

Université des Sciences et Techniques de Lille

# Introduction à l'Astronomie

Alain Vienne

LAL-IMCCE Laboratoire d'Astronomie de Lille  
de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides  
Lille 1 et Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS.

*janvier 2003*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Méthodes et histoire rapide de l’Astronomie</b>	<b>5</b>
1.1	Méthodes générales de l’Astronomie . . . . .	5
1.2	Les distances dans le système solaire et dans l’Univers . . . . .	6
1.2.1	unités et échelles de distances . . . . .	6
1.2.2	mesures de distances dans le système solaire . . . . .	7
1.2.3	mesure de la distance des étoiles . . . . .	8
1.3	Histoire rapide de l’Astronomie . . . . .	10
1.3.1	période antique (-3000,-1000) . . . . .	10
1.3.2	période géocentrique (-1000,1500) . . . . .	10
1.3.3	période héliocentrique (1500,1780) . . . . .	12
1.3.4	la Galaxie (1780,1920) . . . . .	14
1.3.5	les autres galaxies (après 1920) . . . . .	15
1.3.6	conclusion . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Le problème képlérien</b>	<b>17</b>
2.1	Formulation . . . . .	17
2.2	Résolution du problème de Képler par les intégrales du mouvement . . . . .	20
2.3	Résolution directe dans le plan de l’orbite . . . . .	23
2.4	Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques . . . . .	25
2.5	Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique) . . . . .	28
2.6	Eléments d’orbites . . . . .	32
2.7	Unités utilisées en astronomie . . . . .	34
2.8	Application du problème des 2-corps : Tremplin gravitationnel . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Coordonnées sur la sphère céleste</b>	<b>41</b>
3.1	Trigonométrie sphérique . . . . .	41
3.2	Système de coordonnées sur la sphère . . . . .	44

3.3	Coordonnées locales . . . . .	45
3.4	Mouvement diurne et coordonnées horaires . . . . .	46
3.5	Changement de coordonnées . . . . .	48
3.6	Coordonnées équatoriales et temps sidéral local . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Le mouvement du Soleil</b>	<b>51</b>
4.1	Coordonnées écliptiques . . . . .	51
4.2	Première approximation : . . . . .	52
4.3	Equation du temps : . . . . .	53
4.3.1	partie due à l'excentricité . . . . .	54
4.3.2	partie due à l'obliquité . . . . .	56
4.3.3	Equation du temps . . . . .	56
4.4	Précession . . . . .	60

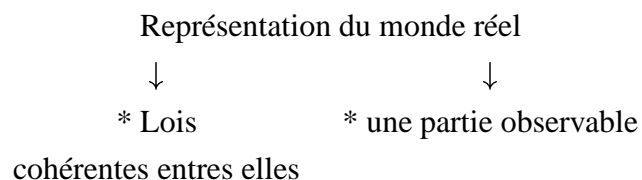
# Chapitre 1

## Méthodes et histoire rapide de l'Astronomie

### 1.1 Méthodes générales de l'Astronomie

L'astronomie est une science très ancienne. Son objet, le ciel, est à la fois très proche et très distant : très proche car il suffit de lever la tête pour l'observer, et très distant car il n'est pas "palpable". Cette particularité en a fait longtemps une science à part. Il n'est pas possible de faire des expériences sur les objets du ciel comme cela peut se faire avec les objets terrestres. De plus, les très grandes distances à considérer ou, du moins (avant que ces distances ne soient connues), l'inaccessibilité des objets à étudier, ont pu donner à l'astronomie un caractère mystérieux quelquefois magique. Cela peut expliquer ses branches non scientifiques qui lui sont quelques fois associées : astrologie, divinations, ...

L'astronomie, en tant que science, se veut une représentation du monde réel :



\* 'vérifié' par l'expérience en laboratoire terrestre

Si ces trois points sont acquis, on peut dire que le modèle est scientifiquement valable. Il permet donc d'expliquer, de faire des prédictions et des extrapolations. Une autre conséquence du schéma présenté est qu'il n'y a pas de vérité scientifique au sens de vérité absolue.

