4.2.3	Origine géophysique?	227

IV	Annexes	230
A	Dérivée seconde de la position du barycentre relativiste	231
B	Polynômes de Legendre et fonctions associées de Legendre	238
B.1	Polynômes de Legendre	238
B.1.1	Liens avec le développement du potentiel	238
B.1.1.1	Expression sous forme de polynômes	238
B.1.1.2	Lien avec le potentiel d'un corps non ponctuel	239
B.1.2	Propriétés des polynômes de Legendre	239
B.1.2.1	Orthogonalité	239
B.1.2.2	Valeurs en 1 et -1	240
B.1.2.3	Relations de récurrence	240
B.1.2.4	Expressions jusqu'au degré 5	241
B.1.2.5	Dérivées	241
B.2	Fonctions associées de Legendre	243
B.2.1	Définition	243
B.2.2	Relations de récurrence	243
B.2.3	Dérivées	243
B.2.4	Expression en coordonnées cartésiennes	243
C	Liens entre les coefficients du potentiel et la matrice d'inertie	245
D	Coefficients pour les développements des angles de précession	247
E	Vérification de la cohérence des divers modèles de marées	248
E.1	Effets de marées DE405	248
E.1.1	Déformation ΔC_{20}	248
E.1.2	Déformations ΔC_{21} et ΔS_{21}	249
E.1.3	Déformations ΔC_{22} et ΔS_{22}	250
E.1.4	Conclusion	250
E.2	Effets de marées DE200	250
F	Transformation des coefficients du potentiel par changement de repère	253
F.1	Cas général - coefficients de degré quelconque	253
F.2	Applications	254
F.2.1	Rotation d'axe \vec{I}_2 et d'angle α	254
F.2.2	Rotation d'axe \vec{J}_2 et d'angle α	256
F.2.3	Rotation d'axe \vec{K}_2 et d'angle α	257
G	Coefficients des marées océaniques	258
H	Paramètres des ajustements	259
I	Lien en corrélation et erreurs formelles ?	260

Bref historique

Avant les années 1960 n'existaient que des solutions analytiques, obtenues par résolution des équations de Lagrange (Landau & Lifchitz, 1994). Dans ces solutions, les variables décrivant l'état du Système solaire sont exprimées sous forme de fonctions analytiques du temps, comme par exemple (Bretagnon, 1974; Laskar, 1985, 1986). Lorsque des valeurs numériques sont affectées à certains paramètres avant intégration des équations, les solutions sont dites semi-analytiques. C'est le cas de la théorie planétaire VSOP82 Bretagnon (1982) ou lunaire ELP2000 (Chapront-Touzé & Chapront, 1983).

Ces solutions sont, aujourd'hui encore, très utiles. Elles permettent par exemple un accès direct aux différentes fréquences présentes dans les variables, et facilitent ainsi l'étude des résonances et de la dynamique du Système solaire. D'autre part, elles peuvent servir à la construction de solutions pour l'orientation de la Terre. Ainsi SMART97 (Bretagnon et al., 1998), REN2000 (Souhay et al., 1999) et RDAN97 (Roosbeek & Dehant, 1998) s'appuient sur les théories planétaires VSOP82 (Bretagnon, 1982) ou VSOP87 (Bretagnon & Francou, 1988) et lunaire ELP2000 (Chapront-Touzé & Chapront, 1983). Ces solutions pour une Terre rigide sont ensuite corrigées par l'application d'une fonction de transfert, comme (Mathews et al., 2002) ou (Wahr, 1981), pour tenir compte de sa non-rigidité.

Avant 1964, on ne disposait que d'observations optiques des positions des planètes (mesures angulaires). Avec les premières observations de distance (radar sur Vénus, laser sur la Lune, Viking sur Mars), dont la précision était selon Newhall et al. (1983) parfois améliorée de 4 ordres de grandeur par rapport aux observations optiques, il est devenu nécessaire de développer des solutions numériques, mieux adaptées à la prise en compte d'effets dynamiques complexes.

La première solution numérique largement diffusée est DE102 (Development Ephemeris n° 102), développée au Jet Propulsion Laboratory (JPL) et décrite dans (Newhall et al., 1983). Dans cet article sont mentionnées deux autres solutions antérieures, DE96 et DE97 (Standish, 1976). DE102 donne accès aux coordonnées des vecteurs position/vitesse (barycentriques ou relatives des corps) du Soleil, des 8 planètes de Mercure à Neptune, de Pluton et de la Lune, sur une période de plus de 4000 ans. Les librations de la Lune sont intégrées en même temps que les équations du mouvement des corps, mais ne sont cependant pas diffusées. DE118 de Newhall et al. (1983) est ensuite construite sur le même modèle dynamique que DE102, et réajustée sur de nouvelles observations. Enfin, DE200 (Newhall et al., 1983) est une simple rotation de DE118 de l'équateur moyen B1950 à l'équateur moyen J2000. Cette dernière solution a été la base de l'“Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac” de Seidelmann (1992).

Parue en 1995, DE403 de Standish et al. (1995) améliore le modèle dynamique commun à DE102/DE200, en tenant compte des perturbations de 300 astéroïdes au lieu de 5. Le modèle de marées solides générées sur la Terre est affiné et la Lune est également considérée comme déformable. DE405 de Standish (1998) ajoute la prise en compte de l'aplatissement du Soleil. Les solutions suivantes DE409 (Standish, 2003a) et DE410 (Standish, 2003b) reprenaient le même modèle que DE405 et étaient spécifiquement conçues pour les missions MER vers Mars et Cassini vers Saturne. DE414 (Konopliv et al., 2006; Standish, 2006) ajoute la modélisation d'un anneau d'astéroïdes pour tenir compte de l'effet global de tous ceux dont les perturbations ne sont pas individuellement prises en compte. Les solutions DE409 à DE414 ne sont pas ajustées aux observations Lunar Laser Ranging (et il est probable que DE405 ne le soit pas non plus). Il faut attendre DE418 (Folkner et al., 2007; Williams & Folkner, 2007), conçue pour le projet New Horizons vers Pluton, pour que ces données contraignent à nouveau la solution planétaire et lunaire. Le modèle dynamique est amélioré avec la présence d'un noyau interne à la Lune. DE421 (Folkner et al., 2008; Williams et al., 2008) conserve le même modèle dynamique que DE418 mais est ajustée sur un nombre accru de données. Enfin, la solution la plus récente du JPL est DE423, disponible sur le site ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets et décrite en partie dans (Konopliv et al., 2010, submitted).

Parallèlement, l'Institut d'Astronomie Appliquée de l'Académie Russe des Sciences construit également des solutions numériques depuis 1974, avec la parution en 1987 de la solution EPM88 (Krasinsky et al., 1993; Pitjeva, 1993). D'après Pitjeva (2001), la principale différence avec DE200 est dans le nombre de données sur lesquelles elle est ajustée, couvrant un intervalle de temps plus important. Les solutions suivantes EPM98 et EPM2000 font l'objet de publications en russe. Elles sont cependant brièvement décrites dans (Pitjeva, 2001). EPM98 présente un modèle dynamique très proche de DE403, y compris dans la manière de prendre en compte les perturbations des astéroïdes, tandis que EPM2000 intègre les équations du mouvement des 300 astéroïdes, sans se contenter de réinjecter leurs trajectoires déterminées avec une solution préliminaire. Les solutions EPM2004 (Pitjeva, 2005b), EPM2006 (Pitjeva, 2008) et EPM2008 (Pitjeva, 2009) sont des évolutions de EPM2000 (ajout d'un astéroïde, réajustement sur l'ensemble des données disponibles à la date de parution). Actuellement, seules les éphémérides EPM2004 et EPM2008 sont disponibles sur le site quasar.ipa.nw.ru (il manque cependant les librations de la Lune).

Enfin, Moshier (1992) a lui aussi construit une solution planétaire dont le modèle était repris de celui de DE200. Son objectif était de comparer son intégration numérique sur 7000 ans à la solution semi-analytique ELP 2000-85 de Chapront-Touze & Chapront (1988), et de s'assurer que cette dernière ne présentait pas les écarts observés avec DE102. Le code source du programme développé par S. Moshier a été utilisé lors des travaux préliminaires à la construction d'INPOP.

Utilité des solutions planétaires/lunaires

L'intérêt de construire des solutions planétaires est multiple :

- pour la préparation des missions d'exploration du Système solaire, il est indispensable de savoir prévoir les positions des corps. Ainsi, la sonde Cassini-Huyghens, lancée en 1997, a profité de l'assistance gravitationnelle de Vénus, la Terre et Jupiter avant d'arriver en orbite autour de Saturne près de 7 ans plus tard. Une bonne prévision des orbites permet alors de limiter les manœuvres et donc la consommation de carburant.
- une solution planétaire est indispensable à l'exploitation de certaines observations. Ainsi, pour détecter la présence d'une planète extra-solaire par la méthode des vitesses radiales, on observe l'étoile autour de laquelle elle est en orbite. En mesurant le décalage des raies spectrales, on en déduit sa vitesse de rapprochement ou d'éloignement par rapport à l'observateur terrestre. Pour isoler la partie due au mouvement de la planète, il est donc indispensable de corriger cette mesure de la vitesse de la Terre.
- la disponibilité d'observations de plus en plus précises nécessite de prendre en compte des modèles physiques de plus en plus fins et permet d'en améliorer la connaissance. Ainsi, l'analyse des perturbations dans la trajectoire d'Uranus a permis à Adams et Le Verrier de découvrir Neptune. De même, l'avance du périhélie de Mercure conforte la théorie de la relativité générale. Plus proche de nous, les mesures laser sur la Lune, en apportant entre autres des contraintes sur les librations de la Lune, peuvent renseigner sur sa structure interne. De même, des données précises apportées par des sondes en orbite autour de Mars permettent de mieux déterminer les masses de certains astéroïdes qui en influencent la trajectoire.
- enfin, comme l'a montré Laskar (1989), le Système solaire est chaotique, avec des incertitudes sur les trajectoires décuplées tous les 10 millions d'années. Ainsi, une erreur de 15 mètres sur la position initiale de la Terre se propage après 100 millions d'années jusqu'à plus de 150 millions de kilomètres, soit la distance entre la Terre et le Soleil. La solution à long terme de l'insolation de la Terre La2004 de Laskar et al. (2004), à la base de la définition de l'échelle de temps géologique GTS2004 (Gradstein et al., 2005), est valable sur 40 millions d'années. Pour l'étendre jusqu'au Paléogène, soit jusque 65 millions d'années, un gain en précision de deux ordres de grandeur sur les incertitudes initiales est donc requis. Et pour y arriver, il est nécessaire d'améliorer d'autant les éphémérides à court

terme, sur lesquelles La2004 est ajustée.

Étapes de la construction d'une solution planétaire/lunaire

La construction d'une solution INPOP nécessite l'enchaînement de plusieurs étapes, illustrées par le schéma de la figure 1.

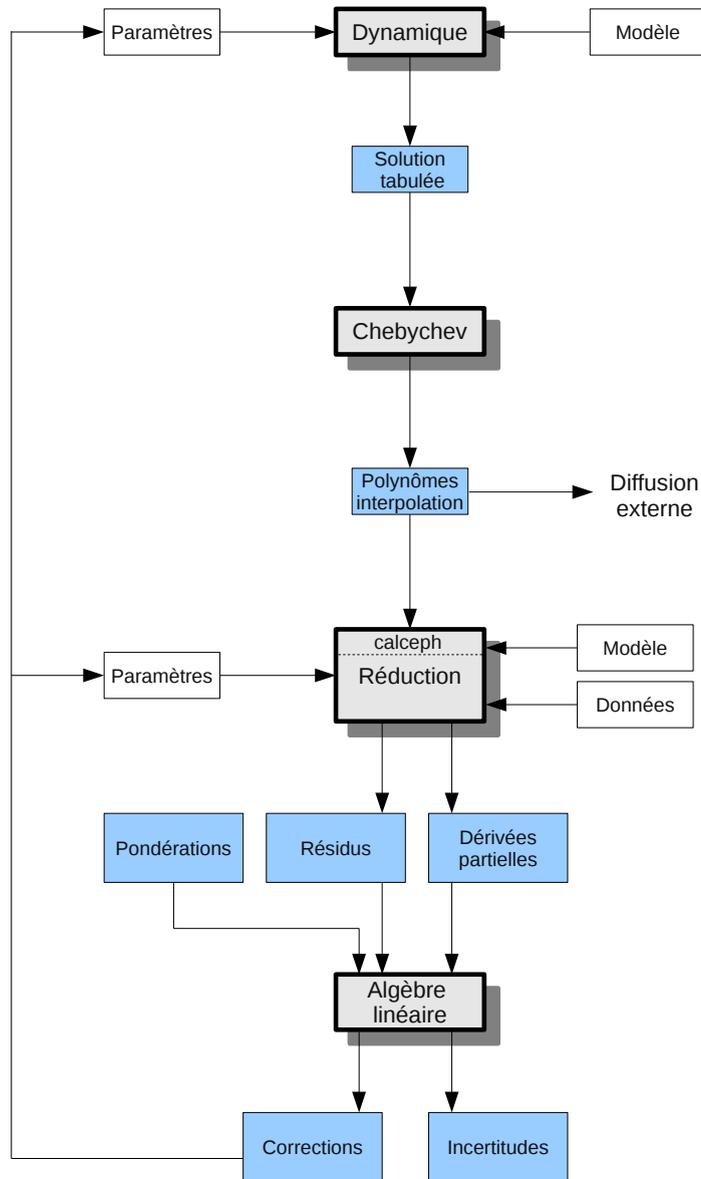


FIGURE 1 – Schéma des différentes étapes dans la construction d'une solution planétaire.

La première, correspondant au cadre “Dynamique”, modélise les trajectoires des corps. Ces dernières sont obtenues par intégration numérique d'une équation différentielle du premier ordre du type $Y' = F(t, Y(t))$. Y est appelé vecteur d'état et contient les variables qui décrivent le sys-

tème (vecteurs position/vitesse des corps, leurs orientations, ...). À partir d'une valeur initiale $Y_0 = Y(t = 0)$, on détermine les interactions (forces et moments) qui s'exercent entre les corps. Du principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, on déduit leurs vecteurs accélérations \vec{a} à partir de leurs masses m et des forces \vec{F} . De même, le théorème du moment cinétique $\vec{\sigma} = \sum \vec{M}$ permet de déterminer la dérivée de ce dernier à partir de la somme des moments.

Même si on tient compte d'effets relativistes dans le modèle dynamique (voir les paragraphes 1.2 et 13.1.2) et dans le modèle de réduction des données (voir le paragraphe 9.4), INPOP reste dans un cadre classique, dans le sens où la relativité générale n'y est pas introduite comme une déformation de l'espace-temps, mais par l'ajout de forces et de moments supplémentaires dans les équations du mouvement, ou de termes correctifs dans la propagation de la lumière dans la réduction des données.

Le modèle des interactions, étudié dans la première partie de cette étude, définit alors la fonction F . L'équation différentielle $Y' = F(t, Y(t))$ est intégrée numériquement, avec une méthode d'Adams (Hairer et al., 1987) par exemple, à partir de Y_0 pour en déduire $Y(h)$. h est le pas d'intégration ; il peut être positif ou négatif. De proche en proche, on détermine ensuite les valeurs du vecteur d'état $Y_i = Y(ih)$ pour tout i dans \mathbb{N} : on obtient donc une solution tabulée, c'est-à-dire valable pour des valeurs discrètes du temps. Cette solution tabulée est ce que l'on obtient en sortie du programme correspondant au cadre "Dynamique". Il nécessite en entrée deux fichiers de configuration. Le premier contient la définition du modèle dynamique : quels astéroïdes sont pris en compte, si on tient compte de la relativité, quelles méthodes sont utilisées pour l'estimation des déphasages, ... Le second fichier contient les valeurs de tous les paramètres qui interviennent dans le modèle dynamique : les conditions initiales du système, les "masses" des corps, les nombres de Love et temps de déphasages intervenant dans les effets de marée, ...

À partir de la solution tabulée, on construit des polynômes d'interpolation de Tchebychev, qui permettent l'accès à la solution pour des valeurs du temps qui ne sont pas forcément multiples du pas d'intégration h . C'est le rôle du programme correspondant au cadre "Tchebychev" du schéma de la figure 1. Là encore, un fichier de configuration permet d'imposer, en fonction des corps, le degré des polynômes et la longueur des intervalles sur lesquels ils sont définis. Ces valeurs sont choisies de manière à conserver les erreurs d'interpolation inférieures à une tolérance : 10 mm pour les planètes intérieures, 10 cm pour les planètes extérieures, 1 mm pour la Terre et 0.1 mm pour la Lune. Ainsi, les variables qui présentent de courtes périodes (comme les coordonnées géocentriques de la Lune) sont approchées par des polynômes de degrés élevés (18 par exemple) définis sur des intervalles réduits (8 jours par exemple). Les variables présentant des évolutions à longues périodes (par exemple Pluton) peuvent se contenter de faibles degrés (6 par exemple) et d'intervalles plus longs (32 jours, voire davantage). Les coefficients de ces polynômes sont stockés dans un fichier binaire, dont l'exploitation est possible avec la librairie `calceph` (développée par M. Gastineau et disponible à l'adresse www.imcce.fr/inpop/calceph). C'est ce fichier binaire qui est diffusé sur le site www.imcce.fr/inpop.

L'accès à l'état du système pour toute valeur du temps permet ensuite de "réduire les données", c'est-à-dire de confronter la solution planétaire aux observations. Ces dernières peuvent être des mesures de temps de propagation d'un signal (radar, laser, transpondeur à bord d'une sonde), de positions apparentes (ascension droite, déclinaison), de vitesse, ... C'est le rôle des programmes correspondant au cadre "Réduction" (dans INPOP, les observations planétaires et Lunar Laser Ranging sont réduites séparément). Celui spécifique aux observations LLR nécessite la présence de 3 fichiers d'entrée. Le premier contient les données observationnelles : la date de l'observation, la valeur de la mesure, la pression atmosphérique, température, taux d'humidité. Un exemple pour le LLR est donné sur le site www.physics.ucsd.edu/~tmurphy/apollo. Le second, comme pour la partie dynamique, définit le modèle de réduction utilisé (voir le chapitre 9) : si on souhaite tenir compte de la tectonique des plaques, quel modèle utiliser pour les marées

solides. . . Enfin, le troisième contient les valeurs des paramètres qui interviennent dans le modèle de réduction, comme les coordonnées des réflecteurs sur la Lune, celles des stations. . . En sortie, on obtient des écarts entre la mesure effectuée et son calcul à partir de la solution planétaire, que l'on appelle O-C (observation moins calcul) ou résidu. Ce même programme permet aussi de calculer la matrice des dérivées partielles par rapport à chacun des paramètres que l'on souhaite ajuster.

Enfin, lors d'une quatrième et dernière étape, on ajuste par moindres carrés (voir le chapitre 10) les paramètres intervenant dans les modèles dynamique et de réduction. Il s'agit, pour l'ajustement aux données LLR, d'un programme d'algèbre linéaire qui, à partir des résidus, de la matrice des dérivées partielles et de pondérations que l'on affecte à chacune des observations, détermine les incertitudes des différents paramètres ainsi que les modifications à y apporter. Ces dernières peuvent alors être réinjectées dans les parties dynamique et réduction. L'objectif est de minimiser les résidus afin que la solution planétaire représente au mieux la réalité.

On voit donc qu'une solution planétaire est caractérisée par :

- un modèle dynamique
- un modèle de réduction des données
- un ensemble de valeurs de paramètres qui interviennent dans les modèles

Les valeurs des paramètres ajustées aux observations ne peuvent pas être dissociées des modèles dynamique et de réduction. Par exemple (voir le paragraphe 13.1.2.2), la dérive en précession de la Terre induite par la précession géodésique peut être en grande partie compensée par un changement dans le rapport C/MR^2 (moment d'inertie divisé par la masse et le carré équatorial moyen de la Terre). Les valeurs dépendent également des observations prises en compte, de leurs pondérations et de la méthode d'ajustement.

Pour INPOP, l'ensemble des programmes intervenant dans les différentes étapes sont conçus de manière à être facilement paramétrables avec des fichiers de configuration. Ainsi, des modifications peuvent être apportées à la fois dans les modèles et dans les valeurs des paramètres sans avoir à recompiler les codes sources.

Dans cette étude sont décrits les modèles dynamiques (et leurs ajustements au LLR s'il y a lieu) de trois solutions successives :

- INPOP05 (voir le chapitre 11) est construite de manière à avoir un modèle dynamique aussi proche que possible de DE405, avec les mêmes valeurs de paramètres dynamiques. Elle est brièvement décrite dans (Fienga et al., 2008) mais n'a pas été diffusée.
- INPOP06 (voir le chapitre 12) voit son modèle dynamique amélioré. Ses paramètres sont ensuite ajustés aux observations planétaires. Sa distance Terre-Lune est cependant contrainte par celle de DE405. Elle est aussi décrite dans (Fienga et al., 2008) et a été diffusée sur le site www.imcce.fr/inpop
- enfin, INPOP08, dont la description au chapitre 13 est aussi valable pour INPOP10a récemment diffusée, présente d'autres améliorations de son modèle dynamique. Ses paramètres sont ajustés à l'ensemble des observations, planétaires et LLR. Il s'agit donc d'une solution indépendante du JPL. La version décrite ici est en réalité une évolution de (Fienga et al., 2009) ; cette dernière a été diffusée sur le site www.imcce.fr/inpop.

Première partie

Modélisation des interactions

Chapitre 1

Interactions entre masses ponctuelles

A part pour les planètes et leurs satellites, les distances qui séparent les corps du Système solaire sont en général grandes devant leurs dimensions. En première approximation, ils peuvent donc être vus les uns des autres comme des masses ponctuelles.

1.1 Force de Newton

Il s'agit de la force principale qui régit les mouvements dans le Système solaire, découverte par Newton (1687). Si on se limite à deux corps, elle impose des trajectoires selon des coniques (ellipse, parabole ou hyperbole).

Soient C_i et C_j , deux corps ponctuels de masses respectives m_i et m_j . On appelle :

- G , la constante de la gravitation universelle
- \vec{r}_i , le vecteur position du corps i , \vec{r}_j , celui du corps j
- $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$, la distance entre les corps i et j

La force newtonienne exercée par j sur i est alors :

$$\vec{F}_{i \leftarrow j} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (1.1)$$

En effectuant la somme sur j , on calcule la force exercée sur i par l'ensemble des corps :

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = m_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (1.2)$$

Par la suite, on notera μ_j le produit de la constante de la gravitation par la masse m_j d'un corps. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen, on obtient alors l'accélération du corps i :

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (1.3)$$

1.1.1 Cas particulier d'un corps et de son satellite

On s'intéresse ici à un satellite en orbite autour d'une planète, quand leur distance relative est petite devant celles qui les séparent des autres corps. C'est par exemple le cas de la Lune autour de la Terre, éloignées de 380 000 km, alors que le Soleil est à près de 150 000 000 km et que Vénus ne s'approche pas à moins de 45 000 000 km. Au lieu de repérer la position du satellite par rapport au barycentre du Système solaire (BSS), il peut être plus pratique et surtout plus précis de la repérer par rapport à la celle de la planète. Mais dans ce cas, des développements supplémentaires

sont nécessaires pour conserver une bonne précision dans le calcul des interactions. C'est l'objet de ce paragraphe.

Dans ce qui suit, on note \vec{r}_1 et \vec{r}_2 respectivement les vecteurs BSS-Planète et BSS-Satellite. Le vecteur Planète-Satellite s'écrit donc $\vec{u} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dans le vecteur d'état, on préfère alors introduire \vec{u} à la place de \vec{r}_2 , qui pourra néanmoins être utilisé pour d'autres interactions, mais ne sera plus qu'un intermédiaire de calcul déterminé à partir de \vec{r}_1 et \vec{u} .

On souhaite donc calculer la dérivée seconde du vecteur \vec{u} lorsqu'on considère toutes les interactions newtoniennes entre la planète, son satellite et les autres corps. Connaissant les forces qui s'exercent sur la planète d'une part, et sur le satellite d'autre part, on peut donc en déduire leurs vecteurs accélérations barycentriques du système Solaire. On en déduit alors $\ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$.

Remarque : plutôt que comme un changement de référentiel (intégration des équations du mouvement de la Lune dans un repère géocentrique non galiléen), il est préférable de considérer ces développements comme un changement de variables de (\vec{r}_1, \vec{r}_2) en (\vec{r}_1, \vec{u}) . Ainsi, $\ddot{\vec{u}}$ reste déterminé à partir des expressions de $\ddot{\vec{r}}_2$ et $\ddot{\vec{r}}_1$ obtenues par projection du principe fondamental de la dynamique dans un repère galiléen. Ces deux manières de procéder conduiraient ici au même résultat. Mais la prise en compte des corrections relativistes du paragraphe 1.2 dans un repère non galiléen s'avérerait plus complexe.

1.1.1.1 Interaction interne au système

On considère l'interaction newtonienne entre la planète et son satellite :

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \mu_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \text{ et } \ddot{\vec{r}}_1 = \mu_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \quad (1.4)$$

On obtient alors la dérivée seconde de \vec{u} due à l'interaction entre la planète et son satellite :

$$\ddot{\vec{u}} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{\|\vec{u}\|^3} \vec{u} \quad (1.5)$$

Il n'y a ici aucun développement supplémentaire à mener pour améliorer la précision numérique.

1.1.1.2 Action d'un corps externe

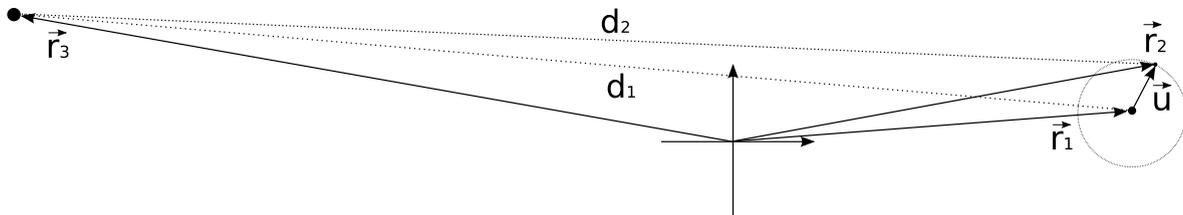


FIGURE 1.1 – Schéma des interactions entre un corps perturbateur (situé en \vec{r}_3), une planète (située en \vec{r}_1) et son satellite (situé en \vec{r}_2).

On considère ici la perturbation d'un corps externe au système Planète-Satellite (Soleil, autre planète, astéroïde...). On note \vec{r}_3 son rayon vecteur par rapport au barycentre du Système solaire et μ_3 le produit de sa masse par la constante de la gravitation G . On a alors les vecteurs accélérations du satellite et de la planète par rapport au barycentre du Système solaire :

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \mu_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \text{ et } \ddot{\vec{r}}_1 = \mu_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \quad (1.6)$$

On en déduit la dérivée seconde du vecteur \vec{u} :

$$\ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \mu_3 \left(\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) \quad (1.7)$$

Dans la mesure où la distance entre la planète et son satellite est bien plus faible que celle entre la planète (ou le satellite) et le corps perturbateur, les quantités $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ et $\vec{r}_3 - \vec{r}_2$ sont à la fois grandes et voisines. Et lorsqu'on soustrait l'une à l'autre, on génère des erreurs numériques importantes. On souhaite donc développer cette expression de manière à éviter une différence entre deux quantités voisines. Dans ce qui suit, on note $d_1 = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|$ la distance entre le corps perturbateur et la planète, et $d_2 = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|$ celle entre le corps perturbateur et le satellite.

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{u}} &= \mu_3 \left(\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{d_2^3} - \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{d_1^3} \right) \\ &= \mu_3 \left(\left[\frac{1}{d_2^3} - \frac{1}{d_1^3} \right] (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{d_2^3} \right) \\ &= \mu_3 \left(\frac{d_1^3 - d_2^3}{d_1^3 d_2^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{\vec{u}}{d_2^3} \right) \\ &= \mu_3 \left(\frac{(d_1 - d_2)(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{d_1^3 d_2^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{\vec{u}}{d_2^3} \right) \\ &= \mu_3 \left(\frac{(d_1^2 - d_2^2)(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{(d_1^3 d_2^3)(d_1 + d_2)} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{\vec{u}}{d_2^3} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans cette expression, la quantité critique est la différence $d_1^2 - d_2^2$:

$$\begin{aligned} d_1^2 - d_2^2 &= \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^2 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2 \\ &= \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^2 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1 + \vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 \\ &= -\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 - 2(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= 2(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \cdot \vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \\ &= (2(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \vec{u}) \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Finalement, on obtient l'expression suivante pour la dérivée du vecteur Planète-Satellite due à la perturbation d'un corps extérieur au système :

$$\ddot{\vec{u}} = \frac{\mu_3}{d_2^2} \left(\frac{[(2(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \vec{u}) \cdot \vec{u}] [d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2]}{d_1^3 (d_1 + d_2)} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \vec{u} \right) \quad (1.10)$$

Cette expression est plus complexe et coûteuse en temps de calcul que 1.7, mais évite la soustraction de deux quantités voisines.

Afin d'évaluer le gain en précision de ce développement, on extrait de la solution DE405 les positions barycentriques du Soleil, des planètes et de Pluton, ainsi que la position géocentrique de la Lune. On effectue ensuite un calcul en quadruple précision de l'accélération géocentrique de la Lune due aux interactions newtoniennes entre les corps. Peu importe ici la méthode employée, classique 1.7 et précise 1.10 ne diffèrent que de 10^{-34} UA/j², soit environ 2×10^{-34} m/s² pour une valeur de l'ordre de quelques 10^{-4} UA/j². Ce calcul sert de référence. Puis deux autres calculs de cette même accélération sont menés en double précision, l'un avec la méthode classique 1.7, l'autre avec la précise 1.10. Ils sont alors comparés à celui effectué en quadruple précision. Les courbes de la figure 1.2 montrent l'amélioration apportée par la méthode précise 1.10 (courbe grise), elle permet de gagner un facteur 100 par rapport à la méthode classique 1.7 (courbe noire).

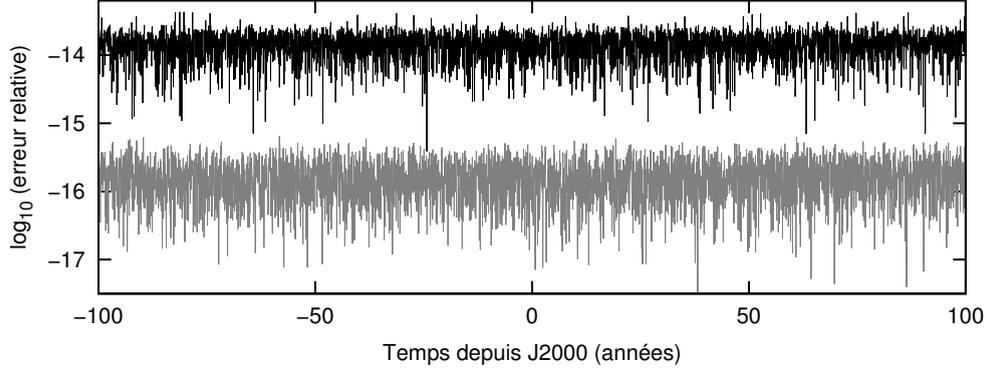


FIGURE 1.2 – Gain en précision sur la dérivée seconde du vecteur Terre-Lune due aux interactions newtoniennes des autres corps. Un calcul $\ddot{\vec{a}}_0$ effectué en quadruple précision sert de référence. Puis, deux autres effectués en double précision, $\ddot{\vec{a}}_1$ avec l’expression 1.7, $\ddot{\vec{a}}_2$ avec l’expression 1.10. La courbe noire représente les erreurs relatives $\|\ddot{\vec{a}}_0 - \ddot{\vec{a}}_1\|/\|\ddot{\vec{a}}_0\|$, la grise celles $\|\ddot{\vec{a}}_0 - \ddot{\vec{a}}_2\|/\|\ddot{\vec{a}}_0\|$.

1.2 Corrections relativistes

On tient compte de corrections relativistes via une modélisation post-newtonienne paramétrée. En se limitant aux termes d’ordre $1/c^2$, (Moyer, 1970) donne l’accélération du corps i due aux autres corps :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_i = & \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left[-2(\beta + \gamma) \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - (2\beta - 1) \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \|\vec{v}_i\|^2 + (1 + \gamma) \|\vec{v}_j\|^2 \right. \\
& - 2(1 + \gamma) \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j - \frac{3}{2} \left(\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{v}_j}{r_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \ddot{\vec{r}}_j \left. \right] (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \\
& + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot ((2 + 2\gamma)\vec{v}_i - (1 + 2\gamma)\vec{v}_j)] (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \\
& + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{\ddot{\vec{r}}_j}{r_{ij}}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Cette expression est identique à (Newhall et al., 1983, eq. 1). Si on y impose $\beta = \gamma = 1$, valeurs de la relativité générale, on retrouve (Misner et al., 1973, eq. 39.64) ou (Estabrook, 1969, eq. 3) en y faisant tendre ω vers l’infini.

Les vecteurs \vec{r}_i et \vec{v}_i sont respectivement les positions et vitesses par rapport au barycentre (au sens relativiste) du système. Elles peuvent différer des positions et vitesses dans le repère fixe des intégrations si son origine n’est pas confondue avec le barycentre. En effet, la seule contrainte sur le repère est qu’il doit être inertiel (pour pouvoir projeter la relation fondamentale de la dynamique sans se soucier des termes d’entraînement), mais son origine peut être quelconque. Ce n’est pas vraiment un problème pour les positions ; comme pour les interactions newtoniennes, seules les positions relatives (invariantes par changement d’origine du repère) interviennent dans les corrections relativistes. Ce n’est pas le cas des vitesses, et il convient de faire ici la distinction entre \vec{v}_i , la vitesse barycentrique, et \vec{r}_i , la vitesse par rapport à l’origine du repère. Au paragraphe 1.3.2 est décrit le choix du repère qui permet de s’affranchir de cette distinction.

À noter également la présence de termes $\ddot{\vec{r}}_j$ qui font que $\ddot{\vec{r}}_i$ est défini de manière implicite. Dans la mesure où on se limite à un développement en $1/c^2$, on néglige les termes en $1/c^4$ et dans

le calcul de $\ddot{\vec{r}}_j$, seul le terme newtonien vu en (1.3) peut être pris en compte. La connaissance des vecteurs \vec{r}_j et $\dot{\vec{r}}_j$ suffit alors pour déterminer explicitement $\ddot{\vec{r}}_i$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_i &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left[-2(\beta + \gamma) \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - (2\beta - 1) \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \|\vec{v}_i\|^2 + (1 + \gamma) \|\vec{v}_j\|^2 \right. \\
&\quad \left. - 2(1 + \gamma) \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j - \frac{3}{2} \left(\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{v}_j}{r_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right] (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \\
&\quad + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot ((2 + 2\gamma)\vec{v}_i - (1 + 2\gamma)\vec{v}_j)] (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \\
&\quad + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_j}{r_{ij}} \frac{\mu_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \tag{1.12}
\end{aligned}$$

1.3 Barycentre du système et choix du repère

Le but de ce paragraphe est de choisir judicieusement le repère de la solution dans lequel seront exprimés les vecteurs position-vitesses des corps. À la date origine des intégrations $t = 0$, la géométrie du système (conditions initiales) est donnée dans un repère inertiel pour l'instant quelconque, noté \mathcal{R} . L'objectif ici est de trouver un repère particulier \mathcal{R}_0 , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} (donc inertiel), mieux adapté à l'étude de l'évolution du système.

Un tel changement de repère s'effectue en modifiant les conditions initiales des corps, en translatant leurs positions d'un même vecteur \vec{x} et leurs vitesses d'un même vecteur \vec{y} . La géométrie du système, c'est-à-dire les positions et vitesses relatives, est ainsi conservée.

1.3.1 Cas d'interactions newtoniennes

On considère ici un système de n masses ponctuelles, soumises aux perturbations mutuelles newtoniennes telles que définies en (1.3). On peut remarquer que les accélérations newtoniennes sont indépendantes de l'origine du repère, puisque fonctions uniquement des positions relatives des corps.

Soit le vecteur \vec{u} défini par :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{r}_i \tag{1.13}$$

Il s'agit, au facteur $\sum \mu_i$ près, du vecteur position du barycentre dans le repère quelconque \mathcal{R} . Les (μ_i) étant indépendants du temps, en dérivant deux fois \vec{u} et en remplaçant les $\ddot{\vec{r}}_i$ par leur expression (1.3), on obtient :

$$\ddot{\vec{u}} = \sum_{i=1}^n \mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \tag{1.14}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) + \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{1.15}$$

$$= \vec{0} \tag{1.16}$$

$\ddot{\vec{u}}$ est donc nul, \vec{u} est une fonction affine du temps et on retrouve un résultat classique : le barycentre d'un système isolé a un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.

$$\text{Pour tout } t, \vec{u}(t) = \vec{u}(0) + t \dot{\vec{u}}(0) \tag{1.17}$$

Or, en changeant l'origine du repère, on peut choisir \mathcal{R}_0 tel que à l'instant $t = 0$, $\vec{u}(0) = \dot{\vec{u}}(0) = \vec{0}$. C'est-à-dire qu'on choisit l'origine de \mathcal{R}_0 confondue avec le barycentre du système à l'instant initial des intégrations. Il suffit pour cela de poser :

$$\vec{x} = -\frac{\sum_i \mu_i \vec{r}_i}{\sum_i \mu_i} \text{ et } \vec{y} = -\frac{\sum_i \mu_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i \mu_i} \quad (1.18)$$

On a alors dans \mathcal{R}_0 , pour tout instant t , $\vec{u}(t) = \vec{0}$. Le barycentre du système, qui avait un mouvement rectiligne uniforme dans \mathcal{R} , reste donc confondu avec l'origine du repère \mathcal{R}_0 au cours du temps. Les courbes de la figure 1.3 permettent de vérifier numériquement ce résultat, avec un mouvement du barycentre inférieur à 10^{-20} mm sur 100 ans (les faibles dérives en x et y ne sont dues qu'aux erreurs numériques lors des changements de repère).

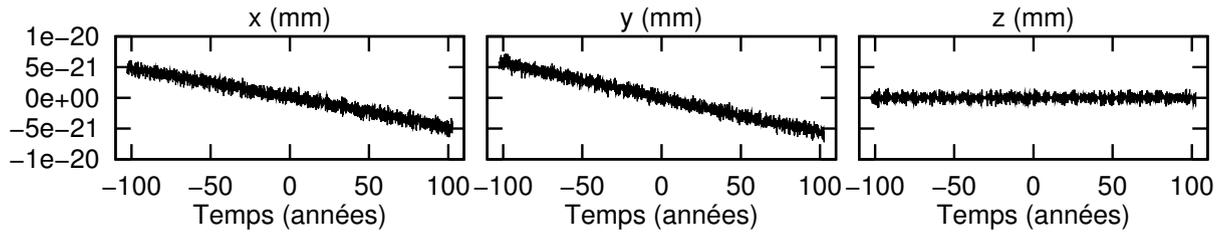


FIGURE 1.3 – Mouvement du barycentre dans le cas d'interactions newtoniennes. On simule l'évolution d'un système composé du Soleil, des 8 planètes de Mercure à Neptune, de la Lune et de Pluton, soumis aux interactions mutuelles newtoniennes définies en 1.3. Les intégrations sont effectuées dans \mathcal{R}_0 , en quadruple précision, et sur une durée de 100 ans de part et d'autre de l'instant initial (J2000). Les courbes représentent les coordonnées cartésiennes du vecteur $(\sum \mu_i)^{-1} \sum \mu_i \vec{r}_i$ au cours du temps.

L'avantage de choisir \mathcal{R}_0 pour repère des intégrations est d'éviter que le système ne dérive avec le temps. En effet, dans un cas extrême (si le barycentre avait une vitesse importante dans \mathcal{R}), on pourrait se retrouver sur de longues périodes d'intégration avec des coordonnées barycentriques des corps très supérieures aux distances qui les séparent, ce qui générerait des erreurs numériques importantes lors du calcul des interactions (voir les développements du paragraphe 1.4).

1.3.2 Cas relativiste

De la même manière, on considère un système de n masses ponctuelles, soumises aux perturbations mutuelles newtoniennes (1.3). On tient compte également de corrections telles que définies dans l'expression (1.12), mais dans laquelle les vitesses barycentriques \vec{v}_i sont remplacées par les vitesses \vec{r}_i dans le repère quelconque \mathcal{R} . *Ce système n'est donc pour l'instant pas soumis à la relativité générale*, l'origine de \mathcal{R} n'étant pas forcément confondue avec le barycentre (relativiste) du système.

Soit le vecteur \vec{u} , défini de la manière suivante :

$$\vec{u} = \sum_i \mu_i^* \vec{r}_i \text{ avec } \mu_i^* = \mu_i \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \right) \quad (1.19)$$

Il s'agit là encore, au terme $\sum_i \mu_i^*$ près, de la position du barycentre relativiste. Par rapport au vecteur \vec{u} défini dans le cas d'interactions classique, les μ_i^* dépendent des vecteurs position

et vitesse des corps et varient donc au cours du temps. En dérivant deux fois \vec{u} par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{\vec{u}} = \sum_i \mu_i^* \ddot{\vec{r}}_i + 2\dot{\mu}_i^* \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i^* \vec{r}_i \quad (1.20)$$

En remplaçant dans cette expression $\ddot{\vec{r}}_i$ par ses expressions (1.3) et (1.12), on montre que $\ddot{\vec{u}} = \vec{0} + \mathcal{O}(c^{-4})$ (la démonstration est donnée en annexe A). Si on néglige les termes en c^{-4} , $\ddot{\vec{u}} = \vec{0}$ et on se retrouve alors dans le même cas que lors d'interactions classiques newtoniennes, c'est-à-dire que $\dot{\vec{u}}$ est constant et \vec{u} est une fonction affine du temps :

$$\text{pour tout } t, \vec{u}(t) = \vec{u}(0) + t\dot{\vec{u}}(0) \quad (1.21)$$

L'idée, comme dans le paragraphe précédent, est de choisir l'origine de \mathcal{R}_0 telle que $\vec{u}(0) = \vec{0}$ et $\dot{\vec{u}}(0) = \vec{0}$. En dérivant les 2 relations de (1.19), on obtient :

$$\dot{\vec{u}} = \sum_i \dot{\mu}_i^* \vec{r}_i + \mu_i^* \dot{\vec{r}}_i \text{ avec } \dot{\mu}_i^* = \frac{\mu_i}{2c^2} \left(2\dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i + \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i)}{r_{ij}^3} \right) \quad (1.22)$$

Dans le calcul de $\dot{\mu}_i^*$, on note la présence de $\ddot{\vec{r}}_i$. Mais comme lors du calcul des corrections relativistes (1.12), on néglige les termes en c^{-4} et dans ce cas, $\ddot{\vec{r}}_i$ est déterminée en ne tenant compte que des interactions newtoniennes (1.3). On obtient alors :

$$\dot{\mu}_i^* = \frac{\mu_i}{2c^2} \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i)}{r_{ij}^3} \quad (1.23)$$

On peut alors définir \mathcal{R}_0 de telle manière que $\vec{u}(0) = \dot{\vec{u}}(0) = \vec{0}$ en posant :

$$\vec{x} = -\frac{\sum_i \mu_i^* \vec{r}_i}{\sum_i \mu_i^*} \text{ et } \vec{y} = -\frac{\sum_i \mu_i^* \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \dot{\mu}_i^* \vec{r}_i}{\sum_i \mu_i^*} \quad (1.24)$$

Comme les (μ_i^*) et $(\dot{\mu}_i^*)$ dépendent des \vec{r}_i et des $\dot{\vec{r}}_i$, cette équation est implicite et il est nécessaire d'effectuer plusieurs itérations (c'est-à-dire d'effectuer successivement plusieurs changements de repères) avant de converger vers \mathcal{R}_0 .

Dans ce repère, \vec{u} est nul au cours du temps, c'est-à-dire que le barycentre du système reste fixe et confondu avec l'origine. Les courbes de la figure 1.4 permettent de vérifier numériquement ce résultat. La dérive beaucoup plus importante que dans le cas d'interactions classiques (voir les courbes de la figure 1.3) est certainement due au fait que les termes en c^{-4} ont été négligés dans le calcul de la dérivée seconde de \vec{u} , $\ddot{\vec{u}}$ n'est en fait pas rigoureusement nul. Le barycentre s'éloigne cependant très peu de l'origine du repère.

Le gros avantage de \mathcal{R}_0 est maintenant d'identifier les positions-vitesses barycentriques et les coordonnées dans le repère, ce qui simplifie le calcul des corrections relativistes puisqu'on n'a plus à déterminer la vitesse du barycentre.

Remarque : pour éliminer les termes en c^{-4} dans $\ddot{\vec{u}}$, et ainsi réduire la dérive du barycentre, il faudrait développer les corrections relativistes (1.12) et les "masses" (μ_i^*) à l'ordre c^{-4} . Mais il resterait alors des termes en c^{-6} dans $\ddot{\vec{u}}$. La dérive du barycentre ne peut donc pas être totalement éliminée.

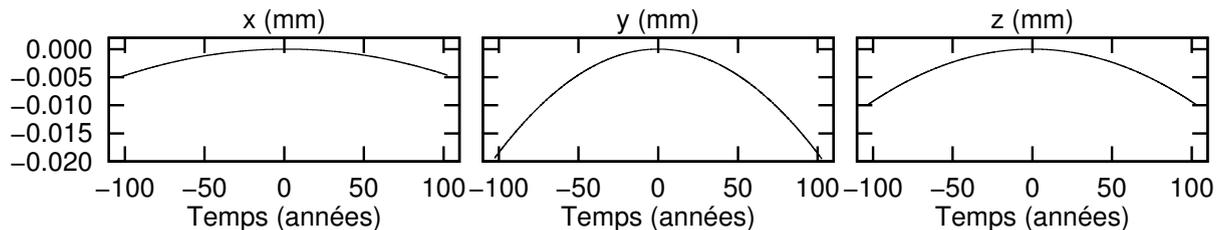


FIGURE 1.4 – Mouvement du barycentre dans le cas d’interactions relativistes. On simule l’évolution d’un système composé du Soleil, des 8 planètes de Mercure à Neptune, de la Lune et de Pluton, soumis aux interactions mutuelles newtoniennes définies en 1.3 ainsi qu’aux corrections relativistes définies en 1.12. Les intégrations sont effectuées dans \mathcal{R}_0 , en quadruple précision, et sur une durée de 100 ans de part et d’autre de l’instant initial (J2000). Les courbes représentent les coordonnées cartésiennes du vecteur $(\sum \mu_i^*)^{-1} \sum \mu_i^* \vec{r}_i$ au cours du temps.

1.3.3 Barycentre des éphémérides numériques DE

Dans les articles décrivant les solutions DE200 (Newhall et al., 1983) et DE405 (Standish, 1998), il n’est pas détaillé comment est calculée la vitesse du barycentre (vecteur $-\dot{\vec{y}}$). Il semble cependant (Standish, communication privée) que les termes $\dot{\mu}_i^*$ y soient négligés. C’est aussi le cas dans le programme de Moshier (1992), utilisé lors de travaux préliminaires à la construction d’INPOP05. Cela se traduit par un repère \mathcal{R}_0 différent, dans lequel le barycentre du système ne reste pas confondu avec l’origine du repère, comme illustré par les courbes de la figure 1.5.

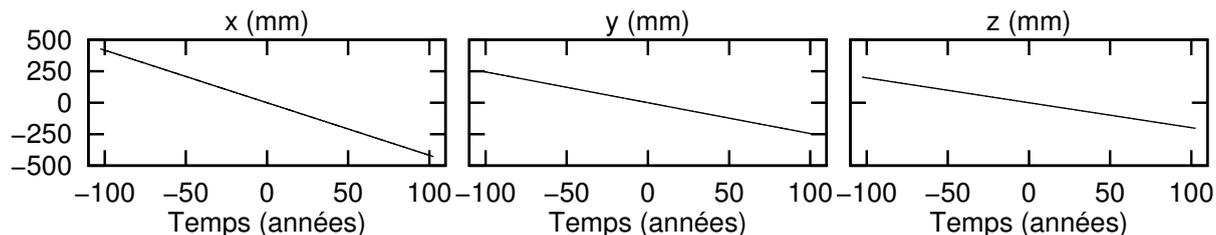


FIGURE 1.5 – Mouvement du barycentre “JPL” dans le cas d’interactions relativistes. On simule l’évolution d’un système composé du Soleil, des 8 planètes de Mercure à Neptune, de la Lune et de Pluton, soumis aux interactions mutuelles newtoniennes définies en 1.3 ainsi qu’aux corrections relativistes définies en 1.12. Les intégrations sont effectuées dans \mathcal{R}_0 (avec les termes $\dot{\mu}_i^*$ négligés dans son calcul), en quadruple précision, et sur une durée de 100 ans de part et d’autre de l’instant initial (J2000). Les courbes représentent les coordonnées cartésiennes du vecteur $(\sum \mu_i^*)^{-1} \sum \mu_i^* \vec{r}_i$ au cours du temps.

La dérive est ici bien plus importante que dans le cas des équations complètes. De plus le même terme quadratique des courbes de la figure 1.4 est également présent dans celles de la figure 1.5, mais masqué par son amplitude beaucoup plus faible que le terme linéaire : même sur des durées d’intégration plus longues, négliger les termes $\dot{\mu}_i^*$ provoque une dérive du barycentre beaucoup plus importante.

Il faut cependant noter que même si le barycentre dérive, l’effet sur la géométrie du système, c’est-à-dire sur les positions et vitesses relatives, est négligeable. Entre les deux simulations effectuées pour obtenir les courbes des figures 1.4 et 1.5, les positions barycentriques des corps sont certes différentes, mais les positions héliocentriques des planètes et géocentriques de la Lune restent très proches : les différences n’excèdent pas 2×10^{-5} mm, ce qui est de plusieurs ordres de grandeur inférieur à la précision des observations.

Le choix de ne pas négliger les $\dot{\mu}_i^*$ dans INPOP a plus été effectué dans un souci de cohérence

des équations que pour gagner en précision, d'autant plus qu'il n'entraîne qu'un supplément de calculs négligeable, car effectué une seule fois au temps initial des intégrations, pour déterminer le repère \mathcal{R}_0 .

1.3.4 Intégration / Placement du Soleil

On a vu au paragraphe précédent que si le repère est judicieusement choisi (pour résumer, tel que le barycentre a une position et une vitesse nulle à la date origine des intégrations), le barycentre d'un système de masses ponctuelles était immobile et restait confondu avec l'origine du repère au cours du temps. Disposant d'un point fixe, il est alors possible de calculer les coordonnées d'un corps particulier en fonction de celles des autres. On dispose donc de deux méthodes pour déterminer l'évolution d'un système à n corps :

- méthode 1 : on intègre les équations du mouvement des n corps, et le barycentre est laissé libre d'évoluer dans le repère
- méthode 2 : on intègre les équations du mouvement de $n-1$ corps, la position du dernier est alors déterminée en fonction de celles des autres en forçant le barycentre à rester immobile, à l'origine du repère

Pour les simulations des courbes des figures 1.3, 1.4 et 1.5, la méthode 1 a été employée.

Pour la méthode 2, on peut choisir par exemple de déterminer la position du Soleil en fonction des coordonnées des autres corps ; dans le cas d'interactions relativistes, de $\vec{u} = \vec{0}$, on déduit :

$$\begin{cases} \vec{r}_S = -\mu_S^{*-1} \sum_{i \neq S} \mu_i^* \vec{r}_i \\ \dot{\vec{r}}_S = -\mu_S^{*-1} \left(\sum_i \dot{\mu}_i^* \vec{r}_i + \sum_{i \neq S} \mu_i \dot{\vec{r}}_i \right) \end{cases} \quad (1.25)$$

Si on était capable de résoudre de manière exacte les équations différentielles définies par les expressions 1.3 et 1.12, si le vecteur \vec{u} était nul (et non $\mathcal{O}(c^{-4})$), alors ces deux méthodes seraient équivalentes et conduiraient aux mêmes trajectoires.

Pour le vérifier numériquement, on étudie le système formé par le Soleil, les 8 planètes, Pluton et la Lune. Ces corps, considérés ponctuels, sont soumis aux interactions newtoniennes et relativistes décrites par les expressions 1.3 et 1.12. Une fois déterminé le repère \mathcal{R}_0 , on calcule l'évolution de ce système sur 100 ans de part et d'autre de J2000, selon les méthodes 1 (simulation déjà effectuée au paragraphe 1.3.2) et 2. Les différences sur les positions héliocentriques des planètes (géocentriques pour la Lune) entre ces deux simulations ne dépassent pas 1 mm (0,3 μm pour la Lune) et sont bien inférieures à la précision des observations. Ces faibles écarts sont dus à la faible dérive du barycentre illustrée par les courbes de la figure 1.4.

1.3.4.1 Méthode INPOP

Pour les différentes versions d'INPOP, il a été décidé d'utiliser la première méthode. Elle nécessite le calcul de $n(n-1)$ interactions au lieu de $(n-1)^2$ pour la seconde, ainsi que la présence de 6 composantes supplémentaires dans le vecteur d'état (positions et vitesses du Soleil). Mais elle est paradoxalement moins coûteuse en temps de calcul, à cause de la résolution par itérations du système d'équations implicites 1.25.

1.3.4.2 Méthode des éphémérides DE

Pour les solutions planétaires du JPL (de DE102 à DE423), ainsi que pour le programme de Moshier (1992), c'est la deuxième méthode qui a été employée ; la position et la vitesse du Soleil sont déterminées en fonction de celles des autres corps. Mais comme on l'a vu au paragraphe 1.3.3, les termes $\dot{\mu}_i^*$ semblent avoir été négligés dans la définition du barycentre relativiste et on a vu que l'origine du repère n'était pas un point fixe. Les coordonnées du Soleil sont donc calculées avec des équations incomplètes. Pour en mesurer l'impact sur l'évolution de la géométrie du

Corps	(1)-(2) type DE	(1)-(2) INPOP
Mercure	984	0.15
Vénus	7744	0.37
Terre	1455	0.34
Mars	1035	0.12
Jupiter	115	0.41
Saturne	489	0.96
Uranus	1217	0.22
Neptune	1945	0.55
Pluton	1238	0.25
Lune (géocentrique)	0.858	0.28 μm

TABLE 1.1 – Différences maximales (en mm), sur 100 ans autour de J2000, sur les positions héliocentriques des corps (géocentriques pour la Lune) entre l’intégration (méthode 1) et le placement (méthode 2) du Soleil. Dans les solutions du type DE, les termes $\dot{\mu}_i^*$ sont négligés alors qu’ils sont pris en compte dans INPOP.

système, une simulation “type DE” est effectuée avec la méthode 2 et en négligeant les termes $\dot{\mu}_i^*$ dans la définition de \mathcal{R}_0 ainsi que dans le calcul des coordonnées du Soleil 1.25. Cette simulation est comparée à celle effectuée au paragraphe 1.3.2 (méthode 1) et les différences sur les positions héliocentriques des planètes (géocentriques pour la Lune) sont données dans le tableau 1.1.

Comme on peut le voir, négliger les termes $\dot{\mu}_i^*$ induit des différences plus importantes, même si elles restent très inférieures à la précision des observations.

Chapitre 2

Interaction entre un corps non sphérique et un corps ponctuel

On a vu au chapitre précédent les expressions qui permettent de calculer les interactions entre des corps ponctuels (ou à symétrie sphérique). Dans la mesure où leurs dimensions sont négligeables devant les distances qui les séparent, cette approximation suffit généralement à bien décrire les interactions dans le Système solaire. Mais ce n'est pas le cas lorsque deux corps sont proches l'un de l'autre (comme la Terre et la Lune, ou le Soleil et Mercure). Il est alors nécessaire de tenir compte des perturbations dans le potentiel dues à la non sphéricité de certains corps.

L'objet ici est de calculer les interactions entre un corps étendu sans symétrie particulière et un autre corps ponctuel (que l'on appellera perturbateur). Il s'agit de développements classiques, avec cependant des conventions différentes selon les auteurs. Ces conventions adoptées ne sont pas toujours clairement indiquées, et il peut être erroné d'appliquer une formule en dehors de son contexte, d'autant plus que certaines d'entre elles seront utilisées par la suite pour le calcul d'autres effets perturbateurs. Le but ici est donc aussi de fournir une base cohérente pour la suite, qui s'appuiera sur (Lambeck, 1980).

Dans ce chapitre, on se placera dans un repère $\mathcal{R}_E = (O_E, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ lié au corps non sphérique et dont l'origine O_E est confondue avec son centre de masse. Comme le corps étendu a généralement un mouvement de rotation, \mathcal{R}_E est mobile dans le repère inertiel \mathcal{R}_0 choisi pour les intégrations et le passage de l'un à l'autre est traité dans le chapitre 3. Un tel repère sera nommé sélénocentrique si le corps est la Lune, géocentrique si le corps est la Terre.

2.1 Expression du potentiel

Soit un corps ponctuel perturbateur, de masse m et situé en P (extérieur au corps étendu) de coordonnées ${}^t\vec{r} = (x, y, z)$ dans le repère \mathcal{R}_E . Soit δm , un élément de masse du corps étendu, de coordonnées ${}^t\vec{\rho} = (x', y', z')$ dans \mathcal{R}_E .

Le potentiel en P dû à δm est alors (G est la constante de la gravitation) :

$$\delta U(\vec{r}) = -\frac{G}{\Delta} \delta m \quad (2.1)$$

Remarque : le signe négatif est une convention. En géodésie par exemple, il est plutôt habituel d'adopter un signe positif, comme c'est le cas dans (Lambeck, 1988, Eq. 2.1.5). En mécanique céleste, on préfère un signe négatif : on peut ainsi définir l'énergie mécanique comme la somme de l'énergie cinétique et potentielle. Ce qui nous intéresse au final est de pouvoir calculer la force qui s'exerce sur P, qui s'écrira dans notre cas $\vec{F} = -m \vec{\nabla} U$.

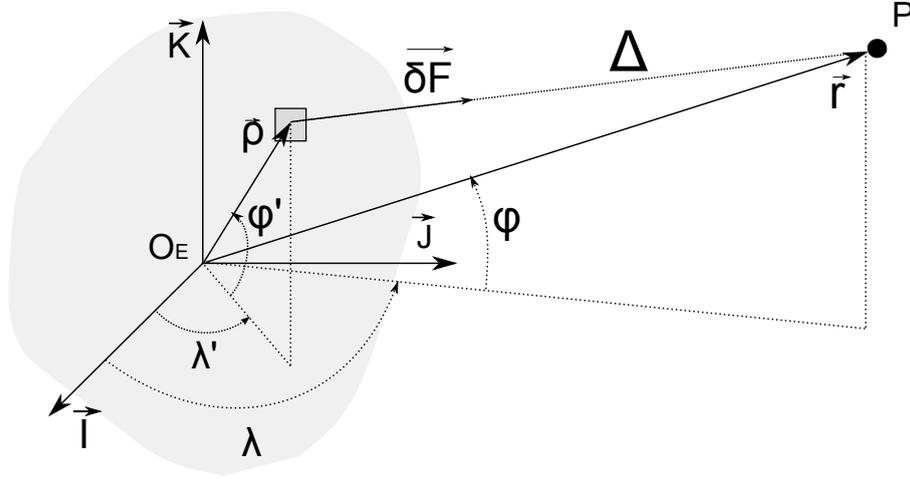


FIGURE 2.1 – Schéma et notations pour les interactions entre un corps solide et une masse ponctuelle.

Dans cette expression,

$$\Delta^{-1} = \|\vec{r} - \vec{\rho}\|^{-1} = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \psi \right)^{-1/2} \quad (2.2)$$

En introduisant les polynômes de Legendre (voir en annexe B pour plus de détails), on a :

$$\delta U = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_{n0}(\cos \psi) dm \quad (2.3)$$

On passe alors en coordonnées sphériques (r, φ, λ) et $(\rho, \varphi', \lambda')$, définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \rho \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' = \rho \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' = \rho \sin \varphi' \end{cases} \quad (2.4)$$

Remarque : on utilise ici la latitude φ , plutôt que la colatitude θ . Il s'agit d'un choix arbitraire, également utilisé par Lambeck (1980) ou Eckhardt (1981).

On a alors

$$\cos \psi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{\|\vec{r}\| \|\vec{\rho}\|} = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') \quad (2.5)$$

En utilisant le théorème d'addition des polynômes de Legendre, on introduit les fonctions associées de Legendre $(P_{nm})_{0 \leq n, 0 \leq m \leq n}$:

$$\begin{aligned} P_{n0}(\cos \psi) &= \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi') \cos m(\lambda - \lambda') \\ &= \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi') (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda') \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans cette expression, δ_{0m} représente le symbole de Kronecker, défini par :

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour calculer le potentiel en un point P dû à au corps étendu, il suffit alors d'intégrer δU sur le volume du corps :

$$U(P) = - \iiint_V \frac{G}{\Delta} dm \quad (2.8)$$

En posant M la masse du corps étendu et R son rayon équatorial moyen, on introduit ensuite les coefficients de Stokes (ou du potentiel) définis par Lambeck (1988, eq. 2.2.14a) :

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = (2 - \delta_{0m}) \frac{1}{MR^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V (\rho)^n P_{nm}(\sin \varphi') \begin{pmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{pmatrix} dm \quad (2.9)$$

On obtient au final le développement en harmoniques sphériques du potentiel en un point P de coordonnées sphériques (r, φ, λ) , dû à un corps étendu :

$$U(r, \varphi, \lambda) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \quad (2.10)$$

À la différence de signe près, due à la convention adoptée pour l'expression 2.1, on retrouve les expressions de (Lambeck, 1988, eq. 2.2.13) ou de Eckhardt (1981). Avec le même signe, on retrouve (Johnston & Lambeck, 1999, eq. 1).

Remarque : les coefficients de Stokes d'un corps ne dépendent que de la répartition interne des masses (géométrie et masse volumique), ainsi que du repère dans lequel ils sont exprimés. Avec ces notations, l'aplatissement J_2 du corps est égal à $-C_{20}$. Et plus généralement, pour tout $n \geq 2$, $J_n = -C_{n0}$.

2.2 Particularités de quelques harmoniques

2.2.1 Harmonique de degré 0

Lorsqu'on isole l'harmonique de degré $n=0$ (et donc $m=0$) dans le potentiel, on obtient :

$$U_0 = -\frac{GM}{r} C_{00} \quad (2.11)$$

D'après l'expression 2.9,

$$C_{00} = \frac{1}{M} \iiint_V dm = 1 \quad (2.12)$$

On obtient donc

$$U_0 = -\frac{GM}{r} \quad (2.13)$$

Ce potentiel est équivalent à celui dû à une masse ponctuelle. Si on en prend le gradient, on retrouve l'expression de la force newtonienne (1.1) déjà vue au chapitre 1. Il est donc inutile ici d'en tenir compte une deuxième fois et on ne conservera dans le développement du potentiel du corps étendu que les termes de degrés supérieurs ou égaux à 1.

2.2.2 Harmoniques de degré 1

En reprenant les expressions des coefficients du potentiel (2.9), on a :

$$\begin{cases} C_{10} = \frac{1}{MR} \iiint_V \rho \sin \varphi' dm = \frac{1}{MR} \iiint_V z' dm \\ C_{11} = \frac{1}{MR} \iiint_V \rho \cos \varphi' \cos \lambda' dm = \frac{1}{MR} \iiint_V x' dm \\ S_{11} = \frac{1}{MR} \iiint_V \rho \cos \varphi' \sin \lambda' dm = \frac{1}{MR} \iiint_V y' dm \end{cases} \quad (2.14)$$

Or, l'origine O_E du repère \mathcal{R}_E lié au corps étendu est confondue avec son centre de masse. Donc, par définition

$$\iiint_V x' dm = \iiint_V y' dm = \iiint_V z' dm = 0 \quad (2.15)$$

Les coefficients de degré 1 sont tous nuls, on peut donc ne prendre en compte dans le développement en harmoniques sphériques du potentiel que les termes de degrés supérieurs ou égaux à 2.

2.2.3 Harmoniques de degré 2

2.2.3.1 Lien avec la matrice d'inertie

Soit \mathcal{I} , la matrice d'inertie du corps étendu exprimée dans le repère \mathcal{R}_E :

$$\mathcal{I} = \iiint_V \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -xy & -xz \\ -xy & x'^2 + z'^2 & -yz \\ -xz & -yz & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix} dm = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

On peut alors exprimer les 5 coefficients de degré 2 du potentiel du corps étendu en fonction des 6 coefficients de sa matrice d'inertie (voir en annexe C pour le détail des calculs) :

$$\begin{cases} MR^2 C_{20} = \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) - I_{33} \\ MR^2 C_{21} = -I_{13} \\ MR^2 S_{21} = -I_{23} \\ MR^2 C_{22} = \frac{I_{22} - I_{11}}{4} \\ MR^2 S_{22} = -\frac{I_{12}}{2} \end{cases} \quad (2.17)$$

Et inversement, on peut aussi exprimer la matrice d'inertie en fonction des coefficients du potentiel :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} + MR^2 \begin{pmatrix} C_{20} - 2C_{22} & -2S_{22} & -C_{21} \\ -2S_{22} & C_{20} + 2C_{22} & -S_{21} \\ -C_{21} & -S_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

La connaissance des coefficients de degré 2 ne suffit cependant pas à déterminer la matrice d'inertie, puisque le moment d'inertie (I_{33}) selon l'axe \vec{K} reste inconnu.

La matrice d'inertie d'un corps quelconque étant toujours symétrique réelle, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ dans laquelle \mathcal{I} est diagonale. Dans ce repère, les coefficients du potentiel C_{21} , S_{21} et S_{22} sont nuls.

2.2.3.2 Expression de Mac Cullagh

Les termes de degré 2 dans le potentiel 2.10 s'écrivent :

$$U_2 = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[C_{20} P_{20}(\sin \varphi) + P_{21}(\sin \varphi) (C_{21} \cos \lambda + S_{21} \sin \lambda) \right. \\ \left. + P_{22}(\sin \varphi) (C_{22} \cos 2\lambda + S_{22} \sin 2\lambda) \right] \quad (2.19)$$

En remplaçant $P_{2m}(\sin \varphi) \cos m\lambda$ et $P_{2m}(\sin \varphi) \sin m\lambda$ par leurs expressions en coordonnées cartésiennes (voir les expressions B.42), on obtient :

$$U_2 = -\frac{GMR^2}{r^5} \left(\frac{C_{20}}{2} (2z^2 - x^2 - y^2) + 3C_{21}xz + 3S_{21}yz + 3C_{22}(x^2 - y^2) + 6S_{22}xy \right) \quad (2.20)$$

On exprime ensuite les coefficients du potentiel en fonction de ceux de la matrice d'inertie :

$$U_2 = \frac{G}{2r^5} \left[\left(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right) (2z^2 - x^2 - y^2) - \frac{3}{2} (I_{22} - I_{11}) (x^2 - y^2) \right. \\ \left. + 6 (I_{12}xy + I_{13}xz + I_{23}yz) \right] \quad (2.21)$$

Finalement, on peut obtenir une expression vectorielle du degré 2 du potentiel :

$$U_2 = \frac{G}{2r^5} (3\vec{r} \cdot I\vec{r} - \text{tr}(I) r^2) \quad (2.22)$$

Cette expression du potentiel en fonction de la matrice d'inertie est appelée par Ashenberg (2007) ou Schutz (1981) "expression de Mac Cullagh", mathématicien irlandais du début du XIX^{ème} siècle.

Elle sera utile lors du calcul des interactions entre les formes de deux corps étendus (chapitre 7), ainsi que dans les méthodes d'évaluation de l'orientation déphasée de la Lune (chapitre 6).

2.3 Calcul des forces exercées sur les corps

Connaissant le potentiel dû au corps étendu, on en déduit la force qu'il exerce sur une masse ponctuelle de masse m située en P :

$$\vec{F}_{E \rightarrow P} = -m \vec{\nabla} U(P) = -m \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Or le potentiel U développé en harmoniques sphériques est exprimé en fonction des coordonnées sphériques (r, φ, λ) du corps perturbateur. Le gradient de U exprimé en coordonnées

cartésiennes se calcule alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

En dérivant (2.10) par rapport à r , φ et λ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = -\frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \begin{pmatrix} -\frac{n+1}{r} P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \\ \cos \varphi P'_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \\ P_{nm}(\sin \varphi) (-mC_{nm} \sin m\lambda + mS_{nm} \cos m\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Pour calculer les valeurs des polynômes et fonctions associées de Legendre, ainsi que leurs dérivées, on utilise les formules de récurrences données en annexe B.

À partir de la définition des coordonnées sphériques, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi & -\frac{\cos \lambda \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \lambda}{r \cos \varphi} \\ \sin \lambda \cos \varphi & -\frac{\sin \lambda \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \lambda}{r \cos \varphi} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Des deux expressions précédentes, on détermine la force $\vec{F}_{E \rightarrow P}$, exprimée dans le repère (mobile) \mathcal{R}_E . Après passage dans le repère inertiel (voir le chapitre 3), on en déduit l'accélération du corps perturbateur par rapport au barycentre du Système solaire et celle du corps étendu (par réaction ou conservation du barycentre partiel) :

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{1}{m} \vec{F}_{E \rightarrow P} \text{ et } \ddot{\vec{r}}_E = -\frac{1}{M} \vec{F}_{E \rightarrow P} \quad (2.27)$$

2.4 Moment exercé sur le corps étendu

La direction des forces qui s'exercent entre le corps étendu et son perturbateur n'est généralement pas parallèle à celle joignant les centres de masse des deux corps : le corps ponctuel exerce donc un moment sur le corps étendu.

2.4.1 Cas général - degré du potentiel quelconque

Le moment exercé sur le corps étendu E dû à l'interaction entre le corps perturbateur P et l'élément de masse δm de E (voir le schéma de la figure 2.1) est :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_{P \rightarrow \delta m} = \vec{\rho} \wedge \delta \vec{F}_{P \rightarrow \delta m} \quad (2.28)$$

$$= \vec{r} \wedge \delta \vec{F}_{P \rightarrow \delta m} + (\vec{\rho} - \vec{r}) \wedge \delta \vec{F}_{P \rightarrow \delta m} \quad (2.29)$$

Or la force élémentaire $\delta \vec{F}_{P \rightarrow \delta m}$ exercée par P sur l'élément de masse δm est colinéaire à $\vec{\rho} - \vec{r}$. Leur produit vectoriel est nul, et en intégrant sur le volume du corps étendu, on obtient :

$$\vec{\mathcal{M}}_{P \rightarrow E} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{P \rightarrow E} \quad (2.30)$$

2.4.2 Moment de degré 2

On suppose ici que le développement du potentiel se limite aux termes de degré 2 ; on utilise alors l'expression du potentiel de Mac Cullagh (expression 2.22), dont on prend le gradient pour calculer la force qui s'exerce sur le corps étendu :

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = \vec{r} \wedge \vec{F}_{P \rightarrow E} = m\vec{r} \wedge \vec{\nabla} U_2 = m\vec{r} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{G}{2r^5} (3\vec{r} \cdot I\vec{r} - \text{tr}(I)r^2) \right) \quad (2.31)$$

En raison du produit vectoriel, il est inutile de conserver dans $\vec{\nabla} U_2$ les termes proportionnels à \vec{r} . En notant que $\vec{\nabla}(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-2} \vec{r}$ (donc proportionnel à \vec{r}), on obtient :

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = \frac{3Gm}{2r^5} \vec{r} \wedge \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot I\vec{r}) \quad (2.32)$$

Comme I est symétrique, $\vec{\nabla} (\vec{r} \cdot I\vec{r}) = 2I\vec{r}$. On aboutit finalement à l'expression suivante pour le moment de degré 2 exercé par la masse ponctuelle sur le corps étendu, identique à (Williams et al., 1997, eq. 2) :

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = \frac{3Gm}{r^5} \vec{r} \wedge I\vec{r} \quad (2.33)$$

Chapitre 3

Changements de repères

Toutes les équations du chapitre 2 ne sont valables que dans le repère lié au corps étendu, la position du corps ponctuel perturbateur (vecteur \vec{r}) ainsi que les coefficients du potentiel (C_{nm} et S_{nm}) étant exprimés dans $\mathcal{R}_E = (O_E, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. D'où la nécessité de passer du repère fixe \mathcal{R}_0 (défini au paragraphe 1.3) au repère mobile \mathcal{R}_E , et donc de connaître les coordonnées des vecteurs \vec{I} , \vec{J} et \vec{K} dans la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associée à \mathcal{R}_0 .

Pour cela, il existe deux possibilités :

- soit on injecte un modèle d'orientation, connu a priori : le système est forcé
- soit on intègre l'orientation du corps étendu en même temps que les positions-vitesses des corps

L'objet de ce chapitre est de détailler ces deux manières de procéder.

3.1 Intégration de l'orientation

3.1.1 Angles d'Euler et matrice de passage

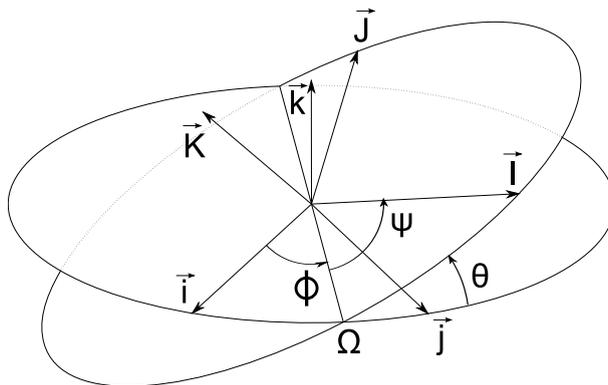


FIGURE 3.1 – Angles d'Euler.

L'orientation du corps dans l'espace peut être déterminée par ses angles d'Euler ϕ , θ et ψ (voir la figure 3.1), définis de la manière suivante :

- θ , angle de nutation, est l'angle (positif ou nul) entre les vecteurs \vec{K} et \vec{k}
- Ω est le nœud ascendant (c'est pourquoi $\theta \geq 0$).
- ϕ , angle de précession, est l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{O\Omega})$
- ψ , angle de rotation propre, est l'angle $(\overrightarrow{O\Omega}, \vec{I})$

Remarque : ces notations, principalement employées en mécanique, sont celles de (Goldstein, 1950, page 146), également utilisées dans (Newhall et al., 1983) ou (Aleshkina, 2002). D'autres

auteurs préfèrent appeler ψ l'angle de précession et ϕ l'angle de rotation propre comme dans (Bois et al., 1992) ou (Bretagnon et al., 1997) ; ces dernières notations sont plus utilisées en astronomie.

La base $\mathcal{B}_E = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est donc l'image de \mathcal{B}_0 par les rotations successives $R(\vec{k}, \phi)$, $R(\vec{O}\vec{\Omega}, \theta)$ et $R(\vec{K}, \psi)$, et les coordonnées d'un vecteur \vec{u} dans \mathcal{R}_E se déduisent de celles dans \mathcal{R}_0 :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{\mathcal{R}_E} &= P_{\mathcal{R}_E \rightarrow \mathcal{R}_0} \vec{u}_{\mathcal{R}_0} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}_{\mathcal{R}_0} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{u}_{\mathcal{R}_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans le vecteur décrivant l'état du système, en plus des positions et vitesses des corps, on introduit les angles d'Euler de chacun des corps étendus dont on souhaite intégrer l'orientation. Dans les paragraphes qui suivent, on montrera que leur évolution au cours du temps est elle aussi régie par une équation différentielle d'ordre 2, d'où la nécessité d'introduire également leurs dérivées.

3.1.2 Vecteur instantané de rotation

À partir des angles d'Euler et de leurs dérivées, on peut calculer le vecteur instantané de rotation du corps étendu $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{O}\vec{\Omega} + \dot{\psi} \vec{K}$; exprimées dans \mathcal{R}_E , ses coordonnées sont :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Le vecteur instantané de rotation est utile pour calculer la vitesse des corps dans \mathcal{R}_E à partir de celle dans \mathcal{R}_0

$$\dot{\vec{r}}_{\mathcal{R}_E} = P_{\mathcal{R}_E \rightarrow \mathcal{R}_0} \dot{\vec{r}}_{\mathcal{R}_0} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathcal{R}_E} \quad (3.3)$$

Sa dérivée s'exprime en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées premières et secondes :

$$\dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + \ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \\ \ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi - \ddot{\theta} \sin \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.1.3 Equation d'Euler

En projetant le théorème du moment cinétique dans le repère mobile \mathcal{R}_E , on aboutit à l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = \vec{\mathcal{M}} - \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} \quad (3.5)$$

où

- I est la matrice d'inertie du corps étendu
- $\vec{\mathcal{M}}$ est la somme des moments exercés sur le corps étendu
- $\vec{\omega} \wedge I\vec{\omega}$ est le terme d'entraînement dû à la mobilité de \mathcal{R}_E dans \mathcal{R}_0

Dans cette équation, la somme des moments extérieurs $\vec{\mathcal{M}}$ est calculée avec la formule vue en 2.30. On en déduit alors la dérivée du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$. Puis, en inversant le système linéaire 3.4, on déduit les expressions des dérivées secondes des angles d'Euler, ce qui définit l'équation différentielle d'ordre 2 qui régit l'évolution des angles d'Euler :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{\dot{\omega}_x \sin \psi + \dot{\omega}_y \cos \psi + \dot{\theta}(\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta)}{\sin \theta} \\ \ddot{\theta} = \dot{\omega}_x \cos \psi - \dot{\omega}_y \sin \psi - \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\omega}_z - \ddot{\phi} \cos \theta + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

Ces expressions sont identiques à celles de (Newhall et al., 1983, eq. 3).

3.1.4 Cas d'un corps rigide

Dans le cas d'un corps rigide (indéformable), la matrice d'inertie du corps est constante. De plus, elle est symétrique réelle, et est donc diagonalisable dans une base orthonormée. On peut alors choisir judicieusement \mathcal{R}_E de façon à ce que la matrice d'inertie dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit de la forme :

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \leq B \leq C \quad (3.7)$$

Remarque : dans ce repère, les coefficients du potentiel C_{21} , S_{21} et S_{22} sont nuls. D'après (3.5), \dot{I} étant nulle, on obtient :

$$I\dot{\vec{\omega}} = \vec{\mathcal{M}} - \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} \quad (3.8)$$

soit

$$\begin{pmatrix} A\dot{\omega}_x \\ B\dot{\omega}_y \\ C\dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_x - (C - B)\omega_y\omega_z \\ \mathcal{M}_y - (A - C)\omega_x\omega_z \\ \mathcal{M}_z - (B - A)\omega_x\omega_y \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

On pose ensuite $\beta_C = (C - A)/B$ et $\gamma_C = (B - A)/C$ et on obtient alors le même système d'équations que dans (Newhall et al., 1983) :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{\gamma_C - \beta_C}{1 - \beta_C\gamma_C}\omega_y\omega_z + \frac{\mathcal{M}_x}{A} \\ \dot{\omega}_y = \beta_C\omega_x\omega_z + \frac{\mathcal{M}_y}{B} \\ \dot{\omega}_z = -\gamma_C\omega_x\omega_y + \frac{\mathcal{M}_z}{C} \end{cases} \quad (3.10)$$

Finalement, grâce à au système d'équations (3.6), on en déduit les dérivées secondes des angles de d'Euler.

3.1.5 Cas d'un corps déformable

Dans le cas d'un corps non rigide, comme la forme du corps peut changer au cours du temps, sa matrice d'inertie n'est plus constante. On ne peut donc plus choisir un repère privilégié, lié au corps, dans lequel elle est diagonale, et de plus sa dérivée \dot{I} n'est pas nulle. Ce cas est traité avec plus de détails dans le chapitre 4.

3.1.6 Réduction des erreurs sur l'angle rapide de rotation propre ψ

Dans le cas d'un corps en rotation sur lui-même (comme la Lune ou la Terre), l'angle de rotation propre ψ varie, en première approximation, linéairement en fonction du temps, et d'autant plus vite que la période de rotation est petite. Sur des temps de simulation longs (plusieurs dizaines de milliers d'années), ψ prend des valeurs importantes alors que seuls ses sinus et cosinus, et donc sa valeur ramenée entre 0 et 2π , sont nécessaires pour les changements de repère.

3.1.6.1 Description de la méthode : introduction de $\tilde{\psi}$

Une première solution consisterait à ajouter ou soustraire 2π à chaque fois que ψ sort de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Mais effectuées un grand nombre de fois sur des temps de simulation longs, cette méthode générerait des erreurs numériques importantes.

Une deuxième solution, utilisée au JPL (voir (Newhall et al., 1983, page 162)), est détaillée dans les commentaires du programme de Moshier (1992).

On introduit la quantité $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi_1 t$; la constante ψ_1 est judicieusement choisie de telle manière que $\tilde{\psi}$ ne présente plus de dérive linéaire. Dans le vecteur d'état, on n'intègre alors plus ψ mais $\tilde{\psi}$ et on a :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(0) = \psi(0) \\ \dot{\tilde{\psi}}(0) = \dot{\psi}(0) - \psi_1 \\ \ddot{\tilde{\psi}}(t) = \ddot{\psi}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour réduire les erreurs numériques, le calcul de $\psi(t)$ à 2π près se fait de la manière suivante :

- de ψ_1 , on déduit la période de rotation du corps $T = 2\pi/\psi_1$ (calcul effectué en quadruple précision)
- T est décomposé en la somme $T_a + T_b$
- T_a est de la forme $p/2^q$, avec p et q entiers et se représente exactement en binaire
- T_b est le reste $T - T_a$
- le nombre de révolutions effectuées par le corps est $n = t/T$
- finalement, $\psi(t) \equiv \tilde{\psi}(t) + \psi_1 (t - nT_a - nT_b) [2\pi]$

3.1.6.2 Test dans un cas simple

Pour illustrer le gain en précision apporté par cette méthode, on se fixe une fonction $f(t)$ où t est en jour :

$$f(t) = a \cos(\omega_a t) + b \sin(\omega_b t) + f_1 t \quad (3.12)$$

Les constantes a , b , ω_a , ω_b et f_1 sont choisies telles que :

- $f_1=0.23$ rad/j est une valeur proche de la dérive moyenne de l'angle de rotation propre de la Lune
- $a=0.07$ rad et $b=0.03$ rad, pour avoir de petites variations de f autour d'une dérive linéaire
- $\omega_a=0.1$ rad/j et $\omega_b=5$ rad/j de manière à introduire des périodes plus longues et plus courtes que $2\pi/f_1$

Un calcul de f modulo 2π , effectué en quadruple précision servira de référence par la suite ; on le note f_{qp} .

f est alors solution de "l'équation différentielle" (entre guillemets car le second membre est indépendant de f) :

$$f' = f_1 - a\omega_a \sin(\omega_a t) + b\omega_b \cos(\omega_b t) \quad (3.13)$$

Deux intégrations numériques en double précision sont alors effectuées. La première de manière classique et en conservant sa solution g_1 dans $[0, 2\pi]$. La seconde, notée g_2 , utilise les astuces du paragraphe précédent. Ces deux solutions sont alors comparées à celle de référence calculée en quadruple précision f_{qp} et leurs erreurs illustrées en figure 3.2. On remarque que les erreurs de g_1 augmentent avec le nombre de révolutions, et sont bien supérieures à celles de g_2

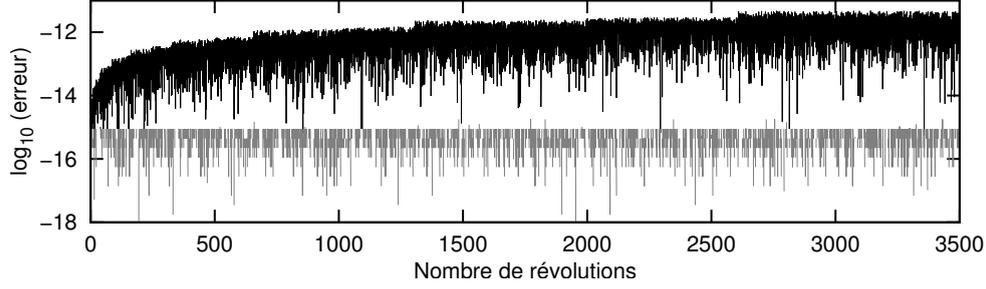


FIGURE 3.2 – Illustration du gain en précision apporté par les développements du paragraphe 3.1.6.1 sur le calcul de l’angle de rotation propre ψ . En noir sont tracés les logarithmes décimaux des différences entre f_{qp} et g_1 , en gris ceux des différences entre f_{qp} et g_2 .

3.2 Forçage par un modèle - orientation de la Terre

Au lieu d’intégrer l’orientation d’un corps, on peut introduire un forçage cinématique en imposant, par exemple pour ses angles d’Euler, des fonctions explicites du temps déterminées par ailleurs.

Dans un cas plus général, le principe ici est d’imposer un mouvement de $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans \mathcal{R}_0 :

$$\begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où les coefficients de la matrice A sont des fonctions explicites du temps.

Cette méthode est utilisée pour modéliser l’orientation de la Terre dans les éphémérides du JPL et INPOP05. Pour ces solutions, on utilise un modèle de précession-nutation qui permet de passer de l’ICRF (International Celestial Reference Frame) à l’équateur vrai de la date t , repère terrestre lié à la forme de la Terre (dans lequel sont exprimées les coefficients du potentiel).

L’ICRF est un repère dont l’origine est confondue avec le barycentre du Système solaire et dont les axes sont fixes par rapport à des sources extragalactiques. Ces objets lointains (principalement des quasars) sont supposés avoir des mouvements propres négligeables. C’est dans ce repère cinématiquement non tournant que sont intégrées les équations du mouvement des corps. Pour plus de détails, on peut se reporter au chapitre 2 des Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004).

Les plans de l’équateur terrestre et de l’écliptique sont mobiles dans l’ICRF. On définit alors le repère lié à l’équateur et l’équinoxe vrai de la date, mobile dans l’ICRF, comme celui dont :

- le troisième vecteur de base \vec{K} est colinéaire à la normale à l’équateur terrestre
- le premier vecteur de base \vec{I} pointe vers l’intersection entre l’équateur et l’écliptique

À partir de ce repère vrai de la date, on définit le repère moyen de la date en ne tenant compte que des mouvements séculaires ou à longue période. Celui particulier à la date J2000 est appelé repère équatorial moyen J2000 ; il est fixe par rapport à l’ICRF.

La matrice A peut être décomposée en produit de 3 matrices B , P et N , chacune composées de plusieurs rotations élémentaires (3 au minimum) :

$$\begin{pmatrix} A(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

- B est la matrice (constante) du biais, qui permet de passer de l’ICRF à l’équateur moyen J2000. Les angles des rotations qui la composent sont constants.

- P est la matrice de précession, qui permet de passer de l'équateur moyen J2000 à l'équateur moyen de la date t . Les angles des rotations qui la composent présentent des variations séculaires.
- N est la matrice de nutation, qui passe de l'équateur moyen de la date t à l'équateur vrai de la date t . Les angles des rotations qui la composent varient de manière "périodique".

Le terme précession fait ici référence aux évolutions séculaires du repère associé à la Terre et ne doit pas être confondu avec l'angle de précession ϕ défini au paragraphe précédent 3.1.1. De même, le terme nutation fait ici référence aux évolutions "périodiques" et ne doit pas être confondu avec l'angle de nutation propre θ .

Aujourd'hui, une autre transformation est définie, via les coordonnées X et Y du Pôle Céleste Intermédiaire (CIP), et sera utilisée lors de la réduction des données LLR (voir chapitre 9.1.7). Ces deux méthodes sont cependant strictement équivalentes, seuls les intermédiaires de calculs diffèrent. Pour plus de détails, on peut se reporter au chapitre 5 des Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004).

Remarque : dans toutes les simulations INPOP effectuées, la Terre est supposée être à symétrie de révolution. Le développement de son potentiel ne contient que des termes zonaux C_{n0} et est indépendant de la longitude λ du corps ponctuel perturbateur. Il est alors inutile de tenir compte de la rotation de la Terre sur elle-même, et donc le temps sidéral peut être négligé lors des changements de repère.

3.2.1 De l'ICRF à l'équateur moyen J2000

Les repères ICRF et équatorial moyen J2000 ne sont pas confondus et l'application d'un "biais" est nécessaire pour le passage de l'un à l'autre. L'expression de la matrice B de (3.15) est donnée dans (Lambert, 2003, eq. 1.13) :

$$\vec{r}_{J2000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta_0 & -\sin \eta_0 \\ 0 & \sin \eta_0 & \cos \eta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi_0 & 0 & -\sin \xi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi_0 & 0 & \cos \xi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos d\alpha_0 & \sin d\alpha_0 & 0 \\ -\sin d\alpha_0 & \cos d\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{ICRF} \quad (3.16)$$

Les valeurs de η_0 , ξ_0 et $d\alpha_0$ sont issues respectivement de (Capitaine et al., 2003) et (Chapront et al., 2002) :

$$\eta_0 = -0.006819'', \quad \xi_0 = -0.016617'' \quad \text{et} \quad d\alpha_0 = -0.0146'' \quad (3.17)$$

3.2.2 Précession

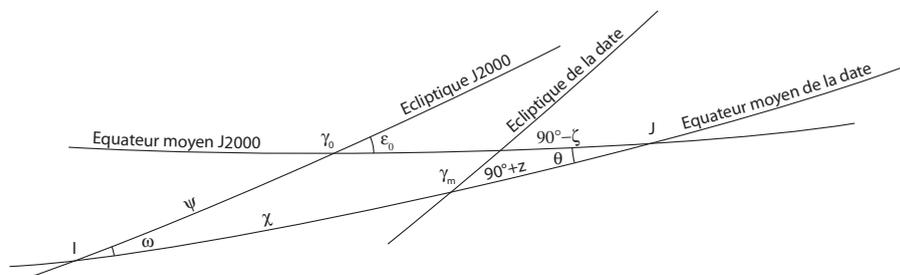


FIGURE 3.3 – Positions des repères moyen J2000 et moyen de la date

La précession permet de passer du repère lié à l'équateur moyen J2000 au repère lié à l'équateur moyen de la date (voir la figure 3.3). Le passage (matrice $P(t)$ de l'expression 3.15) s'effectue par la composition des trois rotations $R(\vec{k}, 90^\circ - \zeta)$, $R(\vec{i}, \theta)$ et $R(\vec{k}, -90^\circ - z)$, ou la transformation équivalente utilisée par Lieske et al. (1977) $R(\vec{k}, -\zeta)$, $R(\vec{j}, \theta)$ et $R(\vec{k}, -z)$:

$$\vec{r}_{Mt} = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{J2000} \quad (3.18)$$

D'autres intermédiaires de calcul peuvent être employés, utilisant les angles ϵ_0 (obliquité à J2000), ψ , ω et χ :

$$\vec{r}_{Mt} = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_0 & \sin \epsilon_0 \\ 0 & -\sin \epsilon_0 & \cos \epsilon_0 \end{pmatrix} \vec{r}_{J2000} \quad (3.19)$$

Cette transformation nécessite le calcul d'une rotation supplémentaire, mais permet de simplifier les transferts d'éventuels termes linéaires dans les angles de nutation vers les angles de précession.

Les angles ω , $\chi = \overline{I\gamma_m}$, $\zeta = 90^\circ - \overline{\gamma_0 J}$, $z = \overline{\gamma_m J} - 90^\circ$, $\psi = \overline{I\gamma_0}$ et θ (ces derniers n'ayant rien à voir avec les angles de rotation et nutation propre définis précédemment) sont développés sous forme de fonctions polynômes, dont on peut calculer les valeurs pour chaque instant t :

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \quad (3.20)$$

Différents "modèles" de précession existent (voir en annexe D), selon les coefficients des polynômes permettant de calculer les angles, et leurs effets sur les solutions planétaires sont illustrés au chapitre 11.1.7.

3.2.3 Nutation

La nutation permet de passer dans le repère lié à l'équateur vrai de la date (repère dans lequel sont exprimés les coefficients du potentiel) à partir de celui lié à l'équateur moyen de la date. On utilise pour la nutation les 3 angles suivants :

- ϵ : obliquité de la date
- $\Delta\psi$: nutation en longitude
- $\Delta\epsilon$: nutation en obliquité

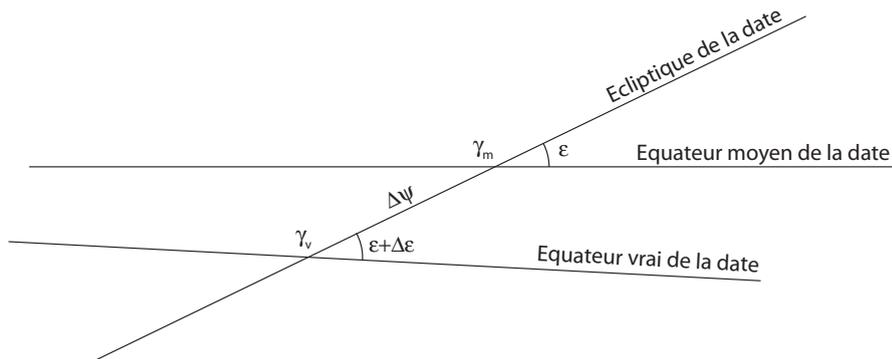


FIGURE 3.4 – Positions des repères moyen et vrai de la date.

Comme les angles associés à la précession, ε est développé sous forme de polynômes (voir en annexe D pour différents développements).

Les angles de nutations $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$, quant à eux, sont développés sous la forme de fonctions "périodiques" dont les arguments sont des combinaisons linéaires des éléments orbitaux (l, l', F, D, Ω) de la Lune et du Soleil :

- l : anomalie moyenne de la Lune
- l' : anomalie moyenne du Soleil
- F : différence entre la longitude moyenne de la Lune et celle de son nœud ascendant Ω
- D : élongation moyenne de la Lune par rapport au Soleil
- Ω : longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune

Ces éléments sont eux-mêmes développés sous forme de polynômes de degré n (en pratique, on se limite au degré 4, comme dans (Simon et al., 1994)).

En notant $(l, l', F, D, \Omega) = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$, on a :

$$\text{pour tout } i \text{ dans } \{1, 2, 3, 4, 5\}, F_i(t) = \sum_{j=0}^n F_{i,j} t^j \quad (3.21)$$

et

$$\begin{cases} \Delta\psi(t) = \sum_{j=1}^N \left[(A_j + A'_j t) \sin \left(\sum_{i=1}^5 \gamma_{ji} F_i(t) \right) + (A''_j + A'''_j t) \cos \left(\sum_{i=1}^5 \gamma_{ji} F_i(t) \right) \right] \\ \Delta\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^N \left[(B_j + B'_j t) \cos \left(\sum_{i=1}^5 \gamma_{ji} F_i(t) \right) + (B''_j + B'''_j t) \sin \left(\sum_{i=1}^5 \gamma_{ji} F_i(t) \right) \right] \end{cases} \quad (3.22)$$

Selon les modèles, le nombre de termes N peut être très important. Celui de la nutation UAI1980 de Wahr (1981) en compte 106 et ne comprend pas ceux "hors phase" (les coefficients A'' , A''' , B'' et B''' sont nuls). Par contre, celui de l'UAI2000 de Mathews et al. (2002) en compte plus de 1300, auxquels s'ajoutent les nutations planétaires (le principe est le même, aux arguments F_1 à F_5 s'ajoutent F_6 à F_{14} correspondant aux longitudes moyennes des planètes).

$\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$ ne sont donc pas strictement des fonctions périodiques du temps, ni même des sommes de fonctions périodiques. Même pour la nutation UAI1980, les termes de Poisson A'_j et B'_j sont non nuls. D'autre part, les arguments (F_i) ne varient pas linéairement avec le temps en raison de la présence de termes de degrés supérieurs à 2.

Connaissant les valeurs de ε , $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$, on en déduit la matrice de passage (matrice $N(t)$ de l'expression 3.15) du repère lié à l'équateur moyen de la date t à celui lié à l'équateur vrai de la date t :

$$\vec{r}_{Vt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & -\sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \vec{r}_{Mt} \quad (3.23)$$

Chapitre 4

Déformation des corps non ponctuels

Dans un corps étendu, les forces qui s'exercent sur les éléments de masse qui le composent peuvent varier à la fois en intensité et en direction. Cette différence génère des contraintes internes, qui peuvent le déformer s'il n'est pas rigide. On a vu dans le chapitre 2 que les coefficients du potentiel d'un corps étendu ne dépendaient que du repère qui lui est lié et de sa répartition interne des masses. S'il se déforme, ses coefficients du potentiel, ainsi que sa matrice d'inertie varient au cours du temps.

Le but de cette partie est d'exprimer les variations des coefficients du potentiel induites par les effets de marées solides et les variations du spin ; on en déduira celles des coefficients de la matrice d'inertie (voir 2.9). Puis, on verra dans quelle mesure les équations du mouvement sont modifiées.

4.1 Marées solides

D'une manière générale, on est en présence d'un effet de marée lorsque deux corps, ou deux éléments de volume d'un même corps, sont soumis aux forces gravitationnelles générées par un corps extérieur. Ces forces, appliquées en deux points distincts, peuvent différer à la fois en intensité et en direction. Ainsi, les interactions du système Terre-Lune avec un corps extérieur (voir le paragraphe 1.1.1.2), ou les interactions avec un corps étendu (voir le chapitre 2) peuvent être considérées comme des effets de marée.

On appellera ici effet de marée solide la déformation d'un corps étendu due à la présence d'un autre corps massif, appelé générateur (voir figure 4.1).

On se place dans le repère lié au corps déformable \mathcal{R}_E . Dans ce repère, le corps générateur (supposé ponctuel) a pour coordonnées sphériques $(r_g, \varphi_g, \lambda_g)$. Soit un point P du corps déformable, de coordonnées (r, φ, λ) . De la même manière qu'au chapitre 2, on peut développer le potentiel en P dû à la présence du corps générateur de marées :

$$\begin{aligned} V(r, \varphi, \lambda) &= -\frac{GM_g}{r_g} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_g}\right)^n P_{n0}(\cos \psi) \\ &= -\frac{GM_g}{r_g} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{r_g}\right)^n (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_g) (\cos m(\lambda - \lambda_g)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} V_n \\ \text{où } V_n &= -\frac{GM_g}{r_g} \left(\frac{r}{r_g}\right)^n \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_g) (\cos m(\lambda - \lambda_g)) \quad (4.1) \end{aligned}$$

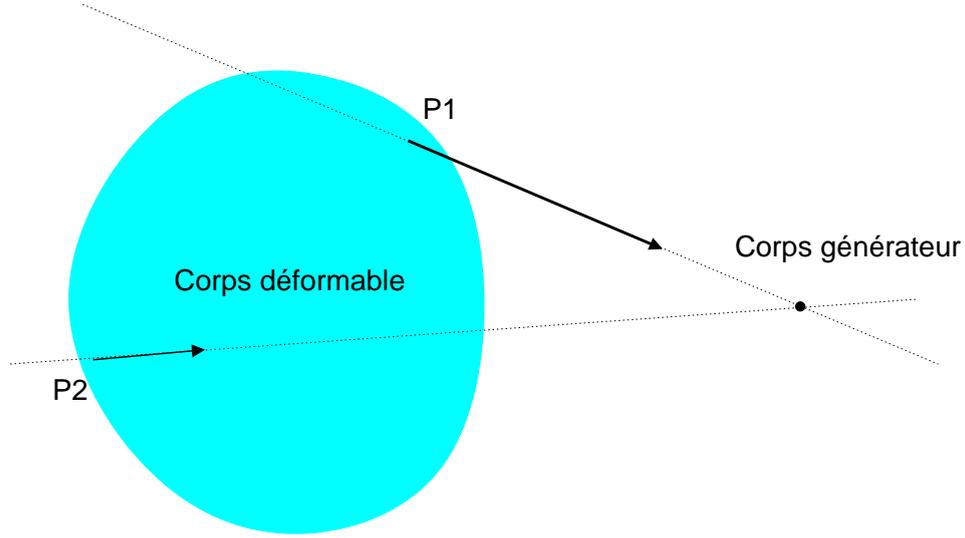


FIGURE 4.1 – Illustration des effets de marées solides. La force de Newton exercée en P_1 par le corps générateur est différente à la fois en direction et en intensité de celle en P_2 . Cette différence induit des contraintes internes, qui peuvent déformer le corps étendu s'il n'est pas rigide.

4.1.1 Harmonique de degré $n=0$

De 4.1, on extrait l'harmonique de degré 0 du potentiel perturbateur :

$$V_0 = -\frac{GM_g}{r_g} \quad (4.2)$$

V_0 étant indépendant de P , son gradient est nul : aucune force ne s'exerce en P , et cette harmonique ne génère donc aucune déformation du corps étendu. Il est inutile d'en tenir compte et le développement du potentiel perturbateur pourra donc débuter à $n = 1$

4.1.2 Harmonique de degré $n=1$

De 4.1, on extrait l'harmonique de degré 1 du potentiel perturbateur :

$$V_1 = -\frac{GM_g R}{r_g} (\sin \varphi \sin \varphi_g + \cos \varphi \cos \varphi_g \cos m(\lambda - \lambda_g)) \quad (4.3)$$

$$= -\frac{GM_g}{r_g^3} \vec{r} \cdot \vec{r}_g \quad (4.4)$$

L'accélération de l'élément de masse situé en P est alors :

$$\vec{a}_p = -\vec{\nabla} V_1 = \frac{GM_g}{r_g^3} \vec{r}_g \quad (4.5)$$

Tous les points P ont donc la même accélération et aucune contrainte interne n'est due à cette harmonique. Il est inutile d'en tenir compte et le développement du potentiel perturbateur pourra débuter à $n = 2$.

Remarque : dans le cas d'un solide homogène, la force qui s'exerce sur chaque élément de masse est elle aussi indépendante du point P . Par contre, ce n'est plus le cas pour un solide hétérogène. Une force différentielle ne génère pas donc obligatoirement des contraintes internes.

Pour illustrer cette remarque, on peut prendre pour exemple la chute libre de deux masses différentes dans un champ de pesanteur uniforme. Leurs trajectoires sont identiques, il ne s'exercerait aucune contrainte sur une barre sans masse qui les relierait.

4.1.3 Harmoniques de degrés $n \geq 2$

Pour un corps élastique et non dissipatif, Love (1927) suppose que chaque harmonique de la variation du potentiel à la surface du corps ($r = R$) est proportionnelle à la même harmonique du potentiel perturbateur 4.1 :

$$\Delta U(R, \varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n V_n = -\frac{GMg}{r_g} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n k_n \left(\frac{R}{r_g}\right)^n (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_g) (\cos m(\lambda - \lambda_g)) \quad (4.6)$$

Les (k_n) sont les nombres de Love pour le potentiel (il existe également les nombres de Love (h_n) et (l_n) pour les déplacements radiaux et tangentiels de la surface du corps, voir au chapitre 9.1.3.1 pour plus de détails).

On peut alors résoudre le problème de Dirichlet : la variation du potentiel $\Delta U(r, \varphi, \lambda)$ est de Laplacien nul, défini et continu à l'extérieur du corps (ouvert $A =]R, +\infty[$) et sa valeur sur la frontière de A (sphère de rayon R) est imposée par l'expression précédente de $\Delta U(R, \varphi, \lambda)$. On en déduit donc sa valeur en un point quelconque de l'espace :

$$\begin{aligned} \Delta U(r, \varphi, \lambda) &= -\frac{GMg}{r_g} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n k_n \left(\frac{R}{r_g}\right)^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi_g) (\cos m(\lambda - \lambda_g)) \\ &= -\frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) k_n \frac{Mg}{M} \left(\frac{R}{r_g}\right)^{n+1} (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ &\quad P_{nm}(\sin \varphi_g) [\cos m\lambda_g \cos m\lambda + \sin m\lambda_g \sin m\lambda] \end{aligned} \quad (4.7)$$

En faisant l'analogie avec l'expression 2.10, on peut introduire les modifications des coefficients du potentiel :

$$\begin{cases} \Delta C_{nm} = (2 - \delta_{m,0}) k_n \frac{Mg}{M} \left(\frac{R}{r_g}\right)^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_g) \cos m\lambda_g \\ \Delta S_{nm} = (2 - \delta_{m,0}) k_n \frac{Mg}{M} \left(\frac{R}{r_g}\right)^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_g) \sin m\lambda_g \end{cases} \quad (4.8)$$

On a alors :

$$\Delta U = -\frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) \quad (4.9)$$

Dans le cas d'un corps anélastique, les nombres de Love (k_n) dépendent de l'ordre de l'harmonique, ce qui se traduit par des variations des coefficients du potentiel :

$$\begin{cases} \Delta C_{nm} = (2 - \delta_{m,0}) k_{nm} \frac{Mg}{M} \left(\frac{R}{r_g}\right)^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_g) \cos m\lambda_g \\ \Delta S_{nm} = (2 - \delta_{m,0}) k_{nm} \frac{Mg}{M} \left(\frac{R}{r_g}\right)^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_g) \sin m\lambda_g \end{cases} \quad (4.10)$$

Des expressions équivalentes sont données dans (Lambeck, 1988).

4.1.4 Expressions des variations des coefficients de degré 2

En se limitant aux coefficients de degré $n=2$, on obtient les expressions suivantes, en fonction des coordonnées cartésiennes (r_x, r_y, r_z) du corps générateur dans le repère lié au solide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{20} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 \frac{k_{20}}{2} \frac{2r_z^2 - r_x^2 - r_y^2}{r_g^2} \\ \Delta C_{21} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 k_{21} \frac{r_x r_z}{r_g^2} \\ \Delta C_{22} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 \frac{k_{22}}{4} \frac{r_x^2 - r_y^2}{r_g^2} \\ \Delta S_{21} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 k_{21} \frac{r_y r_z}{r_g^2} \\ \Delta S_{22} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 \frac{k_{22}}{2} \frac{r_x r_y}{r_g^2} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

4.1.5 Effet de marées dissipatifs

En réalité, les corps ne réagissent pas immédiatement aux sollicitations extérieures ; pour la Terre, les forces de frottement dans le manteau ainsi que sur le fond des océans induisent un temps de retard (noté τ_{nm} et dépendant lui aussi de l'harmonique) dans sa réaction. Ainsi, la déformation à l'instant t est en fait due à la position à l'instant $t - \tau_{nm}$ du corps générant les marées. Les expressions des variations des coefficients du potentiel vues précédemment ne sont donc pas calculées avec le vecteur $\vec{r}(t)$, mais avec $\vec{r}(t - \tau_{nm})$. Ces deux vecteurs diffèrent d'une part à cause du mouvement du corps générateur sur son orbite, mais également à cause de la rotation du corps étendu sur lui-même.

On note ${}^t \vec{r}^* = (r_x^*, r_y^*, r_z^*) = {}^t \vec{r}(t - \tau_{nm})$; les variations des coefficients de degré 2 du potentiel deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{20} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g^*} \right)^3 \frac{k_{20}}{2} \frac{2r_z^{*2} - r_x^{*2} - r_y^{*2}}{r_g^{*2}} \\ \Delta C_{21} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g^*} \right)^3 k_{21} \frac{r_x^* r_z^*}{r_g^{*2}} \\ \Delta C_{22} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g^*} \right)^3 \frac{k_{22}}{4} \frac{r_x^{*2} - r_y^{*2}}{r_g^{*2}} \\ \Delta S_{21} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g^*} \right)^3 k_{21} \frac{r_y^* r_z^*}{r_g^{*2}} \\ \Delta S_{22} = \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g^*} \right)^3 \frac{k_{22}}{2} \frac{r_x^* r_y^*}{r_g^{*2}} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Une difficulté ici est d'avoir une estimation de $\vec{r}(t - \tau_{nm})$. En effet, les équations que l'on intègre numériquement sont généralement de la forme $Y' = f(t, Y(t))$; le vecteur $r(t)$ est dans ce cas facilement accessible, mais pas $\vec{r}(t - \tau_{nm})$. Ce problème est traité dans le chapitre 6.

4.1.6 Prise en compte dans DE405

Dans DE405, on ne considère que les interactions suivantes :

- celle de la Lune ponctuelle avec la déformation de la Terre due à la Lune
- celle de la Lune ponctuelle avec la déformation de la Terre due au Soleil

La Lune et le Soleil sont donc générateurs de marées, mais seule la Lune est perturbatrice.