Un modèle dépend :

- des observations ; celles-ci dépendent elles-mêmes des technologies utilisées ; actuellement la quantité d'observations est très grande au point que le problème de gérer cette masse de données est fait dans des centres ou des équipes spécialisés : Centre de Données Stellaires (Strasbourg), Hipparcos, Natural Satellites Data Base (Paris), ...
- du niveau des connaissances théoriques ; il repose sur les mathématiques et les sciences physiques.

**Exercice :** Exemple de la démarche scientifique chez les anciens (Eratostène et Aristarque) : ... ..

## 1.2 Les distances dans le système solaire et dans l'Univers

Les distances considérées en astronomie sont grandes. Mais surtout, ce qui est considéré comme grand à une certaine échelle, pourra être considéré comme petit si on change d'échelle. Les approximations faites ou la compréhension des phénomènes en sont grandement affectées. D'ailleurs, l'histoire de l'astronomie doit être vue en tenant compte de cette caractéristique. Une autre conséquence est qu'une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender toutes les distances.

### 1.2.1 unités et échelles de distances

Le tableau 1.1 est extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes 2002*. On voit déjà que, même en se limitant au système solaire, deux unités de longueur sont utilisées : le rayon équatorial terrestre (6378.14 km) et l'unité astronomique (1ua=149 587 870 km). Au delà du système solaire, on utilise l'année lumière (al) qui est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année. On utilise aussi le parsec (pc, sect. 1.2.3). On a :  $1 \text{ al} = 6.32 \cdot 10^4 \text{ ua} = 0.307 \text{ pc}$ , et  $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua} = 3.26 \text{ al}$ . La plus proche étoile du soleil,  $\alpha$  du Centaure, est à 4.3 al (1.31 pc) du Soleil. Le diamètre de notre galaxie est estimé à environ 100 000 al.

Avec ces données, on peut se faire une idée de la taille de la Terre dans le système solaire et de la taille de celui-ci dans la galaxie. C'est ce que synthétise le tableau 1.2. On pourrait compléter chacune des colonnes mais on se rendrait compte que les nombres obtenus ne sont pas "parlants" : une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender

TAB. 1.1 – Quelques données relatives aux astres principaux du système solaire.

Nom	Demi-grand axe (ua)	Diamètre équatorial (Terre=1)
Mercure	0.3871	0.38
Vénus	0.7233	0.95
Terre	1.0000	1
Mars	1.5237	0.53
Jupiter	5.2026	11.21
Saturne	9.5547	9.45
Uranus	19.2181	4.01
Neptune	30.1096	3.88
Pluton	39.4387	0.19
Lune		0.27
Soleil		109

TAB. 1.2 – Quelques rapports de distances.

	km	RT	ua	al	
rayon de la Terre	6378	1			0.1 mm
rayon du Soleil		109			1.2 cm
Terre-Soleil	149 597 870		1		2.6 m
Soleil-Pluton			39		100 m
$\alpha$ Centaure			272 000	4.3	700 km
diamètre de la galaxie				100 000	16 millions de km

toutes les distances. On peut tenter d’y parvenir en faisant une homothétie de chacune des distances. La dernière colonne du tableau 1.2 donne les résultats obtenus en ramenant le rayon du Soleil à celui d’une pièce d’un euro. On ramène ainsi les distances (à l’exception de la dernière) à des valeurs “humaines” dans le sens où on peut considérer que notre cerveau sait appréhender des distances comprises entre 0.1 mm et 700 km.

### 1.2.2 mesures de distances dans le système solaire

Toutes les mesures de distances faites dans le système solaire sont fondées sur la connaissance des dimensions de la Terre. Ces dernières sont issues de mesures de triangulation et surtout, à l’heure actuelle, de satellites géodésiques (au millimètre près).

La distance Terre-Lune est mesurée par laser à l’aide des 4 réflecteurs laser déposés sur la Lune par les missions Apollo dans les années 70. La précision atteint quelques centimètres.

Les distances de la Terre aux planètes sont données grâce à la Mécanique céleste (gros-

sièrement : les lois de Képler). Les faisceaux radar envoyés sur les planètes permettent aussi de connaître leurs distances. Enfin, les sondes spatiales envoyées pour explorer le système solaire ont été suivies par radio jusqu'à plusieurs dizaines d'unités astronomiques.

### 1.2.3 mesure de la distance des étoiles

#### la parallaxe

On observe à 6 mois d'intervalle une même étoile suffisamment proche. On voit alors cette étoile dans deux directions légèrement différentes. La mesure de ces directions permet de déterminer l'*angle de parallaxe* de l'étoile qui est défini comme *l'angle sous lequel, depuis cette étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre*. L'étoile la plus proche ( $\alpha$  du Centaure) a un angle de parallaxe égal à  $0''76$ .

La parallaxe est à l'origine d'une nouvelle unité de distance –le parsec (ou pc)– qui représente la distance pour laquelle on voit le rayon de l'orbite terrestre (1 ua) sous un angle de  $1''$ . On a donc :

$$1 \text{ parsec} = 206\,264,8 \dots \text{ ua}$$

. Par exemple, la distance de  $\alpha$  du Centaure vaut  $1 / 0,76 = 1,31$  pc. Avec le satellite Hipparcos la précision atteinte sur les mesures de parallaxe est de l'ordre de  $0''002$  ce qui correspond à 500 pc.

Pour des distances plus grandes, on utilise des méthodes indirectes.

#### la luminosité

La *magnitude apparente*  $m$  d'une étoile est définie par :  $m = -2,5 \log_{10}(I/d^2)$  où  $I$  est l'intensité lumineuse de l'étoile et  $d$  sa distance à la Terre. Avec cette échelle logarithmique, on garde la classifications des anciens entre les étoiles de "première grandeur", de "deuxième grandeur", etc ... Ainsi  $m = 0$  pour l'étoile la plus brillante de la constellation de la Lyre (Véga) qui a été prise pour référence et  $m = 5$  est la limite des étoiles visibles à l'œil nu. Avec les grands télescopes actuels, on peut atteindre une magnitude de l'ordre  $+30$ . A l'inverse, le Soleil a une magnitude apparente de  $-27$ .

La *magnitude absolue* est définie comme la magnitude apparente qu'aurait une étoile si on l'observait à une distance  $d_0$  fixée arbitrairement à 10 pc, :

$$M = -2,5 \log_{10}(I/d_0^2)$$

. On a ainsi :

$$M = m - 5 \log_{10} d + 5 \quad \text{où } d \text{ est en pc}$$

. Pour le Soleil,  $M$  vaut 4, 8.

Pour les étoiles proches, celles pour lesquelles on a pu mesurer leur distance par leur parallaxe, on peut calculer  $M$  (puisque que l'on mesure assez facilement  $m$ ). Cela a permis de faire des études astrophysiques qui ont montré, entre autres, que  $M$  est fonction de la température de l'étoile. Cette température peut être déterminée par analyse spectroscopique de la lumière reçue de l'étoile. Cette loi, que l'on visualise sur une figure appelée diagramme H-R (pour Hertzsprung et Russell qui l'ont trouvée en 1910), peut bien sûr s'extrapoler aux étoiles dont on ne connaît pas la distance (au delà de 500 pc). Avec la relation précédente entre  $m$  et  $M$ , on détermine la distance  $d$  de l'étoile. D'autres lois<sup>1</sup> permettent aussi de déterminer  $M$  et donc  $d$ . Ce sont toutes des méthodes indirectes de détermination de distances car elles sont basées au départ sur les mesures de parallaxe. Ces lois peuvent être des lois physiques ou des lois empiriques.

Citons encore un exemple : les Céphéides sont des étoiles dont la luminosité varie intrinsèquement avec une période qui va de de 0,3 à 100 jours ; Leavitt en 1912 a trouvé la relation suivante entre la période  $P$  et la magnitude absolue  $M$  des Céphéides :

$$M = a \log P + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Ces étoiles étant intrinsèquement très lumineuses, elles sont visibles jusqu'à près de 20 Mégaparsec donc au delà même de notre galaxie. Ainsi, Leavitt estima la distance des Nuages de Magellan qui sont des galaxies satellites à la Voie Lactée (notre galaxie) à environ 100 000 pc.