Dans (Standish & Williams, 2006), on trouve l'expression suivante pour le calcul de la dérivée seconde du vecteur Terre-Lune due aux effets de marées (voir en annexe E pour la démonstration) :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_{(tide)} = & \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{Gm'R^5}{r^5} \left[\frac{k_{20}}{r_0^{*5}} \left(2z_0^{*2} \vec{z} + \rho_0^{*2} \vec{\rho} - 5 \frac{(\vec{z} \cdot \vec{z}_0^*)^2 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_0^{*2}}{r^2} \vec{r} + r_0^{*2} \vec{r} \right) \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{Gm'R^5}{r^5} \left[\frac{k_{21}}{r_1^{*5}} \left(2[(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_1^*) \vec{z}_1^* + (\vec{z} \cdot \vec{z}_1^*) \vec{\rho}_1^*] - 10 \frac{(\vec{z} \cdot \vec{z}_1^*)(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_1^*)}{r^2} \vec{r} \right) \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{Gm'R^5}{r^5} \left[\frac{k_{22}}{r_2^{*5}} \left(2(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_2^*) \vec{\rho}_2^* - \rho_2^{*2} \vec{\rho} - 5 \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_2^*)^2 - \frac{1}{2} \rho_2^2 \rho_2^{*2}}{r^2} \vec{r} \right) \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Dans cette expression,

- G est la constante de la gravitation
- m' est la masse du corps générateur de marées (Lune ou Soleil)
- m est la masse de la Lune
- M est la masse de la Terre
- R est le rayon équatorial moyen de la Terre
- \vec{r} est le vecteur Terre-Lune exprimé dans le repère lié à la Terre
- \vec{z} et $\vec{\rho}$ sont respectivement les composantes polaire et équatoriale de \vec{r} ($\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$)
- r est la distance Terre - Lune
- $(k_{2i})_{i \in \{0,1,2\}}$ sont les nombres de Love associés respectivement aux harmoniques (20), (21) et (22)
- $(\vec{r}_i^*)_{i \in \{0,1,2\}}$ sont les vecteurs Terre-corps générateur (Lune ou Soleil) déphasés de respectivement τ_{20} , τ_{21} et τ_{22}
- \vec{z}_i^* et $\vec{\rho}_i^*$ sont respectivement les composantes polaire et équatoriale de \vec{r}_i^*

4.1.7 Prise en compte dans DE200

Dans DE200, seule est prise en compte l'interaction entre la Lune et la déformation de la Terre due à la Lune. On considère également un seul nombre de Love et un seul déphasage pour toutes les harmoniques ($k_2 = k_{20} = k_{21} = k_{22}$ et $\tau = \tau_{20} = \tau_{21} = \tau_{22}$). Pendant le temps τ , on néglige le mouvement de la Lune sur son orbite et on suppose que le déphasage n'est dû qu'à la rotation de la Terre sur elle-même. Cette vitesse de rotation ω_T étant "constante", la Terre a tourné pendant la durée τ de l'angle $\delta = \tau \omega_T$, appelé angle de déphasage. Il s'agit de l'angle entre le bourrelet formé sur la Terre et le vecteur Terre-Lune. L'expression de la dérivée seconde du vecteur Terre-Lune est donnée par Newhall et al. (1983) (voir en annexe E pour la démonstration) :

$$\ddot{\vec{r}}_{(tide)} = -\frac{3k_2 Gm}{r^3} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^5 \begin{pmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

avec :

- G est la constante de la gravitation

- m est la masse de la Lune
- M est la masse de la Terre
- R est le rayon équatorial moyen de la Terre
- $\vec{r} = (x, y, z)$ est le vecteur Terre-Lune exprimé dans le repère lié à la Terre
- r est la distance Terre - Lune
- k_2 est le nombre de Love de degré 2
- δ est l'angle de déphasage entre la position de la Lune à l'instant t et celle à l'instant $t - \tau$

4.2 Déformation due au spin

Soit un point P du corps déformable, de coordonnées ${}^t\vec{r} = (x, y, z)$ dans \mathcal{R}_E . Soit ${}^t\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ le vecteur instantané de rotation du corps. Le potentiel perturbateur au point P dû à sa vitesse de rotation est alors :

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \left(r^2 \omega^2 - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})^2 \right) = -\frac{1}{3} r^2 \omega^2 - \frac{1}{12} (\omega^2 - 3\omega_z^2) (3z^2 - r^2) - \frac{1}{4} (\omega_y^2 - \omega_x^2) (x^2 - y^2) + yz\omega_y\omega_z + xy\omega_x\omega_y + xz\omega_x\omega_z \quad (4.15)$$

En passant en coordonnées sphériques (voir les expressions 2.4) et en introduisant les polynômes et fonctions associées de Legendre, on note que :

$$\begin{cases} 3z^2 - r^2 = 2r^2 P_{20}(\sin \varphi) \\ xz = \frac{r^2}{3} P_{21}(\sin \varphi) \cos \lambda \\ yz = \frac{r^2}{3} P_{21}(\sin \varphi) \sin \lambda \\ x^2 - y^2 = \frac{r^2}{3} P_{22}(\sin \varphi) \cos 2\lambda \\ xy = \frac{r^2}{6} P_{22}(\sin \varphi) \sin 2\lambda \end{cases} \quad (4.16)$$

V peut alors être exprimé sous la forme :

$$V(\vec{r}) = -r^2 \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) \right) \quad (4.17)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{00} = \frac{1}{3} \omega^2 \\ \alpha_{10} = \alpha_{11} = \beta_{11} = 0 \\ \alpha_{20} = \frac{1}{6} (\omega^2 - 3\omega_z^2) \\ \alpha_{21} = -\frac{1}{3} \omega_x \omega_z \\ \beta_{21} = -\frac{1}{3} \omega_y \omega_z \\ \alpha_{22} = \frac{1}{12} (\omega_y^2 - \omega_x^2) \\ \beta_{22} = -\frac{1}{6} \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (4.18)$$

4.2.1 Harmonique de degré n=0

L'harmonique de degré 0 du potentiel perturbateur V s'écrit :

$$V_0 = -\frac{1}{3}r^2\omega^2 \quad (4.19)$$

On en déduit l'accélération qui s'exerce sur l'élément de volume en P :

$$\vec{a}_p = \frac{2}{3}\omega^2\vec{r} \quad (4.20)$$

Chaque élément de volume subit donc une accélération radiale, la déformation du corps induite est donc à symétrie sphérique. La masse étant conservée, cette déformation va provoquer un changement dans la matrice d'inertie. Il semble que cet effet soit négligé dans DE405 ainsi que dans (Newhall & Williams, 1997), mais on le trouve dans (Williams et al., 2001, eq. 9) ; la variation de la matrice d'inertie est alors :

$$\Delta I = \alpha\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

4.2.2 Harmonique de degré 2

Là encore, on peut appliquer l'hypothèse de Love (1927) : chaque harmonique de la variation du potentiel est proportionnelle à celle du potentiel perturbateur. On obtient alors :

$$\Delta U(R, \varphi, \lambda) = -R^2 \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^n k_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) \right) \quad (4.22)$$

En appliquant le théorème de Dirichlet, la variation du potentiel en un point P à l'extérieur du corps est alors :

$$\Delta U(R, \varphi, \lambda) = -R^2 \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^n k_{nm} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_{nm}(\sin \varphi) (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) \right) \quad (4.23)$$

$$= -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^n k_{nm} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi) \left(\frac{R^3}{GM} \alpha_{nm} \cos m\lambda + \frac{R^3}{GM} \beta_{nm} \sin m\lambda \right) \quad (4.24)$$

On en déduit les modifications des coefficients du potentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{20} = \frac{k_{20}R^3}{3GM} \frac{1}{2} (\omega^2 - 3\omega_z^2) \\ \Delta C_{21} = -\frac{k_{21}R^3}{3GM} \omega_x \omega_z \\ \Delta S_{21} = -\frac{k_{21}R^3}{3GM} \omega_y \omega_z \\ \Delta C_{22} = \frac{k_{22}R^3}{3GM} \frac{1}{4} (\omega_y^2 - \omega_x^2) \\ \Delta S_{22} = -\frac{k_{22}R^3}{3GM} \frac{1}{2} \omega_x \omega_y \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Il est alors judicieux d'intégrer dans les coefficients du potentiel "rigide" du corps, la déformation permanente induite par sa vitesse de rotation moyenne $\bar{\omega}$ autour de son axe principal d'inertie ; ainsi, la moyenne de ΔC_{20} au cours du temps est nulle, et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{20} = \frac{k_{20} R^3}{3GM} \frac{1}{2} (\omega^2 + 2\bar{\omega}^2 - 3\omega_z^2) \\ \Delta C_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} \omega_x \omega_z \\ \Delta S_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} \omega_y \omega_z \\ \Delta C_{22} = \frac{k_{22} R^3}{3GM} \frac{1}{4} (\omega_y^2 - \omega_x^2) \\ \Delta S_{22} = -\frac{k_{22} R^3}{3GM} \frac{1}{2} \omega_x \omega_y \end{array} \right. \quad (4.26)$$

4.2.3 Prise en compte avec dissipation

Là encore, le corps étendu ne réagit pas immédiatement, et pour tenir compte de la dissipation, ce n'est pas le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}(t)$ qui intervient, mais $\vec{\omega}(t - \tau)$ (que l'on note $\vec{\omega}^*$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{20} = \frac{k_{20} R^3}{3GM} \frac{1}{2} (\omega^{*2} + \bar{\omega}^2 - 3\omega_z^{*2}) \\ \Delta C_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} \omega_x^* \omega_z^* \\ \Delta S_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} \omega_y^* \omega_z^* \\ \Delta C_{22} = \frac{k_{22} R^3}{3GM} \frac{1}{4} (\omega_y^{*2} - \omega_x^{*2}) \\ \Delta S_{22} = -\frac{k_{22} R^3}{3GM} \frac{1}{2} \omega_x^* \omega_y^* \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Comme dans le cas des effets de marées dissipatifs, on n'a pas accès directement au vecteur $\vec{\omega}(t - \tau)$ puisqu'on ne dispose dans le vecteur d'état que des angles d'Euler à l'instant t . Dans le chapitre 6, on expose quelques méthodes qui permettent d'estimer les angles d'Euler déphasés, dont on déduira le vecteur instantané de rotation déphasé.

4.3 Influence dans les équations du mouvement

L'objectif de cette partie est d'exposer les changements dans les équations du mouvement induits par le fait que les coefficients du potentiel, ainsi que ceux de la matrice d'inertie varient.

4.3.1 Calcul des forces

Dans le calcul des interactions entre un corps déformable et une masse ponctuelle, les formules vues au chapitre 2 restent valables. La méthode de calcul de la force exercée par le corps étendu sur la masse ponctuelle, ainsi que la force de réaction et le moment exercés par la masse ponctuelle sur le corps étendu n'est pas modifiée. Seules changent les valeurs que l'on impose aux coefficients du potentiel. Les masses des 2 corps n'étant pas modifiées par les effets de marées, on peut ensuite

appliquer la relation fondamentale de la dynamique comme si tous les corps étaient rigides, et donc déterminer leurs accélérations.

4.3.2 Équation d'Euler pour un corps déformable

Les changements induits dans l'équation 3.5 sont plus importants. En effet, le moment cinétique dépend non seulement du vecteur instantané de rotation, mais aussi de la matrice d'inertie du corps étendu. Et dans la dérivée du moment cinétique apparaît un terme dû à la dérivée de la matrice d'inertie. L'équation d'Euler (3.5) devient dans le cas d'un corps non rigide :

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\dot{\vec{\omega}} + I\dot{\vec{\omega}} = \vec{\mathcal{M}} - \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} \quad (4.28)$$

4.3.2.1 Changements dans la matrice d'inertie

On appelle I la matrice d'inertie du corps étendu lorsqu'il ne subit aucune déformation due aux effets de marées ou à son spin :

$$I = \begin{pmatrix} I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} + MR^2 \begin{pmatrix} C_{20} - 2C_{22} & -2S_{22} & -C_{21} \\ -2S_{22} & C_{20} + 2C_{22} & -S_{21} \\ -C_{21} & -S_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

De la même manière, on note I' sa matrice d'inertie alors qu'il subit des déformations :

$$\begin{aligned} I' &= \begin{pmatrix} I'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix} + MR^2 \begin{pmatrix} C'_{20} - 2C'_{22} & -2S'_{22} & -C'_{21} \\ -2S'_{22} & C'_{20} + 2C'_{22} & -S'_{21} \\ -C'_{21} & -S'_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix} + MR^2 \begin{pmatrix} C_{20} - 2C_{22} & -2S_{22} & -C_{21} \\ -2S_{22} & C_{20} + 2C_{22} & -S_{21} \\ -C_{21} & -S_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + MR^2 \begin{pmatrix} \Delta C_{20} - 2\Delta C_{22} & -2\Delta S_{22} & -\Delta C_{21} \\ -2\Delta S_{22} & \Delta C_{20} + 2\Delta C_{22} & -\Delta S_{21} \\ -\Delta C_{21} & -\Delta S_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Des 5 coefficients du potentiel, on ne peut déduire les 6 coefficients de la matrice d'inertie. Mais en considérant, d'après (Rochester & Smylie, 1974), que les effets de marée induisent une redistribution des masses à la surface du corps, sa trace est conservée. On a alors :

$$3I'_{33} + MR^2(2C_{20} + 2\Delta C_{20}) = 3I_{33} + 2MR^2C_{20} \quad (4.32)$$

Et on en déduit :

$$I'_{33} = I_{33} - \frac{2}{3}MR^2\Delta C_{20} \quad (4.33)$$

On a donc finalement :

$$I' = I + MR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\Delta C_{20} - 2\Delta C_{22} & -2\Delta S_{22} & -\Delta C_{21} \\ -2\Delta S_{22} & \frac{1}{3}\Delta C_{20} + 2\Delta C_{22} & -\Delta S_{21} \\ -\Delta C_{21} & -\Delta S_{21} & -\frac{2}{3}\Delta C_{20} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

À chaque instant, on peut donc décomposer la matrice $I(t)$ en la somme de 3 matrices : $I(t) = I_0 + I_t(t) + I_s(t)$. I_0 est la matrice du corps non déformé (et donc indépendante du temps), $I_t(t)$ est la partie due aux effets de marées solides et $I_s(t)$ celle due au spin.

Dans l'hypothèse où on ne considère qu'un seul nombre de love k et qu'un seul temps de réponse τ , tous deux indépendants de l'ordre de l'harmonique, on obtient les expressions suivantes pour I_t et I_s :

$$I_t(t) = m_g \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (-2r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & \frac{1}{3} (r_x^2 - 2r_y^2 + r_z^2) & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & \frac{1}{3} (r_x^2 + r_y^2 - 2r_z^2) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$I_s(t) = \frac{kR^5}{3G} \begin{pmatrix} \omega_x^2 - \frac{1}{3} (\omega^2 - n^2) & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y & \omega_y^2 - \frac{1}{3} (\omega^2 - n^2) & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & \omega_z^2 - \frac{1}{3} (\omega^2 + 2n^2) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Ces expressions sont compatibles avec (Williams et al., 2001). Dans (Newhall & Williams, 1997), on note la présence d'un facteur G , qui rend les matrices non homogènes à des moments d'inertie.

4.3.2.2 Dérivée de la matrice d'inertie

Dans l'équation d'Euler 4.28 apparait la dérivée de la matrice d'inertie, en particulier le terme dû aux marées solides \dot{I}_t et celui dû au spin \dot{I}_s :

$$(I_0 + I_t + I_s) \dot{\vec{\omega}} = -\dot{I}_t \vec{\omega} - \dot{I}_s \vec{\omega} + \vec{\mathcal{M}} - \vec{\omega} \wedge I \vec{\omega} \quad (4.37)$$

$$\text{avec } \dot{I} = MR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \Delta \dot{C}_{20} - 2\Delta \dot{C}_{22} & -2\Delta \dot{S}_{22} & -\Delta \dot{C}_{21} \\ -2\Delta \dot{S}_{22} & \frac{1}{3} \Delta \dot{C}_{20} + 2\Delta \dot{C}_{22} & -\Delta \dot{S}_{21} \\ -\Delta \dot{C}_{21} & -\Delta \dot{S}_{21} & -\frac{2}{3} \Delta \dot{C}_{20} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Pour la partie due aux effets de marées solides, on dérive les expressions 4.12 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{C}_{20} = \frac{m_g R^3 k_{20}}{M} \frac{1}{2} \left(-5 \frac{(2r_z^{*2} - r_x^{*2} - r_y^{*2})(r_x^* \dot{r}_x^* + r_y^* \dot{r}_y^* + r_z^* \dot{r}_z^*)}{r_g^{*7}} + 2 \frac{2r_z^* \dot{r}_z^* - r_y^* \dot{r}_y^* - r_x^* \dot{r}_x^*}{r_g^{*5}} \right) \\ \Delta \dot{C}_{21} = \frac{m_g R^3 k_{21}}{M} \left(-5 \frac{r_x^* r_z^* (r_x^* \dot{r}_x^* + r_y^* \dot{r}_y^* + r_z^* \dot{r}_z^*)}{r_g^{*7}} + \frac{r_x^* \dot{r}_z^* + r_z^* \dot{r}_x^*}{r_g^{*5}} \right) \\ \Delta \dot{C}_{22} = \frac{m_g R^3 k_{22}}{M} \frac{1}{4} \left(-5 \frac{(r_x^{*2} - r_y^{*2})(r_x^* \dot{r}_x^* + r_y^* \dot{r}_y^* + r_z^* \dot{r}_z^*)}{r_g^{*7}} + 2 \frac{r_x^* \dot{r}_x^* - r_y^* \dot{r}_y^*}{r_g^{*5}} \right) \\ \Delta \dot{S}_{21} = \frac{m_g R^3 k_{21}}{M} \left(-5 \frac{r_y^* r_z^* (r_x^* \dot{r}_x^* + r_y^* \dot{r}_y^* + r_z^* \dot{r}_z^*)}{r_g^{*7}} + \frac{r_y^* \dot{r}_z^* + r_z^* \dot{r}_y^*}{r_g^{*5}} \right) \\ \Delta \dot{S}_{22} = \frac{m_g R^3 k_{22}}{M} \frac{1}{2} \left(-5 \frac{r_x^* r_y^* (r_x^* \dot{r}_x^* + r_y^* \dot{r}_y^* + r_z^* \dot{r}_z^*)}{r_g^{*7}} + \frac{r_x^* \dot{r}_y^* + r_y^* \dot{r}_x^*}{r_g^{*5}} \right) \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Pour la partie due au spin, on dérive les expressions 4.27 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{C}_{20} = \frac{k_{20} R^3}{3GM} (\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y - 2\omega_z \dot{\omega}_z) \\ \Delta \dot{C}_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} (\omega_x \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_x) \\ \Delta \dot{S}_{21} = -\frac{k_{21} R^3}{3GM} (\omega_y \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_y) \\ \Delta \dot{C}_{22} = \frac{k_{22} R^3}{6GM} (\omega_y \dot{\omega}_y - \omega_x \dot{\omega}_x) \\ \Delta \dot{S}_{22} = -\frac{k_{22} R^3}{3GM} \frac{1}{2} (\omega_x \dot{\omega}_y + \omega_y \dot{\omega}_x) \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Là encore, si on suppose que les nombres de Love et les temps de réponses de la Terre sont indépendants de l'ordre de l'harmonique, on obtient les expressions suivantes pour \dot{I}_t et \dot{I}_s :

$$\begin{aligned} \dot{I}_t(t) = & -5m_g \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 k \frac{r_x \dot{r}_x + r_y \dot{r}_y + r_z \dot{r}_z}{r_g^2} \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} (-2r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & \frac{1}{3} (r_x^2 - 2r_y^2 + r_z^2) & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & \frac{1}{3} (r_x^2 + r_y^2 - 2r_z^2) \end{array} \right) \\ & + m_g \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 k \left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} (-2r_x \dot{r}_x + r_y \dot{r}_y + r_z \dot{r}_z) & -r_x \dot{r}_y - r_y \dot{r}_x & -r_x \dot{r}_z - r_z \dot{r}_x \\ -r_x \dot{r}_y - r_y \dot{r}_x & \frac{2}{3} (r_x \dot{r}_x - 2r_y \dot{r}_y + r_z \dot{r}_z) & -r_y \dot{r}_z - r_z \dot{r}_y \\ -r_x \dot{r}_z - r_z \dot{r}_x & -r_y \dot{r}_z - r_z \dot{r}_y & \frac{2}{3} (r_x \dot{r}_x + r_y \dot{r}_y - 2r_z \dot{r}_z) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\dot{I}_s(t) = \frac{kR^5}{3G} \left(\begin{array}{ccc} \frac{4}{3} \omega_x \dot{\omega}_x - \frac{2}{3} \omega_y \dot{\omega}_y - \frac{2}{3} \omega_z \dot{\omega}_z & \omega_x \dot{\omega}_y + \omega_y \dot{\omega}_x & \omega_x \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_x \\ \omega_x \dot{\omega}_y + \omega_y \dot{\omega}_x & -\frac{2}{3} \omega_x \dot{\omega}_x + \frac{4}{3} \omega_y \dot{\omega}_y - \frac{2}{3} \omega_z \dot{\omega}_z & \omega_y \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_y \\ \omega_x \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_x & \omega_y \dot{\omega}_z + \omega_z \dot{\omega}_y & -\frac{2}{3} \omega_x \dot{\omega}_x - \frac{2}{3} \omega_y \dot{\omega}_y + \frac{4}{3} \omega_z \dot{\omega}_z \end{array} \right) \quad (4.42)$$

Là encore, ces expressions sont conformes à celles de (Standish & Williams, 2006, eq. 8-10).

Chapitre 5

Interactions avec un corps à symétrie de révolution en rotation rapide

On a vu dans les chapitres 2 et 3 comment pouvaient se calculer les forces et moments dus aux interactions entre un corps étendu de forme quelconque et un corps ponctuel perturbateur. Les calculs étaient alors effectués dans le repère lié au solide, en fonction des coordonnées du corps ponctuel perturbateur dans ce même repère. Il était alors nécessaire de connaître la transformation (matrice de passage) qui permet de passer du repère fixe (dans lequel est projetée la relation fondamentale de la dynamique) vers le repère mobile lié au solide.

L'objet ici est de simplifier les équations lorsque le corps étendu est à symétrie de révolution autour de son axe principal d'inertie, dirigé selon \vec{K} .

On a vu au chapitre 3 que la matrice pour le passage du repère fixe au repère mobile pouvait (ce n'est pas une obligation) être exprimée en fonction des trois angles d'Euler : ϕ , angle de précession propre, θ , angle de nutation propre et ψ , angle de rotation propre. On montrera dans ce chapitre que dans le cas d'un corps à symétrie de révolution, on peut ne pas tenir compte de l'angle rapide ψ dans le calcul des interactions (forces et moments) avec un corps ponctuel perturbateur.

Dans tout ce qui suit, on notera (voir le schéma 3.1) :

- \mathcal{B}_0 , la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère fixe
- \mathcal{B}_1 , la base $(\vec{n}, \vec{K} \wedge \vec{n}, \vec{K})$ du repère mobile lié à l'équateur du corps, où $\vec{n} = \overrightarrow{O\Omega}$
- \mathcal{B}_2 , la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ du repère mobile lié au corps

Les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont toutes deux liées au solide et \mathcal{B}_2 se déduit de \mathcal{B}_1 par la rotation d'angle rapide ψ . Comme on l'a vu au chapitre 3, la matrice de passage P_2 de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_2 s'écrit :

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_{\mathcal{B}_0} = P_2 \vec{u}_{\mathcal{B}_2} \quad (5.1)$$

De la même manière, on définit P_1 , matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_1 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_{\mathcal{B}_0} = P_1 \vec{u}_{\mathcal{B}_1} \quad (5.2)$$

La matrice de passage P_1 ne dépend donc que des angles ϕ et θ , et comme $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{K} / \|\vec{k} \wedge \vec{K}\|$, elle peut même être exprimée uniquement en fonction des coordonnées (K_x, K_y, K_z) de \vec{K} dans

la base \mathcal{B}_0 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{K_y}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} & -\frac{K_x K_z}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} & K_x \\ \frac{K_x}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} & -\frac{K_y K_z}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} & K_y \\ 0 & \frac{K_z}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} & K_z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

On se propose de montrer ici que pour un corps à symétrie de révolution, il est inutile de passer dans la base \mathcal{B}_2 , forces et moments peuvent être calculés dans \mathcal{B}_1 , voire directement dans \mathcal{B}_0 .

5.1 Forces et moments "rigides"

On ne s'intéresse ici qu'aux interactions dues à la partie du corps étendu non déformée par d'éventuels effets de marées, car ces derniers introduisent des termes tesséraux (C_{21} , S_{21} , C_{22} et S_{22}).

5.1.1 Élimination de l'angle rapide ψ - expressions dans \mathcal{B}_1

On reprend l'expression générale (2.10) du potentiel (partie non sphérique) dû à un corps étendu. Ce potentiel est exprimé dans le repère lié au solide, c'est-à-dire que les coordonnées sphériques du corps ponctuel perturbateur $(r_2, \varphi_2, \lambda_2)$, ainsi que les coefficients du potentiel (C_{nm} , S_{nm}) sont exprimés dans la base \mathcal{B}_2 :

$$U(r_2, \varphi_2, \lambda_2) = -\frac{GM}{r_2} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r_2}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi_2) (C_{nm} \cos m\lambda_2 + S_{nm} \sin m\lambda_2) \quad (5.4)$$

Or le corps est à symétrie de révolution autour de l'axe \vec{K} . Son potentiel est donc invariant par toute rotation d'axe \vec{K} et d'angle quelconque α . Une telle rotation ne modifie que la longitude λ_2 du corps perturbateur. On en déduit alors que le potentiel est indépendant de λ_2 , tous les coefficients tesséraux du potentiel sont nuls, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 2$, pour tout $m \geq 1$, $C_{nm} = S_{nm} = 0$. Seuls les coefficients zonaux $C_{n0} = -J_n$ sont non nuls, et le potentiel se réduit alors à :

$$U(r_2, \varphi_2) = -\frac{GM}{r_2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R}{r_2}\right)^n C_{n0} P_{n0}(\sin \varphi_2) \quad (5.5)$$

Or, \mathcal{B}_1 se déduit de \mathcal{B}_2 par la rotation d'axe \vec{K} et d'angle $-\psi$, on en déduit l'expression du potentiel en fonction des coordonnées sphériques $(r_1, \varphi_1, \lambda_1) = (r_2, \varphi_2, \lambda_2 + \psi)$ du corps perturbateur dans \mathcal{B}_1 :

$$U(r_1, \varphi_1) = -\frac{GM}{r_1} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R}{r_1}\right)^n C_{n0} P_{n0}(\sin \varphi_1) \quad (5.6)$$

Forces et moments peuvent donc être calculés directement dans \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 est ici inutile. Leurs expressions sont indépendantes de l'angle rapide ψ .

5.1.2 Expressions dans \mathcal{B}_0

En remarquant que $\sin \varphi = (\vec{K} \cdot \vec{r})/r$, on peut même simplifier un peu plus le problème en les exprimant directement dans \mathcal{B}_0 ; c'est l'objet des paragraphes qui suivent.

5.1.2.1 Harmonique C_{20}

$$U_{C_{20}} = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 C_{20} P_{20}(\sin \varphi) = -\frac{1}{2} \frac{GM R^2 C_{20}}{r^5} \left(3 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2 - r^2\right) \quad (5.7)$$

En prenant l'opposé du gradient de cette expression, on obtient l'accélération $\ddot{\vec{r}}_P$ du corps perturbateur ainsi que celle $\ddot{\vec{r}}_E$ du corps étendu :

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{3}{2} \frac{GM R^2 C_{20}}{r^7} \left[2r^2 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right) \vec{K} + \left(r^2 - 5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2\right) \vec{r}\right] \quad (5.8)$$

$$\ddot{\vec{r}}_E = -\frac{3}{2} \frac{Gm R^2 C_{20}}{r^7} \left[2r^2 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right) \vec{K} + \left(r^2 - 5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2\right) \vec{r}\right] \quad (5.9)$$

On en déduit également le moment qui s'exerce sur le corps étendu :

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_{20}} = M \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}}_E = 3 \frac{Gm M R^2 C_{20}}{r^5} \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right) \vec{K} \wedge \vec{r} \quad (5.10)$$

5.1.2.2 Harmonique C_{30}

$$U_{C_{30}} = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 C_{30} P_{30}(\sin \varphi) = -\frac{1}{2} \frac{GM R^3 C_{30}}{r^7} \left(5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^3 - 3r^2 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)\right) \quad (5.11)$$

De la même manière qu'au paragraphe précédent, on trouve les expressions de l'accélération du corps perturbateur, celle du corps étendu ainsi que le moment exercé sur le corps étendu :

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{1}{2} \frac{GM R^3 C_{30}}{r^9} \left[5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right) \left(3r^2 - 7 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2\right) \vec{r} + 3r^2 \left(5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2 - r^2\right) \vec{K}\right] \quad (5.12)$$

$$\ddot{\vec{r}}_E = -\frac{1}{2} \frac{Gm R^3 C_{30}}{r^9} \left[5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right) \left(3r^2 - 7 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2\right) \vec{r} + 3r^2 \left(5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2 - r^2\right) \vec{K}\right] \quad (5.13)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_{30}} = \frac{3}{2} \frac{GMm R^3 C_{30}}{r^7} \left(5 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2 - r^2\right) \vec{K} \wedge \vec{r} \quad (5.14)$$

5.1.2.3 Harmonique C_{40}

$$U_{C_{40}} = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^4 C_{40} P_{40}(\sin \varphi) = -\frac{1}{8} \frac{GM R^4 C_{40}}{r^9} \left(35 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^4 - 30r^2 \left(\vec{K} \cdot \vec{r}\right)^2 + 3r^4\right) \quad (5.15)$$

De la même manière qu'aux paragraphes précédents, on trouve les expressions de l'accélération du corps perturbateur, celle du corps étendu ainsi que le moment exercé sur le corps étendu :

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{5}{8} \frac{GM R^4 C_{40}}{r^{11}} \left[\left(42r^2 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 - 63 (\vec{K} \cdot \vec{r})^4 - 3r^4 \right) \vec{r} + 4r^2 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 \left(7 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 - 3r^2 \right) \vec{K} \right] \quad (5.16)$$

$$\ddot{\vec{r}}_E = -\frac{5}{8} \frac{Gm R^4 C_{40}}{r^{11}} \left[\left(42r^2 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 - 63 (\vec{K} \cdot \vec{r})^4 - 3r^4 \right) \vec{r} + 4r^2 (\vec{K} \cdot \vec{r}) \left(7 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 - 3r^2 \right) \vec{K} \right] \quad (5.17)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_{40}} = \frac{5}{2} \frac{GMm R^4 C_{40}}{r^9} (\vec{K} \cdot \vec{r}) \left(7 (\vec{K} \cdot \vec{r})^2 - 3r^2 \right) \vec{K} \wedge \vec{r} \quad (5.18)$$

5.1.3 Conclusion

Dans l'hypothèse où le corps étendu est à symétrie de révolution, les interactions (forces et moments) avec un corps ponctuel perturbateur sont indépendantes de l'angle rapide de rotation propre ψ . Pour leur calcul, la base \mathcal{B}_2 est alors inutile, on peut se contenter de les exprimer dans \mathcal{B}_1 , voire directement dans \mathcal{B}_0 .

5.2 Forces et moments dus à la déformation de la Terre

On s'intéresse ici aux forces et moments exercés sur le corps étendu dus à sa partie déformée par les effets de marée d'un corps générateur. On a vu au chapitre 4 que la déformation d'un corps dans INPOP était modélisée par les variations de ses coefficients du potentiel (et donc de sa matrice d'inertie). La variation du potentiel résultant de la déformation du corps est :

$$\Delta U(r, \varphi, \lambda) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) \quad (5.19)$$

En prenant l'opposé du gradient, on en déduira les forces et les moments qui s'exercent entre le corps étendu et le corps ponctuel perturbateur.

On se limite pour l'instant aux déformations des harmoniques de degré 2, c'est-à-dire que l'on ne tient compte que des variations des coefficients de degré 2 du potentiel : ΔC_{nm} et ΔS_{nm} pour $n = 2$. À partir de ces variations des coefficients du potentiel, on peut déduire celles de la matrice d'inertie (voir l'expression 4.34) :

$$\Delta I = MR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \Delta C_{20} - 2\Delta C_{22} & -2\Delta S_{22} & -\Delta C_{21} \\ -2\Delta S_{22} & \frac{1}{3} \Delta C_{20} + 2\Delta C_{22} & -\Delta S_{21} \\ -\Delta C_{21} & -\Delta S_{21} & -\frac{2}{3} \Delta C_{20} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Cette expression reste valable quelle que soit la base utilisée, à partir du moment où les variations des coefficients du potentiel sont exprimées dans la même que la variation de la matrice d'inertie.

Pour le calcul des forces et moments, comme on se limite aux déformations des harmoniques de degré 2, on peut utiliser l'expression du potentiel en fonction de la matrice d'inertie de Mac Cullagh (démontrée au paragraphe 2.2.3.2) :

$$\Delta U_2 = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 P_{2m}(\sin \varphi) (\Delta C_{2m} \cos m\lambda + \Delta S_{2m} \sin m\lambda) \quad (5.21)$$

$$= \frac{G}{2r^5} (3\vec{r} \cdot \Delta I \vec{r} - \text{tr}(\Delta I) r^2) = \frac{3G}{2r^5} \vec{r} \cdot \Delta I \vec{r} \quad (5.22)$$

En prenant l'opposé du gradient de ce potentiel, on obtient l'accélération du corps ponctuel perturbateur due à la déformation du corps étendu induite par un corps générateur de marées :

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{3G}{2r^7} (5\vec{r} \cdot \Delta I \vec{r} - \text{tr}(\Delta I) r^2) \vec{r} - \frac{3G}{r^5} \Delta I \vec{r} \quad (5.23)$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{15G}{2r^7} (\vec{r} \cdot \Delta I \vec{r}) \vec{r} - \frac{3G}{r^5} \Delta I \vec{r} \quad (5.24)$$

ainsi que le moment exercé sur le corps étendu :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{3Gm}{r^5} \vec{r} \wedge \Delta I \vec{r} \quad (5.25)$$

Là encore, ces expressions sont valables dans n'importe quelle base, du moment que le vecteur \vec{r} du corps ponctuel perturbateur et la variation de la matrice d'inertie ΔI sont exprimés dans la même.

Jusqu'à présent, les expressions (4.12) qui permettent de déterminer les variations des coefficients du potentiel sont données dans le repère lié au corps étendu, c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes déphasées (r_x^* , r_y^* , r_z^*) du corps générateur doivent être exprimées dans \mathcal{B}_2 . Ces coordonnées se déduisent de celles dans \mathcal{B}_0 par (on note $\alpha^* = \alpha(t - \tau)$) :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mathcal{B}_2}^* &= {}^t P_2^* \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi^* & \sin \psi^* & 0 \\ -\sin \psi^* & \cos \psi^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^* & \sin \theta^* \\ 0 & -\sin \theta^* & \cos \theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi^* & \sin \phi^* & 0 \\ -\sin \phi^* & \cos \phi^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi^* & \sin \psi^* & 0 \\ -\sin \psi^* & \cos \psi^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t P_1^* \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \quad (5.27)$$

Dans le cas d'une vitesse de rotation rapide du corps étendu, on peut considérer que l'angle rapide ψ varie linéairement entre t et $t - \tau$, c'est-à-dire que l'on a $\psi(t - \tau) \simeq \psi(t) - \tau\omega$ où ω est la vitesse de rotation (qui peut néanmoins ne pas être constante au cours du temps). De plus, on peut noter que les angles ϕ et θ sont "lents", c'est-à-dire qu'ils varient peu entre les instants $t - \tau$ et t pour de faibles valeurs de τ (c'est le cas par exemple pour la Terre, où le temps de déphasage le plus important est celui associé aux harmoniques ΔC_{21} et ΔS_{21} , avec $\tau_{21} \simeq 1.3 \times 10^{-2}$ jour).

On utilisera alors les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \psi(t - \tau) \simeq \psi(t) - \tau\omega \\ \phi(t - \tau) \simeq \phi(t) \\ \theta(t - \tau) \simeq \theta(t) \end{cases} \quad (5.28)$$

Et les coordonnées déphasées du corps générateur de marées seront calculées dans \mathcal{B}_2 par :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mathcal{B}_2}^* = & \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & -\sin \omega\tau & 0 \\ \sin \omega\tau & \cos \omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \quad (5.29) \end{aligned}$$

Les approximations 5.28 ont été justifiées numériquement, en construisant deux solutions planétaires du type INPOP05 (avec une précession forcée pour la Terre). La première utilisait ${}^tP_1^*$, l'autre tP_1 . Les différences entre ces deux solutions sur la trajectoire de la Lune autour de la Terre étaient bien inférieures aux différences obtenues entre INPOP05 et DE405, illustrées par les courbes de la figure 11.31.

En utilisant les expressions 5.20, 5.29 et 4.12, on peut donc calculer la variation de la matrice d'inertie ΔI exprimée dans la base \mathcal{B}_2 .

5.2.1 Variation de la matrice d'inertie dans \mathcal{B}_1

On a vu au paragraphe précédent le calcul de la variation de la matrice d'inertie dans \mathcal{B}_2 . La première méthode pour exprimer ΔI dans \mathcal{B}_1 est d'effectuer un changement de base à partir de \mathcal{B}_2 :

$$\Delta I_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta I_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

La deuxième méthode est d'exprimer directement les coordonnées déphasées du corps générateur dans \mathcal{B}_1 .

$$\vec{r}_{\mathcal{B}_1}^* = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & -\sin \omega\tau & 0 \\ \sin \omega\tau & \cos \omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \quad (5.31)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & -\sin \omega\tau & 0 \\ \sin \omega\tau & \cos \omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP_1 \vec{r}_{\mathcal{B}_0}^* \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

De $\vec{r}_{\mathcal{B}_1}^*$ on en déduit les variations des coefficients du potentiel (exprimés dans \mathcal{B}_1) grâce aux expressions 4.12, puis la partie déformée de la matrice d'inertie $\Delta I_{\mathcal{B}_1}$ grâce à 5.20.

Ces deux méthodes sont équivalentes, elles ont été comparées avec TRIP, le logiciel de calcul formel dédié à la mécanique céleste et aux séries de perturbations et développé à l'IMCCE par Gastineau & Laskar (2010).

Remarque : on n'a pas utilisé ici le fait que le corps était à symétrie de révolution, c'est inutile pour le calcul de ΔI . Ça le serait si on devait calculer la matrice d'inertie "totale" d'un corps comme la somme d'une partie "rigide" est d'une partie déformée : $I(t) = I_0 + \Delta I$. Si le corps n'était pas à symétrie de révolution, I_0 ne serait pas invariante par toute rotation de vecteur \vec{K} .

5.2.2 Variation de la matrice d'inertie dans \mathcal{B}_0

Là encore, on peut déduire l'expression de ΔI dans \mathcal{B}_0 par changement de base à partir de \mathcal{B}_1 :

$$\Delta I_{\mathcal{B}_0} = P_1 \Delta I_{\mathcal{B}_1} {}^tP_1 \quad (5.34)$$

Par contre, les expressions des variations des coefficients du potentiel dans \mathcal{B}_0 à partir du vecteur déphasé $\vec{r}_{\mathcal{B}_0}^*$ sont beaucoup plus compliquées que dans la base \mathcal{B}_1 , les paragraphes qui suivent montrent pourquoi.

Dans tout ce qui suit, on appellera ΔC_{2m} et ΔS_{2m} les variations des coefficients du potentiel exprimées dans \mathcal{B}_1 et I_3 la matrice identité de \mathbb{R}^3 .

5.2.2.1 Harmonique ΔC_{20}

La variation de la matrice d'inertie due à celle de l'harmonique ΔC_{20} se déduit de 5.20 :

$$\Delta I_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}MR^2\Delta C_{20} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}MR^2\Delta C_{20} (I_3 - 3\vec{K}^t\vec{K}) \quad (5.35)$$

Exprimée sous forme vectorielle, cette expression est également valable pour déterminer $\Delta I_{\mathcal{B}_0}$ (avec toutefois ΔC_{20} calculé dans \mathcal{B}_1) :

$$\Delta I_{\mathcal{B}_0} = \frac{1}{3}MR^2\Delta C_{20} (I_3 - 3\vec{K}^t\vec{K}) \quad (5.36)$$

À ce stade, on peut déjà se rendre compte de la difficulté de calculer les variations des coefficients du potentiel à partir des coordonnées déphasées du corps générateur exprimées dans la base fixe \mathcal{B}_0 . Dans cette dernière, la matrice $\vec{K}^t\vec{K}$ est pleine, et si on utilise 5.20, on peut voir que $(\Delta C_{20})_{\mathcal{B}_1}$ (et donc par exemple le nombre de Love k_{20}) interviendra dans tous les $(\Delta C_{2m}, \Delta S_{2m})_{\mathcal{B}_0}$. On ne peut donc pas utiliser aussi simplement dans \mathcal{B}_0 que dans \mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_2 les expressions 4.12.

5.2.2.2 Autres harmoniques

De la même manière, pour les autres harmoniques ΔC_{21} , ΔS_{21} , ΔC_{22} , ΔS_{22} , on obtient :

$$\Delta C_{21} : \Delta I_{\mathcal{B}_1} = -MR^2\Delta C_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -MR^2\Delta C_{21} (\vec{I}^t\vec{K} + \vec{K}^t\vec{I}) \quad (5.37)$$

$$\Delta S_{21} : \Delta I_{\mathcal{B}_1} = -MR^2\Delta S_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -MR^2\Delta S_{21} (\vec{J}^t\vec{K} + \vec{K}^t\vec{J}) \quad (5.38)$$

$$\Delta C_{22} : \Delta I_{\mathcal{B}_1} = 2MR^2\Delta C_{22} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2MR^2\Delta C_{22} (\vec{J}^t\vec{J} - \vec{I}^t\vec{I}) \quad (5.39)$$

$$\Delta S_{22} : \Delta I_{\mathcal{B}_1} = -2MR^2\Delta S_{22} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2MR^2\Delta S_{22} (\vec{I}^t\vec{J} + \vec{J}^t\vec{I}) \quad (5.40)$$

Toutes les matrices $(\vec{u}^t\vec{v})$ pour $(\vec{u}, \vec{v}) \in \{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}^2$ sont pleines si elles sont exprimées dans \mathcal{B}_0 , et donc, chaque coefficient du potentiel exprimé dans cette base dépend de l'ensemble des nombres de Love k_{20} , k_{21} et k_{22} (et même de l'ensemble des temps de déphasages τ_{20} , τ_{21} et τ_{22}). D'où des expressions plus compliquées si on voulait les calculer directement dans \mathcal{B}_0 .

5.2.3 Conclusion

Pour résumer, la base \mathcal{B}_2 est inutile, le calcul des forces et moments peut être effectué dans la base liée à son équateur \mathcal{B}_1 . On s'affranchit ainsi de l'angle rapide ψ .

Deux approximations ont été effectuées, n'intervenant que pour le calcul des coordonnées déphasées du corps générateur de marées (dont on déduit les variations des coefficients du potentiel).

La première est de considérer une variation linéaire de l'angle (rapide) de rotation propre du corps entre t et $t - \tau$: $\psi(t - \tau) = \psi(t) - \tau\omega$. Cela ne signifie pas que la vitesse de rotation ω doit être constante au cours du temps, mais que ses variations sont de périodes plus importantes que τ . Cette approximation n'est par exemple pas incompatible avec le ralentissement séculaire de la vitesse de rotation de la Terre. La seconde est de considérer que l'équateur à la date t est très proche de celui de la date $t - \tau$. Elle a été vérifiée numériquement dans le cas d'une orientation forcée par un modèle de précession-nutation.

Enfin, la manière la plus simple de calculer la matrice $\Delta I_{\mathcal{B}_0}$ est de la calculer d'abord dans \mathcal{B}_1 , puis par changement de base, dans \mathcal{B}_0 .

5.3 Calcul de l'orientation du corps

5.3.1 Orientation moyennée sur l'angle rapide

Boué & Laskar (2006) ont montré que l'orientation d'un corps en rotation rapide soumis aux moments de degré 2 (voir expression 5.10) pouvait être régie par l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{W}} &= \frac{2 - 3 \sin^2 J}{\|\vec{G}\|} \sum_i (\vec{u}_i \cdot \vec{W}) \vec{u}_i \wedge \vec{W} \\ &= 3 \frac{2 - 3 \sin^2 J}{\|\vec{G}\|} \times \frac{C - A}{2} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{r}_i \cdot \vec{W}) \vec{r}_i \wedge \vec{W}\end{aligned}\quad (5.41)$$

Dans cette équation :

- \vec{G} est le moment cinétique
- \vec{W} est la moyenne de \vec{G}/G sur l'angle rapide ψ
- J est l'angle moyen entre \vec{K} et \vec{G}
- i désigne l'indice d'un corps perturbateur
- \vec{r}_i est le rayon vecteur du corps perturbateur, $r_i = \|\vec{r}_i\|$, μ_i le produit de la constante de gravitation par sa masse
- A et C sont les moments principaux d'inertie du corps étendu

Remarque : cette expression peut être étendue à un corps qui n'est pas à symétrie de révolution, en remplaçant $C - A$ par $C - (A + B)/2$.

Dans le cas d'un corps en rotation rapide, J est petit ($J = \mathcal{O}(10^{-7})$ pour la Terre par exemple, donc $\sin^2 J = \mathcal{O}(10^{-14})$) et peut être négligé. (5.41) devient alors :

$$\dot{\vec{W}} = 3 \frac{C - A}{\|\vec{G}\|} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{r}_i \cdot \vec{W}) \vec{r}_i \wedge \vec{W}\quad (5.42)$$

5.3.2 Théorème du moment cinétique

D'après le théorème du moment cinétique projeté dans le repère fixe, sa dérivée $\dot{\vec{G}}$ est égale à la somme des moments extérieurs exercés sur le corps étendu :

$$\dot{\vec{G}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \quad (5.43)$$

Dans $\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}$ peuvent intervenir les moments de degré 2 du potentiel (voir 5.10), comme c'est le cas dans l'article (Boué & Laskar, 2006). Mais on peut également tenir compte des moments de degrés supérieurs (voir 5.14 et 5.18) ou du moment dû à la déformation du corps (voir 5.25).

5.3.2.1 Corps soumis aux moments de degré 2

On ne considère ici dans la somme des moments extérieurs qui s'exercent sur le corps étendu que les moments de degré 2 (dus au coefficient du potentiel C_{20}) calculés en 5.10. Le théorème du moment cinétique donne donc :

$$\dot{\vec{G}} = 3MR^2C_{20} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{K} \cdot \vec{r}_i) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \quad (5.44)$$

Or on a vu que l'on pouvait négliger $\sin^2 J$ dans 5.41, ce qui est équivalent à utiliser l'approximation gyroscopique, c'est-à-dire remplacer \vec{K} par $\vec{G}/\|\vec{G}\|$. L'équation précédente devient alors :

$$\dot{\vec{G}} = 3 \frac{MR^2C_{20}}{\|\vec{G}\|^2} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{G} \cdot \vec{r}_i) \vec{G} \wedge \vec{r}_i \quad (5.45)$$

On remarque alors que $\|\vec{G}\|$ est constant au cours du temps (car $\dot{\vec{G}} \cdot \vec{G} = 0$), que $MR^2C_{20} = A - C$ (voir les relations entre les coefficients de la matrice d'inertie et ceux du potentiel). On retrouve alors (5.42) issue de (Boué & Laskar, 2006). Dans ces conditions, la vitesse de rotation du corps est constante au cours du temps.

5.3.2.2 Cas général

Par rapport au paragraphe précédent, on ajoute les moments de degrés supérieurs (issus des coefficients C_{30} et C_{40}), ainsi que de ceux provenant de la déformation due aux effets de marées de corps générateurs.

Le théorème du moment cinétique dans \mathcal{B}_0 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{G}} = & 3MR^2C_{20} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{K} \cdot \vec{r}_i) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\ & + \frac{3}{2}MR^3C_{30} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^7} \left(5(\vec{K} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 \right) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\ & + \frac{5}{2}MR^4C_{40} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^9} (\vec{K} \cdot \vec{r}_i) \left(7(\vec{K} \cdot \vec{r}_i)^2 - 3r_i^2 \right) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\ & + 3 \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} \vec{r}_i \wedge \Delta I_{\mathcal{B}_0} \vec{r}_i \end{aligned} \quad (5.46)$$

On a vu dans un paragraphe précédent que la matrice $\Delta I_{\mathcal{B}_0}$ se déduisait de $\Delta I_{\mathcal{B}_1}$ par chan-

gement de base. L'équation précédente devient alors

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{G}} = & 3MR^2C_{20} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{K} \cdot \vec{r}_i) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\
& + \frac{3}{2}MR^3C_{30} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^7} \left(5 (\vec{K} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 \right) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\
& + \frac{5}{2}MR^4C_{40} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^9} (\vec{K} \cdot \vec{r}_i) \left(7 (\vec{K} \cdot \vec{r}_i)^2 - 3r_i^2 \right) \vec{K} \wedge \vec{r}_i \\
& + 3 \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} \vec{r}_i \wedge P_1 \Delta I_{\mathcal{B}_1} {}^t P_1 \vec{r}_i
\end{aligned} \tag{5.47}$$

avec la matrice de passage P_1 qui ne dépend que de \vec{K} .

On a vu dans le paragraphe précédent que l'on pouvait utiliser l'approximation gyroscopique pour le calcul de l'orientation d'un corps soumis aux moments dus à son C_{20} . Si on suppose qu'on peut la conserver lorsqu'on prend en compte les moments de degrés supérieurs et ceux dus à la déformation du corps, on obtient au final, en posant $\vec{G}_u = \vec{G} / \|\vec{G}\|$:

$$\dot{\vec{G}} = 3MR^2C_{20} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} (\vec{G}_u \cdot \vec{r}_i) \vec{G}_u \wedge \vec{r}_i \tag{5.48}$$

$$+ \frac{3}{2}MR^3C_{30} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^7} \left(5 (\vec{G}_u \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2 \right) \vec{G}_u \wedge \vec{r}_i \tag{5.49}$$

$$+ \frac{5}{2}MR^4C_{40} \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^9} (\vec{G}_u \cdot \vec{r}_i) \left(7 (\vec{G}_u \cdot \vec{r}_i)^2 - 3r_i^2 \right) \vec{G}_u \wedge \vec{r}_i \tag{5.50}$$

$$+ 3 \sum_i \frac{\mu_i}{r_i^5} \vec{r}_i \wedge \tilde{P}_1 \Delta \tilde{I}_{\mathcal{B}_1} {}^t \tilde{P}_1 \vec{r}_i \tag{5.51}$$

avec cette fois la matrice \tilde{P}_1 qui ne dépend que des coordonnées (G_x, G_y, G_z) de \vec{G} dans \mathcal{B}_0

$$\tilde{P}_1 = \frac{1}{\|\vec{G}\|} \begin{pmatrix} -\frac{\|\vec{G}\|G_y}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2}} & -\frac{G_x G_z}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2}} & G_x \\ \frac{\|\vec{G}\|G_x}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2}} & -\frac{G_y G_z}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2}} & G_y \\ 0 & \sqrt{G_x^2 + G_y^2} & G_z \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

et $\Delta \tilde{I}_{\mathcal{B}_1}$ calculée en utilisant \tilde{P}_1 au lieu de P_1 lors du calcul des coordonnées déphasées des corps générateurs de marées.

Chapitre 6

Estimation des déphasages

On a vu au chapitre 4 qu'en raison de la dissipation, un corps non rigide réagit avec un temps de retard (noté τ) aux sollicitations d'un corps générateur de marées ou aux variations de son spin. Sa forme à l'instant t dépend donc de l'état du système à l'instant $t - \tau$. On se retrouve alors à résoudre une équation différentielle du type :

$$Y'(t) = f(t, Y(t), Y(t - \tau_1), Y(t - \tau_2), \dots, Y(t - \tau_n)) \quad (6.1)$$

Ce type d'équation est appelé "équation différentielle à retard" et les intégrateurs numériques usuels sont inadaptés à leur résolution.

On cherche donc à se ramener à une équation différentielle classique, du type $Y'(t) = g(t, Y(t))$, en essayant d'éliminer les termes $Y(t - \tau)$; le but de ce chapitre est d'exposer et de comparer quelques méthodes qui permettent d'estimer $Y(t - \tau)$ à partir de $Y(t)$. Pour chacune des méthodes exposées ci-après, deux types d'évaluation de leurs performances peuvent être effectués.

La première (que l'on notera Type-I) consiste à utiliser une solution planétaire de référence, qu'on suppose avoir été obtenue avec une bonne méthode d'estimation des déphasages; il semble que ce soit le cas de DE405 (et des solutions INPOP décrites dans les chapitres 11 à 13). Avec cette solution, on a accès aux valeurs du vecteur d'état $Y_0(t)$ pour différents instants t , ainsi qu'aux valeurs déphasées $Y_0(t - \tau)$. Puis, à partir de $Y_0(t)$, on utilise une méthode d'estimation (numérotée i) pour obtenir $Y_i(t - \tau) = h_i(Y_0(t))$, qu'on compare à $Y_0(t - \tau)$.

La seconde évaluation (notée Type-II) consiste à intégrer une première solution, notée SOLi_a sur le modèle d'INPOP05 par exemple (décrit au chapitre 11), mais en utilisant la méthode d'estimation des déphasages que l'on souhaite évaluer. À partir de SOLi_a, on construit des polynômes d'interpolation (Tchebychev) qui permettent d'avoir accès aux composantes du vecteur d'état pour n'importe quel instant t . On intègre ensuite une seconde solution, notée SOLi_b, sur le même modèle dynamique, à la différence que chaque fois qu'une variable déphasée intervient, on la détermine en faisant appel aux polynômes d'interpolation construits sur SOLi_a. La méthode d'estimation est alors d'autant meilleure que les solutions SOLi_a et SOLi_b sont proches.

L'évaluation de Type-I donne l'erreur commise sur l'estimation de la quantité déphasée. Celle de Type-II illustre les conséquences de cette erreur sur la solution planétaire.

Dans INPOP, seuls deux corps sont considérés non rigides :

- la Terre est déformée par les marées solides générées par la Lune et le Soleil
- la Lune est déformée par les marées solides générées par la Terre (et le Soleil selon les versions), ainsi que par les variations de son spin.

Seules quelques composantes (déphasées) du vecteur d'état interviennent donc dans le calcul des déformations ΔC_{nm} et ΔS_{nm} : les vecteurs Terre-Lune, Terre-Soleil et Lune-Soleil, les angles de d'Euler de la Lune (qu'on appellera aussi angles de libration de la Lune dans la suite de ce document), ainsi que les dérivées de toutes ces variables.

Enfin, il faut remarquer que l'on n'a pas nécessairement besoin d'une grande précision dans l'estimation des quantités déphasées. Ces dernières n'interviennent que dans la détermination des variations des coefficients du potentiel ($\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm}$) ou des matrices d'inertie. Ces variations, petites devant les coefficients (C_{nm}, S_{nm}), n'interviennent que dans les interactions dues à la forme des corps, elles-mêmes petites comparées au terme principal newtonien.

6.1 Positions relatives des corps dans l'ICRF à $t - \tau$

On souhaite obtenir une estimation des positions déphasées des corps dans le repère fixe (ICRF). Dans tout ce qui suit, on note $\vec{r} = \vec{r}(t)$, le vecteur centre du corps déformé-centre du corps générateur de marées, $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ sa dérivée et \tilde{r}_i et $\dot{\tilde{r}}_i$ une estimation de $\vec{r}(t - \tau)$ et $\dot{\vec{r}}(t - \tau)$ (selon la méthode i).

On ne s'intéressera ici qu'au vecteur Terre-Lune, les résultats étant similaires avec les vecteurs Terre-Soleil ou Lune-Soleil. Par contre, l'efficacité d'une méthode d'évaluation peut dépendre du temps de déphasage, selon s'il est important (τ_M pour la Lune est d'environ 4 heures) ou petit (τ_{E20}, τ_{E21} et τ_{E22} pour la Terre valent environ 0, 20 et 10 minutes).

Pour chaque instant t dans les comparaisons de Type-I, on prendra pour référence \tilde{r}_0 et $\dot{\tilde{r}}_0$ les vecteurs position-vitesse Terre-Lune à $t - \tau$ déterminés avec DE405. Les valeurs de τ testées seront $\tau_M = 0.17$ jour (environ 4 heures) et $\tau_E = 0.013$ jour (environ 20 minutes), proches de celles employées pour DE405.

6.1.1 Méthode 1 : ordre 1 sur les coordonnées cartésiennes

À partir du vecteur Terre-Lune à l'instant t , on effectue un développement limité au premier ordre en τ ; cela revient donc à supposer qu'entre t et $t - \tau$, la trajectoire de la Lune par rapport à la Terre est rectiligne uniforme :

$$\begin{cases} \tilde{r}_1 = \vec{r} - \tau \dot{\vec{r}} \\ \dot{\tilde{r}}_1 = \dot{\vec{r}} \end{cases} \quad (6.2)$$

Ce serait, d'après E. M. Standish (communication privée, 2004), la méthode employée au Jet Propulsion Laboratory pour le calcul de la solution DE405. Cette méthode est aussi employée par Mignard (1979).

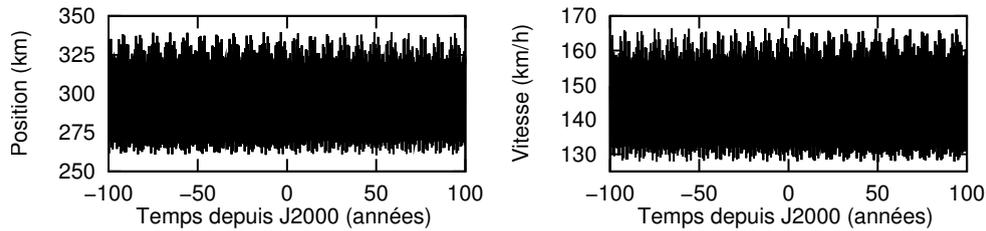


FIGURE 6.1 – Erreurs (Type-I) sur la position $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_1\|$ à gauche, la vitesse $\|\dot{\tilde{r}}_0 - \dot{\tilde{r}}_1\|$ à droite dues à une approximation au premier ordre en τ du vecteur Terre-Lune déphasé de $\tau = 0.17$ jour (temps de réaction de la Lune). Les erreurs sont en km et km/h, le temps est en années autour de J2000.

Les courbes de la figure 6.1 (comparaison de Type-I) montrent les différences entre \tilde{r}_0 (valeur de référence déterminée avec DE405) et \tilde{r}_1 lors de l'estimation du vecteur Terre-Lune déphasé de τ_M . Cette méthode génère des erreurs importantes, atteignant 300 km sur la position. Les erreurs commises avec le temps de déphasage τ_E sont elles limitées à 2 km (non représentées).

En comparant (Type-II), les solutions SOL1_a et SOL1_b, les écarts se manifestent principalement dans la longitude moyenne de la Lune. Comme on peut le voir avec la courbe de la figure

6.2, les erreurs d'estimation génèrent une dérive quadratique importante (environ 4 secondes de degré sur 100 ans). Pour information, les effets de marées dans le système Terre-Lune induisent une dérive quadratique dans la longitude moyenne de la Lune d'environ 25 secondes de degré par siècle carré.

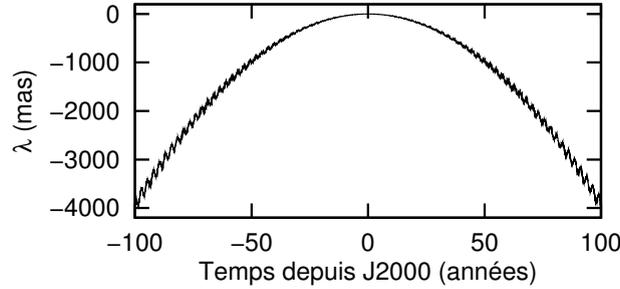


FIGURE 6.2 – Effet (comparaison de Type-II) sur la longitude moyenne λ de la Lune des erreurs commises par la méthode d'estimation au premier ordre en τ sur les coordonnées cartésiennes (différence entre les solutions intégrées SOL1_a et SOL1_b).

Lorsqu'on compare cette dérive aux écarts entre DE405 et INPOP05 (voir les courbes de la figure 11.22), il semble en fait peu probable que cette méthode d'estimation soit effectivement employée au JPL.

6.1.2 Méthode 2 : ordre 0 sur les éléments elliptiques

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps générateur de marées est sur une orbite képlérienne autour du corps qui subit les déformations. L'idée est alors d'utiliser les éléments elliptiques, définis au chapitre 11. En effet, sur une telle trajectoire, tous les éléments sont constants. Seule la longitude moyenne λ varie linéairement avec le temps. En posant $\mu = G(M + m)$ (produit de la constante de la gravitation par la somme des masses des corps générateur et déformé), on a :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \sqrt{\mu/a^3}t \quad (6.3)$$

De $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, on calcule les éléments elliptiques $(a(t), \lambda(t), e(t), i(t), \Omega(t), \varpi(t))$ à l'instant t , et on en déduit des estimations des éléments elliptiques à $t - \tau$:

$$\begin{cases} \tilde{a} = a(t) \\ \tilde{e} = e(t) \\ \tilde{i} = i(t) \\ \tilde{\Omega} = \Omega(t) \\ \tilde{\varpi} = \varpi(t) \\ \tilde{\lambda} = \lambda(t) - \sqrt{\mu/a^3}\tau \end{cases} \quad (6.4)$$

Enfin, à partir de ces estimations des éléments elliptiques à $t - \tau$, on obtient une estimation de $\vec{r}(t - \tau)$, qu'on note \tilde{r}_2 .

Les courbes de la figure 6.3 (comparaison de Type-I) montrent les améliorations apportées par rapport à la méthode 1 exposée au paragraphe précédent pour le temps de déphasage τ_M , avec une erreur commise sur le vecteur Terre-Lune réduite de 300 km à moins de 4 km. On obtient le même genre d'amélioration avec le temps de déphasage τ_E , avec des erreurs sur la position qui passent de 2 km à 20 m (non représentées).

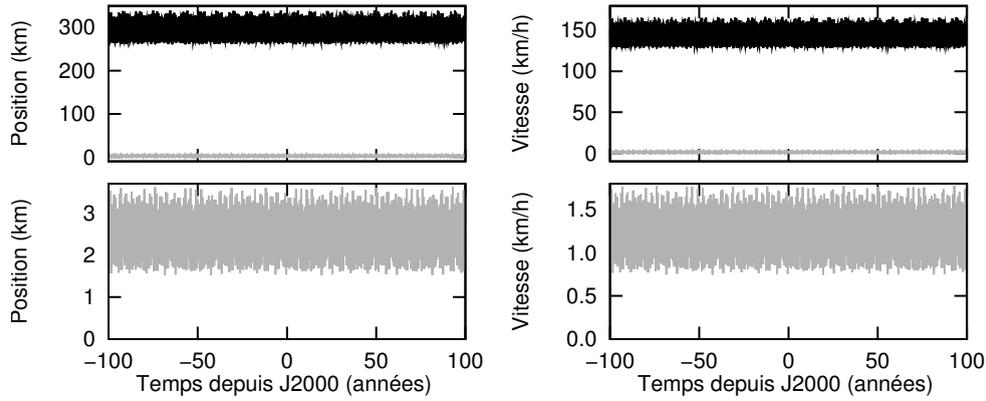


FIGURE 6.3 – Améliorations (Type-I) de la méthode 2 (ordre 0 sur les éléments elliptiques) par rapport à la méthode 1 (ordre 1 sur les éléments cartésiens) sur le vecteur Terre-Lune déphasé de τ_M . En noir sont tracées les erreurs $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_1\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_1\|$, en gris les erreurs $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_2\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_2\|$. Les courbes grises dans la partie inférieure sont les mêmes que celles dans la partie supérieure, tracées à une échelle mieux adaptée.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut supposer que le corps générant les marées est en orbite autour du corps déformé. C'est le cas par exemple de la Lune autour de la Terre ou de la Terre autour du Soleil. Mais lorsqu'on souhaite prendre en compte la déformation de la Lune générée par le Soleil, et donc calculer le vecteur Lune-Soleil déphasé, il est nécessaire pour obtenir de bons résultats de passer par l'intermédiaire de la Terre (calculer les vecteurs Lune-Terre et Terre-Soleil déphasés), d'où des calculs supplémentaires.

Un autre problème se pose, lié à l'intégrateur numérique choisi, comme par exemple ODEX (Hairer et al., 1987) ou Bulirsch-Stoer (Press et al., 1986). Le but est de calculer le vecteur d'état Y à l'instant $t + H$ à partir de sa valeur à l'instant t . Le principe de ces algorithmes est de découper le pas d'intégration H en i pas intermédiaires $h_i = H/i$. On effectue alors i intégrations numériques successives (avec la méthode du point milieu modifiée par exemple), ce qui conduit à une estimation \tilde{Y}_i de $Y(t + H)$. À partir de plusieurs estimations \tilde{Y}_i , calculées pour i dans $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, \dots\}$, on extrapole la valeur de $Y(t + H)$ lorsque h_i tend vers 0 (ou i vers l'infini). Ces intégrateurs sont particulièrement bien adaptés aux grands pas d'intégration H . Mais dans ce cas, il est possible que l'estimation \tilde{Y}_2 (voire les suivantes) soit mauvaise et éloignée de $Y(t + H)$. Par exemple, la Lune peut se retrouver sur une trajectoire parabolique ou hyperbolique, qui rend la méthode d'estimation des déphasages de ce paragraphe inadaptée.

Cette méthode a cependant été implémentée dans INPOP. L'amélioration par rapport à celle au premier ordre sur les coordonnées cartésiennes se confirme avec la comparaison (Type-II) des solutions SOL2_a et SOL2_b, présentant un écart dans la longitude moyenne de la Lune de 10 millisecondes de degré sur 100 ans (voir la courbe de la figure 6.4).

6.1.3 Méthode 3 : ordre 2 sur les coordonnées cartésiennes

À partir du vecteur d'état à l'instant t , on peut avoir une estimation de la dérivée seconde $\ddot{\vec{r}}$ en se limitant dans un premier temps à un modèle simplifié, en ne prenant en compte qu'une partie des interactions entre les corps. Par exemple, on peut se limiter aux accélérations dues aux interactions newtoniennes \vec{a} (expression 1.3), qui constituent le terme principal et ne dépendent que du vecteur d'état à l'instant t . On peut donc avoir une estimation de $\vec{r}(t - \tau)$ et $\dot{\vec{r}}(t - \tau)$

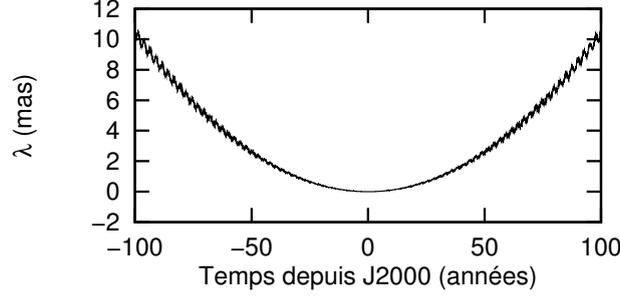


FIGURE 6.4 – Effet (comparaison de Type-II) sur la longitude moyenne λ de la Lune des erreurs commises par la méthode d'estimation à l'ordre 0 sur les éléments elliptiques (différence entre les solutions intégrées SOL2_a et SOL2_b).

(notées \tilde{r}_3 et $\tilde{\dot{r}}_3$) en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en τ :

$$\begin{cases} \tilde{r}_3 = \vec{r} - \tau \dot{\vec{r}} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\vec{r}} \\ \tilde{\dot{r}}_3 = \dot{\vec{r}} - \tau \ddot{\vec{r}} \end{cases} \quad (6.5)$$

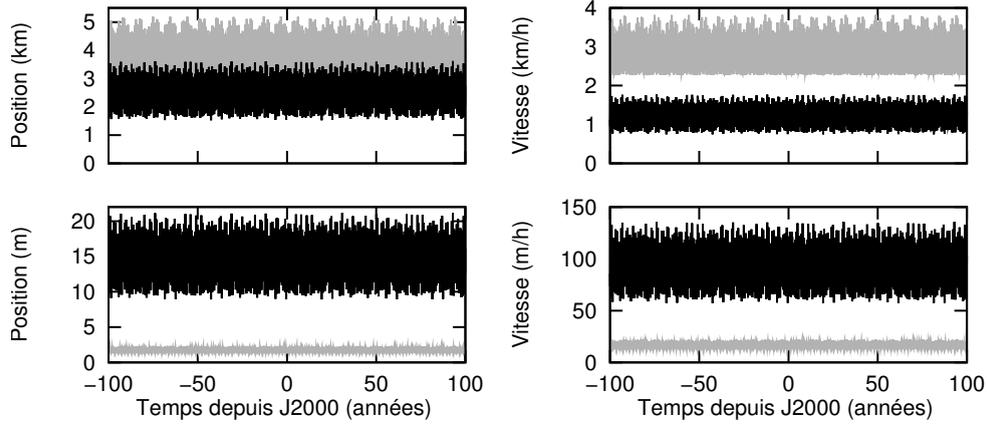


FIGURE 6.5 – Erreurs (Type-I) de la méthode 3 (ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes, en gris) et de la méthode 2 (ordre 0 en τ sur les éléments elliptiques, en noir). Les comparaisons portent sur le vecteur Terre-Lune déphasé de τ_M (en haut) et τ_E (en bas). Les erreurs de position et vitesse sont respectivement $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_i\|$ et $\|\tilde{\dot{r}}_0 - \tilde{\dot{r}}_i\|$ pour la méthode i , où \tilde{r}_0 et $\tilde{\dot{r}}_0$ sont déterminés avec la solution DE405.

Les courbes de la figure 6.5 montrent les changements apportés par cette méthode (en gris) rapport à la méthode 2 (ordre 0 sur les éléments elliptiques) exposée au paragraphe précédent (en noir). Les résultats sont mitigés et dépendent du temps de déphasage. Pour τ_M (courbes supérieures), on remarque que cette méthode dégrade légèrement les résultats, tandis que pour τ_E , les erreurs sont réduites de 15 m à environ 2 m pour la position.

La comparaison des solutions SOL3_a et SOL3_b donne cependant des résultats paradoxaux. Dans INPOP, les méthodes d'évaluation des quantités intervenant dans la déformation de la Terre (déphasées de τ_{E20} , τ_{E21} ou τ_{E22}) et de la Lune (déphasées de τ_M) peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre. Pour la déformation de la Terre, les différences entre SOL2_a

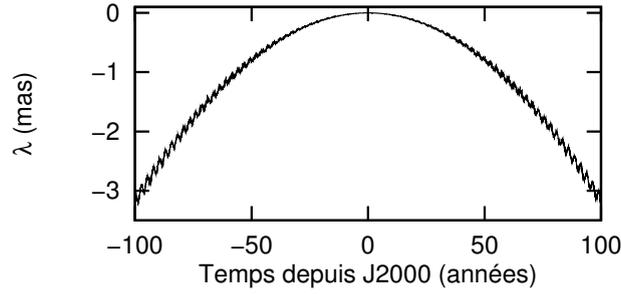


FIGURE 6.6 – Effet (comparaison de Type-II) sur la longitude moyenne λ de la Lune des erreurs commises par la méthode d'estimation à l'ordre 2 sur les coordonnées cartésiennes (différence entre les solutions intégrées SOL3_a et SOL2_3). Pour SOL3_a, la méthode 3 est utilisée à la fois pour les temps de déphasage de la Terre (τ_{E20} , τ_{E21} et τ_{E22}) et celui de la Lune (τ_M).

et SOL3_a se manifestent par une faible dérive quadratique dans la longitude moyenne de la Lune inférieure à $0.7 \mu\text{as}$ sur 100 ans. On peut donc en déduire que la méthode 2 était déjà suffisante.

Pour la déformation de la Lune, les écarts entre SOL3_a et SOL3_b (voir la courbe de la figure 6.6) sont inférieurs à ceux entre SOL2_a et SOL2_b (courbe de la figure 6.4). Ce résultat est en contradiction avec ce qu'indiquent les courbes supérieures de la figure 6.5. L'explication de ce paradoxe réside peut-être dans les éléments elliptiques déphasés de la Lune, dont certains (la longitude moyenne, le nœud et l'inclinaison) sont mieux estimés avec la méthode 3 qu'avec la méthode 2 (voir les courbes de la figure 6.7).

L'avantage de cette troisième méthode est qu'elle ne nécessite que très peu de temps de calcul : lors de la détermination des variations des coefficients du potentiel des corps, les accélérations newtoniennes ont déjà été calculées et sont alors disponibles.

6.1.4 Méthode 4 : ordre 1 sur les éléments elliptiques

Des positions-vitesses du corps à l'instant t , on a vu précédemment qu'on peut en déduire ses éléments elliptiques. En utilisant les accélérations newtoniennes, on peut aussi en déduire une estimation des dérivées de ces éléments elliptiques. On suppose alors qu'entre les instants t et $t - \tau$, le corps générateur des marées se trouve sur une trajectoire dont les éléments elliptiques varient linéairement avec le temps (ellipse précessante), et on en déduit une estimation des éléments elliptiques à l'instant $t - \tau$ en effectuant un développement limité au premier ordre en τ :

$$\begin{cases} \tilde{a} = a(t) - \tau \dot{a}(t) \\ \tilde{e} = e(t) - \tau \dot{e}(t) \\ \tilde{i} = i(t) - \tau \dot{i}(t) \\ \tilde{\Omega} = \Omega(t) - \tau \dot{\Omega}(t) \\ \tilde{\varpi} = \varpi(t) - \tau \dot{\varpi}(t) \\ \tilde{\lambda} = \lambda(t) - \tau \dot{\lambda}(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

Des éléments elliptiques estimés à $t - \tau$, on en déduit une estimation de la position \tilde{r}_4 et vitesse $\tilde{\dot{r}}_4$ du vecteur Terre-Lune déphasé.

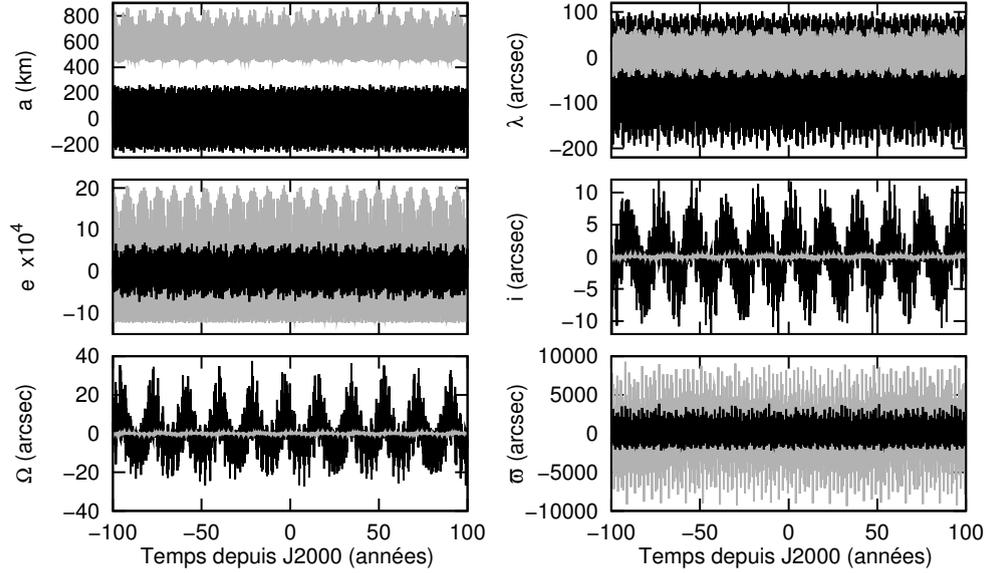


FIGURE 6.7 – Erreurs (Type-I) de la méthode 3 (ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes, en gris) et de la méthode 2 (ordre 0 en τ sur les éléments elliptiques, en noir). Les comparaisons portent sur les éléments elliptiques du vecteur Terre-Lune déphasé de τ_M . Ces derniers sont déterminés à partir des vecteurs \tilde{r}_i et $\tilde{\tilde{r}}_i$ (selon la méthode), ceux calculés avec la solution DE405 servant de référence.

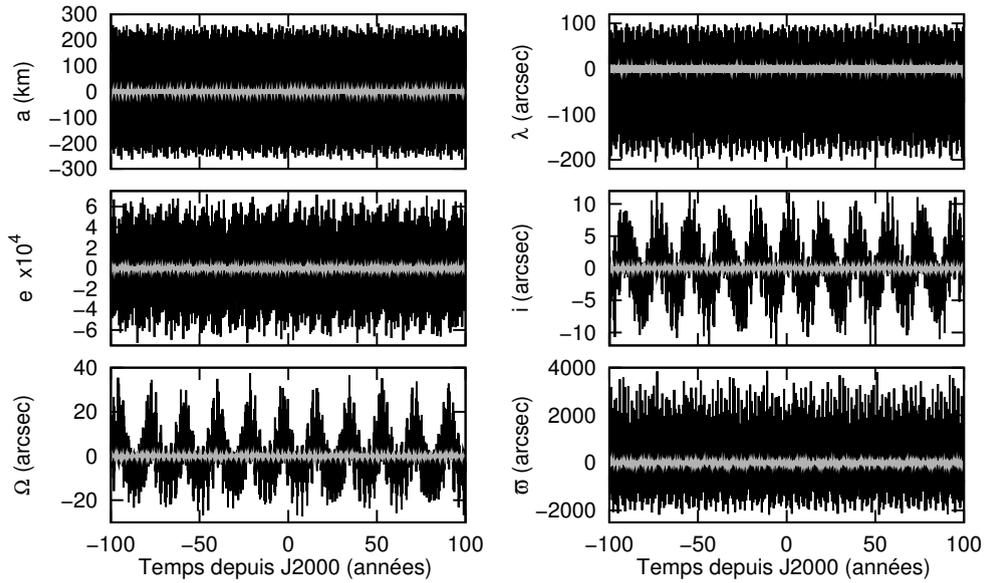


FIGURE 6.8 – Erreurs (Type-I) de la méthode 4 (ordre 1 en τ sur les éléments elliptiques, en gris) et de la méthode 2 (ordre 0 en τ sur les éléments elliptiques, en noir). Les comparaisons portent sur les éléments elliptiques du vecteur Terre-Lune, déphasés de τ_M . Ceux calculés avec DE405 servent de référence.

Les courbes de la figure 6.8 montrent, pour le temps de déphasage τ_M , l'amélioration apportée par cette méthode par rapport à celle qui suppose le corps générateur de marées sur une orbite képlérienne (méthode 2) sur les éléments elliptiques du vecteur Terre-Lune.

Les améliorations sur les éléments elliptiques ne se traduisent cependant pas par une amélioration sur les coordonnées cartésiennes, comme on peut le voir sur les courbes de la figure 6.9. Si les erreurs sur la vitesse ont certes été réduites, c'est au prix d'une augmentation de celles des positions.

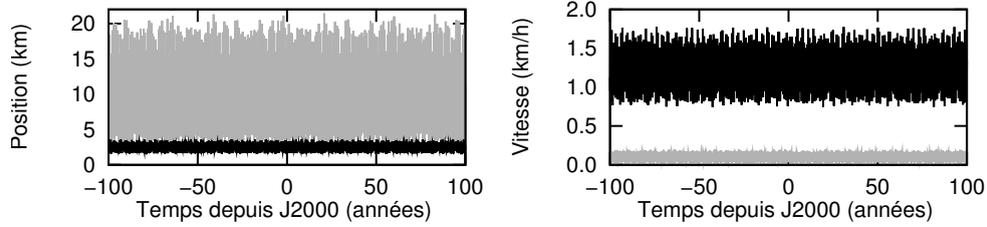


FIGURE 6.9 – Erreurs (Type-I) de la méthode 4 (ordre 1 en τ sur les éléments elliptiques, en gris) et de la méthode 2 (ordre 0 en τ sur les éléments elliptiques, en noir). Les comparaisons sont effectuées sur les positions et vitesse de la Lune, déphasées de τ_M . Les erreurs de position et vitesse sont respectivement $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_i\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_i\|$ pour la méthode i , où \tilde{r}_0 et \tilde{v}_0 sont déterminés avec la solution DE405.

Avec le temps de déphasage τ_E , on observe le même phénomène. Comparée à la méthode qui donnait jusqu'ici les meilleurs résultats pour la Terre (ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes), cette méthode réduit les erreurs sur les éléments elliptiques (courbes de la figure 6.10) et la vitesse, mais augmente celles sur la position (courbes de la figure 6.11).

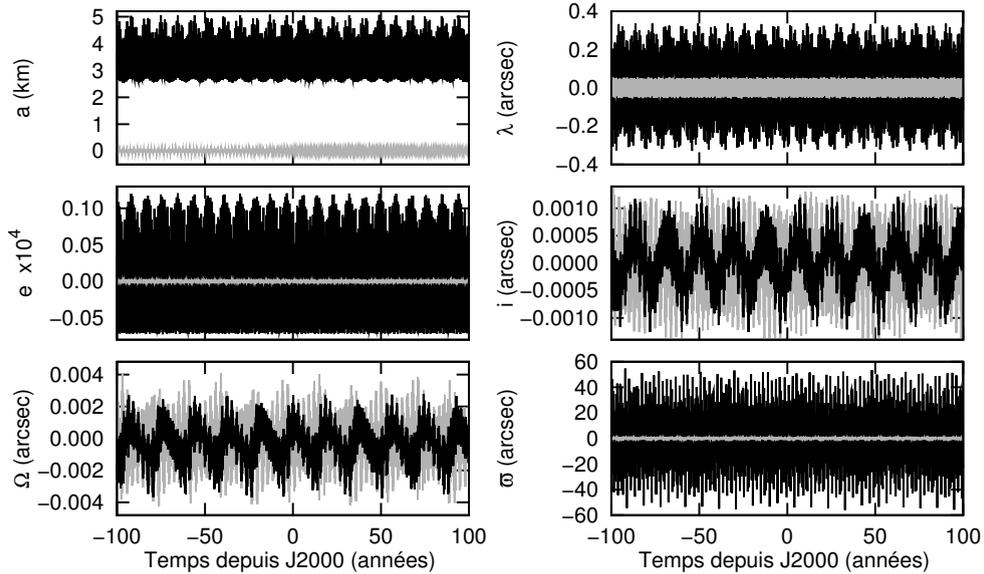


FIGURE 6.10 – Erreurs (Type-I) de la méthode 4 (ordre 1 en τ sur les éléments elliptiques, en gris) et de la méthode 3 (ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes, en noir). Les comparaisons portent sur les éléments elliptiques déphasés de τ_E , ceux calculés avec DE405 servant de référence.

En raison d'un coût en calcul élevé, cette méthode n'a pas été implémentée dans INPOP. Les différences entre SOL4_a et SOL4_b ne sont donc pas disponibles.

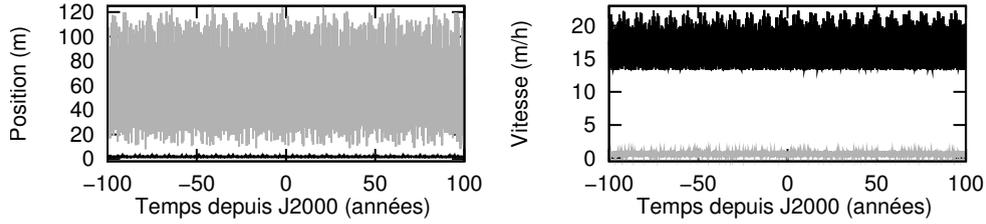


FIGURE 6.11 – Erreurs (Type-I) de la méthode 4 (ordre 1 en τ sur les éléments elliptiques, en gris) et de la méthode 2 (ordre 0 en τ sur les éléments elliptiques, en noir). Les comparaisons sont effectuées sur les positions et vitesse de la Lune, déphasées de τ_E . Les erreurs de position et vitesse sont respectivement $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_i\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_i\|$ pour la méthode i , où \tilde{r}_0 et \tilde{v}_0 sont déterminés avec la solution DE405.

6.1.5 Méthode 5 : “mini” intégration du système Soleil-Planètes-Pluton-Lune

L'idée ici est d'effectuer une “mini” intégration numérique d'un modèle simplifié entre t et $t - \tau$. On considère un système simplifié de 11 corps : le Soleil, les planètes de Mercure à Neptune, Pluton et la Lune. Du vecteur d'état à l'instant t , on déduit les positions et vitesses “barycentriques du Système solaire” (entre guillemets, car le barycentre de ce système restreint à 11 corps n'est plus à l'origine du repère puisque les astéroïdes sont négligés) de tous ces corps et on ne considère que les interactions mutuelles newtoniennes. Que le barycentre de ce système ne soit pas confondu avec l'origine du repère n'est donc pas gênant, puisque les accélérations ne dépendent que des positions relatives (voir l'expression 1.3). On intègre numériquement ce système entre t et $t - \tau$ avec un algorithme Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4) et on obtient alors une estimation des positions déphasées des corps.

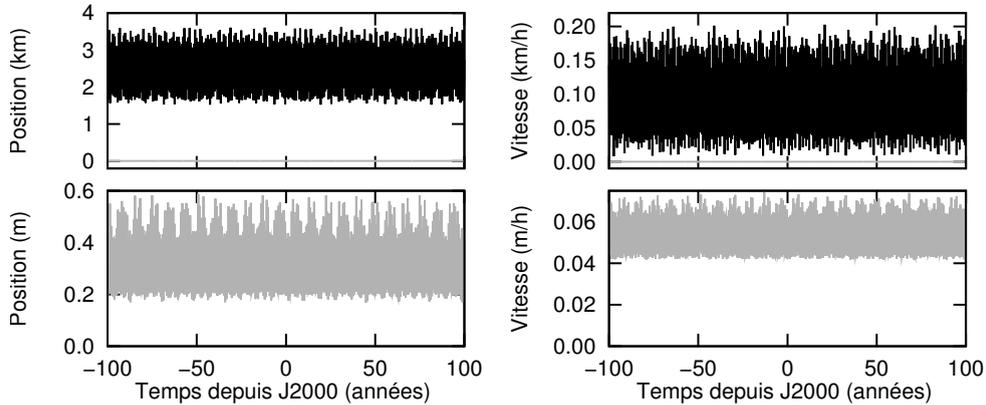


FIGURE 6.12 – Améliorations (Type-I) de la méthode 5 (intégration Runge Kutta 4 du système Soleil-Planètes-Pluton-Lune en interactions newtoniennes, en gris) pour le déphasage τ_M . Cette méthode est comparée à la n° 2 (ordre 0 sur les éléments elliptiques) pour l'estimation de la position déphasée (en noir à gauche), et à la n° 4 (ordre 1 sur les éléments elliptiques) pour celle de la vitesse (en noir à droite). Les erreurs de position et vitesse sont respectivement $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_i\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_i\|$ pour la méthode i , où \tilde{r}_0 et \tilde{v}_0 sont déterminés avec la solution DE405. Les courbes inférieures grises sont les mêmes que celles supérieures, tracées à une échelle mieux adaptée.

Pour le temps de déphasage τ_M , les courbes de la figure 6.12 montrent les améliorations apportées par cette méthode par rapport à celles qui présentaient jusqu'à présent les erreurs les

plus faibles (méthode 2 pour la position, méthode 4 pour la vitesse de la Lune par rapport à la Terre). On remarque une réduction spectaculaire des erreurs, aussi bien de la position (réduites à 60 cm) que sur les vitesses (6 cm par heure). Pour le temps de déphasage τ_E , cette méthode permet des erreurs inférieures à 2 cm sur la position (contre 2 m pour la méthode 3) et 6 mm/h pour la vitesse (contre 1 m/h pour la méthode 4).

D'autres algorithmes d'intégration numérique (RK3, RK2) ont été testés sur ce système sans toutefois atteindre un niveau de précision équivalent. Cette méthode n'a cependant pas été implémentée dans INPOP car celle qui suit est presque aussi précise et nécessite moins de calculs.

Remarque : les méthodes 1 (premier ordre en τ sur les coordonnées cartésiennes) et 3 (ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes) peuvent aussi être considérées comme des "mini-intégration". Dans les deux cas, on utilise la méthode d'Euler pour intégrer entre t et $t - \tau$. Pour la méthode 1, on suppose qu'aucune force ne s'exerce sur les corps. Pour la méthode 3, on tient compte des interactions newtoniennes.

6.1.6 Méthode 6 : "mini" intégration du système Soleil-Terre-Lune

On utilise exactement la même méthode que précédemment, mais sur un système encore plus simplifié, réduit au Soleil, à la Terre et à la Lune. En réduisant le nombre de corps, on réduit le nombre des interactions newtoniennes à calculer, et donc le temps de calcul nécessaire.

Les courbes de la figure 6.13 montrent une comparaison entre cette méthode et la n° 5 (intégration du système Soleil-Planètes-Pluton-Lune) pour le temps de déphasage τ_M . On remarque que l'erreur commise sur l'estimation de la position déphasée de la Lune reste similaire à celle obtenue avec la méthode 5, tandis que celle commise sur les vitesses, certes légèrement dégradées, reste quand même très faible. On retrouve les mêmes résultats avec le temps de déphasage τ_E .

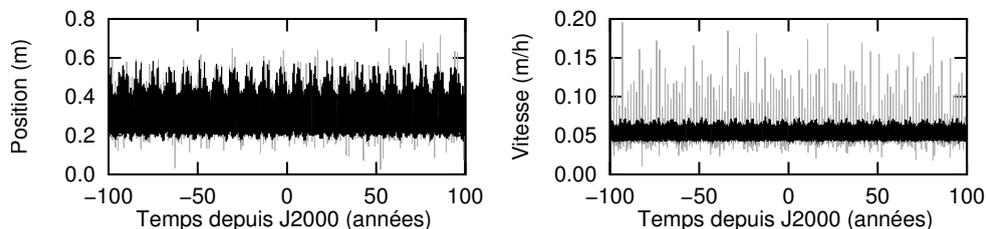


FIGURE 6.13 – Comparaison (Type-I) des méthodes n° 5 (intégration RK4 du système Soleil-Planètes-Pluton-Lune en interactions newtoniennes, en noir) et n° 6 (intégration RK4 du système simplifié Soleil-Terre-Lune en interactions newtoniennes, en gris) pour le temps de déphasage τ_M . Les erreurs de position et vitesse sont respectivement $\|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_i\|$ et $\|\tilde{v}_0 - \tilde{v}_i\|$ pour la méthode i , où \tilde{r}_0 et \tilde{v}_0 sont déterminés avec la solution DE405.

La comparaison (Type-II) des solutions SOL6_a et SOL6_b (courbe de la figure 6.14) montre l'efficacité de cette méthode, avec une différence sur la longitude moyenne de la Lune limitée à 0.003 mas sur 100 ans. À noter que dans la construction des solutions INPOP, cette méthode d'évaluation ne sera employée que pour le calcul de la déformation de la Lune (temps de déphasage τ_M). Pour celle de la Terre, on conserve celle à l'ordre 2 en τ sur les coordonnées cartésiennes, plus rapide en temps de calcul.

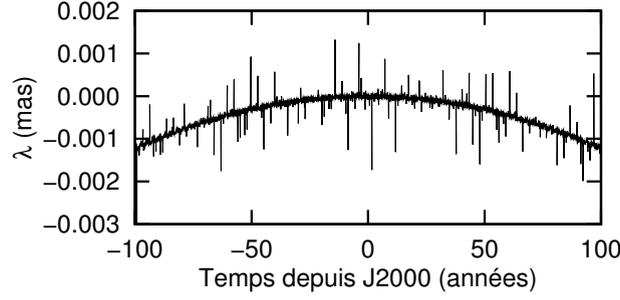


FIGURE 6.14 – Effet (comparaison de Type-II) sur la longitude moyenne λ de la Lune des erreurs commises par la méthode d'estimation 6 (différence entre les solutions intégrées SOL6_a et SOL6_b).

6.2 Repère sélénocentrique déphasé

Dans cette partie, on s'intéresse aux angles d'Euler de la Lune et à son vecteur instantané de rotation. Ces quantités sont nécessaires pour le passage dans le repère sélénocentrique déphasé à $t - \tau_M$, ainsi que pour la détermination de la déformation de la Lune due aux variations de son spin.

On effectuera les mêmes comparaisons (Type-I et Type-II) que pour les positions relatives des corps dans le repère fixe.

6.2.1 Méthode 1 : premier ordre en τ sur les angles d'Euler

On suppose qu'entre t et $t - \tau$, les angles d'Euler de la Lune varient linéairement avec le temps. On effectue un développement limité au premier ordre en τ afin d'en obtenir une estimation à $t - \tau$:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = \phi(t) - \tau \dot{\phi}(t) \\ \tilde{\theta}_1 = \theta(t) - \tau \dot{\theta}(t) \\ \tilde{\psi}_1 = \psi(t) - \tau \dot{\psi}(t) \\ \dot{\tilde{\phi}}_1 = \dot{\phi}(t) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\theta}(t) \\ \dot{\tilde{\psi}}_1 = \dot{\psi}(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

On en déduit ensuite le vecteur instantané de rotation déphasé $\tilde{\omega}_1$ grâce aux expressions 3.2.

Les courbes noires de la figure 6.15 montrent les erreurs (Type-I) commises avec cette méthode sur les angles d'Euler et le vecteur instantané de rotation.

Les courbes noires de la figure 6.16 montrent leurs conséquences (comparaison de Type-II) sur la solution planétaire. Elles ne sont pas négligeables lorsqu'elles sont comparées aux différences observées entre INPOP05 et DE405, où les écarts sur les angles de libration de la Lune restent inférieurs à 1 milliseconde de degré (voir les courbes de la figure 11.32).

6.2.2 Méthode 2 : ordre 2 en τ sur les angles d'Euler via un mouvement libre

On suppose qu'au temps t , aucun moment ne s'applique sur la Lune ; il s'agit alors d'un mouvement de rotation libre. Les équations 3.10 avec $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$ permettent alors de calculer $\dot{\vec{\omega}}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{\gamma_L - \beta_L}{1 - \beta_L \gamma} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \beta_L \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z = -\gamma_L \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (6.8)$$

On en déduit ensuite les dérivées secondes des angles d'Euler à l'instant t (voir expressions 3.6). On effectue alors un développement limité à l'ordre 2 en τ afin d'obtenir une estimation des angles d'Euler déphasés :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_2 = \phi(t) - \tau \dot{\phi}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\phi}(t) \\ \tilde{\theta}_2 = \theta(t) - \tau \dot{\theta}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\theta}(t) \\ \tilde{\psi}_2 = \psi(t) - \tau \dot{\psi}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\psi}(t) \\ \tilde{\dot{\phi}}_2 = \dot{\phi}(t) - \tau \ddot{\phi}(t) \\ \tilde{\dot{\theta}}_2 = \dot{\theta}(t) - \tau \ddot{\theta}(t) \\ \tilde{\dot{\psi}}_2 = \dot{\psi}(t) - \tau \ddot{\psi}(t) \end{cases} \quad (6.9)$$

Les courbes de la figure 6.15 montrent les améliorations (Type-I) apportées par rapport à la méthode précédente. Seule la composante z du vecteur instantané de rotation ne présente pas d'amélioration.

Ces bons résultats se traduisent également dans les différences (Type-II) entre les solutions SOL2_a et SOL2_b, inférieures à celles entre SOL1_a et SOL1_b (voir les courbes de la figure 6.16).

6.2.3 Méthode 3 : ordre 2 en τ sur les angles d'Euler via le moment de la Terre

Cette méthode est analogue à la précédente, mais au lieu de considérer un mouvement libre, on tient compte des moments de degré 2 (termes C_{20} et C_{22} du potentiel de la Lune) exercés par la Terre. Ces moments se calculent simplement en fonction de la matrice d'inertie de la Lune avec l'expression 2.33 :

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = \frac{3GM_T}{r^5} \vec{r} \wedge I \vec{r} \quad (6.10)$$

Dans cette expression, GM_T est le produit de la constante universelle de la gravitation par la masse de la Terre, I est la matrice d'inertie de la Lune, \vec{r} est le vecteur Lune-Terre, r est sa norme. Les erreurs d'estimation (Type-I) de cette méthode sont comparées à celles obtenues dans l'hypothèse d'un mouvement libre (voir les courbes de la figure 6.17). L'amélioration est générale, à part dans la composante x du vecteur instantané de rotation (qui présentait déjà des erreurs plus faibles que pour les deux autres composantes).

Ces améliorations se traduisent ensuite sur les différences (comparaison de Type-II) entre les deux solutions intégrées SOL3_a et SOL3_b ; avec les courbes de la figure 6.18, on remarque que les différences dans les angles de libration sont inférieures à celles obtenues entre SOL2_a et SOL2_b (estimation via mouvement libre). Pour le vecteur instantané de rotation, seule la composante z est grandement améliorée, les deux autres sont juste moins bruitées.

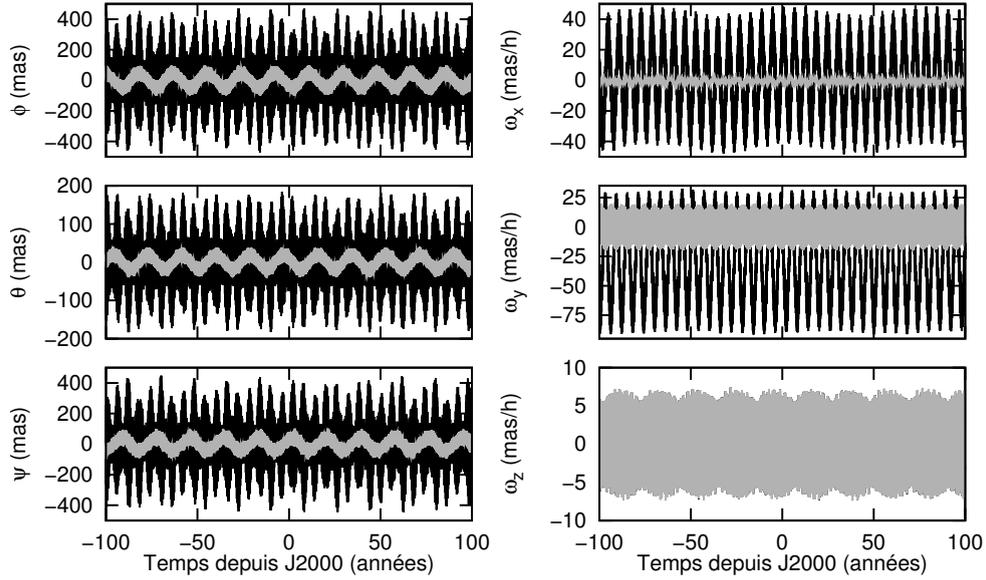


FIGURE 6.15 – Améliorations (Type-I) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation déphasés de la Lune, apportées par la méthode 2 (ordre 2 en τ sur les angles d’Euler en supposant une rotation libre) par rapport à la méthode 1 (premier ordre en τ sur les angles d’Euler). Les erreurs sur les angles (à gauche) montrent les différences $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1$ (en noir) et $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_2$ (en gris), où α désigne l’un des trois angles ϕ , θ ou ψ . À droite sont présentées les erreurs sur chacune des coordonnées du vecteur instantané de rotation ($\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{1j}$ en noir, $\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{2j}$ en gris, où j désigne l’une des composantes x , y ou z). Les quantités déphasées $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\omega}_0$ calculées avec DE405 servent de référence.

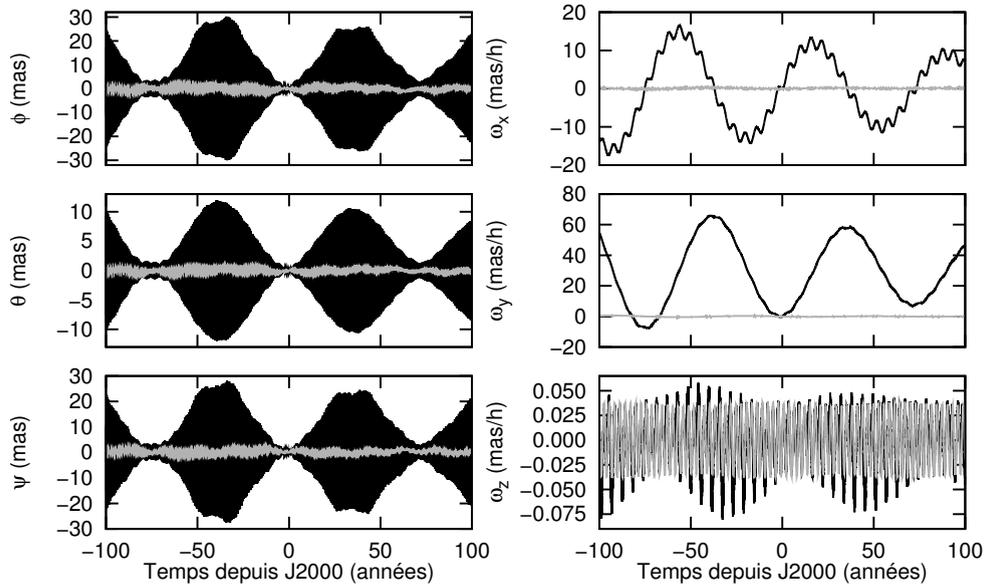


FIGURE 6.16 – Effets (comparaison de Type-II, différence entre les solutions intégrées SOL1_a et SOL1_b en noir, SOL2_a et SOL2_b en gris) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation de la Lune des erreurs commises par les méthodes d’estimation 1 (premier ordre en τ sur les angles d’Euler) et 2 (ordre 2 en τ en considérant une rotation libre).

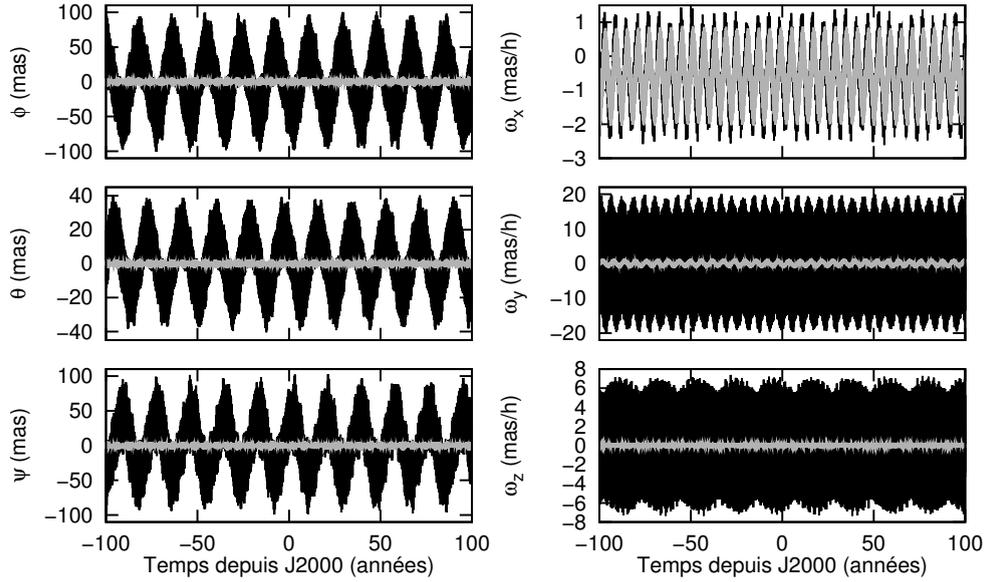


FIGURE 6.17 – Amélioration (comparaison de Type-I) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation déphasés de la Lune, apportée par la méthode 3 (ordre 2 en τ sur les angles d’Euler en considérant le moment exercé par la Terre sur la Lune) par rapport à la méthode 2 (ordre 2 en τ en considérant une rotation libre). Les erreurs sur les angles (à gauche) montrent les différences $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_2$ (en noir) et $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_3$ (en gris), où α désigne l’un des trois angles ϕ , θ ou ψ . À droite sont présentées les erreurs sur chacune des coordonnées du vecteur instantané de rotation ($\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{2j}$ en noir, $\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{3j}$ en gris, où j désigne l’une des composantes x , y ou z). Les quantités déphasées $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\omega}_0$ calculées avec DE405 servent de référence.

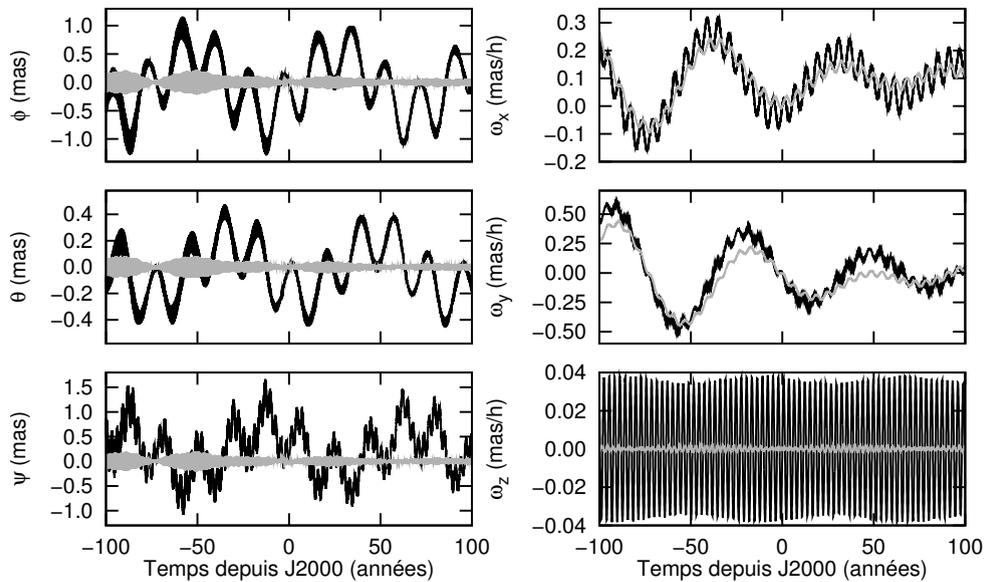


FIGURE 6.18 – Effets (comparaison de Type-II, différence entre les solutions intégrées SOL2_a et SOL2_b en noir, SOL3_a et SOL3_b en gris) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation de la Lune des erreurs commises par les méthodes d’estimation 2 (ordre 2 en τ en considérant une rotation libre) et 3 (ordre 2 en τ sur les angles d’Euler en considérant le moment exercé par la Terre sur la Lune).

6.2.4 Methode 4 : intégration RK4 entre t et $t - \tau$

On effectue une “mini-intégration” entre t et $t - \tau$ d’un système très simplifié, limité à la Lune, au Soleil et à la Terre. On ne tient compte que des interactions newtoniennes entre les corps, ainsi que des moments de degré 2 exercés par la Terre sur la Lune (supposée rigide). Au système intégré au paragraphe 6.1.6, on ajoute donc les angles de libration de la Lune.

Les erreurs d’estimation (Type-I) de cette méthode sont comparées à celles obtenues avec la méthode 3 décrite dans le paragraphe précédent. On remarque que l’amélioration est générale. Leurs conséquences sur la solution planétaire (comparaison de Type-II) sont montrées dans la figure 6.20. Là encore, l’amélioration est générale, quoique moins spectaculaire. Les différences entre SOL4_a et SOL4_b sont de l’ordre de respectivement 0.08, 0.03 et 0.08 milliseconde de degré dans les angles de libration ϕ , θ et ψ . Ces valeurs sont à comparer aux différences observées dans les angles de libration entre INPOP05 et DE405 (courbes de la figure 11.32), qui atteignent respectivement 0.6, 0.3 et 0.6 mas pour les mêmes variables, soit tout juste un ordre de grandeur supérieur. Cette méthode 4 est donc suffisamment précise, mais la marge de sécurité est réduite. On peut cependant noter que l’effet maximal sur une observation Lunar Laser Ranging d’un écart de 0.1 milliseconde de degré dans les librations de la Lune est inférieur à 1 mm, à comparer à la précision des observations de l’ordre du centimètre. Cette valeur de 1 mm serait atteinte pour un réflecteur qui serait idéalement placé à la périphérie du disque visible de la Lune ; c’est loin d’être le cas de ceux actuellement en place.

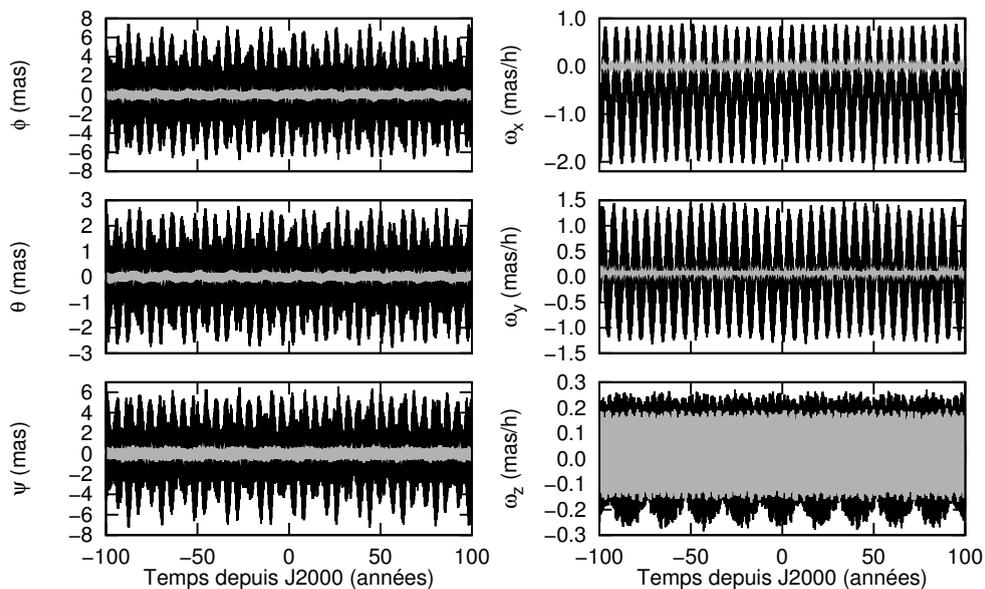


FIGURE 6.19 – Amélioration (comparaisons de Type-I) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation déphasés de la Lune, apportée par la méthode 4 (mini intégration du système Soleil-Terre-Lune avec prise en compte du moment exercé par la Terre sur la Lune) par rapport à la méthode 3 (ordre 2 en τ en considérant le moment exercé par la Terre sur la Lune). Les erreurs sur les angles (à gauche) montrent les différences $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_3$ (en noir) et $\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_4$ (en gris), où α désigne l’un des trois angles ϕ , θ ou ψ . À droite sont présentées les erreurs sur chacune des coordonnées du vecteur instantané de rotation ($\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{3j}$ en noir, $\tilde{\omega}_{0j} - \tilde{\omega}_{4j}$ en gris, où j désigne l’une des composantes x , y ou z). Les quantités déphasées $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\omega}_0$ calculées avec DE405 servent de référence.

Enfin, cette méthode est aussi utilisée pour la détermination de la dérivée de la matrice

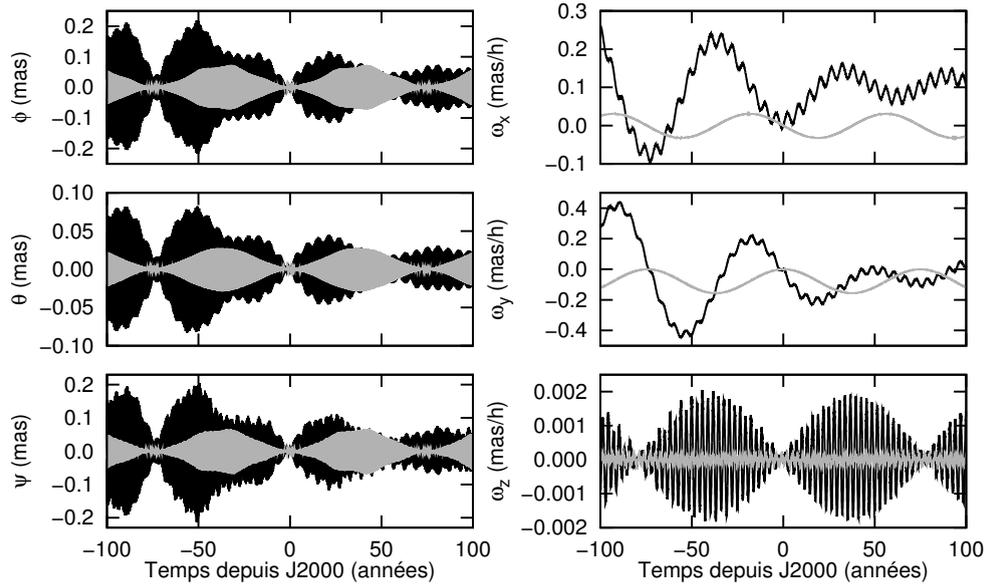


FIGURE 6.20 – Effets (comparaison de Type-II, différences entre les solutions intégrées SOL3_a et SOL3_b en noir, SOL4_a et SOL4_b en gris) sur les angles d’Euler et le vecteur instantané de rotation de la Lune des erreurs commises par les méthodes d’estimation 3 (ordre 2 en τ sur les angles d’Euler en considérant le moment exercé par la Terre sur la Lune) et 4 (mini intégration du système Soleil-Terre-Lune avec prise en compte du moment exercé par la Terre sur la Lune).

d’inertie de la Lune due à son spin (voir l’expression 4.42), intervenant dans l’équation d’Euler 4.28. En effet, une estimation de la dérivée du vecteur instantané de rotation déphasé est accessible lors de l’intégration du système simplifié entre t et $t - \tau$.

Remarque : pour les méthodes 3 et 4, on néglige le moment exercé par le Soleil sur la Lune. Sa prise en compte permettrait d’améliorer légèrement les comparaisons de Type-I pour la composante z du vecteur instantané de rotation, mais serait sans effet sur celles de Type-II.

Chapitre 7

Interaction entre deux corps étendus non sphériques

On étudie dans cette partie les interactions (moments et forces) qui s'exercent entre deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 non sphériques. Ces deux corps sont supposés rigides et les développements de leurs potentiels se limitent aux termes de degré 2. Les méthodes exposées ici, inspirées de (Schutz, 1981; Bois et al., 1992; Vidyakin & Popova, 1999; Ashenberg, 2007), peuvent néanmoins être étendues à des corps déformables et à des harmoniques de degrés supérieurs.

Dans toute cette partie, on appellera pour chaque solide $(\mathcal{S}_i)_{i \in \{1,2\}}$:

- M_i et R_i respectivement sa masse et son rayon équatorial moyen
- G_i son centre de masse
- $(\vec{I}_i, \vec{J}_i, \vec{K}_i)$ les vecteurs directeurs de ses axes principaux d'inertie
- $\mathcal{R}_i = (O_i, \vec{I}_i, \vec{J}_i, \vec{K}_i)$ le repère associé
- $(C_{nm}^{(i)}, S_{nm}^{(i)})$ ses coefficients du potentiel, exprimés dans \mathcal{R}_i
- \mathcal{I}_i , sa matrice d'inertie

Comme $(\vec{I}_i, \vec{J}_i, \vec{K}_i)$ sont les vecteurs directeurs des axes principaux d'inertie, les matrices \mathcal{I}_i sont diagonales et les coefficients du potentiel de degré 2 se limitent aux $C_{20}^{(i)}$ et $C_{22}^{(i)}$.

On notera également

- $\vec{r} = \overrightarrow{O_1 O_2}$
- $\vec{\rho}$ le vecteur entre O_2 et un élément de masse δm de \mathcal{S}_2

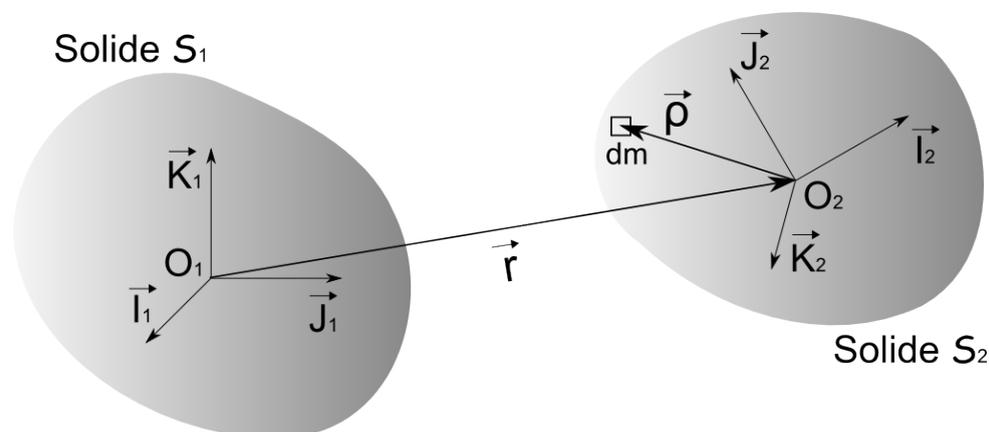


FIGURE 7.1 – Repères et vecteurs pour le calcul des interactions entre les formes de deux corps.

7.1 Énergie potentielle d'interaction

En utilisant l'expression 2.22 de Mac Cullagh, le degré 2 du potentiel du solide \mathcal{S}_1 en $\vec{r} + \vec{\rho}$ est :

$$U = \frac{G}{2\|\vec{r} + \vec{\rho}\|^5} (3(\vec{r} + \vec{\rho}) \cdot \mathcal{I}_1(\vec{r} + \vec{\rho}) - \text{tr}(\mathcal{I}_1)\|\vec{r} + \vec{\rho}\|^2) \quad (7.1)$$

Remarque : on peut ici ne pas se limiter au degré 2. Si on souhaite étudier les interactions dues aux degrés supérieurs du potentiel de \mathcal{S}_1 , il suffit de reprendre l'expression 2.10.

L'énergie potentielle d'interaction entre \mathcal{S}_1 et l'élément de masse δm de \mathcal{S}_2 est alors $\delta E_p = U\delta m$; en effectuant ensuite un développement limité à l'ordre 2 en $\vec{\rho}$ de $\|\vec{r} + \vec{\rho}\|^{-5}$, on obtient :

$$\delta E_p = -\frac{G\delta m}{2r^9} \left(r^4 - 5(\vec{r} \cdot \vec{\rho})r^2 - \frac{5}{2}\rho^2 r^2 + \frac{35}{2}(\vec{r} \cdot \vec{\rho})^2 \right) \\ (\text{tr}(\mathcal{I}_1)\|\vec{r} + \vec{\rho}\|^2 - 3(\vec{r} + \vec{\rho}) \cdot \mathcal{I}_1(\vec{r} + \vec{\rho})) \quad (7.2)$$

Remarque : là encore, le développement limité peut être étendu à un ordre supérieur si on souhaite étudier les interactions dues aux degrés supérieurs du potentiel de \mathcal{S}_2 .

En projetant cette expression dans \mathcal{R}_1 , on a :

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathcal{I}_1) = A_1 + B_1 + C_1 \\ A_1 = C_1 + M_1 R_1^2 (C_{20}^{(1)} - 2C_{22}^{(1)}) \\ B_1 = C_1 + M_1 R_1^2 (C_{20}^{(1)} + 2C_{22}^{(1)}) \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 \\ \vec{r} \cdot \vec{\rho} = x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z \\ (\vec{r} + \vec{\rho}) \cdot \mathcal{I}_1(\vec{r} + \vec{\rho}) = A_1(x + \rho_x)^2 + B_1(y + \rho_y)^2 + C_1(z + \rho_z)^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

et en ne conservant dans δE_p que les termes de degrés inférieurs à 2 en $\vec{\rho}$:

$$\delta E_p = -\frac{GM_1 R_1^2}{r^5} \frac{1}{r^4} \sum_{n=0}^2 \left(C_{20}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} Q_{ijk}(x, y, z) \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m \right. \\ \left. + C_{22}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} R_{ijk}(x, y, z) \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m \right) \quad (7.4)$$

Dans cette expression, les fonctions Q_{ijk} et R_{ijk} ne dépendent que de (x, y, z) . En intégrant δE_p sur le volume du solide \mathcal{S}_2 , on obtient l'énergie potentielle d'interaction entre les deux solides :

$$E_p = -\frac{GM_1 R_1^2}{r^5} \frac{1}{r^4} \sum_{n=0}^2 \left(C_{20}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} Q_{ijk} \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m + C_{22}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} R_{ijk} \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m \right) \quad (7.5)$$

7.1.1 Termes de degré 0

Les termes de degré $n=0$ dans E_p se limitent à $(i, j, k) = (0, 0, 0)$. Avec $\int_{S_2} \delta m = M_2$, on obtient :

$$E_p|_{n=0} = -\frac{GM_1 R_1^2 M_2}{r^5} \frac{M_2}{r^4} \left(C_{20}^{(1)} Q_{000} + C_{22}^{(1)} R_{000} \right) \quad (7.6)$$

Dans cette expression,

$$\begin{cases} Q_{000} = \frac{1}{2} (2z^6 + 3y^2 z^4 - y^6 + 3x^2 z^4 - 3x^2 y^4 - 3x^4 y^2 - x^6) = r^4 \left(z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \\ R_{000} = 3x^6 - 3y^2 z^4 - 6y^4 z^2 - 3y^6 + 3x^2 z^4 - 3x^2 y^4 + 6x^4 z^2 + 3x^4 y^2 = 3r^4 (x^2 - y^2) \end{cases} \quad (7.7)$$

et donc

$$E_p|_{n=0} = -\frac{GM_1 M_2 R_1^2}{r^5} \left(\frac{C_{20}^{(1)}}{2} (2z^2 - x^2 - y^2) + 3C_{22}^{(1)} (x^2 - y^2) \right) \quad (7.8)$$

On retrouve alors, au facteur M_2 près, l'expression 2.20 (les coefficients du potentiel $C_{21}^{(1)}$, $S_{21}^{(1)}$ et $S_{22}^{(1)}$ sont nuls). $E_p|_{n=0}$ est donc l'énergie potentielle d'interaction entre le corps étendu S_1 et une masse ponctuelle de masse M_2 située en O_2 . La force d'interaction qui en dérive a donc déjà été prise en compte dans le chapitre 2.

7.1.2 Termes de degré 1

L'origine du vecteur $\vec{\rho}$ étant au centre de masse du solide S_2 les intégrales $\int_{S_2} \rho_x \delta m$, $\int_{S_2} \rho_y \delta m$ et $\int_{S_2} \rho_z \delta m$ sont par définition nulles. E_p ne contient donc pas de termes en $n = 1$.

$$E_p|_{n=1} = 0 \quad (7.9)$$

7.1.3 Termes de degré 2

On s'intéresse maintenant aux termes de degré $n = 2$ dans E_p :

$$E_p|_{n=2} = -\frac{GM_1 R_1^2}{r^5} \frac{1}{r^4} \left(C_{20}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=2}} Q_{ijk} \int_{S_2} \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m + C_{22}^{(1)} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=2}} R_{ijk} \int_{S_2} \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k \delta m \right) \quad (7.10)$$

Pour chaque vecteur \vec{u} , de coordonnées cartésiennes (u_x, u_y, u_z) et sphériques $(\|\vec{u}\|, \varphi, \lambda)$ dans \mathcal{R}_1 telles que :

$$\begin{cases} u_x = \|\vec{u}\| \cos \varphi \cos \lambda \\ u_y = \|\vec{u}\| \cos \varphi \sin \lambda \\ u_z = \|\vec{u}\| \sin \varphi \end{cases} \quad (7.11)$$

on note :

$$\begin{cases} X_{nm}(\vec{u}) = P_{nm}(\sin \varphi) \cos m \lambda \\ Y_{nm}(\vec{u}) = P_{nm}(\sin \varphi) \sin m \lambda \end{cases} \quad \text{où } P_{nm} \text{ est la fonction associée de Legendre.} \quad (7.12)$$

Avec ces notations, les polynômes $(Q_{ijk})_{i+j+k=2}$ et $(R_{ijk})_{i+j+k=2}$ s'expriment en fonction de $X_{4m}(\vec{r})$ et $Y_{4m}(\vec{r})$. Par exemple :

$$Q_{200} = -\frac{1}{4} (12z^4 + 9y^2 z^2 - 3y^4 - 81x^2 z^2 + 9x^2 y^2 + 12x^4) = r^4 \left(-3X_{40}(\vec{r}) + \frac{1}{4} X_{42}(\vec{r}) \right) \quad (7.13)$$

De la même manière, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{200} = r^4 \left(-3X_{40}(\vec{r}) + \frac{1}{4}X_{42}(\vec{r}) \right) \\ Q_{020} = r^4 \left(-3X_{40}(\vec{r}) - \frac{1}{4}X_{42}(\vec{r}) \right) \\ Q_{002} = r^4 (6X_{40}(\vec{r})) \\ Q_{110} = r^4 \left(\frac{1}{2}Y_{42}(\vec{r}) \right) \\ Q_{101} = r^4 (3X_{41}(\vec{r})) \\ Q_{011} = r^4 (3Y_{41}(\vec{r})) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} R_{200} = r^4 \left(3X_{40}(\vec{r}) - \frac{1}{2}X_{42}(\vec{r}) + \frac{1}{8}X_{44}(\vec{r}) \right) \\ R_{020} = r^4 \left(-3X_{40}(\vec{r}) - \frac{1}{2}X_{42}(\vec{r}) - \frac{1}{8}X_{44}(\vec{r}) \right) \\ R_{002} = r^4 (X_{42}(\vec{r})) \\ R_{110} = r^4 \left(\frac{1}{4}Y_{44}(\vec{r}) \right) \\ R_{101} = r^4 \left(-3X_{41}(\vec{r}) + \frac{1}{2}X_{43}(\vec{r}) \right) \\ R_{011} = r^4 \left(3Y_{41}(\vec{r}) + \frac{1}{2}Y_{43}(\vec{r}) \right) \end{array} \right. \quad (7.14)$$

En rassemblant les termes en $X_{nm}(\vec{r})$ et $Y_{nm}(\vec{r})$, on obtient :

$$E_p|_{n=2} = -\frac{GM_1 R_1^2}{r^5} \begin{pmatrix} X_{40}(\vec{r}) \\ X_{41}(\vec{r}) \\ Y_{41}(\vec{r}) \\ X_{42}(\vec{r}) \\ Y_{42}(\vec{r}) \\ X_{43}(\vec{r}) \\ Y_{43}(\vec{r}) \\ X_{44}(\vec{r}) \\ Y_{44}(\vec{r}) \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{C_{20}^{(1)}}{4} \begin{pmatrix} 12 \int_{\mathcal{S}_2} (2\rho_z^2 - (\rho_x^2 + \rho_y^2)) dm \\ 12 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_z dm \\ 12 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_y \rho_z dm \\ \int_{\mathcal{S}_2} (\rho_x^2 - \rho_y^2) dm \\ 2 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_y dm \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{C_{22}^{(1)}}{8} \begin{pmatrix} 24 \int_{\mathcal{S}_2} (\rho_x^2 - \rho_y^2) dm \\ -24 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_z dm \\ 24 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_y \rho_z dm \\ 4 \int_{\mathcal{S}_2} (2\rho_z^2 - (\rho_x^2 + \rho_y^2)) dm \\ 0 \\ 4 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_z dm \\ 4 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_y \rho_z dm \\ \int_{\mathcal{S}_2} (\rho_x^2 - \rho_y^2) dm \\ 2 \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_y dm \end{pmatrix} \right] \quad (7.15)$$

À ce stade, on retrouve au facteur 8/5 près, l'expression de $V_{BB}^{(4)}$ donnée par Ashenberg (2007, Eq. 20). Ce facteur a également été remarqué par Boué & Laskar (2009).

Or chacune des intégrales des polynômes homogènes de degré 2 en (ρ_x, ρ_y, ρ_z) peut être exprimée en fonction d'un coefficient de degré 2 du potentiel du solide \mathcal{S}_2 (voir en annexe C). Comme pour les coordonnées (ρ_x, ρ_y, ρ_z) , ces coefficients sont eux aussi exprimés dans \mathcal{R}_1 et on les note $(\tilde{C}_{nm}^{(2)}, \tilde{S}_{nm}^{(2)})$; on obtient alors :

$$E_p|_{n=2} = -\frac{GM_1 R_1^2 M_2 R_2^2}{r^5} \begin{pmatrix} X_{40}(\vec{r}) \\ X_{41}(\vec{r}) \\ Y_{41}(\vec{r}) \\ X_{42}(\vec{r}) \\ Y_{42}(\vec{r}) \\ X_{43}(\vec{r}) \\ Y_{43}(\vec{r}) \\ X_{44}(\vec{r}) \\ Y_{44}(\vec{r}) \end{pmatrix} \cdot \left(C_{20}^{(1)} \begin{pmatrix} 6\tilde{C}_{20}^{(2)} \\ 3\tilde{C}_{21}^{(2)} \\ 3\tilde{S}_{21}^{(2)} \\ \tilde{C}_{22}^{(2)} \\ \tilde{S}_{22}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{C_{22}^{(1)}}{2} \begin{pmatrix} 24\tilde{C}_{22}^{(2)} \\ -6\tilde{C}_{21}^{(2)} \\ 6\tilde{S}_{21}^{(2)} \\ 2\tilde{C}_{20}^{(2)} \\ 0 \\ \tilde{C}_{21}^{(2)} \\ \tilde{S}_{21}^{(2)} \\ \tilde{C}_{22}^{(2)} \\ \tilde{S}_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \right) \quad (7.16)$$

Pour le calcul des coefficients du potentiel $(\tilde{C}_{nm}^{(2)}, \tilde{S}_{nm}^{(2)})$ du solide \mathcal{S}_2 exprimés dans la base $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$, on peut utiliser la méthode générale (valable pour un degré quelconque) décrite en annexe F. Mais on se limite ici au degré 2, et il est plus pratique d'utiliser (Boué & Laskar, 2009, eq. 8), qui donne une expression vectorielle des intégrales $(\int_{\mathcal{S}_2} \rho_x^i \rho_y^j \rho_z^k dm)$ pour $i + j + k = 2$:

$$\int_{\mathcal{S}_2} \vec{\rho}^t \vec{\rho} dm = \frac{1}{2} (A_2 - B_2 + C_2) I_d + (B_2 - A_2) \vec{I}_2^t \vec{I}_2 + (B_2 - C_2) \vec{K}_2^t \vec{K}_2 \quad (7.17)$$

Ainsi, en projetant cette relation dans la base $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x^2 \delta m = \frac{A_2 - B_2 + C_2}{2} + M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_x^2 + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_x^2 \right] \\ \int_{\mathcal{S}_2} \rho_y^2 \delta m = \frac{A_2 - B_2 + C_2}{2} + M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_y^2 + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_y^2 \right] \\ \int_{\mathcal{S}_2} \rho_z^2 \delta m = \frac{A_2 - B_2 + C_2}{2} + M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_z^2 + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_z^2 \right] \\ \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_y \delta m = M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_x I_y + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_x K_y \right] \\ \int_{\mathcal{S}_2} \rho_x \rho_z \delta m = M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_x I_z + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_x K_z \right] \\ \int_{\mathcal{S}_2} \rho_y \rho_z \delta m = M_2 R_2^2 \left[4C_{22}^{(2)} I_y I_z + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_y K_z \right] \end{array} \right. \quad (7.18)$$

Des relations entre matrice d'inertie et coefficients du potentiel (voir en annexe F), on en déduit directement les valeurs des $(\tilde{C}_{2m}^{(2)}, \tilde{S}_{2m}^{(2)})$ en fonction des $(C_{2m}^{(2)}, S_{2m}^{(2)})$ et des coordonnées (I_x, I_y, I_z) de \vec{I}_2 et (K_x, K_y, K_z) de \vec{K}_2 dans $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_{20}^{(2)} \\ \tilde{C}_{21}^{(2)} \\ \tilde{S}_{21}^{(2)} \\ \tilde{C}_{22}^{(2)} \\ \tilde{S}_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{C_{22}^{(2)}}{3} \begin{pmatrix} 12X_{20}(\vec{I}_2) \\ 4X_{21}(\vec{I}_2) \\ 4Y_{21}(\vec{I}_2) \\ X_{22}(\vec{I}_2) \\ Y_{22}(\vec{I}_2) \end{pmatrix} + \frac{C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}}{12} \begin{pmatrix} 12X_{20}(\vec{K}_2) \\ 4X_{21}(\vec{K}_2) \\ 4Y_{21}(\vec{K}_2) \\ X_{22}(\vec{K}_2) \\ Y_{22}(\vec{K}_2) \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

En prenant le gradient de $E_p|_{n=2}$ par rapport à \vec{r} , on déduit les forces qui s'exercent sur \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

7.2 Calcul du moment

On ne s'intéressera ici qu'au moment exercé sur le solide \mathcal{S}_1 . Le calcul de celui sur \mathcal{S}_2 sera obtenu de manière analogue.

Remarque : contrairement à la force, le moment exercé sur \mathcal{S}_1 n'est pas l'opposé de celui exercé sur \mathcal{S}_2 .

7.2.1 Moment pour deux solides quelconques

Le moment exercé sur \mathcal{S}_1 par l'élément de masse δm de \mathcal{S}_2 est :

$$\delta \vec{\mathcal{M}} = \frac{3G\delta m}{\|\vec{r} + \vec{\rho}\|^5} (\vec{r} + \vec{\rho}) \wedge \mathcal{I}_1 (\vec{r} + \vec{\rho}) \quad (7.20)$$

De la même manière que pour l'énergie potentielle, on effectue un développement limité à l'ordre 2 en $\vec{\rho}$. Les termes d'ordre 0 seront ceux dus à l'interaction entre \mathcal{S}_1 et un corps ponctuel de masse m_2 situé en O_2 , moment dont on a déjà tenu compte au chapitre 2. Les termes d'ordre 1 en $\vec{\rho}$ seront nuls car $\vec{\rho}$ est compté à partir du centre de masse du solide \mathcal{S}_2 . Dans ce qui suit, on ne s'intéressera donc plus qu'aux termes d'ordre 2 :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}|_2 = \frac{3G\delta m}{r^9} \left(r^4 \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho} - 5 (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) r^2 (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}) + \frac{5}{2} \left(7 (\vec{r} \cdot \vec{\rho})^2 - \rho^2 r^2 \right) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r} \right) \quad (7.21)$$

Termes en $\vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho}$:

$$\delta \vec{\mathcal{M}}| (\vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho}) = \frac{3G\delta m}{r^5} \begin{pmatrix} (C_1 - B_1) \rho_y \rho_z \\ (A_1 - C_1) \rho_x \rho_z \\ (B_1 - A_1) \rho_x \rho_y \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

En intégrant sur le volume du solide \mathcal{S}_2 et en utilisant les relations 7.18, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}| (\vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho}) &= \frac{3GM_2 R_2^2}{r^5} \begin{pmatrix} (C_1 - B_1) \left(4C_{22}^{(2)} I_y I_z + \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) K_y K_z \right) \\ (A_1 - C_1) \left(4C_{22}^{(2)} I_x I_z + \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) K_x K_z \right) \\ (B_1 - A_1) \left(4C_{22}^{(2)} I_x I_y + \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) K_x K_y \right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{3GM_2 R_2^2}{r^5} \left(4C_{22}^{(2)} \vec{I}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{I}_2 + \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) \vec{K}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{K}_2 \right) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Termes en $\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}$:

$$\delta \vec{\mathcal{M}}| (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}) = \frac{15G}{2r^9} \left(7 (\vec{r} \cdot \vec{\rho})^2 - \rho^2 r^2 \right) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r} \quad (7.24)$$

$$= \frac{15G}{2r^9} \left(7 (x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z)^2 - r^2 \rho^2 \right) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r} \quad (7.25)$$

Or, d'après les relations 7.18, on a :

$$\int_{\mathcal{S}_2} 7(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z)^2 - r^2\rho^2\delta m = \frac{7}{2}(A_2 - B_2 + C_2)r^2 \quad (7.26)$$

$$+ 7M_2R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} (\vec{r} \cdot \vec{I}_2)^2 + C_{20}^{(2)} (\vec{r} \cdot \vec{K}_2)^2 \right) \quad (7.27)$$

$$- \frac{A_2 + B_2 + C_2}{2} r^2 \quad (7.28)$$

$$= (3A_2 - 4B_2 + 3C_2)r^2 \quad (7.29)$$

$$+ M_2R_2^2 \left(28C_{22}^{(2)} (\vec{r} \cdot \vec{I}_2)^2 + 7(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) (\vec{r} \cdot \vec{K}_2)^2 \right) \quad (7.30)$$

En intégrant $\delta\vec{\mathcal{M}}|(\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r})$ sur le volume du solide \mathcal{S}_2 , on obtient donc

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}|(\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r}) &= \frac{15GM_2R_2^2}{2r^9} \left(28C_{22}^{(2)} (\vec{r} \cdot \vec{I}_2)^2 + 7(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) (\vec{r} \cdot \vec{K}_2)^2 \right) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r} \\ &+ \frac{15G}{2r^7} (3A_2 - 4B_2 + 3C_2) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Termes en $\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r}$:

$$\delta\vec{\mathcal{M}}|(\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r}) = -\frac{15G}{r^7} (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r}) \quad (7.32)$$

$$= -\frac{15G}{r^7} \begin{pmatrix} (C_1 - B_1)(y\rho_z + z\rho_y)(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z) \\ (A_1 - C_1)(x\rho_z + z\rho_x)(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z) \\ (B_1 - A_1)(y\rho_x + x\rho_y)(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z) \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

On s'intéresse à la partie dépendant de $\vec{\rho}$ de la projection de $\delta\vec{\mathcal{M}}|(\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1\vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1\vec{r})$ sur \vec{I}_1 :

$$(y\rho_z + z\rho_y)(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z) = xy\rho_x\rho_z + y^2\rho_y\rho_z + yz\rho_z^2 + xz\rho_x\rho_y + yz\rho_y^2 + z^2\rho_y\rho_z \quad (7.34)$$

En intégrant sur le volume du solide \mathcal{S}_2 et en utilisant les relations 7.18, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_2} (y\rho_z + z\rho_y)(x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z) \delta m &= xyM_2R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_x I_z + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_x K_z \right) \\
&+ y^2 M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_y I_z + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_y K_z \right) \\
&+ yz M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_z^2 + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_z^2 \right) + \frac{A_2 - B_2 + C_2}{2} yz \\
&+ xz M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_x I_y + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_x K_y \right) \\
&+ yz M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_y^2 + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_y^2 \right) + \frac{A_2 - B_2 + C_2}{2} yz \\
&+ z^2 M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} I_y I_z + (C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)}) K_y K_z \right) \\
&= M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} \right) (xI_x + yI_y + zI_z) (yI_y + zI_z) \\
&+ M_2 R_2^2 \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) (xK_x + yK_y + zK_z) (yK_y + zK_z) \\
&+ (A_2 - B_2 + C_2) yz \\
&= M_2 R_2^2 \left(4C_{22}^{(2)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{I}_2) \left(\vec{I}_1 \cdot \frac{\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{I}_2 + \vec{I}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}}{C_1 - B_1} \right) \\
&+ M_2 R_2^2 \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{K}_2) \left(\vec{I}_1 \cdot \frac{\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{K}_2 + \vec{K}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}}{C_1 - B_1} \right) \\
&+ (A_2 - B_2 + C_2) \left(\vec{I}_1 \cdot \frac{\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}}{C_1 - B_1} \right) \tag{7.35}
\end{aligned}$$

On obtient le même genre d'expression pour les projections sur \vec{J}_1 et \vec{K}_1 ; finalement :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}} | (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}) &= -\frac{15GM_2R_2^2}{r^7} \left(4C_{22}^{(2)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{I}_2) (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{I}_2 + \vec{I}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}) \\
&- \frac{15GM_2R_2^2}{r^7} \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{K}_2) (\vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{K}_2 + \vec{K}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r}) \\
&- \frac{15G}{r^7} (A_2 - B_2 + C_2) \vec{r} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{r} \tag{7.36}
\end{aligned}$$

Somme des termes :

En posant $\vec{u} = \vec{r}/r$, en effectuant la somme des expressions 7.23, 7.31 et 7.36, on obtient le moment total exercé par le solide \mathcal{S}_2 sur le solide \mathcal{S}_1 :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}} &= \frac{3GM_2R_2^2}{2r^5} \left(C_{20}^{(2)} + 2C_{22}^{(2)} \right) \\
&\quad \left[2\vec{K}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{K}_2 + 5 \left(7(\vec{u} \cdot \vec{K}_2)^2 - 1 \right) \vec{u} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{u} - 10(\vec{u} \cdot \vec{K}_2) (\vec{u} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{K}_2 + \vec{K}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{u}) \right] \\
&+ \frac{3GM_2R_2^2}{2r^5} C_{22}^{(2)} \left[8\vec{I}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{I}_2 + 20 \left(7(\vec{u} \cdot \vec{I}_2)^2 - 1 \right) \vec{u} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{u} - 40(\vec{u} \cdot \vec{I}_2) (\vec{u} \wedge \mathcal{I}_1 \vec{I}_2 + \vec{I}_2 \wedge \mathcal{I}_1 \vec{u}) \right] \tag{7.37}
\end{aligned}$$

7.2.2 Lien avec DE405

Dans DE405, on tient compte du moment exercé par la Terre (solide \mathcal{S}_2) sur la Lune (solide \mathcal{S}_1). Comme la Terre est supposée être à symétrie de révolution, son coefficient du potentiel $C_{22}^{(2)}$

est nul. En notant $\mu_e = GM_2$, $R_e = R_2$, $J_{2e} = -C_{20}^{(2)}$, $\vec{r}_e = \vec{u}$, $\vec{P}_e = \vec{K}_2$ et $\sin \phi = \vec{u} \cdot \vec{K}_2$, 7.37 mène à l'équation donnée dans (Standish & Williams, 2006, p. 8) :

$$\vec{M}_{fig-fig} = \frac{15\mu_e R_e^2 J_{2e}}{2r_e^5} \left\{ (1 - 7 \sin^2 \phi) \vec{r}_e \wedge I\vec{r}_e + 2 \sin \phi \left(\vec{r}_e \wedge I\vec{P}_e + \vec{P}_e \wedge I\vec{r}_e \right) - \frac{2}{5} \vec{P}_e \wedge I\vec{P}_e \right\} \quad (7.38)$$

Cette expression est aussi cohérente avec celle de (Bois et al., 1992, p. 197).

Chapitre 8

Anneau d'astéroïdes

Plusieurs centaines de milliers d'astéroïdes ont été découverts à ce jour dans le Système solaire, même si leurs orbites ne sont pas toutes déterminées avec précision. Or tenir compte individuellement des perturbations de chacun d'eux sur les planètes engendrerait des temps de calculs trop importants, même en négligeant les perturbations mutuelles. Pour la très grande majorité, l'effet sur les orbites des planètes est d'ailleurs très faible. Pour tenir compte de l'effet global, qui peut ne pas être négligeable, on suppose qu'à chaque instant, les astéroïdes dont on n'intègre pas les équations du mouvement se répartissent uniformément selon un anneau circulaire (de masse M et de rayon R) centré au barycentre du Système solaire (ou centré sur le Soleil pour INPOP08). On peut remarquer que l'on ne suppose pas que leurs orbites sont circulaires.

Ce type de modélisation a d'abord été introduit par Krasinsky et al. (2002), puis repris pour DE414 (Konopliv et al., 2006; Standish, 2006).

8.1 Corps dans le plan de l'anneau

On se place dans le plan de l'anneau, auquel on associe le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_A = (O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que O est le centre de l'anneau (confondu ici avec le barycentre du Système solaire) et $\vec{u} = \vec{r}/r$ où \vec{r} est le vecteur position barycentrique du corps perturbé. Dans \mathcal{R}_A , \vec{r} a pour coordonnées $(r, 0)$.

Soit un élément de masse δm de l'anneau, de coordonnées $\vec{\rho}(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$. L'accélération newtonienne du corps due à δm est :

$$\delta \ddot{\vec{r}} = G\delta m \frac{\vec{\rho} - \vec{r}}{\|\vec{\rho} - \vec{r}\|^3} = \frac{GM}{2\pi} \frac{(R \cos \theta - r) \vec{u} + R \sin \theta \vec{v}}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (8.1)$$

En intégrant sur l'anneau (pour $\theta \in [0, 2\pi]$), on obtient l'accélération du corps due à l'anneau :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \theta - r) \vec{u} + R \sin \theta \vec{v}}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (8.2)$$

La fonction $\theta \mapsto \sin \theta (1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \theta)^{-3/2}$ étant impaire et 2π périodique, son intégrale entre 0 et 2π est nulle. L'accélération du corps due à l'anneau est donc nulle selon \vec{v} , ce qui était prévisible pour des raisons de symétrie (selon l'axe porté par \vec{u}) :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \theta - r) \vec{u}}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (8.3)$$

8.1.1 Corps intérieur à l'anneau

Pour un corps intérieur, c'est-à-dire $r < R$, (8.3) s'écrit

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \theta - r) \vec{u}}{(1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (8.4)$$

On introduit alors les coefficients de Laplace $b_s^{(k)}(\alpha)$ tels que (Laskar, 2005, eq. 6) :

$$(1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_s^{(k)}(\alpha) z^k \quad (8.5)$$

Avec $\alpha = r/R$, $z = e^{i\theta}$ et $s = 3/2$, (8.4) devient :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM \vec{u}}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} (R \cos \theta - r) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{3/2}^{(k)}(r/R) e^{ik\theta} \right) d\theta \quad (8.6)$$

En intervertissant les signes \int et \sum , et en notant que pour tout n dans \mathbb{Z} , $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 2\pi \delta_{0,n}$ (où δ est le symbol de Kronecker), que pour tout k dans \mathbb{Z} , $b_s^{(-k)}(\alpha) = b_s^{(k)}(\alpha)$ d'après (Laskar, 2005), on arrive finalement à :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2rR^2} \left(b_{3/2}^{(1)}(r/R) - \frac{r}{R} b_{3/2}^{(0)}(r/R) \right) \vec{r} \quad (8.7)$$

Pour faire le lien avec l'expression donnée dans (Krasinsky et al., 2002), il suffit d'exprimer les coefficients de Laplace en fonction des fonctions hypergéométriques. D'après (Laskar & Robutel, 1995, équation 39) (attention, il manque un facteur 1/2 dans (Laskar, 2005, expression 7)) :

$$\frac{1}{2} b_s^{(k)}(\alpha) = \frac{(s)_k}{k!} \alpha^k F(s, s+k, k+1; \alpha^2) = \frac{(s)_k}{k!} \alpha^k \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(s)_n (s+k)_n}{(k+1)_n (1)_n} \alpha^{2n} \right) \quad (8.8)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} b_{3/2}^{(1)}(r/R) = \frac{3}{2} \frac{r}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_n (5/2)_n}{(2)_n (1)_n} (r/R)^{2n} \right) \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{2} b_{3/2}^{(0)}(r/R) = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_n (3/2)_n}{(1)_n (1)_n} (r/R)^{2n} \right) \quad (8.10)$$

On injecte ces expressions dans (8.7) ; en notant que $(3/2) \times (5/2)_n = (3/2)_n \times (n+3/2)$ et que $(2)_n = (1)_n \times (n+1)$, on retrouve bien l'expression de l'accélération d'un corps interne à l'anneau que donne Krasinsky et al. (2002) :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2R^3} F(1.5, 1.5, 2; (r/R)^2) \vec{r} = \frac{GM}{2R^3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n (3/2)_n}{(2)_n (1)_n} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n} \right) \vec{r} \quad (8.11)$$

Remarque : on aurait pu arriver au même résultat en développant le dénominateur de (8.4) en polynômes de Legendre (comme au chapitre 2), puis en les intégrant entre 0 et 2π .

8.1.2 Corps extérieur à l'anneau

Pour un corps extérieur, c'est-à-dire $r > R$, (8.3) s'écrit :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi r^3} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \theta - r) \vec{u}}{(1 + (R/r)^2 - 2(R/r) \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (8.12)$$

Les mêmes développements que pour un corps interne peuvent être effectués, menant à l'accélération d'un corps externe :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2r^3} \left(\frac{R}{r} b_{3/2}^{(1)}(R/r) - b_{3/2}^{(0)}(R/r) \right) \vec{r} \quad (8.13)$$

Là encore, on peut exprimer les coefficients de Laplace en fonction de F (voir 8.8) :

$$\frac{1}{2} b_{3/2}^{(0)}(R/r) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_n (3/2)_n}{(1)_n (1)_n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{R}{r} b_{3/2}^{(1)}(R/r) &= \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n (5/2)_n}{(2)_n (1)_n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)(5/2)_n (3/2)_n}{(2)_n (1)_n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)(5/2)_{n-1} (3/2)_{n-1}}{(2)_{n-1} (1)_{n-1}} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} \frac{(3/2)_n (3/2)_n}{(1)_n (1)_n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Et on arrive à une expression équivalente pour l'accélération du corps extérieur :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(3/2)_n (3/2)_n}{(1)_n (1)_n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right) \vec{r} \quad (8.16)$$

Remarque : ici aussi, on aurait pu arriver au même résultat en développant le dénominateur de (8.12) en polynômes de Legendre.

8.2 Cas général d'un corps en dehors du plan de l'anneau

On se place dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que \vec{w} est le vecteur unitaire normal au plan de l'anneau, \vec{u} est le vecteur directeur de la projection de \vec{r} colinéairement à \vec{w} , et $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$. Dans ce repère, un élément de masse de l'anneau a pour coordonnées $\vec{\rho} = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ et le corps perturbé $\vec{r} = (r \cos \phi, 0, r \sin \phi)$. L'accélération du corps due à δm est :

$$\delta \ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi} (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta \cos \phi)^{-3/2} \begin{pmatrix} R \cos \theta - r \cos \phi \\ R \sin \theta \\ -r \sin \phi \end{pmatrix} d\theta \quad (8.17)$$

$$= \frac{GM}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} (1 - z \cos \theta)^{-3/2} \begin{pmatrix} R \cos \theta - r \cos \phi \\ R \sin \theta \\ -r \sin \phi \end{pmatrix} d\theta \quad \text{avec } z = \frac{2rR \cos \phi}{R^2 + r^2} \quad (8.18)$$

Comme on suppose que le corps perturbé n'est pas sur l'anneau (c'est-à-dire $r \neq R$ ou $\cos \phi \neq 1$), $|z \cos \theta|$ est toujours strictement inférieur à 1. D'après le développement en séries entières

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{(1)_n} x^n \quad (8.19)$$

appliqué à $x = z \cos \theta$ et $\alpha = 3/2$, on obtient :

$$\delta \ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n}{(1)_n} z^n \cos^n \theta \right) \begin{pmatrix} R \cos \theta - r \cos \phi \\ R \sin \theta \\ -r \sin \phi \end{pmatrix} d\theta \quad (8.20)$$

En intégrant sur l'ensemble de l'anneau ($\theta \in [0; 2\pi]$), et en intervertissant les signes \sum et \int , on obtient l'accélération du corps due à l'anneau :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n}{(1)_n} z^n \begin{pmatrix} RJ_{n+1} - r \cos \phi J_n \\ R \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^n \theta d\theta \\ -r \sin \phi J_n \end{pmatrix} \right) \text{ avec } J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta \quad (8.21)$$

Comme l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^n \theta d\theta$ est nulle, l'accélération selon le vecteur \vec{v} est également nulle (ce qui était prévisible, là encore pour des raisons de symétrie par rapport au plan (\vec{u}, \vec{r})). Intégrer J_n par partie permet de trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} , ce qui permet de calculer J_n :

$$\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \begin{cases} J_{2n} = 2\pi \frac{(1/2)_n}{(1)_n} \\ J_{2n+1} = 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

L'accélération du corps est alors :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{GM}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} \left(R \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n}{(1)_n} z^n J_{n+1} \vec{u} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_n}{(1)_n} z^n J_n \vec{r} \right) \\ &= \frac{GM}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \left(R \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_{2n-1}}{(1)_{2n-1}} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} z^{2n-1} \vec{u} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_{2n}}{(1)_{2n}} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} z^{2n} \vec{r} \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Dans le cas où le corps est dans le plan de l'anneau, $\cos \phi = 1$, $\vec{u} = \vec{r}/r$, (8.23) est équivalente (vérifiée numériquement) aux expressions (8.7) ou (8.13) selon les cas $r < R$ ou $r > R$.

Une expression équivalente faisant intervenir les intégrales elliptiques de première et seconde espèce est donnée dans (Kuchynka et al., 2010)

Deuxième partie

Réduction et ajustements aux données Laser Lune Ranging

Chapitre 9

Réduction des données laser Lune

Les données LLR (Lunar Laser Ranging) sont la mesure du temps de trajet aller-retour de la lumière entre une station terrestre et un réflecteur à la surface de la Lune.

Les stations se répartissent sur 4 sites :

- Fort Davis au Texas (Mc Donald, MLRS1 et MLRS2)
- Grasse en France (CERGA)
- Haleakala à Hawaï
- Apache Point au Nouveau Mexique (Apollo)

Les réflecteurs sont des miroirs ”coins de cube”, qui ont la propriété de réfléchir le rayon incident vers la direction d’où il a été émis. Au total, 5 ont été déposés par des missions lunaires américaines (Apollo XI, XIV et XV) ou russes (Lunakhod-1 et Lunakhod-2). Le réflecteur Lunakhod-1 a longtemps été considéré comme perdu, mais l’équipe de T. Murphy (2010, communication privée) semble avoir obtenu des échos très récemment ; peu nombreux, ils ne sont pour l’instant pas pris en compte.

La lumière est émise (et reçue) par un point à la surface de la Terre et réfléchi par un point à la surface de la Lune. Son temps de trajet est fonction non seulement des positions relatives des centres de masse de la Terre et la Lune, mais aussi (entre autre) de leurs orientations dans l’espace. Les données LLR renseignent donc à la fois sur la trajectoire de la Lune par rapport à celle de la Terre et sur ses libérations.

Les mesures ont commencé en 1969 et se poursuivent actuellement. On dispose de plus de 18600 données réparties sur près de 40 ans. Il s’agit de points normaux calculés à partir des échos reçus sur une période d’une dizaine de minutes (voire moins pour la station récente Apollo). Leur précision s’est améliorée avec le temps pour atteindre aujourd’hui quelques centaines de picosecondes (sur environ 2.5 secondes) ce qui correspond à quelques centimètres sur la demi-distance parcourue par la lumière. Lors de leur réduction, il est donc important de modéliser avec précision les positions dans l’espace des points d’émission, de réflexion et de réception des photons.

À un instant donné (date d’émission qui sera notée t_1 dans la suite), on dispose donc de la mesure du trajet aller-retour de la lumière. Même en dehors d’un cadre relativiste, on ne pourrait rigoureusement pas parler de “distance Terre-Lune”, puisque pendant le temps de trajet de la lumière, la Terre et la Lune non seulement se déplacent sur leurs orbites, mais tournent également sur elles-mêmes. Le terme “distance” n’est employé que par habitude.

L’équation du temps de trajet T_{ar} du photon est la somme du temps aller T_a et de celui de retour T_r :

$$T_a = \frac{\|\overrightarrow{E_1 R_2}\|}{c} + T_a^{RG} + T_a^{atm} \text{ et } T_r = \frac{\|\overrightarrow{R_2 E_3}\|}{c} + T_r^{RG} + T_r^{atm} \quad (9.1)$$

où

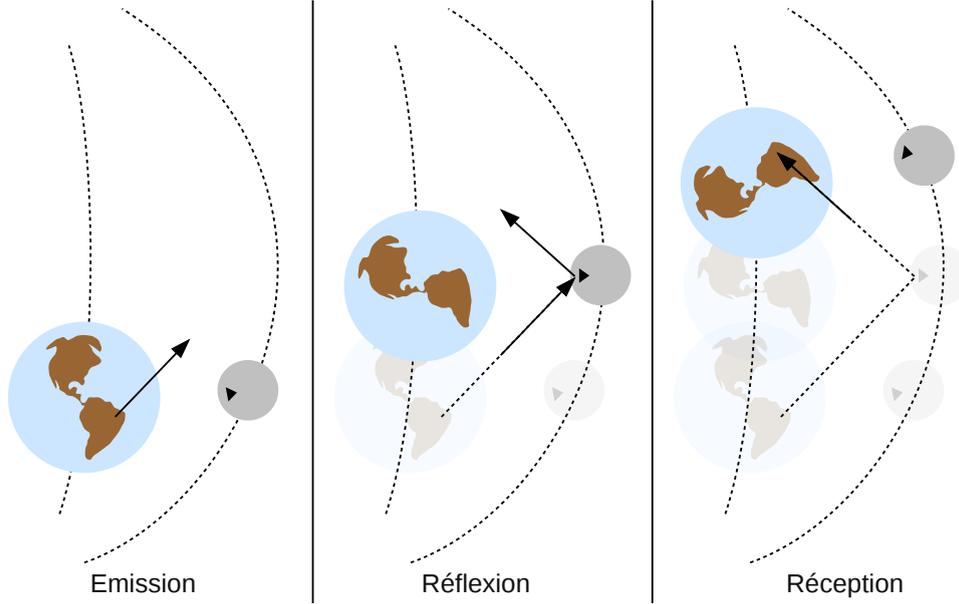


FIGURE 9.1 – Trajet de la lumière lors d’une observation LLR. Entre les instants d’émission, de réflexion et de réception, la Terre et la Lune avancent sur leurs orbites respectives et tournent sur elles-mêmes. Les vitesses de la Terre et de la Lune ont été exagérées ; dans la réalité, les points d’émission et de réception des photons sont proches l’un de l’autre.

- E_1 est le point d’émission du photon (station à l’instant t_1)
- R_2 est le point de réflexion du photon (réflecteur à l’instant t_2)
- E_3 est le point de réception du photon (station à l’instant t_3)
- c est la vitesse de la lumière
- T^{RG} est le retard induit par la déviation relativiste des rayons lumineux en présence d’un corps massif (Soleil, Terre)
- T^{atm} est le retard induit par la traversée de l’atmosphère

Dans la suite de ce chapitre, on ne détaillera que le calcul du temps de trajet aller T_a , celui du retour T_r étant analogue. Le trajet aller $\overrightarrow{E_1 R_2}$ du photon peut être décomposé de la façon suivante :

$$\overrightarrow{E_1 R_2} = \overrightarrow{O L_2} + \overrightarrow{L_2 R_2} - \overrightarrow{O G_1} - \overrightarrow{G_1 E_1} \quad (9.2)$$

où

- O : barycentre du Système solaire (point fixe et origine du repère de la solution planétaire)
- $\overrightarrow{O L_2}$: vecteur position du centre de masse de la Lune par rapport au barycentre du Système solaire à l’instant de réflexion t_2
- $\overrightarrow{L_2 R_2}$: vecteur position du réflecteur par rapport au centre de masse de la Lune à l’instant de réflexion t_2
- $\overrightarrow{O G_1}$: vecteur position du centre de masse de la Terre par rapport au barycentre du Système solaire à l’instant d’émission t_1
- $\overrightarrow{G_1 E_1}$: vecteur position de l’émetteur par rapport au centre de masse de la Terre à l’instant d’émission t_1

Cette relation est projetée dans l’ICRF (voir le paragraphe 3.2.1), le repère dans lequel sont exprimées les solutions INPOP.

Les vecteurs $\overrightarrow{O G_1}$ et $\overrightarrow{O L_2}$ sont directement accessibles à partir de la solution planétaire. Comme INPOP (ainsi que les solutions DE102 à DE423 du JPL) intègre également les angles d’Euler de la Lune, on peut donc en déduire l’orientation de la Lune par rapport à l’ICRF et

ainsi déterminer le vecteur $\overrightarrow{L_2R_2}$. Enfin, le vecteur $\overrightarrow{G_1E_1}$, ainsi que les termes T_a^{RG} et T_a^{atm} seront calculés conformément aux Conventions IERS 2003 de McCarthy & Petit (2004).

Remarque : pour les données d’Haleakala, l’émission et la réception des photons sont effectuées par deux stations différentes, distantes de quelques mètres.

Résolution par itérations

On remarque que pour le calcul de T_a , il est nécessaire de connaître l’instant de réflexion t_2 . En notant que $t_2 = t_1 + T_a$, l’expression (9.1) s’écrit sous la forme $T_a = f(T_a)$, et est une équation implicite en T_a , que l’on résout par itérations. T_a est alors la limite de la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0 \quad (9.3)$$

Dans le cas des données LLR, avec un court temps de trajet (aller ou retour) des photons, 4 itérations suffisent pour avoir $|U_n - U_{n-1}| \leq 10^{-13}$ seconde.

9.1 Positionnement du point d’émission ou de réception

L’International Terrestrial Reference Frame (ITRF) est un repère tournant avec la Terre. Il est construit à partir d’un réseau de stations, dont les coordonnées ne présentent que de faibles variations aux cours du temps. Ces dernières sont générées par des effets géophysiques, dont la prise en compte est décrite dans les paragraphes qui suivent. Plusieurs versions (ITRF97, ITRF2000, ITRF2005, ...) se succèdent selon les méthodes et modèles de réduction des observations (SLR, VLBI, GPS, LLR, DORIS, ...) effectuées par les stations. Pour plus de détails, on peut se reporter au chapitre 4 des Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004).

9.1.1 Coordonnées des stations

TABLE 9.1 – Coordonnées ITRF des stations LLR.

Station	Codes		Coordonnées			source
	MINI	DOMES	x (m)	y (m)	z (m)	
CERGA	01910	10002S002	4581692.189	556196.025	4389355.082	site IGN, ITRF2005
Mc Donald	71110	40442S002	-1330781.376	-5328755.585	3235697.658	site IGN, ITRF2000
MLRS1	71111	40442S001	-1330121.043	-5328532.272	3236146.670	site IGN, ITRF2000
MLRS2	71112	40442M006	-1330021.072	-5328401.861	3236480.784	site IGN, ITRF2005
Haleakala (ém.)	56610	40445S005	-5466007.089	-2404427.632	2242188.760	site IGN, ITRF2000
Haleakala (réc.)	56611	?	-5466000.273	-2404424.634	2242206.911	SYRTE (Chapront)
Apollo	70610	-	-1463999.007	-5166633.028	3435012.346	site Apollo

Les coordonnées “régularisées” (c’est-à-dire en dehors de tout effet perturbateur décrit ci-après) des stations sont exprimées dans l’ITRF, à la date de référence du 1^{er} janvier 1997. Cette date correspond à l’époque de référence de l’ITRF2000, dans lequel étaient repérées les stations au commencement des réductions LLR effectuées avec INPOP. Il a depuis été remplacé par l’ITRF2005, mais la date a été conservée, le site de l’IGN itrf.ensg.ign.fr donnant accès aux coordonnées des stations pour une date quelconque. L’ITRF2008 n’est pour l’instant pas utilisable, les paramètres de l’orientation de la Terre (voir le paragraphe 9.1.7 n’étant donnés par la série C04 que pour les transformations entre l’ITRF2005 et l’ICRF).

Pour les différentes stations, les coordonnées utilisées sont données dans le tableau 9.1. À chaque station est associé un code MINI, qui figure dans les fichiers de mesures LLR, dont

un exemple est donné sur le site Apollo www.physics.ucsd.edu/~tmurphy/apollo/norm_pts.html. Le code DOMES est celui qui permet, sur le site de l'IGN, d'identifier toutes les stations intervenant dans la définition de l'ITRF.

Pour établir la correspondance entre les codes MINI et DOMES, on effectue une recherche dans le fichier *iers_sta_list.txt* (disponible sur le site de l'IGN) sur les mots-clés Grasse, CERGA, Fort Davis, Donald, Haleakala, Maui et LLR. Après affichage des sites sur une carte, on peut sélectionner d'autres stations présentes dans leurs voisinages (sur un même site peuvent coexister plusieurs stations utilisant plusieurs techniques). On obtient ainsi plus de 30 codes DOMES possibles. Pour près de la moitié d'entre eux, aucune coordonnée n'y est associée. Parmi ceux qui restent, on compare les positions fournies (dans l'ITRF2005 si disponibles, ITRF2000 sinon) à celles utilisées dans le programme de réduction (appelé CAROL) utilisé pour S2001 de Chapront et al. (2002), et maintenu au SYRTE par S. Bouquillon et G. Francou. On arrive alors à repérer certaines correspondances.

La station du CERGA ne pose pas de problème, ses coordonnées sont disponibles dans l'ITRF2005.

Le cas de MLRS2 est plus problématique. Dans (Chapront et al., 2002, Tab. 5) sont publiées ses coordonnées avant et après ajustement avec la solution S2000, qui ne diffèrent que de quelques millimètres. Mais sur le site de l'IGN, la station la plus proche est 40442M006, pourtant éloignée de plus d'un mètre en Y et Z.

Pour Mc Donald, MLRS1 et la station d'émission d'Haleakala, les coordonnées des sites respectifs 40442S002, 40442S001 et 40445S005 ne sont disponibles que dans l'ITRF2000. Or les "Earth Orientation Parameters" (ou EOP) de la série C04 (voir 9.1.7) sont déterminés pour passer de l'ITRF2005 à l'ICRF. Les différences entre ITRF2000 et ITRF2005 sont cependant suffisamment faibles (de l'ordre du centimètre pour 10002S002 et 40442M006) pour que l'erreur commise lors du passage de l'ITRF2005 à l'ICRF d'une position ITRF2000 ne soit pas importante.

Ni la station de réception d'Haleakala, ni celle d'Apollo ne figurent dans le fichier *iers_sta_list.txt*. Pour Haleakala, le tableau 9.1 contient les coordonnées ajustées par le programme de réduction du SYRTE. Pour Apollo, dont la mise en service est certainement trop récente pour figurer dans le réseau servant à la définition de l'ITRF, des coordonnées approximatives sont données sur le site www.physics.ucsd.edu/~tmurphy/apollo

Pour résumer, certaines coordonnées sont incertaines (MLRS2). D'autres sont données dans un repère obsolète (Mc Donald, MLRS1, émission d'Haleakala). Celles de la réception d'Haleakala sont inconnues en dehors de CAROL et celles d'Apollo ne sont qu'approximatives. Pour résoudre ces difficultés, les coordonnées des stations seront ajustées dans INPOP. Elles le sont d'ailleurs par d'autres personnes et équipes qui travaillent à la réduction des données LLR (J. Williams, L. Biskupek, J. Chapront, E. Yagudina).

Le seul argument opposable serait que la matrice de passage de l'ITRF2005 à l'ICRF et les positions ITRF2005 des stations forment un ensemble cohérent, c'est-à-dire que les EOP de la série C04 et les coordonnées des stations sont ajustés en même temps à l'ensemble des données qui contraignent l'orientation de la Terre (VLBI, SLR, LLR, Doris, GPS). Mais pour les stations LLR, leurs coordonnées ITRF2005 ont été ajustées en utilisant une solution planétaire et lunaire différente d'INPOP. Il est donc légitime d'en actualiser les valeurs. Les coordonnées des stations ajustées par INPOP08 (voir le tableau 13.14) sont d'ailleurs proches de celles du tableau 9.1 (sauf pour MLRS2). De plus, les pondérations associées aux données LLR dans la détermination de la matrice de passage de l'ITRF2005 à l'ICRF sont faibles devant celles des mesures VLBI. On peut donc supposer (non vérifié), que ces changements de position des stations LLR n'induiraient que des changements négligeables dans la détermination de la matrice de passage de l'ITRF2005 à l'ICRF. Il serait d'ailleurs intéressant d'estimer l'impact d'un changement de la solution planétaire dans la construction des EOP.

9.1.2 Tectonique des plaques

Les déplacements des stations induits par la tectonique des plaques sont modélisés par des dérives linéaires dans chacune des coordonnées cartésiennes dans l'ITRF. Leurs valeurs sont données dans le tableau 9.2 et sont issues du site de l'IGN.

TABLE 9.2 – Dérives des stations ITRF dues à la tectonique des plaques. Les vitesses sont données en mètres par an, l'échelle de temps est le Temps Terrestre (TT)

Station	Code	Vx (m/an)	Vy (m/an)	Vz (m/an)
CERGA	01910	-0.0156	0.0184	0.0089
Mc Donald	71110	-0.0125	-0.0001	-0.0065
MLRS1 (Mc Donald)	71111	-0.0125	-0.0001	-0.0065
MLRS2 (Mc Donald)	71112	-0.0125	-0.0001	-0.0065
Haleakala (émetteur)	56610	-0.0138	0.0607	0.0311
Haleakala (récepteur)	56611	-0.0138	0.0607	0.0311
Apollo	70610	-0.0141	-0.0015	-0.0064

Exprimées dans l'ITRF2000, les dérives de Mc Donald, MLRS1 et MLRS2 sont égales. On peut supposer qu'elles le restent dans l'ITRF2005 et celles de Mc Donald et MLRS1 (uniquement disponibles dans l'ITRF2000) seront donc imposées égales à celles de MLRS2. De même, celles de la station de réception d'Haleakala sont reprises de celles de la station d'émission (on ne dispose cependant ici que de leurs valeurs dans l'ITRF2000).

Enfin, comme on ne dispose d'aucune information pour Apollo, on reprend celles de la station GPS de White Sands dont le code DOMES est 49884S001, sa plus proche voisine à 65 kilomètres. Elle n'est cependant disponible que dans l'ITRF2000.

Dans le choix des dérives, on a donc supposé que des stations voisines présentaient des dérives identiques, c'est-à-dire qu'elles étaient situées sur la même plaque considérée localement comme indéformable.

Cette supposition peut être nuancée par le fait que sur le site de l'IGN, des stations voisines sont parfois données avec des vitesses différentes. C'est le cas par exemple de trois stations du CERGA, dont les numéros DOMES sont 10002M003 (Mobile VLBI mark 1989), 10002S001 (SLR) et 10002S002 (LLR). Moins de 80 m les séparent, alors que leurs vitesses en X et Z diffèrent de 4.3 mm/an et 3.7 mm/an (avec des erreurs formelles données inférieures à 0.3 mm/an pour S001 et S002). Il paraît donc probable que les valeurs données par l'ITRF soient biaisées par autre chose que la dérive tectonique (affaissement des bâtiments?). Les mêmes constatations peuvent être faites pour les sites de Hartebeesthoek en Afrique du Sud, Metsahovi en Finlande, Washington aux États-Unis...

Pour étudier l'effet de la tectonique des plaques dans la réduction des observations, on construit 3 solutions :

- la première, INPOP08 (décrite au chapitre 13), tient compte de la tectonique des plaques et certains de ses paramètres (59 au total) sont ajustés au LLR. Ses temps LLR calculés serviront de référence.
- la deuxième est identique à INPOP08 (mêmes paramètres, même modèle dynamique), mais néglige la tectonique des plaques lors de la réduction des observations.
- la troisième, dont les modèles dynamique et de réduction sont identiques à la deuxième, est réajustée (les mêmes 59 paramètres que pour INPOP08) aux observations pour compenser l'absence de tectonique

Cette procédure sera répétée pour l'ensemble des effets étudiés dans ce chapitre (marées

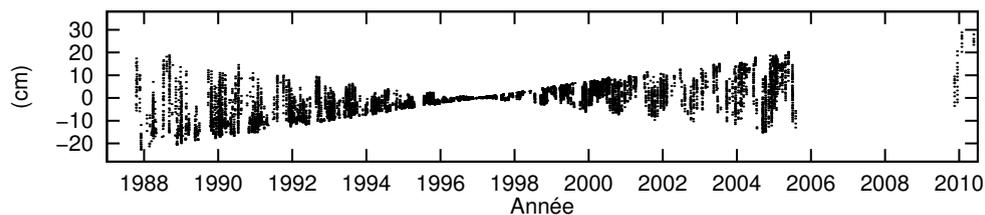


FIGURE 9.2 – Effet de la tectonique des plaques dans la réduction des données du CERGA entre 1987 et 2010. Les points représentent les différences sur les temps LLR calculés entre INPOP08 (décrite au chapitre 13) et une solution dans laquelle on néglige la tectonique dans le modèle de réduction.

TABLE 9.3 – Effet de la tectonique des plaques sur les statistiques des résidus LLR. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec tectonique)		Sans tectonique			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	-5.43	8.92	-3.27	9.94
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	2.28	6.54	0.84	5.60
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	-2.52	22.99	3.28	23.66
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	6.42	33.55	0.35	31.29
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-4.08	73.32	-3.77	73.50
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	2.98	8.87	0.25	6.98
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	0.17	4.58	1.28	4.92
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	-0.07	4.99	-1.17	5.26
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-12.80	27.46	-0.10	8.56
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	-4.75	8.30	0.07	5.53

solides, charges océanique et atmosphérique, ...).

La figure 9.2 présente les différences sur les temps LLR calculés entre la deuxième solution et INPOP08 (on se limite aux données du CERGA entre 1987 et 2010). Elles s'accroissent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la date de référence du 1^{er} janvier 1997, et d'autant plus vite que les vitesses du tableau 9.2 sont importantes.

Dans le tableau 9.3, on compare les écart-types des résidus des trois solutions. On remarque que les résidus de la troisième sont dégradés par rapport à ceux d'INPOP08. Négliger la tectonique des plaques dans la réduction des données ne peut donc pas être compensé par un réajustement des paramètres.

9.1.3 Effets de marées solides

On a vu au chapitre 4 que la Terre subissait des déformations par effets de marées solides, générées par le Soleil et la Lune. Ces déformations ont non seulement un effet sur la dynamique (via la variation des coefficients du potentiel), mais provoquent également des mouvements de la croûte terrestre et donc des déplacements des stations.

Deux modèles ont été implémentés dans le programme de réduction des observations ; l'un conforme aux Conventions IERS 2003, l'autre simplifié.

9.1.3.1 Modèle simplifié

Dans ce cas simplifié, on se limite aux termes indépendants de la latitude de la station et de la fréquence d'excitation du modèle décrit dans le chapitre 7.1.2 des Conventions IERS 2003 ; l'expression du déplacement de la station dû à l'effet de marée solide d'un corps générateur est donnée par (McCarthy & Petit, 2004, chapitre 7, équation 9) :

$$\Delta \vec{T\dot{S}} = \frac{\mu_P}{\mu_T} \frac{TS^4}{TP^3} \left\{ 3l_2 (\vec{u}_S \cdot \vec{u}_P) \vec{u}_P + \left[3 \left(\frac{h_2}{2} - l_2 \right) (\vec{u}_S \cdot \vec{u}_P)^2 - \frac{h_2}{2} \right] \vec{u}_S \right\} \quad (9.4)$$

avec

- μ_P : produit de la constante de la gravitation G par la masse du corps générateur de marées
- μ_T : produit de la constante de la gravitation G par la masse de la Terre
- \vec{u}_S : vecteur unitaire centre de la Terre - Station
- \vec{u}_P : vecteur unitaire centre de la Terre - centre du corps générateur de marées
- TP : distance entre le centre de masse de la Terre et celui du corps générateur
- TS : distance entre le centre de masse de la Terre et la station
- h_2 et l_2 : nombres de Love (associés aux déplacements) de la Terre

Dans cette expression, le vecteur de la station est calculé en ne tenant compte que de la tectonique, tandis que celui du corps générateur est calculé avec la solution planétaire. Les valeurs des nombres de Love $h_2 = 0.6072$ et de $l_2 = 0.0847$ (aussi appelé nombre de Shida) sont fixées égales à celles h^0 et l^0 des Conventions IERS 2003.

Remarque : pour un calcul rigoureux, il faudrait prendre en compte la transformation relativiste du paragraphe 9.1.8 dans le vecteur géocentrique du corps générateur, mais son effet est négligeable ici.

9.1.3.2 Modèle complet IERS 2003

Par rapport à l'expression simplifiée précédente, le modèle IERS 2003 ajoute :

- la dépendance des nombres de Love h_2 et l_2 en fonction de la latitude de la station.
- des déplacements induits par les termes de degré 3 du potentiel perturbateur
- des corrections dues à la dépendance des nombres de Love aux fréquences d'excitation
- des corrections dues à la dissipation (modélisées ici avec des nombre de Love imaginaires)

Pour plus de détails, on peut se reporter au chapitre 7 des conventions IERS 2003, en pages 74 à 82. Le calcul des déplacements est implémenté dans le programme de réduction en utilisant la routine de Véronique Dehant, disponible à l'adresse tai.bipm.org/iers/convupdt/convupdt_c7.html. C'est le modèle utilisé dans la construction de la solution INPOP08.

9.1.3.3 Effet sur le LLR

Le graphe supérieur de la figure 9.3 illustrent l'effet des marées solides dans la réduction des données LLR (CERGA entre 1987 et 2010). Si on n'en tient pas compte, on obtient des différences qui peuvent atteindre 25 cm. Elles peuvent même être supérieures à 35 cm pour les observations d'Apollo ou Mc Donald. D'autre part, on remarque dans le tableau 9.4 que la solution qui néglige l'effet de marées solides et réajustée aux observations (mêmes 59 paramètres qu'INPOP08) présente des résidus dégradés par rapport à INPOP08.

Par contre, les différences entre le modèle des conventions IERS 2003 et celui simplifié sont faibles (moins de 1 cm), comme le montre le graphe inférieur de la figure 9.3. Il est donc indispensable de tenir compte du déplacement de la station par effet de marée solide, mais le modèle simplifié pourrait suffire, puisque les résidus des solutions qui l'utilisent ne sont pas significativement différents de ceux d'INPOP08 (voir le tableau 9.4).

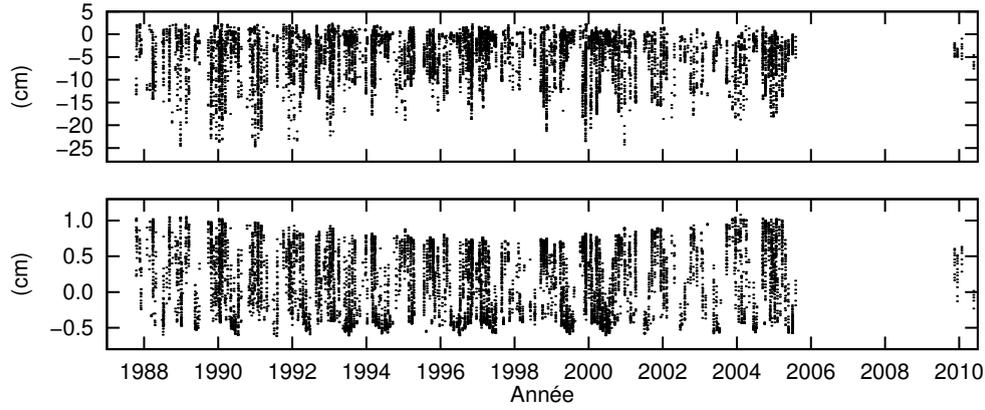


FIGURE 9.3 – Effet du déplacement de la station (ici celle du CERGA) dû aux marées solides dans la réduction des données. En haut sont tracées les différences sur les temps LLR calculés entre INPOP08, qui utilise le modèle IERS 2003, et une solution qui néglige les effets de marées. En bas sont représentées les différences entre les modèles IERS 2003 et sa forme simplifiée.

TABLE 9.4 – Effet des marées solides sur les statistiques des résidus LLR. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (IERS 2003)		sans marée solide				modèle simplifié			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée		non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	-5.81	7.98	-0.37	7.33	0.05	6.44	-0.14	6.32
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	-5.46	7.09	0.00	5.03	0.15	3.93	-0.03	3.97
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	2.87	15.59	8.07	16.22	8.34	15.98	8.08	15.90
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	-9.28	32.69	0.32	31.87	0.20	31.65	0.17	31.67
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-17.60	72.59	-7.48	74.31	-7.84	73.28	-7.92	73.18
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	-10.11	9.53	0.29	8.49	0.35	7.22	0.22	7.26
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	-9.46	6.60	-0.72	5.52	-0.86	4.32	-0.87	4.24
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	-7.97	8.07	0.50	6.15	0.57	4.80	0.57	4.81
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-11.63	8.81	-0.43	8.59	-0.40	8.14	-0.44	8.11
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	-8.56	11.25	0.25	7.39	0.07	4.79	0.08	4.77

9.1.4 Charge atmosphérique

Il s'agit ici de prendre en compte les effets de la variation de la pression atmosphérique sur le déplacement de la station. Lorsqu'une pression est exercée à la surface d'un corps, celui-ci subit une force, dirigée selon la normale à sa surface. Comme la Terre n'est pas rigide, cette force provoque un enfoncement de sa surface et un déplacement de la station. L'expression de ce déplacement est donné dans les Conventions IERS 1996 (McCarthy, 1996, p. 68) :

$$\Delta r = -0.35p_0 - 0.55\bar{p}_0 \quad (9.5)$$

où

- Δr est le déplacement (radial) de la station (en mm)
- p_0 est l'anomalie de pression (en mbar), ramenée au niveau de la mer par rapport au standard 1013 mbar
- \bar{p}_0 est la moyenne de cette même anomalie de pression (en mbar) dans une région de 2000 km autour de la station

p_0 se calcule à partir de la pression atmosphérique p et de la température T mesurées au niveau de la station ainsi que de l'altitude h :

$$p_0 = p \times \exp\left(\frac{gM}{\Gamma R} \ln \frac{T + \Gamma h}{T}\right) \quad (9.6)$$

où

- $g = 9.81m/s^2$ est la pesanteur terrestre
- $M = 28.964g/mol$ est la masse molaire de l'air
- $\Gamma = 0.0065^\circ K/m$ est le gradient de température par rapport à l'altitude
- $R = 8.315J/mol/K$ est la constante des gaz parfaits
- p est la pression atmosphérique mesurée à la station (mbar)
- T est la température mesurée à la station ($^\circ K$)
- h est l'altitude de la station (m)

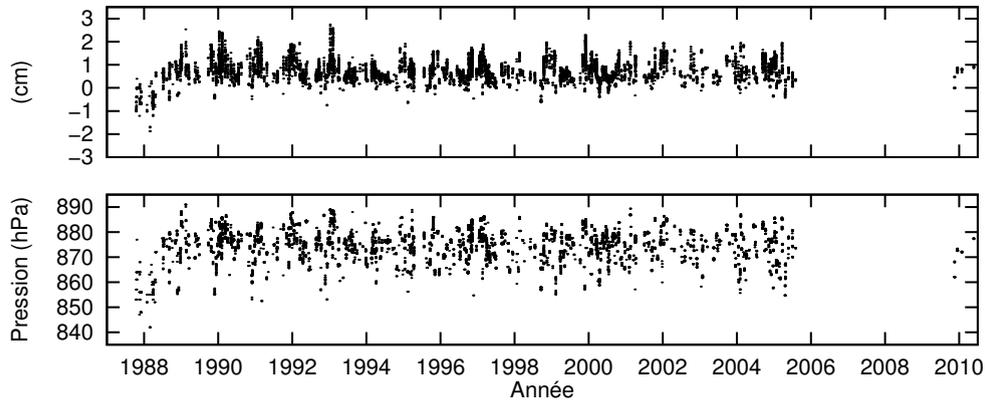


FIGURE 9.4 – Dans la partie supérieure est tracé l'effet de la charge atmosphérique dans la réduction des données du CERGA entre 1987 et 2010. Dans la partie inférieure est tracée la pression atmosphérique mesurée au cours de chaque observation.

En réalité, si la pression au niveau de la station est mesurée lors de chaque observation, \bar{p}_0 n'est par contre pas facilement accessible. En effet, pour la calculer, il faudrait avoir accès à la pression atmosphérique sur une zone de 2000 km autour de la station et en faire une moyenne. Pour simplifier, sans pour autant sacrifier à la précision, on prendra l'approximation $\bar{p}_0 = p_0$.

La partie supérieure de la figure 9.4 illustre l'effet de la charge atmosphérique dans la réduction des données LLR (celles du CERGA entre 1987 et 2010). Outre le fait qu'il soit limité à 3 cm, on observe surtout un signal curieux entre 1987 à 1989, que l'on retrouve dans la pression atmosphérique mesurée lors de chaque observation (graphe inférieur de la figure 9.4). Il semble ici qu'il y ait un problème de mesure.

La charge atmosphérique, sans être négligeable, n'a que peu d'effet dans les résidus, puisque les solutions qui n'en tiennent pas compte présentent sensiblement les mêmes écart-types qu'INPOP08 (voir le tableau 9.5).

Le modèle exposé ici n'est pas conventionnel et n'est plus décrit dans les Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004), où figure une simple discussion. Les solutions INPOP sont donc construites avec un modèle légèrement différent de celui utilisé pour la construction de l'ITRF2005. Dans la mesure où l'effet de la charge atmosphérique est faible, et que les positions des stations sont réajustées, cette incohérence n'est pas gênante.

9.1.5 Charge océanique

Il s'agit ici du même phénomène que pour la pression atmosphérique. Les variations du niveau de la mer (dues aux effets de marées) induisent des variations de pression au fond des océans.

TABLE 9.5 – Effet de la charge atmosphérique sur les statistiques des résidus LLR. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec charge atmosphérique)		sans charge atmosphérique			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	0.61	6.32	-0.12	6.27
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	0.73	3.98	-0.04	4.00
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	8.83	15.89	8.07	15.85
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	0.22	31.56	0.16	31.57
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-8.24	73.20	-8.63	73.14
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	0.61	7.23	0.23	7.21
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	-0.93	4.27	-0.78	4.26
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	0.34	4.84	0.49	4.84
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-0.03	8.10	-0.43	8.06
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	0.09	4.78	0.08	4.79

La force qui en résulte au niveau des planchers océaniques provoque des déformations qui se répercutent jusqu'à l'intérieur des continents.

L'autre effet des marées océaniques est de modifier la répartition des masses à la surface de la Terre. Dans l'ITRF, le centre de masse de la Terre a donc un mouvement dont il faut tenir compte pour le positionnement de la station.

L'expression des déplacements, à la fois horizontaux et verticaux, de la station dans le GTRF (repère dont l'origine est le centre de masse de la Terre et dont les vecteurs de base sont ceux de l'ITRF) est donnée dans les Conventions IERS 2003, page 72 :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \Delta c_i = \sum_{j=1}^{11} a_{ij}^s \cos(\chi_j(t) - \phi_{ij}^s) \quad (9.7)$$

où

- $\Delta c_1, \Delta c_2, \Delta c_3$ sont respectivement les déplacements radial, ouest et nord
- a_{ij}^s et ϕ_{ij}^s sont respectivement l'amplitude et la phase de l'onde de marée j
- les χ_j sont des arguments astronomiques, dépendant des positions de la Lune et du Soleil (anomalies moyennes, élongation moyenne, longitude moyenne, longitude du nœud de la Lune). Ils peuvent être calculés avec la routine ARG, disponible à l'adresse tai.bipm.org/iers/convupdt/convupdt_c7.html

Les amplitudes et phases de chacune des ondes de marées dépendent de la station. Comme indiqué dans les Conventions IERS 2003, elles ont été obtenues sur le site www.oso.chalmers.se/~loading (modèle CSR4.0 et en corrigeant du géocentre). Leurs valeurs sont données en annexe G.

L'implémentation de la charge océanique dans le programme de réduction est effectuée par l'utilisation de la routine *hardisp.f* de D. Agnew, disponible sur le site tai.bipm.org/iers/convupdt/convupdt_c7.html.

L'effet de la charge océanique sur la réduction des données est illustré par le graphe de la figure 9.5. Il se limite à moins d'1 cm pour les observations du CERGA, mais peut atteindre 4 cm pour celles d'Haleakala. Si on n'en tient pas compte, les résidus sont très légèrement dégradés par rapport à INPOP08, même après réajustement des mêmes 59 paramètres (voir le tableau 9.6).

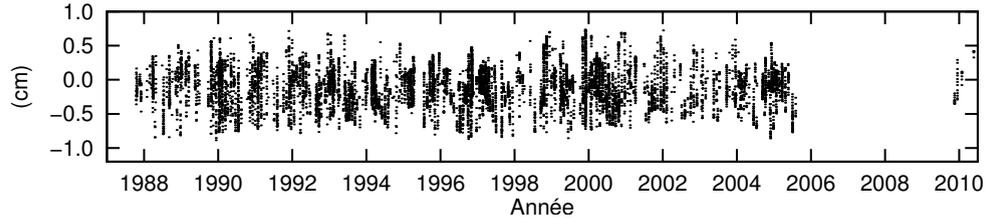


FIGURE 9.5 – Effet de la charge océanique dans la réduction des données du CERGA entre 1987 et 2010.

TABLE 9.6 – Effet de la charge océanique sur les statistiques des résidus. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec charge océanique)		sans charge océanique			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	-0.28	6.33	-0.17	6.33
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	-0.14	4.00	-0.03	4.00
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	7.99	15.89	8.09	15.89
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	-0.07	31.65	0.17	31.66
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-7.99	73.31	-7.79	73.33
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	-0.02	7.41	0.23	7.36
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	-1.05	4.29	-0.89	4.30
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	0.44	4.86	0.60	4.83
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-0.89	8.30	-0.45	8.23
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	-0.08	5.00	0.09	5.00

9.1.6 Marée polaire

Il s'agit de prendre ici en compte le déplacement de la station dû aux variations du spin de la Terre. Son expression (en mm) est donnée dans les conventions IERS 2003, page 84 :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda & -\sin \lambda & \sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda & \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_\theta \\ S_\lambda \\ S_r \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} S_\theta = -9 \cos 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \\ S_\lambda = 9 \cos \theta (m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda) \\ S_r = -32 \sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \end{cases} \quad (9.8)$$

- θ et λ sont respectivement la colatitude et la longitude de la station
- S_r , S_θ et S_λ sont respectivement les déplacements radial, sud et est (repère local)
- m_1 et m_2 sont les écarts à la moyenne des coordonnées du pôle

m_1 et m_2 se calculent de la manière suivante, avec t en années écoulées depuis J2000 :

$$\begin{cases} m_1 = X_p - \bar{X}_p = X_p - (0.054 + 0.00083t) \\ m_2 = -(Y_p - \bar{Y}_p) = -Y_p + (0.357 + 0.00395t) \end{cases} \quad (9.9)$$

Le graphe de la figure 9.6 illustre l'effet de la marée polaire de la Terre dans la réduction des données LLR (CERGA entre 1987 et 2010). Limité à 1 cm, en tenir compte ou le négliger n'induit pas de changement significatif dans les statistiques des résidus, comme le montre le tableau 9.7.

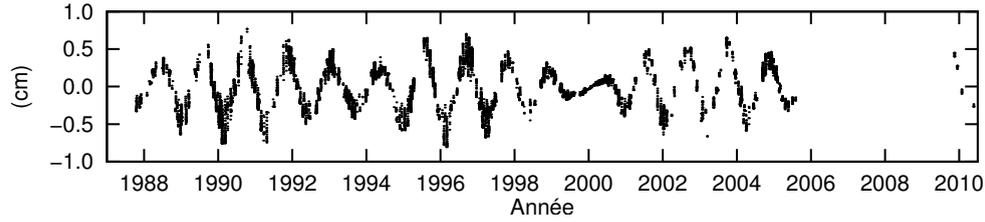


FIGURE 9.6 – Effet de la marée polaire dans la réduction des données.

TABLE 9.7 – Effet de la marée polaire sur les statistiques des résidus. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec marée polaire)		sans marée polaire			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	-0.21	6.31	-0.22	6.32
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	-0.01	3.98	-0.01	3.98
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	8.16	15.87	8.14	15.86
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	0.13	31.63	0.16	31.61
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-7.69	73.37	-7.48	73.43
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	0.14	7.26	0.23	7.27
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	-0.90	4.31	-0.85	4.31
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	0.51	4.78	0.55	4.78
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-0.48	8.05	-0.43	8.06
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	0.00	4.86	0.09	4.82

9.1.7 Passage du GTRF au GCRF

Une fois calculées les coordonnées de la station dans le GTRF (repère dont l'origine est le centre de masse de la Terre et les axes parallèles à ceux de l'ITRF), il est nécessaire de l'exprimer dans le GCRF (repère dont l'origine est le centre de masse de la Terre et les axes parallèles à ceux de l'ICRF) :

$$\vec{u}_{GCRF} = \begin{pmatrix} Q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t) \end{pmatrix} \vec{u}_{GTRF} \quad (9.10)$$

Le calcul de la matrice de passage se fait selon les conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004, page 33), via le pôle céleste intermédiaire (CIP) et les corrections apportées sur les mouvements du pôle x_p et y_p , ainsi que sur la mesure de UT1-UTC. Ces corrections (EOP) sont disponibles à l'adresse hpiers.obspm.fr/iers/eop/eopc04_05/eopc04_IAU2000.62-now et sont données pour chaque jour à 0h00 UTC. Comme les tirs n'ont pas forcément lieu à ces instants, une interpolation (par polynômes de Lagrange) est donc nécessaire.

Remarque : il faut être vigilant lors de l'interpolation de UT1-UTC, car en raison des sauts de seconde, cette fonction de UTC n'est pas continue.

La matrice $Q(t)$, avec t exprimé en Temps Terrestre, dépend des coordonnées X et Y du CIP. Ces dernières sont calculées avec la routine `xys2000a.f`, disponible sur le site maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5, puis corrigées de dX et dY issus des EOP de la série C04. La

quantité s se déduit des coordonnées X et Y .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

La matrice $R(t)$ ne dépend que de l'angle de rotation de la Terre θ , ou ERA. Ce dernier est une fonction linéaire du temps exprimé ici en UT1, donnée par Capitaine et al. (2000). UT1-UTC est obtenues à partir de la série C04.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448T_u) \quad (9.12)$$

Enfin, la matrice $W(t)$ ne dépend des mouvements du pôle x_p et y_p , donnés par la série C04 (la quantité s' se déduit de x_p et y_p) :

$$W = \begin{pmatrix} \cos s' & -\sin s' & 0 \\ \sin s' & \cos s' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x_p & 0 & \cos x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & \sin y_p \\ 0 & -\sin y_p & \cos y_p \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

La formation de ces matrices à partir des arguments dont elles dépendent, ainsi que le calcul des quantités s et s' sont effectués en utilisant les routines SOFA (Wallace, 1996), disponibles sur le site www.iausofa.org.

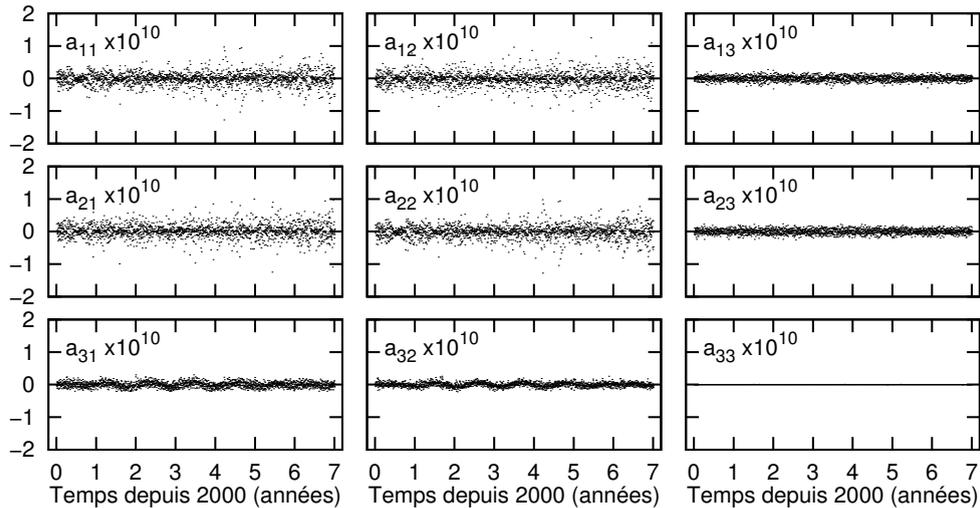


FIGURE 9.7 – Ecart sur la matrice de passage du GTRF au GCRF entre le site internet de l'IERS et le programme de réduction des observations LLR. Les différences sur les coefficients de la matrice (a_{ij}) sont multipliées par 10^{10} . Les comparaisons portent sur la période 2000-2007 avec un point toutes les 30 heures pour tenir compte des interpolations des EOP.

En comparant les matrices de passage utilisées dans la réduction des données LLR à celles calculées sur le site hpiers.obspm.fr/eop-pc (au 14 octobre 2008), on obtient des différences inférieures à 2×10^{-10} , principalement dues aux méthodes d'interpolation des EOP différentes (polynômes de Lagrange dans le programme de réduction, splines cubiques sur le site internet). Pour un point à la surface de la Terre, l'erreur commise lors de la transformation est de l'ordre du millimètre.

Remarque : la précession de l’UAI2000A (dont le CIP dépend) est obtenue à partir de celle de Lieske et al. (1977), en y reportant les dérives linéaires observées dans les angles de nutations. Elle est donc différente de la précession P03 de Capitaine et al. (2003), sur laquelle est ajustée l’orientation de la Terre intégrée dans la partie dynamique d’INPOP (voir le paragraphe 12.1.2). Ces deux modèles induisent donc une légère incohérence que l’on ne peut pour l’instant pas éviter, car les EOP de la série C04 ne sont actuellement valables que pour la précession-nutation UAI2000A.

9.1.8 Passage du GCRF à l’ICRF

Pour plus de précisions sur les échelles de temps TT, TCG, TCB, TDB, ainsi que sur les constantes L_B , L_G et L_C , se reporter au paragraphe 9.2 qui suit.

Le passage du GCRF, dont l’origine est le centre de masse de la Terre et l’échelle de temps associée est TCG, à l’ICRF, dont l’origine est le barycentre du Système solaire et l’échelle de temps TCB, nécessite la prise en compte de la transformation relativiste :

$$\vec{r}_{ICRF} = \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \vec{r}_{GCRF} - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{GCRF}}{2c^2} \vec{V} \quad (9.14)$$

Dans cette expression,

- U est le potentiel au centre de masse de la Terre (dû aux corps autres que la Terre)
- c est la vitesse de la lumière
- \vec{V} est la vitesse barycentrique de la Terre

Or, l’échelle de temps associée aux coordonnées ITRF des stations est le Temps Terrestre (au lieu de TCG), et celle de l’éphéméride est le Temps Dynamique Barycentrique TDB (dans le futur, il est cependant envisagé de la calculer directement en TCB). Avec $\vec{r}_{TDB} = (1 - L_B) \vec{r}_{TCB}$ et $\vec{r}_{TCG} = (1 + L_G) \vec{r}_{TT}$, et en négligeant les termes en $L_B L_G$, L_B^2 et L_G^2 , on obtient (McCarthy & Petit, 2004, ex. 19, p. 115) :

$$\vec{r}_{TDB} = \left(1 - \frac{U}{c^2} - L_C\right) \vec{r}_{TT} - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{TT}}{c^2}\right) \vec{V} \quad (9.15)$$

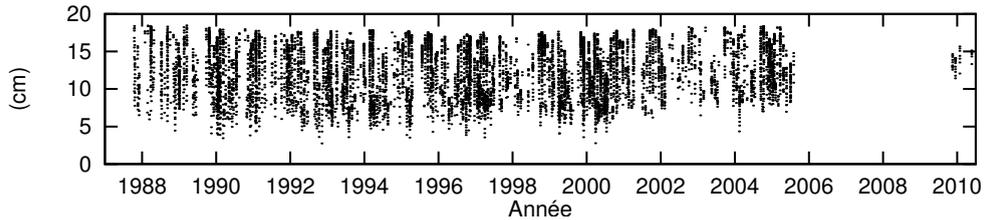


FIGURE 9.8 – Effet du passage du GCRS au BCRS dans la réduction des données.

La figure 9.8 illustre l’effet de la transformation du GCRF à l’ICRF dans la réduction des données du CERGA entre 1987 et 2010. Il atteint près de 20 cm et ne peut pas être compensé par un réajustement des 59 mêmes paramètres que pour INPOP08 ; dans le tableau 9.8, les résidus des solutions qui n’en tiennent pas compte sont dégradés (de près de 5% pour Apollo, MLRS2, CERGA) par rapport à ceux d’INPOP08.

TABLE 9.8 – Effet du passage du GCRF à l’ICRF sur les statistiques des résidus. Pour chaque solution, la moyenne et l’écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08		sans passage GCRF-ICRF			
		(avec passage GCRF-ICRF)		non ajustée		réajustée	
		Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	11.77	7.83	-0.15	6.47
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	12.18	4.93	-0.03	4.16
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	20.17	16.90	8.11	15.88
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	13.36	31.83	0.17	31.67
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	6.36	73.99	-7.68	73.41
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	15.06	7.68	0.21	7.44
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	13.05	5.54	-0.88	4.45
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	14.11	5.89	0.56	5.04
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	14.00	9.50	-0.47	8.24
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	13.08	5.85	0.10	5.15

9.2 Échelles de temps

9.2.1 Généralités

Depuis 1967, la seconde est définie par *la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l’état fondamental de l’atome de césium 133*. Le Temps Atomique International (TAI) est une échelle de temps basée sur la définition de la seconde et est réalisé à partir d’un ensemble d’horloges atomiques réparties sur la Terre.

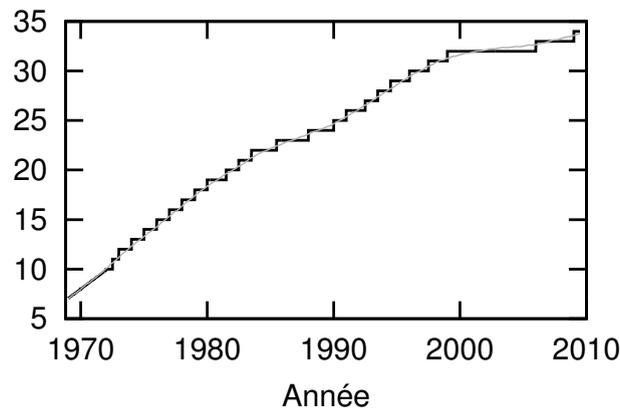


FIGURE 9.9 – Différences TAI-UTC (en noir) et TAI-UT1 (en gris), en fonction du temps TAI.

UT1 (Temps Universel) est une échelle de temps liée à la rotation de la Terre, qui définissait la durée de la seconde avant 1960. En raison des variations et des irrégularités dans la rotation de la Terre, cette échelle de temps n’est pas uniforme, comme l’illustre la courbe grise de la figure 9.9. Les variations (non linéaires) entre UT1 et TAI sont imprévisibles et UT1 est construit à partir des observations d’objets célestes lointains (données VLBI).

Pour faire le lien entre TAI et UT1, on construit UTC (Temps Universel Coordonné), dont la durée de la seconde est celle de TAI, mais qui ne présente que des écarts inférieurs à 0.9 secondes

avec UT1. Pour la réaliser, on introduit des sauts de secondes par rapport à TAI, déterminés en fonction de la mesure de UT1. Ils ont lieu le dernier jour de juin ou de décembre (voire d'un mois quelconque selon l'urgence, mais ce cas ne s'est pas encore produit) et sont annoncés au moins huit semaines à l'avance par le bulletin C de l'IERS. UTC (voir la courbe noire de la figure 9.9) présente donc l'avantage d'être uniforme entre deux sauts de seconde, et de suivre la rotation de la Terre. Il s'agit, aux décalages des fuseaux horaires près, de l'heure indiquée par nos montres. Les données LLR sont datées et mesurées dans cette échelle de temps. Les valeurs observées de UT1-UTC font partie des EOP fournis par la série C04.

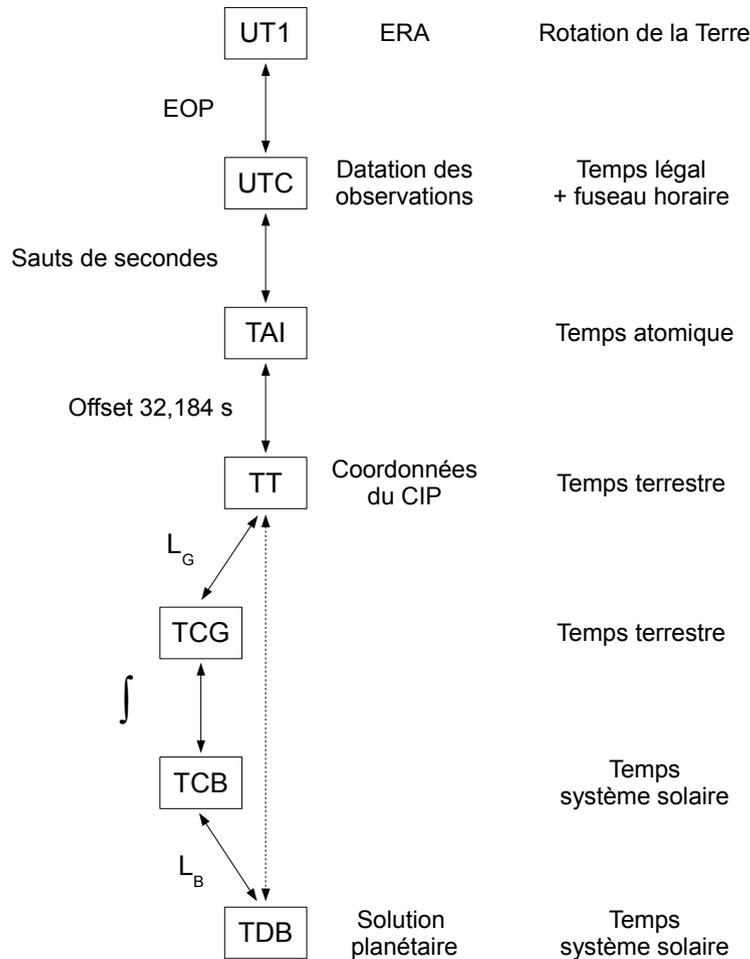


FIGURE 9.10 – Liens entre les différentes échelles de temps. Leurs acronymes sont encadrés. Dans la partie gauche figurent les moyens pour passer de l'une à l'autre. Dans la partie droite figurent les endroits où elles interviennent.

Le Temps Terrestre (TT) est la continuation du temps des éphémérides (TE) et présente un simple décalage de 32.184 secondes avec TAI. Il est utilisé dans le calcul des coordonnées X et Y du CIP.

Dans le cadre de la mécanique classique, on a séparation des 3 coordonnées spatiales et du temps. Ce n'est plus le cas en relativité (même restreinte) et l'étude de phénomènes physiques à l'échelle de la Terre, puis du Système solaire nécessite l'introduction d'autres échelles de temps.

TAI (dont TT se déduit) étant construit de telle manière que son unité d'échelle soit en accord avec la seconde SI sur le géoïde (donc à la surface de la Terre), la durée de la seconde y est différente de celle d'une horloge qui serait placée au centre de la Terre. La résolution B1.9 de l'UAI2000 fixe conventionnellement le lien entre le Temps Terrestre et le Temps-Coordonnée

Géocentrique :

$$\begin{aligned} TCG - TT &= \frac{L_G}{1 - L_G} (TAI - 2443144.5) \\ &= \frac{L_G}{1 - L_G} (TT - 2443144.5003725) \end{aligned} \quad (9.16)$$

La constante de définition $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$ est donnée dans les Conventions IERS 2003 et a été fixée à W_0/c^2 , le potentiel terrestre au niveau du géoïde divisé par le carré de la vitesse de la lumière. À noter que l'expression page 104 des conventions IERS 2003 n'est qu'une expression approchée. TCG peut être utilisé par exemple lors du calcul des trajectoires de satellites. Il était aussi utilisé pour définir l'échelle de temps de certaines réalisations de l'ITRF jusqu'à l'ITRF1997 (il a été depuis été remplacé par TT).

De la même manière que le temps ne s'écoule pas de la même manière au centre de la Terre ou au barycentre du Système solaire, on introduit le Temps-Coordonnée Barycentrique pour la modélisation de phénomènes à l'échelle du Système solaire. La transformation entre TCG et TCB est complexe et fait appel à une solution planétaire (voir l'équation 9.18).

Enfin, depuis la résolution B3 de l'IAU2006, le Temps Dynamique Barycentrique (TDB) est défini comme une fonction affine de TCB :

$$TCB - TDB = L_B \times (TCB - T_0) \times 86400 - TDB_0 \quad (9.17)$$

avec $L_B = 1.550519768 \times 10^{-8}$, $T_0 = 2443144.5003725$ et $TDB_0 = -6.55 \times 10^{-5}$ (TCB-TDB est ici exprimé en seconde). La constante L_B a été choisie à partir de (Irwin & Fukushima, 1999) de manière à ce que TDB ne présente qu'une faible dérive par rapport à TT. C'est, pour l'instant, l'échelle de temps utilisée lors de la construction de la solution planétaire dans les équations du mouvement.

9.2.2 Intégration de TT-TDB dans INPOP

Les passages d'une échelle de temps à une autre se font de manière conventionnelle. Seul celui de TCG à TCB dépend d'une éphéméride planétaire et lunaire, ainsi que de la métrique associée à l'espace-temps, qui conduit à l'expression des corrections relativistes 1.12. En fait, telles que sont construites les solutions, TCG et TCB ne sont (pour l'instant) que des intermédiaires de calcul. Ce dont on a besoin au final, est de pouvoir relier TT (lié via UTC et TAI à la datation des observations) et TDB (le temps des équations du mouvement et donc de la solution planétaire). C'est l'objet de ce paragraphe.

La différence entre TCB et TCG au géocentre est nulle au 1^{er} janvier 1977 (TAI), et, d'après (Soffel et al., 2003), (Klioner, 2007, communication privée), est telle que :

$$\frac{dT_{CG}}{dT_{CB}} = 1 + \frac{\alpha}{c^2} + \frac{\delta}{c^4} \quad (9.18)$$

Les quantités α et δ dépendent des trajectoires des corps du Système solaire, et donc de l'éphéméride :

$$\alpha = -\frac{1}{2}v_T^2 - \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A}{r_{TA}} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned}
\delta = & -\frac{1}{8}v_T^4 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \left(\sum_{A \neq T} \frac{\mu_A}{r_{TA}}\right)^2 \\
& + (2\beta - 1) \sum_{A \neq T} \left(\frac{\mu_A}{r_{TA}} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{BA}}\right) \\
& + \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A}{r_{AT}} \left[2(1 + \gamma) \vec{v}_A \cdot \vec{v}_T - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) v_T^2 - (1 + \gamma) v_A^2 + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_A \cdot \vec{r}_{TA} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{v}_A \cdot \vec{r}_{AT}}{r_{AT}}\right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Dans ces expressions,

- L_B est la constante pour le passage de TCB à TDB (sa valeur conventionnelle, issue de la résolution 3 de l'IAU 2006, est $1.550519768 \times 10^{-8}$)
- L_G est la constante pour le passage de TCG à TT (sa valeur conventionnelle, issue de la résolution B1.9 de l'IAU 2000, est $6.969290134 \times 10^{-10}$)
- A et B représentent les indices des corps présents dans le Système solaire (planètes, Soleil, Lune, astéroïdes)
- T représente l'indice de la Terre
- μ_A est le produit de la constante de la gravitation G par la masse du corps A
- \vec{r}_A est le vecteur position du corps A par rapport au barycentre du Système solaire
- $\vec{r}_{TA} = \vec{r}_A - \vec{r}_T$, $r_{AT} = r_{TA} = \|\vec{r}_{TA}\|$
- \vec{v}_A est le vecteur vitesse du corps A par rapport au barycentre du Système solaire (v_A est sa norme)
- $\ddot{\vec{r}}_A$ est le vecteur accélération du corps A
- β et γ sont les paramètres post-newtoniens (égaux à 1 pour la relativité générale)

En notant que :

$$\frac{dT_{CG}}{dT_{CB}} = \frac{dT_{CG}}{dT_{TT}} \times \frac{dT_{TT}}{dT_{DB}} \times \frac{dT_{DB}}{dT_{CB}} = \frac{1 - L_B}{1 - L_G} \times \frac{dT_{TT}}{dT_{DB}} \tag{9.21}$$

L'expression 9.18 devient alors :

$$\frac{dT_{TT}}{dT_{DB}} = \frac{1 - L_G}{1 - L_B} \left(1 + \frac{\alpha}{c^2} + \frac{\delta}{c^4} \right) \tag{9.22}$$

Au final, en soustrayant la dérivée de TDB par rapport à TDB, on retrouve (Klioner et al., 2010, expression 6.5) :

$$\begin{aligned}
\frac{d(TT - TDB)}{dTDB} &= \frac{1 - L_G}{1 - L_B} \left(1 + \frac{\alpha}{c^2} + \frac{\delta}{c^4} \right) - 1 \\
&= \frac{L_B - L_G}{1 - L_B} + \frac{1 - L_G}{1 - L_B} \left(\frac{\alpha}{c^2} + \frac{\delta}{c^4} \right)
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Si on néglige les termes en $L_B^i L_G^j / c^{2k}$ avec $i + j + k \geq 3$, cette expression est équivalente à celle qui nous avait été fournie par S. Klioner en août 2007 et utilisée dans (Fienga et al., 2009) :

$$\frac{d(TT - TDB)}{dTDB} = (1 + L_B - L_G) \left(L_B + \frac{\alpha}{c^2} \right) - L_G + \frac{\delta}{c^4} \tag{9.24}$$

La différence TT-TDB est donc solution d’une “équation différentielle”. Plus rigoureusement, il s’agit en fait d’intégration de fonction puisque le second membre ne dépend pas de TT-TDB. Même si ce n’est pas obligatoire, il est intéressant de l’intégrer dans INPOP en même temps que les trajectoires des corps. Tous les termes, en particulier les vecteurs accélérations, sont alors immédiatement disponibles sans calcul supplémentaire. La petite limitation qui se pose est la détermination de la constante à la date initiale des intégrations. En effet, la définition du TDB est telle qu’au 1^{er} janvier 1977 (TAI), la différence est de -6.55×10^{-5} seconde. Or la date initiale des intégrations INPOP a été choisie à J2000, date à laquelle la différence TT-TDB est inconnue a priori, puisqu’elle dépend de la solution planétaire. Dans INPOP, on intègre donc TT-TDB à une constante près. Cette constante est déterminée a posteriori, lors de la construction des polynômes d’interpolation, en s’assurant qu’au 1^{er} janvier 1977, la condition 9.17 soit respectée : à $TDB = T_0 + TDB_0 = 2443144.5003725 - 6.55 \times 10^{-5} / 86400$, $TT - TDB = -TDB_0 = 6.55 \times 10^{-5}$ seconde.

On dispose donc de la transformation $TT - TDB = f(TDB)$, qui permet de passer d’une date TDB à une date TT. Mais dans les procédures de réduction, on doit aussi disposer de la transformation inverse $TT - TDB = g(TT)$. g est également solution d’une équation différentielle, mais il est inutile de l’intégrer en même temps que les équations du mouvement des corps dans INPOP. En effet, en notant que $TT - TDB = f(TT - (TT - TDB))$, on obtient alors une équation implicite que l’on peut résoudre par itérations. La différence TT-TDB étant petite (le terme principal est un signal périodique annuel et d’amplitude 1.65 milliseconde, éventuellement combiné à une dérive linéaire inférieure à 1 nanoseconde par an), une seule itération suffit.

9.2.3 Comparaison avec TE405

La valeur de la constante L_B de l’équation 9.17 a été choisie d’après Irwin & Fukushima (1999), qui décrit le calcul de TT-TDB avec la solution DE405 et appelé TE405. Les principales différences avec INPOP sont :

- TE405 n’est pas intégré en même temps que les équations du mouvement des corps, ce qui complique la prise en compte de tous les termes intervenant dans α . En particulier, le potentiel des astéroïdes est négligé
- les termes en c^{-4} ont été négligés
- la constante L_B n’est pas fixée par la résolution B3 de l’UAI2006, mais déterminée de manière à ne pas observer de dérive séculaire entre TE405 et TT
- la constante TDB_0 (voir l’équation 9.17) est nulle

Selon les auteurs, négliger les termes en c^{-4} ($\delta = 0$) induit une dérive linéaire de 109.7×10^{-18} . Cette valeur est confirmée par INPOP (109.6×10^{-18}), en comparant deux intégrations effectuées avec et sans ces termes.

Les courbes de la figure 9.11 montrent les différences entre TE405 et le TT-TDB d’INPOP08 (solution décrite au chapitre 13). Par la même occasion, on compare ce dernier au TT-TDB implémenté dans les routines SOFA, issu de (Fairhead & Bretagnon, 1990). Celui-ci est basé sur les éphémérides analytiques planétaires VSOP82 de Bretagnon (1982) et lunaire ELP2000 de Chapront-Touzé & Chapront (1983) (elles-mêmes ajustées à DE200), et corrigé des masses utilisées dans DE405. Des différences de 20 nanosecondes peuvent sembler importantes, mais on verra dans le paragraphe suivant que ces écarts n’ont que peu d’effet dans la réduction des données. La dérive linéaire avec TE405 est mesurée à 0.07 nanoseconde par an et se situe dans la tolérance indiquée par la résolution B3 de l’IAU2006 (elle ne doit pas dépasser 1 nanoseconde par an).

D’autre part, cette faible dérive montre que même si la valeur de L_B adoptée par l’IAU est issue de Irwin & Fukushima (1999), elle est corrigée de manière à inclure les effets des termes en c^{-4} . Ces derniers ne doivent donc plus être négligés, au risque d’obtenir une dérive entre TT et TDB de près de 3.5 nanosecondes par an (109.7×10^{-18} jour/jour).

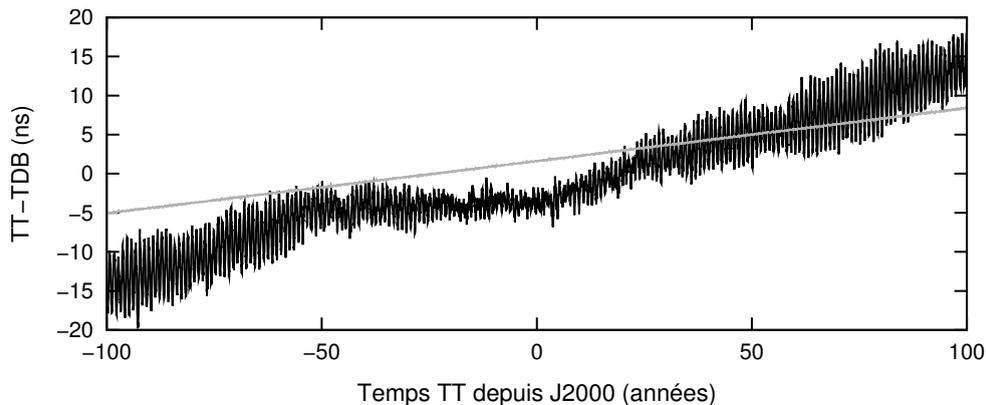


FIGURE 9.11 – La courbe grise montre les différences entre TE405 (corrigé de la constante TDB_0) et le TT-TDB intégré dans INPOP08. En noir sont tracées celles entre le TT-TDB implémenté dans SOFA et celui intégré dans INPOP08. Les différences sont exprimées en nanosecondes en fonction du temps (TT), exprimé en années depuis J2000.

Enfin, négliger les termes en $L_B^i L_G^j / c^{2k}$ avec $i + j + k \geq 3$ dans l'expression 9.23 n'induit qu'une dérive inférieure à 1.5×10^{-24} jour/jour, totalement négligeable.

9.2.4 Effets sur la réduction des données

Pour estimer l'effet de la différence entre TT et TDB dans les résidus LLR, on utilise les trajectoires des corps de la solution INPOP08 (décrite au chapitre 13). Puis on réduit les observations LLR de trois manières différentes :

1. à la manière d'INPOP08, en utilisant le TT-TDB intégré avec les équations du mouvement des corps
2. en identifiant TT=TDB
3. en utilisant la différence TT-TDB fournie par les routines SOFA

Comme on peut le remarquer avec la figure 9.12, ne pas faire la distinction entre TT et TDB génère un important signal annuel (graphe supérieur) dans les résidus, absent des résidus INPOP08 (au milieu). Ce signal ne peut pas être compensé par un réajustement des mêmes 59 paramètres qu'INPOP08.

Par contre, en comparant les résidus INPOP08 à ceux réduits avec le TT-TDB de SOFA, on obtient des différences inférieures à 0.01 mm (en bas) non significatives devant la précision des observations. On montre donc que les écarts de près de 20 nanosecondes observés à la figure 9.11 n'ont qu'un effet négligeable lors de la réduction.