Enfin, pour les galaxies plus lointaines, il y a la loi de Hubble :

$$V_r = H D$$

qui relie la vitesse radiale d'éloignement des galaxies à leur distance. La vitesse radiale est mesurée par l'effet Doppler-Fizeau de la lumière c'est à dire son décalage vers le rouge. Cette loi était empirique au moment de sa découverte par Hubble. Actuellement, on l'explique par une expansion de l'Univers lui-même modélisée par la théorie du "Big-Bang" qui s'appuie sur la relativité générale. Cette loi permet d'estimer les distances jusqu'aux "confins" de l'Univers. Malheureusement la valeur de  $H$ , appelée constante de Hubble, est

---

<sup>1</sup>relation masse-luminosité, parallaxe dynamique, novae, supernovae et rotation des galaxies spirales

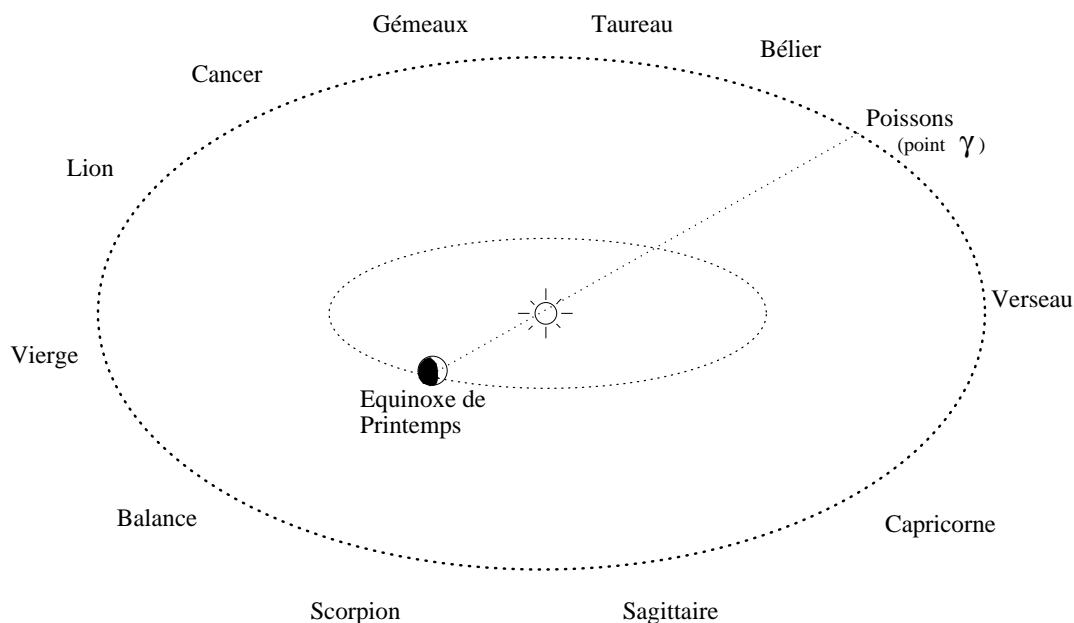


FIG. 1.1 – Mouvement de la Terre autour du Soleil et mouvement apparent du Soleil à travers les constellations.

mal connue (entre 50 et 100 km/s par Mpc). De plus, l'interprétation de la loi de Hubble pour de très grandes distances n'est pas claire : outre une précision de seulement 50% pour chaque distance ainsi déterminée, la valeur elle-même de la distance n'a pas une grande fiabilité.

## 1.3 Histoire rapide de l'Astronomie

### 1.3.1 période antique (-3000,-1000)

Avec l'aide de pyramides, temples ou autres alignements, on observe les positions apparentes de quelques astres seulement : Soleil, la Lune et quelques étoiles brillantes. Le temps est lié au mouvement de rotation de la Terre : le jour est divisé en 12h et la nuit est elle aussi divisée en 12h. Le mouvement de la Terre autour du Soleil est observé par l'apparition des constellations durant la nuit (figure 1.1).

### 1.3.2 période géocentrique (-1000,1500)

Durant cette période, l'astronomie s'est développée principalement autour de la Méditerranée : Grèce ancienne, Afrique du nord et le monde arabe.

Thalès (-600) pense que la Terre est plate et qu'elle flotte sur l'eau sous la sphère céleste.

Pour Pythagore (-530) et Aristote (-355), la Terre est sphérique et tourne autour d'un feu. La Terre est entourée de 10 sphères concentriques en cristal (pureté ?). Ces sphères portent les planètes et les étoiles. Le ciel étant supposé en harmonie, une analogie est faite entre la répartition de ces sphères et la musique ("harmonie des sphères").

Vers la même époque, Eratostène (-250) et Aristarque de Samos (-280) font les premières estimations de distances. Le premier détermine le rayon terrestre, le deuxième les distances Terre-Lune et Terre-Soleil grâce, d'une part, à l'observation des phases et des éclipses de la Lune et, d'autre part, à un modèle héliocentrique du système solaire (voir exercice en 1.1).

Hipparque (-150) a classé 800 étoiles en 6 "grandeurs" (appelées ensuite magnitudes apparentes). C'est le premier "catalogue d'étoiles". Il a découvert la précession des équinoxes, c'est à dire le fait que la position du Soleil à l'équinoxe de printemps (point  $\gamma$ , voir fig. 1.1) dérive lentement de 50" par an dans le ciel dans le sens rétrograde (voir sect. 4.4). Ainsi, le point  $\gamma$  était plus dans la constellation du Bélier en -1000 ; il est actuellement dans la constellation du Poisson.

Ptolémée (+150) rassemble les connaissances de l'époque dans l'*Almageste* et décrit les mouvements (géocentriques) des planètes. Cette description sera utilisée pendant 1300 ans.

**Exercice** : mouvement plan et circulaire de la Terre et d'une planète autour du Soleil : visions géocentrique et héliocentrique.

Al-Battâni (900) mesure précisément la durée de l'année ainsi que l'excentricité de l'orbite du Soleil autour de la Terre.

Ensuite l'Europe entre dans l'"âge noir" de l'astronomie. Il n'y a que dans le monde arabe que l'astronomie fleurit encore.<sup>2</sup> L'*Almageste* est traduit en arabe vers 820. Les mesures des phénomènes astronomiques sont plus précises et collectées en quantité plus importantes. Ces observations seront très utiles ensuite en Europe. D'ailleurs, de nombreux termes astronomiques provenant de l'arabe sont toujours en usage. Outre le mot "Almageste" déjà vu, il y a aussi "zénith", "nadir", "almanac", "Algol", "Aldébaran", "Altaïr", "Bételgeuse", ... et enfin "Algèbre". Les arabes introduisent en effet le système décimal (1,2,3,...), le signe "0" pour zéro et la trigonométrie sphérique (voir Chap. 3). Malheureusement, ils n'ont pas, en astronomie, développé de nouveaux modèles, se contentant

---

<sup>2</sup>Nous n'avons pas considéré ici d'autres civilisations comme la civilisation chinoise, plus lointaines de la nôtre.

d'utiliser ceux issus de la Grèce ancienne.

### 1.3.3 période héliocentrique (1500,1780)

Copernic (1543) propose un modèle héliocentrique pour décrire le mouvement du Soleil et des planètes (voir ex. 1.3.2).

Des progrès en mathématiques sont réalisés : algèbre, table de sinus de  $10''$  en  $10''$  et le logarithme (Neper, 1614).

Tycho Brahé (1575) observe, à l'oeil nu, les planètes et notamment Mars. Il mesure la parallaxe des comètes montrant ainsi que ce sont des phénomènes célestes. Ces observations atteignent la précision de  $1'$ . Logiquement, il garde une vision géocentrique du système solaire car sinon, dit-il, il devrait observer le phénomène de la parallaxe annuelle (sect. 1.2.3).

Képler (1600) qui était l'élève de Tycho Brahé, grâce aux observations de celui-ci, publie ses trois lois (voir Chap. 2). La première dit que la Terre et les planètes décrivent chacune une ellipse dont le Soleil est l'un des deux foyers. La deuxième, appelée aussi "loi des aires", dit que la surface balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps (ou de manière équivalente, que la vitesse aréolaire est constante). La troisième relie le demi-grand axe  $a$  de l'orbite de la planète avec sa période  $T$  de révolution :  $a^3/T^2 = \text{Cste}$ . Ces lois sont purement descriptives. Cela signifie qu'elles sont empiriques, Képler les ayant déduites des observations seules. Elles ont été démontrées plus tard par Newton dans le cadre de sa théorie de la gravitation universelle et avec le principe d'inertie de Galilée.

**Exercice :** En supposant les mouvements de la Terre,  $S$ , et de Mars,  $M$ , coplanaires, circulaires, uniformes et centrés sur le Soleil,  $S$ , chercher une relation entre le rapport des rayons et l'angle  $S$  et  $M$  vu de  $T$  (angle  $\theta = \widehat{STM}$ ) lorsque la longitude (géocentrique) est stationnaire (points  $St$ ).