Tenir compte de la différence entre TT et TDB est donc indispensable, mais peu importe la méthode de calcul de la transformation. Le choix d'intégrer le TT-TDB avec les équations du mouvement des corps n'a été fait que dans un souci de cohérence entre l'échelle de temps et la solution planétaire : selon l'expression employée par S. Klioner, on obtient une "éphéméride 4D".

9.3 Coordonnées des réflecteurs

Les coordonnées des réflecteurs sur la Lune sont données dans le repère des axes principaux d'inertie.

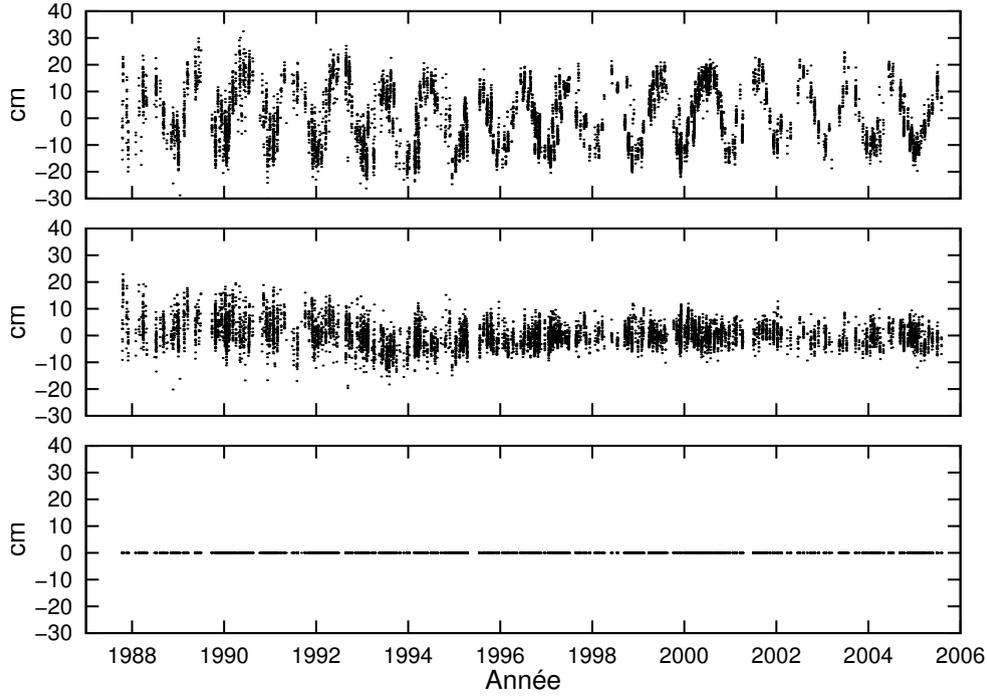


FIGURE 9.12 – En haut sont tracés les résidus du CERGA entre 1987 et 2005 lorsqu'on néglige de prendre en compte les différences entre TT et TDB. Au milieu, les résidus sont calculés en utilisant la transformation TT-TDB intégrée en même temps que les équations du mouvement (résidus INPOP08). Enfin, en bas sont tracées les différences entre les méthodes 1 (TT-TDB intégré) et 3 (TT-TDB issu de SOFA).

9.3.1 Déplacement dû aux marées solides

De la même manière que la Terre se déforme sous l'influence de la Lune et du Soleil, la Lune se déforme sous celle de la Terre et du Soleil. En fait, comme la Lune est en résonance spin-orbite, la position de la Terre dans le repère sélénocentrique varie peu. La déformation générée par la Terre pourrait donc presque être considérée comme permanente. Ce n'est par contre pas le cas de celle générée par le Soleil.

Pour calculer le déplacement du réflecteur, on décide de transposer le modèle simplifié de marées solides des Conventions IERS 2003 pour la Terre (voir le paragraphe 9.1.3.1) à la Lune. Son expression devient alors :

$$\Delta \vec{LR} = \frac{\mu_G}{\mu_L} \frac{LR^4}{LG^3} \left\{ 3l_2 (\vec{u}_R \cdot \vec{u}_G) \vec{u}_G + \left[3 \left(\frac{h_2}{2} - l_2 \right) (\vec{u}_R \cdot \vec{u}_G)^2 - \frac{h_2}{2} \right] \vec{u}_R \right\} \quad (9.25)$$

avec

- μ_G : produit de la constante de la gravitation G par la masse du corps générateur (Terre ou Soleil)
- μ_L : produit de la constante de la gravitation G par la masse de la Lune
- \vec{u}_R : vecteur unitaire centre de la Lune - réflecteur
- \vec{u}_G : vecteur unitaire centre de la Lune - centre du corps générateur de marées
- LG : distance entre le centre de masse de la Lune et celui du corps générateur
- LR : distance entre le centre de masse de la Lune et le réflecteur
- h_2 et l_2 : nombres de Love (associés aux déplacements) de la Lune

Des valeurs des nombres de Love h_2 et l_2 sont données dans (Zhang, 1992) ou (Williams et al., 2008). Elles pourront éventuellement être ajustées par la suite (voir le chapitre 13.2).

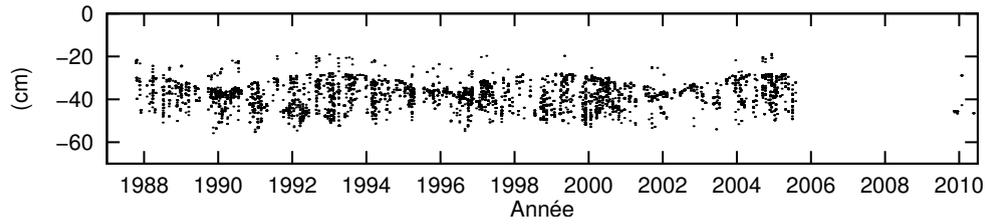


FIGURE 9.13 – Effet du déplacement des réflecteurs induit par les marées solides dans la réduction des données (CERGA entre 1987 et 2010).

TABLE 9.9 – Effet de la déformation de la Lune induite par les marées solides sur les statistiques des résidus LLR. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec marée solide)		sans marée solide			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	-38.02	8.28	-0.16	6.35
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	-37.82	7.24	-0.03	3.98
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	-26.32	17.12	8.15	15.88
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	-38.45	30.64	0.16	31.57
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-45.20	73.07	-7.80	73.29
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	-37.03	8.70	0.23	7.24
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	-38.59	6.26	-0.85	4.28
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	-37.47	7.78	0.54	4.82
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	-37.31	9.17	-0.44	8.05
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	-38.66	8.09	0.09	4.91

La figure 9.13 illustre l'effet des déplacements des réflecteurs dus aux marées solides sur la réduction des données récentes du CERGA. Avec près de 60 cm, il peut paraître important. Mais il est en fait en grande partie compensable par un réajustement des 59 mêmes paramètres qu'INPOP08 ; la solution qui néglige cet effet (nombres de Love h_2 et l_2 nuls), mais réajustée aux observations, présente sensiblement les mêmes résidus qu'INPOP08 (voir le tableau 9.9). Ceci s'explique par le fait que la Terre a une position apparente presque fixe dans le repère sélénocentrique. Dans l'expression 9.25, le terme dû à la Terre ne varie que très peu, on peut considérer le déplacement comme permanent et le compenser par un changement des positions des réflecteurs.

L'effet du Soleil aurait par contre été plus intéressant, puisqu'il n'a pas une position "fixe" dans le repère sélénocentrique. Sa masse est certes 300000 fois plus importante que celle de la Terre, mais il est aussi 400 fois plus éloigné. Son influence sur les déplacements des réflecteurs est donc beaucoup plus faible que celle de la Terre (environ 500 fois) et la précision des données ne permet pas de la mettre en évidence. On en tient cependant compte, pour des raisons de cohérence des modèles. Il faut également ajouter que les tirs se font dans des configurations particulières, rarement à la pleine ou nouvelle Lune ; le déplacement dû au Soleil est donc perpendiculaire au trajet de la lumière et est encore plus difficile à observer.

9.3.2 Déformation due au spin

On a vu dans le chapitre 4.2 que la Lune était déformée par les variations de son spin. Pour tenir compte du déplacement de sa surface, on transpose le modèle appliqué à la Terre au

paragraphe 9.1.6. Le potentiel dont dérive la force centrifuge en un point \vec{r} de la Lune est (la convention est inversée par rapport à l'expression (19) en page 83 des Conventions IERS 2003) :

$$V = -\frac{1}{2} \left[r^2 \omega^2 - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})^2 \right] \quad (9.26)$$

En corrigeant de la vitesse de rotation moyenne $\vec{\Omega}$ qui induit une déformation permanente, la variation du potentiel est alors :

$$\Delta V = -\frac{1}{2} \left[r^2 (\omega^2 - \Omega^2) - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})^2 + (\vec{r} \cdot \vec{\Omega})^2 \right] \quad (9.27)$$

En exprimant \vec{r} en coordonnées sphériques (θ est ici la colatitude), avec ${}^t\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ et ${}^t\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, l'expression précédente devient :

$$\Delta V = -\frac{1}{2} r^2 \left[\omega^2 - \Omega^2 \sin^2 \theta - (\omega_x \sin \theta \cos \lambda + \omega_y \sin \theta \sin \lambda + \omega_z \cos \theta)^2 \right] \quad (9.28)$$

Les déplacements S_r (radial), S_θ (sud) et S_λ (est) sont donnés dans les conventions IERS2003 en page 83 (avec inversion du signe pour respecter la convention liée au potentiel) :

$$S_r = -h_2 \frac{\Delta V}{g}, \quad S_\theta = -\frac{l_2}{g} \frac{\partial \Delta V}{\partial \theta}, \quad S_\lambda = -\frac{l_2}{g \sin \theta} \frac{\partial \Delta V}{\partial \lambda} \quad (9.29)$$

Avec g égal au produit de la constante de la gravitation G par la masse de la Lune M_L , divisé par le carré de la distance r , on obtient :

$$\begin{pmatrix} S_\theta \\ S_\lambda \\ S_r \end{pmatrix} = \frac{r^4}{GM_L} \begin{pmatrix} -l_2 \left(\Omega^2 \cos \theta \sin \theta + (\omega_x \cos \theta \cos \lambda + \omega_y \cos \theta \sin \lambda - \omega_z \sin \theta) \frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{r} \right) \\ l_2 (\omega_x \sin \lambda - \omega_y \cos \lambda) \frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{r} \\ \frac{h_2}{2} \left(\omega^2 - \Omega^2 \sin^2 \theta - \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{r} \right)^2 \right) \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

On transforme ensuite les déplacements (S_r, S_θ, S_λ) du repère local au repère sélénocentrique en utilisant la matrice de passage déjà donnée au paragraphe 9.1.6.

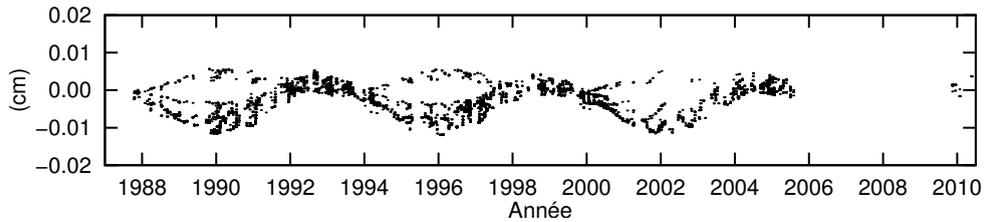


FIGURE 9.14 – Effet des variations du spin de la Lune dans la réduction des données.

La figure 9.14 illustre l'effet du déplacement des réflecteurs induit par les variations du spin de la Lune sur les observations LLR. Même s'il est négligeable avec moins de 0.2 mm, il en sera cependant tenu compte dans un souci de cohérence avec le modèle dynamique.

9.3.3 Passage du “LCRS” au BCRS

Le passage du repère sélénocentrique au repère fixe est effectué via les angles d’Euler de la Lune, intégrés en même temps que les équations du mouvement (voir le chapitre 3). Mais la même transformation relativiste qu’au paragraphe 9.1.8 doit être appliquée lors du passage d’un repère centré sur le centre de masse de la Lune (noté ici LCRS par analogie au GCRS) au BCRS, centré sur le barycentre du Système solaire.

$$\vec{r}_{BCRS} = \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \vec{r}_{LCRS} - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{LCRS}}{2c^2} \vec{V} \quad (9.31)$$

où U est cette fois le potentiel au centre de masse de la Lune et \vec{V} est la vitesse de la Lune par rapport au barycentre du Système solaire.

En convertissant dans le système de l’éphéméride (utilisant TDB au lieu de TCB), on obtient :

$$\vec{r}_{TDB} = (1 - L_B) \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \vec{r}_{LCRS} - (1 - L_B) \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{LCRS}}{2c^2} \vec{V} \quad (9.32)$$

L’effet de cette transformation n’est pas négligeable ; comme on peut l’observer sur les graphiques de la figure 9.15, ne pas en tenir compte produit un décalage d’environ 2 cm sur les temps LLR calculés. Ce dernier ne se manifeste cependant pas dans les écart-types des résidus, uniquement sur leurs valeurs moyennes : dans le tableau 9.10, les colonnes 3 et 5 diffèrent, mais les 4 et 6 ne sont pas significativement différentes. Réajuster les mêmes 59 paramètres que pour INPOP08 permet d’absorber les décalages.

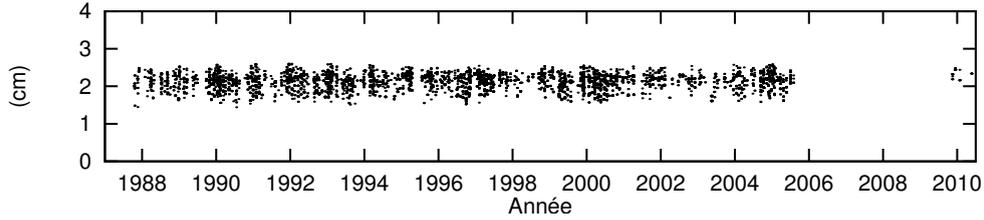


FIGURE 9.15 – Effet (avant réajustement) de la transformation relativiste du “LCRS” au BCRS dans la réduction des observations LLR du CERGA.

9.4 Délai induit par la déviation relativiste de la lumière

Le terme T^{RG} dans l’expression (9.1) est le délai dû à la déviation relativiste des rayons lumineux au voisinage d’un corps massif. D’après (Williams et al., 1996; Moyer, 2000) :

$$T^{RG} = \frac{1 + \gamma}{c^3} \mu_S \ln \left(\frac{r_1^S + r_2^S + r_{12}^S + (1 + \gamma) \frac{\mu_S}{c^2}}{r_1^S + r_2^S - r_{12}^S + (1 + \gamma) \frac{\mu_S}{c^2}} \right) + \frac{1 + \gamma}{c^3} \mu_T \ln \left(\frac{r_1^T + r_2^T + r_{12}^T}{r_1^T + r_2^T - r_{12}^T} \right) \quad (9.33)$$

où

- $r_1^S = \|\vec{r}_1^S\| = \|\vec{S}_1 E_1\|$ est la distance héliocentrique du point d’émission à l’instant t_1
- $r_2^S = \|\vec{r}_2^S\| = \|\vec{S}_2 R_2\|$ est la distance héliocentrique du point de réflexion à l’instant t_2
- $r_{12}^S = \|\vec{r}_2^S - \vec{r}_1^S\|$
- $r_1^T = \|\vec{r}_1^T\| = \|\vec{T}_1 E_1\|$ est la distance géocentrique du point d’émission à l’instant t_1

TABLE 9.10 – Effets de la transformation relativiste du “LCRS” au BCRS sur les statistiques des résidus. Pour chaque solution, la moyenne et l’écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08		sans passage LCRS-BCRS			
		(avec passage LCRS-BCRS)		non ajustée		réajustée	
		Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	1.96	6.31	-0.16	6.32
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	2.11	3.98	-0.03	3.97
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	10.16	15.84	8.10	15.86
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	2.16	31.67	0.16	31.63
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	-5.78	73.18	-7.80	73.23
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	2.33	7.24	0.22	7.26
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	1.28	4.28	-0.86	4.27
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	2.68	4.82	0.56	4.81
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	1.69	8.11	-0.44	8.09
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	2.14	4.90	0.08	4.84

- $r_2^T = \|\vec{r}_2^T\| = \|\overrightarrow{T_2 R_2}\|$ est la distance géocentrique du point de réflexion à l’instant t_2
- $r_{12}^T = \|\vec{r}_2^T - \vec{r}_1^T\|$
- γ est l’un des paramètres post-Newtonien (il vaut 1 en relativité générale)
- c est la vitesse de la lumière
- μ_S et μ_T sont respectivement les produits de la constante de la gravitation G et de la masse du Soleil, respectivement de la Terre

Dans ce délai, seuls les termes dus au Soleil et à la Terre sont pris en compte, celui de la Lune est négligé.

On peut remarquer que l’expression (17) en page 114 des Conventions IERS 2003 et (Klioner, 2008, expression (6)) sont similaires, le terme μ_S/c^2 étant négligé.

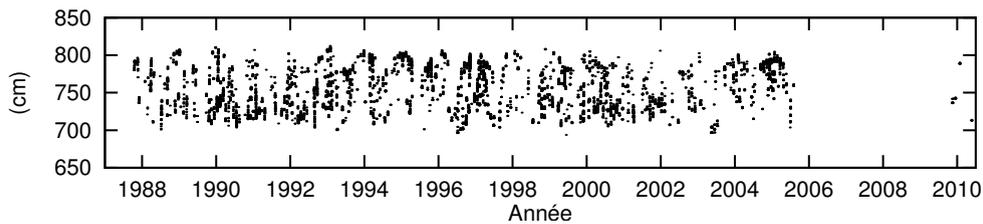


FIGURE 9.16 – Effet de la déviation de la lumière dans la réduction des observations LLR du CERGA.

Le graphique de la figure 9.16 montre l’effet de la déviation relativiste des rayons lumineux sur les observations LLR du CERGA. L’effet est important et peut dépasser 8 mètres. De plus, il ne peut pas être compensé par un ajustement des 59 paramètres, comme le montrent les écarts-types des résidus des solutions qui n’en tiennent pas compte, fortement dégradés par rapport à ceux d’INPOP08 (voir le tableau 9.11).

9.5 Délai troposphérique

Comme la vitesse de la lumière dans l’air est inférieure à celle dans le vide, la traversée de l’atmosphère (à l’émission et à la réception) provoque un retard dans le temps de trajet du

TABLE 9.11 – Effets de la déviation des rayons lumineux sur les statistiques des résidus aux observations. Pour chaque solution, la moyenne et l'écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec déviation)		sans déviation			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	754.37	27.73	1.18	10.78
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	756.05	28.58	-0.35	8.32
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	770.22	32.39	8.46	19.91
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	751.27	41.18	0.14	33.71
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	735.12	64.61	-13.36	71.40
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	758.30	28.52	0.04	9.48
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	753.47	29.04	-1.19	8.27
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	754.17	30.55	0.79	8.89
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	749.16	29.85	-0.68	10.74
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	751.66	30.60	-0.11	9.71

photon. L'expression de ce retard est donnée dans (McCarthy & Petit, 2004, page 99) et est issue de (Marini & Murray, 1973) :

$$T^{atm} = \frac{1}{c} \frac{f(\lambda)}{f(\phi, H)} \frac{A + B}{\sin E + \frac{B/(A + B)}{\sin E + 0.01}} \quad (9.34)$$

$$A = 0.002357P_0 + 0.000141e_0 \quad (9.35)$$

$$B = 1.84 \times 10^{-8} P_0 T_0 K + 4.734 \times 10^{-8} \frac{P_0^2}{T_0} \frac{2}{3 - 1/K} \quad (9.36)$$

$$K = 1.163 - 0.00968 \cos 2\phi - 0.00104T_0 + 0.00001435P_0 \quad (9.37)$$

avec

- E : élévation du satellite
- P_0 et T_0 : pression atmosphérique et température mesurées à la station
- e_0 : pression partielle de vapeur d'eau à la station
- $f(\lambda)$: fonction dépendant de la longueur d'onde λ du laser (en micromètres)
- ϕ et H : latitude géodésique et altitude (en kilomètres) de la station
- $f(\phi, H)$: fonction dépendant de la position de la station

La pression partielle de vapeur d'eau se déduit du taux d'humidité relative R_h , de la pression P_0 et de la température T_0 , mesurés lors de l'observation :

$$e_0 = \frac{R_h}{100} e_s f_w \quad (9.38)$$

La pression de saturation de vapeur d'eau e_s et le "facteur de majoration" f_w sont donnés dans (Davis, 1992; Giacomo, 1982) :

$$e_s = 0.01 \exp(1.2378847 \times 10^{-5} T_0^2 - 1.9121316 \times 10^{-2} T_0 + 33.93711047 - 6343.1645 T_0^{-1}) \quad (9.39)$$

$$f_w = 1.00062 + 3.14 \times 10^{-6} P_0 + 5.6 \times 10^{-7} (T_0 - 273.15)^2 \quad (9.40)$$

TABLE 9.12 – Effets du ralentissement de la lumière dans l’atmosphère sur les statistiques des résidus. Pour chaque solution, la moyenne et l’écart-type σ sont donnés en centimètres.

Station	Époque	INPOP08 (avec atmosphère)		sans atmosphère			
		Moy.	σ	non ajustée		réajustée	
				Moy.	σ	Moy.	σ
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	365.87	125.62	5.87	43.68
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	349.62	102.67	0.24	29.58
CERGA	1984-1986	8.09	15.87	363.02	124.97	5.23	46.11
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	274.00	77.03	-2.63	41.28
MLRS1	1982-1985	-7.82	73.23	256.78	82.26	-16.58	77.38
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	255.07	57.72	-2.63	25.78
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	266.96	49.89	-3.47	23.76
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	276.59	59.17	-2.29	25.63
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	229.89	52.65	-6.95	41.58
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	264.83	65.65	-3.34	27.24

La fonction dépendant de la longueur d’onde du laser est :

$$f(\lambda) = 0.9650 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000228}{\lambda^4} \quad (9.41)$$

La fonction dépendant de la position de la station est :

$$f(\phi, H) = 1 - 0.0026 \cos 2\phi - 0.00031H \quad (9.42)$$

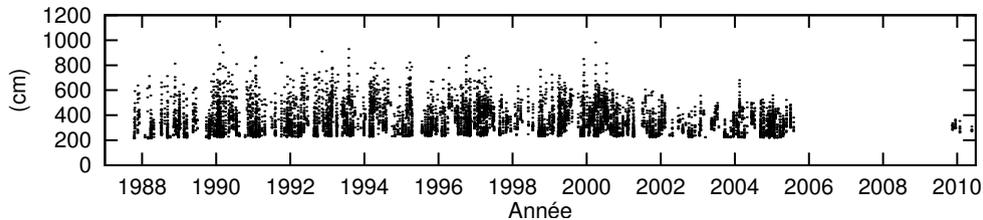


FIGURE 9.17 – Effet de l’atmosphère dans la réduction des observations LLR du CERGA.

Le graphique de la figure 9.17 montre l’effet de la troposphère sur les observations LLR effectuées par le CERGA entre 1987 et 2010. L’effet peut atteindre 12 mètres mais dépasse rarement 8 mètres. Pour les autres stations, l’allure des graphes est la même, avec cependant un effet plus limité (rarement supérieur à 5 mètres) car elles sont situées à une altitude plus élevée que celle du CERGA, et donc l’épaisseur de l’atmosphère est réduite. Il ne peut pas être compensé par un ajustement des 59 paramètres : les écart-types des résidus des solutions qui ne tiennent pas compte du retard atmosphérique sont fortement dégradés par rapport à ceux d’INPOP08 (voir le tableau 9.12).

9.6 Corrections de biais éventuels sur les mesures

Les expressions 9.1 permettent de calculer les temps de trajet aller et retour de la lumière entre la station et le réflecteur. On y ajoute parfois, selon les stations et les périodes, des corrections constantes ou linéaires avec le temps lorsqu’on pense que les mesures ont été biaisées :

TABLE 9.13 – Définition des périodes et des stations pour lesquelles des corrections constantes ou linéaires sont susceptibles d’être prises en compte. Les codes des stations sont ceux donnés dans les fichiers d’observations au format MINI (voir le tableau 9.1). Les début et fin de chacune des périodes sont au format AAAAMMJHH, où AAAA est l’année, MM le mois, JJ le jour et HH l’heure (UTC).

N°	Station	Début	Fin	N°	Station	Début	Fin
01	01910	1996120100	1998063000	21	01910	1969062800	2020010100
02	71110	1971120100	1972120500	22	01910	1996121000	1996122000
03	71110	1974081800	1974101600	23	01910	1997011200	1997011300
04	71110	1972042100	1972042700	24	01910	1997011300	1997011600
05	71110	1975100509	1976030102	25	01910	1997011600	1997020700
06	71110	1983120100	1984011700	26	01910	1997020800	1997050700
07	56610	1985082700	1985082800	27	01910	1997050800	1997060500
08	56610	1984100400	1986040200	28	01910	1997060600	1997103100
09	56610	1986040200	1987073100	29	01910	1997110100	1998042600
10	56610	1989082300	1989082400	30	01910	1998052600	1998062400
11	56610	1985060900	1985061000	31	01910	1998062500	1999090900
12	56610	1988060700	1988060900	32	01910	1996070800	1996070900
13	01910	1986112500	1986112600	33	01910	1998053020	1998053021
14	56610	1988113000	1988120100	34	01910	1999091000	2006123100
15	56610	1989012800	1989012900	35	01910	2004120400	2004120700
16	56610	1987073100	1987081500	36	01910	2005010300	2005010600
17	01910	1984010100	1987010100	37	01910	2005021700	2005030200
18	01910	1990050300	1990050700	38	70610	2005010100	2009123100
19	56610	1990010100	1992010100	39	71110	1972102120	1975080312
20	71110	1969062800	2000090100	40	71112	1990032109	1993032109

- soit parce que l’on observe un décalage dans les résidus
- soit parce que des modifications dans l’instrumentation sont susceptibles de biaiser les mesures

Les stations et périodes des corrections que l’on peut éventuellement introduire et qui seront ajustées aux observations, sont listées dans le tableau 9.13.

Le 1^{er} biais est appliqué aux observations du CERGA entre le 1^{er} décembre 1996 et le 30 juin 1998. Il a été remarqué par Chapront-Touzé et al. (2000), puis repris par Chapront et al. (2002) et Aleshkina (2002). Seul le terme constant (fixé à 0.7 ns, soit environ 10 cm sur la demi-distance parcourue par les photons) était alors pris en compte, le terme linéaire était (et le reste pour INPOP) négligé. Les graphes de la figure 9.18 montrent les résidus LLR d’une solution proche d’INPOP08 (décrite au chapitre 13), dans laquelle on ne tient pas compte de ce biais. On peut remarquer un décalage des résidus, absent de ceux d’INPOP08 (voir la figure 13.18).

Les corrections n^{os} 2 à 38 sont celles utilisées par J. Williams (2010, communications privées). Il ne tient compte que des termes constants, sauf pour le n^o 5 pour lequel il tient aussi compte de la correction linéaire. On peut noter que le 1^{er} biais se décompose en n^{os} 22 à 30. D’autre part, je ne dispose d’aucune observation du CERGA le 25 novembre 1986 qui serait concernée par la correction n^o 13.

Enfin, les deux derniers biais sont propres à INPOP. Le n^o 39 est introduit car on observe le même genre de décalage dans les données Mc Donald entre fin-1972 et mi-1975 que dans celles du CERGA entre fin-1996 et mi-1998. Il est illustré par le graphe inférieur de la figure 9.18 et

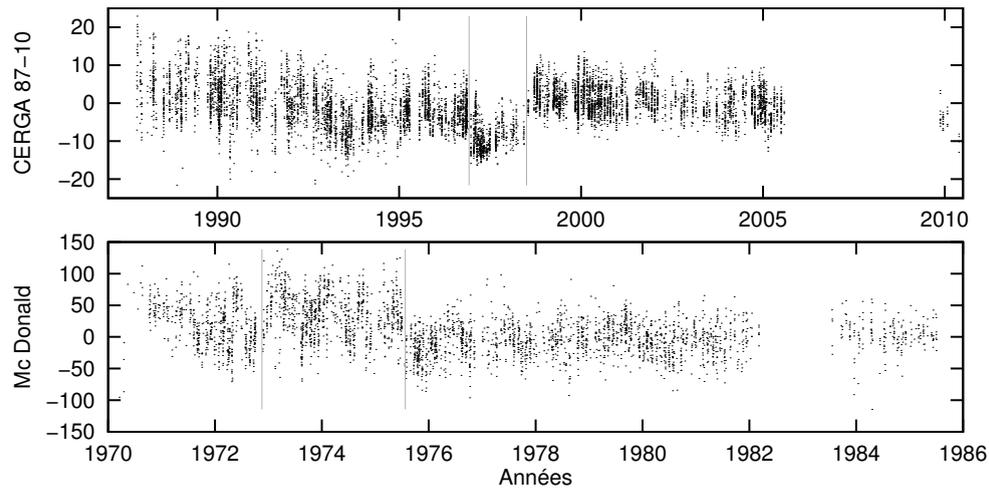


FIGURE 9.18 – Résidus LLR d’une solution proche d’INPOP08, dans laquelle on néglige de tenir compte de corrections (termes constants des biais n^{os} 1 et 39) dans les observations du CERGA et de Mc Donald.

est encore plus visible dans (Krasinsky, 2002). Le n^o 40 est lui observé lors des réductions avec les solutions DE421 ou DE423 effectuées au paragraphe 13.4.2.1.

Si le tableau 9.13 présente toutes les corrections susceptibles d’être apportées lors de la réduction des données, seuls les termes constants des n^{os} 1, 17, 39 seront effectivement utilisés lors de la construction d’INPOP. Les autres n’ont été implémentés que pour en étudier les effets sur les résidus ou les valeurs ajustées des autres paramètres.

Chapitre 10

Ajustements par moindres carrés

Dans ce chapitre sont décrites les procédures et méthodes utilisées pour l'ajustement des solutions planétaires et lunaires aux données Laser Lune. On dispose pour n différents instants (t_i), de la mesure des temps de trajet aller-retour (\hat{y}_i) d'un photon entre une station terrestre et un réflecteur sur la Lune. Pour ces mêmes instants, on peut déterminer des temps de trajet avec une solution planétaire et lunaire. On notera ces temps calculés (y_i). On notera également respectivement \hat{Y} et Y les vecteurs colonnes des temps de trajet mesurés et calculés : ${}^t\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)$ et ${}^tY = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Une solution planétaire est la combinaison d'un modèle dynamique (interactions considérées), d'un modèle de réduction des données (effets qui influencent le trajet de la lumière), et de valeurs de paramètres. Certains interviennent dans le modèle dynamique (comme les conditions initiales des planètes ou les coefficients du potentiel), d'autres dans le modèle de réduction des données (comme les coordonnées des réflecteurs, des stations, ou les nombres de Love h_2 et l_2 associés aux déplacements de la surface lunaire). Enfin, quelques-uns interviennent à la fois dans la dynamique et dans la réduction des observations (comme les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune ou le paramètre post-newtonien γ). Tous ces paramètres seront par la suite notés $(\alpha_j)_{j \in [1:p]}$. Une fois les modèles dynamique et de réduction des données fixés, on peut écrire :

$$\text{pour tout } i \in [1, n], y_i = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, t_i) = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad (10.1)$$

Le but ici est donc de déterminer les valeurs des paramètres (α_j) qui minimisent les écarts entre les temps de trajet mesurés et ceux calculés. Dans la méthode des moindres carrés, on cherchera à minimiser la quantité :

$$\chi^2 = \chi^2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \|\hat{Y} - Y\|^2 \quad (10.2)$$

10.1 Généralités sur les moindres carrés

10.1.1 Linéarisation - équations normales

En pratique, on part d'une solution existante (et donc d'un jeu de paramètres fixés), et on souhaite déterminer les corrections à apporter aux paramètres pour minimiser χ^2 ; on cherche les inconnues ($\delta\alpha_i$) telles que

$$\chi^2(\alpha_1 + \delta\alpha_1, \alpha_2 + \delta\alpha_2, \dots, \alpha_p + \delta\alpha_p) \text{ soit minimal} \quad (10.3)$$

Si on suppose que les corrections à apporter sont petites, c'est-à-dire que la solution de départ n'est pas trop éloignée de la solution recherchée, chaque temps de trajet calculé y_i peut être linéarisé autour du vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Ainsi, pour tout i dans $[1, n]$,

$$y_i(\alpha_1 + \delta\alpha_1, \dots, \alpha_p + \delta\alpha_p) = y_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \delta\alpha_j \quad (10.4)$$

Et donc, pour la linéarisation du vecteur Y :

$$Y(\alpha_1 + \delta\alpha_1, \dots, \alpha_p + \delta\alpha_p) = Y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} \right)^t (\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_p) \quad (10.5)$$

$\left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} \right)$ est une matrice à n lignes et p colonnes, qu'on appellera matrice des dérivées partielles $A = (a_{ij})$ par la suite, et dans laquelle chaque coefficient a_{ij} est la dérivée du temps de trajet calculé y_i par rapport au coefficient α_j :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad (10.6)$$

On notera également $B = \hat{Y} - Y$ (aussi appelé vecteur des observations moins calculs, ou vecteur des O-C) et le vecteur inconnu $X = {}^t(\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_p)$. On cherche donc X tel que :

$$\chi^2 = \|B - AX\|^2 \text{ soit minimal.} \quad (10.7)$$

Si χ^2 est minimal, son gradient par rapport aux inconnues $(\delta\alpha_i)$ est nul, ce qui conduit aux équations normales $({}^tAA)X = {}^tAB$, dont la solution $X = ({}^tAA)^{-1}{}^tAB$ est appelé pseudo-inverse.

10.1.2 Matrices de variance-covariance et de corrélation

À partir de la matrice A , on détermine la matrice de variances-covariances des paramètres (Pelat, 2002) :

$$Cov(A) = (\sigma_{ij}) = \sigma^2 ({}^tAA)^{-1} \quad (10.8)$$

σ^2 est la variance des résidus, dont une estimation est fournie par

$$\sigma^2 = \frac{\chi^2}{n-p} = \frac{\|B - AX\|^2}{n-p} \quad (10.9)$$

De la matrice de variances-covariances, on calcule les erreurs formelles $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$ sur les paramètres ajustés, dont les carrés sont les éléments de la diagonale de $Cov(A)$. Si on suppose une répartition gaussienne des résidus, alors l'estimation de chaque paramètre suit la loi normale de variance σ_i^2 .

Enfin, à partir de la matrice de variances-covariances, on détermine également la matrice des corrélations entre les paramètres :

$$Cor(A) = (c_{ij}) \text{ où } c_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} \quad (10.10)$$

On note que la matrice de corrélation ne dépend que de la matrice des dérivées partielles et non de la précision des observations.

10.1.3 Décomposition en valeurs singulières

Parmi les méthodes disponibles pour inverser la matrice (tAA) (décompositions LU, QR, ...), celle des valeurs singulières consiste à décomposer la matrice A sous la forme :

$$A = UD^tV \quad (10.11)$$

avec V une matrice carrée $p \times p$ du groupe orthogonal (${}^tV = V^{-1}$), D est une matrice carrée $p \times p$ diagonale et U une matrice $n \times p$ telle que le produit ${}^tUU = I_p$ (U n'appartient cependant pas au groupe orthogonal car elle n'est pas carrée). On obtient alors la solution :

$$X = VD^{-1}{}^tUB \quad (10.12)$$

La matrice des variances-covariances des paramètres est alors (voir (Pelat, 2002, p. 288) ou (Press et al., 1986, paragraphe 2.9)) :

$$Cov(A) = \sigma^2({}^tAA)^{-1} = \sigma^2VD^{-2}{}^tV \quad (10.13)$$

Une estimation de la variance σ^2 est :

$$\sigma^2 = \frac{S_{min}}{n-p} = \frac{\|B - AX\|^2}{n-p} = \frac{\|(I - U{}^tU)B\|^2}{n-p} \quad (10.14)$$

Remarque : dans le cas des observations LLR, la matrice A est mal conditionnée, avec des disparités importantes dans ses valeurs de coefficients selon les colonnes. Pour limiter les erreurs numériques, les calculs sont effectués avec une matrice A' obtenue en divisant chacun des vecteurs colonnes de A par sa norme respective.

10.1.4 Pondérations des observations

Toutes les observations n'ont cependant pas la même précision, et lors des ajustements, il est souhaitable de donner plus d'importance à celles dont l'erreur de mesure est plus faible. En introduisant la matrice des pondérations $P = diag(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ avec $\rho_i \geq 0$, on cherchera à minimiser la quantité :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 (\hat{y}_i - y_i)^2 = \|P\hat{Y} - PY\|^2 \quad (10.15)$$

Dans ce cas, les développements exposés aux paragraphes précédents restent valables en remplaçant A par $A' = PA$ et B par $B' = PB$.

10.2 Dérivées partielles

10.2.1 Calcul

On a vu au chapitre précédent qu'il était nécessaire de déterminer les dérivées partielles de la quantité mesurée (temps de trajet du photon) par rapport à chacun des paramètres que l'on souhaite ajuster (matrice A).

La première méthode consiste à les calculer par intégration numérique des équations aux variations. Cette méthode, puissante, est cependant difficile à mettre en œuvre avec des modèles dynamique ou de réduction des données complexes que ceux utilisés pour les ajustements aux données LLR.

La deuxième, plus simple, consiste à approcher la tangente en un point par une corde : pour tout $j \in [1, p]$,

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \frac{f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j + h, \dots, \alpha_p) - f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j - h, \dots, \alpha_p)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (10.16)$$

Pour chaque paramètre α_j , on effectue deux intégrations numériques avec les valeurs $\alpha_j + h$ et $\alpha_j - h$. On calcule ensuite les temps de trajet de la lumière pour ces deux solutions. Leur différence divisée par $2h$ donne alors une estimation de la dérivée partielle en α .

La valeur de h employée est déterminée empiriquement et résulte d'un compromis. Si elle est trop grande, les directions entre la corde et la tangente risquent d'être très différentes. Si elle est trop petite, les temps de trajets calculés avec $\alpha_j + h$ et $\alpha_j - h$ sont proches l'un de l'autre, et leur différence génère des erreurs numériques importantes.

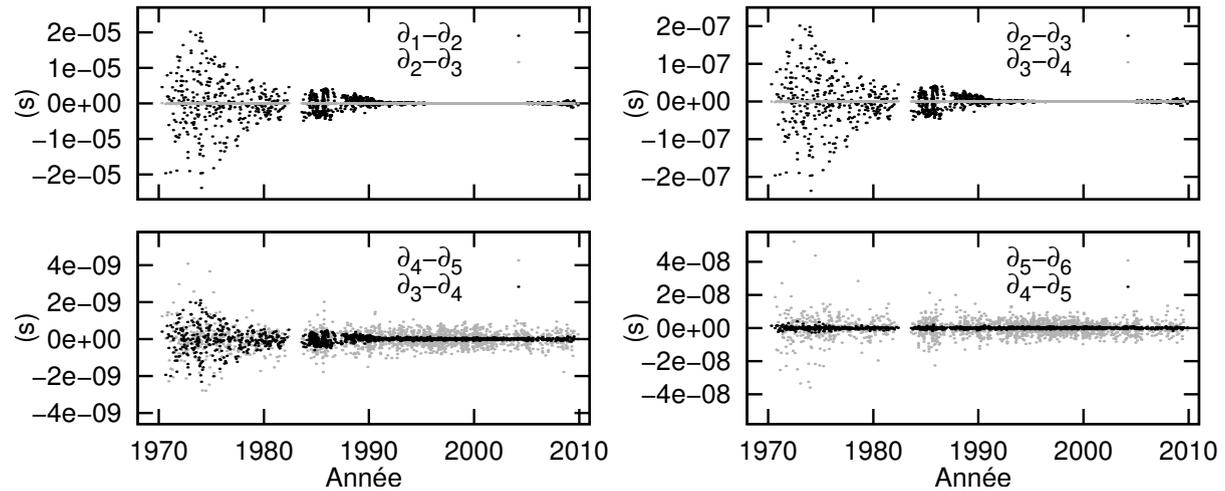


FIGURE 10.1 – Illustration du choix de la valeur de h pour le calcul des dérivées partielles du temps de trajet de la lumière par rapport au coefficient du potentiel C_{20} de la Terre. Les dérivées partielles ∂_i sont estimées avec des valeurs $h_i = 10^{-(i+1)}$. Les différences les plus faibles sont obtenues entre ∂_3 et ∂_4 et la valeur de h utilisée est arbitrairement choisie à $h_4 = 10^{-5}$.

Différents calculs des dérivées partielles sont effectués pour des valeurs de h , qui diffèrent chacune d'un ordre de grandeur. Puis, on compare leurs différences deux à deux pour choisir parmi elles celles qui présentent les écarts les plus réduits. La figure 10.1 illustre le choix de h pour les dérivées partielles par rapport au coefficient du potentiel C_{20} de la Terre. Elles sont calculées pour h variant de 10^{-2} à 10^{-7} et notées respectivement ∂_1 à ∂_6 . Les courbes supérieures à gauche montrent les différences $\partial_1 - \partial_2$ (en noir), supérieures à celles $\partial_2 - \partial_3$ (en gris). On en déduit que l'erreur commise (ici la différence entre la tangente et la corde) avec ∂_1 est supérieure à celles commises avec ∂_2 ou ∂_3 . On répète les mêmes comparaisons entre $\partial_2 - \partial_3$ (en noir) et $\partial_3 - \partial_4$ (en gris), illustrées par les courbes supérieures à droite. De la même manière, on en déduit que l'erreur sur ∂_2 est supérieure à celles sur ∂_3 ou ∂_4 . La situation évolue avec les comparaisons de $\partial_3 - \partial_4$ (en noir) et $\partial_4 - \partial_5$ (en gris) sur les courbes inférieures à gauche. L'erreur numérique en raison de trop petites valeurs de h entraîne des erreurs plus importantes pour ∂_5 que pour ∂_3 ou ∂_4 . Les courbes inférieures à droite qui comparent $\partial_4 - \partial_5$ en noir à $\partial_5 - \partial_6$ en gris confirment ce résultat. Ainsi, la valeur de h employée pour calculer les dérivées partielles du temps de trajet de la lumière par rapport au coefficient du potentiel C_{20} de la Terre sera $h_4 = 10^{-5}$. Le choix est arbitraire, car on aurait aussi pu prendre $h = 10^{-4}$.

10.2.2 Vérification des procédures avec des observations idéales

Soit une solution planétaire, notée SOL1 dans ce paragraphe. Cette solution est définie par un modèle dynamique, un modèle de réduction des observations LLR et un jeu de paramètres. On détermine les dérivées partielles par rapport à 174 des 188 paramètres listés en annexe H. Sont exclus les coordonnées et dérivées de la station d'émission d'Haleakala, les nombres de Love $k_{E20}, k_{E21}, k_{E22}$ de la Terre, le temps de déphasage τ_{E20} de la Terre ainsi que les corrections

(décalage constant et pente) appliquées sur les données du CERGA entre le 1^{er} décembre 1996 et le 30 juin 1998 (biais n°1) et celles de la nuit du 25 au 26 novembre 1986 (n°13). Les justifications de l'élimination de ces paramètres sont données plus loin.

On se donne ensuite une autre solution (notée REF01) en conservant de SOL1 les mêmes modèles (dynamique et réduction), mais en modifiant les valeurs des 174 paramètres pour lesquels on a déterminé les dérivées partielles. Ces changements sont choisis aléatoirement dans un intervalle $[0.1h, 10h] \cup [-10h, -0.1h]$, où h est la valeur employée pour le calcul de la dérivée partielle correspondante. Ainsi, les modifications des paramètres, notées $(\delta\alpha_i)_{i \in [1:174]}$, ne sont :

- ni trop importantes, de manière à rester dans le domaine où l'approximation linéaire de χ^2 reste valable
- ni trop petites, de façon que les changements induits dans les temps de trajet de la lumière ne soient pas négligeables en regard de la précision numérique (limitée à quelques 10^{-16} pour des calculs en double précision).

On génère alors avec REF01 des “observations LLR parfaites” (pas d'erreur autre que numérique, ni dans les modèles, ni dans les mesures). Puis, en partant de SOL1 et de ses dérivées partielles, on ajuste par moindres carrés les 174 paramètres modifiés sur les “données” générées avec REF01. Après plusieurs itérations (la linéarisation de χ^2 est une approximation), les paramètres convergent vers ceux employés pour REF01. Au final, on retrouve chacune des modifications $(\delta\alpha_i)_{i \in [1:174]}$ avec une erreur relative inférieure à 0.1%. $\delta\alpha_i$ est parfois du même ordre de grandeur que la valeur α_i du paramètre, parfois de plusieurs ordres de grandeur inférieure. Si on s'intéresse plutôt aux valeurs des paramètres $(\alpha_i)_{i \in [1:174]}$, l'erreur relative est cette fois inférieure à 0.01%.

Cette vérification a été effectuée pour 11 autres solutions de référence (de REF02 à REF12) qui ne diffèrent de REF1 que dans leurs valeurs de paramètres (choisies aléatoirement avec les mêmes contraintes). On retrouve à chaque fois les mêmes résultats, voire des erreurs encore plus réduites.

L'intérêt de ce test est d'abord qu'il permet de valider les procédures d'ajustement aux données LLR, en vérifiant qu'on obtient bien au final la solution attendue. En particulier, on a vérifié que le calcul des dérivées partielles exposé au paragraphe précédent est correct.

Ensuite, l'autre intérêt de cette vérification est de s'assurer qu'on ne pouvait pas exactement compenser l'effet d'un paramètre par un ajustement des autres. Les 174 paramètres testés ici sont donc linéairement indépendants, la matrice A des dérivées partielles est de rang 174 (soit égal au nombre de colonnes), et $({}^tAA)$ est inversible.

Remarque : on ne peut pas se contenter ici de calculer le déterminant de la matrice tAA pour s'assurer de son inversibilité. En raison des erreurs d'arrondis lors de calculs numériques, il est très peu probable d'obtenir une valeur nulle lorsqu'une matrice est singulière.

On s'est limité ici à vérifier l'indépendance de 174 des 188 paramètres qui induisent des effets significatifs sur les temps LLR. Si on essaie d'ajuster à la fois les coordonnées des stations d'émission et de réception d'Haleakala, on échoue à retrouver les mêmes valeurs que celles de REF01. Ces paramètres ne sont donc pas linéairement indépendants, on peut compenser un déplacement de la station d'émission par un déplacement de celle de réception. Il en est de même si on essaie d'ajuster les nombres de Love $k_{E20}, k_{E21}, k_{E22}$ ainsi que le temps de déphasage τ_{E20} de la Terre. Le biais n°1 que Chapront-Touzé et al. (2000) applique sur les données du CERGA entre les 1^{er} décembre 1996 et 30 juin 1998 se combine avec certains de J. Williams (n°s 22 à 30). Quant au biais n°13 pris en compte par J. Williams, aucune observation n'est concernée.

Des erreurs de 0.01% peuvent sembler importantes en comparaison de la précision numérique ($\simeq 10^{-16}$). Mais il faut savoir que certains paramètres n'ont qu'un effet assez limité sur les observations LLR. Si la modification de la distance Terre-Lune (par l'intermédiaire de ses conditions initiales) et celle induite sur le temps LLR sont du même ordre de grandeur, il en est

différemment pour d'autres paramètres. Ainsi, la valeur du nombre de Love h_2 de la Lune est d'environ 0.05 et le déplacement maximal de sa surface induit par l'effet de marée solide généré par la Terre est d'environ 60 cm. Ainsi, doubler la valeur de h_2 (soit un changement de 100%), induirait un déplacement du réflecteur de 60 autres centimètres. La distance Terre-Lune étant d'environ 360000 km, le changement relatif sur le temps LLR serait inférieur à 2×10^{-9} . Avec de plus faibles modifications, la précision numérique serait vite atteinte. Il est donc normal dans ces conditions de ne pas arriver à retrouver exactement les paramètres de la solution REF01, et ce même si le test décrit dans ce paragraphe ne portait que sur un seul paramètre au lieu de 174. Il pourrait être intéressant d'effectuer les réductions des observations en précision étendue (epsilon machine d'environ 10^{-19}), voire en quadruple (10^{-34}) pour voir jusqu'à quelle précision il est possible de retrouver des valeurs de paramètres. Il s'agirait cependant d'un travail assez important (modification des programmes) qui n'a pas été effectué ici.

10.3 Sélection des paramètres à ajuster

Dans le paragraphe précédent, on a démontré que les 174 paramètres étaient linéairement indépendants : les vecteurs colonnes de la matrice des dérivées partielles sont libres, on ne peut pas exactement compenser le changement de valeur d'un paramètre par une modifications des autres. Le vecteur solution X qui minimise le χ^2 est donc unique.

Toutefois, la précision des données réelles (de l'ordre de 10^{-11} seconde au lieu de 10^{-16} avec les données "idéales") risque d'être insuffisante pour séparer les signaux de certains paramètres dont les effets sur le LLR sont proches. Lors des ajustements, ces derniers pourraient prendre des valeurs aberrantes, incompatibles avec la réalité. La solution obtenue serait certes la meilleure en terme de résidus sur l'intervalle sur lequel elle serait contrainte. Mais, de la même manière qu'avec un modèle incomplet, elle pourrait ensuite se dégrader à l'extérieur.

Il est donc nécessaire de déterminer les paramètres qui pourront effectivement être ajustés. Plusieurs méthodes de sélection ont été testées. Elles sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

10.3.1 Élimination des plus petites valeurs propres

Une fois la matrice des dérivées partielles exprimée sous la forme $A = UD^tV$, le pseudo-inverse X est calculé en annulant dans D^{-1} les inverses des plus petites valeurs propres. Cette méthode, décrite dans (Pelat, 2002) est utile lorsque la matrice $({}^tAA)$ est singulière, car elle permet de déterminer, parmi l'infinité de solutions possibles, celle de variance minimale. Dans le cas où $({}^tAA)$ est inversible, d'après Tomassone et al. (1992) ou les "Numerical Recipes" (Press et al., 1986), elle permet d'éliminer de l'ajustement les combinaisons linéaires qui augmentent le plus les erreurs formelles sur les paramètres.

Les 174 paramètres ajustés au paragraphe 10.2.2 représentent cependant des grandeurs physiques différentes et qui ne sont pas homogènes :

- des longueurs pour les positions initiales du vecteur Terre-Lune, les coordonnées des réflecteurs, celles des stations, ...
- des vitesses pour les vitesses initiales du vecteur Terre-Lune, les dérivées des stations, ...
- des angles et vitesses angulaires pour les librations initiales de la Lune
- des temps pour les temps de déphasage ou les biais
- des nombres sans dimension pour les coefficients du potentiel, les nombres de Love, les paramètres post-newtoniens β et γ , ...

Les unités dans lesquelles sont exprimés ces paramètres peuvent être différentes. Par exemple, le vecteur vitesse initiale du vecteur Terre-Lune est exprimé en UA par jour, tandis que les dérivées des stations sont exprimées en mètre par an. Le choix des unités est arbitraire, et *ne doit pas*

avoir d'influence sur la solution produite. Et c'est là le problème de cette méthode. Changer d'unité se traduit par un facteur multiplicatif sur la colonne correspondante de la matrice A , ce qui provoque la modification des valeurs et vecteurs propres. Si on annule un ou plusieurs inverses de valeurs propres petites, on ne retrouve alors pas les mêmes corrections à apporter. La solution ajustée obtenue dépendrait donc des unités choisies pour exprimer les paramètres, ce qui serait incohérent.

Ce problème a été mis en évidence lorsqu'on a cherché à minimiser les erreurs numériques lors de l'inversion de la matrice A . Ses coefficients présentent des disparités importantes selon les colonnes (ou les paramètres). Ainsi, celles qui correspondent aux dérivées partielles par rapport aux positions des réflecteurs sont de l'ordre de 10^{-8} s/m contre 10^5 s/UA pour les positions initiales du vecteur Terre-Lune. La matrice est donc mal conditionnée, avec un rapport de 10^{-18} entre la plus petite et la plus grande des valeurs propres. Cela se traduit par des erreurs numériques importantes lors de l'inversion de tAA . Pour les réduire, on a vu au paragraphe 10.1.3 qu'on normalisait chacune des colonnes de A ; cette opération est équivalente à un changement d'unité sur chacun des paramètres. Son conditionnement passe alors de 10^{-18} à 10^{-6} et les erreurs numériques lors de l'inversion sont réduites (par rapport à un calcul de référence effectué en quadruple précision). Si aucun inverse de valeur propre n'est annulé, les deux calculs avec et sans normalisation des vecteurs colonnes conduisent au même pseudo-inverse. Dès qu'au moins un inverse de valeur propre est annulé, les résultats diffèrent.

Remarque : dans les "Numerical Recipes", Press et al. (1986) conseillent de négliger dans le calcul du pseudo-inverse les valeurs propres dont le rapport à la plus grande est inférieur à la précision numérique. Pour des calculs effectués en double précision (ϵ machine de l'ordre de 10^{-16}), aucune valeur propre ne serait éliminée avec la matrice normalisée, alors qu'au moins une d'elles le serait sans la normalisation.

Pour pousser le raisonnement encore plus loin, on peut imaginer effectuer un changement de variable sur les paramètres, et poser $Y = D^tVX$. Ce changement de variable est bijectif, car la matrice A étant inversible (démontré au paragraphe 10.2.2), ses valeurs propres sont toutes non nulles et D est inversible. On se retrouve alors à résoudre le système linéaire équivalent $A'Y = B$, avec $A' = U$, dont les valeurs propres sont toutes égales à 1. La méthode de sélection devient alors inapplicable.

Une idée pour résoudre ce problème de cohérence serait de diviser chaque colonne de la matrice des dérivées partielles par la valeur du paramètre correspondant. L'inversion et la sélection des combinaisons linéaires de paramètres que l'on ajusterait se ferait alors sur une matrice indépendante des unités. Mais lors des itérations pour compenser la non linéarité du χ^2 , pour des raisons de temps de calcul, on ne redétermine pas à chaque fois la matrice des dérivées partielles A . Par quelle valeur du paramètre faudrait-il alors diviser la colonne : celle ajustée lors de l'itération précédente, ou celle de la solution qui a servi au calcul des dérivées partielles ? Et même si la matrice était recalculée à chaque itération (très coûteux en temps de calcul), il se pourrait que les variations des paramètres rendent la méthode instable et empêche la convergence vers une solution.

Cette méthode n'a donc pas été retenue.

Remarque : la décomposition en valeurs singulière de la matrice A du paragraphe 10.1.3 n'est donc utilisée que pour inverser le système linéaire $({}^tAA)X = {}^tAB$.

10.3.2 Élimination des paramètres dégradant le moins les résidus

Dans l'ajustement, on élimine successivement les paramètres qui dégradent le moins les résidus, l'idée étant qu'il est inutile d'ajuster un paramètre s'il n'améliore pas la solution.

On part d'une solution SOL0, pour laquelle on dispose du vecteur B des résidus LLR et de sa matrice des dérivées partielles A . On peut donc déterminer le pseudo-inverse $X_0 = ({}^tAA)^{-1}{}^tAB$

et avoir une estimation de la valeur de $\chi_0^2 \simeq \|B - AX_0\|^2$ si les corrections étaient réinjectées dans SOL0.

À partir de A , on construit les matrices $(A)_{i \in [1:p]}$ en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ colonne. Pour chacune de ces matrices, on calcule les pseudo-inverses $X_i = ({}^t A_i A_i)^{-1} A_i B$, qui correspondent aux corrections à apporter aux paramètres lorsque le $i^{\text{ème}}$ n'est plus ajusté. Enfin, chaque pseudo-inverse permet d'avoir une estimation des résidus LLR $\chi_i^2 \simeq \|B - A_i X_i\|^2$ si ces corrections étaient injectées dans la solution SOL0. En comparant chaque χ_i^2 à χ_0^2 , on peut alors repérer le paramètre dont le non-ajustement est le moins pénalisant pour les résidus.

On peut ensuite itérer le processus, et éliminer plusieurs paramètres. Le critère d'arrêt peut être la contrainte de ne pas dégrader les résidus au-delà d'une certaine limite par rapport à χ_0^2 . On détermine ainsi la liste des paramètres qu'il est utile d'ajuster, et dont les corrections peuvent être injectées dans SOL0 pour obtenir SOL1.

L'inconvénient de cette méthode est lié à la non linéarité du χ^2 . Ainsi, les résidus post-fit calculés avec SOL1 diffèrent de l'estimation donnée par la méthode des moindres carrés. Il est donc nécessaire d'effectuer des itérations. Mais si la même méthode de sélection est alors employée, la liste des paramètres ajustés change. Pour certains, la "bonne" valeur (celle qui minimise les résidus) est trouvée dès la première itération et n'ont donc plus à être ajustés. D'autres apparaissent, peut-être en raison de différences parfois importantes entre les valeurs de paramètres de SOL0 et celles de SOL1. Or l'utilité de construire des solutions planétaires est aussi d'apporter des contraintes sur certaines grandeurs physiques, ce qui devient difficile lorsque la liste des paramètres ajustés varie d'une itération à l'autre.

On pourrait cependant limiter le problème en déterminant lors du passage de SOL0 à SOL1 la liste des paramètres que l'on ajuste, et la conserver pour les itérations suivantes. Mais on aurait toujours l'inconvénient d'une liste qui dépendrait de la solution initiale. On pourrait imaginer partir d'une solution SOL0, dont les coordonnées des réflecteurs, et les conditions initiales du vecteur Terre-Lune et des librations de la Lune (soit 24 paramètres au total) auraient été ajustées au LLR. Puis, on décide de construire une solution (avec les mêmes modèles dynamique et de réduction des données) en ajustant en plus un 25^{ème} paramètre. Si on applique la méthode décrite dans ce paragraphe, ce dernier paramètre sera obligatoirement ajusté, car ce sera le seul dont la modification pourra éventuellement améliorer les résidus (s'il restait inchangé, on retomberait alors sur SOL0); et ce, même s'il est peu sensible au LLR, ou que son effet peut être en partie compensé par les 24 autres.

Cette méthode n'a donc pas été retenue.

Remarque : une autre méthode similaire a été testée. Au lieu de s'intéresser à l'effet des paramètres sur les résidus, on étudie plutôt le rapport entre l'erreur formelle et la correction à apporter, avec l'idée de ne pas ajuster les paramètres dont ce rapport serait important. Curieusement, le critère de sélection est différent, mais elle élimine des ajustements les mêmes paramètres, et dans le même ordre, que la méthode décrite dans ce paragraphe. Elle possède cependant les mêmes inconvénients.

10.3.3 Élimination des paramètres fortement corrélés

On dit que deux paramètres α_i et α_j sont exactement corrélés (respectivement anti-corrélés) si, dans la matrice de corrélation du paragraphe 10.1.2, le coefficient hors diagonale c_{ij} est égal à 1 (respectivement -1). Si $|c_{ij}| = 1$, on peut montrer que les vecteurs colonnes i et j de la matrice A sont liés. Un changement de la valeur de l'un d'eux pourrait être compensé par celle de l'autre sans modifier les résidus. Ainsi, si au paragraphe 10.2.2 on essaie d'ajuster en même temps les positions des deux stations d'Haleakala (émission et réception), on trouve des corrélations entre les différentes coordonnées supérieures à 0.9999999979.

Ce cas ne peut cependant pas se produire avec les 174 paramètres du paragraphe 10.2.2, car on y a justement vérifié que chacun d'eux possédait sa propre signature dans les résidus LLR.

Toutefois, lorsque deux paramètres sont fortement corrélés (corrélation voisine de 1), la précision des observations peut être insuffisante pour distinguer leurs effets, ce qui peut générer des incertitudes et/ou des biais importants dans la détermination de leurs valeurs.

On pourrait donc imaginer une méthode de sélection, où parmi les deux paramètres les plus fortement corrélés, on supprime celui qui présente un rapport entre l'erreur formelle et sa valeur ajustée le plus important. Le problème est que ce critère ne dépend pas de la précision des données, puisque la matrice des corrélations ne dépend que de celle des dérivées partielles. Par exemple, au paragraphe 10.2.2, la corrélation entre les vitesses angulaires initiales $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ des librations de la Lune atteint 0.9999999986 ! Et pourtant, la précision des données idéales permettait d'en retrouver les bonnes valeurs à mieux que à 0.01% près.

D'autre part, il arrive que même des paramètres qui ne présentent que de faibles corrélations avec les autres soit ajustés avec des incertitudes très importantes. Par exemple, dans le tableau 13.16, le biais n° 12 présente une erreur formelle supérieure à 27 fois sa valeur ; les corrélations avec les autres paramètres ne dépassent pourtant pas 0.15.

Le fait que de fortes corrélations n'impliquent pas obligatoirement de fortes incertitudes (et inversement) n'est pas spécifique au cas particulier des données LLR utilisées ici. En annexe I sont donnés deux contre-exemples très simples dans un cadre un peu plus formel.

Pour résumer, deux paramètres fortement corrélés peuvent néanmoins être déterminés avec de faibles incertitudes si les données sont suffisamment précises, tandis que de faibles corrélations ne garantissent pas une bonne détermination. La seule analyse des corrélations ne permet donc pas de déterminer quels paramètres sont bien ou mal contraints.

10.3.4 Sélection selon le rapport σ/α

On élimine de manière itérative le paramètre dont le rapport $Q = \sigma/\alpha$ entre l'erreur formelle et la valeur ajustée est le plus grand. En effet, il est inutile d'ajuster un paramètre dont la valeur est incertaine, c'est-à-dire dont l'ajustement au LLR ne permet pas une bonne détermination. On se donne une solution de départ SOL0. On construit la solution S1, en ajustant aux observations LLR p paramètres (plusieurs itérations sont nécessaires pour compenser la non linéarité de χ^2). On repère celui qui présente le rapport Q le plus élevé et on le supprime de la liste des paramètres ajustés. On construit ensuite une solution S2 avec $p - 1$ paramètres ajustés, et ainsi de suite. Il faut néanmoins se fixer une limite et on s'arrête par exemple lorsque tous les paramètres présentent un rapport Q inférieur à 5%.

C'est la méthode qui a été retenue pour construire la solution INPOP08. Elle est illustrée plus en détail dans le paragraphe 13.2.4. Elle a l'avantage de ne pas présenter les inconvénients des deux autres décrites précédemment, c'est-à-dire que la liste des paramètres ajustés ne dépend ni des unités choisies pour les exprimer, ni de la solution de départ.

L'un de ses inconvénients (outre un volume de calculs important), est de ne pas être réversible. Si parmi les paramètres éliminés, on souhaite réintroduire celui qui présente le plus faible rapport Q , on ne retombe pas toujours sur celui qui vient juste d'être éliminé.

Cette méthode n'est donc pas sans inconvénient, mais c'est à mon avis la moins mauvaise de celles envisagées ici.

10.4 Tests de stabilité des paramètres

La solution INPOP08, décrite au chapitre 13, ajuste 59 paramètres aux observations LLR, sélectionnés selon la méthode du paragraphe 10.3.4. Leurs valeurs sont données dans les tableaux 13.11, 13.12, 13.14 et 13.15, et ne peuvent pas être dissociées des modèles dynamique et de réduction des données.

On pourrait par exemple construire une autre solution, en considérant une Lune rigide lors de la réduction des observations (nombres de Love h_2 et l_2 nuls). L'ajustement des mêmes

paramètres qu'INPOP08 conduirait alors à des valeurs légèrement différentes pour les positions des réflecteurs, mais les résidus ne seraient pas significativement changés. Cette solution ne serait ni meilleure, ni pire qu'INPOP08 (voir les paragraphes 9.3.1 et 9.3.2). Par extension, les valeurs ajustées des paramètres sont biaisées par les imperfections et lacunes inévitables des modèles.

On peut aussi s'interroger sur l'influence que peuvent avoir certaines observations sur la solution : si on avait disposé de moins de données, aurait-on obtenu les mêmes valeurs de paramètres ? On souhaite donc étudier ici comment elles varient lorsque toutes les observations ne sont pas utilisées, ou certaines plusieurs fois.

10.4.1 Suppression aléatoire de données

À partir des données conservées pour la construction d'INPOP08 (voir le paragraphe 13.2.1), on crée 1000 autres jeux d'observations en éliminant aléatoirement 10%. Pour chaque jeu, on construit une solution en ajustant les mêmes 59 paramètres qu'avec INPOP08 et en conservant les modèles dynamique et de réduction des données. Pour chaque paramètre, on obtient ainsi 1000 valeurs différentes, pour lesquelles on calcule la moyenne (μ), celles minimale (m) et maximale (M) atteintes, ainsi que l'écart-type (ϵ). Ces valeurs sont ensuite comparées à celles employées pour INPOP08, ainsi qu'à leurs erreurs formelles (σ) issues de l'ajustement par moindres carrés.

Le tableau 10.1 résume les résultats obtenus. On remarque que pour chaque paramètre :

- les valeurs moyennes restent très proches de celles ajustées, avec des différences relatives qui restent faibles (0,02% au maximum)
- les 1000 valeurs différentes restent toutes incluses dans l'intervalle $\pm 1.7\sigma$ autour de la valeur ajustée pour INPOP08
- les valeurs sont peu dispersées, avec un écart-type environ égal au tiers de l'erreur formelle

Les mêmes vérifications ont été effectuées en supprimant aléatoirement 20% des données. Les différences relatives entre les valeurs moyennes et celles d'INPOP08 augmentent faiblement à 0,033%. Les paramètres se dispersent légèrement plus, avec des rapports entre les écart-types et les erreurs formelles issues des moindres carrés qui croissent à 0,54. Ces augmentations sont normales car ces dernières sont calculées avec l'ensemble des données. Si 20% des données en avaient été supprimées lors de la construction d'INPOP08, les erreurs formelles auraient elles aussi été augmentées.

10.4.2 Suppression de données sur une période glissante

On se crée ici des jeux d'observations (233 au total) en supprimant les données sur une période de 1 an, décalée de 2 mois pour chaque jeu. Ainsi, le premier jeu est créé en supprimant toutes les données de janvier à décembre 1970, le second celles de mars 1970 à février 1971, et ainsi de suite. On construit ensuite 233 solutions ajustées sur ces jeux de données. Le choix de la période de 1 an est lié à celles des biais que l'on applique à certaines observations. Avec une période plus longue (2 ans par exemple), toutes les données impliquées dans le biais du CERGA entre fin 1996 et mi-1998 auraient été supprimées, rendant impossible son ajustement. Le décalage de 2 mois est choisi de manière à avoir un nombre significatif mais raisonnable de jeux d'observations. Les mêmes comparaisons qu'au paragraphe précédent sont effectuées et présentées dans le tableau 10.2.

On remarque que les valeurs des paramètres varient ici plus que lors de la suppression aléatoire de 10 ou 20% des données. Si les différences relatives entre les valeurs ajustées et les moyennes sur les 233 valeurs restent inférieures à 0,25%, les valeurs extrêmes atteintes sont bien supérieures.

Les plus fortes valeurs extrêmes en comparaison de l'erreur formelle sont atteintes par le biais n° 1. Il ne s'étend que sur 18 mois, et si on observe la figure 9.18, on remarque que le décalage des résidus sur cette période n'est pas rigoureusement constant. Il est donc normal que les valeurs varient en fonction des données conservées.

TABLE 10.1 – Variabilité des paramètres lors de la suppression aléatoire de 10% des données. Pour chaque paramètre, on donne les valeurs ajustées α avec INPOP08 (colonne 2) et leurs erreurs formelles 1σ (colonne 3). La colonne 4 présente l'erreur relative entre la moyenne des 1000 valeurs et celle ajustée. La colonne 5 compare les extrema atteints aux erreurs formelles. La colonne 6 donne le rapport entre l'écart-type et l'erreur formelle. Les noms des paramètres sont décrits dans les tableaux 13.11, 13.12, 13.14 et 13.15.

Paramètre	Valeurs INPOP08		Statistiques sur 1000 jeux d'observations			
	α	σ	$ (\mu - \alpha)/\mu $	$\max(M - \alpha, \alpha - m)/\sigma$	ϵ/σ	
GM_{EMB}	9.00×10^{-10}	7.19×10^{-19}	6.0×10^{-12}	0.94	0.34	
C_{20E}	-1.08×10^{-03}	1.09×10^{-09}	6.9×10^{-09}	1.08	0.33	
C_{30E}	2.88×10^{-06}	3.86×10^{-08}	1.7×10^{-04}	1.18	0.33	
τ_{21E}	1.23×10^{-02}	9.69×10^{-05}	6.0×10^{-05}	0.95	0.32	
τ_{22E}	6.98×10^{-03}	7.67×10^{-06}	8.2×10^{-06}	0.94	0.31	
C_{20M}	-2.03×10^{-04}	2.76×10^{-08}	3.3×10^{-07}	0.92	0.32	
C_{22M}	2.24×10^{-05}	2.65×10^{-09}	2.7×10^{-08}	1.01	0.32	
C_{30M}	-8.39×10^{-06}	2.28×10^{-08}	1.2×10^{-05}	1.20	0.33	
C_{31M}	3.18×10^{-05}	3.71×10^{-07}	8.2×10^{-05}	1.10	0.32	
C_{33M}	1.73×10^{-06}	6.29×10^{-09}	1.2×10^{-05}	1.08	0.32	
S_{31M}	3.29×10^{-06}	8.80×10^{-08}	1.3×10^{-05}	1.09	0.33	
S_{32M}	1.69×10^{-06}	5.66×10^{-10}	7.0×10^{-07}	1.01	0.33	
$(C/MR^2)_M$	3.93×10^{-01}	4.65×10^{-05}	2.1×10^{-08}	1.00	0.32	
k_{2M}	2.63×10^{-02}	1.70×10^{-04}	7.9×10^{-06}	0.96	0.31	
τ_M	1.89×10^{-01}	1.53×10^{-03}	9.3×10^{-06}	0.75	0.25	
Vecteur Terre-Lune à t=J2000	x	-1.95×10^{-03}	6.13×10^{-13}	2.8×10^{-12}	1.02	0.34
	y	-1.78×10^{-03}	5.51×10^{-13}	1.4×10^{-12}	1.03	0.33
	z	-5.09×10^{-04}	5.60×10^{-13}	8.6×10^{-12}	1.26	0.34
	\dot{x}	3.72×10^{-04}	1.16×10^{-13}	6.9×10^{-13}	1.12	0.34
	\dot{y}	-3.85×10^{-04}	1.32×10^{-13}	2.2×10^{-12}	1.00	0.33
	\dot{z}	-1.74×10^{-04}	1.34×10^{-13}	8.9×10^{-12}	1.05	0.36
Angles d'Euler de la Lune à t=J2000	ϕ	-5.41×10^{-02}	3.47×10^{-07}	2.1×10^{-08}	1.19	0.33
	θ	4.25×10^{-01}	1.26×10^{-07}	1.3×10^{-09}	1.10	0.33
	ψ	7.19×10^{-01}	2.19×10^{-06}	1.2×10^{-11}	1.04	0.33
	$\dot{\phi}$	-1.17×10^{-04}	7.10×10^{-08}	2.7×10^{-06}	1.11	0.33
	$\dot{\theta}$	4.53×10^{-05}	3.29×10^{-08}	2.5×10^{-06}	1.18	0.33
	$\dot{\psi}$	2.30×10^{-01}	6.47×10^{-08}	1.2×10^{-09}	1.11	0.33
Apollo XI	x	1591926.442	1.500	2.3×10^{-11}	1.07	0.33
	y	690799.570	3.460	2.3×10^{-09}	1.10	0.33
	z	21002.677	0.304	4.8×10^{-08}	1.18	0.33
Apollo XIV	x	1652725.312	1.140	7.4×10^{-10}	1.13	0.33
	y	-520893.898	3.590	2.9×10^{-09}	1.10	0.33
	z	-109731.641	0.316	9.5×10^{-09}	1.12	0.33
Apollo XV	x	1554675.817	0.277	7.8×10^{-10}	1.08	0.34
	y	98193.230	3.370	1.5×10^{-08}	1.10	0.33
	z	765004.978	0.302	1.3×10^{-09}	1.18	0.33
Lunakhod 2	x	1339316.725	1.750	3.6×10^{-10}	1.04	0.33
	y	801956.280	2.910	1.5×10^{-09}	1.10	0.33
	z	756358.527	0.266	9.7×10^{-10}	1.19	0.33
Station 01910	x	4581692.121	0.003	5.2×10^{-12}	0.95	0.31
	y	556196.024	0.001	5.3×10^{-12}	1.08	0.34
	z	4389355.016	0.010	1.9×10^{-11}	1.09	0.32
Station 71110	x	-1330781.441	0.012	7.6×10^{-12}	1.16	0.33
	y	-5328755.510	0.009	5.9×10^{-12}	1.03	0.33
	z	3235697.502	0.022	5.9×10^{-11}	1.13	0.34
Station 71111	x	-1330121.101	0.014	1.5×10^{-11}	1.05	0.33
	y	-5328532.294	0.008	3.6×10^{-12}	1.34	0.35
	z	3236146.580	0.024	2.0×10^{-11}	1.70	0.38
Station 71112	x	-1330021.433	0.002	8.3×10^{-12}	1.12	0.33
	y	-5328403.288	0.003	4.7×10^{-12}	1.08	0.31
	z	3236481.600	0.010	2.9×10^{-11}	1.10	0.33
Station 56611	x	-5466000.459	0.011	1.3×10^{-11}	1.33	0.35
	y	-2404424.716	0.013	1.2×10^{-11}	1.04	0.34
	z	2242206.724	0.028	1.3×10^{-10}	1.16	0.35
Station 70610	x	-1463998.838	0.005	1.4×10^{-11}	0.96	0.32
	y	-5166632.674	0.004	7.9×10^{-12}	1.15	0.32
	z	3435013.095	0.012	1.6×10^{-11}	1.04	0.35
Offset 01	-5.95×10^{-10}	1.18×10^{-11}	5.7×10^{-05}	1.11	0.32	
Offset 39	2.22×10^{-09}	7.93×10^{-11}	1.5×10^{-04}	1.49	0.38	

TABLE 10.2 – Variabilité des paramètres lors de la suppression de données sur une période de 1 an. Pour chaque jeu, la période est décalée de 2 mois par rapport au précédent. Pour chaque paramètre, on donne les valeurs ajustées α avec INPOP08 (colonne 2) et leurs erreurs formelles 1σ (colonne 3). La colonne 4 présente la différence relative entre la moyenne des 233 valeurs et celle ajustée. La colonne 5 compare les extrema atteints (M et m) aux erreurs formelles. La colonne 6 donne le rapport entre l'écart-type et l'erreur formelle. Les noms des paramètres sont décrits dans les tableaux 13.11, 13.12, 13.14 et 13.15.

Paramètre	Valeurs INPOP08		Statistiques sur 233 jeux d'observations			
	α	σ	$ (\mu - \alpha)/\mu $	$\max(M - \alpha, \alpha - m)/\sigma$	ϵ/σ	
GM_{EMB}	9.00×10^{-10}	7.19×10^{-19}	1.6×10^{-11}	5.35	0.90	
C_{20E}	-1.08×10^{-03}	1.09×10^{-09}	1.8×10^{-08}	4.04	0.97	
C_{30E}	2.88×10^{-06}	3.86×10^{-08}	5.7×10^{-04}	2.80	0.69	
τ_{21E}	1.23×10^{-02}	9.69×10^{-05}	8.2×10^{-05}	4.56	1.26	
τ_{22E}	6.98×10^{-03}	7.67×10^{-06}	8.9×10^{-06}	4.83	1.30	
C_{20M}	-2.03×10^{-04}	2.76×10^{-08}	4.7×10^{-06}	2.97	0.75	
C_{22M}	2.24×10^{-05}	2.65×10^{-09}	4.2×10^{-06}	2.29	0.63	
C_{30M}	-8.39×10^{-06}	2.28×10^{-08}	9.9×10^{-05}	2.97	0.76	
C_{31M}	3.18×10^{-05}	3.71×10^{-07}	1.6×10^{-04}	4.41	1.08	
C_{33M}	1.73×10^{-06}	6.29×10^{-09}	5.9×10^{-05}	3.16	0.81	
S_{31M}	3.29×10^{-06}	8.80×10^{-08}	4.2×10^{-04}	2.92	0.67	
S_{32M}	1.69×10^{-06}	5.66×10^{-10}	2.2×10^{-06}	3.66	0.71	
$(C/MR^2)_M$	3.93×10^{-01}	4.65×10^{-05}	4.2×10^{-06}	2.33	0.63	
k_{2M}	2.63×10^{-02}	1.70×10^{-04}	4.7×10^{-04}	5.17	1.15	
τ_M	1.89×10^{-01}	1.53×10^{-03}	4.2×10^{-04}	4.05	0.94	
Vecteur Terre-Lune à t=J2000	x	-1.95×10^{-03}	6.13×10^{-13}	4.6×10^{-14}	5.33	0.95
	y	-1.78×10^{-03}	5.51×10^{-13}	9.8×10^{-12}	3.58	0.71
	z	-5.09×10^{-04}	5.60×10^{-13}	4.5×10^{-11}	4.22	1.10
	\dot{x}	3.72×10^{-04}	1.16×10^{-13}	1.4×10^{-11}	4.23	0.77
	\dot{y}	-3.85×10^{-04}	1.32×10^{-13}	2.0×10^{-12}	5.34	0.96
	\dot{z}	-1.74×10^{-04}	1.34×10^{-13}	2.0×10^{-11}	2.11	0.68
Angles d'Euler de la Lune à t=J2000	ϕ	-5.41×10^{-02}	3.47×10^{-07}	2.3×10^{-07}	2.70	0.71
	θ	4.25×10^{-01}	1.26×10^{-07}	1.1×10^{-08}	3.26	0.73
	ψ	7.19×10^{-01}	2.19×10^{-06}	6.2×10^{-08}	2.75	0.67
	$\dot{\phi}$	-1.17×10^{-04}	7.10×10^{-08}	2.3×10^{-05}	3.23	0.73
	$\dot{\theta}$	4.53×10^{-05}	3.29×10^{-08}	2.6×10^{-05}	2.69	0.71
	$\dot{\psi}$	2.30×10^{-01}	6.47×10^{-08}	1.1×10^{-08}	3.23	0.73
Apollo XI	x	1591926.442	1.500	1.6×10^{-08}	2.93	0.66
	y	690799.570	3.460	7.3×10^{-08}	2.97	0.67
	z	21002.677	0.304	5.4×10^{-07}	2.90	0.72
Apollo XIV	x	1652725.312	1.140	9.5×10^{-09}	2.92	0.69
	y	-520893.898	3.590	1.0×10^{-07}	2.95	0.67
	z	-109731.641	0.316	1.1×10^{-07}	2.93	0.72
Apollo XV	x	1554675.817	0.277	6.9×10^{-09}	2.38	0.65
	y	98193.230	3.370	5.0×10^{-07}	2.97	0.67
	z	765004.978	0.302	1.5×10^{-08}	3.02	0.71
Lunakhod 2	x	1339316.725	1.750	2.5×10^{-08}	2.82	0.66
	y	801956.280	2.910	5.1×10^{-08}	2.97	0.67
	z	756358.527	0.266	1.2×10^{-08}	2.85	0.70
Station 01910	x	4581692.121	0.003	4.4×10^{-12}	1.57	0.33
	y	556196.024	0.001	1.4×10^{-11}	2.23	0.54
	z	4389355.016	0.010	6.1×10^{-11}	2.35	0.67
Station 71110	x	-1330781.441	0.012	7.0×10^{-11}	2.25	0.60
	y	-5328755.510	0.009	6.4×10^{-11}	4.07	1.08
	z	3235697.502	0.022	1.2×10^{-10}	2.96	0.63
Station 71111	x	-1330121.101	0.014	1.8×10^{-10}	4.49	0.63
	y	-5328532.294	0.008	1.6×10^{-11}	2.19	0.48
	z	3236146.580	0.024	4.4×10^{-11}	1.81	0.37
Station 71112	x	-1330021.433	0.002	5.4×10^{-12}	1.38	0.37
	y	-5328403.288	0.003	9.6×10^{-12}	1.86	0.51
	z	3236481.600	0.010	1.7×10^{-10}	2.07	0.60
Station 56611	x	-5466000.459	0.011	2.4×10^{-11}	3.22	0.68
	y	-2404424.716	0.013	8.0×10^{-11}	2.84	0.59
	z	2242206.724	0.028	7.5×10^{-10}	2.89	0.70
Station 70610	x	-1463998.838	0.005	1.7×10^{-10}	2.76	0.49
	y	-5166632.674	0.004	7.0×10^{-12}	3.16	0.66
	z	3435013.095	0.012	4.3×10^{-11}	3.25	0.76
Offset 01	-5.95×10^{-10}	1.18×10^{-11}	2.5×10^{-03}	12.23	1.49	
Offset 39	2.22×10^{-09}	7.93×10^{-11}	3.9×10^{-05}	3.58	0.74	

Pour les autres paramètres, les valeurs extrêmes sont atteintes lorsqu'on commence à supprimer les données à partir de 1984. C'est à partir de cette période que la précision s'améliore avec les premières observations effectuées au CERGA, et où leur nombre par an augmente. Par exemple, près de 1100 données sont disponibles pour l'année 1996, ce qui représente plus de 6% du nombre total d'observations utilisées pour l'ajustement d'INPOP08, de surcroît parmi les plus précises. Sans elles, les paramètres sont logiquement moins bien contraints. Mais il est rassurant de constater que les valeurs extrêmes ne diffèrent de la valeur ajustée avec INPOP08 que rarement de plus de 5 fois l'erreur formelle.

Concernant les écart-types, il restent limités à moins de 2 fois l'erreur formelle et sont même souvent inférieurs à cette dernière.

10.4.3 Test “bootstrap”

La méthode du “bootstrap” (Efron, 1987) consiste à construire des jeux d'observations en effectuant un tirage aléatoire avec remise parmi les données disponibles. Ainsi, si certaines sont éliminées, d'autres peuvent être comptées plusieurs fois. Si le nombre de jeux d'observations construits est élevé, cette méthode permet de fournir des estimations des paramètres non biaisées par les observations et d'en estimer aussi les incertitudes. On construit donc 1000 solutions par ajustement des 59 paramètres d'INPOP08 sur 1000 jeux d'observations. Les mêmes comparaisons que pour les deux tests précédents sont présentées dans le tableau 10.3.

On remarque que les valeurs moyennes obtenues pour ces 1000 jeux de paramètres s'écartent légèrement plus de celles ajustées par INPOP08 que lors des deux tests précédents, avec un maximum de 0,52% atteint pour le biais n° 39. En ce qui concerne les valeurs extrêmes atteintes, elles ne sont pas supérieures à celles que l'on avait obtenues avec la suppression des données sur une période glissante. Quant à la dispersion des valeurs, elle peut atteindre 2,2 fois l'erreur formelle issue des moindres carrés, ce qui indique que cette dernière est souvent sous-estimée, peut-être en raison de la forme particulière des résidus du CERGA (voir le paragraphe 13.4.2). Mais un facteur 2 reste raisonnable, surtout qu'il n'est dépassé que pour des paramètres dont le rapport entre l'erreur formelle et la valeur est inférieur à 10^{-9} , c'est-à-dire bien contraints.

10.4.4 Conclusion

Ces trois tests montrent que les valeurs ajustées des paramètres de la solution INPOP08 restent stables, même lorsque toutes les données ne sont pas utilisées ou certaines comptées plusieurs fois. On en déduit que, si des biais sont introduits par les observations, ils sont certainement faibles.

Les tests effectués ici ne permettent cependant pas de garantir qu'aucun biais n'est introduit par des lacunes éventuelles dans les modèles dynamique ou de réduction des données. Il est d'ailleurs probable que ces derniers soient supérieurs à ceux induits par les mesures, comme l'indiquent par exemple les ajustements des coordonnées des réflecteurs différentes entre INPOP08 et DE421 (voir le paragraphe 13.3.1.2).

TABLE 10.3 – Variabilité des paramètres lors du test du “bootstrap”, où 1000 jeux de données sont construits par tirage aléatoire avec remise des observations. Pour chaque paramètre, on donne les valeurs ajustées α avec INPOP08 (colonne 2) et leurs erreurs formelles 1σ (colonne 3). La colonne 4 présente les différences relatives entre la moyenne des 1000 valeurs et celle ajustée. La colonne 5 compare les extrema atteints aux erreurs formelles. La colonne 6 donne le rapport entre l'écart-type et l'erreur formelle. Les noms des paramètres sont décrits dans les tableaux 13.11, 13.12, 13.14 et 13.15.

Paramètre	Valeurs INPOP08		Statistiques sur 1000 jeux d'observations			
	α	σ	$ (\mu - \alpha)/\mu $	$\max(M - \alpha, \alpha - m)/\sigma$	ϵ/σ	
GM_{EMB}	9.00×10^{-10}	7.19×10^{-19}	1.4×10^{-11}	4.97	2.04	
C_{20E}	-1.08×10^{-03}	1.09×10^{-09}	1.8×10^{-07}	4.05	1.20	
C_{30E}	2.88×10^{-06}	3.86×10^{-08}	3.6×10^{-03}	5.18	1.84	
τ_{21E}	1.23×10^{-02}	9.69×10^{-05}	1.8×10^{-03}	3.79	1.43	
τ_{22E}	6.98×10^{-03}	7.67×10^{-06}	2.6×10^{-04}	3.88	1.46	
C_{20M}	-2.03×10^{-04}	2.76×10^{-08}	9.6×10^{-07}	4.54	1.59	
C_{22M}	2.24×10^{-05}	2.65×10^{-09}	2.5×10^{-06}	4.40	1.55	
C_{30M}	-8.39×10^{-06}	2.28×10^{-08}	4.8×10^{-04}	4.68	1.78	
C_{31M}	3.18×10^{-05}	3.71×10^{-07}	3.3×10^{-04}	4.95	1.57	
C_{33M}	1.73×10^{-06}	6.29×10^{-09}	1.8×10^{-05}	6.33	1.80	
S_{31M}	3.29×10^{-06}	8.80×10^{-08}	4.8×10^{-03}	3.65	1.31	
S_{32M}	1.69×10^{-06}	5.66×10^{-10}	7.0×10^{-06}	4.51	1.54	
$(C/MR^2)_M$	3.93×10^{-01}	4.65×10^{-05}	2.3×10^{-06}	4.39	1.55	
k_{2M}	2.63×10^{-02}	1.70×10^{-04}	5.7×10^{-04}	4.11	1.54	
τ_M	1.89×10^{-01}	1.53×10^{-03}	6.3×10^{-04}	3.30	1.26	
Vecteur Terre-Lune à t=J2000	x	-1.95×10^{-03}	6.13×10^{-13}	3.0×10^{-11}	4.74	1.73
	y	-1.78×10^{-03}	5.51×10^{-13}	3.8×10^{-11}	4.47	1.98
	z	-5.09×10^{-04}	5.60×10^{-13}	7.5×10^{-11}	4.17	1.30
	\dot{x}	3.72×10^{-04}	1.16×10^{-13}	2.3×10^{-11}	4.87	2.17
	\dot{y}	-3.85×10^{-04}	1.32×10^{-13}	3.1×10^{-11}	5.39	1.74
	\dot{z}	-1.74×10^{-04}	1.34×10^{-13}	2.5×10^{-11}	3.74	1.35
Angles d'Euler de la Lune à t=J2000	ϕ	-5.41×10^{-02}	3.47×10^{-07}	1.0×10^{-06}	4.31	1.74
	θ	4.25×10^{-01}	1.26×10^{-07}	4.0×10^{-08}	4.17	1.72
	ψ	7.19×10^{-01}	2.19×10^{-06}	4.8×10^{-07}	3.67	1.30
	$\dot{\phi}$	-1.17×10^{-04}	7.10×10^{-08}	8.1×10^{-05}	4.14	1.72
	$\dot{\theta}$	4.53×10^{-05}	3.29×10^{-08}	1.1×10^{-04}	4.30	1.72
	$\dot{\psi}$	2.30×10^{-01}	6.47×10^{-08}	3.7×10^{-08}	4.15	1.72
Apollo XI	x	1591926.442	1.500	1.7×10^{-07}	3.83	1.35
	y	690799.570	3.460	8.9×10^{-07}	3.67	1.30
	z	21002.677	0.304	2.0×10^{-06}	4.24	1.73
Apollo XIV	x	1652725.312	1.140	1.2×10^{-07}	3.58	1.26
	y	-520893.898	3.590	1.2×10^{-06}	3.66	1.30
	z	-109731.641	0.316	3.8×10^{-07}	4.08	1.72
Apollo XV	x	1554675.817	0.277	1.0×10^{-08}	4.41	1.33
	y	98193.230	3.370	6.2×10^{-06}	3.68	1.30
	z	765004.978	0.302	5.9×10^{-08}	4.03	1.78
Lunakhod 2	x	1339316.725	1.750	2.2×10^{-07}	3.79	1.33
	y	801956.280	2.910	6.5×10^{-07}	3.67	1.30
	z	756358.527	0.266	5.2×10^{-08}	4.33	1.80
Station 01910	x	4581692.121	0.003	1.0×10^{-11}	3.83	1.44
	y	556196.024	0.001	3.4×10^{-11}	4.24	1.61
	z	4389355.016	0.010	4.2×10^{-10}	4.30	1.58
Station 71110	x	-1330781.441	0.012	1.3×10^{-09}	3.42	1.25
	y	-5328755.510	0.009	9.5×10^{-11}	3.78	1.31
	z	3235697.502	0.022	7.0×10^{-10}	3.56	1.58
Station 71111	x	-1330121.101	0.014	4.2×10^{-10}	4.41	1.48
	y	-5328532.294	0.008	1.4×10^{-11}	2.99	1.06
	z	3236146.580	0.024	6.0×10^{-10}	4.85	1.63
Station 71112	x	-1330021.433	0.002	3.3×10^{-10}	4.54	1.67
	y	-5328403.288	0.003	1.3×10^{-11}	3.46	1.27
	z	3236481.600	0.010	8.4×10^{-10}	4.41	1.66
Station 56611	x	-5466000.459	0.011	1.4×10^{-10}	4.56	1.58
	y	-2404424.716	0.013	1.7×10^{-10}	4.57	1.59
	z	2242206.724	0.028	3.2×10^{-10}	5.71	1.76
Station 70610	x	-1463998.838	0.005	2.1×10^{-10}	4.25	1.61
	y	-5166632.674	0.004	5.6×10^{-11}	3.16	1.20
	z	3435013.095	0.012	6.0×10^{-10}	6.29	1.95
Offset 01	-5.95×10^{-10}	1.18×10^{-11}	2.9×10^{-03}	4.10	1.45	
Offset 39	2.22×10^{-09}	7.93×10^{-11}	5.2×10^{-03}	4.95	1.72	

Troisième partie

Solutions INPOP successives

Chapitre 11

INPOP05

L'objectif avec INPOP05 était de s'assurer de la validité du modèle dynamique. Cette solution a été construite de manière à reproduire le plus fidèlement possible la solution planétaire DE405 du Jet Propulsion Laboratory (JPL), avec un modèle dynamique aussi proche que possible et les mêmes valeurs de paramètres et conditions initiales.

Lorsque ce travail a commencé, il n'existait pas de description vraiment complète de la manière avec laquelle DE405 avait été calculée. Tout ce dont on disposait était la solution DE405 en elle-même, c'est-à-dire la solution interpolée (polynômes de Tchebychev) à partir de l'intégration numérique. On disposait également de l'article (Newhall et al., 1983), bien détaillé, décrivant la manière d'obtenir les anciennes solutions DE102, DE118 et DE200 (cette dernière est une simple rotation de DE118, de l'équateur B1950 vers l'équateur J2000). Ensuite, (Standish et al., 1995) et (Standish, 1998) donnaient une description très générale des solutions DE403 et DE405.

Plus récemment, Standish & Williams (2006) ont fourni plus de détails sur la construction de la solution DE405, en particulier sur son modèle dynamique. (Standish & Williams, 2006) semble d'ailleurs être une version réactualisée du chapitre 5 de l'*Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac* de Seidelmann (1992).

Enfin, un programme écrit par Moshier (1992) et destiné à retrouver la solution DE200 a également été très utile. Même si tout le code source d'INPOP est original, avoir des solutions de référence pour comparaisons a permis de vérifier plus facilement l'implémentation des différentes procédures.

La représentation d'INPOP05 sous forme de polynômes de Tchebychev n'a jamais été diffusée, même si elle a été brièvement décrite dans (Fienga et al., 2008). Les différents changements dynamiques à ajouter à partir du modèle de DE200 sont décrits dans le paragraphe 11.1. Ses comparaisons à DE405 sur les éléments elliptiques sont effectuées au paragraphe 11.2. Enfin, un troisième paragraphe 11.3 présente quelques développements postérieurs à la parution de (Fienga et al., 2008) et qui permettent de réduire encore les différences entre INPOP05 et DE405.

11.1 Construction d'INPOP05

Cette partie décrit le processus de construction d'INPOP05. La démarche consistait à partir d'un modèle dynamique proche de DE200 et d'ajouter au fur et à mesure les changements apportés dans DE405. Les différentes étapes et solutions intermédiaires sont résumées dans le tableau 11.1 et détaillées dans les paragraphes qui suivent.

Dans toute cette partie (sauf mention contraire), les comparaisons entre les différentes solutions seront effectuées sur une période de 100 ans autour de J2000 et porteront sur les éléments

TABLE 11.1 – Résumé des différentes solutions INPOP intermédiaires. INPOP05 correspond à la version INPOP04i.

INPOP04a	modèle d'interactions DE200 avec les constantes DE405
INPOP04b	ajustement de la phase et du demi-grand axe de la Lune
INPOP04c	ajout de 295 astéroïdes, dont la modélisation est proche de celle de DE405
INPOP04d	introduction du J_2 solaire
INPOP04e	introduction de la déformation de la Lune
INPOP04f	J_2 de la Lune cohérent avec celui de DE405
INPOP04g	modèle de déformation de la Terre conforme à DE405
INPOP04h	changement de la précession (Williams, 1994)
INPOP04i	ajout de l'interaction forme-forme entre la Terre et la Lune

elliptiques (héliocentriques pour les planètes, géocentriques pour la Lune), exprimés dans l'écliptique J2000 :

- a : demi-grand axe
- λ : longitude moyenne
- e : excentricité
- i : inclinaison
- Ω : longitude du nœud
- ϖ : longitude du périhélie (ou du périégée pour la Lune)

L'avantage des éléments elliptiques est qu'ils sont constants dans le problème des deux corps ; seule la longitude moyenne varie linéairement. Dans le cas d'interactions plus complexes, mais dont le terme principal reste l'attraction du Soleil, les variations sont plus faciles à interpréter que celles des coordonnées cartésiennes, qui sont des fonctions "périodiques" du temps.

Le but étant de retrouver DE405, une bonne solution présentera de faibles différences avec DE405, même si certaines incohérences doivent être introduites (voir le paragraphe 11.1.2). Pour chacun des changements apportés, les courbes noires présenteront les différences avec DE405 avant modification, et les grises celles après modification.

11.1.1 INPOP04a-INPOP04b

Une première solution, notée INPOP04a, est construite sur le modèle des interactions de DE200. Son modèle dynamique est décrit dans l'article de Newhall et al. (1983), et tient compte :

- des interactions newtoniennes entre les planètes et 5 astéroïdes
- des corrections relativistes entre les planètes
- des interactions entre la forme de la Terre et la Lune et le Soleil (considérés ponctuels)
- des interactions entre la forme de la Lune et la Terre et le Soleil (considérés ponctuels)
- de l'interaction entre la déformation de la Terre générée par la Lune et la Lune

Les paramètres et conditions initiales sont ensuite imposés égaux à ceux de DE405 (issus du fichier header.405 pour les paramètres, de l'appel à la solution interpolée à la date J2000 pour les conditions initiales). Comme le modèle de déformation de la Terre est différent entre DE200 et DE405 (voir le paragraphe 11.1.6), le nombre de Love k_E de la Terre, ainsi que l'angle de déphasage δ_E ne sont pas disponibles dans les constantes DE405. Ils seront dans un premier temps imposés égaux à ceux de DE200 : $k_E = 0.30$ et $\delta_E = 4.0700012 \times 10^{-2}$ jour.

Un autre problème est la non cohérence entre les valeurs de C_{20} , C_{22} , β_L et γ_L de la Lune imposées par DE405 (voir au paragraphe 11.1.5 pour plus de détails). On ne reprend pour l'instant que les valeurs de C_{20} et de C_{22} du fichier header.405. Puis, à la place de β ou γ comme troisième paramètre indépendant, on reprend la valeur de C/MR^2 (moment d'inertie C de la Lune, divisé par sa masse M et le carré de son rayon équatorial moyen R) du programme de Moshier (1992).

TABLE 11.2 – Valeurs des paramètres pour les solutions DE405, INPOP04a et INPOP04b. k_E et δ_E sont respectivement le nombre de Love et l’angle de déphasage de la Terre (en jour), C_{20} et C_{22} sont les coefficients du potentiel de la Lune, C/MR^2 est son moment d’inertie C divisé par sa masse M et par le carré de son rayon équatorial moyen R , $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sont les conditions initiales (à J2000) du vecteur Terre-Lune, en UA et UA/jour (la valeur de l’UA de DE405 est de 149 597 870,691 km).

	DE405	INPOP04a	INPOP04b
k_E	non disponible	0.3	0.3
δ_E	non disponible	4.0700012×10^{-2}	$4.394915056967 \times 10^{-2}$
C_{20} (Lune)	$-2.04312006654653 \times 10^{-4}$	idem DE405	idem DE405
C_{22} (Lune)	$2.251782439166225 \times 10^{-5}$	idem DE405	idem DE405
C/MR^2 (Lune)	non disponible	0.390689526 (Moshier, 1992)	0.390689526 (Moshier,1992)
x	$-1.94928167834370 \times 10^{-3}$	idem DE405	$-1.94928167833554 \times 10^{-3}$
y	$-1.78289188212002 \times 10^{-3}$	idem DE405	$-1.78289188211256 \times 10^{-3}$
z	$-5.08713666656353 \times 10^{-4}$	idem DE405	$-5.08713666654224 \times 10^{-4}$
\dot{x}	$+3.71670468455886 \times 10^{-4}$	idem DE405	$+3.71670468456664 \times 10^{-4}$
\dot{y}	$-3.84697834475156 \times 10^{-4}$	idem DE405	$-3.84697834475961 \times 10^{-4}$
\dot{z}	$-1.74030157853646 \times 10^{-4}$	idem DE405	$-1.74030157854010 \times 10^{-4}$

Lorsqu’on compare INPOP04a à DE405, on observe une importante dérive quadratique de la longitude de la Lune (courbes noires de la figure 11.1). Cette dérive peut être compensée par un ajustement de l’angle de déphasage δ_E . De la même manière, une dérive linéaire (invisible ici car masquée par le terme quadratique plus important) peut également être compensée par un ajustement du demi-grand axe initial a de la Lune. Avec la version INPOP04b, on s’autorise *temporairement* (et jusqu’à la version INPOP04f comprise) ces ajustements de paramètres, dans la mesure où on sait que les modèles de déformation de la Terre diffèrent entre INPOP04a et DE405. Les différentes valeurs adoptées sont résumées dans le tableau 11.2.

Les courbes de la figure 11.1 montrent les améliorations apportées sur la longitude moyenne, le demi-grand axe, l’excentricité et la longitude du périégée de la Lune. L’inclinaison et la longitude du nœud ne présentent certes pas de réduction des différences, mais un signal moins bruité.

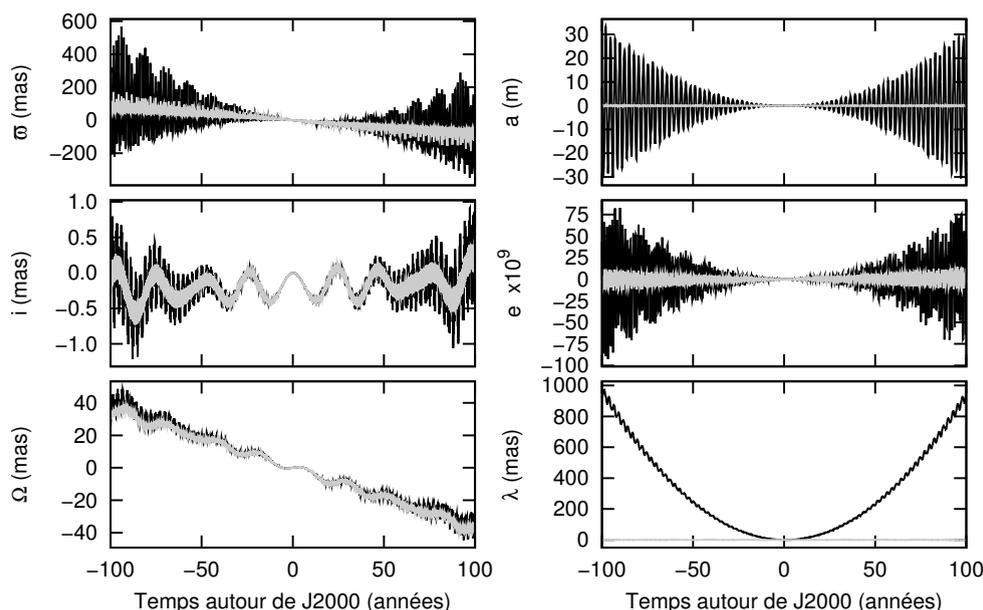


FIGURE 11.1 – Améliorations de la Lune apportées par l’ajustement de l’angle de déphasage δ_E et du demi-grand axe initial a de la Lune.

11.1.2 Perturbations des astéroïdes

Dans le Système solaire de DE200, seuls 5 astéroïdes étaient pris en compte : Cérés (1), Pallas (2), Vesta (4), Iris (7), et Bamberga (324). Leurs équations du mouvement ne sont pas intégrées en même temps que celles des planètes. Ils sont supposés rester sur des orbites képlériennes, déterminées avec une solution planétaire préliminaire. C'est d'ailleurs de cette manière qu'il sont pris en compte dans la solution de Moshier (1992).

Le Système solaire de DE405 quant à lui, compte au total 300 astéroïdes, déterminés par Williams (1984) pour être ceux dont l'influence sur la trajectoire de Mars est la plus importante. Ils sont répartis en deux groupes :

- le premier est composé de Cérés, Pallas et Vesta. Les valeurs de leurs GMs (produits de la constante de la gravitation par leur masse) sont imposées individuellement et sont disponibles dans le fichier header.405
- le second regroupe les 297 astéroïdes restants, eux-mêmes divisés en 3 sous-groupes, selon leurs masses volumiques (classes taxonomiques C,S ou M, dont les valeurs sont données dans le fichier header.405).

Ils sont pris en compte de la manière suivante pour la construction de DE405 :

1. On dispose d'une solution planétaire préliminaire (DE200 ou DE403 par exemple).
2. Avec cette solution, on intègre les équations du mouvement des 3 astéroïdes Cérés, Pallas et Vesta, soumis aux perturbations mutuelles ainsi que planétaires.
3. Une fois les trajectoires calculées, on construit des polynômes d'interpolation pour un usage ultérieur.
4. Avec la solution préliminaire, ainsi que des trajectoires des 3 gros astéroïdes, on calcule celles des 297 autres, en tenant compte des perturbations des planètes et des 3 gros astéroïdes.
5. À la différence des 3 gros astéroïdes, ce qui est conservé pour la suite n'est pas la trajectoire de chacun des 297 astéroïdes, mais, pour chaque classe taxonomique, la somme des forces exercées sur la Terre, la Lune et Mars, ainsi que la contribution au barycentre du Système solaire.
6. Enfin, connaissant les trajectoires des 3 gros astéroïdes, ainsi que les forces exercées sur la Terre, la Lune et Mars, la solution DE405 est obtenue en intégrant les équations du mouvement des planètes soumises (entre autres) aux perturbations mutuelles, au forçage des trois gros astéroïdes (sur leurs orbites fixées), et au forçage des 297 autres astéroïdes.

Au contraire, les astéroïdes d'INPOP sont intégrés en même temps que les planètes, c'est-à-dire que leurs positions-vitesses font partie du vecteur d'état (qu'il est nécessaire d'initialiser à la date origine des intégrations). Pour que les perturbations des astéroïdes dans INPOP soient cependant les plus proches possible de celles de DE405, les 300 astéroïdes ont également été divisés en les deux mêmes groupes, mais leur prise en compte diffère. Pour Cérés, Pallas et Vesta, on tient compte des interactions ponctuelles newtoniennes mutuelles et avec les planètes. Pour les 297 autres astéroïdes, ils subissent les forces newtoniennes exercées par les planètes, mais en réaction ne perturberont que la Terre, Mars et la Lune. Il en résulte une certaine incohérence, mais nécessaire pour retrouver les trajectoires des planètes extérieures de DE405 (voir le paragraphe 12.1.1, et en particulier le tableau 12.1). Le schéma de la figure 11.2 résume les interactions ponctuelles dans DE405 (à gauche) et INPOP05 (à droite).

Le tableau 11.3 résume les améliorations apportées par l'ajout des 295 astéroïdes. La première colonne donne les différences entre INPOP04b et INPOP04c et permet de mesurer l'effet de l'ajout des 295 astéroïdes. La comparaison des deuxième (INPOP04b-DE405) et troisième (INPOP04c-DE405) colonnes permet de quantifier les éventuelles améliorations apportées.

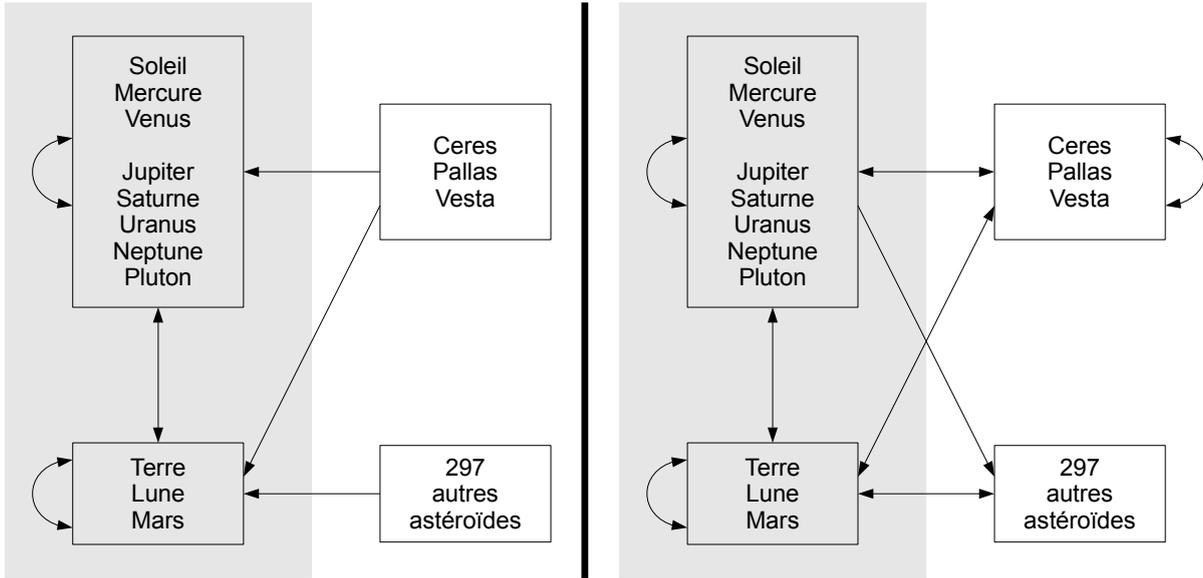


FIGURE 11.2 – Schéma des interactions ponctuelles dans DE405 (à gauche) et INPOP05 (à droite). Les flèches indiquent les sens des perturbations newtoniennes (voir l’expression 1.3). La zone grisée indique les corps pour lesquels on tient compte des corrections de relativité générale (voir l’expression 1.12).

Les améliorations des éléments elliptiques sont importantes pour Mars et toutes les planètes extérieures. On peut en voir une illustration avec les courbes des figures 11.3 (Jupiter) et 11.4 (Mars).

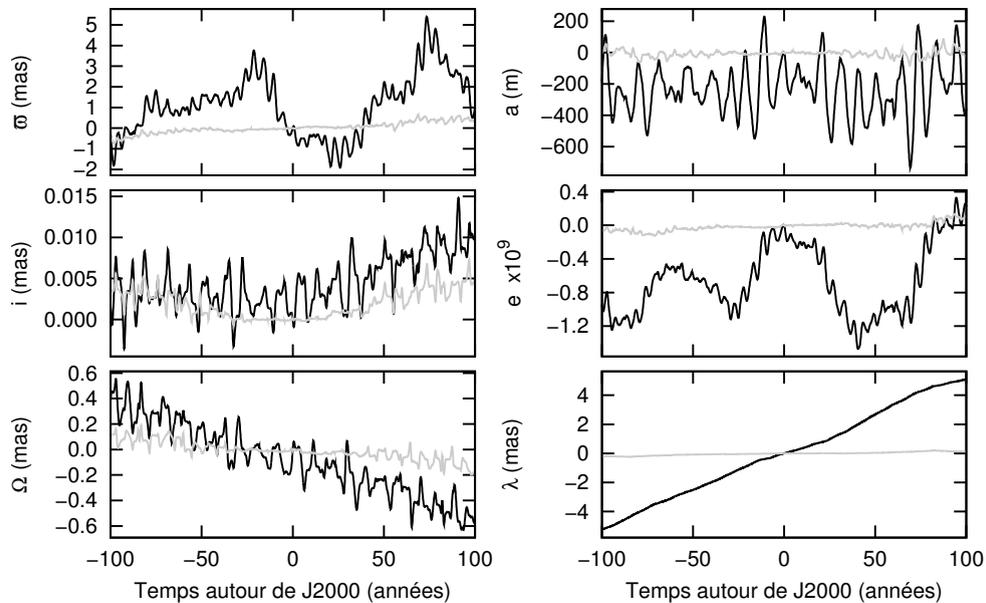


FIGURE 11.3 – Améliorations apportées par l’ajout des 295 astéroïdes sur les éléments elliptiques de Jupiter.