Galilée (1620) jette les bases de la mécanique en énonçant le principe d'inertie : un corps ne se met pas spontanément en mouvement, ou encore, dans un système isolé le mouvement d'une particule est rectiligne et uniforme. Il manque, pour vraiment développer cette discipline, la définition des forces qui est sous-entendue par ce principe et notamment celle de la gravitation universelle. C'est Galilée qui a eu l'idée de pointer la lunette vers le ciel mettant ainsi en évidence le relief lunaire et les taches solaires. Ces deux observations mettent à mal l'idée, qui a dominé longtemps, d'un ciel qui serait le domaine de la perfection. C'est donc un pas vers l'idée que les lois physiques doivent être

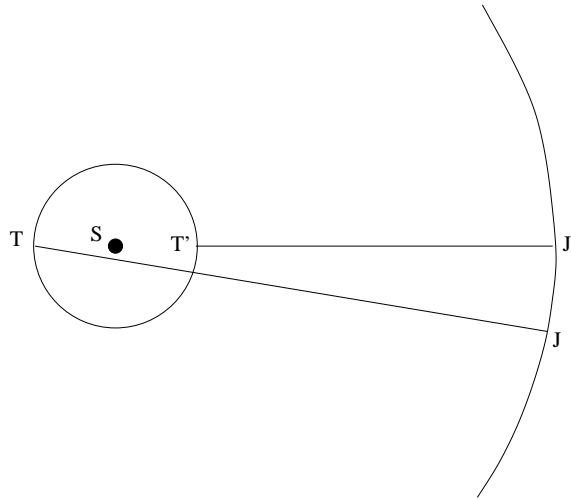


FIG. 1.2 – Mesure de la vitesse de la lumière

universelles. De plus, sa lunette lui a permis de découvrir quatre petits corps qui tournent autour de Jupiter. Ces corps sont appelés depuis les quatre satellites galiléens de Jupiter. Cette découverte renforce la vision de Copernic en montrant qu'il existe des corps qui ne tournent pas autour de la Terre.

En 1667, l'Observatoire de Paris est fondé. C'est le plus ancien observatoire encore en activité. C'est là que Cassini et Picard détermineront précisément le rayon de la Terre. Römer y détermine la vitesse  $c$  de la lumière en observant les occultations des satellites galiléens par Jupiter : si la lumière était instantanée (ie : si  $c$  était  $\infty$ ), les occultations de Io par Jupiter s'observeraient depuis la Terre à intervalles de temps réguliers. Or Römer observe un décalage qui dépend de la position de la Terre par rapport au Soleil (et donc par rapport à Jupiter). Entre les deux positions extrêmes de la figure 1.2, ce décalage est de 998 s. Or  $998 \sim \frac{TT'}{c}$ , donc  $c = \frac{2}{998}$  ua/s, soit environ 300 000 km/s.

L'Observatoire de Greenwich a été fondé en 1676 par Flamsted dans le but de déterminer les longitudes terrestres à usages dans la marine. C'est là que, en 1682, Halley calcule, à l'aide des lois de Képler, les éléments de l'orbite de la comète qui porte son nom. Il prédira ainsi son retour en 1759.

Newton (1687) apporte une pierre fondamentale à l'astronomie et plus généralement à la science en posant les principes d'inertie et d'action-réaction, en introduisant la notion d'accélération et donc de force. Il découvre avec Leibnitz le calcul infinitésimal. Ainsi, avec ces principes, ces outils mathématiques et bien sûr sa fameuse loi de la gravitation universelle, il démontre les lois de Képler. Il va même plus loin, puisqu'il calcule quelques perturbations à ce mouvement képlérien notamment dans les mouvements de la Lune et

de Jupiter. En effet, le mouvement de la Lune et des planètes n'est pas exactement régi par le problème des deux corps dont sont issues les lois de Képler, mais aussi par toutes les interactions mutuelles entre tous les corps composant le système. Il faut encore noter que Newton a décomposé la lumière blanche en un spectre de couleurs. Il a aussi construit le premier télescope.

Maupertuis (1736) avec Bouguer et La Condamine (1740) ont organisé ou participé à des expéditions qui ont permis de calculer l'aplatissement de la Terre aux pôles.

Laplace (1796) publie son fameux traité de Mécanique Céleste. Il discute de la stabilité du système solaire : en limitant les calculs à l'ordre 2 des masses des planètes (qui sont des petites quantités comparées à la masse du Soleil), il montre que les demi-grands axes des orbites des planètes n'ont que de petites variations périodiques. Avec Lagrange (1780), ils précisent ce résultat de stabilité. D'ailleurs Lagrange avec Clairaut (1760) développent la mécanique céleste dont le problème des trois corps. Notons enfin que l'étude de la stabilité du système solaire a été reprise récemment par Laskar (1990). Il a trouvé que le système solaire est stable au sens où les planètes ne peuvent entrer en collision pour des durées de l'ordre de la durée de vie du Soleil (10 milliards d'années). Mais les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars sont quand même affectées par des comportements chaotiques qui empêchent de prédire leurs positions au delà de quelques millions d'années.

### 1.3.4 la Galaxie (1780,1920)

La structure de la Galaxie a pu être comprise grâce à une meilleure connaissance des distances stellaires et donc d'échapper à la seule notion de sphère céleste. Bessel (1838) et Struve (1840) ont mesuré les premières parallaxes terrestres. Ces mesures sont des mesures directes de distances (sect. 1.2.3). Les mesures indirectes de distances basées sur la luminosité intrinsèque des étoiles ont été possibles grâce aux développements de l'astrophysique : le spectre visible de l'hydrogène (Balmer 1885), la théorie d'atmosphère stellaire (Schwarzschild 1890), la loi de rayonnement des corps noirs (Planck 1906) et le diagramme H-R (Hertzsprung et Russell 1910) qui relie température et la luminosité.

Cette période est aussi la période où de grands catalogues d'étoiles sont établis. Citons :

1888        NGC ("New General Catalogue", 12 000 nébuleuses

1890-1924 HD (225 000) étoiles

, puis plus tard :

1940        FK3 (Fundamental Katalog", 33 342 étoiles avec parallaxes, mouvements propres et températures)

Avec ces catalogues, il apparaît clairement que les constellations ne sont que des groupements apparents d'étoiles. On passe d'un modèle de galaxies où le Soleil est au centre, à un modèle où le Soleil est à 30 000 al du centre galactique.

Après la découverte de bras spiraux dans notre galaxie, Lindblad (1920) explique leur présence par la notion d'ondes de densité.

### 1.3.5 les autres galaxies (après 1920)

La construction de nouveaux télescopes (Mont Wilson, 2,5m ; Mont Palomar, 5m) a permis d'observer plus de "nébuleuses". Ces observations, associées à la théorie, permettent de comprendre leur structure.

On a vu (sect. 1.2.3) que Leavitt a établi une relation entre la luminosité intrinsèque et la période des étoiles variables céphéides.

Hubble (1923) découvre une céphéide dans la "nébuleuse" d'Andromède et évalue ainsi sa distance à environ un million d'années lumière : Andromède est donc un objet extragalactique, c'est même une autre galaxie semblable à la notre. Un peu plus tard, en 1929, il découvre que le décalage spectral vers le rouge des galaxies est proportionnel à leur distance. Cette loi s'interprète comme une expansion de l'Univers. Elle permet aussi d'avoir une nouvelle méthode de mesure (indirecte) de distances.

Einstein (1905) publie sa théorie de la relativité restreinte : l'espace de la mécanique est encore un espace euclidien mais sa métrique tient compte de l'invariance de la vitesse de la lumière en associant le temps aux coordonnées spatiales dans un espace à quatre dimensions : l'espace-temps. En 1915, il publie la relativité générale. Cette fois il n'existe plus de repère galiléen ; tous les repères, même en accélération par rapport à un autre, sont équivalents. La topologie de l'espace n'est alors plus euclidienne et dépend de la présence de masses en son sein. La gravitation universelle n'est plus une force en tant que telle mais issue du principe d'inertie : les trajectoires suivent les géodésiques<sup>3</sup> de l'espace-temps qui est déformé par la présence des masses.