Pour les autres planètes intérieures, le bilan est plus nuancé :

- pour Mercure, les écarts entre INPOP04b et INPOP04c, sans être négligeables, sont assez faibles. Même si on observe une légère dégradation lorsqu’on compare INPOP04c à DE405, elle n’est pas vraiment significative.

TABLE 11.3 – Améliorations sur les positions héliocentriques des planètes (ou géocentrique pour la Lune) apportées par l’ajout de 295 astéroïdes. Avec \vec{r}_b , \vec{r}_c et \vec{r}_{405} les vecteurs Soleil-Planète (ou Terre-Lune selon le cas) calculés respectivement avec les solutions INPOP04b, INPOP04c et DE405, les première, deuxième et troisième colonnes contiennent le maximum de $\|\vec{r}_b - \vec{r}_c\|$ (respectivement $\|\vec{r}_b - \vec{r}_{405}\|$ et $\|\vec{r}_c - \vec{r}_{405}\|$) sur 100 ans de part et d’autre de J2000. Les résultats sont exprimés en mètres.

Planète	I04b-I04c	I04b-DE405	I04c-DE405
Mercure	387	11408	11672
Vénus	1263	1970	2999
Barycentre Terre-Lune	2560	1486	1425
Mars	7950	11004	5946
Jupiter	19810	20550	972
Saturne	9285	9563	300
Uranus	1360	1483	174
Neptune	3984	4291	311
Pluton	6691	6841	266
Lune géocentrique	1	21	20

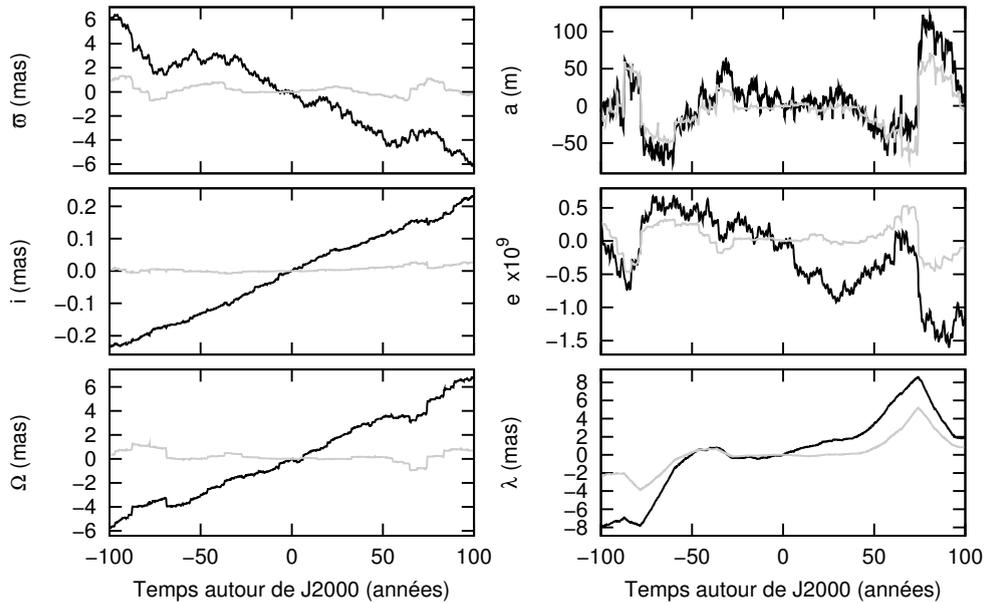


FIGURE 11.4 – Améliorations apportées par l’ajout des 295 astéroïdes sur les éléments elliptiques de Mars.

- pour Vénus, on observe une nette dégradation de la solution. Les courbes de la figure 11.5 montrent qu’elle est principalement due à une dérive plus importante dans la longitude moyenne. Le demi-grand axe et l’excentricité sont néanmoins grandement améliorés. La dérive dans la longitude du périhélie est toujours présente, mais le signal est moins bruité. L’inclinaison est inchangée tandis qu’une légère dérive linéaire est introduite dans la longitude du nœud.
- enfin, pour le barycentre Terre-Lune, les différences de plus de 2 kilomètres ne se retrouvent pas dans les comparaisons d’INPOP04b et INPOP04c à DE405. La légère amélioration n’est pas significative.

TABLE 11.4 – Valeurs des paramètres pour les solutions DE405, INPOP04c et INPOP04d. J_2 est le coefficient zonal de degré 2 du potentiel du Soleil, α_s et δ_s sont respectivement les angles de précession et nutation propre de l'équateur solaire (exprimés en degrés).

	DE405	INPOP04c	INPOP04d
J_2	2.0×10^{-7}	sans objet	idem DE405
α_s	inconnu	sans objet	286.13°
δ_s	inconnu	sans objet	63.87°

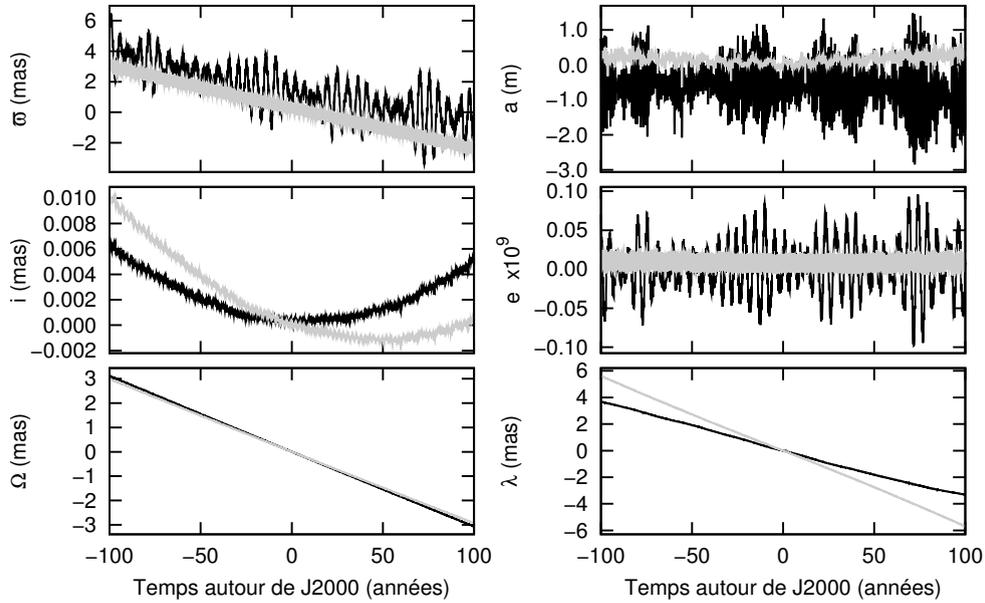


FIGURE 11.5 – Améliorations apportées par l'ajout des 295 astéroïdes sur les éléments elliptiques de Vénus.

11.1.3 J_2 solaire

Dans DE200, le Soleil était considéré ponctuel. Ce n'est plus le cas avec DE405, qui tient compte des perturbations dues à la partie non sphérique de son potentiel. La valeur de $J_2 = 2.0 \times 10^{-7}$ est donnée dans le fichier header.405; celle $J_2 = 0$ de (Standish & Williams, 2006, Tab. 8.8.3) est sûrement une erreur de copie, car l'introduction du J_2 solaire est justement l'un des changements majeurs entre DE403 et DE405. Par contre, ni les coordonnées de son pôle, ni les corps ponctuels avec lesquels il interagit ne sont indiqués.

On reprend donc dans INPOP04d la même valeur de J_2 solaire que dans le header.405. Pour le pôle, on choisit de prendre les valeurs publiées dans l'introduction aux éphémérides astronomiques : α_s et δ_s sont respectivement les angles d'Euler (angle de précession et angle de nutation propre, équivalents de ϕ et θ de la figure 3.1) de la position de l'équateur solaire dans le repère d'intégration. Le tableau 11.4 contient les valeurs utilisées.

On choisit également de faire interagir le J_2 du Soleil avec toutes les planètes, même si on peut déjà supposer que son effet sur les planètes éloignées sera négligeable. Le tableau 11.5 résume les améliorations apportées par la prise en compte du J_2 solaire. Comme on peut le remarquer, son effet sur les planètes extérieures est négligeable, et la légère dégradation obtenue pour Jupiter et Saturne n'est pas significative.

TABLE 11.5 – Améliorations sur les positions héliocentriques des planètes (ou géocentrique pour la Lune) apportées par la prise en compte du J_2 solaire. Avec \vec{r}_c , \vec{r}_d et \vec{r}_{405} les vecteurs Soleil-Planète (ou Terre-Lune selon le cas) calculés respectivement avec les solutions INPOP04c, INPOP04d et DE405, les première, deuxième et troisième colonnes contiennent le maximum de $\|\vec{r}_c - \vec{r}_d\|$ (respectivement $\|\vec{r}_c - \vec{r}_{405}\|$ et $\|\vec{r}_d - \vec{r}_{405}\|$) sur 100 ans de part et d'autre de J2000. Les résultats sont exprimés en mètres.

Planète	I04c-I04d	I04c-DE405	I04d-DE405
Mercure	11573	11672	146
Vénus	2746	2999	255
Barycentre Terre-Lune	1239	1425	191
Mars	490	5946	6305
Jupiter	21	972	991
Saturne	5	300	304
Uranus	1	174	174
Neptune	0	311	310
Pluton	0	266	266
Lune géocentrique	1	20	21

L'effet sur Mars, sans être négligeable, reste néanmoins limité. Là encore, on observe une légère dégradation ; on peut donc se demander si DE405 tient compte de l'effet du J_2 solaire sur les planètes au-delà de Mars inclus. L'amélioration est par contre très importante pour Mercure et Vénus (voir les courbes des figures 11.6 et 11.7). Il reste néanmoins un signal quadratique important sur l'inclinaison de Vénus, et une explication de cette dérive est donnée au chapitre 11.3. Le barycentre Terre-Lune a lui aussi été grandement amélioré, même si moins spectaculairement (voir les courbes de la figure 11.8). À noter la forme particulière du signal dans le nœud, autour de J2000 ; comme les comparaisons sont effectuées dans l'écliptique J2000, l'inclinaison est proche de zero autour de J2000 et le nœud est mal défini. Lorsque les comparaisons sont faites dans l'ICRF, on obtient un signal plus régulier et fortement réduit, comme illustré par les courbes des figures 11.26 et 11.27.

11.1.4 Déformation de la Lune

Dans la solution DE200, la Lune était considérée rigide. Avec DE405 est introduite la prise en compte de la déformation de la Lune due aux marées solides générées par la Terre et celle due aux variations de son spin.

La déformation de la Lune est prise en compte de la manière suivante dans INPOP04e :

1. à l'instant t , on dispose des coefficients du potentiel de la "partie rigide" de la Lune
2. du vecteur d'état à l'instant t , on estime la position déphasée à l'instant $t - \tau_M$ du vecteur Lune-Terre avec la méthode exposée au paragraphe 6.1.6
3. du vecteur d'état à l'instant t , on estime la valeur déphasée à $t - \tau_M$ du vecteur instantané de rotation de la Lune avec la méthode exposée au paragraphe 6.2.4
4. avec ces quantités déphasées, on calcule les variations des coefficients du potentiel de la Lune (on se limite au degré 2) dues aux effets de marées solides générées par la Terre (voir l'expression 4.12) et celles dues aux variations du spin (voir 4.27)
5. les développements vus aux chapitres 2.3 et 2.4 permettent ensuite de déterminer les vecteurs accélérations de la Lune et des corps perturbateurs (Terre, Soleil, Jupiter et Vénus), ainsi que les moments qui s'exercent sur la Lune.

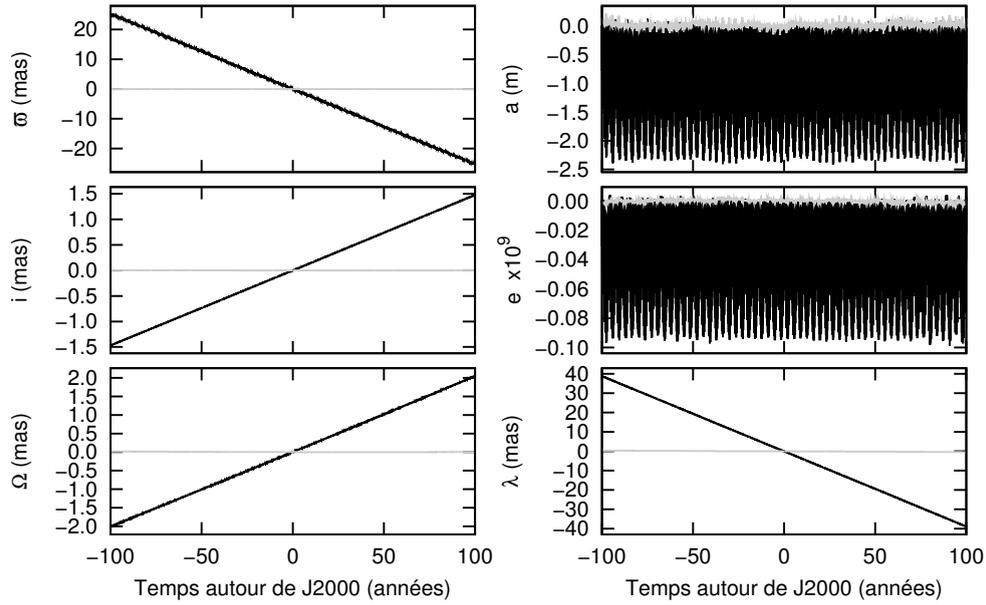


FIGURE 11.6 – Améliorations apportées par la prise en compte du J_2 solaire sur Mercure.

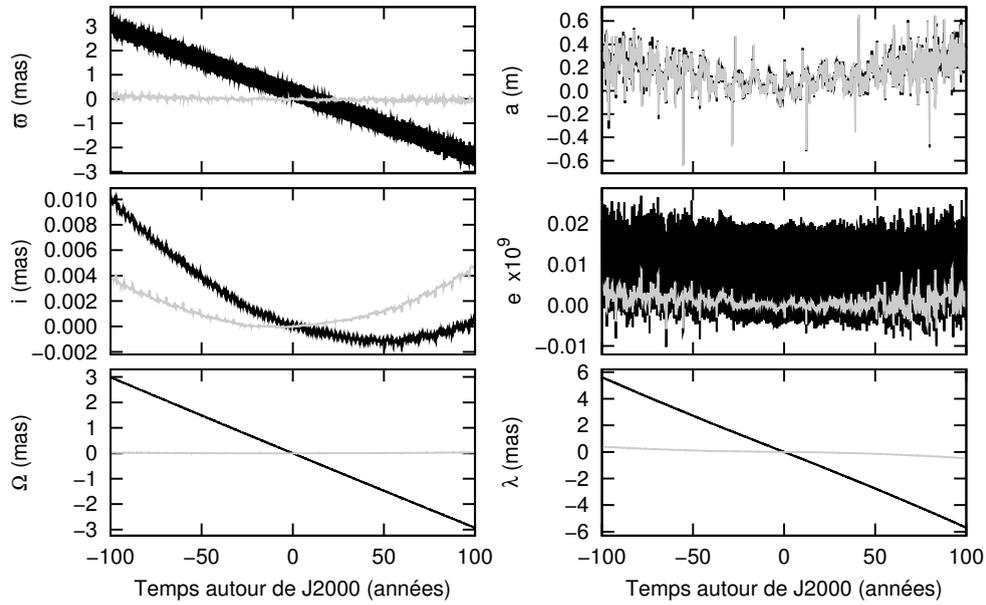


FIGURE 11.7 – Améliorations apportées par la prise en compte du J_2 solaire sur Vénus.

6. des variations des coefficients du potentiel, on en déduit celles de la matrice d'inertie (4.34), ainsi que de sa dérivée (4.41 et 4.42)
7. enfin, l'équation d'Euler 4.28 est résolue pour déduire les dérivées secondes des angles de libration

Les valeurs de k_2 (nombre de Love de la Lune) et τ_M (temps de déphasage) sont issues du fichier header.405 et sont données dans le tableau 11.6.

Le premier effet de la prise en compte de la déformation de la Lune est d'induire une dérive quadratique dans sa longitude moyenne. Comme au paragraphe 11.1.1 (la modélisation de la déformation de la Terre est toujours différente entre INPOP04e et DE405), on s'autorise un

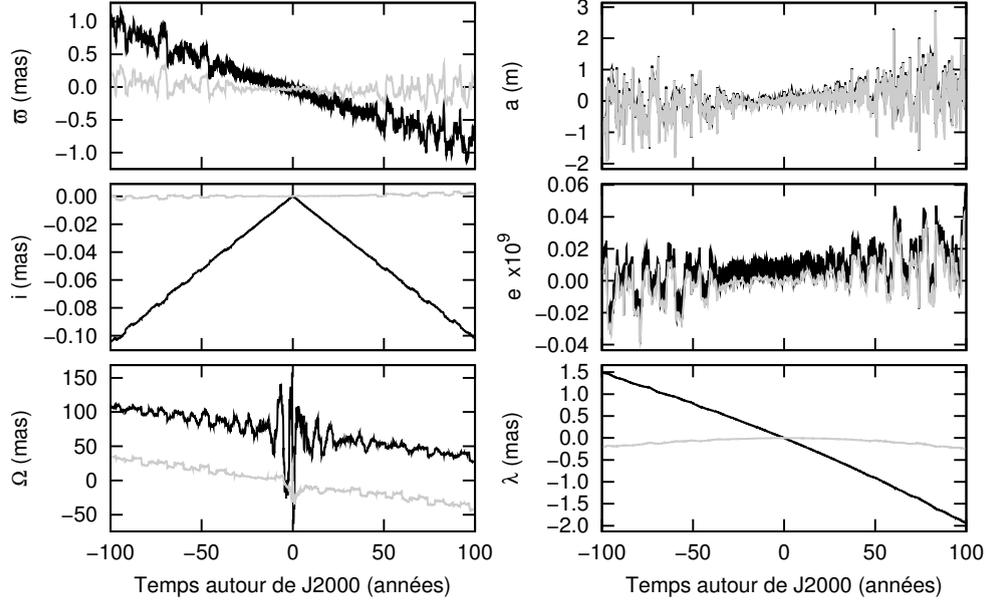


FIGURE 11.8 – Améliorations apportées par la prise en compte du J_2 solaire sur le barycentre Terre-Lune.

TABLE 11.6 – Valeurs des paramètres pour les solutions DE405, INPOP04d et INPOP04e. k_2 est le nombre de Love de degré 2 de la Lune, τ_M son déphasage.

	DE405	INPOP04d	INPOP04e
δ_E	non disponible	$4.394915056967 \times 10^{-2}$	$+4.473942548491503 \times 10^{-2}$
x	$-1.9492816783437004 \times 10^{-3}$	$-1.9492816783355420 \times 10^{-3}$	$-1.9492816783702677 \times 10^{-3}$
y	$-1.7828918821200174 \times 10^{-3}$	$-1.7828918821125555 \times 10^{-3}$	$-1.782891882144317 \times 10^{-3}$
z	$-5.0871366665635311 \times 10^{-4}$	$-5.0871366665422395 \times 10^{-4}$	$-5.0871366666328647 \times 10^{-4}$
\dot{x}	$+3.7167046845588649 \times 10^{-4}$	$+3.7167046845666424 \times 10^{-4}$	$+3.7167046845335363 \times 10^{-4}$
\dot{y}	$-3.8469783447515638 \times 10^{-4}$	$-3.8469783447596140 \times 10^{-4}$	$-3.8469783447253478 \times 10^{-4}$
\dot{z}	$-1.7403015785364605 \times 10^{-4}$	$-1.7403015785401026 \times 10^{-4}$	$-1.7403015785246012 \times 10^{-4}$
k_2	$+2.9922116659705348 \times 10^{-2}$	sans objet	idem DE405
τ_M	0.166716555849284465	sans objet	idem DE405

réajustement de l'angle de déphasage de la Terre δ_E et du demi-grand axe initial de la Lune pour compenser les dérives quadratiques et linéaires (les nouvelles valeurs des paramètres sont données dans le tableau 11.6).

Les courbes de la figure 11.9 permettent de voir l'amélioration de la Lune due à la prise en compte de sa déformation, significative sur la longitude du périégée, le demi-grand axe et l'excentricité.

11.1.5 Problème du J_2 de la Lune

On a vu au paragraphe 2.2.3.1 qu'il existait des relations entre les coefficients de la matrice d'inertie d'un corps et ceux de son potentiel. En particulier, les paramètres C_{20} , C_{22} (coefficients du potentiel), A/MR^2 , B/MR^2 et C/MR^2 (moments d'inertie divisés par la masse M et par le carré du rayon équatorial moyen R du corps) sont liés par les relations :

$$C_{20} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{MR^2} + \frac{B}{MR^2} \right) - \frac{C}{MR^2} \text{ et } C_{22} = \frac{1}{4} \left(\frac{B}{MR^2} - \frac{A}{MR^2} \right) \quad (11.1)$$

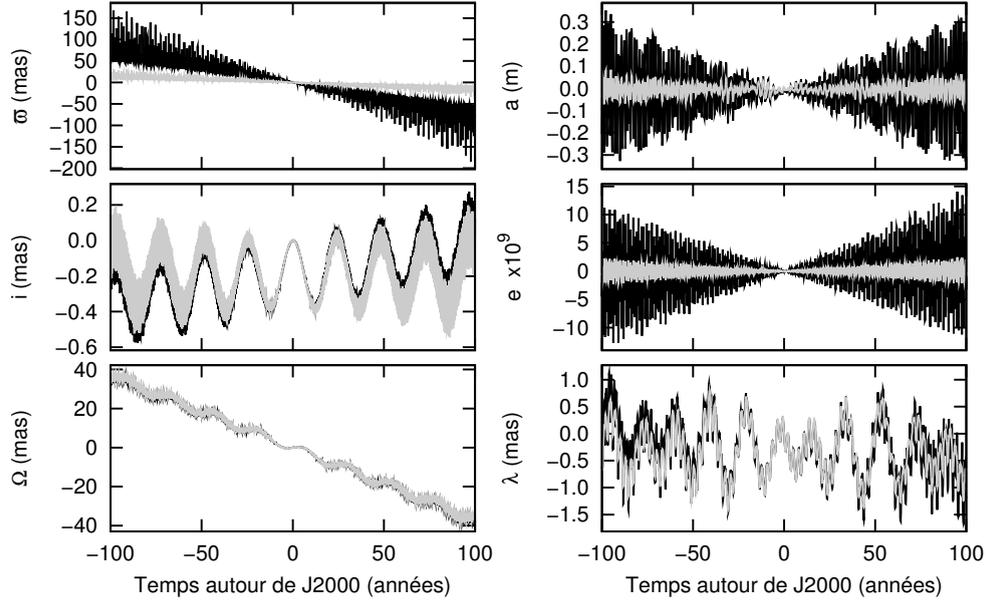


FIGURE 11.9 – Améliorations de la Lune apportées par la prise en compte de sa déformation.

Dans DE405, les constantes imposées pour la Lune sont $J_2 = -C_{20}$, C_{22} , $\beta_L = (C - A)/B$ et $\gamma_L = (B - A)/C$. D’après les relations précédentes, ces paramètres devraient satisfaire l’équation suivante :

$$\left(2\beta + \frac{4\beta_L}{\gamma_L} - 2\right) C_{22} + (\beta_L + 1) C_{20} = 0 \quad (11.2)$$

Or, si on reprend les valeurs du fichier header.405, cette relation n’est pas vérifiée. Cette incohérence est en fait due à la définition même du J_2 de la Lune. Dans DE405, il s’agit du J_2 d’une Lune isolée et ne tournant pas sur elle-même. À cette valeur est ajoutée un terme constant, fonction de son spin moyen (et donc de sa période de révolution autour de la Terre puisque en rotation synchrone, et donc de son demi-grand axe) pour tenir compte de sa déformation moyenne due au spin (voir le paragraphe 8.3.9 de (Standish & Williams, 2006)). Les valeurs de β_L , γ_L et C_{22} sont en réalité cohérentes avec le J_2 corrigé.

Dans les versions INPOP04a à INPOP04e, la valeur du J_2 tient déjà compte de la vitesse de rotation moyenne de la Lune : dans les expressions 4.27, le vecteur instantané de rotation est corrigé de sa valeur moyenne.

Dans INPOP04f, on modifie donc les valeurs de C_{20} , C_{22} et C/MR^2 . La valeur de C_{22} est reprise du fichier header.405 (et donc inchangée), tandis que celles de C_{20} et C/MR^2 sont déduites de celles de β_L et γ_L du fichier header.405 :

$$\frac{C}{MR^2} = \frac{4C_{22}}{\gamma_L} \text{ et } C_{20} = \frac{2 - 2\beta_L - \frac{4\beta_L}{\gamma_L}}{1 + \beta_L} C_{22} \quad (11.3)$$

Il faut remarquer ici qu’il ne s’agit pas d’un ajustement de constante (comme c’est le cas de l’angle de déphasage de la Terre pour compenser une “erreur” de modèle), mais juste de rétablir la cohérence dans la signification physique des paramètres. Le tableau 11.7 résume les différentes valeurs adoptées entre DE405, INPOP04e et INPOP04f.

Là encore, l’effet principal de ces modifications de constantes est d’induire une dérive linéaire dans la longitude moyenne de la Lune (et une légère dérive quadratique), que l’on compense

TABLE 11.7 – Valeurs des paramètres pour les solutions DE405, INPOP04e et INPOP04f. δ_E est l'angle de déphasage de la Terre (en jour), C_{20} et C_{22} sont les coefficients du potentiel de la Lune, C/MR^2 est son moment d'inertie C divisé par sa masse M et par le carré de son rayon équatorial moyen R , $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sont les conditions initiales (à J2000) du vecteur Terre-Lune (en UA et UA/jour).

	DE405	INPOP04e	INPOP04f
δ_E	non disponible	$+4.473942548491503 \times 10^{-2}$	$4.473734829426994 \times 10^{-2}$
C_{20} (Lune)	$-2.04312006654653 \times 10^{-4}$	idem DE405	$-2.045368525833681 \times 10^{-4}$
C_{22} (Lune)	$2.251782439166225 \times 10^{-5}$	idem DE405	idem DE405
C/MR^2 (Lune)	non disponible	0.390689526 (Moshier, 1992)	0.395295198960948
x	$-1.94928167834370 \times 10^{-3}$	$-1.94928167837027 \times 10^{-3}$	$-1.94928167835324 \times 10^{-3}$
y	$-1.78289188212002 \times 10^{-3}$	$-1.78289188214432 \times 10^{-3}$	$-1.78289188212871 \times 10^{-3}$
z	$-5.08713666656353 \times 10^{-4}$	$-5.08713666663287 \times 10^{-4}$	$-5.08713666658834 \times 10^{-4}$
\dot{x}	$+3.71670468455886 \times 10^{-4}$	$+3.71670468453354 \times 10^{-4}$	$+3.71670468454980 \times 10^{-4}$
\dot{y}	$-3.84697834475156 \times 10^{-4}$	$-3.84697834472535 \times 10^{-4}$	$-3.84697834474218 \times 10^{-4}$
\dot{z}	$-1.74030157853646 \times 10^{-4}$	$-1.74030157852460 \times 10^{-4}$	$-1.74030157853222 \times 10^{-4}$

encore une fois par un ajustement de l'angle de déphasage de la Terre δ_E et le demi-grand axe initial de la Lune (voir le tableau 11.7 pour les différentes valeurs des paramètres).

Les courbes de la figure 11.10 montrent alors les améliorations sur la Lune dues à l'introduction de valeurs cohérentes avec DE405 dans la forme de la Lune. Elles sont particulièrement importantes sur l'inclinaison et le nœud.

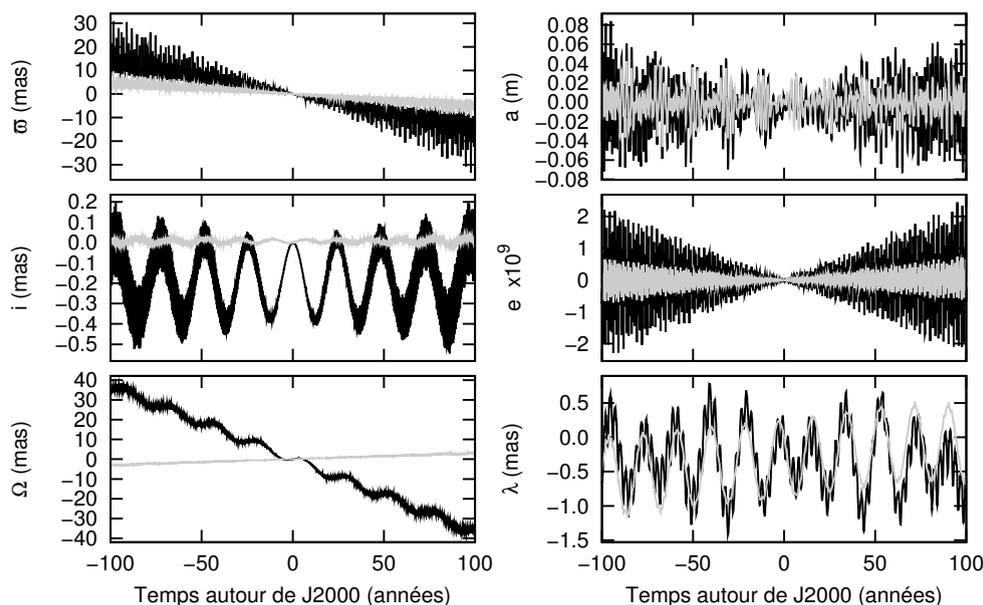


FIGURE 11.10 – Améliorations de la Lune dues à la cohérence des paramètres liés à sa forme.

11.1.6 Marées solides terrestres

Comme pour DE200, la Terre de DE405 est considérée comme déformable, mais son modèle de marées diffère. Dans DE200, seule était prise en compte l'interaction entre la déformation de la Terre générée par la Lune et la Lune (à la fois corps générateur et perturbateur). Les différences avec DE405 sont à 2 niveaux :

- d’une part le modèle de déformation est différent : les nombres de Love et les temps de déphasage de degré 2 dépendent de l’ordre de l’harmonique
- d’autre part, la Terre est déformée par la Lune et le Soleil (générateurs) et on tient compte de l’interaction de cette déformation avec la Lune (perturbateur)

Dans DE200 (ainsi que toutes les versions INPOP04a à INPOP04f), l’expression 4.14 était appliquée, tandis que pour DE405, c’est l’expression 4.13 qui est utilisée.

Pour la version INPOP04g, on décide d’introduire les effets de la déformation de la Terre de la même manière qu’ils l’ont été pour la déformation de la Lune :

1. à l’instant t , on dispose des coefficients du potentiel “rigide” de la Terre
2. du vecteur d’état à l’instant t , on déduit les vecteurs Terre-Lune et Terre-Soleil (dans le repère fixe) déphasés aux instants $t - \tau_{E20}$, $t - \tau_{E21}$ et $t - \tau_{E22}$ avec la méthode du paragraphe 6.1.3
3. ces vecteurs sont ensuite exprimés dans l’équateur vrai de la date t
4. on effectue une rotation d’axe z et d’angle $\tau \cdot \omega_T$ (où τ est le temps de déphasage correspondant) pour tenir compte de la rotation de la Terre (dont la vitesse de rotation est ω_T) entre t et $t - \tau$.
5. des vecteurs déphasés on déduit les variations des coefficients du potentiel de la Terre avec les expression 4.12
6. enfin, on calcule les vecteurs accélérations de la Terre et des corps perturbateurs (Lune, Soleil, Jupiter et Vénus) avec les développements du chapitre 2.

À la différence de la Lune, il est inutile ici de calculer les moments qui s’exercent sur la Terre ou les variations de sa matrice d’inertie car son orientation est forcée par un modèle de précession-nutation. En toute rigueur, il faudrait passer dans l’équateur vrai de la date $t - \tau$ (et non de la date t), mais les différences sont négligeables. Dans la mesure où la Terre est considérée comme à symétrie de révolution, il est inutile de tenir compte du temps sidéral (ses coefficients du potentiel tesséraux ne sont dus qu’aux effets de marées). On abandonne alors les constantes k_E et δ_E , nécessaires au modèle DE200 des marées terrestres, et on reprend les valeurs DE405 des nombres de Love et des temps de déphasage de la Terre. Le demi-grand axe initial de la Lune est lui aussi fixé égal à celui de DE405. Les différentes valeurs des paramètres sont résumées dans le tableau 11.8.

Les courbes de la figure 11.11 montrent alors l’amélioration sur la Lune due à la modélisation de la déformation de la Terre conforme à celle de DE405 ; elle se manifeste sur l’ensemble des variables.

Remarque : les modèles de déformation de la Terre continuent de légèrement différer entre INPOP04g et DE405. Dans ces deux solutions, la déformation de la Terre est générée par la Lune et le Soleil. Mais là où DE405 se limite à l’interaction de cette déformation avec la Lune, INPOP04g tient compte également de celles avec le Soleil, Jupiter et Vénus (tous les corps perturbateurs de la Terre “rigide”). L’effet sur les éléments elliptiques n’est en fait pas négligeable, avec l’apparition d’une petite dérive quadratique (70 microsecondes sur 100 ans) dans la longitude moyenne de la Lune. Et paradoxalement, l’utilisation (non illustrée ici) dans INPOP de l’expression 4.13 implémentée dans DE405 donne des résultats légèrement moins bons.

11.1.7 Orientation de la Terre

Dans les articles décrivant les différentes solutions planétaires du JPL, les procédures de passage du repère d’intégration au repère terrestre ne sont pas toujours clairement explicitées. Ces changements de repère sont utilisés lors du calcul des interactions dues à la forme de la Terre.

TABLE 11.8 – Valeurs des paramètres pour les solutions DE405, INPOP04f et INPOP04g. k_E et δ_E sont respectivement le nombre de Love et l’angle de déphasage de la Terre (en jour), k_{E20} , k_{E21} et k_{E22} sont les nombres de Love de degré 2 de la Terre, τ_{E20} , τ_{E21} et τ_{E22} sont les temps de déphasage associés (en jour), $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sont les conditions initiales (à J2000) du vecteur Terre-Lune (en UA et UA/jour).

	DE405	INPOP04f	INPOP04g
k_E	non disponible	0.30	sans objet
δ_E	non disponible	$4.473734829426994 \times 10^{-2}$	sans objet
k_{E20}	0.34	sans objet	idem DE405
k_{E21}	0.30	sans objet	idem DE405
k_{E22}	0.30	sans objet	idem DE405
τ_{E20}	0.0	sans objet	idem DE405
τ_{E21}	$1.29089593915602298 \times 10^{-2}$	sans objet	idem DE405
τ_{E22}	$6.94178558405230284 \times 10^{-3}$	sans objet	idem DE405
x	$-1.9492816783437004 \times 10^{-3}$	$-1.949281678353206 \times 10^{-3}$	idem DE405
y	$-1.7828918821200174 \times 10^{-3}$	$-1.7828918821287116 \times 10^{-3}$	idem DE405
z	$-5.0871366665635311 \times 10^{-4}$	$-5.0871366665883376 \times 10^{-4}$	idem DE405
\dot{x}	$+3.7167046845588649 \times 10^{-4}$	$+3.7167046845498021 \times 10^{-4}$	idem DE405
\dot{y}	$-3.8469783447515638 \times 10^{-4}$	$-3.8469783447421838 \times 10^{-4}$	idem DE405
\dot{z}	$-1.7403015785364605 \times 10^{-4}$	$-1.7403015785322174 \times 10^{-4}$	idem DE405

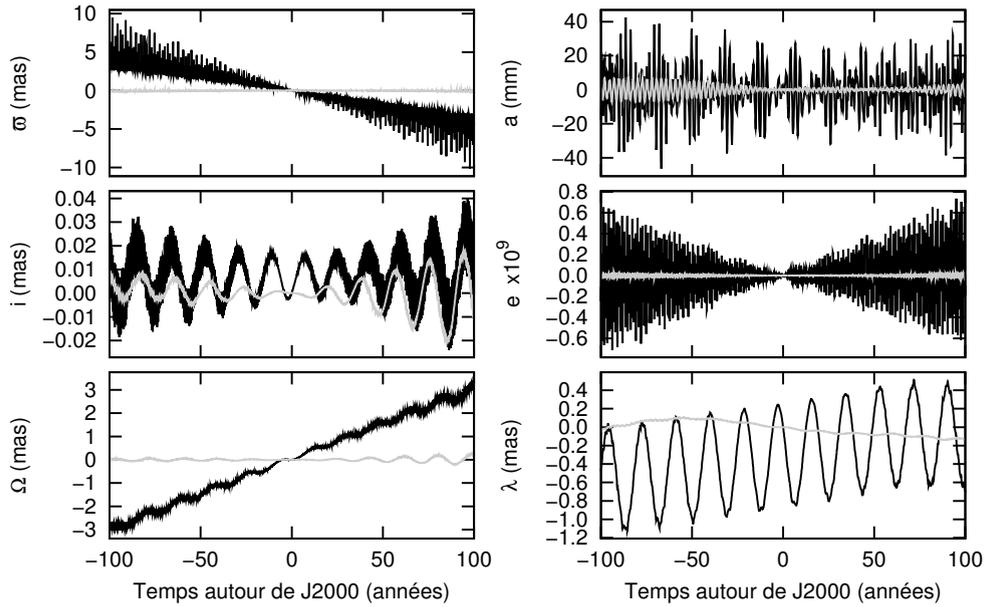


FIGURE 11.11 – Améliorations de la Lune dues à l’introduction du modèle de déformation de la Terre de DE405.

11.1.7.1 DE200

Dans (Newhall et al., 1983), il est mentionné qu’un modèle de précession-nutation est utilisé pour déterminer l’orientation de la Terre. Il est précisé (voir le paragraphe C. Earth tides) que seul le terme principal en 18,6 ans est pris en compte dans la nutation, mais les coefficients de la précession restent inconnus. On peut seulement supposer qu’il s’agit d’un modèle standard, et le plus probable à l’époque était la précession de Lieske et al. (1977) et les nutations de Wahr (1981). C’est d’ailleurs ce modèle qui était utilisé dans les versions INPOP04a à INPOP04g.

11.1.7.2 DE403

Dans l'interoffice memorandum de Standish et al. (1995) concernant DE403, il est fait mention à la fois d'une correction pour passer de l'ICRF à l'équateur moyen J2000 et de corrections linéaires apportées dans les angles de nutations :

$$\Delta\epsilon = -0.00399 - 0.024T \text{ et } \sin\epsilon\Delta y = -0.01536 - 0.1193T \quad (11.4)$$

avec T mesuré en siècle julien, $\Delta\epsilon$ et $\sin\epsilon\Delta y$ en secondes de degré. Les termes linéaires introduits ici dans la nutation (qui ne devrait contenir par définition que des termes périodiques ou de Poisson) peuvent être plutôt pris en compte dans la précession dans les angles ω_A , ψ_A et ϵ_A , avec l'équivalence suivante :

- $(\delta\omega_A)_{t^1} = (\delta\Delta\epsilon)_{t^1}$
- $(\delta\epsilon_A)_{t^1} = (\delta\Delta\epsilon)_{t^1}$
- $(\delta\psi_A)_{t^1} = (\delta\Delta\psi)_{t^1} / \sin\epsilon_0$

avec la notation où $(\delta\alpha)_{t^1}$ désigne la correction sur le terme linéaire apportée dans l'angle α .

Alors qu'aujourd'hui le passage de l'ICRF à l'équateur moyen J2000 s'applique *avant* la précession, il semble que la prise en compte du biais (voir le paragraphe 3.2.1) soit effectuée par l'intermédiaire des termes constants (appelés "Celestial Pole Offsets") dans les corrections aux angles de nutations en longitude $\Delta\psi$ et obliquité $\Delta\epsilon$ (et donc après la précession). Il est possible qu'à l'époque (1995), les repères ainsi que les procédures de changement n'étaient pas aussi clairement standardisées qu'actuellement.

Quoiqu'il en soit, les valeurs de ces corrections sont présentes dans le fichier header.403, sous les noms de :

- $ROTEX = 0.00396255543762880341$
- $ROTEY = -0.0153487470324525019$
- $DROTEX = 0.00024$
- $DROTEY = -0.001193$

On peut cependant constater que les valeurs de ROTEX et ROTY ne correspondent pas exactement à celles données dans (Standish et al., 1995), même en tenant compte des arrondis. Mais aucune autre variable du fichier header.403 ne s'approche des valeurs de l'interoffice memorandum. Le facteur 100 dans celles de DROTEX et DROTEY ne sont dues qu'à des unités différentes (secondes de degré par siècle dans (Standish et al., 1995) et secondes de degré par an dans le fichier header.403). À noter également le changement de signe dans ROTEX et DROTEX (qui correspondraient donc à $-\Delta\epsilon$).

En plus de ces corrections séculaires dans les angles de nutation en obliquité et longitude, il est possible que l'amplitude du terme principal en 18,6 ans ait également été modifiée.

Il faut cependant remarquer qu'on ne sait toujours pas à quel modèle ces corrections sont apportées, même si celui de Lieske et al. (1977) semble le plus probable.

11.1.7.3 DE405

Aucune information supplémentaire concernant l'orientation de la Terre n'est disponible dans l'interoffice memorandum (Standish, 1998) concernant DE405. On remarque néanmoins la présence dans le fichier header.405 des mêmes variables ROTEX, ROTY, DROTEX et DROTEY, mais avec des valeurs différentes de celles de DE403 :

- $ROTEX = 0.0$
- $ROTEY = 0.0$
- $DROTEX = 0.000244$ (proche de DE403)
- $DROTEY = -0.001193$ (égale à DE403)

Décrivant avec plus de détails la solution DE405, (Standish & Williams, 2006) précise que la précession utilisée est celle de (Lieske et al., 1977), avec des corrections en précession (notée

$d\Phi_Y/dt$) et obliquité (notée $-d\Phi_X/dt$) issues de (Williams, 1994). Des corrections constantes Φ_X et Φ_Y ont également été ajustées aux observations. Le premier problème est que les valeurs de la constante $d\Phi_Y/dt$ données respectivement au paragraphe 8.3.3 et dans le tableau 8.8.3 de (Standish & Williams, 2006) sont incohérentes ; il s’agit sûrement d’une erreur de notation, la valeur $-0.3''/cy$ correspondrait plutôt à la correction en $\delta\psi_A$ (voir le paragraphe précédent), compatible avec la valeur de $-0.1193''/cy$ pour $(\Delta\psi)_{t1}$.

Le deuxième problème est l’incohérence des valeurs Φ_X et Φ_Y de (Standish & Williams, 2006) (respectivement $0.006358''$ et $-0.015571''$) avec les valeurs de *ROTEX* et *ROTEY* du fichier header.405 (toutes deux nulles).

Ce n’est pas la première fois qu’une telle incohérence est observée ; c’était déjà le cas avec la valeur du J_2 solaire et on avait alors vu qu’il fallait plutôt faire confiance au fichier header.405.

Remarque : la confiance dans le fichier header contenant les constantes n’est pas systématique. Lors de travaux préliminaires (non exposés ici), on souhaitait retrouver la solution DE200. Cette solution n’était pas obtenue directement par intégration numérique des équations du mouvement des corps, mais par rotation de la solution DE118 de l’équateur moyen B1950 à l’équateur moyen J2000. En reprenant les valeurs de paramètres et conditions initiales du fichier header.200, on obtenait des oscillations de période 2,8 ans dans la longitude moyenne de la Lune. Le problème venait des conditions initiales : celles des vecteurs positions-vitesses des corps avaient bien été exprimées dans le nouveau repère (rotation de celles du header.118), mais pas celles des librations de la Lune. Cette origine du problème a été difficile à mettre en évidence, car comme pour la solution à long terme DE406, DE200 ne permet pas l’accès aux librations de la Lune au cours du temps.

11.1.7.4 Tests de différents modèles de précession

On voit donc que la bibliographie ne renseigne que de manière partielle, et parfois contradictoire sur le calcul de l’orientation de la Terre dans DE405. Le but de ce paragraphe est de tester différents modèles de précession-nutation en comparant les résultats à DE405. Les effets principaux de ces changements se manifestent sur la longitude du nœud Ω et sur l’inclinaison i de la Lune, et les comparaisons ne porteront donc que sur ces deux variables.

(Lieske et al., 1977) et corrections affines dans les nutations

Le plus vraisemblable est l’utilisation du modèle de Lieske et al. (1977), avec le terme principal en 18,6 ans de la nutation de Wahr (1981) et des corrections linéaires apportées aux angles de nutations en obliquité et en longitude conformes au header.405 (les corrections sont en secondes de degré, T en siècle julien écoulé depuis J2000) :

$$\Delta\epsilon = 0.0244T \text{ et } \Delta\psi = -0.1193T \quad (11.5)$$

INPOP04h01 est donc construite à partir de INPOP04g en introduisant ces corrections linéaires. Les courbes de la figure 11.12 permettent de voir l’amélioration apportée. Le résultat est nuancé, avec de bons résultats pour les temps futurs, et des écarts qui se dégradent régulièrement dans le passé, qui rendent la solution INPOP04h01 plus mauvaise que INPOP04g pour les temps antérieurs à J1900. On remarque cependant une réduction du signal sur 50 ans de part et d’autre de J2000.

(Lieske et al., 1977) et corrections linéaires dans les nutations

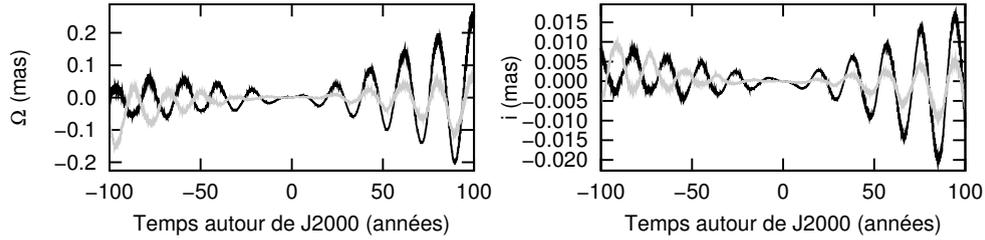


FIGURE 11.12 – Améliorations de la Lune dues aux corrections linéaires dans les angles de nutation. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04g, en gris celles entre DE405 et INPOP04h01.

Aux corrections linéaires, on ajoute dans la solution INPOP04h02 les corrections constantes définies dans (Standish & Williams, 2006, Tab. 8.8.3) :

$$\Delta\epsilon = -0.006358 - 0.0244T \text{ et } \Delta\psi = -0.015571 - 0.1193T \quad (11.6)$$

Ces corrections sont exprimées en secondes de degré et avec T exprimé en siècle julien depuis J2000. La comparaison des courbes de la figure 11.13 montre que INPOP04h02 (avec termes constants) dégrade la solution par rapport à INPOP04h01 (sans termes constants), avec en particulier l'apparition d'oscillations au voisinage de J2000. Comme pour le J_2 solaire, on s'aperçoit qu'il fallait faire confiance au fichier header.405 pour les valeurs des corrections aux nutations plutôt qu'à (Standish & Williams, 2006, Tab. 8.8.3).

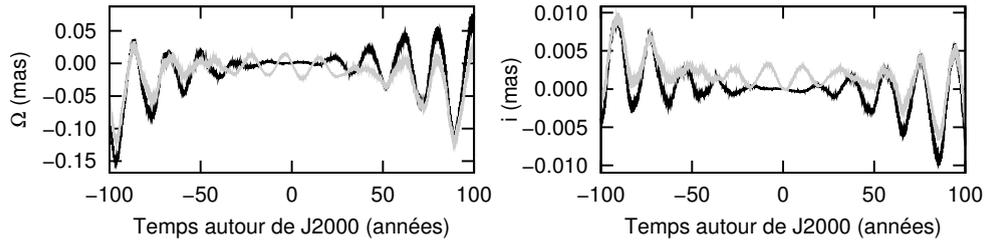


FIGURE 11.13 – Dégradation de la Lune due aux corrections constantes dans les angles de nutation. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires, sans les termes constants), en gris celles entre DE405 et INPOP04h02 (corrections affines).

Biais entre l'ICRF et l'équateur moyen J2000

La dégradation de INPOP04h02 par rapport à INPOP04h01 semble indiquer que la matrice de passage de l'ICRF à l'équateur moyen J2000 n'a pas été prise en compte. À partir d'INPOP04h01 (sans correction constante dans les angles de nutation), on construit INPOP04h03 en introduisant la matrice biais (voir le paragraphe 3.2.1). Là encore, on observe sur les courbes de la figure 11.14 que INPOP04h03 est une solution dégradée par rapport à INPOP04h01, avec les mêmes oscillations, présentes dès la date origine des intégrations.

INPOP04h02 et INPOP04h03 sont d'ailleurs très proches l'une de l'autre. Peu importe ici que le biais entre l'ICRF et l'équateur moyen J2000 soit introduit dans les nutations (comme au JPL) ou avant la précession (méthode standard des Conventions IERS 2003). Mais quelle que soit la méthode, elle n'a certainement pas été prise en compte dans DE405.

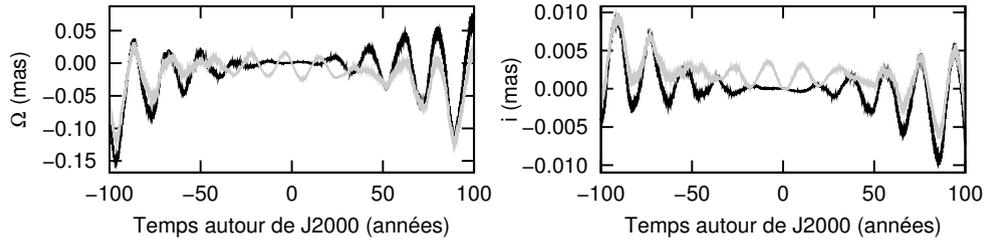


FIGURE 11.14 – Dégradation de la Lune due à la prise en compte de la matrice du biais de l'ICRF à l'équateur moyen J2000. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01, en gris celles entre DE405 et INPOP04h03.

Transfert des termes linéaires des nutations à la précession

Les corrections linéaires 11.5 apportées aux angles de nutations en obliquité et en longitude peuvent être reportées de manière équivalente dans les angles de précession :

$$\begin{cases} \delta\omega_A = -0.0244T \\ \delta\psi_A = -0.299917T \\ \delta\epsilon_A = -0.0244T \end{cases} \quad (11.7)$$

Avec la solution INPOP04h04, on reporte les corrections linéaires des angles de nutations aux angles de précession. Les courbes de la figure 11.15 montrent que INPOP04h01 et INPOP04h04 sont très proches l'une de l'autre, leurs différences (en gris) étant très inférieures aux écarts observés entre DE405 et INPOP04h01 (en noir).

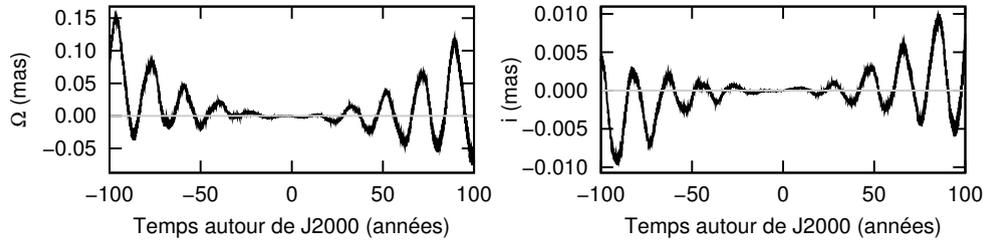


FIGURE 11.15 – Différences entre la prise en compte de termes linéaires dans la nutation ou dans la précession. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires dans la nutation), en gris celles entre INPOP04h01 et INPOP04h04 (corrections linéaires dans la précession).

Autres modèles de précession

Les valeurs de 11.7 sont très proches de celles de l'IAU2000, définie dans (McCarthy & Petit, 2004, page 43) ou (Capitaine et al., 2003), et certes un peu plus éloignées de celles de (Williams, 1994) et encore plus de (Simon et al., 1994). Pour tester l'influence de ces différents modèles de précession, on construit à partir d'INPOP04g (donc sans les corrections linéaires aux nutations) les solutions suivantes :

- INPOP04h05 : remplacement de la précession de Lieske et al. (1977) par celle de Williams (1994)
- INPOP04h06 : remplacement de la précession de Lieske et al. (1977) par celle de Simon et al. (1994)

– INPOP04h07 : remplacement de la précession de Lieske et al. (1977) par celle de l’UAI2000

Comme on peut le voir sur les courbes des figures 11.16 et 11.17, l’utilisation de la précession de Williams (1994) ou celle de l’UAI2000 ne permettent pas de changement significatif par rapport à INPOP04h01 ou INPOP04h04 ; les changements apportés par la précession de Simon et al. (1994) sont un peu plus visibles, sans être réellement importants (voir les courbes de la figure 11.18).

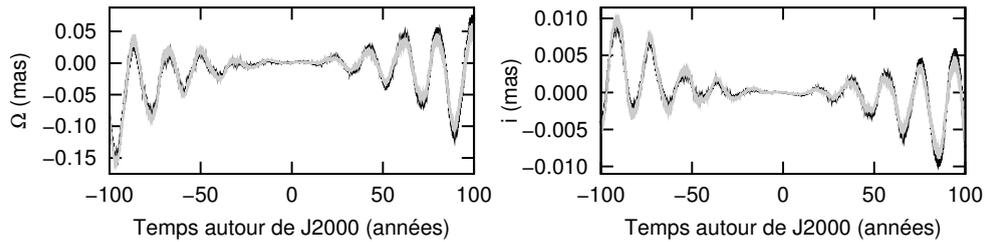


FIGURE 11.16 – Changements apportés par l’utilisation de la précession de Williams (1994) au lieu des corrections linéaires aux angles de nutation. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires), en gris celles entre DE405 et INPOP04h05 (précession de Williams (1994)).

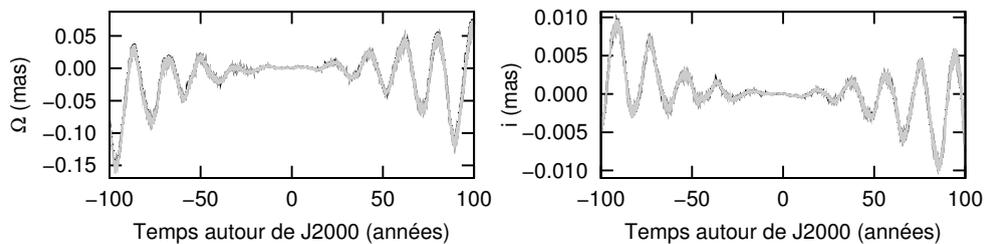


FIGURE 11.17 – Changements apportés par l’utilisation de la précession de l’IAU2000 au lieu des corrections linéaires aux angles de nutation. En noir (seuls quelques points sont visibles sous le gris) sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires), en gris celles entre DE405 et INPOP04h05 (précession de l’UAI2000).

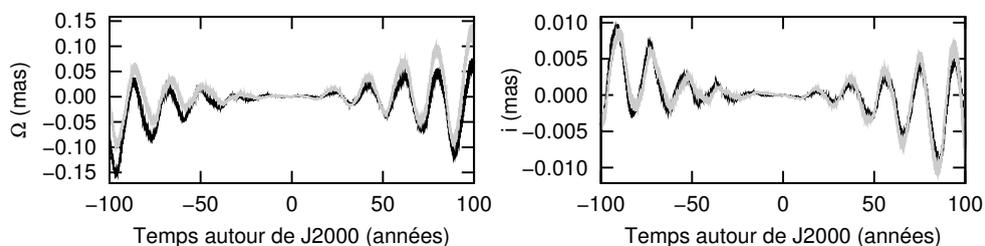


FIGURE 11.18 – Changements apportés par l’utilisation de la précession de Simon et al. (1994) au lieu des corrections linéaires aux angles de nutation. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires), en gris celles entre DE405 et INPOP04h05 (précession de Simon et al. (1994)).

Influence du terme en 18,6 ans des nutations

Ensuite, pour étudier l'influence du terme principal en 18,6 ans de la nutation, la solution INPOP04h08 est créée à partir de INPOP04h07 (précession de l'IAU2000) en remplaçant le terme principal en 18,6 ans de la nutation de (Wahr, 1981) par celui de la nutation de IAU2000 de (Mathews et al., 2002). Comme on peut le voir (courbes de la figure 11.19), ce changement dégrade nettement la solution.

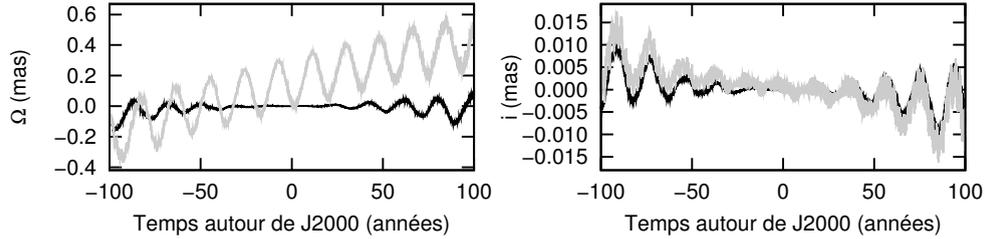


FIGURE 11.19 – Changements apportés par l'utilisation de la précession et le terme principal en 18,6 ans de l'IAU2000. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h07 (terme en 18.6 ans de (Wahr, 1981)), en gris celles entre DE405 et INPOP04h08 (terme en 18.6 ans de (Mathews et al., 2002)).

Or il est possible que pour DE403 (et donc pour son successeur), l'amplitude du terme en 18,6 ans de la nutation ait été modifiée. Des tests ont été effectués en corrigeant de la valeur donnée dans Williams (1994, Tab. 1) sans donner de résultats probants. Des ajustements de ce terme ont également été tentés sans succès.

Ajustement de termes quadratiques dans les nutations

Enfin, pour finir, des tests ont été effectués en introduisant à partir de INPOP04g, non seulement des corrections constantes et linéaires, mais aussi quadratiques dans les angles de nutation :

$$\begin{cases} \Delta\epsilon = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 \\ \Delta\psi = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 \end{cases} \quad (11.8)$$

L'idée était que si les termes constants Φ_X et Φ_Y définis au paragraphe 8.8.3 de (Standish & Williams, 2006) n'étaient vraisemblablement pas introduits dans la solution (voir la comparaison entre INPOP04h01 et INPOP04h02), il était possible que d'autres modifications non documentées aient été apportées à la précession. Les termes (α_i) et (β_i) ont donc été ajustés par moindres carrés à la longitude du nœud et à l'inclinaison de la Lune de manière à réduire le signal entre INPOP04h09 et DE405. Avec les valeurs ajustées suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_0 = -7.73 \times 10^{-4} \\ \alpha_1 = 9.85 \times 10^{-3} \\ \alpha_2 = 1.15 \times 10^{-2} \\ \beta_0 = 8.10 \times 10^{-4} \\ \beta_1 = -1.23 \times 10^{-1} \\ \beta_2 = -8.37 \times 10^{-2} \end{cases} \quad (11.9)$$

on obtient une réduction significative du signal par rapport à INPOP04h01, comme on peut le constater sur les courbes de la figure 11.20.

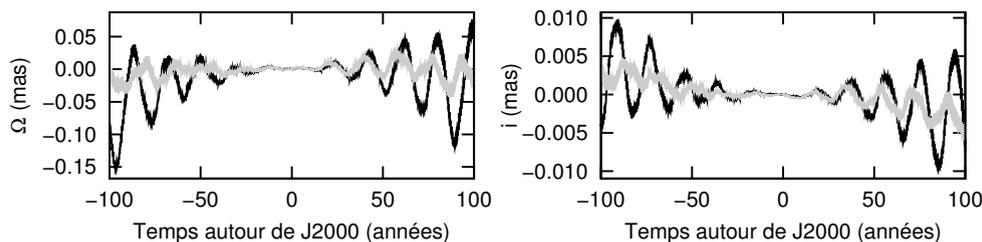


FIGURE 11.20 – Changements apportés par l’ajustement de termes quadratiques dans la nutation. En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04h01 (corrections linéaires imposées par le fichier header.405), en gris celles entre DE405 et INPOP04h09 (corrections constantes, linéaires et quadratiques ajustées).

On voit donc que ces écarts peuvent en partie être compensés par un changement de la précession. On peut cependant s’interroger sur la justification de modifier le modèle dynamique en introduisant arbitrairement deux constantes supplémentaires ajustées. Sans compter qu’alors, pourquoi se limiter à des termes quadratiques ?

11.1.7.5 Choix de la précession de Williams (1994)

On voit donc que l’orientation de la Terre de DE405 est vraisemblablement déterminée avec la précession de Lieske et al. (1977) associée au terme principal en 18,6 ans de la nutation de (Wahr, 1981) corrigée de termes linéaires. Ces termes linéaires dans la nutation peuvent être reportés dans la précession, qui devient proche de celle de l’IAU2000 ou de Williams (1994). Les versions INPOP04h01, INPOP04h04, INPOP04h05 et INPOP04h07 donnent sensiblement les mêmes écarts comparées à DE405. Le choix de l’utilisation de la précession de Williams (1994) a été effectué en raison de l’appartenance de l’auteur au JPL et de la préférence d’utiliser dans INPOP une précession bien référencée. Pour INPOP04h, on choisit donc de prendre la solution INPOP04h05.

Les courbes de la figure 11.21 montrent les améliorations sur la Lune apportées par l’utilisation de la précession de Williams (1994) en remplacement de celle de Lieske et al. (1977).

11.1.8 Interaction forme-forme

Jusqu’à présent, seules les interactions entre des corps non-sphériques et un corps perturbateur ponctuel étaient prises en compte. Avec DE405 est ajoutée l’interaction entre la forme de la Terre et celle de la Lune (les 2 corps sont considérés non-sphériques). On se limite aux termes de degré 2 du potentiel “rigide” de ces deux corps (C_{20} pour la Terre, C_{20} et C_{22} pour la Lune). Dans DE405, seul est pris en compte le moment induit qui s’exerce sur la Lune. Les accélérations de la Lune et de la Terre sont négligées, leur effet sur les éléments elliptiques de la Lune étant inférieur d’un ordre de grandeur aux différences observées entre DE405 et INPOP05 (voir les courbes de la figure 11.31). D’autre part, il est inutile de calculer le moment exercé sur la Terre car son orientation est ici forcée. Avec INPOP04i, on introduit donc le moment exercé sur la Lune dû à l’interaction entre sa forme et celle de la Terre (voir l’expression 7.38). Comme on peut le voir sur les courbes de la figure 11.22, l’effet sur les éléments elliptiques de la Lune n’est pas significatif.

Par contre, ses angles de libration sont grandement améliorés (voir courbes de la figure 11.23).

Les courbes noires de la figure 11.23 sont cependant très différentes de (Bois et al., 1992, Fig. 3), censées représenter elles aussi l’effet du moment forme-forme sur les librations de la Lune. Le tableau 11.9 résume les résultats d’une analyse en fréquences sur les différences calculées sur

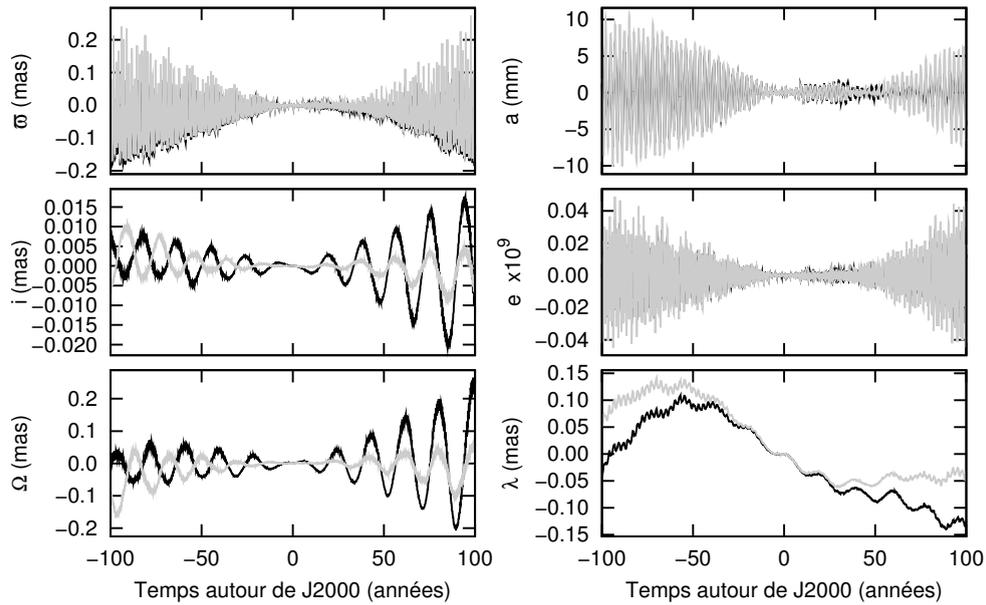


FIGURE 11.21 – Améliorations de la Lune dues au remplacement de la précession de Lieske et al. (1977) par celle de Williams (1994). En noir sont tracées les différences entre DE405 et INPOP04g, en gris celles entre DE405 et INPOP04h.

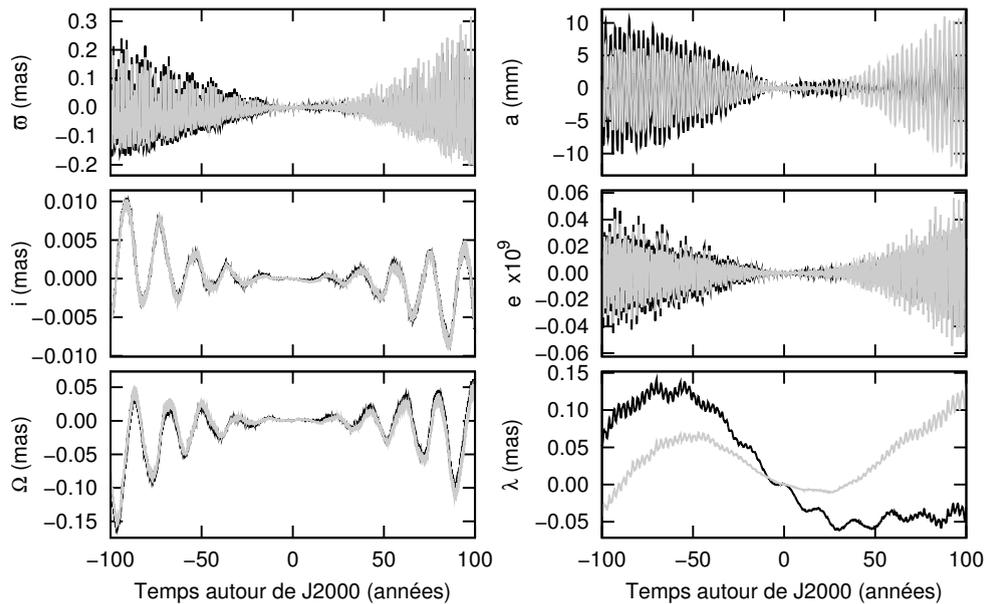


FIGURE 11.22 – Améliorations de la Lune dues à l'introduction de l'interaction entre la forme de la Lune et celle de la Terre (moment exercé sur la Lune uniquement).

les angles d'Euler ϕ , θ et ψ entre les solutions INPOP04i et INPOP04h. On remarque qu'avec INPOP (et DE405), le terme prépondérant est celui en 81 ans, tandis que celui en 18,6 ans n'atteint au maximum que 15 mas pour ϕ . On ne retrouve donc pas les 40 mas de Bois et al. (1992). Il semble peu probable que des valeurs différentes de paramètres (dans le potentiel de la Lune ou de la Terre par exemple) soient responsables de ces écarts. En effet, en comparant la solution INPOP08 ajustée aux données LLR à une autre dont on néglige le couple forme-forme,

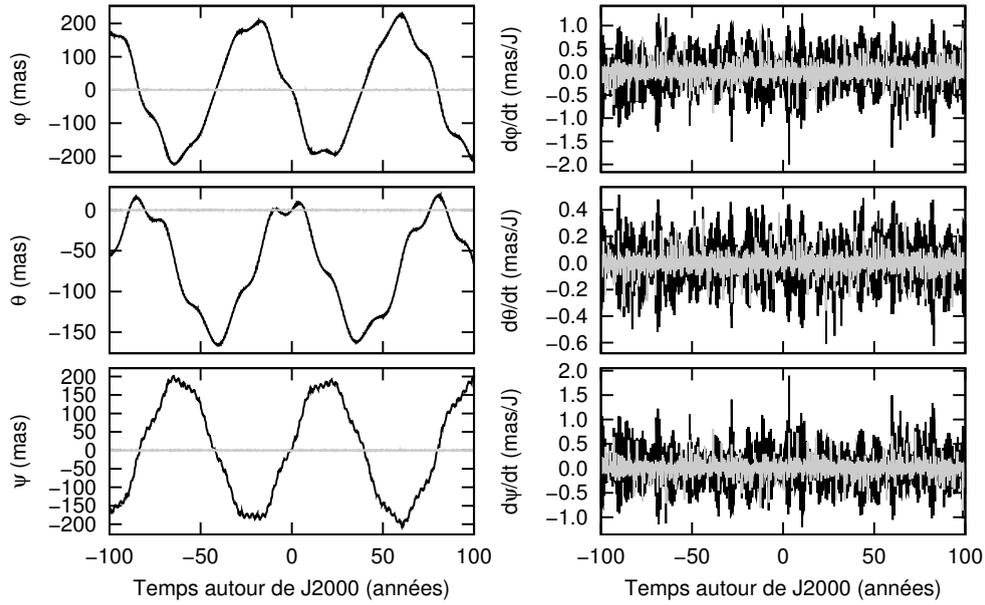


FIGURE 11.23 – Améliorations des librations de la Lune dues à l’introduction de l’interaction entre la forme de la Lune et celle de la Terre (moment exercé sur la Lune uniquement).

TABLE 11.9 – Résultats de l’analyse en fréquences de l’effet du moment forme-forme sur les angles de librations de la Lune (différences entre INPOP04i et INPOP04h).

ϕ		θ		ψ	
amplitude (mas)	période (an)	amplitude (mas)	période (an)	amplitude (mas)	période (an)
203.93	81.00	75.19	∞	186.56	81.00
14.94	18.65	80.65	80.61	12.66	15.11
12.61	15.12	11.36	18.62	5.74	2.89
2.81	189.10	2.50	24.12	3.66	24.22
1.41	0.09	2.50	15.13	2.61	18.60

on obtient les mêmes résultats que ceux de la figure 11.23.

11.2 Comparaisons INPOP05-DE405

La solution INPOP05 est la même que INPOP04i décrite dans le paragraphe précédent. Les courbes qui suivent montrent les différences sur les éléments elliptiques pour chacune des planètes et pour la Lune (héliocentriques écliptiques pour les planètes, géocentriques écliptiques pour la Lune). Les différences sur les planètes au-delà d’Uranus ne sont pas tracées car aux amplitudes près, les signaux ressemblent à ceux de Saturne. Sont également tracés les éléments elliptiques du barycentre Terre-Lune exprimés dans l’ICRF, pour montrer l’absence de dérive linéaire du nœud que l’on observe pourtant dans l’écliptique. Enfin, le tableau 11.10 donne les différences maximales sur 100 ans autour de J2000 sur les distances, longitudes et latitudes dans l’équateur moyen J2000. Pour les planètes et Pluton, ces variables sont héliocentriques, pour la Lune, elles sont géocentriques.

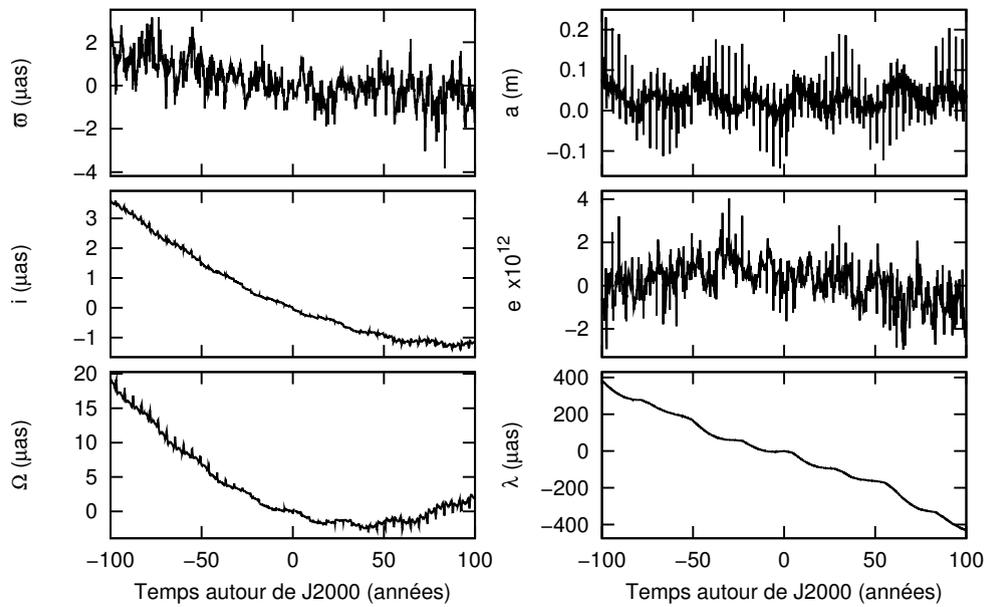


FIGURE 11.24 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de Mercure

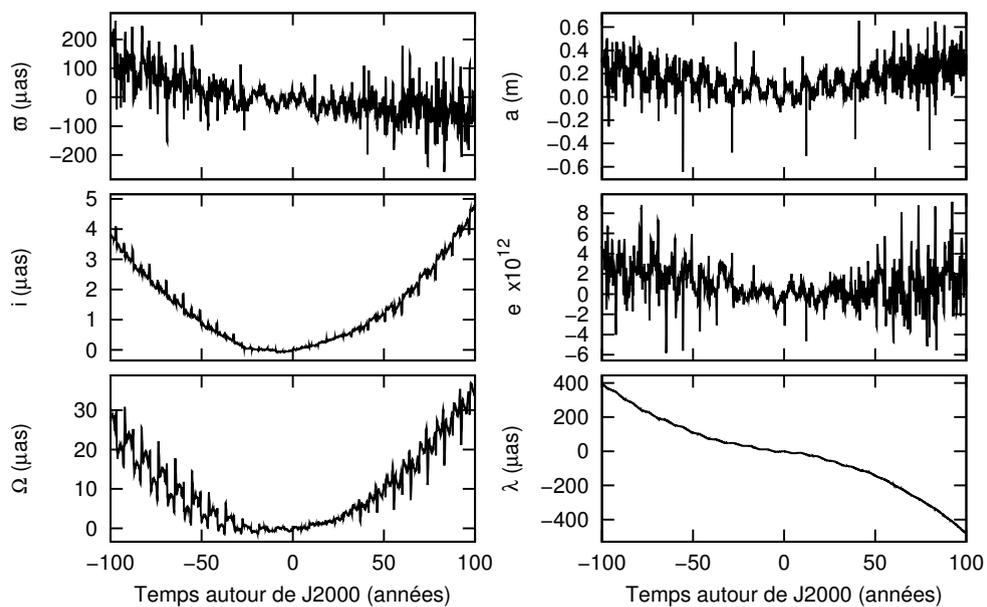


FIGURE 11.25 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de Vénus

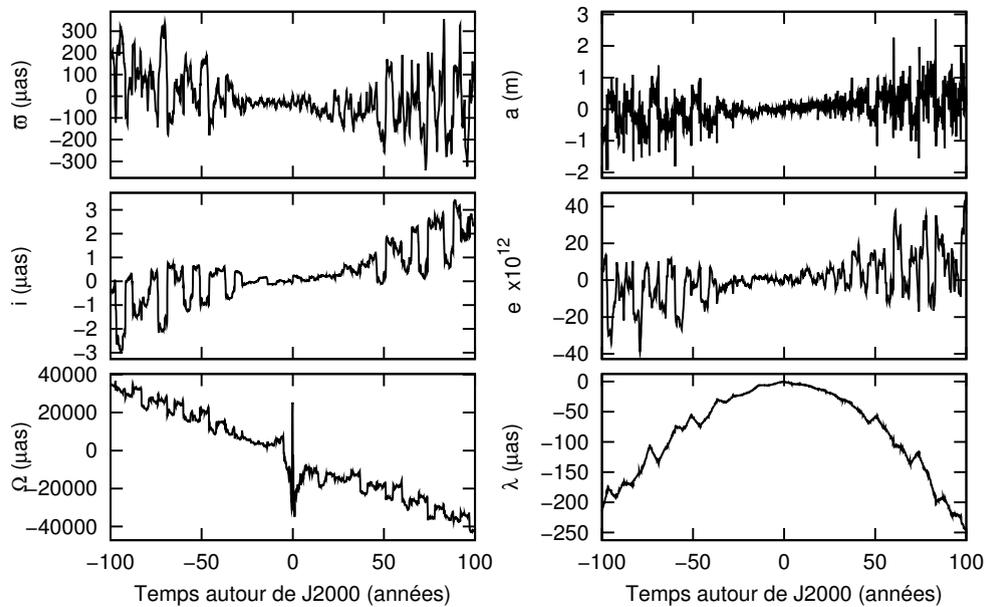


FIGURE 11.26 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques du barycentre Terre-Lune (écliptiques)

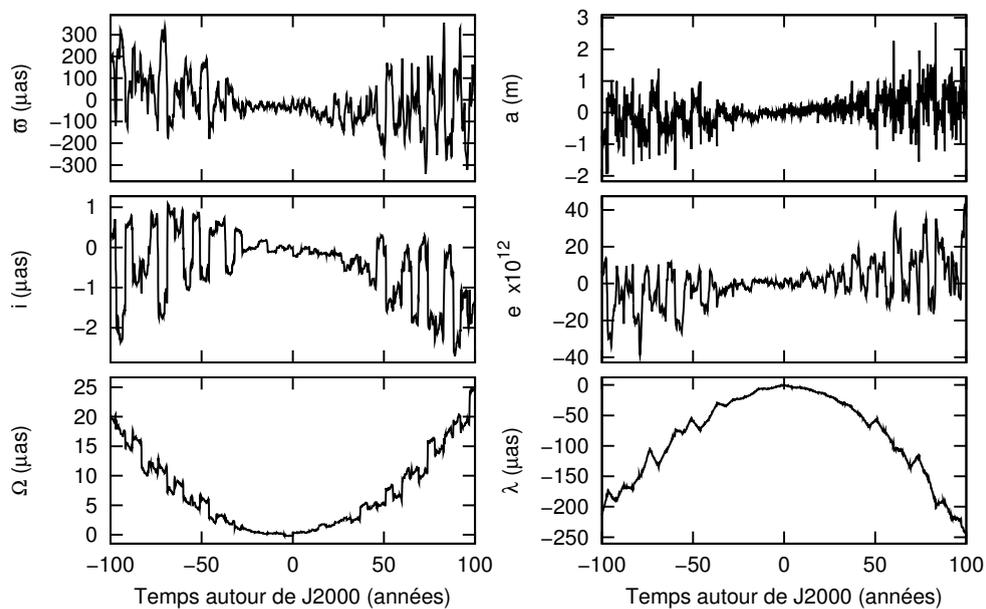


FIGURE 11.27 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques du barycentre Terre-Lune (ICRF)

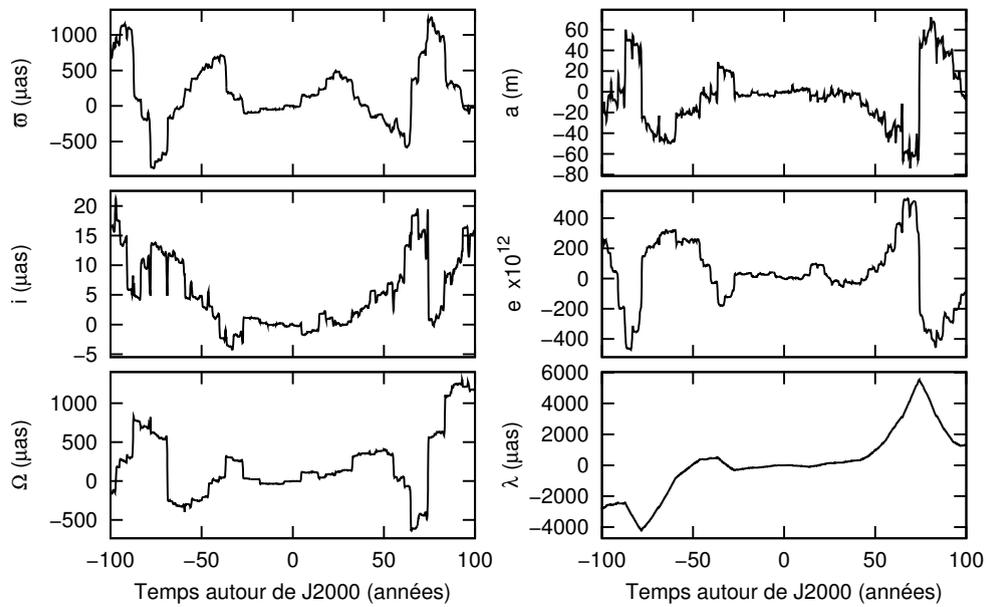


FIGURE 11.28 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de Mars

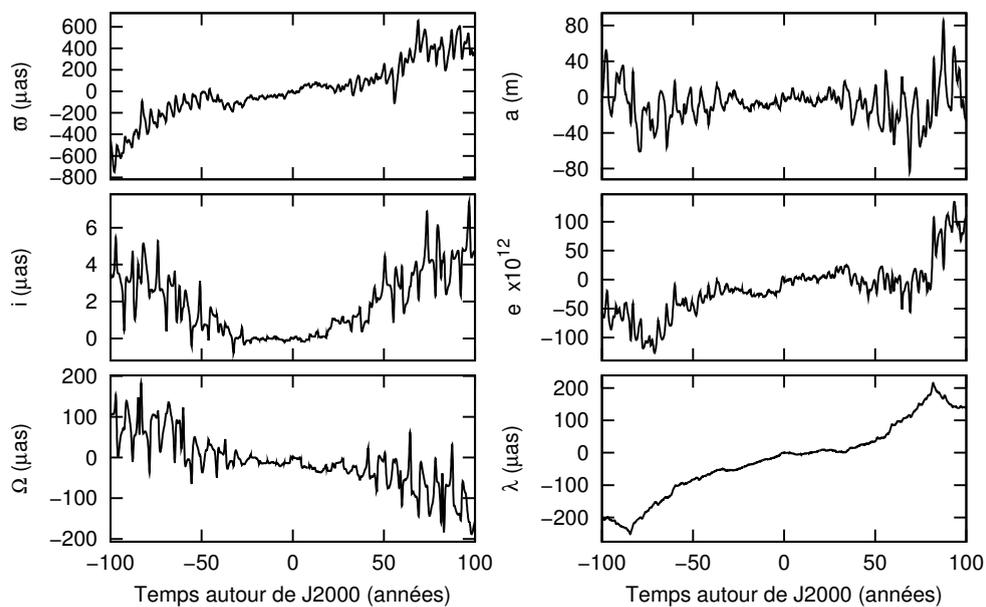


FIGURE 11.29 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de Jupiter

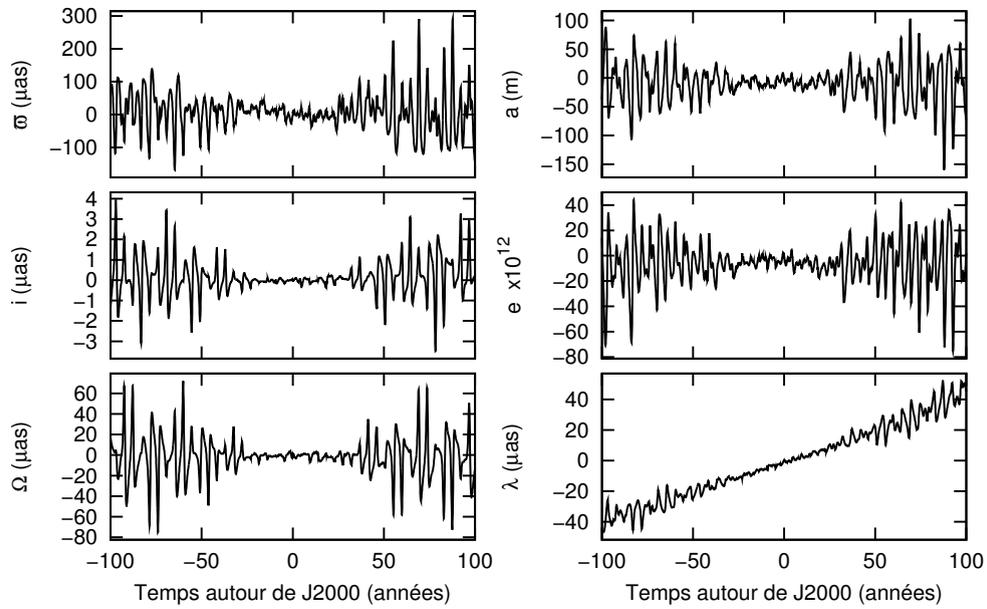


FIGURE 11.30 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de Saturne

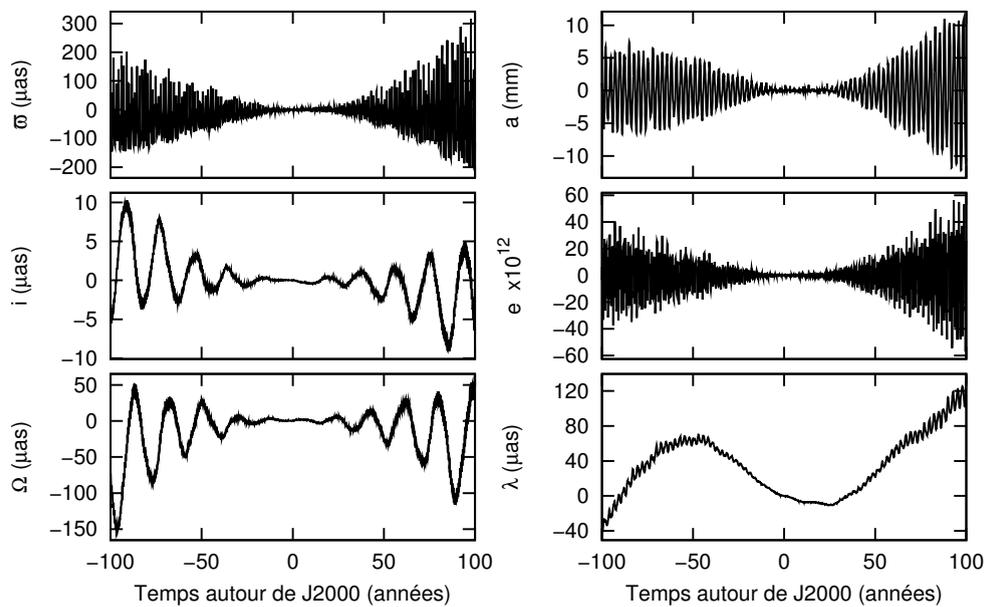


FIGURE 11.31 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les éléments elliptiques de la Lune

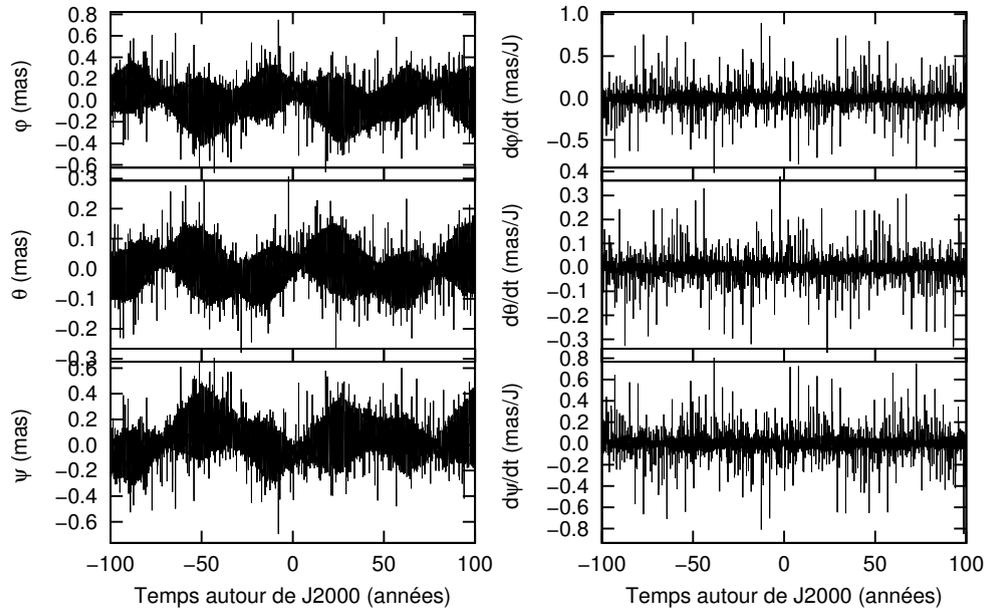


FIGURE 11.32 – Différences entre INPOP05 et DE405 sur les librations de la Lune

TABLE 11.10 – Différences maximales entre INPOP05 et DE405 sur 100 ans autour de J2000. Pour les planètes et Pluton, les comparaisons portent sur les distances r (en m), latitudes φ et longitudes λ (en microsecondes de degré) héliocentriques dans l'écliptique moyen J2000. Pour la Lune, les comparaisons portent sur ces mêmes variables, mais géocentriques et les distances sont exprimées en mm.

Corps	Δr	$\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$
Mercure	25.2	79	664
Venus	2.1	31	489
EMB	7.6	10	266
Mars	515.0	203	6258
Jupiter	107.5	9	253
Saturne	35.8	2	46
Uranus	43.9	0.4	13
Neptune	76.1	1	14
Pluton	117.8	2	7
Lune	33.4 mm	21	158

11.3 Additifs à (Fienga et al., 2008)

La solution INPOP05 décrite précédemment n'est en réalité pas la solution la plus proche de DE405 qu'il est possible de construire. Outre le problème de la précession qui reste incertaine, la date origine des intégrations qui diffère (1^{er} janvier 2000 à 12h00, soit J2000 pour INPOP, 28 juin 1969 pour DE405), il subsiste des différences dans le modèle dynamique ; en particulier :

- le barycentre du Système solaire est déterminé dans INPOP en tenant compte des termes $\dot{\mu}_i^*$ alors qu'ils sont négligés dans DE405 (voir le chapitre 1.3.3)
- les équations du mouvement du Soleil sont intégrées dans INPOP alors que sa position est déterminée en fonction de celles des autres corps dans DE405 en forçant le barycentre à rester fixe à l'origine du repère (les termes $\dot{\mu}_i^*$ étant négligés, les équations sont donc incomplètes, voir le chapitre 1.3.4.2)
- les équations du mouvement de tous les astéroïdes sont intégrées dans INPOP tandis que dans DE405, Cérés, Pallas et Vesta sont sur des orbites fixées, et que les forces des 297 autres sur Mars, la Terre et la Lune sont imposées par des fonctions du temps

L'idée dans cette partie est de reprendre une modélisation des interactions ponctuelles proche de celle de DE200, où les astéroïdes (seulement 5 à l'époque, mais 300 ici) devront rester sur des orbites képlériennes (ou précessantes) fixées a priori. Ces derniers résultats n'ont été découverts qu'après l'écriture de l'article (Fienga et al., 2008).

Les diverses solutions calculées ici sont résumées dans le tableau 11.11 et détaillées dans les paragraphes qui suivent.

Pour toutes ces solutions, le barycentre du Système solaire (et donc la position du Soleil lorsqu'il est actualisé) est calculé en tenant compte des termes $\dot{\mu}_i^*$.

11.3.1 Influence du placement du Soleil

Les différences entre l'intégration des équations du mouvement du Soleil et son placement en fonction des positions des autres corps avaient déjà été exposées au chapitre 1.3.4.2. La comparaison avait alors été effectuée dans le cadre d'un modèle cohérent, c'est-à-dire que tous les corps interagissaient entre eux. Ce n'est plus le cas avec INPOP05/DE405 puisque pour les 297 astéroïdes autres que Cérés, Pallas et Vesta, on tient compte des forces exercées par toutes les planètes mais de leurs réactions uniquement sur la Terre, Mars et la Lune. Cette incohérence induit une dérive du barycentre, puisque la somme des forces internes au Système solaire n'est pas nulle. On construit donc la solution b1, sur le modèle d'INPOP05, mais au lieu d'intégrer ses équations du mouvement, le Soleil est placé de manière à conserver le barycentre du Système solaire à l'origine du repère. Le tableau 11.12 montre les différences entre b1 et INPOP05, entre b1 et DE405, et celles entre INPOP05 et DE405 (simulations effectuées sur 100 ans de part et d'autre de J2000).

Pour Jupiter, les planètes intérieures et la Lune, on remarque que les différences entre b1 et INPOP05 sont bien inférieures (au moins un ordre de grandeur) à celles entre INPOP05 et DE405.

Pour les autres planètes, les écarts sont significatifs, mais ne permettent pas d'obtenir une

TABLE 11.11 – Résumé des différentes configurations testées.

	Soleil intégré	Soleil placé
Astéroïdes intégrés	INPOP05	b1
Astéroïdes imposés sur des orbites képlériennes	b3	c3
Astéroïdes imposés sur des orbites précessantes	b4	c4

TABLE 11.12 – Comparaisons du placement ou de l'intégration du Soleil sur les positions héliocentriques des corps (géocentrique pour la Lune). La première colonne b1-INPOP05 permet de voir les écarts générés entre l'intégration des équations du mouvement du Soleil et son placement en fonction des positions des autres corps. Les deuxième et troisième colonnes contiennent les écarts entre la solution b1 et DE405 d'une part, entre INPOP05 et DE405 d'autre part. Les comparaisons sont effectuées sur les écarts maximum des positions héliocentriques des planètes, géocentrique pour la Lune. Les résultats sont exprimés en m (en mm pour la Lune).

	b1-INPOP05	b1-DE405	INPOP05-DE405
Mercure	1.5	150	150
Vénus	3.8	260	260
EMB	3.4	190	200
Mars	16	6400	6400
Jupiter	65	930	1000
Saturne	200	130	310
Uranus	74	220	180
Neptune	115	330	320
Pluton	130	200	270
Lune	2 mm	280 mm	280 mm

solution plus proche de DE405. La seule amélioration de b1 par rapport à INPOP05 est obtenue pour Saturne (et dans une moindre mesure pour Pluton), pour laquelle la dérive en longitude a été légèrement améliorée.

L'intégration du Soleil au lieu de son placement ne permet donc pas d'expliquer les écarts entre DE405 et INPOP05.

11.3.2 Forçage par les astéroïdes

Avec INPOP05, on a accès (en tant que sous-produit) aux vecteurs positions-vitesses de chacun des 300 astéroïdes dont on intègre les équations du mouvement. L'idée ici consiste à utiliser ces trajectoires intégrées et de les injecter dans une nouvelle solution qui n'intègre plus que les équations du mouvement des planètes. Plutôt que de construire des polynômes d'interpolation à partir de leurs positions, on modélisera leurs trajectoires par des orbites képlériennes (éléments elliptiques constants, sauf la longitude) ou précessantes (éléments elliptiques variant linéairement avec le temps).

Des positions-vitesses des astéroïdes intégrées avec INPOP05, on déduit les éléments elliptiques instantanés $(a, \lambda, e, i, \Omega, \varpi)$ au cours du temps (simulation effectuée sur 100 ans de part et d'autre de J2000).

Pour les orbites précessantes, chaque variable elliptique est modélisée par une fonction affine du temps, dont les coefficients (2 par variable soit 12 au total par astéroïde) sont ajustés par moindres carrés sur les éléments elliptiques instantanés.

On procède de la même manière pour les orbites képlériennes, à la différence que les fonctions sont constantes. On continue cependant à approcher la longitude par une fonction affine du temps. Les trajectoires de chaque astéroïde sont donc caractérisées par 7 paramètres.

Remarque : dans le cadre du problème des deux corps, les éléments elliptiques qui décrivent les orbites képlériennes sont constants, exceptée la longitude moyenne qui varie linéairement avec le temps. Sa dérivée est appelée moyen mouvement n , qui est lié au demi-grand axe a par

la relation $n^2 a^3 = \mu$, où μ est la somme des masses des deux corps multipliée par la constante de la gravitation G . Pour les orbites képlériennes ajustées ici sur les trajectoires intégrées des astéroïdes, la dérive en longitude est indépendante du demi-grand axe.

Les courbes de la figure 11.33 illustrent pour Cérés ces deux types d'orbites. Les courbes noires représentent les éléments elliptiques instantanés calculés à partir des trajectoires intégrées des astéroïdes (INPOP05). Les courbes grises pointillés et grises pleines représentent respectivement leurs ajustements par les orbites précessantes et les orbites képlériennes. On voit que les orbites précessantes permettent de mieux approcher les trajectoires intégrées.

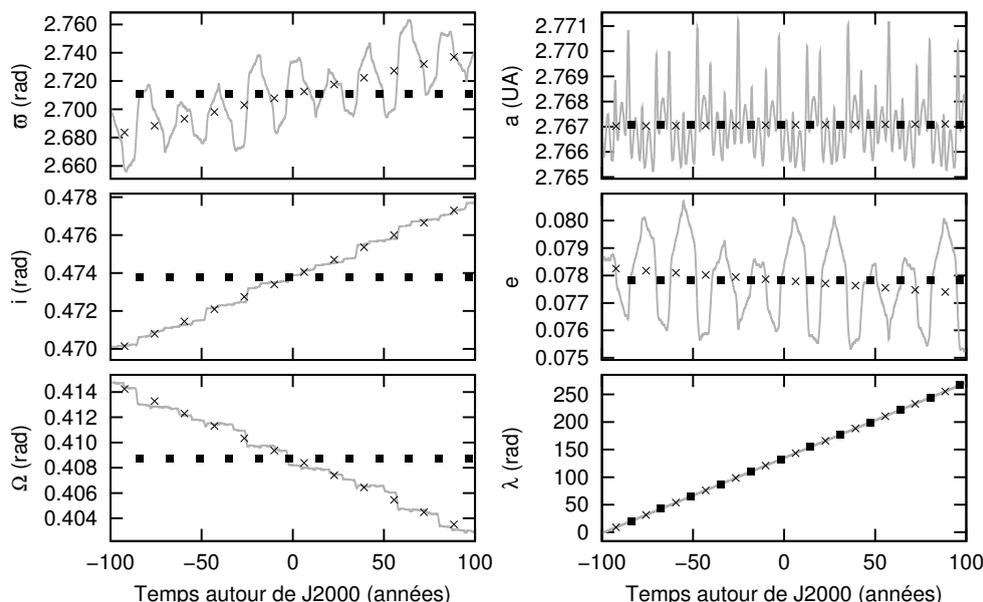


FIGURE 11.33 – Cérés : comparaison entre les éléments elliptiques vrais (courbes grises), approchés par des fonctions constantes (carrés noirs) ou linéaires (croix noires).

Ce résultat est également vérifié sur les coordonnées cartésiennes, comme le montrent les courbes de la figure 11.34. Les positions issues de l'intégration des équations du mouvement de Cérés sont comparées d'une part à celles déduites de l'approximation képlérienne de son orbite, et d'autre part à celles déduites de son orbite précessante.

Remarque : dans les perturbations des astéroïdes sur les planètes, seul le terme newtonien (expression 1.3) est pris en compte et ne nécessite la connaissance que de la position (pas de la vitesse) de l'astéroïde. Or, on a vu au paragraphe 6.1.4 qu'une meilleure approximation des éléments elliptiques ne se traduisait pas obligatoirement par une meilleure approximation des positions. Un troisième type de construction a donc été testé en ajustant par moindres carrés les éléments elliptiques des orbites képlériennes sur les positions cartésiennes (mais pas sur les vitesses) des astéroïdes. Cette méthode n'est cependant pas exposée ici car elle n'apporte finalement rien aux deux autres décrites ci-dessus.

Les simulations b3 et b4 sont construites sur le même modèle qu'INPOP05, à la différence qu'on n'intègre plus les équations du mouvement des trois astéroïdes de Type-1 (Cérés, Pallas et Vesta), mais on impose à ces derniers de rester sur les orbites construites précédemment (képlériennes pour b3, précessantes pour b4).

En comparant b4 à DE405 d'une part et INPOP05 à DE405 d'autre part, on observe qu'imposer des orbites précessantes aux astéroïdes dégrade fortement la solution, et ce sur tous les corps. Une illustration est donnée avec les éléments elliptiques de Jupiter (courbes de la figure 11.35).

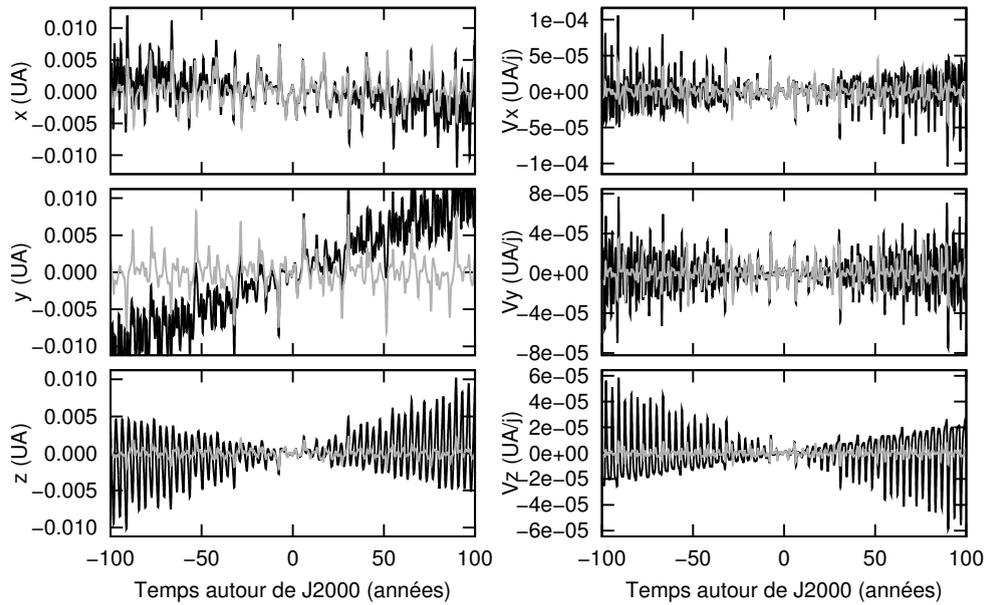


FIGURE 11.34 – Les coordonnées cartésiennes de Cérés obtenues par intégration des équations du mouvement (avec INPOP05) sont comparées à celles déduites des orbites fixes képlériennes (différences en noir) et à celles déduites des orbites précessantes (différences en gris).

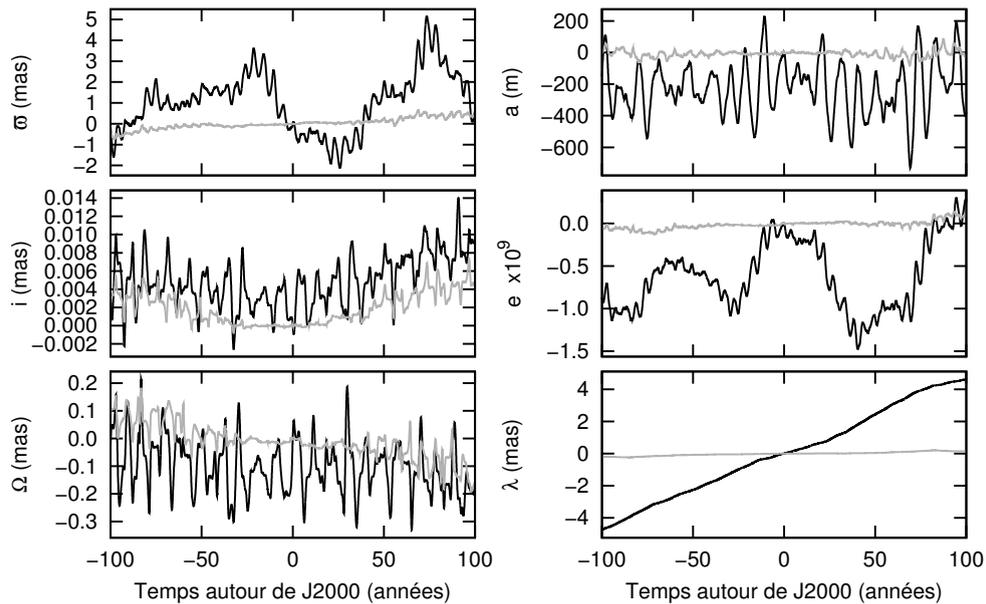


FIGURE 11.35 – Dégradation des éléments elliptiques de Jupiter due à l'utilisation d'orbites précessantes. Les courbes noires représentent les différences entre la solution b4 et DE405, les grises celles entre INPOP05 et DE405.

Dans le cas des orbites képlériennes, les résultats dépendent des corps. Pour les planètes au delà de Mars, la dégradation est générale sur tous les éléments elliptiques; pour Jupiter par exemple, la dégradation est la même que celle observée lors de l'utilisation des orbites précessantes (voir les courbes de la figure 11.35). Par contre, pour Mercure et Vénus, les résultats sont plus nuancés. Si on observe un signal plus bruité pour le périhélie, le demi-grand axe et l'excentricité, les dérives quadratiques dans le nœud et l'inclinaison observées avec INPOP05

sont réduites. Une illustration est donnée à la figure 11.36 avec le tracé des éléments elliptiques de Vénus.

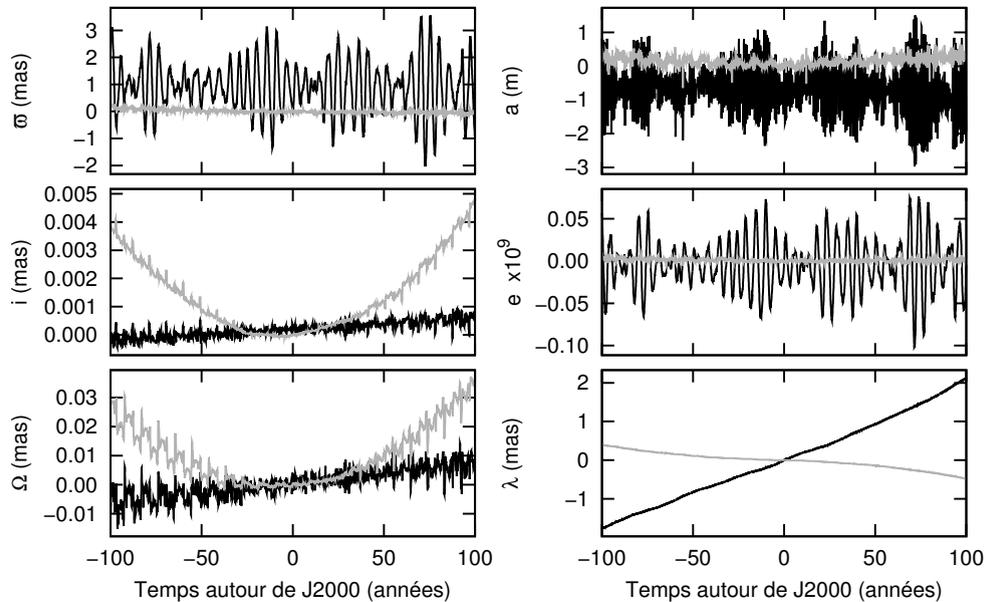


FIGURE 11.36 – Influence des astéroïdes forcés sur des orbites képlériennes sur les éléments elliptiques de Vénus. Les courbes noires montrent les différences entre la solution b3 et DE405, les grises celles entre INPOP05 et DE405.

11.3.3 Combinaison Soleil actualisé - forçage des astéroïdes

On a vu dans les deux paragraphes précédents que placer le Soleil de manière à conserver un barycentre fixe, ou forcer les trajectoires des astéroïdes ne permettait pas d’obtenir une solution plus proche de DE405 que ne l’est INPOP05. La solution “miracle” est obtenue en combinant ces deux méthodes. Ainsi, en comparant la solution c3 à DE405, on remarque que les écarts sont parfois significativement réduits par rapport à ceux obtenus en comparant INPOP05 et DE405. Les améliorations sont plus particulièrement sensibles sur Vénus et la Lune. Pour Vénus, comme le montrent les courbes de la figure 11.37, on conserve les améliorations sur le nœud et l’inclinaison que l’on avait observées avec la solution b3 (élimination des dérives quadratiques), sans dégrader les autres variables.

Pour la Lune (voir les courbes de la figure 11.38), l’amélioration est générale, avec en particulier l’atténuation des oscillations dans le nœud et l’inclinaison, longtemps attribuées à une différence dans le modèle de précession-nutation (voir le paragraphe 11.1.7).

Il faut noter à ce stade que l’approximation des trajectoires des astéroïdes par des orbites képlériennes est ici indispensable. L’utilisation des orbites précessantes ne permet pas d’obtenir ces améliorations.

En conclusion, pour retrouver DE405, il est nécessaire de dégrader le modèle de prise en compte des astéroïdes. À la lecture des différents articles décrivant les solutions du JPL (Newhall et al., 1983; Standish et al., 1995; Standish, 1998, 2006), il semblait logique que les 3 gros astéroïdes étaient imposés fixes sur des orbites képlériennes (c’était d’ailleurs le cas dans le programme de Moshier (1992)). Mais lors de la soumission de l’article (Fienga et al., 2008), E. M. Standish nous avait affirmé que certes, les équations du mouvement des astéroïdes n’étaient pas intégrées en même temps que celles des planètes, mais que le JPL ne se contentait pas de l’approximation képlérienne dans la détermination de leurs trajectoires.

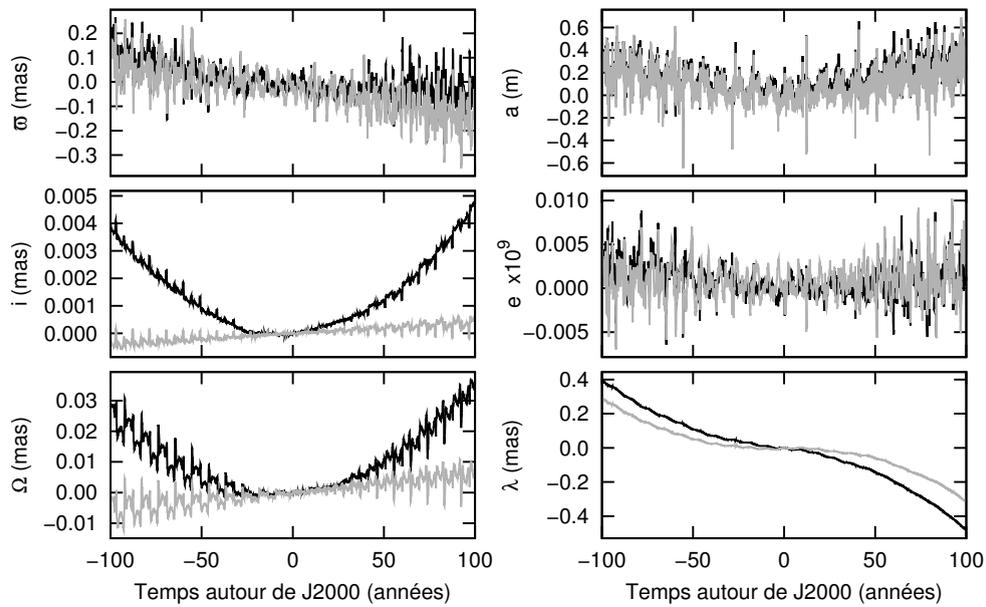


FIGURE 11.37 – Influence du forçage des astéroïdes sur des orbites képlériennes et du Soleil actualisé sur les éléments elliptiques de Vénus. Les courbes noires montrent les différences entre INPOP05 et DE405, les grises celles entre la solution c3 et DE405.

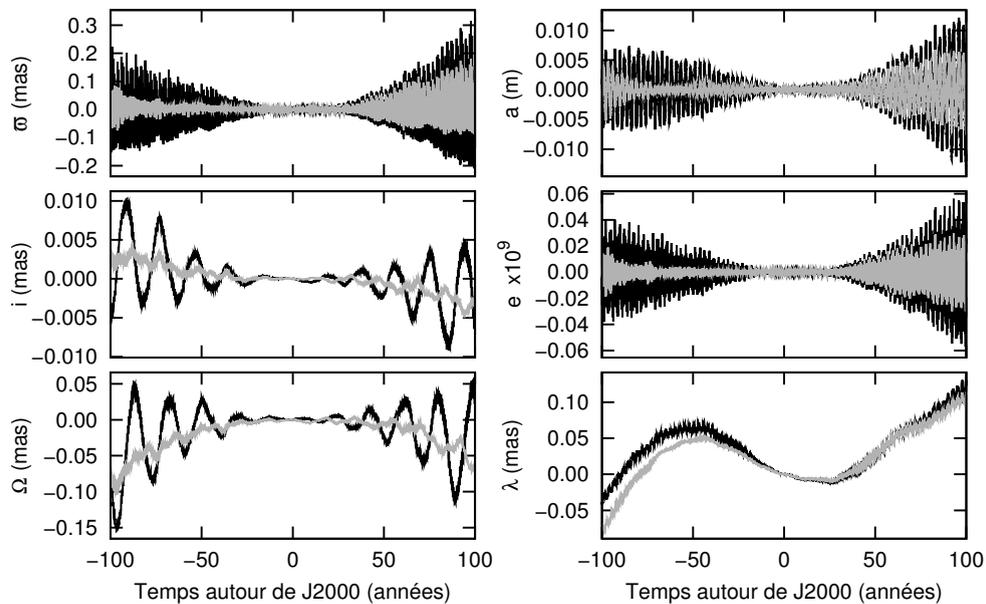


FIGURE 11.38 – Influence du forçage des astéroïdes sur des orbites képlériennes et du Soleil actualisé sur les éléments elliptiques de la Lune. Les courbes noires montrent les différences entre INPOP05 et DE405, les grises celles entre la solution c3 et DE405.

Chapitre 12

INPOP06

INPOP05 a permis de comprendre et de vérifier la bonne implémentation du modèle dynamique. Avec INPOP06, l'objectif est d'en éliminer les quelques inconsistances et d'y apporter quelques améliorations. Ces changements nécessiteront ensuite un nouvel ajustement aux observations planétaires, y compris celles disponibles depuis la parution de DE405. Cette solution est aussi décrite plus sommairement dans (Fienga et al., 2008). Elle a été diffusée sur le site www.imcce.fr/inpop dans ses versions INPOP06b et INPOP06c, qui ne diffèrent que par les ajustements aux observations planétaires. Elle est à la base depuis 2007 de l'ouvrage "Éphémérides Astronomiques - Connaissance des Temps", publié par l'IMCCE.

12.1 Changements dans le modèle dynamique

12.1.1 Astéroïdes

On a vu au chapitre 11.1.2 que la modélisation des astéroïdes d'INPOP05 était incohérente, puisque les 297 astéroïdes du deuxième groupe subissaient les forces exercées par toutes les planètes, mais n'exerçaient en retour une force que sur la Terre, Mars et Vénus. Cette incohérence était indispensable pour retrouver DE405.

En théorie, on devrait tenir compte des mêmes interactions pour tous les corps du Système solaire, en particulier de toutes les interactions mutuelles newtoniennes ainsi que de toutes les corrections relativistes. Dans ce cas, le nombre d'interactions à considérer varie avec le carré du nombre de corps, ce qui augmente considérablement les temps de calcul de la solution. Il est alors préférable, dans la mesure où certaines interactions n'ont qu'un effet négligeable sur la solution, d'accepter une réduction de la cohérence dans le modèle dynamique pour gagner en temps de calcul sans toutefois perdre en précision.

Des tests ont été effectués avec les simulations qui suivent (la numérotation est interne à ce paragraphe). Elles sont construites à partir d'INPOP05, avec les 300 mêmes astéroïdes et les mêmes valeurs de conditions initiales et paramètres. Seul change le modèle des interactions ponctuelles (newtoniennes et corrections relativistes), dont les schémas sont illustrés en figure 12.1.

12.1.1.1 Solution 1 - modèle complet relativiste et newtonien

Pour cette solution, on choisit de tenir compte des interactions mutuelles newtoniennes ainsi que des corrections relativistes pour tous les corps. Si on note l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{\text{Soleil, planètes, Lune, Pluton, 300 astéroïdes}\}$$

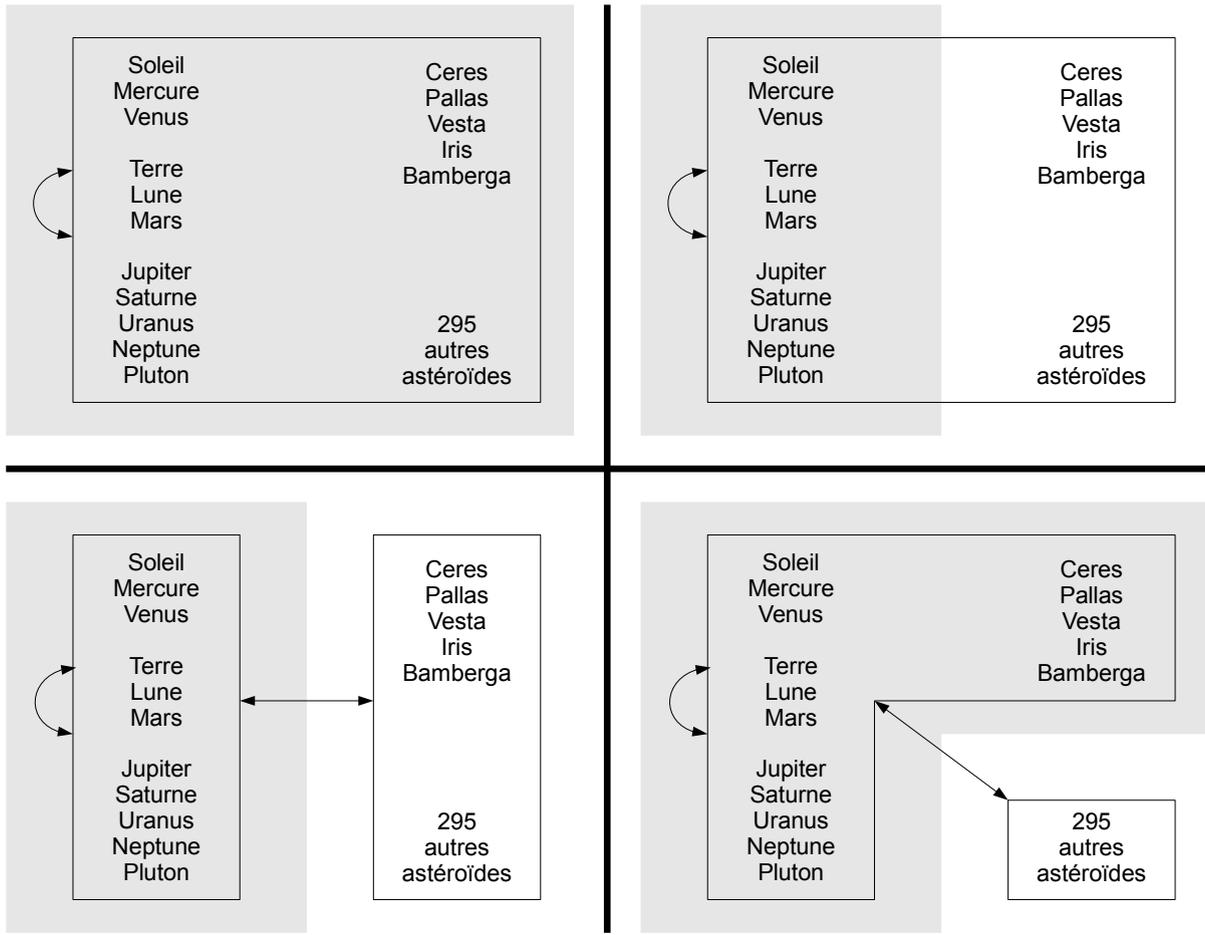


FIGURE 12.1 – Schémas des interactions ponctuelles pour les solutions 1 (en haut à gauche), 2 (en haut à droite), 3 (en bas à gauche) et 4 (en bas à droite). Les flèches indiquent le sens des perturbations newtoniennes. Les zones grisées indiquent les corps pour lesquels on tient compte des corrections relativistes.

alors pour chaque corps i de \mathcal{A} , les sommes des accélérations newtoniennes (expression 1.3) et des corrections relativistes (expression 1.12) sont effectuées sur tous les corps j de $\mathcal{A} - \{i\}$.

Il s'agit donc de la solution dont le modèle des interactions ponctuelles est le plus complet, mais également la plus coûteuse en temps de calcul (environ 5h30 pour 100 ans de simulation). Elle servira de référence pour la suite de cette étude.

12.1.1.2 Solution 2 - modèle complet newtonien et partiel relativiste

À partir du modèle dynamique de la solution 1 du paragraphe précédent, on choisit de négliger les corrections relativistes des 300 astéroïdes. On conserve cependant toutes les interactions newtoniennes ponctuelles. Si on note les ensembles :

$$\mathcal{A}_1 = \{\text{Soleil, planètes, Lune, Pluton}\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{300 \text{ astéroïdes}\}$$

Alors :

- pour chaque corps i de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, la somme des accélérations newtoniennes (expression 1.3) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 - \{i\}$.
- pour chaque corps i de \mathcal{A}_1 , la somme des corrections relativistes (expression 1.12) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 - \{i\}$.

Le modèle étant simplifié par rapport à la solution 1, son temps de calcul est diminué (ramené à environ 1h10).

12.1.1.3 Solution 3 - modèle partiel relativiste et newtonien

À partir du modèle dynamique de la solution 2 du paragraphe précédent, outre les corrections relativistes de tous les astéroïdes, on choisit de négliger également leurs perturbations mutuelles. Si on reprend les mêmes ensembles que pour la solution 2, alors

- pour chaque corps i de \mathcal{A}_1 , la somme des accélérations newtoniennes (expression 1.3) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 - \{i\}$.
- pour chaque corps i de \mathcal{A}_1 , la somme des corrections relativistes (expression 1.12) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 - \{i\}$.
- pour chaque corps i de \mathcal{A}_2 , la somme de des accélérations newtoniennes (expression 1.3) est effectuée sur tous les corps j de \mathcal{A}_1 .

Son temps de calcul est d'environ 10 minutes pour 100 ans.

12.1.1.4 Solution 4 - modèle partiel relativiste et newtonien

À partir du modèle dynamique de la solution 3 du paragraphe précédent, on choisit de réintroduire les perturbations mutuelles et les corrections relativistes pour les 5 astéroïdes Cérés, Pallas, Vesta, Iris et Bamberga. On note les ensembles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\text{Soleil, planètes, Lune, Pluton, Cérés, Pallas, Vesta, Iris, Bamberga}\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{295 \text{ autres astéroïdes}\}\end{aligned}\tag{12.1}$$

Alors :

- pour chaque corps i de \mathcal{A}_1 , la somme des accélérations newtoniennes (expression 1.3) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 - \{i\}$.
- pour chaque corps i de \mathcal{A}_1 , la somme des corrections relativistes (expression 1.12) est effectuée sur tous les corps j de $\mathcal{A}_1 - \{i\}$.
- pour chaque corps i de \mathcal{A}_2 , la somme des accélérations newtoniennes (expression 1.3) est effectuée sur tous les corps j de \mathcal{A}_1 .

Ce sera le modèle dynamique utilisé pour INPOP06. Les différences avec INPOP05 sont les suivantes :

- les deux astéroïdes Iris et Bamberga font partie du groupe 1 (celui pour lequel on tient compte des interactions newtoniennes mutuelles) au lieu du groupe 2
 - on prend en compte les corrections relativistes pour les astéroïdes du groupe 1
 - pour les astéroïdes du groupe 2, on tient compte des réactions exercées sur Mercure, Vénus, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton, ainsi que sur tous les astéroïdes du groupe 1
- Comparé à celui de la solution 3, le temps de calcul augmente d'environ 20% (à environ 12 minutes pour 100 ans).

12.1.1.5 Comparaison des solutions et choix du modèle dynamique

Les différences maximales entre les solutions (1), (2), (3) et (4) sont données dans le tableau 12.1. Les comparaisons portent sur les positions héliocentriques des planètes, du barycentre Terre-Lune, de Pluton et sur la position géocentrique de la Lune. Elles sont exprimées en millimètres sur une durée de 100 ans de part et d'autre de J2000. Le tableau comporte également des comparaisons sur les positions héliocentriques de quelques astéroïdes significatifs. Plus importantes que pour les autres corps, elles sont exprimées en kilomètres.

TABLE 12.1 – Ce tableau résume les différences maximales sur 100 ans de part et d’autre de J2000 entre les solutions 1, 2, 3 et 4 sur les positions héliocentriques des planètes et des astéroïdes, géocentrique pour la Lune. Les résultats sont exprimés en millimètres pour les planètes, Pluton et la Lune, en kilomètres pour les astéroïdes.

	(1)-(2)	(1)-(3)	(1)-(4)
Mercure (mm)	6	6	3
Vénus (mm)	7	8	2
EMB (mm)	11	16	6
Mars (mm)	380	800	240
Jupiter (mm)	22	73	10
Saturne (mm)	2	4	1
Uranus (mm)	2	3	1
Neptune (mm)	2	3	1
Pluton (mm)	2	3	2
Lune (mm)	0.18	0.18	0.06
Ceres (1) (km)	1838	2228	0.1
Pallas (2) (km)	3630	8402	0.15
Vesta (4) (km)	2433	7947	0.7
Iris (7) (km)	3127	1491	0.32
Bamberg (324) (km)	3225	13942	0.03
Victoria (12) (km)	4343	9025	4543
Thétis (17) (km)	2458	80125	6336
Winchester (747) (km)	5475	3849	5448

La première colonne, qui contient les différences maximales entre les solutions (1) et (2), met en évidence les effets de la suppression des corrections relativistes pour les astéroïdes. La deuxième, qui présente celles entre les solutions (1) et (3), montre les conséquences induites si on néglige à la fois les corrections relativistes et les interactions newtoniennes mutuelles entre les astéroïdes.

On peut remarquer que même si les écarts sur les astéroïdes peuvent atteindre plusieurs dizaines de milliers de kilomètres, les différences sur les planètes, la Lune et Pluton sont très faibles, et surtout négligeables devant les précisions des observations planétaires (voir les résidus de la solution INPOP06 dans Fienga et al., 2008). Le même genre de résultats avait été obtenu lors de tests de solutions de travail, lorsque les conditions initiales à J2000 des astéroïdes étaient issues de différentes sources (base de données ASTORB, site web de l’IMCCE, ...). Les écarts dans les conditions initiales des astéroïdes conduisaient là aussi à des trajectoires parfois très différentes pour les astéroïdes sans effet significatif sur celles des autres corps.

Le cas de Mars pourrait sembler litigieux, puisque les meilleures données (MEX, MGS) ont une précision de l’ordre du mètre. Mais il faut rappeler ici que les comparaisons du tableau 12.1 ont été effectuées sur une période de plus et moins 100 ans autour de J2000. Si on se limite à 30 ans autour de J2000 (intervalle qui contient à la fois les observations MEX, MGS et Viking), on obtient des différences inférieures à 9 centimètres (et même inférieures à 8 millimètres si on compare les solutions (1) et (4), dont le modèle des interactions ponctuelles est le même que pour INPOP06). Confrontées aux observations, ces 4 solutions seraient équivalentes (conditionnel, car les résidus n’ont pas été calculés pour chacune d’elles), d’autant plus qu’un ajustement de conditions initiales et/ou de paramètres permettrait de réduire encore ces écarts.

Les solutions (1) et (2) étant coûteuses en temps de calcul sans pour autant avoir d’effet

TABLE 12.2 – Ce tableau résume les différences maximales sur 100 ans autour de J2000 entre les solutions INPOP05 et DE405 d’une part, DE405 et la solution (4) d’autre part, sur les positions héliocentriques des planètes, géocentrique pour la Lune. Les résultats sont exprimés en mètres.

	DE405-(4)	DE405-INPOP05
Mercure	120	150
Vénus	180	270
EMB	200	200
Mars	6300	6300
Jupiter	81000	1000
Saturne	37000	310
Uranus	20000	180
Neptune	23000	310
Pluton	19000	270
Lune	0.29	0.29

significatif sur les planètes, leurs modèles d’interactions n’a pas été retenu pour celui d’INPOP06. Celui de la solution (3) est le plus adapté au calcul d’éphémérides, car rapide à calculer tout en conservant des écarts négligeables par rapport au modèle complet. Mais c’est finalement celui de la solution (4) qui a finalement été retenu, car il est proche de celui utilisé dans les éphémérides russes postérieures à EPM2000 décrites dans (Pitjeva, 2001, 2005a,b, 2008, 2009).

Remarque : ces justifications pour le choix du modèle des interactions ponctuelles ne valent que parce qu’on n’utilise pas (pour l’instant) de données sur les astéroïdes pour en contraindre les trajectoires dans INPOP. Selon la précision de ces observations (optiques pour la plupart), il serait alors possible que plusieurs milliers de kilomètres d’écart puissent être détectables dans les résidus, ce qui permettrait de différencier les modèles. Mais dans la mesure où l’objectif avec INPOP est d’obtenir des éphémérides des planètes, du Soleil, de la Lune et de Pluton, une meilleure détermination des orbites des astéroïdes (qui ne sont qu’un “produit dérivé”) n’est pas utile pour l’instant.

Le tableau 12.2 montre les comparaisons (en m) entre DE405, INPOP05 (décrite en 11) et la solution (4). Comme on peut le remarquer pour les planètes extérieures, la prise en compte de la réaction des astéroïdes sur toutes les planètes (et pas uniquement la Terre, la Lune et Mars) conduit à des écarts plus importants avec INPOP05. L’incohérence dans la modélisation des interactions mutuelles d’INPOP05 était donc indispensable pour retrouver DE405. Pour le barycentre Terre-Lune, Mars et la Lune géocentrique, on ne remarque pas de changement, ce qui est logique puisque les forces newtoniennes (terme principal) qui s’exercent sur la Terre, la Lune et Mars ont été conservées entre INPOP05 et la solution (4). Pour Mercure et Vénus, on observe une “amélioration” de la solution (4) par rapport à INPOP05, mais l’ordre de grandeur du changement est bien inférieur à la “dégradation” obtenue sur les planètes extérieures.

12.1.2 Orientation de la Terre

Dans INPOP05, l’orientation de la Terre était forcée par un modèle de précession-nutation. Cette manière de procéder a deux inconvénients majeurs :

- les longues périodes des angles de la précession sont modélisées par des fonctions polynômiales qui divergent en l’infini. À partir d’un temps suffisamment long (quelques milliers d’années en pratique), leurs valeurs deviennent importantes et n’ont plus aucune signification physique. Les modèles de précession n’ont donc qu’une durée de validité limitée, ce

- qui restreint d'autant la possibilité de calculer une solution planétaire sur le long terme.
- un modèle de précession-nutation est construit à partir d'une solution planétaire, et inversement. Le forçage de l'orientation de la Terre risque donc d'être incompatible avec la solution obtenue.

Intégrer les équations de la rotation de la Terre en même temps que celles du mouvement des corps permet de pallier à ces deux inconvénients.

12.1.2.1 Équation différentielle

Mais utiliser les mêmes variables que pour la Lune (angles d'Euler) poserait un problème. En effet, la vitesse de rotation de la Terre est rapide (1 tour par jour), ce qui introduirait une courte période dans le système. Le pas d'intégration devrait être diminué, augmentant ainsi à la fois le temps calcul de la solution et dégradant sa précision sur le long terme.

La Terre étant considérée comme à symétrie de révolution (pas de coefficients tesséraux dans son potentiel), on peut utiliser les développements vus au chapitre 5. Son orientation sera donc modélisée par son vecteur moment cinétique \vec{G} (et plus rigoureusement par \vec{G}/MR^2 , dont l'évolution est régie par la même équation différentielle).

Remarque : pour INPOP06, les moments dus aux J_3 et J_4 de la Terre sont négligés. Leur effet principal (outre une légère dérive quadratique en obliquité) est d'introduire une dérive linéaire dans l'angle de précession, qui peut être compensée par un ajustement de constante (voir le paragraphe 13.1.2.3).

\vec{G} est donc solution d'une équation différentielle qui peut être intégrée en même temps que l'équation de libration de la Lune et celles des mouvements des corps. Ses coordonnées (G_x, G_y, G_z) exprimées dans le repère fixe d'intégration (ICRF) font partie du vecteur d'état et doivent être initialisées à la date origine des intégrations (J2000).

Mais plutôt que d'en imposer directement les valeurs initiales (à J2000), on a choisi comme paramètres libres les deux coordonnées (ICRF) X_0 et Y_0 du vecteur directeur porté par \vec{G} ainsi que le rapport C/MR^2 (troisième moment d'inertie divisé par la masse et le carré du rayon équatorial moyen) de la Terre. De X_0 et Y_0 , on déduit la troisième coordonnée $Z_0 = \sqrt{1 - X_0^2 - Y_0^2}$ du vecteur directeur $\vec{G}/\|\vec{G}\|$. Ensuite, sa norme est déduite du rapport C/MR^2 et de la vitesse de rotation de la Terre ω_T . Dans le repère des axes principaux d'inertie de la Terre, le vecteur \vec{G} a pour coordonnées :

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Le carré de sa norme est donc

$$\|\vec{G}\|^2 = A^2\omega_x^2 + A^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = C^2\omega_T^2 + (A^2 - C^2)\omega_x^2 + (A^2 - C^2)\omega_y^2 \quad (12.3)$$

Comme l'aplatissement dynamique de la Terre est faible ($J_2 \simeq 1.08 \times 10^{-3}$), la différence $A - C$ est petite devant C . De même, ω_x et ω_y sont négligeables devant ω_T . On en déduit $\|\vec{G}/MR^2\| \simeq C\omega_T/MR^2$, ce qui permet d'initialiser le vecteur \vec{G}/MR^2 . Le choix de ces paramètres libres permet de conserver à la date J2000 la même vitesse de rotation de la Terre (qui intervient dans les effets de marées) que celle utilisée dans DE405. Elle est ensuite laissée libre d'évoluer et est calculée à partir de \vec{G} et de C/MR^2 (la figure 12.8 illustre son évolution).

12.1.2.2 Ajustement sur une théorie de l'orientation de la Terre

On a vu au paragraphe précédent que l'orientation de la Terre pouvait être intégrée en même temps que les équations du mouvements des corps. Il reste néanmoins nécessaire de la contraindre en l'ajustant sur un modèle de précession-nutation.

Comme on l'a vu lors de la construction d'INPOP05 (voir en particulier le chapitre 11), le modèle d'orientation de la Terre utilisé pour DE405 n'était pas clairement identifié. On suppose aujourd'hui que c'était la précession de Williams (1994) associée au terme principal en 18,6 ans des nutations de l'UAI80 (Wahr, 1981). Pour INPOP06, on aurait pu choisir d'ajuster le vecteur \vec{G} sur ce modèle pour minimiser les changements, mais il est tout de même préférable d'utiliser des modèles non seulement plus récents (et donc plus précis), mais également publiés afin de pouvoir y faire référence.

Un autre candidat possible était le Pôle Céleste Intermédiaire (CIP), défini par la précession de l'UAI2000, dont les développements sont donnés dans Capitaine et al. (2003), et les nutations MHB2000 de Mathews et al. (2002); ce modèle est publié et bien référencé. C'est d'ailleurs le modèle standard des Conventions IERS 2003. Il présente cependant quelques inconvénients :

- à la différence des modèles de Lieske et al. (1977), Williams (1994) ou Simon et al. (1994), il n'a pas été obtenu par intégration des équations de précession de l'équateur moyen. L'analyse des données de l'orientation de la Terre (mesures VLBI entre autres) montrait des dérivées linéaires dans les angles de nutations en longitude et obliquité, qui ne devraient par définition contenir que des termes périodiques (et de Poisson). La précession de l'UAI2000 a donc été obtenue à partir de celle de Lieske, en transférant ces termes linéaires des nutations vers la précession.
- la variation séculaire du J_2 terrestre n'y est pas prise en compte.

On définit le CIP-P03 comme le pôle (vecteur unitaire) de la Terre défini par la précession P03 de Capitaine et al. (2003, 2005) et les nutations de Mathews et al. (2002). Ce modèle a l'avantage d'avoir été déterminé par l'intégration des équations de précession et de tenir compte de la variation séculaire du J_2 . Il a de plus été choisi pour remplacer à partir du 1^{er} janvier 2009 celui de l'UAI2000 (résolution 1 de l'UAI 2006).

Les ajustements sur le CIP-P03 ont été effectués sur une période de 200 ans autour de J2000. Les modifications de X_0 et Y_0 permettent de rattraper d'éventuels décalages en X et Y , tandis que l'ajustement de C/MR^2 permet de compenser une éventuelle dérive linéaire dans l'angle de précession (ou en X).

12.1.2.3 Comparaisons intégration / forçage

Pour comparer les différentes méthodes de modélisation de l'orientation de la Terre, on effectue les trois simulations suivantes :

- solution 1 : on la force avec la précession P03 et les nutations de Mathews et al. (2002) (CIP-P03)
- solution 2 : on la force avec la précession P03 et la nutation principale en 18,6 ans de Mathews et al. (2002)
- solution 3 : on l'intègre comme décrit dans les paragraphes précédents.

La solution (1) est censée être la plus précise sur le court terme, et servira de référence pour les comparaisons; elle est par contre très coûteuse en temps de calcul, les nutations contenant plus de mille termes. La solution (2) est construite à la manière du JPL, en prenant des valeurs plus récentes pour la précession-nutation que celles utilisées dans la construction de DE405 : on remplace la précession de Williams (1994) par celle de Capitaine et al. (2003), et la nutation en 18,6 ans de Wahr (1981) par celle de Mathews et al. (2002). Enfin, la solution (3) est représentative du modèle utilisé pour INPOP06.

Les courbes de la figure 12.2 montrent les différences entre les solutions 1 et 3. Les comparaisons sont effectuées sur les coordonnées X et Y du vecteur directeur $\vec{G}/\|\vec{G}\|$ pour INPOP, et celles du CIP-P03 (s'agissant de vecteurs unitaires, la troisième coordonnée Z se déduit des deux autres et n'apporte pas d'information).

Ces écarts sont principalement dus aux effets de la Terre non rigide. En effet, les nutations IAU2000 sont obtenues à partir de celles pour une Terre rigide de (Souchay & Kinoshita, 1996,

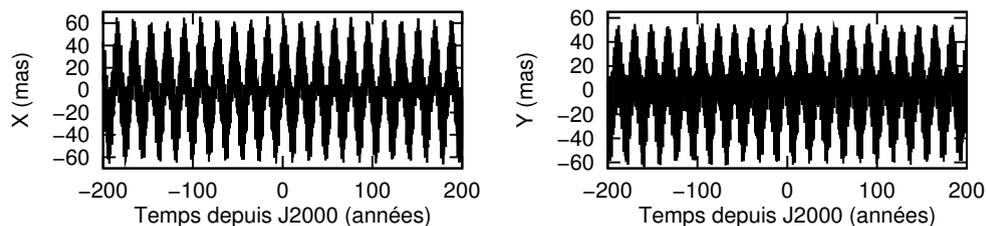


FIGURE 12.2 – Différences sur les coordonnées du pôle de la Terre entre le CIP-P03 et son intégration dans INPOP06.

1997; Souchay et al., 1999), dont les amplitudes sont corrigées par la fonction de transfert et l'ellipticité dynamique de Mathews et al. (2002). Même si tous les termes sont modifiés, la correction la plus importante est apportée à celui en 18,6 ans, ce qui explique la forme du signal. Pour plus d'information, se reporter au paragraphe 13.1.2.

Malgré ce signal, l'orientation de la Terre de la solution 3 reste meilleure que celle utilisée dans la solution 2 (illustration avec les courbes de la figure 12.3). En se limitant au terme en 18,6 ans, le JPL néglige les autres périodes, avec en particulier le terme en 6 mois dont l'amplitude dépasse la seconde d'arc.

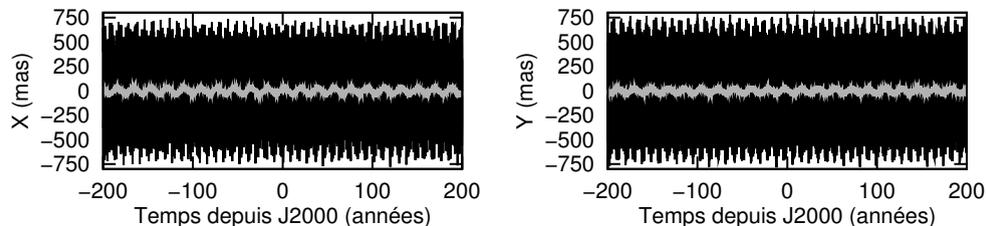


FIGURE 12.3 – Différences sur les coordonnées du pôle de la Terre entre le CIP-P03, son intégration dans INPOP06 (en gris) et le pôle “JPL” (en noir), ce dernier étant obtenu à partir du CIP-P03 en ne conservant que le terme principal en 18.6 ans des nutations.

Enfin, les courbes de la figure 12.4 illustrent la divergence de X et Y due à l'approximation des longues périodes dans le CIP-P03 par des fonctions polynômiales. On comprend alors pourquoi la solution à long terme DE406 du JPL se limite à 5000 ans dans le passé, car au delà, l'erreur sur l'orientation de la Terre devient trop importante pour représenter correctement la réalité.

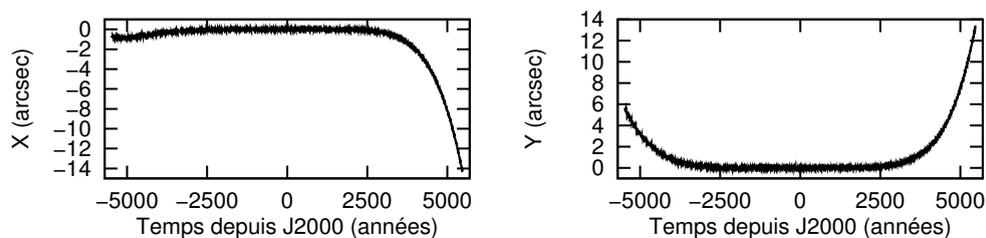


FIGURE 12.4 – Différences sur les coordonnées X et Y du pôle terrestre entre le CIP-P03 et son intégration dans INPOP06.

En résumé, l'orientation de la Terre intégrée dans INPOP présente toutes les périodes des nutations avec des erreurs sur les amplitudes dues aux effets non rigides, tandis que si elle est imposée comme au JPL, le terme en 18,6 est exact, mais d'autres périodes importantes sont négligées.

Les conséquences sur les distances mutuelles des corps sont néanmoins limitées. L'effet le plus visible est dans la trajectoire de la Lune autour de la Terre (avec en particulier des signaux dans le nœud et l'inclinaison, comparables à ceux illustrés par les courbes du paragraphe 11.1.7, lors des tests des différents modèles de précession-nutation). Mais l'objectif à terme est d'ajuster les solutions aux données Laser-Lune et il est alors plus judicieux de comparer les solutions sur la distance Terre-Lune (le terme principal d'une observation LLR). Comparées à la solution de référence (1), les solutions (2) et (3) présentent des écarts inférieurs à 10 cm (voir courbes de la figure 12.5). Ils ne sont certes pas négligeables devant la précision des données LLR à cette période (environ 30 cm), mais il faut remarquer qu'ils sont obtenus sans aucune modification de constante ou paramètre. En compensant ces différences de modèle par un ajustement de conditions initiales ou paramètres, il est probable que ces écarts seraient bien plus faibles (non testé).

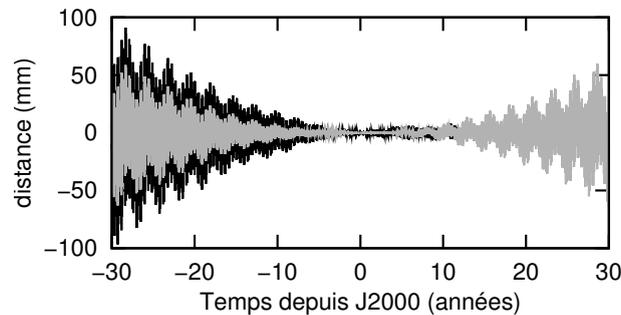


FIGURE 12.5 – Influence de l'orientation de la Terre sur la distance Terre-Lune. Une solution INPOP dont l'orientation de la Terre est forcée par le pôle CIP-P03 sert de référence. En noir sont tracées les différences sur la distance Terre-Lune avec une solution dont l'orientation forcée de la Terre ne tient compte que du terme principal en 18,6 ans des nutations (méthode employée pour les solutions du JPL). En gris sont tracées les différences avec une solution INPOP dont l'orientation de la Terre est intégrée.

Remarque : les différences sur la distance Terre-Lune ne permettent pas de déterminer laquelle des solutions (2) ou (3) est la meilleure lorsqu'elle est comparée à la solution de référence (1). Sur la période $[-30 : 5]$, la solution (3) présente les écarts les plus faibles, et inversement sur le reste de l'intervalle $[5 : 30]$.

12.1.2.4 Variation séculaire du J_2

L'analyse par Cox & Chao (2002) des données SLR (Satellite Laser Ranging) montre une dérive linéaire dans l'évolution du J_2 de la Terre. Cette variation séculaire est attribuée au rebond post-glaciaire : depuis la dernière glaciation, la neige a fondu et exerce une charge moins importante aux pôles. La Terre se relâche et tend à reprendre une forme plus sphérique. Mesurée à -3.0×10^{-9} par siècle, cette dérive linéaire est prise en compte dans le modèle de précession P03 de Capitaine et al. (2003). Si on suppose que le rebond post-glaciaire a pour effet une redistribution des masses à la surface de la Terre, la trace de la matrice d'inertie est conservée. À la dérive séculaire du J_2 (ou de son opposé, le coefficient du potentiel C_{20}) doit donc être

associée une dérive séculaire du rapport C/MR^2 ; avec t mesuré en siècle julien, on a alors :

$$\begin{cases} J_2(t) = J_2(J2000) - 3.0 \times 10^{-9}t \\ C_{20}(t) = C_{20}(J2000) + 3.0 \times 10^{-9}t \\ C/MR^2(t) = C/MR^2(J2000) - 2.0 \times 10^{-9}t \end{cases} \quad (12.4)$$

Les courbes de la figure 12.6 montrent l'effet de la variation séculaire du J_2 terrestre et la nécessité de la prendre en compte pour rester compatible avec la précession P03.

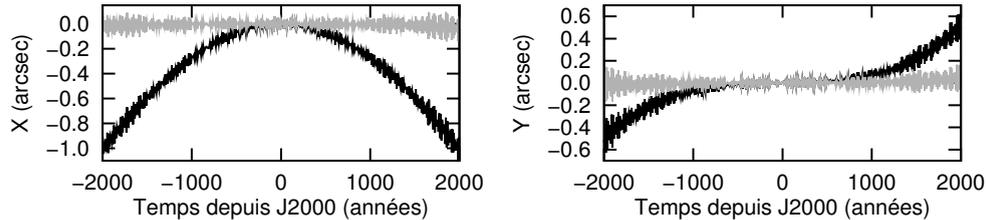


FIGURE 12.6 – Influence de la variation séculaire du J_2 terrestre. Les coordonnées du CIP-P03 sont comparées à celles du pôle de la Terre obtenu grâce à deux simulations INPOP : sans \dot{J}_2 en noir, avec \dot{J}_2 (même modèle dynamique qu'INPOP06) en gris.

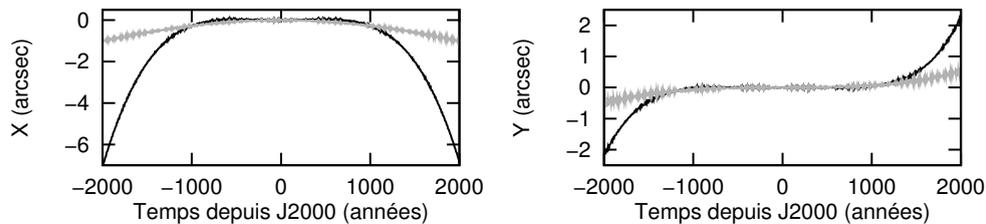


FIGURE 12.7 – Comparaison sur les coordonnées du pôle de la Terre entre INPOP (sans \dot{J}_2) et le CIP-UAI2000 (en noir) d'une part, INPOP (avec \dot{J}_2) et le CIP-P03 (en gris) d'autre part.

Enfin, les courbes de la figure 12.7 justifient le choix de s'ajuster sur le CIP-P03 et non sur le CIP-UAI2000. Dans la comparaison avec le CIP-UAI2000, l'orientation de la Terre intégrée avec INPOP ne tient pas compte de la variation séculaire du J_2 terrestre. Les écarts importants ne se manifestent qu'après 1000 ans. Sur le court terme (moins de 200 ans), les comparaisons avec le CIP-P03 ou le CIP-UAI2000 donnent des résultats très proches.

12.1.2.5 Ralentissement de la vitesse de rotation

On a vu que grâce au vecteur \vec{G} , on pouvait avoir accès à une estimation de la vitesse de rotation de la Terre :

$$\omega_T = \frac{\|\vec{G}\|}{MR^2} \times \frac{1}{C/MR^2} \quad (12.5)$$

Cette vitesse varie au cours du temps, d'une part en raison du moment de marées exercé sur la Terre (qui fait que la norme de \vec{G} n'est pas conservée au cours du temps), et d'autre part en raison de la variation séculaire du rapport C/MR^2 induite par le rebond post-glaciaire. Cette expression est utilisée dans les effets de marées pour le calcul des variations des coefficients du potentiel de la Terre, et plus précisément dans l'évaluation des coordonnées déphasées du corps générateur (voir le paragraphe 11.1.6). Contrairement à INPOP05 où la vitesse de rotation de la Terre était constante, celle d'INPOP06 est libre d'évoluer au cours du temps.

La courbe de la figure 12.8 montre l'évolution de la vitesse de rotation de la Terre (à gauche). En y ajustant un polynôme de degré 2, on trouve (T est exprimé en milliard d'années depuis J2000, ω_T en radian/jour) :

$$\omega_T \simeq 6.30038736002 - 1.56 \times T + 134.7 \times T^2 \quad (12.6)$$

Le terme constant est bien celui qui est imposé à J2000 et correspond à la vitesse de rotation de la Terre utilisé dans INPOP05.

En étudiant la longueur du jour ($LOD = 2\pi/\omega_T$, exprimée ici en heure et représentée à droite sur la figure 12.8), on obtient :

$$LOD \simeq 23.934472399128691 + 5.91 \times T - 510.2 \times T^2 \quad (12.7)$$

L'écart sur le terme linéaire avec celui de (Laskar et al., 2004) (respectivement 7.432167 et 7.444649 pour le passé et le futur) est en grande partie dû à la prise en compte du rebond post-glaciaire. Sans variation séculaire du J_2 terrestre (et donc avec un rapport C/MR^2 constant au cours du temps), la pente aurait été de 7.36 heures par milliard d'années. Les termes quadratiques sont eux par contre très différents (avec ou sans rebond post-glaciaire), certainement en raison de l'intervalle de temps limité à 6000 ans autour de J2000 pour la simulation INPOP contre 250 millions d'années pour (Laskar et al., 2004).

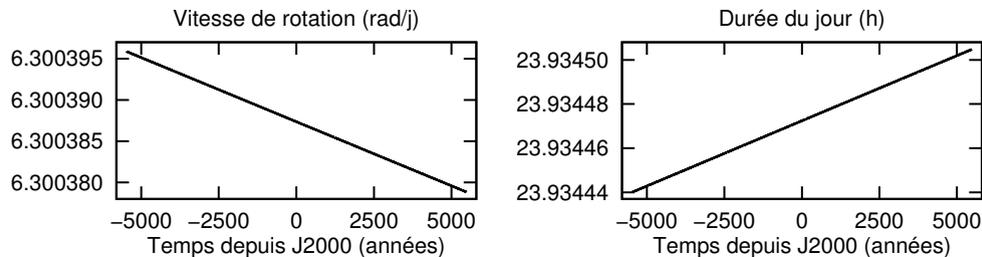


FIGURE 12.8 – Illustration du ralentissement de la rotation de la Terre. À gauche, on observe la décroissance de sa vitesse de rotation ω_T (en radians par jour), à droite on observe l'augmentation de la durée du jour (en heures).

Compte tenu de sa faible valeur, le ralentissement de la Terre (qui n'intervient que dans le calcul de la déformation de la Terre) n'a en réalité qu'une influence négligeable sur les trajectoires des corps.

12.1.3 Anneau d'astéroïdes

Comme expliqué au chapitre 8, le Système solaire compte des centaines de milliers d'astéroïdes, dont l'intégration des équations du mouvement serait rédhibitoire en temps de calcul. On se contente donc d'intégrer celles des 300 astéroïdes d'INPOP05 (ou DE405), et de supposer que ceux restant se répartissent à chaque instant uniformément sur un anneau circulaire centré au barycentre du Système solaire. En supposant que les corps sont dans le plan de l'anneau, les développements du paragraphe 8.1 permettent de calculer les accélérations des planètes intérieures (expression 8.7) et extérieures (expression 8.13). Le rayon de l'anneau est imposé à 2.8 UA (la même valeur pour la solution DE414 de Konopliv et al. (2006), avec cependant des valeurs de l'UA qui peuvent différer de quelques mètres selon les solutions), sa masse sera ajustée aux observations planétaires par Fienga et al. (2008).

Le tableau 12.3 montre les effets de l'introduction de l'anneau sur les positions héliocentriques des corps (géocentriques pour la Lune).

L'anneau induit pour tous les corps une dérive linéaire dans leur longitude moyenne (voir les courbes des figures 12.9 et 12.10 pour Mars et Jupiter), qui pourrait être compensée par un

TABLE 12.3 – Effets de l’anneau d’astéroïdes sur une période de 100 ans de part et d’autre de J2000. Le tableau contient les différences maximales sur les positions héliocentriques des corps (géocentrique pour la Lune) entre une solution avec une autre sans anneau. Les résultats sont exprimés en mètres.

Corps	Différences (m)
Mercure	20
Vénus	70
EMB	170
Mars	850
Jupiter	3800
Saturne	2100
Uranus	1300
Neptune	1300
Pluton	1200
Lune	0.05

ajustement du demi-grand axe. À cet effet principal s’ajoute également une légère dérive dans le périhélie.

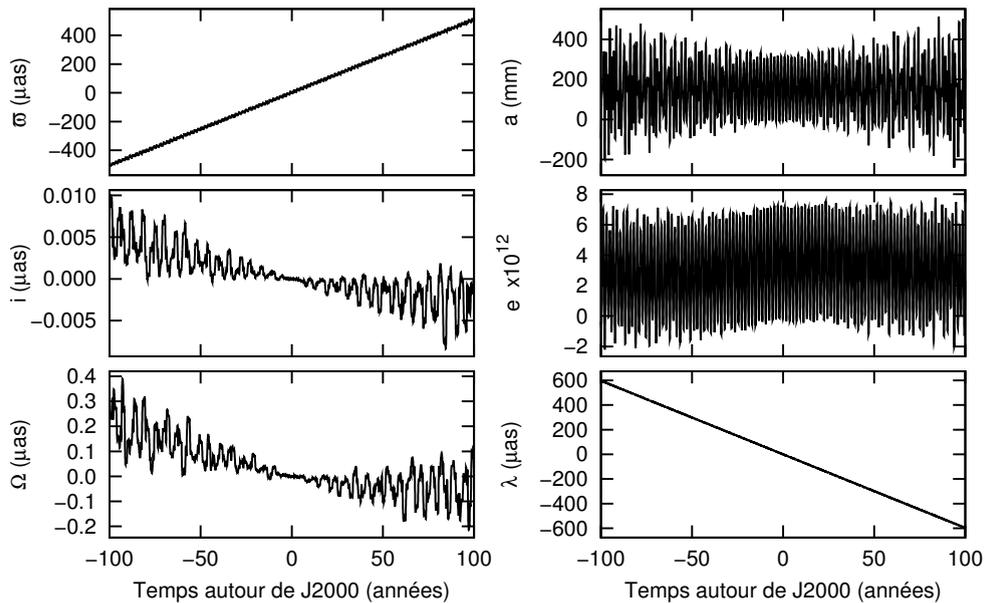


FIGURE 12.9 – Effet de l’anneau d’astéroïdes sur les éléments elliptiques écliptiques de Mars.

Remarque : ce modèle d’anneau introduit des incohérences dans le modèle dynamique. Outre le fait qu’on suppose que les corps se trouvent dans le plan de l’anneau, on introduit également un forçage dans le système. Ce dernier n’est plus isolé, le mouvement de son barycentre n’est plus rectiligne uniforme, le référentiel n’est plus galiléen. Les conséquences sur les positions relatives des corps sont cependant limitées. Pour plus d’information, se reporter au paragraphe 13.1.1.1.

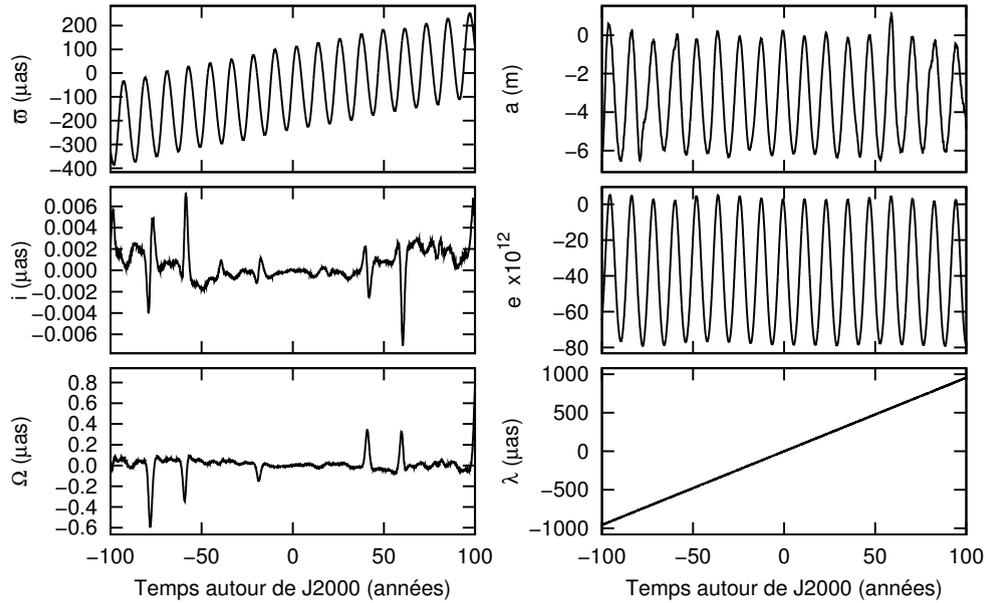


FIGURE 12.10 – Effet de l’anneau d’astéroïdes sur les éléments elliptiques écliptiques de Jupiter.

12.2 Ajustements

12.2.1 Aux données planétaires

Comme on l’a vu au paragraphe 12.1.1 (et en particulier le tableau 12.1), la prise en compte d’un modèle d’interactions plus cohérent induit des écarts importants dans les trajectoires des planètes. Il est donc nécessaire de réajuster certains paramètres du modèle (conditions initiales des planètes, masses des astéroïdes, ...) aux observations planétaires afin de conserver de bons résidus, d’autant plus que de nouvelles observations sont disponibles depuis la parution de DE405. Ce travail a été effectué par Agnès Fienga et est décrit dans (Fienga et al., 2008).

12.2.2 Contraintes sur la Lune

Les courbes de la figure 12.11 montrent les différences (sur les éléments elliptiques géocentriques de la Lune) entre INPOP05 et la solution ajustée aux observations planétaires par Agnès Fienga (qui n’est pas encore INPOP06 et qui sera appelée INPOP06beta dans ce paragraphe).

La dérive linéaire dans la longitude moyenne peut être compensée par un ajustement du demi-grand axe. Les écarts en demi-grand axe, excentricité et périhélie se résorberont par la même occasion. Le signal caractéristique dans le nœud et l’inclinaison est plus problématique. Ce ne sont pas les changements introduits dans le modèle dynamique (décrits au chapitre 12.1) qui sont responsables de ces écarts, mais la modification des conditions initiales du barycentre Terre-Lune, ajustées aux observations planétaires.

Pour le vérifier, on considère un Système solaire très simplifié, constitué du Soleil, de la Terre et de la Lune, pour lesquels on ne tient compte que des interactions ponctuelles newtoniennes (problème à trois corps). Une première solution dont les conditions initiales (du Soleil, du barycentre Terre-Lune et du vecteur Terre-Lune, soit 18 composantes au total) sont issues d’INPOP05/DE405 est comparée à une seconde dont seules les conditions initiales du barycentre Terre-Lune ont été modifiées (égales à celles d’INPOP06beta, ajustées par Agnès Fienga). En changeant les conditions initiales du barycentre Terre-Lune, on modifie l’effet de marées du Soleil (attraction différentielle) dans le système Terre-Lune. On retrouve alors les mêmes différences

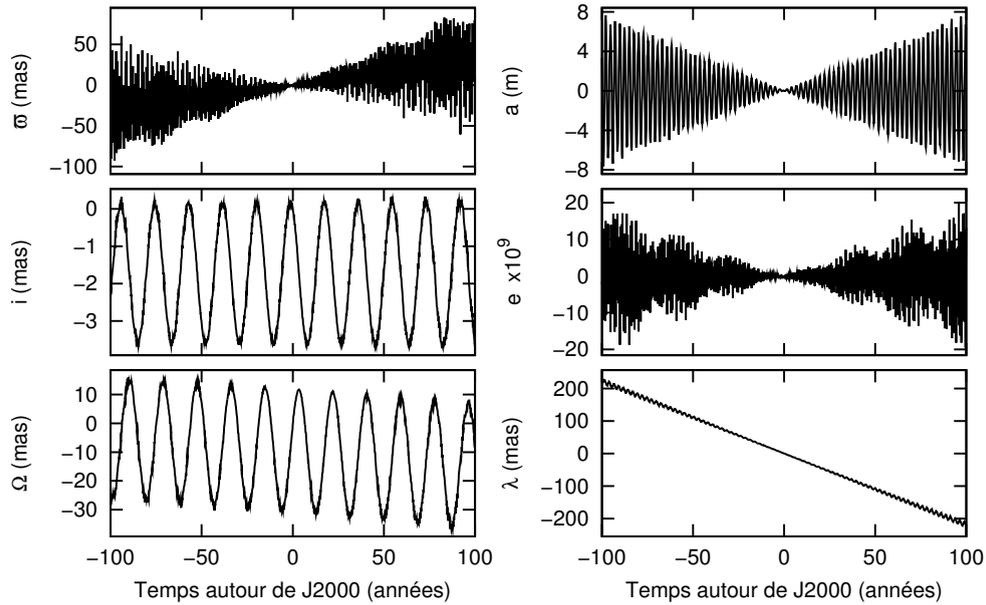


FIGURE 12.11 – Différences INPOP06beta - INPOP05

que celles entre INPOP05 et INPOP06beta (courbes de la figure 12.11).

Ce résultat est à relier aux courbes de la figure 11.38. Elles illustrent alors les différences entre deux types de solutions :

- la première intégrait les équations du mouvement du Soleil et de tous les astéroïdes (INPOP05)
- la seconde imposait des orbites elliptiques aux astéroïdes et calculait la position du Soleil en fonction de celles de tous les autres corps

On compensait alors un mouvement du barycentre du Système solaire (induit par le forçage des astéroïdes) par un déplacement du Soleil, modifiant par la même occasion les forces (y compris le terme newtonien, prépondérant) exercées par le Soleil sur tous les autres corps. Les signaux dans l'inclinaison et le nœud des courbes des figures 12.11 et 11.38 (noires) ont donc la même origine : la modification de la trajectoire du Soleil vue du système Terre-Lune. Dans 12.11, la modification est présente dès l'origine (avec le changement des conditions initiales), tandis que dans 11.38, les oscillations sont modulées par une fonction croissante du temps, liée au changement progressif de la trajectoire du Soleil qui compense la dérive du barycentre du Système solaire.

Les ajustements des conditions initiales des planètes, et en particulier celles du barycentre Terre-Lune, se répercutent donc ensuite dans le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Les effets sur la distance Terre-Lune sont illustrés par les courbes de la figure 12.12. Avec près de 8 mètres de différence avec DE405, la solution INPOP06beta serait certainement une mauvaise solution si elle était confrontée aux observations LLR, et ne représente donc pas correctement la réalité. L'idéal serait de prendre en compte les observations LLR dans les ajustements, mais les procédures de réduction (décrites dans le chapitre 9) n'étaient à l'époque pas encore disponibles. On choisit alors d'utiliser la distance Terre-Lune de DE405 (une solution censée être ajustée aux données LLR) pour contraindre la trajectoire de la Lune. La solution INPOP06 est construite à partir d'INPOP06beta en ajustant les conditions initiales du vecteur Terre-Lune et les temps de déphasages (intervenant dans les effets de marée) à la distance Terre-Lune de DE405, sur une période de 30 ans de part et d'autre de J2000. Les courbes de la figure 12.13 montrent les différences entre DE405, INPOP05 et INPOP06. Les écarts entre INPOP06 et DE405 inférieurs à 1 cm laissent espérer des résidus aux observations LLR similaires pour ces deux solutions (vérifié au paragraphe 13.4.2.1).

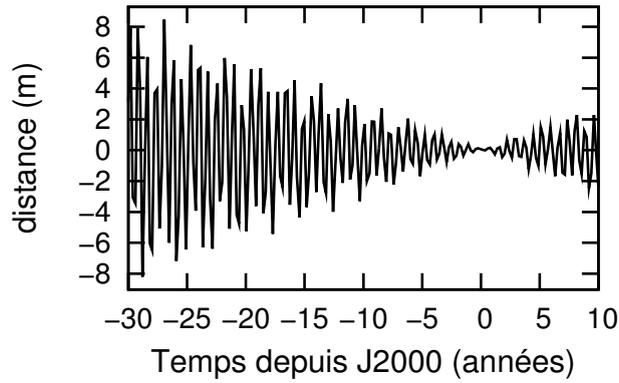


FIGURE 12.12 – Effet de la modification des conditions initiales du barycentre Terre-Lune sur la distance Terre-Lune (différence entre INPOP06beta et INPOP05).

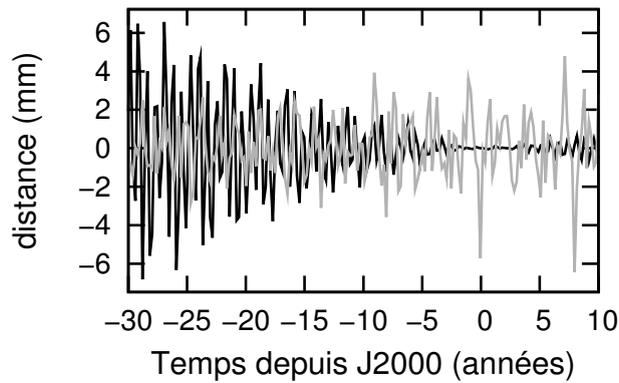


FIGURE 12.13 – Comparaisons des distances Terre-Lune entre DE405 et INPOP05 (en noir), DE405 et INPOP06 (en gris).

Remarque : comme INPOP06beta, la solution DE414 du JPL n'est ajustée qu'aux observations planétaires. Mais aucune contrainte n'a été imposée sur la Lune, dont les conditions initiales (au 28 juin 1969) sont identiques à celles de DE405. Lorsqu'on compare les distances Terre-Lune de DE405 et DE414, on obtient après 35 ans des différences supérieures à 1 mètre.

Chapitre 13

INPOP08

La version INPOP06 du chapitre précédent n’était pas complètement indépendante du JPL, puisque les conditions initiales de la Lune et les temps de déphasage étaient ajustés sur la distance Terre-Lune de DE405. Avec INPOP08, on souhaite non seulement améliorer le modèle dynamique (voir le paragraphe 13.1), mais surtout contraindre certains de ses paramètres directement aux observations Lunar Laser Ranging (voir le paragraphe 13.2).

La version présentée ici (que l’on pourrait plus rigoureusement appeler INPOP08e selon la numérotation interne à l’IMCCE) est une évolution de celle décrite dans (Fienga et al., 2009), cette dernière étant diffusée sous le nom de INPOP08a sur le site www.imcce.fr/inpop. Il s’agit également d’une version antérieure à la dernière version INPOP10a récemment diffusée.

Pour toutes ces versions, les modèles dynamique et de réduction des données LLR restent identiques. Seules les valeurs des paramètres sont modifiées. Ces dernières sont contraintes par des observations LLR supplémentaires, disponibles depuis la parution de (Fienga et al., 2009) et par des ajustements planétaires différents (à la fois dans les méthodes et les données disponibles), qui conduisent à une autre solution “F08” (voir le paragraphe 13.2).

13.1 Changements dans le modèle dynamique

13.1.1 Anneau d’astéroïdes

13.1.1.1 Dérive du du Système solaire

L’anneau d’astéroïdes implémenté dans INPOP06 (voir le chapitre 12.1.3) a deux inconvénients. Le premier, sans grande conséquence, est que dans le calcul des accélérations (expressions 8.7 et 8.13), on suppose que chacun des corps est dans le plan de l’anneau. Le second, plus problématique, est qu’il perturbe les planètes mais qu’aucune force de réaction n’est prise en compte. Il en résulte que le système composé du Soleil, des planètes, de la Lune et des astéroïdes n’est pas isolé et, comme l’illustrent les courbes de la figure 13.1, leur barycentre n’a pas un mouvement rectiligne uniforme (que l’on aurait éventuellement pu compenser par un changement d’origine du repère).

Cette dérive est importante si on la compare à celle obtenue dans le cas d’un système isolé, et il suffit de supprimer l’effet de l’anneau (tout en conservant les autres interactions) pour retrouver des courbes identiques à celles de la figure 1.4.

Le fait que le barycentre s’éloigne de l’origine du repère pose problème pour le calcul des corrections relativistes. En effet, dans l’expression 1.12, les termes \vec{v}_i et \vec{v}_j désignent les vitesses par rapport au barycentre du système, mais sont calculées dans la routine correspondante avec les vitesses \vec{r}_i et \vec{r}_j par rapport à l’origine du repère (voir le paragraphe 1.3.3). L’erreur commise est cependant peu importante, en raison d’une part du facteur c^{-2} qui intervient dans les corrections

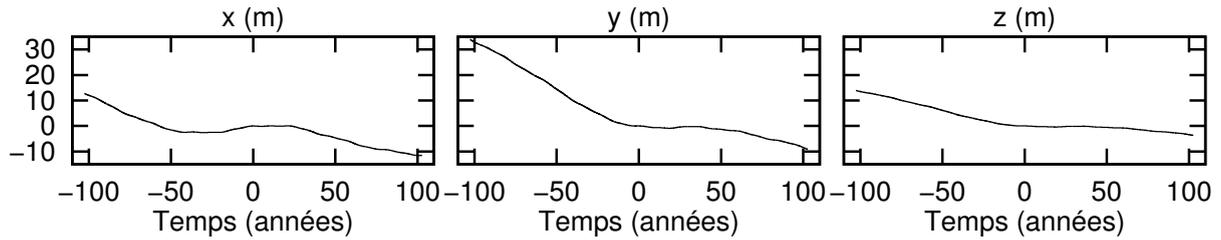


FIGURE 13.1 – Illustration de la dérive du barycentre du Système solaire d’INPOP06 induite par la prise en compte de l’anneau d’astéroïdes.

relativistes, et d’autre part de la faible dérive du barycentre (moins de 1 m/an) devant les vitesses des corps (de 1.2×10^{12} m/an pour Mercure, à 1.0×10^{11} m/an pour Pluton).

L’autre problème induit par l’anneau est que le système n’est pas isolé, le repère dans lequel sont projetées leurs équations du mouvement n’est pas galiléen.

Pour corriger ces incohérences, il est nécessaire de prendre en compte la réaction qu’exerce chacun des corps perturbé sur l’anneau.

Remarque : même si ces problèmes étaient prévisibles, ils n’ont été mis en évidence que grâce à des simulations à long terme effectuées par Jacques Laskar. Après plus d’un million d’années, la dérive du barycentre (et de l’ensemble des corps) était telle que la trajectoire de Mars venait tangenter l’anneau, dont le centre était imposé fixé à l’origine du repère. Il en résultait une force infinie qui entraînait une instabilité complète du système.

13.1.1.2 Intégration de ses équations du mouvement

L’idée ici est de considérer l’anneau comme la Terre ou la Lune, c’est-à-dire un corps non ponctuel (mais plan, circulaire et indéformable) en rotation sur lui-même, et dont on intègre les équations du mouvement. Sa masse et son rayon sont notés respectivement M_A et R_A .

Les vecteurs positions-vitesses de son centre de masse (notés \vec{r}_A et $\dot{\vec{r}}_A$), ainsi que les coordonnées de son moment cinétique de rotation \vec{G}_A (on utilisera l’approximation gyroscopique avec \vec{G}_A normal au plan de l’anneau) font partie du vecteur d’état, et doivent être initialisés à la date origine des intégrations.

Pour son centre de masse, ses coordonnées barycentriques seront par exemple initialisées à J2000 confondues avec le barycentre du Système solaire ($\vec{r}_A = \dot{\vec{r}}_A = \vec{0}$) ou avec celles du Soleil ($\vec{r}_A = \vec{r}_S$ et $\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_S$). Le vecteur directeur du moment cinétique peut être initialisé de différentes manières (qui n’ont finalement que peu d’importance dans les résultats) :

1. par celui de la somme des moments cinétiques de révolution des planètes
2. par celui de la somme des moments cinétiques de tous les corps présents dans INPOP
3. par celui de la somme des moments cinétiques de tous les astéroïdes dont on n’intègre pas les équations du mouvement

Sa norme est calculée en fonction de la vitesse de rotation d’une particule en orbite circulaire de rayon R_A autour du Soleil :

$$\|\vec{G}_A\| = M_A \sqrt{GM_S R_A} \quad (13.1)$$

Remarque : pour le cas (3) décrit précédemment, on peut donc s’arranger pour que \vec{G}_A et M_A soient les sommes respectivement des moments cinétiques et des masses de tous les astéroïdes dont on n’intègre pas les équations du mouvement. R_A est alors choisi de manière à respecter l’expression 13.1. On évite ainsi tout ajustement de sa masse ou son rayon.

L’accélération du corps perturbé est calculée avec l’expression 8.23. On en déduit l’accélération du centre de masse de l’anneau (m est la masse du corps perturbé) :

$$\ddot{\vec{r}}_A = -\frac{Gm}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \left(R \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_{2n-1}}{(1)_{2n-1}} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} z^{2n-1} \vec{u} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3/2)_{2n}}{(1)_{2n}} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} z^{2n} \vec{r} \right) \quad (13.2)$$

avec $z = \frac{2R}{R^2 + r^2} \sqrt{r^2 - (\vec{w} \cdot \vec{r})^2}$ et $\vec{w} = \frac{\vec{G}_A}{\|\vec{G}_A\|}$

Le corps perturbé n'étant pas dans le plan de l'anneau, il exerce donc un moment sur ce dernier :

$$\dot{\vec{G}}_A = \vec{M}_{P \rightarrow A} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}}_A = -\frac{GmR}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3/2)_{2n-1}}{(1)_{2n-1}} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} z^{2n-1} \right) \vec{r} \wedge \vec{u} \quad (13.3)$$

L'inconvénient de cette modélisation est que la configuration est instable, quelles que soient les conditions initiales. Pour tous les corps intérieurs à l'anneau (en particulier le Soleil), la force est répulsive et son intensité croît avec la distance entre les centres de masses. Pour les corps extérieurs (en particulier Jupiter), elle est attractive et croît avec le rapprochement des centres de masses. Après quelques années, l'anneau repoussé vers l'extérieur (voir la courbe droite de la figure 13.2) vient tangenter la trajectoire de Mars, provoquant une force infinie ($r = R_A$) qui stoppe la simulation (qui de toute façon n'a plus de réalité physique). Il est cependant rassurant de constater que le barycentre ne dérive plus, comme le montre la courbe gauche de la figure 13.2.

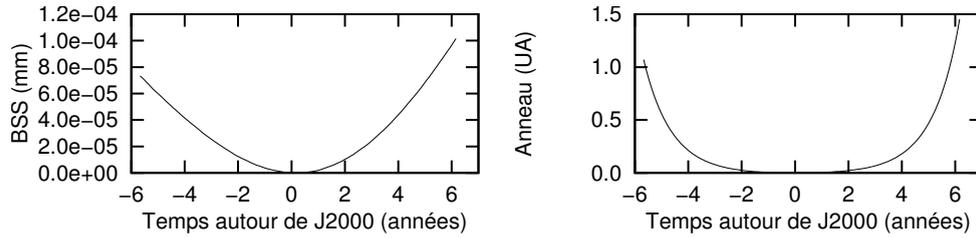


FIGURE 13.2 – Dérives du barycentre et de la position de l'anneau pour une simulation INPOP06 dont on intègre les équations du mouvement de l'anneau. À gauche est représentée la distance (en mm) entre le barycentre et l'origine du repère, à droite celle (en UA, dont la valeur est d'environ 150 000 000 de kilomètres) entre le centre de masse de l'anneau et l'origine du repère ($\|\vec{r}_A\|^2$).

13.1.1.3 Anneau solidaire du Soleil

Par rapport à la modélisation décrite dans le paragraphe précédent, on impose maintenant une "liaison rotule" entre le Soleil et l'anneau : les centres de masses sont solidaires, mais leurs orientations restent indépendantes. Pour réaliser cette liaison, les forces exercées par les corps sur l'anneau sont transmises au Soleil. La somme des forces qui s'exercent sur le Soleil peut être décomposée en $\vec{F}_{\bar{A}} + \vec{F}_A$ où :

- \vec{F}_A représente la somme des forces exercées par les corps sur l'anneau (et transmises au Soleil). Il s'agit, à la masse M_A de l'anneau près, de l'expression 13.2.
- $\vec{F}_{\bar{A}}$ représente la somme des forces qui s'exercent directement sur le Soleil. Ce sont, à la masse m_S du Soleil près, les termes newtoniens 1.3, les corrections relativistes 1.12, les effets de forme du chapitre 2 (Terre étendue, Lune étendue, J_2 solaire)...

Ainsi, l'accélération du Soleil (lié à l'anneau) est alors

$$\ddot{\vec{r}}_S = \frac{1}{m_S + M_A} \left(\vec{F}_{\vec{A}} + \vec{F}_A \right) = \frac{1}{m_S + M_A} \left(m_S \ddot{\vec{r}}_{\vec{A}} + M_A \ddot{\vec{r}}_A \right) \quad (13.4)$$

où de la même manière que les forces, $\ddot{\vec{r}}_{\vec{A}}$ désigne l'accélération du Soleil due aux effets autres que l'anneau, $M_A \ddot{\vec{r}}_A$ est la force transmise par l'anneau.

Comme on peut le voir sur les courbes de la figure 13.3, on observe avec cette modélisation les mêmes dérivées du barycentre que pour celles de la figure 1.4, obtenues en ne considérant que des interactions ponctuelles.

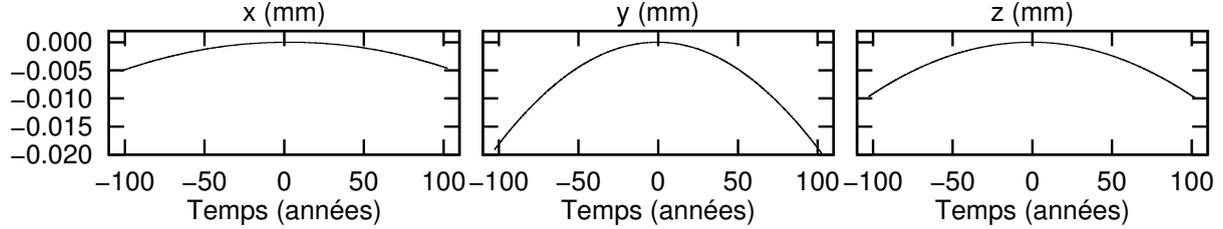


FIGURE 13.3 – Dérivées du barycentre pour une simulation INPOP06 dont l'anneau est lié au Soleil. Le temps est compté en années depuis J2000.

TABLE 13.1 – Différences maximales entre INPOP06 (anneau fixe à l'origine du repère) et la solution intégrée avec un anneau solidaire du Soleil. Pour les planètes et Pluton, les comparaisons portent sur les distances r (en m), latitudes φ et longitudes λ (en microsecondes de degré) héliocentriques dans l'écliptique moyen J2000. Pour la Lune, les comparaisons portent sur ces mêmes variables, mais géocentriques et les distances sont exprimées en mm.

Corps	Δr	$\Delta \varphi$	$\Delta \lambda$
Mercure	0.11	4.3	1.9
Venus	0.01	3.8	0.3
EMB	0.04	5.0	0.6
Mars	0.52	15.4	4.5
Jupiter	1.63	0.9	5.1
Saturne	6.23	0.4	6.9
Uranus	19.89	0.1	4.7
Neptune	20.38	0.1	3.9
Pluton	45.26	0.3	0.8
Lune	0.43 mm	6.2	2.0

Les comparaisons du tableau 13.1 montrent que le changement de modélisation de l'anneau n'a finalement que peu d'effet sur les positions relatives des corps, avec des différences qui restent inférieures, voire très inférieures pour les planètes intérieures et la Lune, aux écarts que l'on observe entre les solutions INPOP05 et DE405 (voir le tableau 11.10).

Enfin, pour vérifier la stabilité de l'orientation du plan de l'anneau sur le long terme, on effectue une simulation sur 200 000 ans (sans astéroïde pour gagner en temps de calcul). Comme on peut le voir sur les courbes en haut à droite de la figure 13.4, la direction de son pôle ne varie que très peu.

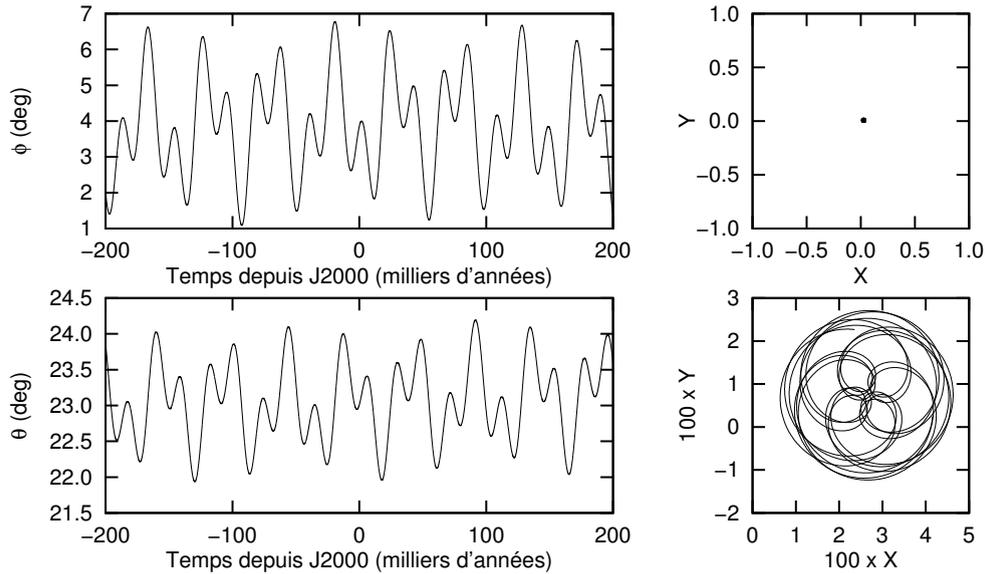


FIGURE 13.4 – Évolution du plan de l’anneau sur 200 000 ans autour de J2000. ϕ et θ représentent respectivement les angles de précession et de nutation propre exprimés dans l’ICRF (plus adapté que l’écliptique J2000 pour ces variables). X et Y représentent les coordonnées du pôle de l’anneau exprimées dans l’écliptique J2000. La troisième composante Z se déduit de X et Y et n’apporte pas d’information. La figure en bas à droite est un agrandissement de celle en haut à droite.

13.1.2 Orientation de la Terre

Les différentes solutions de travail INPOP07a à INPOP07e ne sont construites que pour illustrer les changements apportés; leur numérotation est interne à ce paragraphe. Dans ce paragraphe, sauf précision, les comparaisons des différents modèles et solutions porteront sur les coordonnées X et Y du pôle de la Terre dans le GCRF, exprimées en millisecondes de degré, sur une période de 200 ans autour de J2000.

13.1.2.1 Définition du pôle REN2000-P03

Les courbes de la figure 12.2 montraient les différences entre l’orientation de la Terre intégrée dans INPOP06 et celle donnée par le CIP-P03 (précession de Capitaine et al. (2003), et nutations de Mathews et al. (2002)). Ces différences sont principalement dues au fait que :

- l’orientation de la Terre d’INPOP06 est modélisée par son moment cinétique \vec{G} , tandis que celle du CIP-P03 donne l’évolution de l’axe de figure \vec{K} . Dans la figure 12.2 se trouvent donc les termes d’Oppolzer.
- la Terre est considérée solide dans INPOP06, alors que le CIP-P03 tient compte des effets dus à la Terre non-rigide. En effet, les nutations du CIP-P03 sont obtenues à partir de celles pour une Terre rigide REN2000 de Souchay et al. (1999), corrigées ensuite de l’ellipticité dynamique de l’UAI2000 et par la fonction de transfert pour une Terre non-rigide de Mathews et al. (2002).

Pour comparer ce qui est comparable, on définit le pôle REN2000-P03 par celui obtenu avec :

- la précession de Capitaine et al. (2003), la même que celle du CIP-P03
- les nutations du moment cinétique de REN2000 (Souchay et al., 1999), corrigées de l’ellipticité dynamique de l’UAI2000 (facteur sur les amplitudes de 1.000012224).

Entre le CIP-P03 et REN2000-P03, seules changent les nutations (termes périodiques), les évolutions à long terme restant identiques.

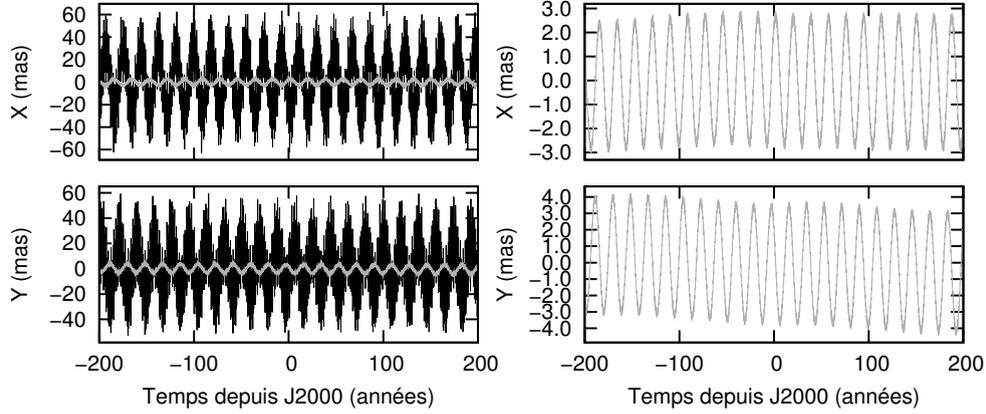


FIGURE 13.5 – Comparaison sur les coordonnées X et Y dans l’ICRF du pôle de la Terre d’INPOP06 avec le CIP-P03 (en noir) et REN2000-P03 (en gris).

On remarque avec les courbes de la figure 13.5 que l’orientation de la Terre d’INPOP06 est bien plus proche de REN2000-P03 que du CIP-P03.

13.1.2.2 Introduction de la précession géodésique

La précession géodésique est un effet relativiste mis en évidence par de Sitter (1916). Dans le cas particulier de la Terre, son effet principal est d’induire une dérive linéaire d’environ 1,92 secondes de degré par siècle dans l’angle de précession.

Comme pour les corrections relativistes dans les équations du mouvement 1.12, considérées comme l’ajout d’une force, elle peut être modélisée par l’introduction d’un moment supplémentaire dans la dérivée du moment cinétique de rotation de la Terre. Si on considère la Terre comme un gyroscope “ponctuel”, l’expression de ce moment (noté $\vec{\mathcal{M}}_{pg}$) est donnée dans (Misner et al., 1973, pages 1118-1119) :

$$\vec{\mathcal{M}}_{pg} = \vec{\Omega} \wedge \vec{G} \quad (13.5)$$

$$= \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) (\vec{v}_E \wedge \nabla U) \wedge \vec{G} \quad (13.6)$$

$$= \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) (\vec{v}_E \wedge \vec{a}_E) \wedge \vec{G} \quad (13.7)$$

$$= \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \sum_{i \neq E} \frac{\mu_i}{c^2 \|\vec{r}_i - \vec{r}_E\|^3} [\vec{v}_E \wedge (\vec{r}_i - \vec{r}_E)] \wedge \vec{G} \quad (13.8)$$

Dans cette expression,

- \vec{G} est le vecteur moment cinétique de rotation de la Terre (exprimé dans le repère fixe)
- γ est un paramètre post-newtonien (égal à 1 en relativité générale)
- \vec{r}_i est le vecteur position barycentrique du Système solaire du corps i (\vec{r}_E est celui de la Terre)
- \vec{v}_E est le vecteur vitesse barycentrique du Système solaire de la Terre
- \vec{a}_E est l’accélération newtonienne de la Terre, calculée avec l’expression 1.3
- μ_i est le produit de la constante de la gravitation par la masse du corps i

– c est la vitesse de la lumière

Cette expression est cohérente avec (Barker & O'Connell, 1970, eq. 17).

On construit la solution INPOP07b en ajoutant \vec{M}_{pg} dans l'équation du moment cinétique 5.48. Seule la contribution du Soleil est importante, la suivante (celle de la Lune) est 1000 fois plus faible. Cependant, le calcul de \vec{M}_{pg} dans le programme d'intégration des équations du mouvement est effectuée après celui des accélérations newtoniennes des corps. Tenir compte de tous les termes (Soleil, Lune, planètes, astéroïdes) n'est donc pas plus coûteux en temps de calcul.

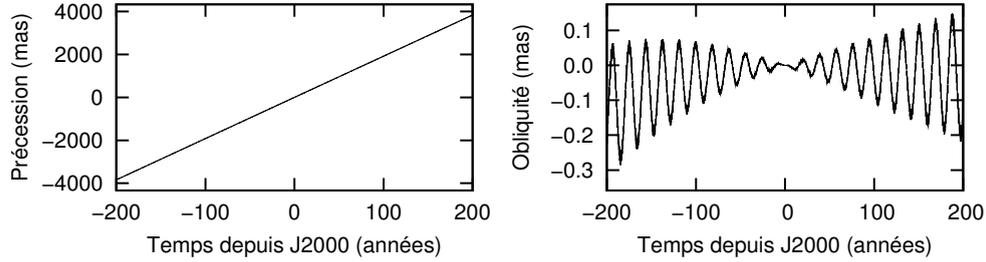


FIGURE 13.6 – Effet de la précession géodésique (différence INPOP06-INPOP07b) sur les angles de précession et d'obliquité de la Terre, exprimés en millisecondes de degré, sur une période de 200 ans de part et d'autre de J2000.

Les courbes de la figure 13.6 montrent l'effet de la précession géodésique sur l'orientation de la Terre. L'effet principal est une dérive linéaire dans l'angle de précession. En y ajustant une droite, on mesure une pente de 1,9193 secondes de degré par siècle, valeur proche de 1,9198830 donnée par Brumberg et al. (1992) et identique à celle de (Bois & Vokrouhlicky, 1995, tableau 1).

On construit ensuite INPOP07c à partir d'INPOP07b, en ajustant le rapport C/MR^2 de la Terre de manière à compenser cette dérive. Les courbes de la figure 13.7 montrent l'amélioration apportée en se comparant au REN2000-P03, avec l'élimination du signal en 18,6 ans.

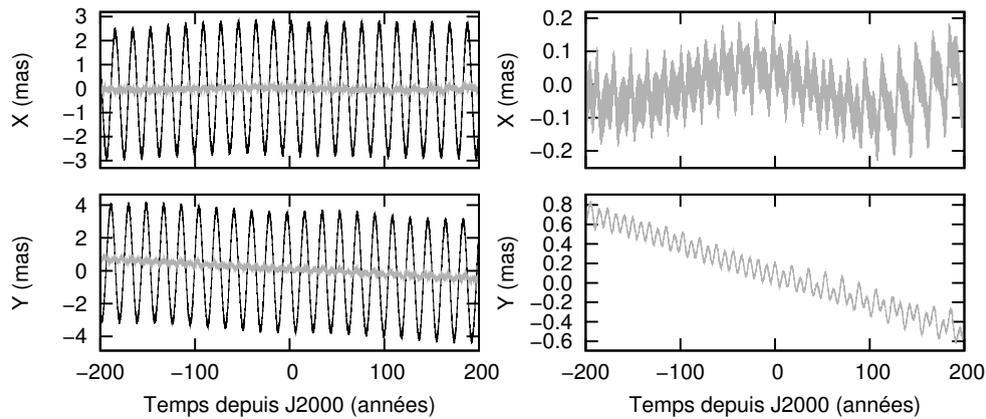


FIGURE 13.7 – Amélioration apportée par la prise en compte de la précession géodésique pour la Terre (après ajustement). Les courbes montrent les différences sur les coordonnées X et Y dans l'ICRF entre REN2000-P03 et INPOP06 d'une part (en noir), entre REN2000-P03 et INPOP07c (en gris) d'autre part. Les courbes grises à droite sont les mêmes que celles de gauche, tracées à une échelle mieux adaptée.

13.1.2.3 Prise en compte des moments dus aux J_3 et J_4

Pour INPOP06 (et donc pour la version INPOP07c décrite dans le paragraphe précédent), on ne tenait pas compte des moments dus aux J_3 et J_4 de la Terre (on rappelle que $J_n = -C_{n0}$). Avec INPOP07d, on ajoute les lignes 5.49 et 5.50 (jusqu'ici négligées) dans la dérivée du moment cinétique $\dot{\vec{G}}$ de la Terre. Puis, avec INPOP07e (dont le modèle pour l'orientation de la Terre est identique à celui d'INPOP08), on compense la dérive linéaire observée en X par un ajustement du rapport C/MR^2 .

Les effets des moments dus aux J_3 et J_4 ne sont pas très importants (dérive linéaire en X et une légère dérive quadratique en Y), d'autant plus qu'ils se compensent en grande partie par l'ajustement du C/MR^2 (voir les courbes de la figure 13.8).

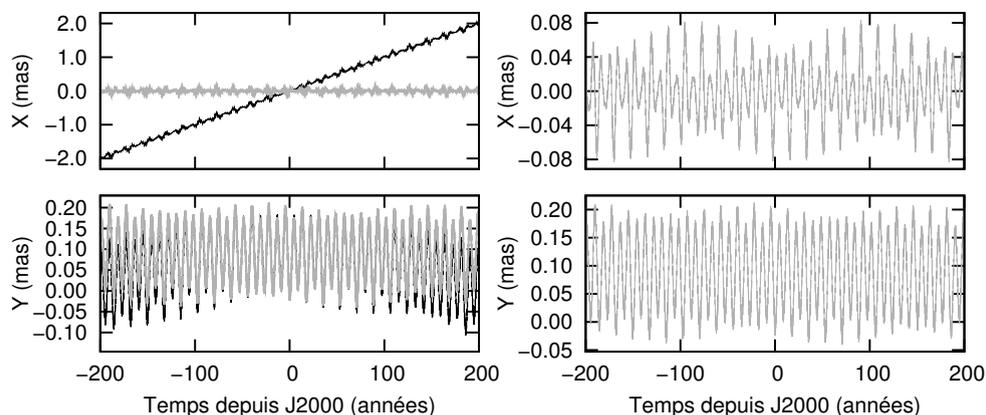


FIGURE 13.8 – Effet de la prise en compte des moments dus aux J_3 et J_4 de la Terre sur son orientation. Les courbes noires montrent l'effet avant ajustement du C/MR^2 (INPOP07c-INPOP07d), les grises celui après ajustement (INPOP07c-INPOP07e).

L'amélioration apportée n'est pas spectaculaire, mais les amplitudes des différences avec REN2000-P03 sont légèrement réduites, avec un signal moins bruité, comme on peut le voir sur les courbes de la figure 13.9.

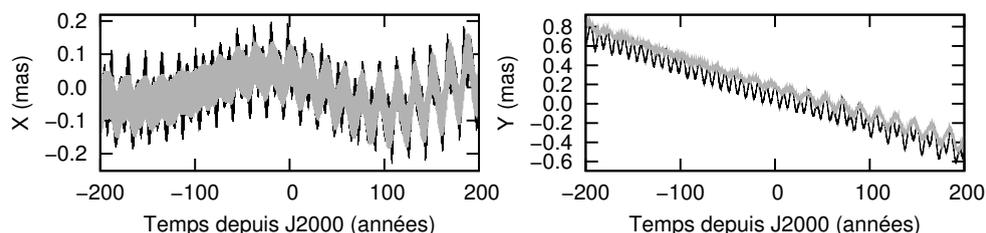


FIGURE 13.9 – Amélioration sur les coordonnées X et Y dans l'ICRF du pôle de la Terre, apportée par la prise en compte des moments dus à ses J_3 et J_4 . Le pôle REN2000-P03 est comparé à celui d'INPOP07c d'une part (en noir), et à celui d'INPOP07e d'autre part (en gris).

13.1.2.4 Conclusion

L'introduction de la précession géodésique, et dans une moindre mesure celle des moments dus aux J_3 et J_4 , permet d'améliorer l'orientation de la Terre intégrée dans INPOP lorsqu'elle est comparée au pôle REN2000-P03; ces améliorations n'auraient pas pu être mises en évidence si on avait continué à utiliser pour référence le CIP-P03.

Avec INPOP06, on compensait une “lacune” dans le modèle dynamique par un ajustement de constante. Dans la mesure où on ne modifie pas ici le J_2 de la Terre, ajuster le rapport C/MR^2 est équivalent à ajuster l’ellipticité dynamique $H = (C - A)/C = J_2/(C/MR^2)$. Or l’effet d’un changement de H est d’induire à la fois une dérive dans l’angle de précession et une modification des amplitudes des termes de nutations. Le tableau 13.2 compare les valeurs des ellipticités dynamiques pour différents modèles/solutions. Pour INPOP06 et INPOP07e, les valeurs du J_2 de la Terre sont celles utilisées dans la solution DE405. Pour INPOP08, le J_2 fait partie des paramètres ajustés aux observations LLR (voir le tableau 13.11). On remarque que les changements introduits dans ce chapitre permettent à l’ellipticité dynamique de se rapprocher de la valeur 0,00327379492 employée dans le modèle MHB2000.

TABLE 13.2 – Ce tableau présente les valeurs des ellipticités dynamiques pour différentes solutions INPOP. Pour INPOP06 et INPOP07e, la valeur du J_2 terrestre est reprise de DE405, celle d’INPOP08 est ajustée aux observations LLR (voir plus loin). Les valeurs du rapport C/MR^2 sont ajustées de manière à éliminer les dérives linéaires dans la coordonnée X du pôle de la Terre.

	J_2	C/MR^2	H	$H_{MHB2000} - H$
INPOP06	$1.08262600 \times 10^{-3}$	0.330822078	0.00327253249	1.262×10^{-6}
INPOP07e	$1.08262600 \times 10^{-3}$	0.330696213	0.00327377804	1.688×10^{-8}
INPOP08	$1.08262733 \times 10^{-3}$	0.330696296	0.00327378125	1.367×10^{-8}

Les conséquences sur les trajectoires des planètes sont très limitées. Les différences entre INPOP06 et INPOP07e sur les éléments elliptiques sont de plusieurs ordres de grandeur inférieures à celles (déjà petites) observées entre les solutions DE405 et INPOP05.

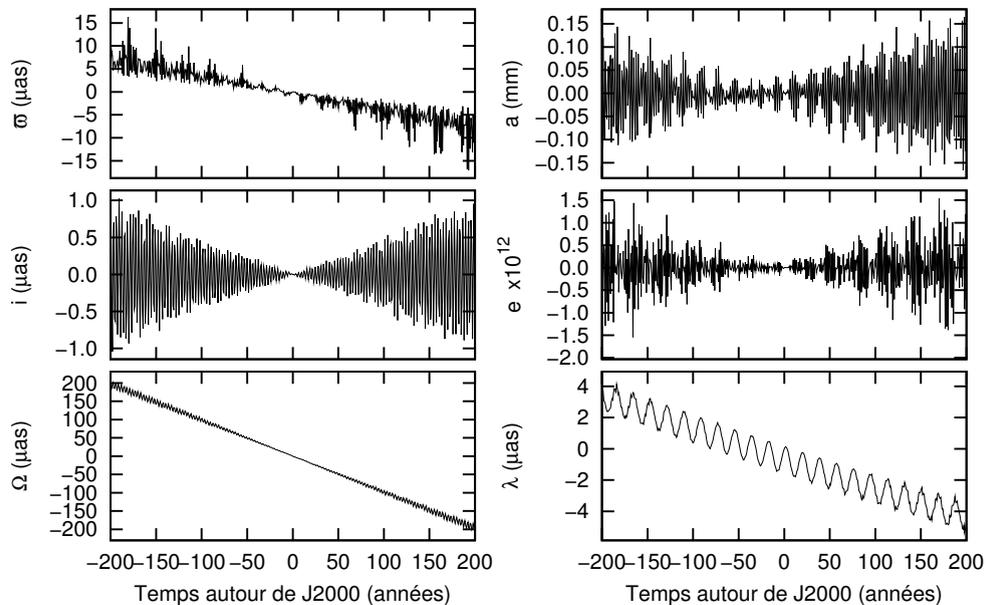


FIGURE 13.10 – Effets (après ajustement) de l’ajout de la précession géodésique et des moments dus aux J_3 et J_4 de la Terre sur les éléments elliptiques de la Lune (INPOP07e-INPOP06).

Seule la Lune présente des écarts significatifs (voir les courbes de la figure 13.10). Comme on pouvait s’y attendre avec des modifications dans l’orientation de la Terre (voir le chapitre 11.1.7), c’est le nœud qui présente les changements les plus importants. C’est d’ailleurs la seule variable

pour laquelle les écarts entre INPOP06 et INPOP07e sont supérieurs à ceux entre INPOP05 et DE405.

Remarque : dans le chapitre 11.1.7, il était surprenant (remarque de N. Capitaine) que :

- l'introduction de dérivées linéaires dans les nutations $\Delta\epsilon$ et $\Delta\psi$ induise des termes de Poisson dans le nœud et l'inclinaison de la Lune (voir les courbes de la figure 11.12)
- la modification du terme principal en 18,6 ans des nutations $\Delta\epsilon$ et $\Delta\psi$ induise une dérivée linéaire (mais aussi des termes périodiques) dans le nœud et l'inclinaison de la Lune (voir les courbes de la figure 11.19)

On observe ici sensiblement la même chose ; en modifiant les termes périodiques dans les coordonnées X et Y du pôle de la Terre, on obtient une dérivée linéaire du nœud de la Lune.

Même si la dérivée dans le nœud est importante, les écarts sur la distance Terre-Lune (terme principal d'une observation LLR) restent presque inchangés, avec des différences maximales inférieures à 0,8 mm sur 200 ans autour de J2000.

13.1.3 Orientation de la Lune

De la même manière que pour la Terre, on introduit le moment géodésique dans l'équation du moment cinétique de la Lune 4.28 :

$$\vec{\mathcal{M}}_{pg} = \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) (\vec{v}_L \wedge \nabla U) \wedge I\vec{\omega} \quad (13.9)$$

$$= \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) (\vec{v}_L \wedge \vec{a}_L) \wedge I\vec{\omega} \quad (13.10)$$

$$= \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \sum_{i \neq L} \frac{\mu_i}{c^2 \|\vec{r}_i - \vec{r}_L\|^3} [\vec{v}_L \wedge (\vec{r}_i - \vec{r}_L)] \wedge I\vec{\omega} \quad (13.11)$$

Dans cette expression,

- I est la matrice d'inertie de la Lune, $\vec{\omega}$ est son vecteur instantané
- γ est un paramètre post-newtonien (égal à 1 en relativité générale)
- \vec{r}_i est le vecteur position barycentrique du Système solaire du corps i (\vec{r}_L est celui de la Lune)
- \vec{v}_L est le vecteur vitesse barycentrique du Système solaire de la Lune
- \vec{a}_L est l'accélération newtonienne de la Lune, calculée avec l'expression 1.3
- μ_i est le produit de la constante de la gravitation par la masse du corps i
- c est la vitesse de la lumière

Seules les contributions du Soleil et de la Terre seraient nécessaires, mais l'accélération newtonienne de la Lune est là encore disponible au moment du calcul du moment géodésique. On tient donc compte de celles de toutes les planètes et astéroïdes sans supplément de calcul.

Sur 100 ans autour de J2000, l'effet sur les coordonnées cartésiennes des corps est négligeable avec des écarts inférieurs à 0.3 mm. Par contre, il est significatif sur les angles de libration de la Lune, comme l'illustrent les courbes de la figure 13.11. Leur allure rappelle (Bois & Vokrouhlicky, 1995, figure 1a-c), avec cependant des amplitudes différentes : 12 mas ici en ϕ et ψ contre environ 2 mas dans (Bois & Vokrouhlicky, 1995). Le tableau 13.3 montre les résultats d'une analyse en fréquences effectuées sur les courbes de la figure 13.11. Même en ne comparant que les termes en 18,6 ans (environ 5 millisecondes de degré, soit 10 mas crête à crête) avec les différences maximales (inférieures à 2 mas crête à crête) données dans (Bois & Vokrouhlicky, 1995, tableau 2), on obtient des résultats incompatibles. Ces différences s'expliquent peut-être par le fait que Bois & Vokrouhlicky (1995) tiennent compte dans leurs comparaisons des moments post-newtoniens alors qu'on se limite ici au moment géodésique.

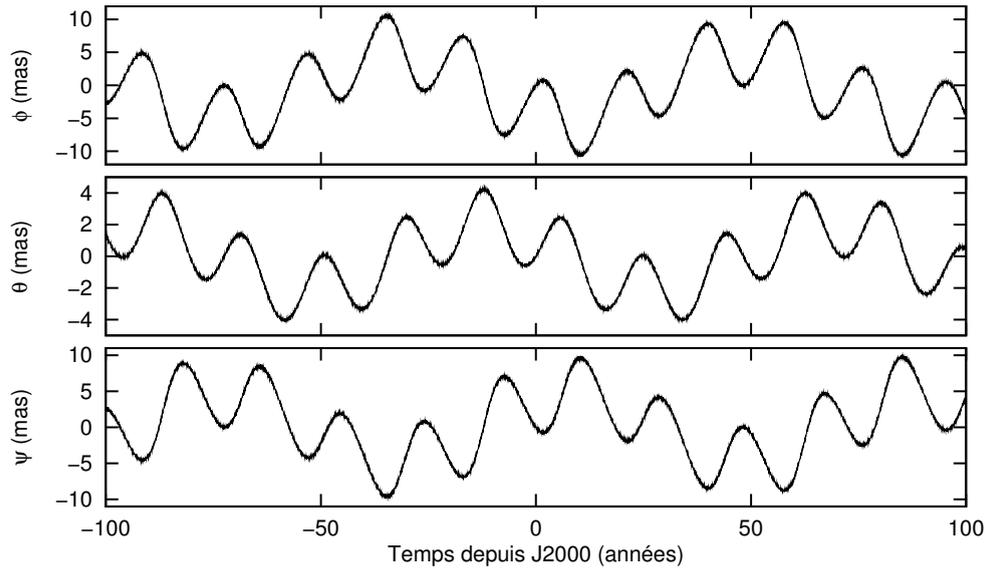


FIGURE 13.11 – Effet de la prise en compte du moment géodésique \vec{M}_{PG} sur la Lune. ϕ , θ et ψ sont respectivement les angles de précession, nutation et rotation propre de la Lune (angles d’Euler) dans l’ICRF, exprimés en millisecondes de degré. Le temps est en années autour de J2000.

TABLE 13.3 – Résultats de l’analyse en fréquences sur les angles de librations de la Lune de l’effet dû au moment géodésique exercé sur la Lune.

ϕ		θ		ψ	
amplitude (mas)	période (an)	amplitude (mas)	période (an)	amplitude (mas)	période (an)
5.33	80.79	2.11	80.95	4.89	80.79
5.31	18.60	2.11	18.60	4.87	18.60
0.33	15.12			0.33	15.12
0.33	9.30			0.33	9.30

Remarque : dans (Bois & Vokrouhlicky, 1995), les angles ϕ et ψ désignent respectivement l’angle de rotation propre et l’angle de précession.

13.2 Ajustement aux données LLR

Une fois ces changements dynamiques introduits, on modifie les paramètres suivants pour tenir compte de valeurs plus récentes que celles utilisées dans DE405 :

- les coefficients du potentiel de la Lune sont issus du modèle LP150Q de (Konopliv et al., 2001). Ils sont disponibles sur le site www.ipgp.jussieu.fr/~wieczor.
- les coefficients du potentiel de la Terre sont repris du modèle EGM96 de Tapley et al. (1996). Ils ont été téléchargés à partir du site cdis.nasa.gov/926/egm96/getit.html
- les nombres de Love k_{20} , k_{21} et k_{22} de la Terre sont déduits des nombres de Love complexes du modèle de marées solides décrit dans les Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004).
- les conditions initiales des corps (autres que la Lune), le J_2 solaire et les masses des astéroïdes sont ajustés aux observations planétaires (effectué par Agnès Fienga dans une solution que l’on notera F08 dans la suite de ce chapitre)

TABLE 13.4 – Statistiques des résidus LLR de la solution S099_01 (99 paramètres ajustés). Toutes les observations sont pondérées de la même valeur. N désigne le nombre total d’observations disponibles pour la station et l’époque considérée. Les moyenne et écart-type (σ) des résidus sont exprimés en centimètres.

Station	Époque	N	Moyenne	Ecart-type
CERGA	1987-1995	3460	0.23	16.65
CERGA	1995-2010	4932	1.30	23.12
CERGA	1984-1986	1187	-0.00	44.47
Mc Donald	1969-1986	3604	0.85	158.03
MLRS1	1982-1985	418	-3.00	79.42
MLRS1	1985-1988	174	6.80	33.47
MLRS2	1988-1996	1192	-6.40	27.67
MLRS2	1996-2008	2243	-1.10	546.16
Haleakala	1984-1990	770	-0.31	40.08
Apollo	2006-2009	642	0.42	18.16

Le modèle de gravité terrestre EGM96 a été préféré à GGM02C de Tapley et al. (2005), pourtant plus récent, car c’est celui de référence pour les Conventions IERS 2003. Des tests ont cependant été menés avec GGM02C (dont les coefficients sont téléchargeables sur le site www.csr.utexas.edu/grace/gravity). Comme on le verra plus tard, on réajuste aux données LLR les J_2 et J_3 de la Terre ; pour ces deux paramètres, peu importe donc les valeurs initiales. Seul le J_4 reste fixé, mais les valeurs issues de GGM02C et EGM96 étant voisines, on obtient au final les mêmes résidus.

LP150Q n’est pas non plus le modèle de potentiel de la Lune le plus récent. SGM100h, décrit dans (Matsumoto et al., 2010), est construit à partir des données de la sonde Kaguya. Malheureusement, il n’est pas précisé où les valeurs des coefficients sont disponibles.

Les ajustements aux données planétaires sont donc effectués en premier. À l’issue de ceux aux données LLR, on vérifie cependant que la solution finalement obtenue ne dégrade pas les résidus aux observations planétaires.

13.2.1 Sélection et pondération des observations

Au paragraphe 10.2.2, on avait vérifié que 174 paramètres étaient linéairement indépendants. Parmi eux, on décide :

- de fixer les paramètres post-newtoniens β et γ à la valeur 1, de manière à rester en conformité avec la relativité générale
- de n’ajuster que les termes constants des biais n^{os} 1, 17 et 39. Les autres sont laissés à zéro et ne sont donc pas pris en compte. La raison sera justifiée ultérieurement

Il reste alors 99 paramètres que l’on ajuste aux observations LLR. Toutes les données sont prises en compte et pondérées de la même manière.

Le tableau 13.4 donne les moyennes et les écart-types (notés σ par la suite) des résidus selon les stations et les époques d’observation pour la solution (notée S099_01) ainsi construite.

La séparation des données du CERGA entre avant et après 1987 est justifiée par le changement de la longueur d’onde du laser de 693.8 nm (Rubis) à 532 nm (Yag), ce qui modifie la précision des observations. Celles du CERGA entre avant et après 1995, de MLRS1 entre avant et après 1985 et de MLRS2 entre avant et après 1996 seront justifiées ultérieurement, même si on observe déjà une grande différence dans les écart-types des observations.

Comparés à la précision attendue des observations, les σ sont très importants : près de 23 cm pour les données les plus récentes du CERGA, 27 cm (voire plus de 5 m) pour celles de MLRS2, alors que la précision des données correspondantes est censée n'être que de quelques centimètres. En fait, les responsables de ces mauvais résultats sont des points aberrants. Comme l'illustre le graphique de la figure 13.12, une majorité d'observations présentent des résidus faibles en comparaison des valeurs maximales atteintes par quelques points isolés. Ainsi, celui du CERGA vers 2002, dont le résidu atteint presque 10 m, dégrade à lui seul l'écart-type de 6 cm. Certains points de MLRS2 (non représentés) atteignent eux plus de 120 mètres (la raison est parfois une valeur absurde de la pression atmosphérique mesurée). Ces points aberrants ne doivent pas être pris en compte dans les ajustements car ils peuvent provoquer des biais importants sur la détermination des paramètres.

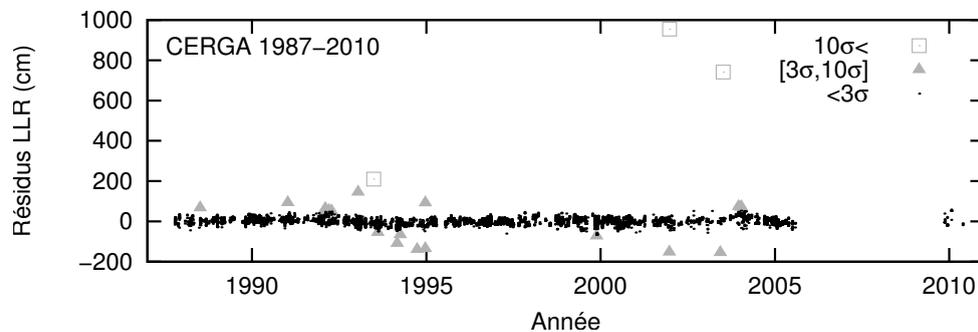


FIGURE 13.12 – Résidus LLR du CERGA (exprimés en cm) d'une solution où toutes les données sont prises en compte avec les mêmes pondérations. Les points dont les résidus dépassent 10σ sont représentés par des carrés, ceux compris entre 3σ et 10σ par des triangles et ceux inférieurs à 3σ en par des points noirs (σ est la valeur de l'écart-type calculé sur l'ensemble des points).

Idéalement, les résidus des observations ne devraient être dus qu'à des erreurs de mesure, considérées comme une variable aléatoire obéissant à la loi normale. Or l'une de ses propriétés est que 99,7% des valeurs présentent un écart à la moyenne inférieur à 3σ . Pour éliminer les points aberrants, on détermine donc le nombre d'observations dont les résidus sont supérieurs à 3σ . Si ce nombre représente plus de 0,3% des données, elles sont écartées de l'ajustement. Sinon, seules celles dont les résidus dépassent 10σ sont éliminées.

Par exemple, les observations du CERGA entre 1987 et 1995 comptent 14 points (carrés et triangles) dont les résidus sont supérieurs à 3σ . Ils représentent 0,40% des 3460 observations de cette époque et sont donc rejetés. Pour celles entre 1995 et 2010, seules 7 dépassent 3σ , soit seulement 0,14% des 4932 données disponibles. Seules les deux supérieures à 10σ sont donc éliminées.

Les données conservées sont alors pondérées (voir le paragraphe 10.1.4) par l'inverse de l'écart-type du groupe auquel elles appartiennent ($\rho_i = 1/\sigma$); on donne ainsi plus de poids aux observations les plus précises. Ces nouvelles pondérations sont utilisées dans un nouvel ajustement des 99 mêmes paramètres et le processus de sélection/pondération est itéré plusieurs fois. Si, au cours des itérations, une observation précédemment éliminée présente un résidu inférieur à 3σ , elle est alors réintégrée. Le tableau 13.5 présente les résultats des différentes itérations. À partir de la 12^{ème}, ni les écart-types, ni le nombre de données éliminées n'évoluent.

Les graphiques de la figure 13.13 montrent les résidus pour le CERGA et MLRS2 à l'issue du processus de sélection/pondération. Pour le CERGA, on observe que les données avant mi-1995 présentent un signal plus prononcé qu'après. C'est pourquoi les pondérations ont été calculées séparément pour ces deux périodes. Si cela n'avait pas été le cas, une grande partie des données éliminées l'auraient été dans les années 1987-1988, avec simplement un écrêtement du signal qu'il

TABLE 13.5 – Évolution du nombre d’observations éliminées et de l’écart-type sur les résidus au cours du processus de sélection et pondération. Pour chaque station et époque, la colonne “Total” représente le nombre d’observations disponibles. Pour chaque itération, la colonne σ représente l’écart-type calculé sur les observations prises en compte dans l’ajustement, N_E est le nombre d’observations éliminées.

Station	Époque	Total	itération 1		itération 2		itération 3		itération 4	
			σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E
CERGA	1987-1995	3460	16.65	0	5.68	14	5.35	42	5.56	55
CERGA	1995-2010	4932	23.12	0	5.74	2	3.68	21	3.33	53
CERGA	1984-1986	1187	44.47	0	20.68	2	15.41	20	14.92	29
Mc Donald	1969-1986	3604	158.03	0	44.30	40	31.78	84	29.62	115
MLRS1	1982-1985	418	79.42	0	77.11	2	73.69	8	70.97	13
MLRS1	1985-1988	174	33.47	0	15.60	4	8.61	8	6.72	10
MLRS2	1988-1996	1192	27.67	0	7.89	18	4.75	16	4.17	38
MLRS2	1996-2008	2243	546.16	0	126.23	25	83.17	96	45.42	198
Haleakala	1984-1990	770	40.08	0	14.02	7	8.54	20	7.82	28
Apollo	2006-2009	642	18.16	0	4.55	0	3.83	0	3.81	2
Station	Époque	Total	itération 5		itération 6		itération 7		itération 8	
			σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E
CERGA	1987-1995	3460	5.71	50	5.84	45	5.85	45	5.86	45
CERGA	1995-2010	4932	3.21	71	3.17	71	3.16	71	3.16	71
CERGA	1984-1986	1187	14.98	29	15.02	29	15.04	29	15.04	29
Mc Donald	1969-1986	3604	29.49	115	29.52	115	29.52	115	29.53	115
MLRS1	1982-1985	418	71.51	13	71.75	13	71.77	13	71.78	13
MLRS1	1985-1988	174	6.40	11	6.34	11	6.34	11	6.34	11
MLRS2	1988-1996	1192	4.05	46	4.11	44	4.12	44	4.12	44
MLRS2	1996-2008	2243	20.87	282	4.71	429	4.38	455	4.24	467
Haleakala	1984-1990	770	7.45	36	7.47	36	7.46	36	7.46	36
Apollo	2006-2009	642	3.85	2	3.88	2	3.87	2	3.85	2
Station	Époque	Total	itération 9		itération 10		itération 11		itération 12	
			σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E	σ	N_E
CERGA	1987-1995	3460	5.85	45	5.86	45	5.86	45	5.86	45
CERGA	1995-2010	4932	3.16	71	3.16	71	3.16	71	3.16	71
CERGA	1984-1986	1187	15.04	29	15.04	29	15.05	29	15.05	29
Mc Donald	1969-1986	3604	29.52	115	29.53	115	29.54	115	29.54	115
MLRS1	1982-1985	418	71.77	13	71.78	13	71.79	13	71.80	13
MLRS1	1985-1988	174	6.34	11	6.34	11	6.34	11	6.34	11
MLRS2	1988-1996	1192	4.12	44	4.12	44	4.12	44	4.12	44
MLRS2	1996-2008	2243	4.38	455	4.24	467	4.16	475	4.16	475
Haleakala	1984-1990	770	7.46	36	7.46	36	7.46	36	7.46	36
Apollo	2006-2009	642	3.87	2	3.85	2	3.84	2	3.84	2

est nécessaire de conserver (il ne s’agit pas de points aberrants). Pour MLRS2, on observe à partir de 1996 une dégradation des résidus, avec une multiplication des points qu’on pourrait hésiter à considérer comme aberrants. Il faut cependant remarquer que cette dégradation n’est présente ni dans les données du CERGA, ni d’Apollo (qui couvrent une partie de la même période, mais non représentées ici) ; elle est donc spécifique à MLRS2. Après discussion avec Randall L. Ricklefs, il semble qu’elle soit due au vieillissement du détecteur de photons, utilisé depuis le début des observations LLR, conjugué au départ d’une personne chargée du calcul et de la vérification des points normaux. Pour MLRS1, la grande différence entre les résidus d’avant et après 1985 n’est pas expliquée (on peut en voir une illustration avec les graphes de la figure 13.18).

Le tableau 13.6 résume les nombres des données disponibles, conservées et éliminées pour la solution S099_12. Le pourcentage de points rejetés est toujours inférieur à 5%, sauf pour les données MLRS1 après 1985 et celles MLRS2 après 1996.

Pour s’assurer de la pertinence de la méthode de sélection des données, et surtout qu’on n’a pas rejeté trop d’observations, on peut comparer avec celles utilisées dans les solutions DE421 (Folkner et al., 2008) et EM-3 (Aleshkina, 2002), et résumées dans le même tableau 13.6. Pour DE421, il n’est pas précisé combien d’observations ont été rejetées et on supposera

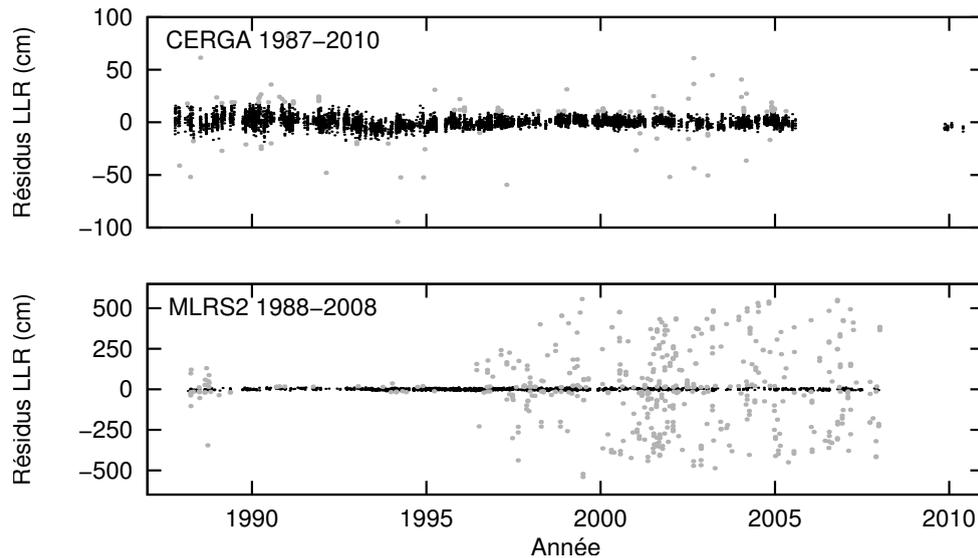


FIGURE 13.13 – Résidus LLR (exprimés en cm) de la solution obtenue après le processus de sélection et pondération des données (solution S099_12). Pour les stations du CERGA (en haut) et MLRS2 (en bas), les données conservées sont représentées en noir, celles éliminées en gris.

que les nombres de données indiqués pour chacune des stations correspondent à celles qui ont été conservées lors des ajustements. Pour EM-3, il est mentionné qu’avec l’utilisation du critère à 3σ , seules 9 observations ont été rejetées, ce qui est beaucoup moins que dans la solution S099_12.

Ces deux solutions étant plus anciennes que S099_12, il est normal que le nombre de données diffère pour les stations qui ont continué à observer (MLRS2, CERGA et Apollo). EM-3 est parue en 2002 ; à cette date, les stations de Mc Donald, MLRS1, Haleakala avaient cessé leurs observations, de même que le CERGA avec le laser de longueur d’onde de 693.8 nm. Pour ces jeux d’observations, on remarque que le nombre de données conservées dans l’ajustement de S099_12 est toujours supérieur ou égal à celui de EM-3, sauf pour le CERGA (1158 contre 1160). On peut donc supposer que les données utilisées dans l’ajustement d’EM-3 avaient déjà été triées. Il est même probable qu’elles aient été reprises du JPL car pour Mc Donald, MLRS1 et Haleakala, les nombres correspondent entre EM-3 et DE421. À la date de parution de DE421 en 2008, le CERGA n’avait pas encore repris les observations arrêtées en 2005. Là encore, en comparant le nombre global d’observations du CERGA jusqu’en 2005 (2 longueurs d’onde du laser confondues et en soustrayant les 35 depuis fin 2009), 9399 données ont été conservées pour S099_12, ce qui est supérieur aux 9177 de DE421. La même remarque peut être faite pour MLRS2, avec 2916 données conservées pour S099_12 contre 2746 pour DE421.

En conclusion, la méthode de sélection et pondération des données exposée ici n’est pas plus restrictive que celles (inconnues) utilisées pour les solution EM-3 et DE421. Si seulement 9 observations ont été rejetées selon le critère à 3σ dans (Aleshkina, 2002), c’est certainement parce que les données de départ avaient déjà été triées.

13.2.2 Contraintes sur les dérives des stations

La solution S099_12 décrite au paragraphe précédent est *la* meilleure possible en terme de résidus. Si les modèles dynamique et de réduction des données sont conservés, le changement de l’un des 99 paramètres par rapport à sa valeur ajustée entraînera une augmentation des résidus (plus rigoureusement, de la fonction χ^2 , définie en 10.15) ; cette dernière ne sera cependant pas

TABLE 13.6 – Comparaison des nombres de données conservées dans S099_12 avec celles utilisées dans les solutions EM-3 et DE421.

Station	Époque	S099_12			EM3	DE421
		N	Éliminées	Conservées	N	N
CERGA	1987-1995	3460	45 (1.30%)	3415	6871	↓
CERGA	1995-2010	4932	71 (1.44%)	4861		9177
CERGA	1984-1986	1187	29 (2.44%)	1158		1160
Mc Donald	1969-1986	3604	115 (3.19%)	3489	3451	3451
MLRS1	1982-1985	418	13 (3.11%)	405	275	275
MLRS1	1985-1988	174	11 (6.32%)	163		
MLRS2	1988-1996	1192	44 (3.69%)	1148	2187	2746
MLRS2	1996-2008	2243	475 (21.18%)	1768		
Haleakala	1984-1990	770	36 (4.68%)	734	694	694
Apollo	2006-2009	642	2 (0.31%)	640	-	247

TABLE 13.7 – Dérives des stations LLR (en cm/an) ajustées dans la solution S099_12.

Station	Vx	Vy	Vz
CERGA	-1.57 ± 0.02	1.05 ± 0.05	2.25 ± 0.04
Mc Donald	1.16 ± 0.30	-2.62 ± 0.19	-2.79 ± 0.50
MLRS1	2.50 ± 1.50	3.55 ± 0.89	7.06 ± 2.31
MLRS2	-1.90 ± 0.07	0.42 ± 0.03	0.50 ± 0.08
Haleakala (réception)	0.20 ± 0.53	4.42 ± 0.72	-9.53 ± 1.27
Apollo	-3.45 ± 0.41	-0.80 ± 0.26	5.02 ± 0.80

forcément significative.

Ces paramètres étaient choisis de manière à être linéairement indépendants et étaient ajustés sous la seule contrainte des observations LLR. Parmi eux figurent les vitesses des stations, dont le tableau 13.7 donne les valeurs ajustées et les erreurs formelles (à 1σ , telles que définies au paragraphe 10.1.2).

La station MLRS1 présente des erreurs formelles élevées, d'une part en raison d'une médiocre qualité des observations, d'autre part en raison du faible intervalle de temps qu'elles couvrent : sur moins de 5 ans, la dérive n'est pas suffisamment importante pour avoir un effet significatif et être déterminée avec précision.

On observe aussi des disparités importantes entre les valeurs obtenues pour Mc Donald et MLRS2, stations pourtant éloignées de moins de 1200 m. Or les vitesses des stations sont censées modéliser la tectonique des plaques et il n'est pas normal d'obtenir des valeurs si différentes entre deux points relativement proches (même si ce point de vue peut être nuancé, comme expliqué au paragraphe 9.1.2).

Ensuite, les valeurs obtenues pour la station de réception d'Haleakala sont très importantes (plus de 10 cm/an au total). Il est vrai qu'Hawaï est une zone particulière, avec une activité volcanique importante, et cette valeur n'est peut-être pas aberrante. Mais les vitesses de la station d'émission données sur le site de l'IGN (respectivement 1.4, 6.1 et 3.1 cm/an pour les dérives en X, Y et Z) sont incompatibles avec celles ajustées ici pour la station de réception.

L'inconvénient est donc que des stations proches (Mc Donald, MLRS1 et MLRS2 d'une part, émission et réception d'Haleakala d'autre part) présentent des dérives très différentes. Ce

TABLE 13.8 – Résidus LLR des solutions S099_12 et S081 (suppression de l’ajustement des dérives des stations). Les moyennes et les écart-types selon les stations et les époques sont exprimés en cm. La dégradation des écart-types lors du passage de S099_12 à S081 est donnée en pourcentage. Les allures des courbes des résidus en fonction du temps sont similaires à celles de la figure 13.18.

Station	Époque	S099_12		S081		Dégradation
		Moy.	σ	Moy.	σ	
CERGA	1987-1995	-0.13	5.86	0.19	6.25	6.7%
CERGA	1995-2010	0.06	3.16	-0.01	3.27	3.5%
CERGA	1984-1986	0.00	15.05	0.00	15.37	2.1%
Mc Donald	1969-1986	0.21	29.54	0.21	31.02	5.0%
MLRS1	1982-1985	-0.65	71.80	-8.12	72.94	1.6%
MLRS1	1985-1988	0.03	6.34	0.22	7.45	17.5%
MLRS2	1988-1996	-0.04	4.12	-0.92	4.22	2.4%
MLRS2	1996-2008	-0.11	4.16	0.48	4.37	5.0%
Haleakala	1984-1990	-0.32	7.46	-0.31	7.97	6.8%
Apollo	2006-2009	0.02	3.84	0.05	4.26	10.9%

problème pourrait être évité en imposant des dérives identiques pour les stations d’un même site. On n’ajusterait donc plus que 3 composantes au lieu de 9 pour Mc Donald, MLRS1 et MLRS2, et on imposerait des dérives égales (ajustées) pour les deux stations d’Haleakala. On obtiendrait alors une solution dont la cohérence interne du modèle serait respectée.

Mais les vitesses ajustées de la station LLR du CERGA diffèrent aussi de celles de la station SLR, distante de seulement 37 mètres. Le même problème se pose également pour Apollo, dont les vitesses ajustées sont très différentes de celles de la station GPS de White Sands (code DOMES 49884S001) située à 65 km. La matrice de passage de l’ITRF à l’ICRF est déterminée par une combinaison de plusieurs techniques (SLR, GPS, LLR, Doris, ...); mais dans le calcul des Earth Orientation Parameters (EOP), ce sont les données VLBI qui sont prépondérantes. Or, modifier les dérives d’une station LLR, c’est implicitement changer celles de stations VLBI voisines, et par conséquent, la matrice de passage de l’ITRF à l’ICRF que l’on a imposé au paragraphe 9.1.7.

Pour réduire les risques d’incohérence, on décide de ne plus ajuster les vitesses des stations; les valeurs sont imposées conformes à celles du paragraphe 9.1.2. On construit donc la solution S081 (pour 81 paramètres ajustés), dont les résidus sont comparés à ceux de S099_12 dans le tableau 13.8.

Comme prévu, la suppression de 18 degrés de liberté dans l’ajustement entraîne une augmentation générale des résidus. La dégradation est même supérieure à 10% pour les données d’Apollo et MLRS1 après 1985, mais c’est le prix à payer pour obtenir une solution cohérente, S099_12 n’était de toute façon physiquement pas acceptable.

13.2.3 Contraintes apportées par les observations planétaires

Entre la solution F08 (ajustée par Agnès Fienga aux observations planétaires) et la solution S081 (décrite dans le paragraphe précédent), les conditions initiales du barycentre Terre-Lune et le rapport des masses entre la Terre et la Lune (7 paramètres au total) ont été modifiés. Ces modifications induisent des changements importants dans la trajectoire de la Terre. Ainsi, les différences entre les solutions F08 et S081 sont supérieures à 100 km pour la distance Terre-

Vénus, et dépassent 150 km sur la distance Terre-Mars (voir les courbes noires de la figure 13.14). Or ces distances sont les termes principaux des mesures VEX, MEX et MGS, dont la précision est de l'ordre de quelques mètres (voir (Fienga et al., 2009, Tableau 1)). La solution S081 est donc incompatible avec ces données. Des essais ont été effectués par Agnès Fienga pour tenter de réajuster S081 aux observations planétaires, mais elle est trop éloignée pour converger.

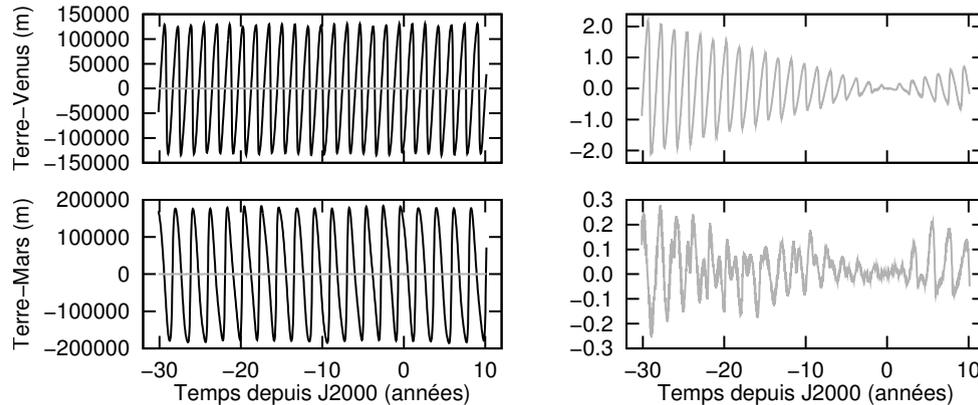


FIGURE 13.14 – Différences entre les solutions F08 et S081 d’une part (en noir), F08 et S074a d’autre part (en gris). Les comparaisons portent sur les distances Terre-Vénus (en haut) et Terre-Mars (en bas), exprimées en mètres. Le temps est exprimé en années autour de J2000.

Dans la mesure où la trajectoire de la Terre est mieux contrainte par les observations planétaires, on décide de ne plus ajuster ni les conditions initiales du barycentre Terre-Lune, ni le rapport de leurs masses aux observations LLR. Leurs valeurs resteront égales à celles qui ont été employées dans la solution F08. On construit alors la solution S074a (pour 74 paramètres ajustés). Les différences avec F08 dans les distances Terre-Vénus et Terre-Mars sont ramenées à respectivement de 2 m et 30 cm (voir les courbes grises de la figure 13.14). Les résidus LLR de S074a sont donnés dans le tableau 13.9. Comme lors de la suppression de l’ajustement des dérives des stations, l’élimination de 7 degrés de liberté dégrade les résidus, et particulièrement ceux du CERGA après 1995.

Remarque : les écarts dépassant 100 km entre F08 et S081 sont ici très importants. Avec d’autres solutions de départ F08, il arrivait que les différences restent inférieures à 10 km. Mais elles restaient toujours impossibles à réduire en réajustant S081 aux observations planétaires.

13.2.4 Élimination successive des paramètres mal déterminés

On commence par construire la solution S074b sur les mêmes données que celles sélectionnées avec S099_12, mais en actualisant leurs pondérations avec les résidus de S074a. On rétablit ainsi la cohérence entre résidus et pondérations qu’on avait perdue avec S081 et S074a ; les résidus de S074b diffèrent de moins d’un millimètre de ceux de S074a.

Pour chaque paramètre ajusté, on définit le rapport $Q = \sigma/\alpha$ entre l’erreur formelle et sa valeur.

Dans la solution S074b, certains présentent des valeurs de Q élevées. Par exemple, le nombre de Love l_2 de la Lune est ajusté à $(3.59 \pm 26.9) \times 10^{-4}$. L’erreur formelle représente ici plus de sept fois la valeur ajustée, qui est donc très incertaine.

Dans d’autres solutions de travail (avec moins d’observations disponibles, pondérées différemment, ou avec une autre solution de départ “F08”, ...), il arrivait que le plus grand des rapports Q atteigne des valeurs plus élevées encore (parfois plus de 150!). Pour certains paramètres, il est facile de juger si la valeur ajustée au LLR est physiquement réaliste. Par exemple, les temps

TABLE 13.9 – Résidus LLR des solutions S081 et S074a (suppression de l’ajustement des conditions initiales du barycentre Terre-Lune et du rapport des masses entre la Terre et la Lune). Les moyennes et les écart-types selon les stations et les époques sont exprimés en cm. La dégradation des écart-types lors du passage de S081 à S074a est donnée en pourcentage. Les allures des courbes des résidus en fonction du temps sont similaires à celles de la figure 13.18.

Station	Époque	S081		S074a		Dégradation
		Moy.	σ	Moy.	σ	
CERGA	1987-1995	0.19	6.25	0.22	6.33	1.3%
CERGA	1995-2010	-0.01	3.27	-0.02	3.64	11.3%
CERGA	1984-1986	0.00	15.37	0.00	15.94	3.7%
Mc Donald	1969-1986	0.21	31.02	0.16	31.34	1.0%
MLRS1	1982-1985	-8.12	72.94	-7.76	73.44	0.7%
MLRS1	1985-1988	0.22	7.45	0.20	7.94	6.6%
MLRS2	1988-1996	-0.92	4.22	-0.89	4.33	2.6%
MLRS2	1996-2008	0.48	4.37	0.45	4.59	5.0%
Haleakala	1984-1990	-0.31	7.97	-0.40	8.15	2.3%
Apollo	2006-2009	0.05	4.26	0.14	4.62	8.5%

de déphasage intervenant dans les effets de marée doivent impérativement être positifs car le corps déformé ne peut réagir en avance à une sollicitation. De même qu’un ressort doit s’étirer lorsqu’on tire dessus, les nombres de Love doivent eux aussi être positifs. Or il arrivait qu’on obtienne $l_2 = (-3.79 \pm 28.4) \times 10^{-4}$ pour la Lune. Là encore, l’erreur formelle était importante comparée à la valeur ajustée. Par contre, d’autres paramètres comme les coefficients du potentiel peuvent prendre des valeurs positives ou négatives, grandes ou petites. Il est alors difficile de juger si la valeur ajustée est physiquement réaliste ou non.

Lorsque la valeur de Q est élevée pour un paramètre, on suppose ce dernier mieux déterminé par une autre méthode que l’ajustement d’une solution planétaire aux observations LLR, et on choisit alors de ne plus l’ajuster.

Remarque : ce n’est pas parce qu’un paramètre est mieux déterminé par une autre technique qu’il faut forcément s’interdire de l’ajuster au LLR. En effet, la valeur d’un paramètre ne peut pas être dissociée du modèle avec lequel elle a été déterminée. Par exemple, Konopliv et al. (2001) utilise des données de l’orbiteur Lunar Prospector pour calculer les coefficients du potentiel de la Lune jusqu’au degré 150, avec en particulier l’utilisation de la solution DE403 du JPL pour la modélisation des positions mutuelles des corps. Avec une solution planétaire et/ou un système de masses différents (par exemple DE421, INPOP06 ou INPOP08), les valeurs auraient été différentes, et parfois très différentes. D’autre part, on se limite dans INPOP à la prise en compte des coefficients de degré 4 dans le potentiel de la Lune. Il est donc légitime d’en modifier les valeurs par rapport à LP150Q, pour compenser en partie le fait qu’on néglige les effets des coefficients de degrés supérieurs. Les mêmes remarques sont valables pour les coefficients du potentiel de la Terre : EGM96 va jusqu’au degré 360 alors qu’on se limite à 4 pour INPOP.

Pour sélectionner les paramètres que l’on ajuste, on procède par itérations :

- on dispose d’une solution $S(n)$, obtenue par ajustement de n paramètres aux observations LLR avec les pondérations $P(n)$
- de $S(n)$, on détermine les écart-types sur les résidus pour chacune des stations et des époques du tableau 13.9
- les inverses de ces écart-types déterminent les pondérations $P(n-1)$

- dans $S(n)$, on repère le paramètre qui présente le plus grand rapport entre son erreur formelle et sa valeur et on le supprime de l'ensemble des paramètres ajustés
- on produit la solution $S(n-1)$ en ajustant les $n-1$ paramètres restants aux observations LLR pondérées par $P(n-1)$.

Lors de la pondération des données, contrairement au paragraphe 13.2.1, on ne cherche plus à éliminer les points aberrants ou à réintégrer des observations précédemment éliminées ; on conserve la même sélection que celle effectuée avec S099_12. Seules les pondérations sont réactualisées, en fonction des résidus. Des tests ont cependant été effectués en éliminant/réintégrant au cours des itérations des données dont les résidus sont supérieurs/inférieurs à 3σ . L'ordre des premiers paramètres éliminés pouvait alors varier, mais au final, on obtient sensiblement les mêmes solutions et incertitudes sur les paramètres.

Le tableau 13.10 donne, pour chaque solution, le paramètre qui présente le facteur Q le plus élevé, et qui est éliminé des ajustements pour les itérations suivantes.

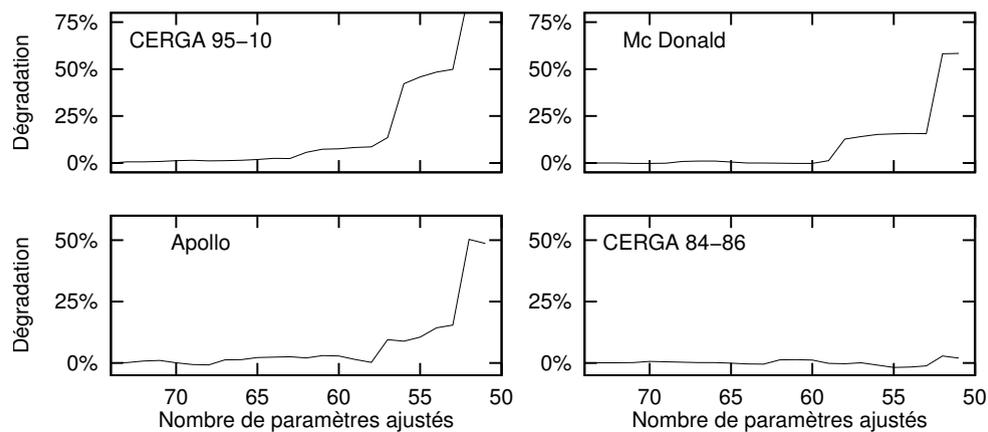


FIGURE 13.15 – Evolution de l'écart-type des résidus pour chacune des stations et époques lors de la suppression des paramètres ajustés. Les évolutions sont données en pourcentage par rapport aux valeurs de la solution S074b. Le nombre de paramètres ajustés est indiqué en abscisse.

Comme on réduit le nombre de degrés de liberté, les résidus augmentent. Cette évolution est illustrée avec les courbes 13.15. La dégradation reste très limitée pendant une dizaine d'itérations : les premiers paramètres éliminés sont ceux dont l'effet sur le LLR est le plus facilement compensable par l'ajustement des autres. On finit cependant par atteindre la limite avec la suppression du nombre de Love h_2 de la Lune, et les résidus du CERGA après 1995, plus faibles donc plus sensibles, commencent à augmenter. La même chose est observée plus tard avec ceux d'Apollo (ainsi qu'avec MLRS2 et Haleakala, non représentés ici). Ceux du CERGA avant 1984 (et ceux de MLRS1) ne présentent pas de dégradation, certainement car ils sont plus grands que les autres. Le cas de Mc Donald est particulier. Les résidus sont du même ordre de grandeur que ceux de MLRS1, mais les observations s'étendent sur une période plus longue (16 ans au lieu de 5 pour MLRS1) et sont aussi les plus anciennes. Or plus on avance dans le temps, plus l'effet de certains paramètres, comme les coefficients du potentiel, est important.

En contrepartie, la suppression d'un paramètre permet de diminuer l'erreur formelle de ceux avec lesquels il était éventuellement corrélé. Ainsi, lors du passage de S070 à S069, on fixe la valeur du coefficient du potentiel C_{41} de la Lune à sa valeur LP150Q obtenue par Konopliv et al. (2001). L'erreur formelle sur le C_{30} de la Lune passe alors de 1.79×10^{-6} pour S070 à 3.14×10^{-8} pour S069 (près de 60 fois inférieure). C'est pourquoi les itérations sont nécessaires ; on ne peut pas se contenter de repérer dans la solution de départ S074b tous les paramètres mal déterminés (dont Q serait supérieur à une spécification) et les éliminer en une seule fois.

TABLE 13.10 – Liste des paramètres qui présentent les plus grands rapports erreur/valeur au cours des itérations. Les solutions sont notées Sxxx, où xxx est le nombre de paramètres ajustés. (C_{nmE}, S_{nmE}) sont les coefficients du potentiel de la Terre, (C_{nmM}, S_{nmM}) sont ceux de la Lune. Biais xx désignent les corrections constantes (décalages) appliquées aux observations. l_2 et h_2 sont les nombres de Love associés aux déformations de la surface de la Lune. Q est le rapport entre l'erreur formelle et la valeur ajustée. Enfin, la dernière colonne contient les valeurs (fixées) utilisées dans la suite des itérations.

Solution	Paramètre	Valeur ajustée	Erreur formelle (1σ)	Q (%)	Valeur fixée
S074b	l_{2M}	3.59×10^{-4}	2.69×10^{-3}	748	1.05×10^{-2}
S073	C_{40E}	1.80×10^{-5}	8.98×10^{-6}	49.9	1.62×10^{-6}
S072	C_{42M}	-1.50×10^{-4}	5.78×10^{-5}	38.5	-1.59×10^{-6}
S071	C_{32M}	-3.76×10^{-6}	1.01×10^{-6}	26.9	4.85×10^{-6}
S070	C_{41M}	1.59×10^{-4}	5.41×10^{-5}	34.1	-5.69×10^{-6}
S069	C_{43M}	1.33×10^{-7}	3.08×10^{-8}	23.1	-8.12×10^{-8}
S068	S_{43M}	1.00×10^{-5}	1.36×10^{-6}	13.6	-8.03×10^{-7}
S067	S_{41M}	1.80×10^{-5}	4.17×10^{-6}	23.2	1.57×10^{-6}
S066	C_{44M}	-3.28×10^{-5}	3.69×10^{-6}	11.2	-1.27×10^{-7}
S065	C_{40M}	7.05×10^{-3}	6.29×10^{-4}	8.92	9.64×10^{-6}
S064	h_{2M}	3.97×10^{-2}	3.10×10^{-3}	7.81	3.79×10^{-2}
S063	S_{42M}	-4.44×10^{-4}	2.24×10^{-5}	5.04	-1.52×10^{-6}
S062	S_{33M}	1.30×10^{-7}	3.13×10^{-8}	24.0	-2.49×10^{-7}
S061	S_{44M}	5.26×10^{-8}	1.78×10^{-8}	33.8	8.31×10^{-8}
S060	<i>Biais</i> 17	6.80×10^{-10}	3.55×10^{-11}	5.22	0.0
S059	<i>Biais</i> 39	2.22×10^{-9}	7.93×10^{-11}	3.57	0.0
S058	S_{31M}	3.33×10^{-6}	8.97×10^{-8}	2.69	5.90×10^{-6}
S057	<i>Biais</i> 01	-6.37×10^{-10}	1.20×10^{-11}	1.88	0.0
S056	C_{30E}	2.86×10^{-6}	4.27×10^{-8}	1.49	2.53×10^{-6}
S055	C_{31M}	3.37×10^{-5}	4.17×10^{-7}	1.24	2.85×10^{-5}
S054	Tau_M	1.83×10^{-1}	1.73×10^{-3}	0.95	2.11×10^{-1}
S053	Tau_{21E}	1.27×10^{-2}	1.08×10^{-4}	0.85	7.66×10^{-4}
S052	C_{30M}	-8.37×10^{-6}	3.42×10^{-8}	0.41	-8.47×10^{-6}
S051	C_{33M}	1.75×10^{-6}	4.63×10^{-9}	0.27	1.71×10^{-6}

Globalement, on observe une diminution des maxima atteints par les rapports Q au fur et à mesure des suppressions de paramètres, à part pour quelques étapes. Ces augmentations ne sont pas dues à une hausse des erreurs formelles, mais à une baisse de la valeur ajustée. Ainsi, en fixant la valeur de C_{32M} lors du passage de S071 à S070, celle ajustée de C_{41M} passe de $1.17 \times 10^{-3} \pm 1.31 \times 10^{-4}$ ($Q=11.2$), à $1.59 \times 10^{-4} \pm 5.41 \times 10^{-5}$ ($Q=34.1$). La même chose est observée lors du passage de S063 à S062, puis à S061.

13.3 Choix de la solution INPOP08

La solution INPOP08 est basée sur S059, la première dont tous les paramètres présentent des rapports Q inférieurs à 5%. La modification du J_2 terrestre induit un changement dans l'ellipticité dynamique de la Terre et provoque une faible dérive en précession de son orientation. À partir de S059, on ajuste les conditions initiales du moment cinétique de la Terre et de son rapport C/MR^2 sur les coordonnées du pôle REN2000-P03 (voir le paragraphe 13.1.2). Ces modifications de constantes laissent les résidus LLR inchangés.

D'autre part, on vérifie qu'avec INPOP08, dont les paramètres sont modifiés par rapport à ceux de F08, les résidus aux observations planétaires ne sont pas dégradés.

TABLE 13.11 – Valeurs des paramètres intervenant dans le modèle dynamique. Pour chacun, on donne la valeur initiale (avant ajustement) et celles employées pour les solutions INPOP08 (avec l’erreur formelle à 1σ s’il est ajusté), DE421 ($\pm?$ indique si le paramètre y est ajusté) et EM-3. Tous les paramètres sont sans unité, exceptés les temps de déphasages τ_M , τ_{E21} et τ_{E22} (exprimés en jours) et GM_{EMB} (produit de la constante de la gravitation G par la somme des masses de la Lune et de la Terre, exprimé en UA^3/jour^2 , avec la même valeur de l’UA que DE405 soit 149 597 870,691 km).

Paramètre	Initiale	INPOP08	DE421	EM-3
GM_{EMB}	8.9970×10^{-10}	$8.9970 \times 10^{-10} \pm 7.19 \times 10^{-19}$	8.9970×10^{-10}	?
C_{20E}	-1.0826×10^{-3}	$-1.0826 \times 10^{-3} \pm 1.09 \times 10^{-9}$	-1.0826×10^{-3}	?
C_{30E}	2.5327×10^{-6}	$2.8813 \times 10^{-6} \pm 3.86 \times 10^{-8}$	2.5325×10^{-6}	?
C_{40E}	1.6196×10^{-6}	1.6196×10^{-6}	1.6200×10^{-6}	?
τ_{21E}	7.6619×10^{-4}	$1.2334 \times 10^{-2} \pm 9.69 \times 10^{-5}$	$1.1142 \times 10^{-2} \pm ?$?
τ_{22E}	3.4273×10^{-4}	$6.9795 \times 10^{-3} \pm 7.67 \times 10^{-6}$	$6.5743 \times 10^{-3} \pm ?$?
C_{20M}	-2.0326×10^{-4}	$-2.0346 \times 10^{-4} \pm 2.76 \times 10^{-8}$	$-2.0327 \times 10^{-4} \pm ?$	$-2.02351 \times 10^{-4} \pm 1.3 \times 10^{-9}$
C_{22M}	2.2358×10^{-5}	$2.2399 \times 10^{-5} \pm 2.65 \times 10^{-9}$	$2.2390 \times 10^{-5} \pm ?$	$2.2699 \times 10^{-5} \pm 6.0 \times 10^{-10}$
C_{30M}	-8.4745×10^{-6}	$-8.3915 \times 10^{-6} \pm 2.28 \times 10^{-8}$	$-8.4047 \times 10^{-6} \pm ?$	$-8.0680 \times 10^{-6} \pm 8.0 \times 10^{-10}$
C_{31M}	2.8452×10^{-5}	$3.1787 \times 10^{-5} \pm 3.71 \times 10^{-7}$	2.8452×10^{-5}	$3.7067 \times 10^{-5} \pm 1.1 \times 10^{-8}$
C_{32M}	4.8452×10^{-6}	4.8452×10^{-6}	$4.8464 \times 10^{-6} \pm ?$	$3.3963 \times 10^{-6} \pm 1.0 \times 10^{-10}$
C_{33M}	1.7132×10^{-6}	$1.7250 \times 10^{-6} \pm 6.29 \times 10^{-9}$	$1.6740 \times 10^{-6} \pm ?$	$1.0962 \times 10^{-6} \pm 2.0 \times 10^{-9}$
C_{40M}	9.6423×10^{-6}	9.6423×10^{-6}	9.6423×10^{-6}	?
C_{41M}	-5.6927×10^{-6}	-5.6927×10^{-6}	-5.6927×10^{-6}	?
C_{42M}	-1.5862×10^{-6}	-1.5862×10^{-6}	-1.5862×10^{-6}	?
C_{43M}	-8.1204×10^{-8}	-8.1204×10^{-8}	-8.1204×10^{-8}	?
C_{44M}	-1.2739×10^{-7}	-1.2739×10^{-7}	-1.2739×10^{-7}	?
S_{31M}	5.9008×10^{-6}	$3.2878 \times 10^{-6} \pm 8.80 \times 10^{-8}$	5.9008×10^{-6}	$4.8400 \times 10^{-6} \pm 1.0 \times 10^{-9}$
S_{32M}	1.6700×10^{-6}	$1.6871 \times 10^{-6} \pm 5.66 \times 10^{-10}$	$1.6842 \times 10^{-6} \pm ?$	$1.1861 \times 10^{-6} \pm 1.2 \times 10^{-9}$
S_{33M}	-2.4855×10^{-7}	-2.4855×10^{-7}	-2.4855×10^{-7}	$-1.8727 \times 10^{-7} \pm 1.0 \times 10^{-11}$
S_{41M}	1.5744×10^{-6}	1.5744×10^{-6}	1.5744×10^{-6}	?
S_{42M}	-1.5173×10^{-6}	-1.5173×10^{-6}	-1.5173×10^{-6}	?
S_{43M}	-8.0279×10^{-7}	-8.0279×10^{-7}	-8.0279×10^{-7}	?
S_{44M}	8.3147×10^{-8}	8.3147×10^{-8}	8.3147×10^{-8}	?
$(C/MR^2)_M$	3.9069×10^{-1}	$3.9316 \times 10^{-1} \pm 4.65 \times 10^{-5}$	$3.9327 \times 10^{-1} \pm ?$	3.906895×10^{-1}
k_{2M}	2.9922×10^{-2}	$2.6256 \times 10^{-2} \pm 1.70 \times 10^{-4}$	$2.1634 \times 10^{-2} \pm ?$	$2.054 \times 10^{-2} \pm 8.0 \times 10^{-5}$
τ_M	1.6672×10^{-1}	$1.8910 \times 10^{-1} \pm 1.53 \times 10^{-3}$	$1.0786 \times 10^{-1} \pm ?$?

13.3.1 Valeurs des paramètres

Dans les tableaux 13.11 , 13.12 et 13.14 sont données les valeurs des paramètres pour la construction d’INPOP08 (y compris ceux qui sont fixés), ainsi que leurs erreurs formelles pour ceux ajustés.

13.3.1.1 Paramètres dynamiques

Le tableau 13.11 contient les valeurs des paramètres intervenant dans le modèle dynamique. Elles sont comparées aux valeurs initiales avant ajustement, issues de :

- DE405 pour GM_{EMB} (constante G multipliée par la somme des masses de la Terre et la Lune), le temps de déphasage τ_M et le nombre de Love k_{2M} de la Lune
- LP150Q pour les coefficients du potentiel C_{ijM} et S_{ijM} de la Lune
- EGM96 pour les coefficients du potentiel C_{ijE} de la Terre
- des Conventions IERS 2003 pour les temps de déphasage τ_{21E} et τ_{22E} de la Terre

Elles sont aussi comparées à celles employées dans les solutions DE421 de Folkner et al. (2008) et EM-3 de Aleshkina (2002) (lorsqu’elles sont publiées). Dans (Folkner et al., 2008), il est indiqué si chaque paramètre est fixé ou ajusté, mais dans ce dernier cas, l’incertitude n’y est pas précisée.

On ne s’intéresse dans un premier temps qu’au statut (ajusté ou fixé) des paramètres. Les raisons pour lesquelles un paramètre est fixé ou ajusté dans DE421 ne sont pas expliquées dans

(Folkner et al., 2008) ; on remarque cependant une assez bonne adéquation avec INPOP. Seuls diffèrent les coefficients du potentiel de la Terre C_{20E} et C_{30E} , ceux de la Lune S_{31M} et C_{31M} , et GM_{EMB} (somme des masses de la Terre et la Lune, multipliées par la constante universelle de la gravitation). Ces paramètres sont ajustés dans INPOP08 mais fixés pour DE421. C’est l’inverse pour le coefficient du potentiel de la Lune C_{32M} , fixé dans INPOP08 et ajusté dans DE421.

Remarque : dans DE421, certains paramètres ne sont pas directement ajustés, mais se déduisent d’autres qui le sont. C’est le cas, entre autres, de C_{20M} , C_{22M} et $(C/MR^2)_M$, liés aux β_L et γ_L (voir les relations au paragraphe 11.1.5).

Dans (Folkner et al., 2008), ainsi que pour la solution EM-3 additionnelle, il est aussi fait mention de l’ajustement d’autres paramètres intervenant dans l’orientation de la Terre. Cette dernière intervient à la fois dans le modèle dynamique et lors de la réduction des données. Pour plus de détails à ce sujet, se reporter aux paragraphes 13.4.2.2.2 et 13.4.2.2.3.

Ensuite, les comparaisons des valeurs employées dans les diverses solutions nous indiquent qu’en raison des modèles différents utilisés, il n’est pas anormal d’obtenir des valeurs qui peuvent parfois être très éloignées les unes des autres. Ainsi, sur les graphes de la figure 13.16 sont représentées pour chaque paramètre ajusté dans INPOP08, les différences entre les valeurs ajustées et celles employées dans d’autres solutions (DE200 à DE421 et EM3), rapportées aux erreurs formelles d’INPOP08. Si tous les modèles utilisés pour construire ces solutions étaient parfaits et si le bruit de mesure était gaussien, ces rapports devraient tous être compris entre $[-3,3]$ (comme pour le coefficient du potentiel C_{20E} de la Terre). C’est loin d’être le cas pour tous les paramètres, avec des rapports qui peuvent dépasser 50. Mais cela ne signifie pas que les valeurs d’INPOP08 sont aberrantes :

- soit parce qu’il s’agit de valeurs “médianes” ; par exemple celle du temps de déphasage τ_{21E} est comprise entre celles de DE403 et DE421.
- soit parce que les différences entre les solutions du JPL ou EM3 sont elles-mêmes importantes, comme par exemple le temps de déphasage τ_{22E}

Seul le coefficient du potentiel de la Terre C_{30E} semble problématique, car les valeurs utilisées dans les solutions du JPL et dans les modèles de potentiel EGM96 et GGM02C sont toutes proches de 2.53×10^{-6} . Celle ajustée dans INPOP s’en écarte significativement. Pourtant, dans les nombreuses solutions intermédiaires construites (plusieurs centaines selon les modèles, les données LLR disponibles, leurs pondérations, les solutions de départ type F08, ...), cette valeur est assez stable, ne variant qu’entre 2.81×10^{-6} et 2.93×10^{-6} . Au paragraphe 10.4, on note que la valeur de C_{30E} reste très proche de celle ajustée ici, surtout au cours des tests de variabilité des paramètres par élimination aléatoire de données. Avec la méthode du Bootstrap, la valeur minimale atteinte est de 2.71×10^{-6} , mais reste supérieure à celle d’EGM96. La valeur ajustée par INPOP08 n’est donc pas une anomalie. Les raisons d’un tel écart sont inconnues. Les modèles de potentiel de la Terre sont calculés pour des degrés élevés ; comme on se limite au degré 4 dans INPOP, il est possible que le C_{30E} s’ajuste pour compenser l’absence de prise en compte des degrés supérieurs.

Quant aux temps de déphasages τ_{21E} et τ_{22E} , les valeurs ajustées sont très éloignées de celles issues du modèle de marées solides des conventions IERS 2003. Ces dernières ne tiennent compte que de la dissipation dans le manteau et négligent celle dans les océans (qui est prise en compte séparément). Les valeurs INPOP08 sont d’ailleurs proches de celles de DE421, et encore plus proches de celles de DE405.

Enfin, les incertitudes des paramètres ajustés dans EM-3 sont inférieures à celles d’INPOP08, à part pour le coefficient S_{32M} . C’est paradoxal, car depuis 2002 (date de parution d’EM-3), on dispose de plus de données, parmi les plus précises, et couvrant un intervalle de temps plus long ; on s’attendait donc à avoir une meilleure détermination des paramètres dans INPOP que dans EM-3. On peut aussi noter que dans les graphes de la figure 13.16, si les valeurs et erreurs d’EM-3 avaient servi de références en remplacement de celles d’INPOP08, les dispersions auraient été

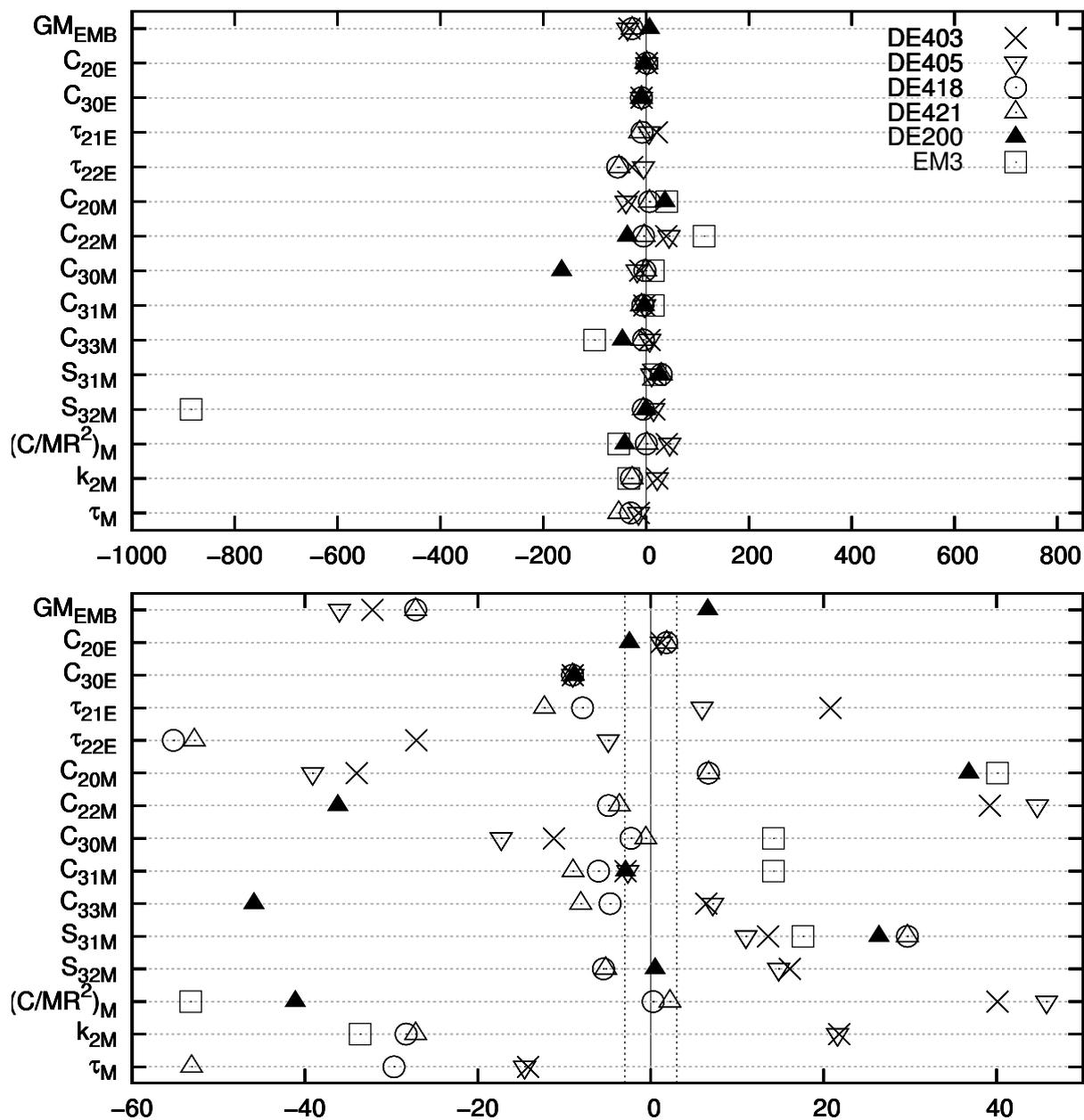


FIGURE 13.16 – Différences entre les valeurs de paramètres de diverses solutions et celles d'INPOP08, divisées par les erreurs formelles issues de l'ajustement par moindres carrés. Le graphique inférieur est identique au supérieur au changement d'échelle près. Les deux traits pointillés verticaux du graphique inférieur délimitent la zone $[-3,3]$.

encore plus importantes.

Remarque : dans (Aleshkina, 2002), le coefficient du potentiel C_{20M} , qui devrait être négatif, est certainement publié avec une erreur de transcription.

13.3.1.2 Coordonnées des réflecteurs

Pour EM-3, une seule coordonnée d'Apollo XV est ajustée, ses longitude et latitude étant fixées (pour plus de détails, voir le paragraphe 13.4.2.2.3). Pour DE421 et INPOP08, toutes les coordonnées de tous les réflecteurs sont ajustées. Elles diffèrent cependant de beaucoup entre elles, parfois de plus de 100 mètres, sauf pour les composantes Z.

TABLE 13.12 – Comparaison des coordonnées sélénocentriques (le repère est propre à chacune des solutions) des réflecteurs des solutions DE421, INPOP08 et EM-3. Les valeurs sont données en mètres.

Réflecteur		DE421	INPOP08	EM-3
Apollo 11	x	1591967.522	1591926.442 \pm 1.500	1591955.000
	y	690698.106	690799.570 \pm 3.460	690724.400
	z	21003.309	21002.677 \pm 0.304	21004.900
Apollo 14	x	1652689.359	1652725.312 \pm 1.140	1652696.800
	y	-520999.194	-520893.898 \pm 3.590	-520972.300
	z	-109731.018	-109731.641 \pm 0.316	-109728.600
Apollo 15	x	1554678.949	1554675.817 \pm 0.277	1554675.100
	y	98094.117	98193.230 \pm 3.370	98120.100
	z	765004.907	765004.978 \pm 0.302	765006.700
Lunakhod2	x	1339364.624	1339316.725 \pm 1.750	1339348.900
	y	801870.788	801956.280 \pm 2.910	801893.400
	z	756358.470	756358.527 \pm 0.266	756359.500

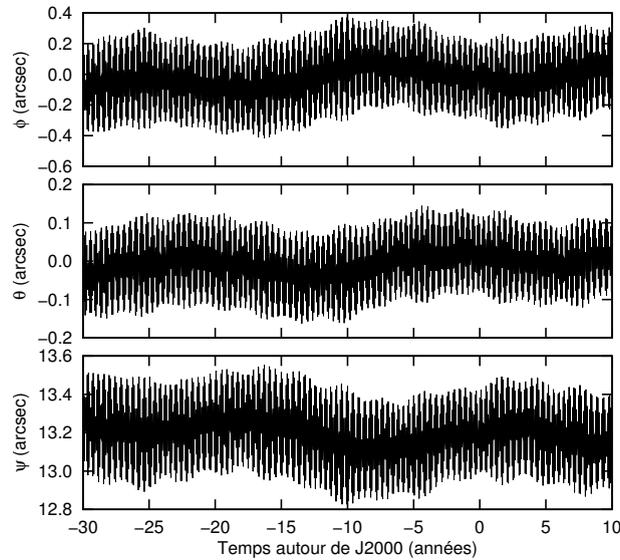


FIGURE 13.17 – Différences entre les librations de la Lune de DE421 et celles d'INPOP08. Les angles sont exprimés en secondes de degré, le temps en années depuis J2000.

Les courbes de la figure 13.17 montrent les différences dans les librations de la Lune entre DE421 et INPOP08. Elles sont logiquement bien plus importantes (500 fois) que celles entre INPOP05 et DE405 du graphique de la figure 11.32. Si les angles de précession ϕ et nutation θ oscillent autour de zéro, on observe surtout un déphasage d'environ 13,2 secondes de degré dans l'angle de rotation propre ψ . Ce décalage n'est pas anormal car les modèles dynamiques diffèrent (entre autres parce que la Lune de DE421 contient un noyau). Il pourrait cependant être en partie compensé par un changement de repère sélénocentrique. Sa définition dans DE421 est identique à celle d'INPOP : il est confondu avec les axes principaux d'inertie (on le note \mathcal{R}_{421}). Mais ce choix est arbitraire et on pourrait associer à la Lune un autre repère sans nuire à la cohérence des modèles :

TABLE 13.13 – Coordonnées sélénocentriques des réflecteurs de DE421, exprimées dans le repère \mathcal{R}'_{421} décalé de -13,2 secondes de degré par rapport à \mathcal{R}_{421} . La troisième colonne donne les différences entre les valeurs d'INPOP08 et celles exprimées dans le repère \mathcal{R}'_{421} . Toutes les valeurs sont exprimées en mètres.

Réflecteur		\mathcal{R}_{421}	\mathcal{R}'_{421}	INPOP08- \mathcal{R}'_{421}
Apollo 11	x	1591967.522	1591924.005	2.437
	y	690698.106	690798.399	1.171
	z	21003.309	21002.309	0.368
Apollo 14	x	1652689.359	1652721.820	3.492
	y	-520999.194	-520894.880	-0.982
	z	-109731.018	-109731.018	0.623
Apollo 15	x	1554678.949	1554672.817	3.000
	y	98094.117	98191.945	1.285
	z	765004.907	765004.907	0.071
Lunakhod2	x	1339364.624	1339314.479	2.246
	y	801870.788	801955.378	0.902
	z	756358.470	756358.470	0.057

- en modifiant les conditions initiales des librations
- en autorisant l'apparition de termes extra-diagonaux dans la matrice d'inertie de la Lune (et donc de coefficients C_{21M} , S_{21M} et S_{22M}).
- en modifiant les coefficients du potentiel de la Lune selon les développements exposés en annexe F
- en modifiant les coordonnées des réflecteurs

On peut donc ainsi définir le repère \mathcal{R}'_{421} comme l'image de \mathcal{R}_{421} par la rotation d'axe Z et d'angle $\alpha = -13.2$ secondes de degré. L'évolution des angles d'Euler de \mathcal{R}'_{421} ne présenterait pas de décalage par rapport à ceux intégrés dans INPOP. D'après l'expression F.14, il faudrait introduire un terme S_{22M} dans le potentiel et modifier le C_{22M} . Les autres coefficients se déduiraient de l'expression F.14. Enfin, les coordonnées (X, Y, Z) des réflecteurs ajustées par DE421 dans \mathcal{R}_{421} se transforment en (X', Y', Z') dans \mathcal{R}'_{421} selon l'expression :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

Les valeurs des nouvelles coordonnées (X', Y', Z') , sont données dans le tableau 13.13. Les différences avec celles ajustées par INPOP08 dans le repère cinématiquement proche de \mathcal{R}'_{421} sont alors bien plus faibles, quelques mètres au plus au lieu de plusieurs dizaines de mètres dans le tableau 13.12.

Remarque : au paragraphe 13.4.2.1, on applique le modèle de réduction LLR utilisé pour INPOP à la solution DE423 et on réajuste certains paramètres, dont les coordonnées des réflecteurs. Le même travail avait aussi été effectué pour DE421, même s'il n'est pas exposé ici. Les coordonnées ajustées des réflecteurs ne diffèrent alors que de quelques centimètres (10 au maximum) par rapport à celles publiées dans (Folkner et al., 2008).

13.3.1.3 Coordonnées des stations

Les coordonnées des stations ajustées dans INPOP08 sont données dans le tableau 13.14, et comparées aux valeurs initiales du tableau 9.1. Elles sont aussi ajustées dans DE421 et EM-

TABLE 13.14 – Comparaison des coordonnées des stations entre les valeurs de départ issues du tableau 9.1 et celles ajustées avec INPOP dans l’ITRF2005, à la date du 1^{er} janvier 1997. Les valeurs sont données en mètres.

Station		Tab. 9.1	INPOP08	Ecart
Station 01910	x	4581692.189	4581692.121 ± 0.003	-0.068
	y	556196.025	556196.024 ± 0.001	-0.001
	z	4389355.082	4389355.016 ± 0.010	-0.066
Station 71110	x	-1330781.376	-1330781.441 ± 0.012	0.065
	y	-5328755.585	-5328755.510 ± 0.009	-0.075
	z	3235697.658	3235697.502 ± 0.022	-0.156
Station 71111	x	-1330121.043	-1330121.101 ± 0.014	0.058
	y	-5328532.272	-5328532.294 ± 0.008	0.022
	z	3236146.670	3236146.580 ± 0.024	-0.090
Station 71112	x	-1330021.072	-1330021.433 ± 0.002	0.361
	y	-5328401.861	-5328403.288 ± 0.003	1.427
	z	3236480.784	3236481.600 ± 0.010	0.816
Station 56611	x	-5466000.273	-5466000.459 ± 0.011	0.186
	y	-2404424.634	-2404424.716 ± 0.013	0.082
	z	2242206.911	2242206.724 ± 0.028	-0.187
Station 70610	x	-1463999.007	-1463998.838 ± 0.005	-0.169
	y	-5166633.028	-5166632.674 ± 0.004	-0.354
	z	3435012.346	3435013.095 ± 0.012	0.749

3, mais ni les valeurs, ni leurs incertitudes ne sont publiées. Dans DE421 sont aussi ajustées les dérives des stations ayant observé plusieurs années (il n’est pas explicitement mentionné lesquelles). Dans la solution “additionnelle” EM-3 sont aussi ajustées des dérives dans les latitudes des stations par rapport à celle de MLRS2.

On remarque que les valeurs ajustées par INPOP08 ne diffèrent que de quelques centimètres de celles du paragraphe 9.1.2. Seule la station MLRS2 présente un écart supérieur à 1 mètre. Mais si on compare les valeurs INPOP08 à celles de (Chapront et al., 2002, Tab. 5), on remarque que les différences ne sont plus que de 7 cm au maximum. On pourrait donc se poser la question si la station dont le code DOMES est 40442M006 sur le site de l’IGN itrf.ensg.ign.fr correspond effectivement à la station MLRS2 qui effectue des tirs sur la Lune. Mais sur le site de l’International Laser Ranging System ilrs.gsfc.nasa.gov, aucune autre n’est mentionnée et on peut vérifier qu’elle a bien la capacité de tirer sur la Lune.

Il est aussi possible que ses coordonnées soient déterminées à partir de ses observations Satellite Laser Ranging (SLR), et que lorsque des tirs sont effectués sur la Lune, on change le dispositif instrumental et que le point de référence en soit modifié.

13.3.1.4 Nombres de Love h_2 et k_2 de la Lune

Les nombres de Love h_2 et l_2 de la Lune sont fixés dans INPOP08 à leurs valeurs reprises de DE421 (k_2 est ajusté) :

- $h_2 = 0.03786$
- $l_2 = 0.0105$

Dans (Williams et al., 2008), il est indiqué que h_2 est déduit de $k_2 = 0,02163$ (lui-même est ajusté) selon la relation $h_2 = 1,75 \times k_2$. La justification de cette contrainte n’est pas précisée. On retrouve cependant dans (Zhang, 1992) des rapports entre h_2 et k_2 qui varient entre 1,73

TABLE 13.15 – Valeurs des biais ajustés dans INPOP08, exprimées en nanosecondes.

n°	Valeur (ns)
1	-0.595 ± 0.012
39	2.224 ± 0.079

et 1,75 selon les modèles. Pour DE418 de Folkner et al. (2007), le rapport est différent, avec $h_2 = 1,90 \times k_2$ (on ignore s'il est imposé où si les deux nombres sont ajustés sans contrainte).

Enfin, Williams (2008) indique que, dans une solution non précisée, les deux nombres de Love h_2 et k_2 de la Lune sont ajustés aux données LLR et en donne les valeurs et incertitudes :

- $k_2 = 0.0199 \pm 0.0025$
- $h_2 = 0.042 \pm 0.008$

Ici, le rapport entre h_2 et k_2 est de 2,11.

Remarque : l'incertitude sur k_2 est intéressante ; elle est supérieure à 0,00017, erreur formelle obtenue avec INPOP08 (1σ). Compte tenu des faibles valeurs publiées par Aleshkina (2002), avec en particulier une erreur formelle de $\pm 8 \times 10^{-5}$ sur k_2 , c'est plutôt rassurant.

Dans (Melchior, 1979, p. 60), on trouve la relation pour un corps en équilibre hydrostatique :

$$\frac{h_2}{k_2} = R^2 \frac{\int_0^R \rho r^2 dr}{\int_0^R \rho r^4 dr} \quad (13.13)$$

Si on suppose de plus que le corps est à symétrie sphérique, alors :

$$\frac{h_2}{k_2} = \frac{2}{3} \times \frac{MR^2}{C} \quad (13.14)$$

Avec $C/MR^2 \simeq 0.393$, le rapport devrait être $h_2/k_2 \simeq 1,70$. Il n'est que de 1,45 pour INPOP08, ce qui montre que la valeur imposée pour h_2 , est trop faible en comparaison du k_2 ajusté. On peut cependant noter que si on néglige de tenir compte des déplacements des réflecteurs dus aux marées solides (soit $h_2 = l_2 = 0$), on obtiendrait sensiblement les mêmes résidus, comme le montre le tableau 9.9. Pour des soucis de cohérence, il sera toutefois souhaitable dans les prochaines versions d'INPOP d'imposer un rapport h_2/k_2 dépendant du C/MR^2 .

13.3.1.5 Biais

Au paragraphe 13.2.4, on commençait avec la solution S074b par ajuster 3 biais :

- n° 1 : sur les données du CERGA entre le 1^{er} décembre 1996 et le 28 juin 1998
- n° 17 : sur celles du CERGA entre le 1^{er} janvier 1984 et le 1^{er} janvier 1987
- n° 39 : sur celles de Mc Donald entre le 21 octobre 1972 et le 3 août 1975

On tenait compte de ces biais pour corriger des décalages observés dans les résidus, illustrés par les graphes de la figure 9.18 pour les n°s 1 et 39, et par l'obtention d'une moyenne non nulle de 8 cm pour le n° 17 (voir le tableau 13.17). Puis, alors que les n°s 1 et 39 sont conservés dans les ajustements tout au long du processus de sélection des paramètres (leurs valeurs sont données dans le tableau 13.15), le n° 17 présentait avec la solution S060 (l'itération précédant INPOP08) un rapport Q légèrement supérieur à 5%. Il avait donc été éliminé de la liste des paramètres ajustés.

Aleshkina (2002) tient elle aussi compte du biais n° 1, dont la valeur de 0.7 ns est reprise de (Chapront-Touzé et al., 2000). Pour INPOP08, elle est ajustée à -0.6 ns, le signe n'étant qu'une

TABLE 13.16 – Valeurs, erreurs formelles σ et facteurs Q (rapport entre l’erreur formelle et la valeur) des biais ajustés dans la réduction DE423b. Les colonnes t^i indiquent le degré de la correction : constante si la valeur est 0, linéaire avec le temps si la valeur est 1 (ne concerne que le biais n° 5). Les valeurs et erreurs formelles sont données en picosecondes, le facteur Q en %.

n°	t^i	val.	σ	Q	n°	t^i	val.	σ	Q
01	0	0.0	0.0	0.0	21	0	282.8	39.9	14.1
02	0	119.7	114.0	95.2	22	0	-484.7	52.8	10.9
03	0	3671.0	249.0	6.8	23	0	-134.5	113.0	84.0
04	0	-2810.0	419.0	14.9	24	0	-610.0	50.9	8.3
05	0	-2334.0	242.0	10.4	25	0	-89.1	26.4	29.6
05	1	4.3	2.9	66.9	26	0	-596.4	16.9	2.8
06	0	-2549.0	531.0	20.8	27	0	-665.8	46.3	7.0
07	0	-186.0	213.0	114.5	28	0	-428.5	21.6	5.0
08	0	-21.3	48.2	226.7	29	0	-391.0	27.1	6.9
09	0	-384.1	50.3	13.1	30	0	-440.1	79.7	18.1
10	0	1096.0	139.0	12.7	31	0	192.5	11.4	5.9
11	0	1124.0	185.0	16.5	32	0	-471.3	145.0	30.8
12	0	7.1	196.0	2742.0	33	0	-196.0	148.0	75.5
13	0	0.0	0.0	0.0	34	0	79.2	7.6	9.6
14	0	789.5	210.0	26.6	35	0	101.8	33.7	33.1
15	0	1399.0	509.0	36.4	36	0	186.0	39.6	21.3
16	0	58.5	123.0	210.4	37	0	-311.8	67.3	21.6
17	0	571.7	30.7	5.4	38	0	649.8	90.3	13.9
18	0	-397.0	91.3	23.0	39	0	0.0	0.0	0.0
19	0	-411.3	83.7	20.4	40	0	0.0	0.0	0.0
20	0	1765.0	238.0	13.5					

convention : soit on applique le biais sur les mesures, et il doit être positif, soit, comme dans INPOP, on corrige les temps LLR calculés.

Quant à DE421, rien n’est précisé dans les différents Interoffice Memorandum du JPL, mais d’après Williams (2010, communications privées), les termes constants des biais nos 2 à 38 du tableau 9.13, ainsi que le terme linéaire du n° 5 sont utilisés pour la solution DE421. Certains sont introduits en raison de décalages observés dans les résidus, d’autres de modifications dans l’instrument de mesure qui pourraient induire le même genre de décalage. Tous sont ajustés aux observations.

Ainsi, 10 biais sont ajustés par J. Williams pour le site d’Haleakala. Il précise (2010, communication privée) que quatre différentes configurations instrumentales y ont été utilisées, selon les lentilles installées ou la présence d’un compensateur. Il y a donc bien des raisons objectives à tenir compte de ces 4 biais. Mais pourquoi en introduire 10 ? On verra au paragraphe 13.4.2.1 que leur prise en compte permet d’atténuer des signaux résiduels dans les observations du CERGA, et plus nettement encore dans ceux d’Haleakala. Or un signal dans les résidus est caractéristique d’un problème dans la modélisation. Par exemple, on néglige (pour l’instant) dans INPOP la présence d’un noyau interne à la Lune, qui induirait principalement des modifications dans ses librations ; il s’agit là d’une lacune possible dans le modèle dynamique. On peut aussi envisager qu’un tel signal, selon une idée de S. Bouquillon (2009, communication privée), serait dû à l’atmosphère : même si son effet est pris en compte (voir le paragraphe 9.5), on néglige le fait que par effet de marée, son épaisseur varie en fonction de la position de la Lune. On aurait alors ici une lacune dans le modèle de réduction des données. Introduire des biais pour réduire un signal pourrait donc masquer un problème plus important de modélisation.

Un autre inconvénient à l’introduction de tant de biais est que leurs valeurs sont a priori inconnues et doivent donc être ajustées en même temps que celles de tous les autres paramètres.

Le tableau 13.16 en présente les valeurs ajustées dans le cadre de la réduction DE423b effectuée au paragraphe 13.4.2.1, les erreurs formelles, ainsi que les facteurs Q associés. On remarque que les erreurs formelles sont souvent très importantes, et représentent toujours plus de 5% de la valeur ajustée (sauf pour le n° 26, qui s'applique sur les données du CERGA entre le 8 février et le 7 mai 1997).

Cette situation se dégrade encore pour la construction d'INPOP, lorsqu'à l'ajustement des paramètres du modèle de réduction s'ajoutent ceux du modèle dynamique. Ainsi des essais ont été effectués pour ajuster avec INPOP les mêmes 37 biais pris en compte par J. Williams :

- au paragraphe 13.2.1, la sélection/pondération des observations avait été effectuée avec 133 paramètres au lieu de 99.
- au paragraphe 13.2.2, la suppression de l'ajustement des dérives des stations conduisait à ajuster 115 paramètres au lieu de 81.
- au paragraphe 13.2.3, ne plus ajuster les conditions initiales du barycentre Terre-Lune ni le rapport des masses entre la Terre et la Lune réduisait le nombre de paramètres ajustés à 108.
- enfin, la sélection des paramètres ajustés selon de rapport Q du paragraphe 13.2.4 incluait au départ tous les biais de Williams, qui pouvait ensuite être éliminés des ajustements si leur rapport Q était trop important.

Au final, l'utilisation du même critère de sélection (facteur Q inférieur à 5%) en éliminait la plupart et aboutissait à une solution à 60 paramètres ajustés, dont seulement 3 biais conservés (n°s 26, 31 et 34, tous concernant le CERGA) sur 37 au départ. Les biais exceptés, les 57 autres paramètres ajustés correspondaient à ceux qui le sont aussi avec INPOP08.

Les résidus de cette solution étaient légèrement meilleurs que ceux d'INPOP08 pour le CERGA, mais dégradait en contrepartie ceux des autres stations. L'amélioration du CERGA était aussi partiellement due au rejet de 30 données supplémentaires lors de leur sélection.

Cette méthode de construction n'a donc pas été conservée, car elle était plus coûteuse en temps de calcul et donnait des résultats similaires à INPOP08. D'autre part, introduire au départ autant de biais, dont les justifications physiques sont discutables, pour ensuite n'en conserver que 3 est difficilement justifiable.

13.3.2 Résidus INPOP08

Les graphiques de la figure 13.18 montrent les résidus LLR de la solution INPOP08 en fonction du temps et des stations, le tableau 13.17 en donne les statistiques.

13.4 Critiques envers la solution

13.4.1 Ecart-types des résidus Apollo

Dans les fichiers des observations LLR, en même temps que les données nécessaires à leur réduction, figurent les estimations des incertitudes pour chacun des points normaux. Elles dépendent (S. Bouquillon, communication privée) :

- de la précision des détecteurs
- de la largeur d'impulsion
- de la précision des dateurs
- de l'atmosphère (seeing)
- de l'angle d'incidence des photons sur le réflecteur
- du nombre d'échos reçus

La figure 13.19 en montre les évolutions au cours du temps pour les stations du CERGA, MLRS1, MLRS2 et Apollo. On remarque que celles du CERGA présentent une allure curieuse :

- sur la période 1987 à 1993, les incertitudes sont de l'ordre de 5.5 cm en moyenne

TABLE 13.17 – Résidus LLR d’INPOP08. Les moyennes et les écart-types (σ) selon les stations et les époques sont exprimés en cm. N est le nombre d’observations disponibles, N_e celui des observations éliminées.

Station	Époque	Moy.	σ	N	N_e
CERGA	1987-1995	-0.16	6.32	3460	45
CERGA	1995-2010	-0.03	3.97	4932	71
CERGA	1984-1986	8.10	15.87	1187	29
Mc Donald	1969-1986	0.16	31.63	3604	115
MLRS1	1982-1985	-7.80	73.23	418	13
MLRS1	1985-1988	0.22	7.25	174	11
MLRS2	1988-1996	-0.86	4.26	1192	44
MLRS2	1996-2008	0.56	4.80	2243	475
Haleakala	1984-1990	-0.44	8.10	770	36
Apollo	2006-2009	0.08	4.82	642	2

- puis, elles décroissent pour atteindre environ 1.5 cm sur la période 1995-1998
- elles connaissent un minimum en 1999 à 0.5 cm
- enfin, elles augmentent à près de 4.5 cm

D’autre part, on observe que les incertitudes des observations éliminées (car considérées comme aberrantes au paragraphe 13.2.1) ne sont pas supérieures à celles des données conservées (à part pour MLRS2); pour toutes les stations, des ronds gris (observations éliminées) se retrouvent noyés parmi des points noirs (observations conservées). C’est pourquoi ces estimations des incertitudes de mesures n’ont pas été utilisées aux paragraphes 13.2.1 ou 13.2.4, ni dans la sélection des données, ni dans le choix des pondérations.

Par contre, l’augmentation des incertitudes de mesures pour MLRS2 vers 2000 confirme ce qu’on avait observé avec la dégradation des résidus correspondants (voir le graphe inférieur de la figure 13.13). Il en est de même pour MLRS1, avec une allure des incertitudes cohérente avec celle des résidus (voir la figure 13.18).

Si les ordres de grandeur entre les incertitudes et les résidus correspondent pour la majorité des stations (CERGA excepté), ce n’est pas le cas pour Apollo : environ 0.5 cm contre près de 5 cm.

Les données du CERGA étant à la fois les plus nombreuses et parmi les plus précises, ce sont elles qui contraignent le plus les paramètres. Dans le cas où elles seraient biaisées, les valeurs des paramètres s’ajusteraient pour en minimiser les résidus, quitte à dégrader celles des autres stations, y compris d’Apollo.

Pour infirmer cette hypothèse, on construit 5 solutions (S1 à S5) en ajustant les mêmes 59 paramètres que pour INPOP08, aux mêmes observations LLR, mais en changeant la pondération (voir le paragraphe 10.1.4 pour la signification de ρ) des données Apollo par rapport aux autres stations :

- S1 : pondérées avec $\rho=1/(3 \text{ cm})$
- S2 : pondérées avec $\rho=1/(1 \text{ cm})$, soit environ $\times 5$ par rapport à INPOP08
- S3 : pondérées avec $\rho=1/(0.5 \text{ cm})$, soit environ $\times 10$ par rapport à INPOP08
- S4 : pondérées avec $\rho=1/(0.1 \text{ cm})$, soit environ $\times 50$ par rapport à INPOP08
- S5 : pondérées avec $\rho=1/(0.01 \text{ cm})$, soit environ $\times 500$ par rapport à INPOP08

On compare ensuite les résidus de chacune des ces solutions avec ceux d’INPOP08. Les résultats sont donnés dans le tableau 13.18.

Sans dégrader ceux des autres stations, la solution S1 présente des résidus Apollo améliorés, même s’ils restent supérieurs à l’inverse de leur pondération (4.3 cm au lieu de 3.0 cm). Quant

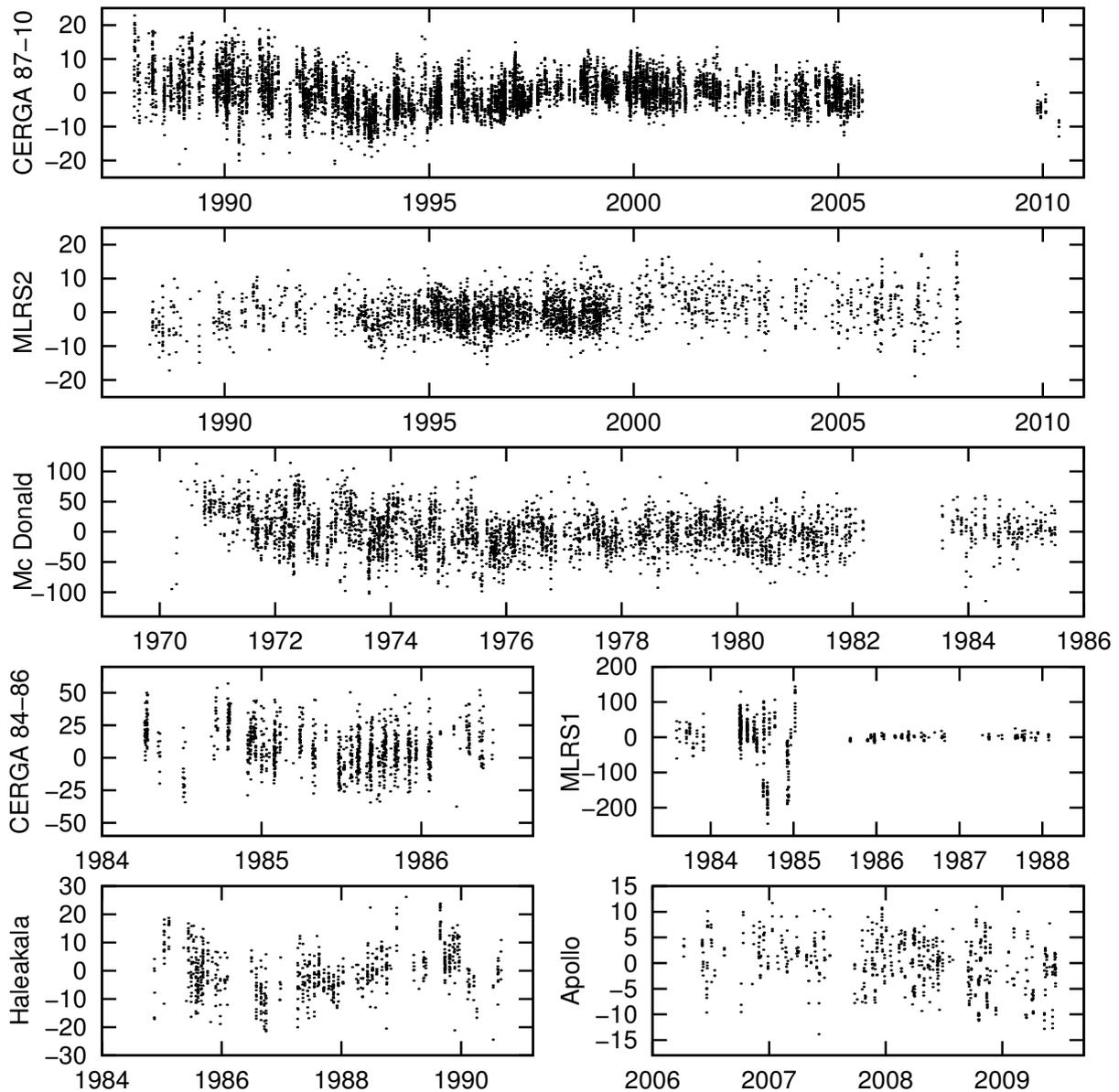


FIGURE 13.18 – Résidus INPOP08 selon les stations, exprimés en cm.

TABLE 13.18 – Résidus LLR (en cm) de solutions ajustées en surpondérant les données Apollo par rapport aux autres stations.

Station	Époque	INPOP08	S1	S2	S3	S4	S5	DE421
CERGA	1987-1995	6.32	6.41	7.01	7.71	10.70	30.45	7.95
CERGA	1995-2010	3.97	3.98	4.12	4.38	6.59	28.41	6.95
CERGA	1984-1986	15.87	15.99	16.63	17.29	19.24	27.62	14.95
Mc Donald	1969-1986	31.63	31.88	32.57	32.67	33.58	86.49	30.04
MLRS1	1982-1985	73.23	73.65	75.01	75.94	76.57	77.43	72.18
MLRS1	1985-1988	7.25	7.62	9.05	10.01	11.57	23.68	7.51
MLRS2	1988-1996	4.26	4.29	4.73	5.36	8.25	30.01	25.90
MLRS2	1996-2008	4.80	4.77	4.89	5.21	7.80	30.31	27.38
Haleakala	1984-1990	8.10	8.22	8.96	9.54	11.19	22.91	9.63
Apollo	2006-2009	4.82	4.32	3.24	2.90	2.64	2.56	4.11

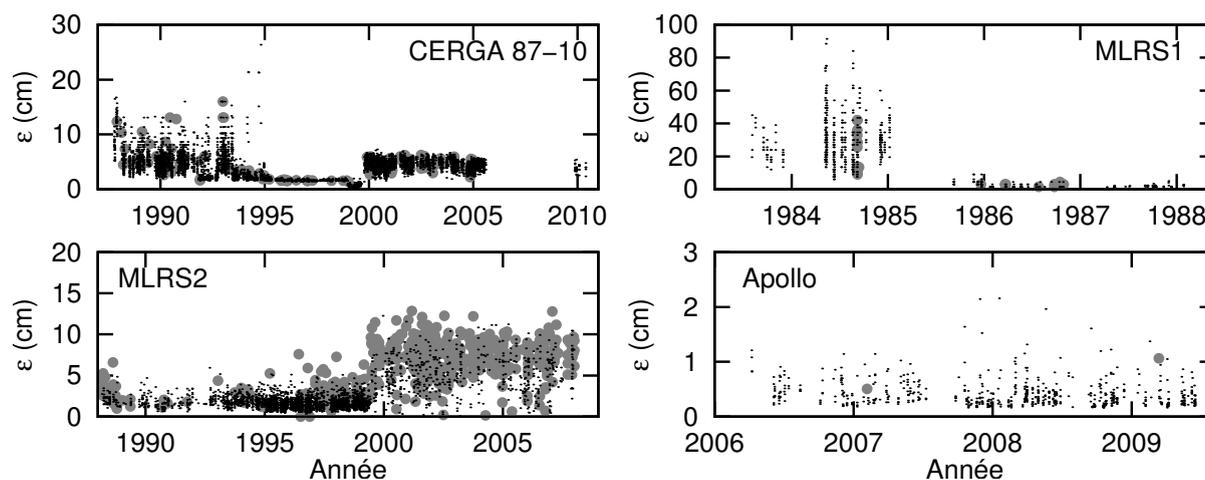


FIGURE 13.19 – Incertitudes des mesures estimées par les observateurs. Les points noirs correspondent aux observations conservées dans l’ajustement d’INPOP08, les ronds gris à celles qui ont été rejetées (voir le paragraphe 13.2.1).

aux autres solutions, plus les pondérations sur Apollo augmentent, plus on dégrade les résidus des autres stations. Et dans tous les cas, y compris avec les pondérations les plus fortes à $1/(0.01 \text{ cm})$, les résidus Apollo ne descendent qu’à 2.5 cm.

Avec S5, il est possible que les données des autres stations, même faiblement pondérées, continuent à “perturber” celles d’Apollo. On fixe donc la solution planétaire à DE421, on ne conserve que les données Apollo, et on n’ajuste que les paramètres qui n’interviennent que dans la réduction des observations : les coordonnées des réflecteurs et celles de la station. Pour minimiser les résidus, on ajuste aussi ses dérives, au détriment de la cohérence avec d’éventuelles stations proches (voir le paragraphe 13.2.2). Les résidus ainsi obtenus sont eux aussi donnés dans le tableau 13.18 et on remarque qu’ils restent supérieurs à 4 cm. Ceux des autres stations ne sont pas significatifs, car leurs coordonnées n’ont pas pu être ajustées (aucune observation autre que d’Apollo n’a été prise en compte).

Au cours de ce travail, lorsque les données Apollo ne couvraient qu’une période de deux ans et qu’on ajustait alors les dérives de la station, on arrivait à des résidus inférieurs à 3 cm. La disponibilité de nouvelles observations en septembre 2008, puis en juillet 2009 a entraîné leur dégradation. Ces dernières données ne sont pourtant pas de plus mauvaise qualité que les anciennes ; mais la compensation d’erreurs de modèle ou de mesure par l’ajustement de paramètres était moins efficace avec des données couvrant une plus longue période. Ce phénomène a encore été aggravé par le choix de ne plus ajuster les dérives de la station (voir 13.2.2).

On voit donc que les incertitudes de mesure estimées pour les observations Apollo sont incompatibles avec les “meilleurs” résidus obtenus ici. Williams (2008) confirme que la précision sub-centimétrique n’est pas atteinte lors de leur réduction, si les solutions sont ajustées en tenant compte des 40 années d’observations LLR. Même si on ne peut pas exclure à ce stade un problème dans la réduction des données (modèle trop approximatif, des procédures erronées, ...), il est possible que les incertitudes de mesure aient été fortement sous-estimées.

13.4.2 Signaux du CERGA et d’Haleakala

Les graphes de la figure 13.18 montrent un important signal résiduel dans les données du CERGA et d’Haleakala.

Ces signaux ont toujours été présents, quelles que soient les nombreuses solutions intermé-

diaires construites. Ils sont problématiques car ils mettent en évidence un problème dans la modélisation. D'autre part, ils montrent que les résidus ne suivent pas la loi normale centrée, les erreurs ne sont pas gaussiennes. Rigoureusement, les développements du paragraphe 10.1.2, et en particulier le calcul des erreurs formelles ne devraient donc pas être appliqués ici. Les tests de stabilité des paramètres du paragraphe 10.4 ont cependant permis de vérifier que les valeurs des paramètres restaient cependant très proches de celles ajustées par moindres carrés lorsque les jeux de données sont modifiés.

13.4.2.1 Réduction des données LLR avec des solutions externes

Le but ici est de réduire les observations LLR avec une solution extérieure, indépendante d'INPOP, pour s'assurer que la partie dynamique ne présente pas d'anomalie. On avait commencé par construire INPOP05 en utilisant DE405 comme référence pour limiter les erreurs, à la fois dans le modèle et dans son implémentation. Puis, à chaque modification du modèle dynamique (intégration de l'orientation de la Terre, introduction de l'anneau d'astéroïdes, ...) dans les versions INPOP06 et INPOP08, on s'était assuré que les effets n'induisaient pas de changements importants sur la distance Terre-Lune. Mais il est toujours possible de passer à côté d'un problème. D'où l'idée de réduire les observations avec une solution qui, on suppose, ne contient pas une erreur éventuellement présente dans INPOP08.

Sur le site `ftp://quasar.ipa.nw.ru` sont disponibles les éphémérides EPM2004 (Pitjeva, 2005a) et EPM2008 (Pitjeva, 2009). Malheureusement, seules les trajectoires des planètes, de la Lune, Pluton et du Soleil sont accessibles. Il manque les librations de la Lune, sans lesquelles il est impossible de déterminer les positions des réflecteurs dans l'ICRF, et donc de réduire les observations LLR.

On se limite donc aux solutions du JPL DE403, DE405, DE418, DE421 et DE423. Les réductions avec DE418 et DE421 donnent les mêmes résultats que celles avec DE423 (la plus récente, mais pour laquelle aucune description spécifique du traitement des données LLR n'est publiée) et ne sont donc pas exposées ici. Les résidus de la solution INPOP06 ont également été calculés ; très proches de ceux de DE405, ils ne sont pas représentés ici.

L'utilisation d'une solution extérieure empêche de modifier les paramètres qui interviennent dans la dynamique. Par contre, tous ceux qui n'interviennent que dans la partie réduction peuvent (et doivent) être réajustés. On effectuera ainsi trois types de réduction, selon les paramètres ajustés :

- type a : tous les paramètres intervenant dans la partie réduction des données sont réajustés, c'est-à-dire les coordonnées sélénocentriques des réflecteurs, les coordonnées et dérivées des stations (sauf la station d'émission d'Haleakala) dans l'ITRF, les nombres de Love h_2 et l_2 de la Lune. À ces paramètres s'ajoutent tous les biais utilisés par Williams, dont la liste est donnée au paragraphe 9.6. Ce type de réduction, qui laisse le plus de degrés de liberté, permet d'obtenir les meilleurs résidus
- type b : similaire au type a, excepté que comme dans INPOP08, les dérivées des stations ne sont plus ajustées et seront fixées à leurs valeurs résumées dans le tableau 9.2.
- type c : identique au type b, mais au lieu d'ajuster tous les biais de J. Williams, on n'ajuste plus que les 2 (n^{os} 1 et 39) ajustés dans INPOP08. Ainsi, la réduction de type c ajuste les mêmes paramètres qu'INPOP08, exceptés ceux qui interviennent dans le modèle dynamique.

Seules les données antérieures à la date de parution de la solution sont utilisées dans les ajustements, avec les mêmes pondérations que celles déterminées pour INPOP08. On évite ainsi de pénaliser une solution sur une période où elle n'a pas été contrainte.

Les graphiques de la figure 13.20 montrent les résidus du CERGA pour les différentes solutions du JPL (réductions de type a) et ceux d'INPOP08. Les points noirs représentent les données qui ont été prises en compte dans l'ajustement (pondérations égales à celles d'INPOP). Ceux en

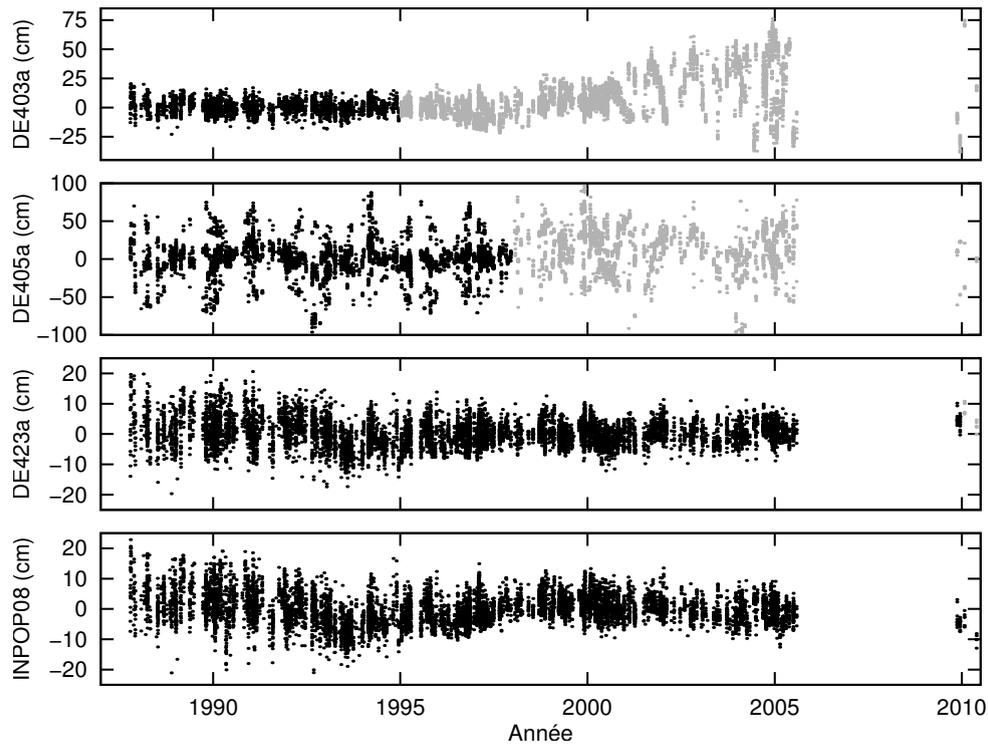


FIGURE 13.20 – Résidus LLR du CERGA obtenus en utilisant les solutions du JPL DE403, DE405 et DE423. Les points noirs sont antérieurs à la parution de la solution et sont pris en compte dans les ajustements. Ceux en gris ont des pondérations nulles.

gris correspondent aux données postérieures à la date de parution de la solution (pondérations nulles). Ces graphiques ne sont pas les résidus qu’obtient le JPL avec son propre modèle de réduction. Ces derniers sont rarement publiés et de manière assez succincte. Le tableau 13.19 donne les écart-types des résidus pour chaque solution et chaque type de réduction.

On remarque que les résidus de DE405 ne sont pas aussi bons que ceux de DE403. Il semble que cette solution n’ait en fait pas été correctement ajustée au LLR. Lors de la construction d’INPOP06, solution non directement ajustée au LLR, on avait besoin de contraintes sur la trajectoire de la Lune ; on s’était alors servi de la distance Terre-Lune de DE405 (voir le paragraphe 12.2.2). On s’aperçoit ici que c’était une erreur. L’idée de départ n’était pourtant pas mauvaise : les résidus calculés avec INPOP06 présentent les mêmes statistiques que ceux de DE405 ; les temps LLR calculés des deux solutions peuvent différer de 2 centimètres, mais leurs écart-types sont les mêmes à quelques millimètres près.

On remarque ensuite que la solution DE403 se comporte bien sur les données antérieures à sa parution (points noirs), mais qu’elle se dégrade ensuite progressivement (points gris). Le même phénomène est observé pour les données MLRS2 (non exposées ici) et est normal. On illustre ainsi la nécessité de disposer régulièrement d’observations pour éviter qu’une solution ne se dégrade avec le temps et ne soit finalement plus représentative de la réalité. À noter que les résidus Apollo, très mauvais, ne sont pas significatifs : leur dégradation est plus liée au non-ajustement des coordonnées de la station, qui n’a commencé ses observations qu’en 2006. On remarque également que les points noirs ne présentent pas un signal aussi marqué qu’avec INPOP08. Mais cela ne démontre pas obligatoirement la présence d’un problème dans INPOP08 qui serait absent de DE403 ; comme cette dernière est contrainte sur une durée plus courte (25 années entre 1970 et 1995), il est plus facile de corriger une éventuelle erreur de modèle par un ajustement de paramètres.

TABLE 13.19 – Comparaison des résidus obtenus en appliquant le modèle de réduction utilisé pour INPOP aux solutions du JPL DE403, DE405 et DE423. Pour chaque solution et chaque type de réduction (a,b ou c), la colonne de gauche présente les écart-types des résidus sur les données disponibles avant la parution de la solution, et utilisées dans l’ajustement des paramètres spécifiques au modèle de réduction. La colonne de droite contient ceux des observations non disponibles à la date de parution, et négligées dans les ajustements. Les résidus sont exprimés en centimètres.

		DE403a		DE403b		DE403c	
		<1995.0	1995.0<	<1995.0	1995.0<	<1995.0	1995.0<
CERGA	1987-1995	5.49	4.37	6.06	4.88	6.38	4.05
CERGA	1995-2010	-	17.81	-	16.89	-	16.88
CERGA	1984-1986	14.92	-	15.07	-	14.77	-
Mc Donald	1969-1986	28.66	-	32.05	-	30.13	-
MLRS1	1982-1985	72.65	-	72.25	-	71.32	-
MLRS1	1985-1988	6.91	-	7.84	-	7.28	-
MLRS2	1988-1996	4.57	4.87	4.73	6.03	4.82	5.69
MLRS2	1996-2008	-	14.42	-	16.51	-	16.60
Haleakala	1984-1990	6.57	-	6.55	-	7.71	-
Apollo	2006-2009	-	54.72	-	56.42	-	56.91
		DE405a		DE405b		DE405c	
		<1998.0	1998.0<	<1998.0	1998.0<	<1998.0	1998.0<
CERGA	1987-1995	23.52	-	23.66	-	25.09	-
CERGA	1995-2010	19.85	27.21	19.94	25.48	23.22	28.67
CERGA	1984-1986	28.73	-	30.42	-	28.59	-
Mc Donald	1969-1986	46.66	-	49.59	-	48.26	-
MLRS1	1982-1985	75.52	-	76.06	-	70.41	-
MLRS1	1985-1988	23.09	-	23.32	-	21.30	-
MLRS2	1988-1996	20.71	-	20.67	-	22.67	-
MLRS2	1996-2008	17.46	28.08	17.57	26.58	20.50	29.75
Haleakala	1984-1990	20.04	-	19.99	-	22.39	-
Apollo	2006-2009	-	39.42	-	40.66	-	45.22
		DE423a		DE423b		DE423c	
		<2010.0	2010.0<	<2010.0	2010.0<	<2010.0	2010.0<
CERGA	1987-1995	5.60	-	5.86	-	5.88	-
CERGA	1995-2010	3.50	3.52	3.52	3.55	3.87	3.81
CERGA	1984-1986	14.68	-	14.75	-	14.74	-
Mc Donald	1969-1986	28.31	-	31.80	-	29.78	-
MLRS1	1982-1985	70.18	-	70.51	-	70.30	-
MLRS1	1985-1988	5.90	-	6.22	-	6.11	-
MLRS2	1988-1996	4.70	-	4.63	-	4.65	-
MLRS2	1996-2008	4.45	-	4.51	-	4.57	-
Haleakala	1984-1990	6.37	-	6.70	-	8.12	-
Apollo	2006-2009	4.36	-	4.53	-	4.73	-
		INPOP08					
		<2011					
CERGA	1987-1995	-	-	-	-	6.32	-
CERGA	1995-2010	-	-	-	-	3.97	-
CERGA	1984-1986	-	-	-	-	15.87	-
Mc Donald	1969-1986	-	-	-	-	31.63	-
MLRS1	1982-1985	-	-	-	-	73.23	-
MLRS1	1985-1988	-	-	-	-	7.25	-
MLRS2	1988-1996	-	-	-	-	4.26	-
MLRS2	1996-2008	-	-	-	-	4.80	-
Haleakala	1984-1990	-	-	-	-	8.10	-
Apollo	2006-2009	-	-	-	-	4.82	-

Cette hypothèse est confirmée de deux manières. D’une part, en construisant une solution INPOP ajustée uniquement à des données antérieures à 1995, on arrive à éliminer le signal d’INPOP08 sur les données du CERGA.

D’autre part, il semble logique que les solutions les plus récentes s’améliorent par rapport aux plus anciennes, même si DE403 et DE405 en sont un contre-exemple. Le signal obtenu avec la réduction DE423a, quoique légèrement moins marqué, est pourtant similaire à INPOP08.

Cette atténuation est due aux nombreux biais pris en compte par J. Williams : on s'en rend compte en comparant les réductions DE423b et DE423c des graphiques de la figure 13.21. Cette atténuation est plus facilement mise en évidence avec les données Haleakala, pour lesquelles la réduction DE423c présente des signaux comparables à ceux obtenus avec INPOP08.

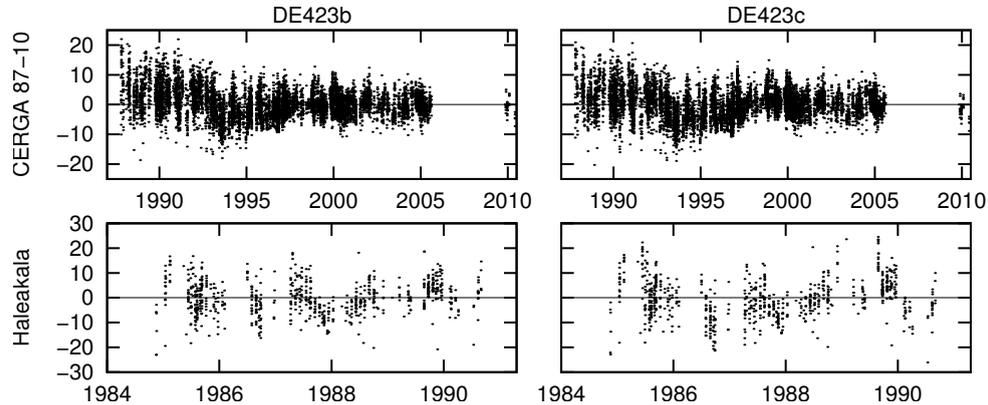


FIGURE 13.21 – Résidus LLR (CERGA et Haleakala) des réductions DE423b (avec ajustement de tous les biais de J. Williams) et DE423c (avec ajustement des seuls biais d’INPOP08).

On voit donc que les signaux sur le CERGA et Haleakala ne sont pas spécifiques à INPOP08. On les retrouve en utilisant DE423 à la place d’INPOP08 dans le modèle de réduction des données LLR (les mêmes constatations ont été faites pour DE418 et DE421). Les modèles dynamiques sont pourtant différents, entre autres parce que celui d’INPOP08 ne tient pas compte de la présence d’un noyau interne à la Lune. On en déduit que les erreurs éventuelles dans la partie dynamique d’INPOP08 ne sont pas suffisamment importantes pour générer ce signal. En corollaire, on en déduit aussi que l’introduction de ce noyau dans INPOP ne règlera certainement pas ce problème. Elle permettra peut-être en revanche d’améliorer les résidus, car, à part pour la première période de MLRS2, ceux de DE423c sont inférieurs à ceux d’INPOP08 (voir le tableau 13.19).

13.4.2.2 Résidus publiés d’autres solutions

Dans le paragraphe précédent, l’utilisation d’une solution indépendante d’INPOP permettait d’éliminer une anomalie éventuelle dans la partie dynamique. Mais à ce stade, rien n’exclut un problème dans le modèle de réduction des données ou son implémentation.

L’idéal serait de comparer, pour une même solution planétaire, les résidus obtenus avec deux programmes de réduction différents. Malheureusement, les publications de statistiques ou tracés de résidus sont rares :

- DE403 : (Standish et al., 1995, Fig. 6)
- S2000 : (Chapront et al., 2001, Fig. 1, Tab. 1)
- EM-3 : (Aleshkina, 2002, Fig. 2, Tab. 3)
- EPM ? : (Krasinsky, 2002, Fig. 1,2,3,4)
- DE421 : (Folkner et al., 2008, Fig. B-1)

(Williams, 2008, Fig. 1) présente l’évolution de l’écart-type des résidus, débutant à 35 cm en 1970 pour atteindre environ 2 cm en 2007. Ce niveau n’a jamais été atteint avec INPOP08. Le même genre de graphique est présenté dans (Müller et al., 2008, Fig. 2b), avec cependant une remontée des résidus à partir de 1997 que l’on n’observe pas non plus avec INPOP. Cela aurait pu s’expliquer avec la dégradation des données MLRS2 observée à partir de 1996 (voir la figure 13.13), mais d’après Müller (2010, communication privée), elles sont négligées à la fois

pour INPOP08 et dans (Müller et al., 2008).

13.4.2.2.1 DE403

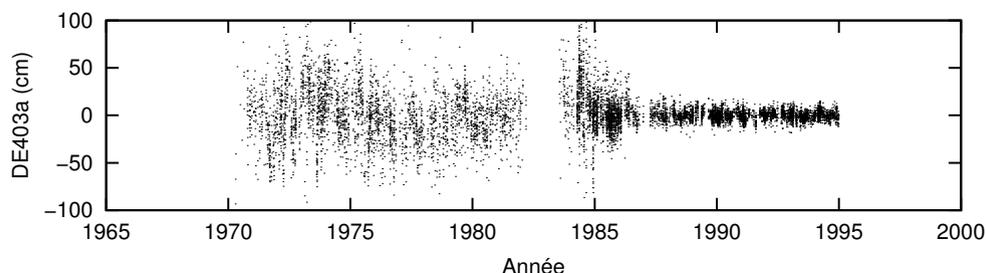


FIGURE 13.22 – Résidus LLR calculés avec la réduction DE403a.

Le graphique de la figure 13.22 présente les résidus de la réduction DE403a du paragraphe 13.4.2.1, d’une manière similaire à celle de (Standish et al., 1995, Fig. 6) : toutes les stations et périodes sont tracées ensemble. On y remarque un signal important entre 1970 et 1983 sur les données de Mc Donald. On voit donc que les modèles de réduction diffèrent, entre celui utilisé alors au JPL et celui implémenté actuellement dans INPOP. Cette différence n’est pas forcément incohérente, puisqu’en 1995, les procédures de changement de repère entre l’ITRF et l’ICRF n’étaient pas les mêmes qu’actuellement. Il est même mentionné dans (Standish et al., 1995) que des ajustements de paramètres liés à l’orientation de la Terre sont effectués (obliquité, précession, certains termes de nutation). Dans INPOP, c’est le modèle IAU2000 qui est implémenté, donc forcément différent de celui pour DE403. On remarque aussi que les mauvaises données de MLRS1 entre début 1984 et mi-1985 ne sont pas représentées sur (Standish et al., 1995, Fig. 6) ; compte tenu de leurs mauvais résidus, il n’est pas aberrant de les éliminer totalement des ajustements (elles restent faiblement pondérées dans INPOP). Enfin, il est difficile de comparer les résidus après 1987 sur des observations plus précises : elles sont écrasées par la représentation à la même échelle des résidus Mc Donald dont les écart-types sont presque dix fois supérieurs.

13.4.2.2.2 DE421

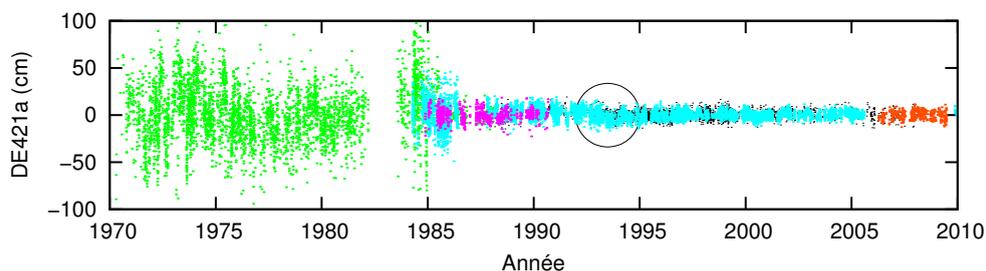


FIGURE 13.23 – Résidus LLR calculés avec la réduction DE421a. Toutes les stations sont représentées ensemble, les couleurs correspondent à (Folkner et al., 2008, Fig. B-1) : Mc Donald et MLRS1 en vert, CERGA en bleu, Apollo en orange, Haleakala en magenta et MLRS2 en noir.

De la même manière, le graphique de la figure 13.23 (résidus DE421a) est à comparer à (Folkner et al., 2008, Fig. B-1) et les mêmes remarques que pour DE403 peuvent être faites ici. On peut juste ajouter que le signal caractéristique en forme de “V” autour de mi-1993 dans les données du CERGA, entouré dans la figure 13.23 et mieux visible à la figure 13.20, semble plus marqué que dans (Folkner et al., 2008, Fig. B-1). C’est l’inverse pour celui qui concerne les données Haleakala vers 1987-1988. On observe aussi que les résidus MLRS2 de (Folkner et al.,

2008, Fig. B-1) sont significativement moins bons que ceux du CERGA, alors que ce n'est pas aussi flagrant avec la réduction DE421a.

À ce stade, on a donc mis en évidence des différences de modèle de réduction LLR, entre celui implémenté dans INPOP et ceux utilisés au JPL. Dans les Inter Office Memorandum du JPL, et en particulier (Folkner et al., 2008), il est mentionné que des ajustements de l'orientation de la Terre sont effectués : *deux angles de rotation à J2000 (...) sont ajustés pour orienter l'équateur de la Terre dans l'espace par rapport à son orbite. (...) les vitesses de précession et d'obliquité ainsi que quelques coefficients des nutations sont également ajustés.*

Or l'orientation de la Terre intervient à deux étapes de la construction d'une solution planétaire :

- dans le calcul des interactions dues à la forme de la Terre (partie dynamique)
- dans le calcul des coordonnées des stations dans l'ICRF (partie réduction des données)

Il est très probable que ces changements soient pris en compte dans la partie dynamique de DE421 ; c'était le cas pour DE403 et DE405, comme détaillé au paragraphe 11.1.7.3. On retrouve d'ailleurs dans le fichier header associé à DE421 les mêmes paramètres ROTEX, ROTY, DROTEX et DROTEY, avec des valeurs modifiées par rapport à celles de DE403 et DE405.

Les résultats du paragraphe 13.4.2.1 montrent que modifier l'orientation de la Terre dans la partie dynamique ne permettait pas d'absorber le signal du CERGA. Introduire cette possibilité dans INPOP08 serait de toute façon problématique, car depuis INPOP06 et son intégration, on ne peut plus aussi facilement imposer un forçage cinématique dans l'orientation de la Terre, comme c'était le cas avec INPOP05. On pourrait éventuellement introduire des termes constants par l'intermédiaire de des conditions initiales X_0 et Y_0 , ou une dérive linéaire dans la précession en modifiant le rapport C/MR^2 de la Terre (voir le paragraphe 12.1.2). Mais les paramètres physiques qui permettraient de modifier une dérive en obliquité ne sont pas identifiés (sinon, la dérive en Y observée dans la courbe de la figure 13.9 aurait été corrigée). Il en est de même avec les amplitudes des nutations.

Si la modification de l'orientation de la Terre permet d'absorber le signal sur le CERGA, c'est donc dans la partie réduction des données qu'elle doit être introduite. Cela n'a pour l'instant pas été testé avec INPOP, en raison de problèmes d'incohérence qui risqueraient de survenir. Comme on n'utilise aucune observation permettant de la contraindre, l'orientation de la Terre est soit ajustée sur un modèle (REN2000-P03) dans la partie dynamique, soit calculée selon les spécifications de l'IERS dans la partie réduction (voir les Convention IERS 2003 de McCarthy & Petit (2004)). Dans ce dernier cas, la matrice de passage entre l'ITRF et l'ICRF est construite à partir d'un modèle de précession-nutation (UAI2000), puis corrigée en fonction des observations précises (principalement VLBI) de l'orientation de la Terre (EOP de la série C04). Or ces corrections sont liées au modèle de précession-nutation et les appliquer à un modèle modifié semble inapproprié, car les changements engendrés risqueraient d'être en contradiction avec les observations VLBI.

D'autre part, le but d'INPOP est aussi de d'offrir une base pour l'exploitation d'autres types d'observations (astéroïdes, planètes extrasolaires, pulsars, ...). La solution doit donc être exprimée dans un repère bien défini. Or si les matrices de passage entre les différents repères sont modifiées, on n'est plus assuré d'être dans l'ICRF. Il sera cependant intéressant, lors de travaux futurs, d'étudier l'influence de ce genre de modifications dans les résidus LLR. Mais, la solution ainsi obtenue ne devrait pas être diffusée.

13.4.2.2.3 EM-3

Avant de comparer les résidus, on commence par quelques remarques au sujet de (Krasinsky, 2002) et de (Aleshkina, 2002).

Dans ce dernier article, 2 solutions sont construites ; la première est appelée "principale", la seconde "additionnelle".

La première semble construite d’une manière assez similaire à INPOP08, même si les modèles dynamiques diffèrent, notamment celui des marées solides repris de DE200 (voir l’expression 4.14). Les paramètres ajustés sont, avec leurs nombres entre parenthèses :

- les coordonnées des réflecteurs, sauf les longitude et latitude d’Apollo XV (10)
- les coordonnées des stations (15)
- les conditions initiales du vecteur Terre-Lune (6)
- les conditions initiales des librations de la Lune (6)
- les coefficients du potentiel de la Lune jusqu’au degré 4 (20)
- le nombre de Love et l’angle de déphasage de la Lune (2)
- l’angle de déphasage de la Terre (1)

Quant à la seconde solution (“additionnelle”), sa description soulève plusieurs interrogations concernant les paramètres supplémentaires ajustés :

- *time shift, secular trends in latitude for the stations with respect to MLRS2* : si la deuxième partie semble claire (mais pourquoi se limiter à la latitude ?), la première partie, quant à elle, semble ambiguë : s’agit-il de décalages tels que décrits au paragraphe 9.6 pour tenir compte de biais différents dans les mesures ? Ou bien d’un décalage dans la datation des observations pour compenser un éventuel problème de synchronisation des horloges entre les différents sites ?
- *linear trends in sidereal time, secular trends in obliquity and precession* : au moins trois paramètres (plus si on ne se limite pas à des termes linéaires en obliquité et précession) supplémentaires sont ajustés, modifiant ainsi le modèle de précession-nutation et la rotation de la Terre. Les mêmes remarques à ce sujet qu’au paragraphe précédent 13.4.2.2 sont ici aussi valables.
- *linear trends in lunar sidereal time* : cette phrase indique qu’une dérive dans l’angle de rotation propre de la Lune ψ est ajustée. La première partie de l’article montre pourtant que, comme dans INPOP, les librations de la Lune sont aussi intégrées en même temps que les trajectoires des planètes. L’inconvénient majeur d’introduire un tel forçage cinématique est qu’on prend le risque d’une perte de la synchronisation entre la vitesse de rotation de la Lune sur elle-même avec celle de sa révolution autour de la Terre. Même si cette dérive est faible, au bout d’un temps de simulation suffisamment long, la Lune finirait par nous présenter sa face cachée. D’autre part, Newhall et al. (1983) mentionne la solution DE96 (Standish, 1976) dont le forçage des librations par une solution analytique déstabilisait la trajectoire de la Lune après 300 ans.

Cette solution “additionnelle” présente donc des inconvénients. Mais la solution “principale” présente elle aussi des incohérences. Ainsi, il est mentionné que 49 paramètres y ont été ajustés, mais si on fait le total de ceux listés précédemment, on en compte 60. Même si on retire les 9 coefficients du potentiel de degré 4 de la Lune, signalés comme ajustés mais dont ni les valeurs, ni les incertitudes ne sont publiées, il reste quand même 51 paramètres.

Krasinsky (2002) est plus explicite dans sa liste de paramètres ajustés. Ils sont 65 au total, dont 5 sont liés à la modélisation d’un noyau interne à la Lune. Il ne fait pas mention de *time shift, secular trends in latitude for the stations with respect to MLRS2*.

On peut aussi noter la définition “complexe” du repère lié à la Lune. Dans INPOP, le repère sélénocentrique est celui de ses axes principaux d’inertie, avant prise en compte des effets de marées solides et de sa déformation due aux variations de son spin. C’est pourquoi le terme “rigide” I de l’expression 4.34 peut être choisi diagonal. Il s’ensuit que les coefficients du potentiel C_{21} , S_{21} et S_{22} sont nuls. Le repère sélénocentrique ainsi défini, on peut alors ajuster les 3 coordonnées de chacun des 4 réflecteurs, ainsi que les angles d’Euler et leurs dérivées à l’instant initial. Pour EM-3, deux coordonnées du réflecteur Apollo-XV sont fixées, et en contrepartie, on ajuste (au moins) les 2 coefficients du potentiel de la Lune C_{21} et S_{22} (il n’est fait aucune mention du S_{21} , mais ce dernier est ajusté par Krasinsky (2002)). Cette manière de procéder, plus

TABLE 13.20 – Résidus LLR d’INPOP08 et des solutions EM-3. Pour chaque station, on donne le nombre N_c d’observations conservées pour la construction de la solution, ainsi que la période sur laquelle elles sont disponibles. Les écart-types σ sont donnés en centimètres. σ_P correspond aux écart-types de la solution “principale”, σ_A sont ceux de la solution “additionnelle”.

Station	INPOP08			EM-3			
	Époque	N_c	σ	Époque	N_c	σ_P	σ_A
CERGA	1987-1995	3415	6.32	1987-2002	6871	8	4
CERGA	1995-2010	4861	3.97				
CERGA	1984-1986	1158	15.87	1984-1986	1160	12	10
Mc Donald	1969-1986	3489	31.63	1970-1985	3451	40	30
MLRS1	1982-1985	405	73.23	-	-	-	-
MLRS1	1985-1988	163	7.25	1986-1988	275	8	4
MLRS2	1988-1996	1148	4.26	1988-2002	2187	8	4
MLRS2	1996-2008	1768	4.80				
Haleakala	1984-1990	734	8.10	1985-1990	694	8	6
Apollo	2006-2009	640	4.82	-	-	-	-

complexe, n’a pas été introduite sans raison : Krasinsky (2002) indique que “comme les mesures LLR sont invariantes par toute rotation du système Terre-Lune dans son ensemble, tous les paramètres liés aux orientations de ce système ne peuvent pas être ajustés simultanément”. Mais il est à mon avis plus simple de se fixer l’orientation de la Terre (car mieux déterminée par le VLBI) que les coordonnées d’un réflecteur, que Krasinsky (2002) ajuste de toute manière en fixant lors d’une première étape les librations de la Lune.

Enfin, un autre problème de cohérence se pose au sujet des effets de marées. Si le modèle utilisé dans DE200 (voir l’expression 4.14) est applicable à la Terre, il ne l’est pas pour la Lune : dans le repère sélénocentrique, la position de la Terre oscille autour d’une position moyenne. L’angle de déphasage n’est donc pas constant et varie autour de zéro. Aleshkina et Krasinsky arrivent pourtant à en ajuster une valeur non nulle au LLR.

L’article (Aleshkina, 2002) a cependant le mérite de présenter les valeurs de certains paramètres ajustés, avec parfois leurs barres d’erreurs (voir le tableau 13.11).

En terme de résidus, (Aleshkina, 2002, Fig. 2, Tab. 3) et (Krasinsky, 2002, fig. 2) ne semblent pas présenter de signal aussi fort qu’INPOP08. Mais là encore, la représentation des résidus récents du CERGA avec ceux des données plus anciennes et moins précises à la même échelle écraserait un éventuel signal. On peut aussi noter que (Krasinsky, 2002, fig. 1) présente un décalage important de l’ensemble des données après mars 1998. Il est corrigé en ajustant deux jeux indépendants de coordonnées pour les réflecteurs, l’un pour la période précédant mars 1998, l’autre pour après. L’auteur justifie ce choix par un possible déplacement soudain de la surface lunaire par rapport au barycentre du système Terre-Lune, qui d’après lui, se produit aussi dans une moindre mesure pour la Terre. Mais quelle en serait la source ? Ce biais n’est observé ni avec INPOP, ni avec les réductions utilisant les solutions récentes du JPL.

L’intérêt de (Aleshkina, 2002) est aussi de publier des statistiques sur les résidus après ajustement, résumées dans le tableau 13.20 et comparées à celles d’INPOP08. On remarque que les écart-types de la solution EM-3 “principale” sont souvent supérieurs à ceux d’INPOP, à part pour les premières observations du CERGA. Ceux de la solution “additionnelle”, quant à eux, sont bien meilleurs. Ces comparaisons confirment le fait qu’ajuster des paramètres dans l’orientation de la Terre semble améliorer les résidus, avec toutes les réserves déjà exprimées à ce sujet au paragraphe précédent.

TABLE 13.21 – Comparaison des résidus INPOP08 et S2000 de Chapront et al. (2001). Pour chaque station et période, on donne l'écart-type des résidus σ (en cm) et le nombre de données.

Station	Période	S2000		INPOP08	
		σ	N	σ	N
Mc Donald et MLRS1	1972-1975	43.0	1487	36.4	1760
	1976-1979	27.3	1029	25.3	1045
	1980-1986	29.5	992	45.9	1252
CERGA (<i>Rubis</i>)	1984-1986	19.6	1166	15.9	1158
Haleakala	1987-1990	7.9	455	7.5	454
MLRS2	1987-1991	5.6	230	5.3	203
	1991-1995	4.3	581	4.1	922
	1995-2000	3.4	1621	4.1	1864
CERGA (<i>Yag</i>)	1987-1991	5.1	1570	6.3	1710
	1991-1995	3.8	2040	5.4	2419
	1995-2000	3.1	2754	4.2	3267

13.4.2.2.4 S2000

S2000 est une solution semi-analytique, dont les résidus du CERGA sont illustrés dans (Chapront et al., 2001, Fig. 1). On y remarque le même signal qu'avec INPOP08. Lorsqu'ont commencé les réductions LLR pour INPOP, on s'appuyait sur une notice de calcul non publiée de Michelle Chapront-Touzé, qui participait alors au développement de S2000. Les modèles n'étaient alors pas totalement indépendants. Mais au fur et à mesure du développement d'INPOP, la modélisation des effets a été réactualisée selon les conventions IERS 2003. Par exemple, le modèle de marées solides de la Terre simplifié du paragraphe 9.1.3.1 a été remplacé par celui complet ; le passage du GTRF au GCRF se fait par l'intermédiaire du CIP et non plus en utilisant la transformation classique de précession-nutation. D'autre part, certains effets ont été ajoutés, soit parce qu'ils figuraient dans les conventions IERS (marée polaire), soit par souci de cohérence interne à INPOP (déplacements des réflecteurs par marées solide ou variations du spin). Enfin, le code source du programme de réduction a été créé à partir de zéro. Si on ne peut pas exclure toute erreur de codage, il est peu probable que 2 personnes fassent la même.

Le tableau 13.21 compare les résidus (Chapront et al., 2001, Tab. 1) avec ceux de d'INPOP08. On remarque que les écart-types obtenus avec INPOP (sur les mêmes intervalles) sont généralement légèrement inférieurs à ceux de S2000, sauf pour :

- les données Mc Donald/MLRS1 entre 1980 et 1986. Cependant, si on ne tient pas compte pour INPOP de la très mauvaise période MLRS1 1984-1985, le sigma d'INPOP tomberait de 45.9 cm à 23.7 cm. Mais le nombre de données serait alors de 891 au lieu de 992 pour S2000.
- les données MLRS2 entre 1995 et 2000
- toutes les données du CERGA depuis 1987

À part pour Haleakala et MLRS2 entre 1987 et 1991, le nombre de données est toujours supérieur pour INPOP. Serait-il possible que la méthode de sélection des données employée par Chapront et al. soit plus restrictive que celle du paragraphe 13.2.1, et donnerait donc de meilleurs résidus ? Les données récentes ont-elles été surpondérées, au détriment des données les plus anciennes ? Il faut aussi noter qu'on dispose depuis 2001 de presque 10 ans de données supplémentaires ; plus la période s'allonge, plus les résidus sont sensibles aux lacunes des modèles car on peut moins facilement les compenser par un ajustement de paramètres. Cela avait été observé avec l'arrivée échelonnée des données Apollo (voir la fin du paragraphe 13.4.1) ou l'ajustement d'une solution INPOP sur les données antérieures à la parution de DE403 (voir le

paragraphe 13.4.2.1).

Quoiqu'il en soit, les solutions sur lesquelles travaillent actuellement G. Francou et S. Bouquillon du SYRTE, et qui s'appuient sur les travaux de Chapront et al., présentent toujours le signal caractéristique sur les données du CERGA et Haleakala.

13.4.2.3 Origine géophysique ?

De ces différentes comparaisons, on déduit que si une anomalie est présente dans la partie dynamique, elle n'est pas suffisamment importante pour générer le signal sur les données du CERGA. Il en est de même pour le modèle de réduction puisque la solution S2000 présente elle aussi ce même signal.

Il est peut-être possible de l'absorber en modifiant des paramètres liés à l'orientation de la Terre, et ce sera l'objet de futurs tests. De rapides essais, non concluants, ont été menés en modifiant l'amplitude du terme principal en 18,6 ans des nutations : les signatures ne correspondaient pas.

Il semble que les signaux sont spécifiques aux positions des stations du CERGA et d'Halakala.

Les données Apollo ne s'étendent pas encore sur une période suffisamment longue pour y repérer un signal éventuel. Les données MLRS2, par contre, ne présentent pas de signal aussi prononcé que celui du CERGA.

Il est possible que des remontées de magma puissent exercer une pression sur la croûte terrestre qui provoquerait des déplacements de stations. D'après Dorothée Husson (communication privée), la Côte d'Azur et Hawaï sont des zones propices à ce phénomène, à la différence du Texas. La question que l'on pourrait alors se poser, est pourquoi les données SLR ne détectent pas ces mouvements ? En raison des difficultés pour modéliser des forces non gravitationnelles comme la pression de radiation et surtout le freinage atmosphérique, les trajectoires des satellites sont difficilement prévisibles sur le long terme et les paramètres de leurs orbites sont réajustés tous les 10 ou 20 jours : les coordonnées des stations SLR sont déterminées en effectuant des ajustements par arcs. Il est donc possible qu'une partie des mouvements à plus longues périodes dans les stations soit absorbée dans les orbites des satellites.

Négliger les mouvements de magma serait donc effectivement une lacune dans le modèle.

Conclusion et perspectives

Dans la première partie de cette étude, nous avons décrit les équations qui permettent de calculer les forces et moments qui s'exercent entre des corps massifs. Ces interactions tiennent compte :

- des termes principaux newtoniens
- des corrections relativistes
- des effets liés à la non sphéricité de certains corps
- des effets liés à la déformation de corps non ponctuels

Une fois introduites dans les équations du mouvements, elles permettent de déterminer les trajectoires des corps du Système solaire avec une précision comparable à celle des observations actuellement disponibles.

La deuxième partie traite de la réduction des données LLR, avec en particulier les modélisations des effets qui influencent les positions de la station (tectonique, marées solides, marées océaniques, ...) et du réflecteur (marées solides, polaire), le trajet de la lumière (déviation relativiste, délai atmosphérique) et les corrections liées aux changements de repères ou d'échelles de temps. Parmi tous ces effets, nous avons vérifié que certains étaient indispensables mais que d'autres pourraient être négligés et n'ont été pris en compte que pour rester conforme aux spécifications des Conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2004) ou assurer la cohérence avec le modèle dynamique.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons utilisé les développements des deux précédentes pour construire 3 solutions :

- INPOP05 a permis de valider le modèle dynamique en étant conçue de manière à être la plus proche possible de la solution DE405 du JPL.
- INPOP06, outre une meilleure prise en compte des perturbations des astéroïdes sur les planètes, ajoute l'intégration de l'orientation de la Terre avec celle des équations du mouvement de tous les corps. On s'affranchit ainsi de tout forçage cinématique, ce qui permet de construire des solutions valables sur de longues périodes (plus de un million d'années). Elle n'est cependant ajustée qu'aux observations planétaires (Fienga et al., 2008)
- enfin, INPOP08 est ajustée directement au LLR et est donc indépendante des solutions du JPL. Ses résidus sont comparables à ceux de la solution S2000 de Chapront et al. (2001) et légèrement meilleurs que ceux de EM-3 de Aleshkina (2002). Ils restent cependant moins bons que ceux de DE421 de Folkner et al. (2008) et Williams et al. (2008). D'autre part, il reste un signal résiduel dans les observations du CERGA et d'Haleakala. Ce problème n'est à ce jour pas résolu.

L'éphéméride INPOP est aujourd'hui considérée comme étant de qualité équivalente à celles du Jet Propulsion Laboratory et de l'Institut d'Astronomie Appliquée de l'Académie Russe des Sciences. Elle a été choisie comme éphéméride officielle de la mission d'astrométrie de haute précision GAIA (lancement prévu en 2012). Pour l'exploitation des données de cette mission, il est indispensable de disposer d'une éphéméride "4D", incluant à la fois les positions des corps et son échelle de temps. INPOP08 est ainsi la première solution pour laquelle la transformation entre TT et TDB nécessaire à la réduction des observations est intégrée en même temps que les équations du mouvement des corps et utilisée lors de sa construction.

La maîtrise des différentes étapes nécessaires à la construction d'une solution planétaire (voir le schéma de la figure 1) fait qu'on dispose avec INPOP d'un outil efficace pour effectuer des tests dans le Système solaire. En effet, pour tester la présence d'un phénomène physique ou en évaluer l'importance, on ne peut pas se contenter de l'introduire dans les modèles et d'en étudier les conséquences sur les orbites ou sur les résidus aux observations. Certains changements de modèles peuvent en effet être compensés par des ajustements de paramètres.

Ainsi, Fienga et al. (2010) montre à l'aide d'INPOP que l'accélération de la sonde Pioneer, mesurée à environ 9×10^{-10} m/s² et dont l'origine est inexplicée, ne peut pas être appliquée à Uranus car elle en dégraderait les résidus en ascension droite, même après réajustement des paramètres. Dans le même article sont également apportées des contraintes sur les paramètres post-newtoniens β et γ , déduites des ajustements planétaires. Un travail similaire est en cours avec les données LLR. INPOP est donc aussi un outil pour tester la validité de la relativité générale et en déterminer les éventuelles limites.

Élaborer une solution planétaire est une tâche sans fin. Celles construites aujourd'hui, contraintes sur un intervalle de temps limité, se dégraderont progressivement avec l'arrivée de nouvelles observations. Ce phénomène est illustré avec les résidus LLR de DE403 (voir la figure 13.20) sur celles postérieures à sa date de parution. Pour conserver une bonne représentation des trajectoires réelles des corps par celles calculées par la solution, il est donc nécessaire d'en réajuster régulièrement les paramètres au fur et à mesure de la disponibilité de nouvelles données.

D'autres observations, actuellement disponibles mais encore non utilisées dans les ajustements d'INPOP, peuvent être utiles pour la détermination des paramètres. Ainsi, les données de l'orbiteur Lunar Prospector pourraient apporter de meilleures contraintes sur les coefficients du potentiel de la Lune. On pourrait alors assurer la cohérence entre le potentiel de la Lune et la solution planétaire. Ce n'est actuellement pas le cas avec le modèle LP150Q de (Konopliv et al., 2001), pour lequel la solution est fixée par DE403. Ce travail nécessitera cependant le développement d'un autre programme de calcul de trajectoire pour l'orbiteur. Ses équations du mouvement pourront en grande partie être reprises de la première partie de cette thèse, mais il sera nécessaire d'y ajouter la prise en compte d'effets non gravitationnels, comme les manœuvres éventuelles ou la pression de radiation.

Enfin, les modèles eux-mêmes sont perfectibles, et des effets aujourd'hui négligés permettront peut-être d'améliorer les résidus aux observations. On a vu au paragraphe 13.4.2.1 que la solution DE423 du JPL tenait compte de la présence d'un noyau interne à la Lune. Son introduction dans INPOP permettra peut-être de réduire ses résidus LLR. Ce sera peut-être aussi le cas avec l'effet Lense-Thirring, dont l'impact sur la Lune serait (d'après S. Klioner, communication privée) supérieur à celui de la précession géodésique.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Dérivée seconde de la position du barycentre relativiste

On considère un système à n corps ponctuels, de masses respectives m_i (on appelle $\mu_i = Gm_i$), et repérés dans un repère \mathcal{R} par leurs vecteurs position \vec{r}_i et vitesse $\dot{\vec{r}}_i$. Les coordonnées des corps sont régies par les équations différentielles définies en 1.3 et 1.12 (avec $\beta = \gamma = 1$).

Pour simplifier les notations, on notera

$$\ddot{\vec{r}}_i = \vec{a}_i + \frac{1}{c^2} \vec{b}_i \quad (\text{A.1})$$

où \vec{a}_i est le terme newtonien (voir expression 1.3) et \vec{b}_i est, au facteur $1/c^2$ près, le terme dû aux corrections relativistes (voir expression 1.12) :

$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left[-4 \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 + 2\|\dot{\vec{r}}_j\|^2 - 4\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_j \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \dot{\vec{r}}_j}{r_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right] (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \\ & + \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (4\dot{\vec{r}}_i - 3\dot{\vec{r}}_j) \right] (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \\ & + \frac{7}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_j}{r_{ij}} \frac{\mu_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On posera également

$$\mu_i^* = \mu_i + \frac{1}{c^2} \eta_i \quad \text{avec} \quad \eta_i = \frac{\mu_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}} \right) \quad (\text{A.4})$$

L'objectif de ce chapitre est de calculer la dérivée seconde du vecteur $\vec{u} = \sum_i \mu_i^* \vec{r}_i$ et de montrer qu'elle ne contient que des termes de degrés supérieurs ou égaux à $1/c^4$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{u}} &= \sum_{i=1}^n \mu_i^* \ddot{\vec{r}}_i + 2\dot{\mu}_i^* \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i^* \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{a}_i\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n \left(\mu_i \vec{b}_i + \eta_i \vec{a}_i + 2\dot{\eta}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\eta}_i \vec{r}_i \right)\tag{A.6}$$

$$+ \frac{1}{c^4} \sum_{i=1}^n \eta_i \vec{b}_i\tag{A.7}$$

La ligne (A.5) de l'équation précédente contient les termes en c^0 . Il s'agit, au facteur $\sum_i \mu_i$ près, de la dérivée seconde du vecteur position du barycentre classique d'un système de particules soumis aux interactions newtoniennes mutuelles. Or on a montré au paragraphe 1.3.1 que cette somme était nulle; $\ddot{\vec{u}}$ ne contient donc pas de termes en c^0 .

La ligne (A.6) ne contient que des termes de degrés supérieurs à c^{-2} ; des termes en c^{-4} et c^{-6} vont venir des dérivées première et seconde des η_i :

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_i &= \frac{\mu_i}{2} \left(2\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \right) \\ &= \frac{\mu_i}{2} \left(2\vec{a}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) + \frac{2}{c^2} \vec{b}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) \\ &= \frac{\mu_i}{2} \left(2 \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) + \frac{2}{c^2} \vec{b}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) \\ &= \frac{\mu_i}{2} \left(\sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \right) + \frac{\mu_i}{c^2} \vec{b}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\ddot{\eta}_i = \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\ddot{\vec{r}}_i + \ddot{\vec{r}}_j) \quad (\text{A.10})$$

$$- \frac{3\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^5} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) \quad (\text{A.11})$$

$$+ \frac{\mu_i}{c^2} (\dot{\vec{b}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{b}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \quad (\text{A.13})$$

$$+ \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\vec{a}_i + \vec{a}_j) \quad (\text{A.14})$$

$$- \frac{3\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^5} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) \quad (\text{A.15})$$

$$+ \frac{\mu_i}{c^2} \left(\dot{\vec{b}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{b}_i \cdot \vec{a}_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{2r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\vec{b}_i + \vec{b}_j) \right) \quad (\text{A.16})$$

$$+ \frac{\mu_i}{c^4} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_i \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \quad (\text{A.18})$$

$$+ \frac{\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} + \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k \vec{r}_{jk}}{r_{jk}^3} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$- \frac{3\mu_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^5} \vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \times \vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) \quad (\text{A.20})$$

$$+ \frac{\mu_i}{c^2} \left(\dot{\vec{b}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{b}_i \cdot \vec{a}_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{2r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot (\vec{b}_i + \vec{b}_j) \right) \quad (\text{A.21})$$

$$+ \frac{\mu_i}{c^4} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_i \quad (\text{A.22})$$

Afin de simplifier, on a adopté la notation $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, $\dot{\vec{r}}_{ij} = \dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i$. On peut également remarquer que d'autres termes en c^{-4} dans $\ddot{\eta}_i$ (qui se traduiraient par des termes en c^{-6} dans $\ddot{\vec{u}}$) viendraient de $\dot{\vec{b}}_i$.

On ne s'intéresse pour l'instant qu'aux termes en c^{-2} de $\ddot{\vec{u}}$, qu'on note $\ddot{\vec{u}}_{c^2}$:

$$\ddot{\vec{u}}_{c^2} = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{b}_i \quad (\text{A.23})$$

$$+ \sum_{i=1}^n \eta_i \vec{a}_i \quad (\text{A.24})$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \dot{\vec{r}}_i \quad (\text{A.25})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \vec{r}_i \quad (\text{A.26})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} + \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k \vec{r}_{jk}}{r_{jk}^3} \right) \vec{r}_i \quad (\text{A.27})$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[\vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \right] \times \left[\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} \right] \vec{r}_i \quad (\text{A.28})$$

En remplaçant les vecteurs \vec{a}_i et \vec{b}_i en fonction de leurs expressions A.2 et A.3, on obtient :

$$\ddot{\vec{u}}_{c^2} = -4 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij}^3 r_{ik}} \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.29})$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij}^3 r_{jk}} \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.30})$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \right)^2 \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.31})$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\dot{\vec{r}}_i \right)^2 \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.32})$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left(\vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right)^2 \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.33})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij}^3 r_{jk}^3} \left(\vec{r}_{jk} \cdot \vec{r}_{ij} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.34})$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\vec{r}_{ji} \cdot \left(4\dot{\vec{r}}_i - 3\dot{\vec{r}}_j \right) \right) \dot{\vec{r}}_{ji} \quad (\text{A.35})$$

$$+ \frac{7}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij} r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} \quad (\text{A.36})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.37})$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ik} r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.38})$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \left(\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i \right) \dot{\vec{r}}_i \quad (\text{A.39})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \left(\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j \right) \vec{r}_i \quad (\text{A.40})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} + \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k \vec{r}_{jk}}{r_{jk}^3} \right) \vec{r}_i \quad (\text{A.41})$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \left(\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i \right) \right] \times \left[\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} \right] \vec{r}_i \quad (\text{A.42})$$

On peut alors remarquer que toutes les lignes (A.29) à (A.42) contiennent des doubles sommes du type $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \vec{\alpha}_{ij}$ qui peuvent se réécrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j > i} \vec{\alpha}_{ij} + \vec{\alpha}_{ji}$. La ligne (A.36) sera cependant laissée inchangée. En recombinaison $\vec{\alpha}_{ij} + \vec{\alpha}_{ji}$ (la ligne (A.31) s'annule car

$\vec{\alpha}_{ij} = -\vec{\alpha}_{ji}$), on obtient :

$$\ddot{u}_{c^2} = -4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.43})$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} - \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.44})$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.45})$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[\left(\vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right)^2 - \left(\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right)^2 \right] \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.46})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} (\vec{r}_{jk} \cdot \vec{r}_{ij}) - \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} (\vec{r}_{ik} \cdot \vec{r}_{ji}) \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.47})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\vec{r}_{ji} \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \right) \dot{\vec{r}}_{ji} \quad (\text{A.48})$$

$$+ \frac{7}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij} r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} \quad (\text{A.49})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.50})$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.51})$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \dot{\vec{r}}_{ji} \quad (\text{A.52})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_j) \vec{r}_{ji} \quad (\text{A.53})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} + \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k \vec{r}_{jk}}{r_{jk}^3} \right) \vec{r}_{ji} \quad (\text{A.54})$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[\vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i) \right] \times \left[\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} \right] \vec{r}_{ji} \quad (\text{A.55})$$

À ce stade, on remarque

- que les lignes (A.48) et (A.52) s'annulent
- que (A.43), (A.44) et (A.51) se combinent
- que les lignes (A.45), (A.50) et (A.53) s'annulent
- que les lignes (A.47) et (A.54) s'annulent

La ligne (A.46) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[(\vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j)^2 - (\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i)^2 \right] \vec{r}_{ij} &= -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[(\vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j - \vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i) \times (\vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j + \vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i) \right] \vec{r}_{ij} \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[(\vec{r}_{ji} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i)) \times (\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ji}) \right] \vec{r}_{ij} \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^5} \left[(\vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_i)) \times (\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}) \right] \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

et s'annule ainsi avec la ligne (A.55).

Il ne reste alors plus que les deux lignes suivantes :

$$\ddot{\vec{u}}_{c^2} = -\frac{7}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.57})$$

$$+\frac{7}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij} r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} \quad (\text{A.58})$$

On va maintenant réarranger les termes de (A.58) :

$$+\frac{7}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_i \mu_j \mu_k}{r_{ij} r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} = \frac{7}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q>p} \alpha_{pq} \vec{r}_{pq} \quad (\text{A.59})$$

$\alpha_{pq} \vec{r}_{pq}$ est obtenu dans (A.58) lorsque $j = p$ et $k = q$ d'une part, et $j = q$ et $k = p$ d'autre part. On a donc

$$\alpha_{pq} = \sum_{i \neq p} \frac{\mu_p \mu_q \mu_i}{r_{pq}^3 r_{ip}} - \sum_{i \neq q} \frac{\mu_p \mu_q \mu_i}{r_{pq}^3 r_{iq}} \quad (\text{A.60})$$

Le système (A.57) et (A.58) devient donc :

$$\ddot{\vec{u}}_{c^2} = -\frac{7}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} \left(\sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \right) \vec{r}_{ij} \quad (\text{A.61})$$

$$+\frac{7}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q>p} \frac{\mu_p \mu_q}{r_{pq}^3} \left(\sum_{i \neq p} \frac{\mu_i}{r_{ip}} - \sum_{i \neq q} \frac{\mu_i}{r_{iq}} \right) \vec{r}_{pq} \quad (\text{A.62})$$

Dans (A.62), les indices p , q , et i sont muets et peuvent donc être renommés en respectivement i , j et k . (A.61) et (A.62) s'annulent donc, $\ddot{\vec{u}}_{c^2} = \vec{0}$ et $\ddot{\vec{u}}$ ne contient donc pas de termes en c^{-2} .

Annexe B

Polynômes de Legendre et fonctions associées de Legendre

Les polynômes et fonctions associées de Legendre sont utilisés lors du calcul des interactions avec un corps non sphérique. Ils sont définis par Lambeck (1988, p. 10, eq. 2.2.8) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (\text{B.1})$$

Pour la suite, il sera utile d'introduire la suite de polynômes de degré $2n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n(t) = (t^2 - 1)^n \text{ d'où } P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}(t) \quad (\text{B.2})$$

B.1 Polynômes de Legendre

B.1.1 Liens avec le développement du potentiel

Dans ce paragraphe, on démontrera l'équation 2.3.

B.1.1.1 Expression sous forme de polynômes

En développant $Q_m(t)$ avec la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$(t^2 - 1)^m = \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} C_n^m t^{2n} \quad (\text{B.3})$$

Dans cette expression, on peut séparer les termes de degrés inférieurs stricts à m (dont la dérivée d'ordre m sera nulle) de ceux dont les degrés sont supérieurs ou égaux à m (et dont la dérivée d'ordre m sera non nulle) :

$$Q_m(t) = \sum_{0 \leq n < m/2} (-1)^{m-n} C_n^m t^{2n} + \sum_{m/2 \leq n \leq m} (-1)^{m-n} C_n^m t^{2n} \quad (\text{B.4})$$

Et en dérivant m fois cette expression, on obtient :

$$Q_m^{(m)}(t) = \sum_{m/2 \leq n \leq m} (-1)^{m-n} C_n^m \frac{(2n)!}{(2n-m)!} t^{2n-m} \quad (\text{B.5})$$

Finalement,

$$P_{m0}(t) = \sum_{m/2 \leq n \leq m} (-1)^{m-n} \frac{1}{2^m} \frac{1}{n!} \frac{1}{(m-n)!} \frac{(2n)!}{(2n-m)!} t^{2n-m} \quad (\text{B.6})$$

B.1.1.2 Lien avec le potentiel d'un corps non ponctuel

On reprend l'expression 2.2 :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi \right)^{-1/2} \quad (\text{B.7})$$

Or,

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{C_n^{2n}}{2^{2n}} x^n \quad (\text{B.8})$$

On obtient donc, en remplaçant x par $\frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \psi \right)$ dans l'expression précédente :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^{2n} C_k^n}{2^{n+k}} \left(\frac{r'}{r} \right)^{n+k} \cos^{n-k} \psi \quad (\text{B.9})$$

En regroupant dans l'expression précédente les termes de même degré en r'/r , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^m \sum_{m/2 \leq n \leq m} (-1)^{m-n} \frac{C_n^{2n}}{2^m} C_{m-n}^m \cos^{2n-m} \psi \\ &= \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^m \sum_{m/2 \leq n \leq m} (-1)^{m-n} \frac{1}{2^m} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(m-n)!} \frac{1}{(2n-m)!} \cos^{2n-m} \psi \\ &= \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^m P_{m,0}(\cos \psi) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En multipliant par la constante de la gravitation G et par la masse dm , on retrouve bien l'expression du potentiel 2.2.

B.1.2 Propriétés des polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre étant une famille échelonnée en degré, ils constituent une base de l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

B.1.2.1 Orthogonalité

Soit le produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \quad (\text{B.11})$$

On souhaite montrer que les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, (n \neq m) \implies (P_n|P_m) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Pour des raisons de symétrie, il suffit de le montrer pour $n > m$.

$$(P_n|P_m) = \int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t) dt = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t)Q_m^{(m)}(t) dt \quad (\text{B.13})$$

- Si $m = 0$:

$$(P_n|P_0) = \int_{-1}^1 P_n(t) dt = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t) dt = \frac{1}{2^n n!} \left[Q_n^{(n-1)} \right]_{-1}^1 \quad (\text{B.14})$$

Or 1 et -1 sont racines d'ordre n de Q_n , donc $Q_n^{(n-1)}(1) = Q_n^{(n-1)}(-1) = 0$. On a donc bien $(P_n|P_0) = 0$.

- Si $m \geq 1$:

En intégrant $m + 1$ fois par partie l'expression B.13, on obtient :

$$(P_n|P_m) = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2^m m!} \left((-1)^{m+1} \int_{-1}^1 Q_m^{(2m+1)}(t) Q_n^{(n-m-1)}(t) dt - \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \left[Q_m^{(m+k-1)} Q_n^{(n-k)} \right]_{-1}^1 \right) \quad (\text{B.15})$$

1 et -1 étant racines d'ordre n de Q_n , $\forall k \in [1, m+1]$, $n-k \geq 0$ et $Q_n^{(n-k)}(1) = Q_n^{(n-k)}(-1) = 0$. De plus, Q_m est un polynôme de degré $2m$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q_m^{(2m+1)}(t) = 0$.

On a donc $(P_n|P_m) = 0$, (P_n) est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

B.1.2.2 Valeurs en 1 et -1

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n(t) = (t-1)^n (t+1)^n \quad (\text{B.16})$$

En dérivant n fois cette relation et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{n!}{(n-k)!} (t-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (t+1)^k \quad (\text{B.17})$$

On en déduit les valeurs

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(1) = 1 \text{ et } P_n(-1) = (-1)^n \quad (\text{B.18})$$

B.1.2.3 Relations de récurrence

On cherche maintenant à établir une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

(P_n) étant une base de $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$; en particulier :

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i \quad (\text{B.19})$$

(P_n) étant une base orthogonale, on a :

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(XP_n|P_i)}{(P_i|P_i)} P_i \quad (\text{B.20})$$

Or, d'après la définition du produit scalaire, $(XP_n|P_i) = (P_n|XP_i)$:

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(P_n|XP_i)}{(P_i|P_i)} P_i \quad (\text{B.21})$$

De la même manière que XP_n , XP_i peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $(P_j)_{j \in [0, i+1]}$:

$$XP_i = \sum_{j=0}^{i+1} \lambda_j P_j \text{ et } (P_n | XP_i) = \sum_{j=0}^{i+1} \lambda_j (P_n | P_j) \quad (\text{B.22})$$

B.21 devient alors :

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i+1} \lambda_j \frac{(P_n | P_j)}{(P_i | P_i)} P_i \quad (\text{B.23})$$

Or, (P_n) étant une base orthogonale, $n \neq j \implies (P_n | P_j) = 0$. Il ne reste donc que 3 termes dans l'équation précédente :

$$XP_n = \alpha_{n+1} P_{n+1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1} \quad (\text{B.24})$$

Cette expression appliquée à $X = 1$ et $X = -1$ donne $\alpha_n = 0$ et $1 = \alpha_{n+1} + \alpha_{n-1}$. Enfin, en identifiant les termes de degré $n + 1$:

$$\frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \alpha_{n+1} \text{ soit } \alpha_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \quad (\text{B.25})$$

Finalement, avec $P_0 = 1$, $P_1 = X$, on obtient la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n \geq 1, (n+1)P_{n+1} = (2n+1)XP_n - nP_{n-1} \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

B.1.2.4 Expressions jusqu'au degré 5

On en déduit leurs expressions :

$$P_0(t) = 1 \quad (\text{B.27})$$

$$P_1(t) = t \quad (\text{B.28})$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2} (3t^2 - 1) \quad (\text{B.29})$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2} (5t^3 - 3t) \quad (\text{B.30})$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8} (35t^4 - 30t^2 + 3) \quad (\text{B.31})$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8} (63t^5 - 70t^3 + 15t) \quad (\text{B.32})$$

B.1.2.5 Dérivées

Soit la propriété \mathcal{P}_n , qu'on souhaite montrer par récurrence :

$$(X^2 - 1) P'_n = n (XP_n - P_{n-1}) \quad (\text{B.33})$$

- \mathcal{P}_1 est vraie : $XP_1 - P_0 = X^2 - 1 = (X^2 - 1) P'_1$.
- Supposons que \mathcal{P}_n est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

En dérivant la relation de récurrence B.26 et en multipliant par $X^2 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(n+1)(X^2-1)P'_{n+1} &= (X^2-1)((2n+1)XP'_n + (2n+1)P_n - nP'_{n-1}) \\
&= (2n+1)X(X^2-1)P'_n + (2n+1)(X^2-1)P_n - n(X^2-1)P'_{n-1} \\
&= n(2n+1)X(XP_n - P_{n-1}) + (2n+1)(X^2-1)P_n - n(n-1)(XP_{n-1} - P_{n-2}) \\
&\text{car } \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n-1} \text{ sont vraies} \\
&= (2n+1)((n+1)X^2-1)P_n - 3n^2XP_{n-1} + n(n-1)P_{n-2} \\
&= (2n+1)((n+1)X^2-1)P_n - 3n^2XP_{n-1} + n((2n-1)XP_{n-1} - nP_n) \\
&\text{car d'après B.26, } (n-1)P_{n-2} = (2n-1)XP_{n-1} - nP_n \\
&= (2n+1)((n+1)X^2-1)P_n - n^2P_n - n(n+1)XP_{n-1} \\
&= (2n+1)((n+1)X^2-1)P_n - n^2P_n + (n+1)X((n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n) \\
&\text{car d'après B.26, } -nP_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n \\
&= -(2n+1)P_n - n^2P_n + (n+1)^2XP_{n+1} \\
&= (n+1)^2(XP_{n+1} - P_n) \tag{B.34}
\end{aligned}$$

En simplifiant par $(n+1)$, on en déduit donc que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. D'après le théorème de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (X^2-1)P'_n = n(XP_n - P_{n-1}) \tag{B.35}$$

B.2 Fonctions associées de Legendre

B.2.1 Définition

Les fonctions associées de Legendre se définissent par :

$$P_{n,m} = (1-t^2)^{m/2} P_n^{(m)} \quad (\text{B.36})$$

B.2.2 Relations de récurrence

On remarque que $P_{n,0} = P_n$ et $P_{n,1} = \sqrt{1-t^2} P_n'$.

En dérivant $m \in [1, n-1]$ fois l'expression B.35, on obtient :

$$(X^2 - 1) P_n^{(m+1)} + 2mX P_n^{(m)} + m(m-1) P_n^{(m-1)} = n \left(X P_n^{(m)} + m P_n^{(m-1)} - P_{n-1}^{(m)} \right) \quad (\text{B.37})$$

$$(1 - X^2) P_n^{(m+1)} = (2m - n) X P_n^{(m)} + m(m-1-n) P_n^{(m-1)} + n P_{n-1}^{(m)} \quad (\text{B.38})$$

En introduisant B.36, on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [1, n-1], P_{n,m+1} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} [(2m-n)t P_{n,m} + n P_{n-1,m}] + m(m-1-n) P_{n,m-1} \quad (\text{B.39})$$

B.2.3 Dérivées

La dérivée de B.36 donne :

$$\begin{aligned} P'_{n,m} &= -mt (1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} P_n^{(m)} + (1-t^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m+1)} \\ &= -\frac{mt}{1-t^2} P_{n,m} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P_{n,m+1} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

B.2.4 Expression en coordonnées cartésiennes

Avec :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned}
r^2 P_{20}(\sin \varphi) &= z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\
r^2 P_{21}(\sin \varphi) \cos(\lambda) &= 3xz \\
r^2 P_{21}(\sin \varphi) \sin(\lambda) &= 3yz \\
r^2 P_{22}(\sin \varphi) \cos(2\lambda) &= 3(x^2 - y^2) \\
r^2 P_{22}(\sin \varphi) \sin(2\lambda) &= 6xy \\
r^3 P_{30}(\sin \varphi) &= \frac{1}{2}z(2z^2 - 3y^2 - 3x^2) \\
r^3 P_{31}(\sin \varphi) \cos(\lambda) &= \frac{1}{2}x(12z^2 - 3y^2 - 3x^2) \\
r^3 P_{31}(\sin \varphi) \sin(\lambda) &= \frac{1}{2}y(12z^2 - 3y^2 - 3x^2) \\
r^3 P_{32}(\sin \varphi) \cos(2\lambda) &= 15z(x^2 - y^2) \\
r^3 P_{32}(\sin \varphi) \sin(2\lambda) &= 30xyz \\
r^3 P_{33}(\sin \varphi) \cos(3\lambda) &= 15x(x^2 - 3y^2) \\
r^3 P_{33}(\sin \varphi) \sin(3\lambda) &= 15y(3x^2 - y^2) \\
r^4 P_{40}(\sin \varphi) &= \frac{1}{8}(8z^4 - 24y^2z^2 + 3y^4 - 24x^2z^2 + 6x^2y^2 + 3x^4) \\
r^4 P_{41}(\sin \varphi) \cos(\lambda) &= \frac{5}{2}xz(4z^2 - 3y^2 - 3x^2) \\
r^4 P_{41}(\sin \varphi) \sin(\lambda) &= \frac{5}{2}yz(4z^2 - 3y^2 - 3x^2) \\
r^4 P_{42}(\sin \varphi) \cos(2\lambda) &= \frac{15}{2}(-6y^2z^2 + y^4 + 6x^2z^2 - x^4) \\
r^4 P_{42}(\sin \varphi) \sin(2\lambda) &= 15y(6xz^2 - xy^2 - x^3) \\
r^4 P_{43}(\sin \varphi) \cos(3\lambda) &= 105xz(x^2 - 3y^2) \\
r^4 P_{43}(\sin \varphi) \sin(3\lambda) &= 105yz(3x^2 - y^2) \\
r^4 P_{44}(\sin \varphi) \cos(4\lambda) &= 105(y^4 - 6x^2y^2 + x^4) \\
r^4 P_{44}(\sin \varphi) \sin(4\lambda) &= 420xy(x^2 - y^2)
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Annexe C

Liens entre les coefficients du potentiel et la matrice d'inertie

D'après l'expression 2.9, les coefficients de degré 2 du potentiel sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} MR^2 C_{20} = \iiint_V r'^2 P_{20}(\sin \varphi') dm \\ MR^2 C_{21} = \frac{1}{3} \iiint_V r'^2 P_{21}(\sin \varphi') \cos \lambda' dm \\ MR^2 S_{21} = \frac{1}{3} \iiint_V r'^2 P_{21}(\sin \varphi') \sin \lambda' dm \\ MR^2 C_{22} = \frac{1}{12} \iiint_V r'^2 P_{22}(\sin \varphi') \cos 2\lambda' dm \\ MR^2 S_{22} = \frac{1}{12} \iiint_V r'^2 P_{22}(\sin \varphi') \sin 2\lambda' dm \end{array} \right. \quad (C.1)$$

Les valeurs des polynômes en fonction des coordonnées cartésiennes sont données en annexe par les expressions B.42 ; on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} MR^2 C_{20} = \frac{1}{2} \iiint_V 2z'^2 - x'^2 - y'^2 dm \\ MR^2 C_{21} = \iiint_V x' z' dm \\ MR^2 S_{21} = \iiint_V y' z' dm \\ MR^2 C_{22} = \frac{1}{4} \iiint_V x'^2 - y'^2 dm \\ MR^2 S_{22} = \frac{1}{2} \iiint_V x' y' dm \end{array} \right. \quad (C.2)$$

La matrice d'inertie d'un corps non ponctuel est définie par :

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{11} = \iiint_V y^2 + z^2 dm \\ I_{22} = \iiint_V x^2 + z^2 dm \\ I_{33} = \iiint_V x^2 + y^2 dm \\ I_{12} = I_{21} = - \iiint_V xy dm \\ I_{13} = I_{31} = - \iiint_V xz dm \\ I_{23} = I_{32} = - \iiint_V yz dm \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

On peut donc exprimer les 5 coefficients du potentiel du corps étendu en fonctions des 6 coefficients de sa matrice d'inertie :

$$\left\{ \begin{array}{l} MR^2 C_{20} = \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) - I_{33} \\ MR^2 C_{21} = -I_{13} \\ MR^2 S_{21} = -I_{23} \\ MR^2 C_{22} = \frac{I_{22} - I_{11}}{4} \\ MR^2 S_{22} = -\frac{I_{12}}{2} \end{array} \right. \quad (\text{C.5})$$

On peut aussi écrire la matrice d'inertie en fonction des coefficients du potentiel de degré 2 :

$$I = \begin{pmatrix} I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} + MR^2 \begin{pmatrix} C_{20} - 2C_{22} & -2S_{22} & -C_{21} \\ -2S_{22} & C_{20} + 2C_{22} & -S_{21} \\ -C_{21} & -S_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Annexe D

Coefficients pour les développements des angles de précession

Le tableau suivant présente les coefficients des polynômes permettant de calculer les angles intervenant dans la précession. Ils sont issus de (Lieske et al., 1977), (Simon et al., 1994), (Williams, 1994), (McCarthy & Petit, 2004) et (Capitaine et al., 2003). Les angles sont exprimés en secondes de degrés, le temps T est compté en millénaires juliens depuis J2000.

		T^0	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6
Lieske et al.	θ	0.0	20043.109	-42.665	-41.833			
	ζ	0.0	23062.181	30.188	17.998			
	z	0.0	23062.181	109.468	18.203			
	ϵ	84381.448	-468.150	-0.059	1.813			
	ψ	0.0	50387.784	-107.259	-1.147			
	ω	84381.448	0.0	5.127	-7.726			
	χ	0.0	105.526	-238.064	-1.125			
	Simon et al.	θ	0.0	20042.0198	-42.6568	-41.8238	-0.0731	-0.0127
ζ		0.0	23060.9099	30.2228	18.0183	-0.0583	-0.0285	-0.0002
z		0.0	23060.9099	109.5280	18.2667	-0.2821	-0.0301	-0.0001
ϵ		84381.412	-468.095	-0.0152	1.9989	-0.0051	-0.0025	
ψ		0.0	50385.0649	-107.2381	-1.1424	1.3279	-0.0094	-0.0035
ω		84381.412	0.0	5.1294	-7.7276	-0.0048	0.0333	-0.0003
χ		0.0	105.5769	-238.1396	-1.2117	1.7024	-0.0077	-0.0040
Williams		θ	0.0	20041.82023	-42.9466	-41.822	-0.07	
	ζ	2.511180	23060.71060	29.9027	18.017	-0.05		
	z	-2.511180	23060.65079	109.2516	18.265	-0.29		
	ϵ	84381.409	-468.33960	-0.0174	2.0	-0.01		
	ψ	0.0	50384.56501	-107.8977	-1.141	1.33		
	ω	84381.409	-0.244	5.1268	-7.727	0.0		
	χ	0.0	105.577	-238.1366	-1.208	1.7		
	UAI 2000 Capitaine et al.	θ	0.0	20041.917476	-42.69353	-41.8251	-0.601	-0.01
ζ		2.5976176	23060.809506	30.19015	17.9663	-0.327	-0.02	
z		-2.5976176	23060.803226	109.47790	18.2273	0.47	-0.03	
ϵ		84381.448	-468.4024	-0.059	1.813			
ψ		0.0	50384.7875	-107.259	-1.147			
ω		84381.448	-0.2524	5.127	-7.726			
χ		0.0	105.526	-238.064	-1.125			
P03 Capitaine et al.		θ	0.0	20041.91903	-42.94934	-41.82264	-0.07089	-0.01274
	ζ	2.650545	23060.83227	29.88499	18.01828	-0.05971	-0.03173	
	z	-2.650545	23060.77181	109.27348	18.26837	-0.28596	-0.02904	
	ϵ	84381.406	-468.36769	-0.01831	2.00340	-0.0000576	-0.000000434	
	ψ	0.0	50384.81507	-107.90069	-1.14045	1.32851	0.00951	
	ω	84381.406	-0.25754	5.12623	-7.72503	-0.00467	0.03337	
	χ	0.0	105.56403	-238.14292	-1.21197	1.70663	-0.00560	

Annexe E

Vérification de la cohérence des divers modèles de marées

Les marées solides sont introduites dans INPOP par la variation des coefficients du potentiel du corps déformé. Le but de ce chapitre est de montrer comment, sous certaines hypothèses simplificatrices, on retrouve le modèle de marées terrestres utilisé dans les solutions DE405 (voir l'expression 4.13) et DE200 (voir l'expression 4.14).

Dans toute cette partie, on notera :

- G , constante de la gravitation
- M , la masse du corps déformable, R son rayon équatorial moyen (ici la Terre)
- m , la masse du corps ponctuel perturbateur (ici la Lune)
- ${}^t\vec{r} = (x, y, z)$, les coordonnées du corps ponctuel perturbateur, exprimées dans le repère lié au corps étendu.
- $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$
- ${}^t\vec{\rho} = (x, y, 0)$ et ${}^t\vec{z} = (0, 0, z)$, les décompositions équatoriale et polaire de $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z}$
- m_g , la masse du corps ponctuel générateur de marées (Soleil ou Lune)
- ${}^t\vec{r}_g = (x_g, y_g, z_g)$, les coordonnées déphasées (de τ_{20} , τ_{21} ou τ_{22} selon les paragraphes) du corps générateur (ici la Lune ou le Soleil), exprimées dans le repère lié au corps déformé
- $r_g = \|\vec{r}_g\| = \sqrt{(x_g^2 + y_g^2 + z_g^2)}$
- ${}^t\vec{\rho}_g = (x_g, y_g, 0)$ et ${}^t\vec{z}_g = (0, 0, z_g)$, les décompositions équatoriale et polaire de $\vec{r}_g = \vec{\rho}_g + \vec{z}_g$

E.1 Effets de marées DE405

Dans les effets de marées DE405, on ne tient compte que de l'interaction entre la Lune (le seul corps perturbateur) et la déformation de la Terre, générée par la Lune et le Soleil.

Pour retrouver l'expression 4.13, on décompose harmonique par harmonique, le vecteur accélération de la Lune dû aux effets de marées.

E.1.1 Déformation ΔC_{20}

Dans l'expression du potentiel perturbé (voir 4.1), on s'intéresse au terme ΔC_{20} , que l'on exprime en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U_{C_{20}} = -\frac{1}{2}GMR^2\Delta C_{20}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5} \quad (\text{E.1})$$

En en prenant l'opposé du gradient par rapport à \vec{r} , on obtient l'accélération de la Lune par rapport au barycentre du Système solaire :

$$\ddot{\vec{r}}_{\Delta C_{20}} = \frac{3}{2} GMR^2 \Delta C_{20} \frac{1}{r^7} \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2) \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

On remplace ensuite ΔC_{20} par son expression (voir 4.12). Dans la mesure où pour simplifier les notations dans ce chapitre, \vec{r}_g désigne le vecteur déphasé (ici de τ_{20}), on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{\Delta C_{20}} &= \frac{3}{2} GMR^2 \frac{m_g}{M} \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 \frac{k_{20}}{2} \frac{2z_g^2 - x_g^2 - y_g^2}{r_g^2} \left(\frac{1}{r^7} \right) \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{3Gm_g}{2} \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 \left(\frac{k_{20}}{2} \right) \left(\frac{1}{r^7} \right) (2z_g^2 - x_g^2 - y_g^2) \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{3Gm_g}{2} \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 \left(\frac{k_{20}}{2} \right) \left(\frac{1}{r^7} \right) (2r^2 r_g^2 \vec{r} + 4z_g^2 r^2 \vec{z} + 2\rho_g^2 r^2 \vec{\rho} - 10z^2 z_g^2 \vec{r} - 5\rho^2 \rho_g^2 \vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Avec $\vec{r}_g = \vec{r}_0^*$, on retrouve, au facteur $(1 + m/M)$ près, la première ligne de l'expression 4.13. Le facteur $(1 + m/M)$ dans 4.13 vient du fait que $\ddot{\vec{r}}_{(tide)}$ y désigne la dérivée seconde du vecteur Terre-Lune, tandis que $\ddot{\vec{r}}_{C_{20}}$ dans E.3 désigne le vecteur accélération de la Lune par rapport au barycentre du Système solaire.

E.1.2 Déformations ΔC_{21} et ΔS_{21}

Dans l'expression du potentiel perturbé (voir 4.1), on s'intéresse aux termes ΔC_{21} et ΔS_{21} , que l'on exprime en coordonnées cartésiennes :

$$U_{\Delta C_{21}; \Delta S_{21}} = -3 \frac{GMR^2}{r^5} (\Delta C_{21} xz + \Delta S_{21} yz) \quad (\text{E.4})$$

De la même manière que pour ΔC_{20} , en prenant l'opposé du gradient de l'expression précédente, on obtient :

$$\ddot{\vec{r}}_{(\Delta C_{21}; \Delta S_{21})} = 3 \frac{GMR^2}{r^7} \left[\Delta C_{21} \begin{pmatrix} z(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ -5xyz \\ x(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} + \Delta S_{21} \begin{pmatrix} -5xyz \\ z(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{E.5})$$

On remplace alors ΔC_{21} et ΔS_{21} par leurs expressions (voir 4.12) :

$$\ddot{\vec{r}}_{(\Delta C_{21}; \Delta S_{21})} = \frac{3}{2} \frac{Gm_g R^5}{r^7 r_g^5} k_{21} \left[2x_g z_g \begin{pmatrix} z(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ -5xyz \\ x(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} + 2y_g z_g \begin{pmatrix} -5xyz \\ z(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{3}{2} \frac{Gm_g R^5}{r^7 r_g^5} k_{21} [2(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) r^2 \vec{z}_g + 2(\vec{z} \cdot \vec{z}_g) r^2 \vec{\rho}_g - 10(\vec{z} \cdot \vec{z}_g)(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{r}] \quad (\text{E.7})$$

Avec $\vec{r}_g = \vec{r}_1^*$, on retrouve (au facteur $1 + m/M$ près, voir au paragraphe précédent) la deuxième ligne de l'expression 4.13.

E.1.3 Déformations ΔC_{22} et ΔS_{22}

Dans l'expression du potentiel perturbé (voir 4.1), on s'intéresse aux termes ΔC_{22} et ΔS_{22} , que l'on exprime en coordonnées cartésiennes :

$$U_{\Delta C_{22}; \Delta S_{22}} = -3 \frac{GMR^2}{r^5} (\Delta C_{22} (x^2 - y^2) + 2\Delta S_{22}xy) \quad (\text{E.8})$$

De la même manière que pour les paragraphes précédents, en prenant l'opposé du gradient de cette expression, on obtient :

$$\ddot{\vec{r}}_{(\Delta C_{22}; \Delta S_{22})} = 3 \frac{GMR^2}{r^7} \left[\Delta C_{22} \begin{pmatrix} x(-3x^2 + 7y^2 + 2z^2) \\ y(-7x^2 + 3y^2 - 2z^2) \\ -5z(x^2 - y^2) \end{pmatrix} + \Delta S_{22} \begin{pmatrix} 2y(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ 2x(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ -10xyz \end{pmatrix} \right] \quad (\text{E.9})$$

On remplace alors ΔC_{22} et ΔS_{22} par leurs expressions (voir 4.12) :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{(\Delta C_{22}; \Delta S_{22})} &= \frac{3}{2} \frac{Gm_g}{r^7} \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 k_{22} \left[\frac{x_g^2 - y_g^2}{2} \begin{pmatrix} x(-3x^2 + 7y^2 + 2z^2) \\ y(-7x^2 + 3y^2 - 2z^2) \\ -5z(x^2 - y^2) \end{pmatrix} + x_g y_g \begin{pmatrix} 2y(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ 2x(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ -10xyz \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{Gm_g}{r^7} \left(\frac{R}{r_g} \right)^5 k_{22} \left[2r^2 (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{\rho}_g - r^2 \rho_g^2 \vec{\rho} - 5 (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g)^2 \vec{r} + \frac{5}{2} \rho^2 \rho_g^2 \vec{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Avec $\vec{r}_g = \vec{r}_2^*$, on retrouve (au facteur $1 + m/M$ près, voir au paragraphe précédent) la troisième ligne de l'expression 4.13.

E.1.4 Conclusion

On a donc vérifié que l'expression (4.13) est bien cohérente avec les formules (4.12). Cependant, le "modèle" de marées utilisé pour obtenir la solution planétaire DE405 est moins souple d'emploi que celui implémenté dans INPOP. L'avantage d'INPOP est qu'il y a séparation entre les corps générateurs de marées et ceux perturbateurs ; à chaque instant, les coefficients du potentiel de la Terre sont déterminés en tenant compte de la partie rigide et de celle issue des marées solides. Puis on calcule les interactions avec les corps perturbateurs.

Pour DE405, au contraire, il faut calculer les interactions pour chaque couple (générateur, perturbateur). Ce n'est cependant pas trop gênant car on se limite aux interactions entre la déformation de la Terre (due au Soleil et à la Lune, donc 2 corps générateurs de marées) et la Lune (donc un seul corps perturbateur). L'avantage d'INPOP est, pour le même nombre de calculs, de pouvoir prendre en compte les interactions entre la déformation de la Terre (due au Soleil et à la Lune, comme dans DE405) avec la Lune, le Soleil, Vénus et Jupiter (donc 4 corps perturbateurs).

E.2 Effets de marées DE200

Dans le modèle de marées utilisé pour la solution planétaire DE200, seule la Terre est supposée non rigide. Sa déformation n'est générée que par la Lune, et n'interagit qu'avec la Lune. De plus, on suppose que les nombres de Love et les temps de réponse de la Terre dus à la dissipation sont indépendants de l'ordre de l'harmonique : $k_2 = k_{20} = k_{21} = k_{22}$ et $\tau_2 = \tau_{20} = \tau_{21} = \tau_{22}$. On a donc $\vec{r}_g = \vec{r}_0^* = \vec{r}_1^* = \vec{r}_2^*$. Avec ces hypothèses simplifiées, l'expression (4.13) devient :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_{(tide)} = & \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^5} \frac{k_2}{r_g^5} \left[2z_g^2 \vec{z} + \rho_g^2 \vec{\rho} - 5 \frac{(\vec{z} \cdot \vec{z}_g)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \rho_g^2}{r^2} \vec{r} + r_g^2 \vec{r}' \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^5} \frac{k_2}{r_g^5} \left[2 [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{z}_g + (\vec{z} \cdot \vec{z}_g) \vec{\rho}_g] - 10 \frac{(\vec{z} \cdot \vec{z}_g)(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g)}{r^2} \vec{r} \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^5} \frac{k_2}{r_g^5} \left[2(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{\rho}_g - \rho_g^2 \vec{\rho} - 5 \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g)^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \rho_g^2}{r^2} \vec{r} \right] \quad (E.11)
\end{aligned}$$

On suppose ensuite que le déphasage entre \vec{r} et \vec{r}_g n'est dû qu'à la rotation de la Terre sur elle-même, le mouvement de la Lune autour de la Terre étant négligé. Soit ω_T , la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe, on pose alors $\delta = \tau \omega_T$, qu'on appelle angle de déphasage. On a alors :

$$\vec{r}_g = \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (E.12)$$

On en déduit que $\|\vec{r}_g\| = \|\vec{r}\|$, que $\|\vec{\rho}_g\| = \|\vec{\rho}\|$ et que $\vec{z}_g = \vec{z}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_{(tide)} = & \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2z^2 \vec{z} - 5 \frac{z^4}{r^2} \vec{r} + r^2 \vec{r}' \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2 [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{z} + z^2 \vec{\rho}_g] - 10 \frac{z^2 (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g)}{r^2} \vec{r} \right] \\
& + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g) \vec{\rho}_g - 5 \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g)^2}{r^2} \vec{r} \right] \quad (E.13)
\end{aligned}$$

Enfin, δ étant petit (la valeur pour DE200 est de 4.07^{-2} radians), on fait les approximations $\cos \delta \simeq 1$ et $\sin \delta \simeq \delta$. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y\delta \\ y + x\delta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_g = \rho^2 \quad (E.14)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_{(tide)} &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2z^2 \vec{z} - 5 \frac{z^4}{r^2} \vec{r} + r^2 \vec{r} \right] \\
&+ \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2 [\rho^2 \vec{z} + z^2 \vec{\rho}_g] - 10 \frac{z^2 \rho^2}{r^2} \vec{r} \right] \\
&+ \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2\rho^2 \vec{\rho}_g - 5 \frac{\rho^4}{r^2} \vec{r} \right] \\
&= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^{10}} k_2 \left[2r^2 (\vec{z} + \vec{\rho}_g) - 5 \frac{(\rho^2 + z^2)^2}{r^2} \vec{r} + r^2 \vec{r} \right] \\
&= 3 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^8} k_2 [\vec{z} + \vec{\rho}_g - 2\vec{r}] \\
&= -3 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{GmR^5}{r^8} k_2 \begin{pmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{pmatrix} \tag{E.15}
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression (4.14).

Remarque : une telle modélisation est inadaptée pour tenir compte des marées solides exercées sur la Lune. En effet, à cause de ses librations, l'angle de déphasage δ n'est pas constant et oscille autour de 0.

Annexe F

Transformation des coefficients du potentiel par changement de repère

On a vu au chapitre 2 que les coefficients du potentiel d'un corps dépendaient non seulement de la répartition interne des masses, mais également du repère dans lequel ils sont exprimés.

Ainsi, dans le repère des axes principaux d'inertie, la matrice d'inertie est diagonale et les coefficients C_{21} , S_{21} et S_{22} sont nuls. Mais dans un repère qui serait lié à des points de référence à la surface du corps et non aux axes principaux d'inertie (comme l'ITRF pour la Terre par exemple), la matrice d'inertie contiendrait des termes en dehors de la diagonale, et donc les coefficients C_{21} , S_{21} et S_{22} seraient non nuls. Si le corps est rigide, ils seraient cependant constants. Enfin, on peut souhaiter exprimer les coefficients du potentiel d'un solide dans un repère qui ne lui serait pas lié. Cela peut être utile lors du calcul des interactions entre les formes de deux corps (voir le chapitre 7). Dans ce cas, ils varient au cours du temps, même si le solide est considéré comme indéformable.

Dans toute cette partie, on appellera $(C_{nm}^{(1)}, S_{nm}^{(1)})$ les coefficients du potentiel d'un solide exprimés dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}_1 = (\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$. De même, on notera $(C_{nm}^{(2)}, S_{nm}^{(2)})$ ceux exprimés dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}_2 = (\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$. Le but de ce chapitre est de calculer les transformations qui permettent de déterminer $(C_{nm}^{(2)}, S_{nm}^{(2)})$ à partir des $(C_{nm}^{(1)}, S_{nm}^{(1)})$.

F.1 Cas général - coefficients de degré quelconque

Soit P , la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 . Les 3 vecteurs colonnes de P contiennent donc les coordonnées des vecteurs \vec{I}_2 , \vec{J}_2 et \vec{K}_2 dans la base \mathcal{B}_1 :

$$\text{Si } \begin{cases} \vec{I}_2 = I_{2x}\vec{I}_1 + I_{2y}\vec{J}_1 + I_{2z}\vec{K}_1 \\ \vec{J}_2 = J_{2x}\vec{I}_1 + J_{2y}\vec{J}_1 + J_{2z}\vec{K}_1 \\ \vec{K}_2 = K_{2x}\vec{I}_1 + K_{2y}\vec{J}_1 + K_{2z}\vec{K}_1 \end{cases} \text{ alors } P = \begin{pmatrix} I_{2x} & J_{2x} & K_{2x} \\ I_{2y} & J_{2y} & K_{2y} \\ I_{2z} & J_{2z} & K_{2z} \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

Les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 étant orthonormées, la matrice P appartient un groupe orthogonal : $P^{-1} = {}^tP$. Ainsi, si un vecteur \vec{u} a pour coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans \mathcal{B}_1 , ses coordonnées (x_2, y_2, z_2) dans \mathcal{B}_2 sont telles que :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

Des coordonnées cartésiennes (x_i, y_i, z_i) dans la base \mathcal{B}_i , on déduit les coordonnées sphériques $(r_i, \varphi_i, \lambda_i)$ telles que définies en 2.4. Les distances étant invariantes par changement de repère,

on notera $r = r_1 = r_2$. En reprenant l'expression 2.9, les coefficients du potentiel $(C_{nm}^{(i)}, S_{nm}^{(i)})$ dans la base \mathcal{B}_i sont :

$$\begin{pmatrix} C_{nm}^{(i)} \\ S_{nm}^{(i)} \end{pmatrix} = (2 - \delta_{0m}) \frac{1}{MR^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V (r)^n P_{nm}(\sin \varphi_i) \begin{pmatrix} \cos m\lambda_i \\ \sin m\lambda_i \end{pmatrix} dm \quad (\text{F.3})$$

Dans cette expression, on exprime $r^n P_{nm}(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2$ et $r^n P_{nm}(\sin \varphi_2) \sin m\lambda_2$ en fonction des coordonnées cartésiennes (x_2, y_2, z_2) (voir les expressions B.42 pour la correspondance).

Puis on effectue le changement de variable précédent, on obtient des intégrales de fonctions polynômes de (x_1, y_1, z_1) , qu'on identifie aux coefficients du potentiel exprimés dans \mathcal{B}_1 .

F.2 Applications

La matrice P vu dans le paragraphe précédent peut être décomposée en produit de trois rotations élémentaires. C'est le cas si on choisit d'utiliser les angles d'Euler définis au paragraphe 3.1.1. Dans les trois paragraphes qui suivent, on donnera donc les transformations des coefficients du potentiel lors des rotations d'axes \vec{I}_2, \vec{J}_2 ou \vec{K}_2 , et d'angle α .

F.2.1 Rotation d'axe \vec{I}_2 et d'angle α

La base \mathcal{B}_2 est l'image de \mathcal{B}_1 par la rotation d'axe \vec{I}_1 et d'angle α . On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cos \alpha + z_1 \sin \alpha \\ z_2 = -y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

À titre d'exemple, on détaille le calcul de $C_{20}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C_{20}^{(2)} &= \frac{1}{MR^2} \iiint_V \left(z_2^2 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2} \right) dm \\ &= \frac{1}{MR^2} \iiint_V \left(-\frac{x_1^2}{2} + \left(\sin^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right) y_1^2 + \left(\cos^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) z_1^2 - 3yz \cos \alpha \sin \alpha \right) dm \\ &= \frac{1}{MR^2} \iiint_V \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \left(z_1^2 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \right) + \frac{3}{4} (\cos^2 \alpha - 1) (x_1^2 + y_1^2) + \frac{3}{2} \sin 2\alpha (yz) \right) dm \\ &= \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} C_{20}^{(1)} + 3 (\cos^2 \alpha - 1) C_{22}^{(1)} + \frac{3}{2} \sin 2\alpha S_{20}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Remarque : en changeant de variables, on obtient des polynômes homogènes de degré 2 en (x_1, y_1, z_1) . Ces derniers sont au nombre de 6, alors qu'il n'existe que 5 coefficients du potentiel de degré 2. Mais en fait, les termes se combinent de telle manière que leurs intégrales peuvent toujours s'exprimer sous la forme de coefficients du potentiel. Il en est de même pour les coefficients de degrés plus élevés (vérifié formellement jusqu'au degré 12 avec TRIP, le logiciel de calcul formel de Gastineau & Laskar (2010)). Il ne s'agit certainement pas d'une coïncidence et ce résultat est certainement démontrable à un degré quelconque en utilisant des propriétés des polynômes de Legendre.

De la même manière, on obtient pour les autres coefficients du potentiel (pour simplifier, on notera $c_\alpha = \cos \alpha$ et $s_\alpha = \sin \alpha$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20}^{(2)} = \frac{3c_\alpha^2 - 1}{2} C_{20}^{(1)} - 3c_\alpha s_\alpha S_{21}^{(1)} + 3(c_\alpha^2 - 1) C_{22}^{(1)} \\ C_{21}^{(2)} = c_\alpha C_{21}^{(1)} - 2s_\alpha S_{22}^{(1)} \\ S_{21}^{(2)} = c_\alpha s_\alpha C_{20}^{(1)} + (2c_\alpha^2 - 1) S_{21}^{(1)} + 2c_\alpha s_\alpha C_{22}^{(1)} \\ C_{22}^{(2)} = -\frac{s_\alpha^2}{4} C_{20}^{(1)} - \frac{c_\alpha s_\alpha}{2} S_{21}^{(1)} + \frac{2 - s_\alpha^2}{2} C_{22}^{(1)} \\ S_{22}^{(2)} = \frac{s_\alpha}{2} C_{21}^{(1)} + c_\alpha S_{22}^{(1)} \end{array} \right. \quad (\text{F.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{30}^{(2)} = \frac{c_\alpha}{2} (5c_\alpha^2 - 3) C_{30}^{(1)} + \frac{3s_\alpha}{2} (1 - 5c_\alpha^2) S_{31}^{(1)} + 15s_\alpha^3 S_{33}^{(1)} + 15c_\alpha (c_\alpha^2 - 1) C_{32}^{(1)} \\ C_{31}^{(2)} = \frac{5c_\alpha^2 - 1}{4} C_{31}^{(1)} - \frac{15}{2} s_\alpha^2 C_{33}^{(1)} - 5c_\alpha s_\alpha S_{32}^{(1)} \\ S_{31}^{(2)} = \frac{s_\alpha}{4} (5c_\alpha^2 - 1) C_{30}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{4} (15c_\alpha^2 - 11) S_{31}^{(1)} + \frac{15}{2} c_\alpha (c_\alpha^2 - 1) S_{33}^{(1)} + \frac{5}{2} s_\alpha (3c_\alpha^2 - 1) C_{32}^{(1)} \\ C_{32}^{(2)} = \frac{c_\alpha}{4} (c_\alpha^2 - 1) C_{30}^{(1)} + \frac{s_\alpha}{4} (1 - 3c_\alpha^2) C_{31}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{2} (3c_\alpha^2 - 1) C_{32}^{(1)} - \frac{3s_\alpha}{2} (c_\alpha^2 + 1) C_{33}^{(1)} \\ S_{32}^{(2)} = \frac{1}{2} c_\alpha s_\alpha C_{31}^{(1)} + (2c_\alpha^2 - 1) S_{32}^{(1)} + 3c_\alpha s_\alpha C_{33}^{(1)} \\ C_{33}^{(2)} = -\frac{s_\alpha^2}{8} C_{31}^{(1)} - \frac{1}{2} c_\alpha s_\alpha S_{32}^{(1)} + \frac{1}{4} (3c_\alpha^2 + 1) C_{33}^{(1)} \\ S_{33}^{(2)} = -\frac{s_\alpha^3}{24} C_{30}^{(1)} + \frac{1}{8} c_\alpha (c_\alpha^2 - 1) S_{31}^{(1)} + \frac{1}{4} c_\alpha (c_\alpha^2 + 3) S_{33}^{(1)} + \frac{1}{4} s_\alpha (c_\alpha^2 + 1) C_{32}^{(1)} \end{array} \right. \quad (\text{F.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{40}^{(2)} = \frac{1}{8} (35c_\alpha^4 - 30c_\alpha^2 + 3) C_{40}^{(1)} + \frac{5}{2} c_\alpha s_\alpha (3 - 7c_\alpha) S_{41}^{(1)} + \frac{15}{2} (7c_\alpha^4 - 8c_\alpha^2 + 1) C_{42}^{(1)} \\ \quad + 105c_\alpha s_\alpha^3 S_{43}^{(1)} + 105s_\alpha^4 C_{44}^{(1)} \\ C_{41}^{(2)} = \frac{1}{4} (7c_\alpha^2 - 3) C_{41}^{(1)} + \frac{s_\alpha}{2} (3 - 21c_\alpha^2) S_{42}^{(1)} - \frac{63c_\alpha s_\alpha^2}{2} C_{43}^{(1)} + 42s_\alpha^3 S_{44}^{(1)} \\ S_{41}^{(2)} = \frac{c_\alpha s_\alpha}{4} (7c_\alpha^2 - 3) C_{40}^{(1)} - \frac{1}{4} (27c_\alpha^2 - 28c_\alpha + 3) S_{41}^{(1)} + 3c_\alpha s_\alpha (7c_\alpha^2 - 3) C_{42}^{(1)} \\ \quad + \frac{1}{2} (84c_\alpha^4 - 105c_\alpha^2 + 21) S_{43}^{(1)} - 42c_\alpha s_\alpha^3 S_{44}^{(1)} \\ C_{42}^{(2)} = \frac{1}{24} (7c_\alpha^4 - 8c_\alpha^2 + 1) C_{40}^{(1)} + \frac{c_\alpha s_\alpha}{6} (4 - 7c_\alpha^2) S_{41}^{(1)} + \frac{1}{2} (7c_\alpha^4 - 6c_\alpha^2 + 1) C_{42}^{(1)} \\ \quad - 7c_\alpha^3 s_\alpha S_{43}^{(1)} + 7(c_\alpha^4 - 1) C_{44}^{(1)} \\ S_{42}^{(2)} = \frac{s_\alpha}{12} (7c_\alpha^2 - 1) C_{41}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{2} (7c_\alpha^2 - 5) S_{42}^{(1)} - \frac{7s_\alpha}{2} (c_\alpha^2 - 1) C_{43}^{(1)} - 14c_\alpha s_\alpha^2 S_{44}^{(1)} \\ C_{43}^{(2)} = \frac{c_\alpha s_\alpha^2}{8} C_{41}^{(1)} + \frac{s_\alpha}{4} (3c_\alpha^2 - 1) S_{42}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{4} (9c_\alpha^2 - 5) C_{43}^{(1)} - s_\alpha (3c_\alpha^2 + 1) S_{44}^{(1)} \\ S_{43}^{(2)} = -\frac{c_\alpha s_\alpha^3}{24} C_{40}^{(1)} + \frac{1}{24} (4c_\alpha^4 - c_\alpha^2 + 1) S_{41}^{(1)} + \frac{c_\alpha^3 s_\alpha}{2} C_{42}^{(1)} + \frac{1}{4} (4c_\alpha^4 + 3c_\alpha^2 - 3) S_{43}^{(1)} \\ C_{44}^{(2)} = \frac{s_\alpha^4}{192} C_{40}^{(1)} - \frac{c_\alpha s_\alpha^3}{48} S_{41}^{(1)} + \frac{1}{16} (c_\alpha^4 - 1) C_{42}^{(1)} - \frac{c_\alpha s_\alpha}{8} (c_\alpha^2 + 3) S_{43}^{(1)} + \frac{1}{8} (c_\alpha^4 + 6c_\alpha^2 + 1) C_{44}^{(1)} \\ S_{44}^{(2)} = -\frac{s_\alpha^3}{48} C_{41}^{(1)} - \frac{c_\alpha s_\alpha^2}{8} S_{42}^{(1)} + \frac{s_\alpha}{8} (3c_\alpha^2 + 1) C_{43}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{2} (c_\alpha^2 + 1) S_{44}^{(1)} \end{array} \right. \quad (\text{F.8})$$

F.2.2 Rotation d'axe \vec{J}_2 et d'angle α

La base \mathcal{B}_2 est l'image de \mathcal{B}_1 par la rotation d'axe \vec{J}_1 et d'angle α . On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x_2 = x_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = x_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

De la même manière qu'au paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{cases} C_{20}^{(2)} = \frac{3c_\alpha^2 - 1}{2} C_{20}^{(1)} + 3c_\alpha s_\alpha C_{21}^{(1)} + 3s_\alpha^2 C_{22}^{(1)} \\ C_{21}^{(2)} = -c_\alpha s_\alpha C_{20}^{(1)} + (2c_\alpha^2 - 1) C_{21}^{(1)} + 2c_\alpha s_\alpha C_{22}^{(1)} \\ S_{21}^{(2)} = c_\alpha S_{21}^{(1)} + 2s_\alpha S_{22}^{(1)} \\ C_{22}^{(2)} = \frac{s_\alpha^2}{4} C_{20}^{(1)} - \frac{c_\alpha s_\alpha}{2} C_{21}^{(1)} + \frac{c_\alpha^2 + 1}{2} C_{22}^{(1)} \\ S_{22}^{(2)} = -\frac{s_\alpha}{2} S_{21}^{(1)} + c_\alpha S_{22}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

$$\begin{cases} C_{30}^{(2)} = \frac{c_\alpha}{2} (5c_\alpha^2 - 3) C_{30}^{(1)} + \frac{3s_\alpha}{2} (5c_\alpha^2 - 3) C_{31}^{(1)} + 15c_\alpha s_\alpha^2 C_{32}^{(1)} + 15s_\alpha^3 C_{33}^{(1)} \\ C_{31}^{(2)} = \frac{s_\alpha}{4} (1 - 5c_\alpha^2) C_{30}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{4} (15c_\alpha^2 - 11) C_{31}^{(1)} + \frac{5s_\alpha}{2} (3c_\alpha^2 - 1) C_{32}^{(1)} + \frac{15}{2} c_\alpha s_\alpha^2 C_{33}^{(1)} \\ S_{31}^{(2)} = \frac{1}{4} (5c_\alpha^2 - 1) S_{31}^{(1)} + 5c_\alpha s_\alpha S_{32}^{(1)} + \frac{15}{2} s_\alpha^2 S_{33}^{(1)} \\ C_{32}^{(2)} = \frac{1}{4} c_\alpha s_\alpha^2 C_{30}^{(1)} + \frac{s_\alpha}{4} (1 - 3c_\alpha^2) C_{31}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{2} (1 - 3c_\alpha^2) C_{32}^{(1)} + \frac{3s_\alpha}{2} (c_\alpha^2 + 1) C_{33}^{(1)} \\ S_{32}^{(2)} = -\frac{1}{2} c_\alpha s_\alpha S_{31}^{(1)} + (2c_\alpha^2 - 1) S_{32}^{(1)} + 3c_\alpha s_\alpha S_{33}^{(1)} \\ C_{33}^{(2)} = -\frac{1}{24} s_\alpha^3 C_{30}^{(1)} - \frac{1}{8} c_\alpha s_\alpha^2 C_{31}^{(1)} - \frac{1}{4} s_\alpha (c_\alpha^2 + 1) C_{32}^{(1)} + \frac{c_\alpha}{4} (c_\alpha^2 + 3) C_{33}^{(1)} \\ S_{33}^{(2)} = \frac{s_\alpha^2}{8} S_{31}^{(1)} - \frac{1}{2} c_\alpha s_\alpha S_{32}^{(1)} + \frac{1}{4} (3c_\alpha^2 - 1) S_{33}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_{40}^{(2)} = \frac{1}{8} (35c_\alpha^4 - 30c_\alpha^2 + 3) C_{40}^{(1)} + \frac{5}{2} c_\alpha s_\alpha (7c_\alpha^2 - 3) C_{41}^{(1)} - \frac{15}{2} (7c_\alpha^4 - 8c_\alpha^2 + 1) C_{42}^{(1)} \\
\quad + 105c_\alpha s_\alpha^3 C_{43}^{(1)} + 105s_\alpha^4 C_{44}^{(1)} \\
C_{41}^{(2)} = \frac{1}{4} c_\alpha s_\alpha (3 - 7c_\alpha^2) C_{40}^{(1)} + \frac{1}{4} (28c_\alpha^4 - 27c_\alpha^2 + 3) C_{41}^{(1)} + 3c_\alpha s_\alpha (7c_\alpha^2 - 4) C_{42}^{(1)} \\
\quad - \frac{21}{2} (4c_\alpha^4 - 2c_\alpha^2 + 1) C_{43}^{(1)} + 42c_\alpha s_\alpha^3 C_{44}^{(1)} \\
S_{41}^{(2)} = \frac{1}{4} c_\alpha (7c_\alpha^2 - 3) S_{41}^{(1)} \frac{3}{2} s_\alpha (7c_\alpha^2 - 3) S_{42}^{(1)} + \frac{63}{2} c_\alpha s_\alpha^2 S_{43}^{(1)} + 42s_\alpha^3 S_{44}^{(1)} \\
C_{42}^{(2)} = -\frac{1}{24} (7c_\alpha^4 - 8c_\alpha^2 + 1) C_{40}^{(1)} + \frac{1}{6} c_\alpha s_\alpha (4 - 7c_\alpha^2) C_{41}^{(1)} + \frac{1}{2} (7c_\alpha^4 - 6c_\alpha^2 + 1) C_{42}^{(1)} \\
\quad + 7c_\alpha^3 s_\alpha C_{43}^{(1)} + 7(1 - c_\alpha^4) C_{44}^{(1)} \\
S_{42}^{(2)} = \frac{1}{12} s_\alpha (1 - 7c_\alpha^2) S_{41}^{(1)} + \frac{1}{2} c_\alpha (7c_\alpha^2 - 5) S_{42}^{(1)} + \frac{7}{2} s_\alpha (3c_\alpha^2 - 1) S_{43}^{(1)} + 14c_\alpha s_\alpha^2 S_{44}^{(1)} \\
C_{43}^{(2)} = -\frac{1}{24} c_\alpha s_\alpha^3 C_{40}^{(1)} - \frac{1}{24} (4c_\alpha^4 - 5c_\alpha^2 + 1) C_{41}^{(1)} - \frac{1}{2} c_\alpha^3 s_\alpha C_{42}^{(1)} \\
\quad + \frac{1}{4} (3c_\alpha^4 + 3s_\alpha^2) C_{43}^{(1)} s_\alpha c_\alpha (c_\alpha^2 + 3) C_{44}^{(1)} \\
S_{43}^{(2)} = \frac{1}{8} c_\alpha s_\alpha^2 S_{41}^{(1)} + \frac{1}{4} s_\alpha (1 - 3c_\alpha^2) S_{42}^{(1)} + \frac{1}{4} c_\alpha (9c_\alpha^2 - 5) S_{43}^{(1)} s_\alpha (1 + 3c_\alpha^2) S_{44}^{(1)} \\
C_{44}^{(2)} = \frac{1}{192} s_\alpha^4 C_{40}^{(1)} - \frac{1}{48} c_\alpha s_\alpha^3 C_{41}^{(1)} - \frac{1}{16} (c_\alpha^4 - 1) C_{42}^{(1)} \\
\quad - \frac{1}{8} c_\alpha s_\alpha (c_\alpha^2 - 3) C_{43}^{(1)} + \frac{1}{8} (1 + c_\alpha^2)^2 C_{44}^{(1)} \\
S_{44}^{(2)} = -\frac{1}{48} s_\alpha^3 S_{41}^{(1)} + \frac{1}{8} c_\alpha s_\alpha^2 S_{42}^{(1)} - \frac{1}{8} s_\alpha (3c_\alpha^2 + 1) S_{43}^{(1)} + \frac{1}{2} c_\alpha (1 + c_\alpha^2) S_{44}^{(1)}
\end{array} \right. \quad (\text{F.12})$$

F.2.3 Rotation d'axe \vec{K}_2 et d'angle α

La base \mathcal{B}_2 est l'image de \mathcal{B}_1 par la rotation d'axe \vec{K}_1 et d'angle α . On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha \\ y_2 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \\ z_2 = z_1 \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

À ce stade, on pourrait appliquer la même méthode que celle utilisée dans les paragraphes précédents. Mais on peut remarquer que la rotation d'axe \vec{K}_2 et d'angle α laisse l'angle φ_1 inchangé et $\lambda_2 = \lambda_1 - \alpha$. Il est alors plus judicieux de revenir à la définition des coefficients du potentiel 2.9 en coordonnées sphériques, pour obtenir directement :

$$\begin{pmatrix} C_{nm}^{(2)} \\ S_{nm}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\alpha C_{nm}^{(1)} + \sin m\alpha S_{nm}^{(1)} \\ -\sin m\alpha C_{nm}^{(1)} + \cos m\alpha S_{nm}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{F.14})$$

Annexe G

Coefficients des marées océaniques

Le tableau G.1 présente, pour chaque station, les valeurs des amplitudes et phases des ondes de marées océaniques. Conformément aux conventions IERS 2003, elles ont été téléchargées à partir du site www.oso.chalmers.se/~loading. Le modèle choisi est le CSR4.0, avec corrections du géocentre.

TABLE G.1 – Amplitudes et phases pour la prise en compte des marées océaniques selon les stations.

	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Nom	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	Q_1	M_f	M_m	S_{sa}
Mc Donald	$a_{1j} \times 10^3$	2.83	2.02	0.59	0.60	8.18	5.26	2.69	0.94	0.36	0.23	0.22
	$a_{2j} \times 10^3$	0.96	0.86	0.26	0.25	0.81	0.70	0.28	0.16	0.32	0.10	0.21
	$a_{3j} \times 10^3$	2.67	1.04	0.61	0.28	2.80	1.94	0.90	0.46	0.45	0.23	0.14
	ϕ_{1j}	-164.4	-116.6	-151.0	-112.9	52.2	36.6	50.8	34.3	-150.8	-173.8	-177.5
	ϕ_{2j}	4.2	52.5	0.4	52.8	-101.0	-138.6	-101.7	-176.9	-82.8	-67.3	-172.3
	ϕ_{3j}	77.2	81.2	63.9	79.5	-62.3	-72.6	-64.0	-66.4	-8.6	-5.9	-1.7
CERGA	$a_{1j} \times 10^3$	6.89	2.35	1.47	0.61	1.19	2.09	0.40	0.40	0.31	0.10	0.21
	$a_{2j} \times 10^3$	2.86	0.47	0.65	0.10	1.99	1.28	0.66	0.22	0.10	0.01	0.03
	$a_{3j} \times 10^3$	0.93	0.19	0.18	0.05	4.00	2.56	1.30	0.43	0.34	0.15	0.25
	ϕ_{1j}	-84.9	-72.0	-104.7	-73.1	162.8	128.8	164.3	124.9	81.3	84.3	7.4
	ϕ_{2j}	102.5	133.6	81.5	138.6	70.7	42.3	69.1	0.0	-27.2	134.8	4.1
	ϕ_{3j}	59.0	72.0	47.2	81.2	-97.3	-105.4	-99.2	-99.6	53.2	24.4	5.0
Haleakala	$a_{1j} \times 10^3$	16.01	6.08	3.12	1.61	16.92	8.27	5.53	1.46	0.80	0.38	0.54
	$a_{2j} \times 10^3$	1.14	0.80	0.28	0.23	1.45	0.99	0.48	0.14	0.11	0.03	0.11
	$a_{3j} \times 10^3$	5.69	1.98	1.06	0.52	2.37	1.54	0.76	0.37	0.54	0.29	0.13
	ϕ_{1j}	-122.5	-111.8	-131.0	-111.4	57.1	48.8	55.9	52.5	-128.3	-155.4	-174.8
	ϕ_{2j}	169.0	170.2	-176.5	171.1	1.4	-18.4	-1.4	-15.2	-137.1	-81.4	-173.6
	ϕ_{3j}	74.8	97.6	62.6	100.2	-54.4	-54.8	-55.8	-48.7	-14.1	-9.2	-5.3
Apollo	$a_{1j} \times 10^3$	2.65	1.96	0.56	0.58	8.86	5.64	2.90	1.00	0.32	0.20	0.20
	$a_{2j} \times 10^3$	0.95	0.77	0.22	0.23	1.00	0.80	0.35	0.17	0.32	0.10	0.21
	$a_{3j} \times 10^3$	2.95	1.13	0.68	0.31	2.64	1.83	0.85	0.43	0.45	0.23	0.13
	ϕ_{1j}	-166.2	-118.5	-151.1	-114.9	53.4	38.1	51.9	36.1	-145.7	-172.5	-177.1
	ϕ_{2j}	-24.2	41.1	-19.1	43.0	-98.9	-132.5	-100.0	-168.8	-83.7	-68.1	-172.4
	ϕ_{3j}	78.2	83.6	63.9	82.5	-63.4	-73.1	-65.3	-66.6	-10.0	-6.5	-2.1

Annexe H

Paramètres des ajustements

La liste des 188 paramètres pour lesquels les dérivées partielles du temps LLR sont calculées :

- $(\vec{r}_{TL}, \dot{\vec{r}}_{TL})_{J2000}$: conditions initiales (à J2000) du vecteur Terre-Lune
- $(\vec{r}_{EMB}, \dot{\vec{r}}_{EMB})_{J2000}$: conditions initiales (à J2000) du barycentre Terre-Lune par rapport au barycentre du Système solaire
- $(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})_{J2000}$: angles d'Euler de la Lune et leurs dérivées à J2000
- $(\vec{r})_{XI}$: coordonnées sélénocentriques du réflecteur déposé par la mission Apollo XI
- $(\vec{r})_{XIV}$: coordonnées sélénocentriques du réflecteur déposé par la mission Apollo XIV
- $(\vec{r})_{XV}$: coordonnées sélénocentriques du réflecteur déposé par mission Apollo XV
- $(\vec{r})_{L2}$: coordonnées sélénocentriques du réflecteur déposé par la mission Lunakhod 2
- $(\vec{r})_{S1}, (\dot{\vec{r}})_{S1}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station du CERGA
- $(\vec{r})_{S2}, (\dot{\vec{r}})_{S2}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station de Mc Donald
- $(\vec{r})_{S3}, (\dot{\vec{r}})_{S3}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station MLRS1
- $(\vec{r})_{S4}, (\dot{\vec{r}})_{S4}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station MLRS2
- $(\vec{r})_{S5}, (\dot{\vec{r}})_{S5}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station d'émission d'Haleakala
- $(\vec{r})_{S6}, (\dot{\vec{r}})_{S6}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station de réception d'Haleakala
- $(\vec{r})_{S7}, (\dot{\vec{r}})_{S7}$: coordonnées et dérivées ITRF2005 de la station Apollo
- $(C_{n0})_{Terre}$: coefficients du potentiel (zonaux uniquement) de la Terre ($n \leq 4$)
- $(k_{E20}, k_{E21}, k_{E22})$: nombres de Love de degré 2 de la Terre (potentiel)
- $(\tau_{E20}, \tau_{E21}, \tau_{E22})$: temps de déphasages pour la déformation de la Terre
- $(C_{nm}, S_{nm})_{Lune}$: coefficients du potentiel de la Lune ($n \leq 4$)
- $(C/MR^2)_{Lune}$: moment principal d'inertie divisé par la masse et le carré du rayon équatorial moyen de la Lune
- k_{M2} : nombre de Love de degré 2 de la Lune (potentiel)
- τ_M : temps de déphasage dans la déformation de la Lune
- (β, γ) : paramètres post-newtoniens
- h_{M2}, l_{M2} : nombres de Love de la Lune, associés au déplacement de la surface
- μ : rapport des masses entre la Terre et la Lune
- GM_{EMB} : produit de la constante universelle de la gravitation par la somme des masses de la Terre et de la Lune
- $(\Delta T)_{n0}, (\Delta T)_{n1}$: termes constants et pentes des biais ($n \leq 40$)

Annexe I

Lien en corrélation et erreurs formelles ?

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer par deux contre-exemples que de fortes corrélations entre des paramètres n'induisent pas obligatoirement de grandes incertitudes sur la détermination de leurs valeurs. Et inversement, que de faibles corrélations ne garantissent pas de faibles incertitudes.

On considère ici un cas très simple, avec un modèle qui se limite à deux paramètres, dont on cherche à ajuster les valeurs par moindres carrés à un ensemble d'observations. A est la matrice des dérivées des observations par rapport à chacun des paramètres ; ses 2 vecteurs colonnes sont notés \vec{u} et \vec{v} :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vec{u} \\ \vdots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vec{v} \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{I.1})$$

Le produit tAA s'écrit :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} u^2 & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & v^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

On en déduit son déterminant :

$$\det({}^tAA) = u^2v^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad (\text{I.3})$$

Si ce dernier est non nul, on peut calculer l'inverse de tAA :

$$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{u^2v^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \begin{pmatrix} v^2 & -\vec{u} \cdot \vec{v} \\ -\vec{u} \cdot \vec{v} & u^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

On en déduit alors la matrice de corrélation :

$$\text{Cor}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \\ \frac{-\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ c_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

En supposant un bruit de mesure gaussien ϵ sur les données, on déduit les variances des paramètres :

$$\sigma_1^2 = \epsilon^2 \frac{v^2}{u^2v^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2^2 = \epsilon^2 \frac{u^2}{u^2v^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \quad (\text{I.6})$$

Cas d'une forte corrélation et de faibles erreurs formelles

On suppose ici que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont de la forme :

$$\begin{aligned} {}^t\vec{u} &= (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^n, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n^2}) \\ {}^t\vec{v} &= (0, 0, \dots, 0, -1, -1, \dots, -1) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Dans ce cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -n^2$, $u^2 = n(n+1)$ et $v^2 = n^2$. On obtient alors le coefficient de corrélation entre les deux paramètres :

$$c_{12} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad (\text{I.8})$$

De la même manière, on détermine les erreurs formelles (1σ) sur chacun d'eux :

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \text{ et } \sigma_2 = \epsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \quad (\text{I.9})$$

On observe donc que lorsque n tend vers l'infini, c_{12} tend vers 1 alors que les erreurs formelles σ_1 et σ_2 sur les paramètres tendent vers 0. En augmentant le nombre de données, on peut donc avoir à la fois des paramètres aussi fortement corrélés et des erreurs formelles aussi faibles que l'on souhaite.

Cas d'une corrélation nulle et d'importantes erreurs formelles

On suppose ici que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont de la forme :

$$\begin{aligned} {}^t\vec{u} &= (1, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^n) \\ {}^t\vec{v} &= (0, 1, 1, \dots, 1) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Dans ce cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $u^2 = 1$ et $v^2 = n$. On obtient alors le coefficient de corrélation entre les deux paramètres :

$$c_{12} = 0 \quad (\text{I.11})$$

De la même manière, on détermine les erreurs formelles sur chacun d'eux :

$$\sigma_1 = \epsilon \text{ et } \sigma_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad (\text{I.12})$$

On observe ici que malgré la décorrélation entre les paramètres, l'erreur formelle σ_1 sur le premier reste minorée par la qualité des observations. Et si le bruit de mesure est important, la valeur du premier paramètre restera incertaine.

Bibliographie

- Aleshkina, E. Y. 2002, Lunar numerical theory and determination of parameters k_2 , δ_M from analysis of LLR data, *A&A*, 394, 717
- Ashenberg, J. 2007, Mutual gravitational potential and torque of solid bodies via inertia integrals, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 99, 149
- Barker, B. M., & O'Connell, R. F. 1970, Derivation of the Equations of Motion of a Gyroscope from the Quantum Theory of Gravitation, *Phys. Rev. D*, 2, 1428
- Bois, E., & Vokrouhlicky, D. 1995, Relativistic spin effects in the Earth-Moon system., *A&A*, 300, 559
- Bois, E., Wyrzyszczak, I., & Journet, A. 1992, Planetary and figure-figure effects on the moon's rotational motion, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 53, 185
- Boué, G., & Laskar, J. 2006, Precession of a planet with a satellite, *Icarus*, 185, 312
- Boué, G., & Laskar, J. 2009, Spin axis evolution of two interacting bodies, *Icarus*, 201, 750
- Bretagnon, P. 1974, Termes à longues périodes dans le Système solaire, *A&A*, 30, 141
- Bretagnon, P. 1982, Theory for the motion of all the planets - The VSOP82 solution, *A&A*, 114, 278
- Bretagnon, P., & Francou, G. 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables - VSOP 87 solutions, *A&A*, 202, 309
- Bretagnon, P., Francou, G., Rocher, P., & Simon, J. L. 1998, SMART97 : a new solution for the rotation of the rigid Earth, *A&A*, 329, 329
- Bretagnon, P., Rocher, P., & Simon, J. L. 1997, Theory of the rotation of the rigid Earth., *A&A*, 319, 305
- Brumberg, V. A., Bretagnon, P., & Francou, G. 1992, in *Journées 1991 - Systèmes de référence spatio-temporels. Métrologie et Astrométrie*, ed. N. Capitaine, 141–148
- Capitaine, N., Guinot, B., & McCarthy, D. D. 2000, Definition of the Celestial Ephemeris Origin and of UT1 in the International Celestial Reference Frame, *A&A*, 355, 398
- Capitaine, N., Wallace, P. T., & Chapront, J. 2003, Expressions for IAU 2000 precession quantities, *A&A*, 412, 567
- Capitaine, N., Wallace, P. T., & Chapront, J. 2005, Improvement of the IAU 2000 precession model, *A&A*, 432, 355
- Chapront, J., Chapront-Touzé, M., & Francou, G. 2001, in *Journées 2000 - systèmes de référence spatio-temporels. J2000, a fundamental epoch for origins of reference systems and astronomical models*, ed. N. Capitaine, 96–101
- Chapront, J., Chapront-Touzé, M., & Francou, G. 2002, A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements, *A&A*, 387, 700
- Chapront-Touzé, M., & Chapront, J. 1983, The lunar ephemeris ELP 2000, *A&A*, 124, 50
- Chapront-Touze, M., & Chapront, J. 1988, ELP 2000-85 - A semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *A&A*, 190, 342

- Chapront-Touzé, M., Chapront, J., & Francou, G. 2000, in *Journées 1999 - systèmes de référence spatio-temporels / IX. Lohrmann-Kolloquium. Motion of celestial bodies, astrometry and astronomical reference frames*, ed. M. Soffel & N. Capitaine, 217–220
- Cox, C. M., & Chao, B. F. 2002, Detection of a Large-Scale Mass Redistribution in the Terrestrial System Since 1998, *Science*, 297, 831
- Davis, R. S. 1992, Equation for the determination of the density of moist air (1981/91), *Metrologia*, 29, 67
- de Sitter, W. 1916, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper, *MNRAS*, 77, 155
- Eckhardt, D. H. 1981, Theory of the libration of the moon, *Moon and Planets*, 25, 3
- Efron, B. 1987, *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans* (Society for Industrial Mathematics)
- Estabrook, F. B. 1969, Post-Newtonian n-BODY Equations of the Brans-Dicke Theory, *ApJ*, 158, 81
- Fairhead, L., & Bretagnon, P. 1990, An analytical formula for the time transformation TB-TT, *A&A*, 229, 240
- Fienga, A., Laskar, J., Kuchynka, P., Le Poncin-Lafitte, C., Manche, H., & Gastineau, M. 2010, in *IAU Symposium, Vol. 261, IAU Symposium*, ed. S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, 159–169
- Fienga, A., Laskar, J., Morley, T., Manche, H., Kuchynka, P., Le Poncin-Lafitte, C., Budnik, F., Gastineau, M., & Somenzi, L. 2009, INPOP08, a 4-D planetary ephemeris : from asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions, *A&A*, 507, 1675
- Fienga, A., Manche, H., Laskar, J., & Gastineau, M. 2008, INPOP06 : a new numerical planetary ephemeris, *A&A*, 477, 315
- Folkner, W. M., Standish, E. M. and Williams, J. G., & Boggs, D. H. 2007, Planetary and lunar ephemeris DE418, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Folkner, W. M., Williams, J. G., & Boggs, D. H. 2008, The planetary and lunar ephemeris DE421, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Gastineau, M., & Laskar, J. 2010, TRIP 1.1.0, TRIP Reference manual, IMCCE, Paris Observatory, <http://www.imcce.fr/trip/>
- Giacomo, P. 1982, Equation for the Determination of the Density of Moist Air (1981), *Metrologia*, 18, 33
- Goldstein, H. 1950, *Classical mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company)
- Gradstein, F. M., Ogg, J. G., & Smith, A. G. 2005, *A Geologic Time Scale 2004* (Cambridge University Press)
- Hairer, E., Norsett, S. P., & Wanner, G. 1987, *Solving ordinary differential equations I : nonstiff problems* (Springer)
- Irwin, A. W., & Fukushima, T. 1999, A numerical time ephemeris of the Earth, *A&A*, 348, 642
- Johnston, P., & Lambeck, K. 1999, Postglacial rebound and sea level contributions to changes in the geoid and the Earth's rotation axis, *Geophysical Journal International*, 136, 537
- Klioner, S. A. 2008, Relativistic scaling of astronomical quantities and the system of astronomical units, *A&A*, 478, 951
- Klioner, S. A., Gerlach, E., & Soffel, M. H. 2010, in *IAU Symposium, Vol. 261, IAU Symposium*, ed. S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, 112–123
- Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Carranza, E., Sjogren, W. L., & Yuan, D. N. 2001, Recent Gravity Models as a Result of the Lunar Prospector Mission, *Icarus*, 150, 1

- Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Folner, W. M., Karatekin, O., Nunes, D. C., Smrekar, S. E., Yoder, C. F., & Zuber, M. T. 2010, submitted, Mars High Resolution Gravity Fields from MRO, Mars Seasonal Gravity, and Other Dynamical Parameters, *Icarus*
- Konopliv, A. S., Yoder, C. F., Standish, E. M., Yuan, D., & Sjogren, W. L. 2006, A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris, *Icarus*, 182, 23
- Krasinsky, G. A. 2002, Selenodynamical parameters from analysis of LLR observations of 1970-2001, Tech. rep., Institute of Applied Astronomy - Russian Academy of Sciences
- Krasinsky, G. A., Pitjeva, E. V., Sveshnikov, M. L., & Chuniaeva, L. I. 1993, The motion of major planets from observations 1769-1988 and some astronomical constants, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55, 1
- Krasinsky, G. A., Pitjeva, E. V., Vasilyev, M. V., & Yagudina, E. I. 2002, Hidden Mass in the Asteroid Belt, *Icarus*, 158, 98
- Kuchynka, P., Laskar, J., Fienga, A., & Manche, H. 2010, A ring as a model of the main belt in planetary ephemerides, *A&A*, 514, A96+
- Lambeck, K. 1980, *The Earth's variable rotation : Geophysical causes and consequences* (Cambridge University Press)
- Lambeck, K. 1988, *Geophysical geodesy - The slow deformations of the earth* (Oxford Science Publications)
- Lambert, S. 2003, PhD thesis, Observatoire de Paris
- Landau, L., & Lifchitz, E. 1994, *Physique théorique - Mécanique, ellipses* edn.
- Laskar, J. 1985, Accurate methods in general planetary theory, *A&A*, 144, 133
- Laskar, J. 1986, Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory, *A&A*, 157, 59
- Laskar, J. 1989, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system, *Nature*, 338, 237
- Laskar, J. 2005, Note on the Generalized Hansen and Laplace Coefficients, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91, 351
- Laskar, J., & Robutel, P. 1995, Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 193
- Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A. C. M., & Levrard, B. 2004, A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth, *A&A*, 428, 261
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., & Morando, B. 1977, Expressions for the precession quantities based upon the IAU /1976/ system of astronomical constants, *A&A*, 58, 1
- Love, A. E. H. 1927, *A treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge University Press)
- Marini, J. W., & Murray, C. W. 1973, Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees (NASA-TM-X-70555)
- Mathews, P. M., Herring, T. A., & Buffett, B. A. 2002, Modeling of nutation and precession : New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior, *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 107, 2068
- Matsumoto, K., Goossens, S., Ishihara, Y., Liu, Q., Kikuchi, F., Iwata, T., Namiki, N., Noda, H., Hanada, H., Kawano, N., Lemoine, F. G., & Rowlands, D. D. 2010, An improved lunar gravity field model from SELENE and historical tracking data : Revealing the farside gravity features, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 115, 6007
- McCarthy, D. D. 1996, IERS Conventions (1996)., IERS Technical Note, 21
- McCarthy, D. D., & Petit, G. 2004, IERS Conventions (2003) (Verlag des Bundesamts für

Kartographie und Geodäsie)

- Melchior, P. 1979, *The tides of the planet earth*. (Pergamon Press)
- Mignard, F. 1979, The evolution of the lunar orbit revisited. I, *Moon and Planets*, 20, 301
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation* (W.H. Freeman and Co.)
- Moshier, S. L. 1992, Comparison of a 7000-year lunar ephemeris with analytical theory, *A&A*, 262, 613
- Moyer, T. D. 1970, *Mathematical Formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP)*, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Moyer, T. D. 2000, *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation*, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory, [En ligne] http://descanso.jpl.nasa.gov/Monograph/series2/Descanso2_all.pdf
- Müller, J., Williams, J. G., & Turyshev, S. G. 2008, in *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 349, *Lasers, Clocks and Drag-Free Control : Exploration of Relativistic Gravity in Space*, ed. H. Dittus, C. Lammerzahn, & S. G. Turyshev, 457–+
- Newhall, X. X., Standish, E. M., & Williams, J. G. 1983, DE 102 - A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries, *A&A*, 125, 150
- Newhall, X. X., & Williams, J. G. 1997, Estimation of the Lunar Physical Librations, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 66, 21
- Pelat, D. 2002, *Bruits et signaux - Introduction aux méthodes de traitements des données*, Cours de DEA, <http://media4.obspm.fr/public/DEA/supports>
- Pitjeva, E. V. 1993, Experimental testing of relativistic effects, variability of the gravitational constant and topography of Mercury surface from radar observations 1964-1989, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55, 313
- Pitjeva, E. V. 2001, Modern Numerical Ephemerides of Planets and the Importance of Ranging Observations for Their Creation, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80, 249
- Pitjeva, E. V. 2005a, High-Precision Ephemerides of Planets—EPM and Determination of Some Astronomical Constants, *Solar System Research*, 39, 176
- Pitjeva, E. V. 2005b, in *IAU Colloq. 196 : Transits of Venus : New Views of the Solar System and Galaxy*, ed. D. W. Kurtz, 230–241
- Pitjeva, E. V. 2008, in *Journées Systèmes de Référence Spatio-temporels 2007*, 65–+
- Pitjeva, E. V. 2009, in *Journées Systèmes de Référence Spatio-temporels 2008*, 57–+
- Press, W. H., Flannery, B. P., & Teukolsky, S. A. 1986, *Numerical recipes. The art of scientific computing* (Cambridge University Press)
- Rochester, M. G., & Smylie, D. E. 1974, On changes in the trace of the earth's inertia tensor., *J. Geophys. Res.*, 79, 4948
- Roosbeek, F., & Dehant, V. 1998, RDAN97 : An Analytical Development of Rigid Earth Nutation Series Using the Torque Approach, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 70, 215
- Schutz, B. E. 1981, The mutual potential and gravitational torques of two bodies to fourth order, *Celestial Mechanics*, 24, 173
- Seidelmann, P. K. 1992, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac* (University Science Books)
- Simon, J. L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touze, M., Francou, G., & Laskar, J. 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *A&A*, 282, 663
- Soffel, M., Klioner, S. A., Petit, G., Wolf, P., Kopeikin, S. M., Bretagnon, P., Brumberg, V. A., Capitaine, N., Damour, T., Fukushima, T., Guinot, B., Huang, T., Lindgren, L., Ma, C., Nordtvedt, K., Ries, J. C., Seidelmann, P. K., Vokrouhlický, D., Will, C. M., & Xu, C. 2003,

- The IAU 2000 Resolutions for Astrometry, Celestial Mechanics, and Metrology in the Relativistic Framework : Explanatory Supplement, *AJ*, 126, 2687
- Souchay, J., & Kinoshita, H. 1996, Corrections and new developments in rigid earth nutation theory. I. Lunisolar influence including indirect planetary effects., *A&A*, 312, 1017
- Souchay, J., & Kinoshita, H. 1997, Corrections and new developments in rigid-Earth nutation theory. II. Influence of second-order geopotential and direct planetary effect., *A&A*, 318, 639
- Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H., & Folgueira, M. 1999, Corrections and new developments in rigid earth nutation theory. III. Final tables “REN-2000” including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects, *A&AS*, 135, 111
- Standish, E. M. 1998, JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Standish, E. M. 2003a, JPL planetary DE409, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Standish, E. M. 2003b, JPL planetary DE410, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Standish, E. M. 2006, JPL planetary and lunar ephemerides DE414/LE414, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Standish, E. M., Newhall, X. X., Williams, J. G., & Folkner, W. M. 1995, JPL planetary and lunar ephemerides DE403/LE403, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Standish, E. M., & Williams, J. G. 2006, [En ligne] <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/Exp1SupplChap8.pdf>, consulté le 16 juin 2010
- Tapley, B., Ries, J., Bettadpur, S., Chambers, D., Cheng, M., Condi, F., Gunter, B., Kang, Z., Nagel, P., Pastor, R., Pekker, T., Poole, S., & Wang, F. 2005, GGM02 An improved Earth gravity field model from GRACE, *Journal of Geodesy*, 79, 467
- Tapley, B. D., Watkins, M. M., Ries, J. C., Davis, G. W., Eanes, R. J., Poole, S. R., Rim, H. J., Schutz, B. E., Shum, C. K., Nerem, R. S., Lerch, F. J., Marshall, J. A., Klosko, S. M., Pavlis, N. K., & Williamson, R. G. 1996, The Joint Gravity Model 3, *J. Geophys. Res.*, 101, 28029
- Tomassone, R., Audrain, S., Lesquoy-de-Turckheim, E., & Millier, C. 1992, La régression (MASSON)
- Vidyakin, V. V., & Popova, I. G. 1999, Expansion of the force function for the mutual gravitation of two rigid bodies of arbitrary shape in a series of spherical harmonic functions, *Astronomy Reports*, 43, 412
- Wahr, J. M. 1981, The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth., *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 64, p. 705 - 727, 64, 705
- Wallace, P. T. 1996, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 101, *Astronomical Data Analysis Software and Systems V*, ed. G. H. Jacoby & J. Barnes, 207–+
- Williams, J. G. 1984, Determining asteroid masses from perturbations on Mars, *Icarus*, 57, 1
- Williams, J. G. 1994, Contributions to the Earth’s obliquity rate, precession, and nutation, *AJ*, 108, 711
- Williams, J. G. 2008, in 16th International Workshop on Laser Ranging
- Williams, J. G., Boggs, D. H., & Folkner, W. M. 2008, DE421 lunar orbit, physical librations and surface coordinates, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Williams, J. G., Boggs, D. H., Yoder, C. F., Ratcliff, J. T., & Dickey, J. O. 2001, Lunar rotational dissipation in solid body and molten core, *J. Geophys. Res.*, 106, 27933
- Williams, J. G., & Folkner, W. M. 2007, DE418 Moon and lunar coordinates, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Williams, J. G., Newhall, X. X., & Dickey, J. O. 1996, Relativity parameters determined from lunar laser ranging, *Phys. Rev. D*, 53, 6730
- Williams, J. G., Newhall, X. X., Yoder, C. F., & Dickey, J. O. 1997, in *Lunar and Planetary Insti-*

tute Science Conference Abstracts, Vol. 28, Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts, 1555–+

Zhang, C. Z. 1992, Love numbers of the moon and of the terrestrial planets, Earth Moon and Planets, 56, 193