Cette théorie est à la base du modèle actuel d'Univers avec lequel Gamov (1948) a prédit l'existence du rayonnement fossile du "Big-Bang". Ce rayonnement a été observé en 1976 par Penzias et Wilson. Ce modèle donne une explication à l'expansion de l'Univers observée par Hubble.

---

<sup>3</sup>Les géodésiques sont les courbes qui minimisent la distance d'un point à un autre. Les géodésiques d'un espace euclidien sont les droites, celles de la sphère sont les grands cercles (voir 3.1 du chapitre 3).

### **1.3.6 conclusion**

On a vu dans ce chapitre la manière dont sont évaluées les distances et aussi un survol de l'histoire de l'astronomie. On s'est ainsi rendu compte que la structure de l'Univers est faite de structures imbriquées :

- rotation de la Terre qui explique les mouvements diurnes des astres
- révolution de la Terre autour du Soleil puis le système solaire
- la galaxie
- l'Univers

# Chapitre 2

## Le problème képlérien

### 2.1 Formulation

On se donne un repère galiléen défini par le repère orthonormé suivant :  $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$ .

#### le problème de 1-corps

Soit  $M$  une particule matérielle de masse  $m$  et de coordonnées  $M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$  qui subit une force centrale attractive (ie : dirigée vers  $O$ ) proportionnelle à  $\frac{1}{OM^2}$  et à  $m$ , c'est à dire :

$$\vec{F} = -KM \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

où  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  et,  $K$  et  $M$  sont des constantes. Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -KM \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Si la masse  $m$  est non nulle, on peut simplifier :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{KM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

En fait le problème de 1-corps n'a pas un sens physique très rigoureux. Il ne vérifie pas, par exemple, le principe d'action et de réaction : le point  $O$  devrait lui aussi subir une force et n'est donc plus l'origine d'un repère galiléen. Ce problème est donc plutôt académique. Nous l'avons présenté car sa formulation est très simple, et surtout, parce que le problème

physique des deux corps peut se ramener à cette formulation.

## le problème des deux corps

Soient maintenant deux points  $M_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$  et  $M_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Ces deux particules matérielles s'attirent selon la loi de Newton :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{r} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $r = M_1 M_2$  est la distance mutuelle et  $K$  la constante de gravitation universelle. (2.2) est un système différentiel d'ordre 2 avec 6 degrés de liberté. La résolution de ce problème d'ordre 12 nécessite donc d'introduire 12 constantes d'intégration arbitraires.

En ajoutant les deux équations de (2.2), on obtient  $\frac{d^2(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2})}{dt^2} = \vec{0}$ . En introduisant le point  $G$  centre de gravité de  $M_1$  et  $M_2$  et si  $m_1 + m_2 \neq 0$ , cette dernière expression devient  $\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0}$ . Le mouvement de  $G$  est donc rectiligne et uniforme. Sur les 12 constantes arbitraires, 6 définissent ce mouvement (3 pour la position initiale de  $G$ , et 3 sa vitesse).

Le point  $O$  du repère :  $\mathcal{R}_O = (Oxyz)$  peut ainsi être pris en  $G$ . En utilisant  $\overrightarrow{M_2 M_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \overrightarrow{GM_1}$  et  $\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_1}}{(GM_1)^3} \\ \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_2}}{(GM_2)^3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour pouvoir écrire la première équation, on a simplifié les deux membres de l'égalité par  $m_1$ . Cela signifie que  $m_1$  doit être non nulle. De la même manière  $m_2$  doit être elle aussi non nulle.

### remarque 1

Il n'est nécessaire de résoudre que l'une ou l'autre des deux équations car, par exemple, le mouvement de  $M_2$  se déduit de celui de  $M_1$  par  $\overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1}{m_2} \overrightarrow{GM_1}$ .

**remarque 2**

D'après (2.3) et (2.1), le problème des 2-corps est équivalent à 2 problèmes de 1-corps où le centre attractif serait  $G$  dont la masse  $M = \frac{m_i^3}{(m_1+m_2)^2}$  pour  $i = 1, 2$ .

Le point  $G$  n'est pas un point physique dans le sens où il ne s'observe pas mais se calcule. C'est le mouvement relatif de  $M_1$  autour de  $M_2$  qui est observé :

En soustrayant les deux équations de (2.2), toujours après avoir simplifié les deux membres de l'égalité par  $m_1$  ou  $m_2$ , on obtient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_2 M_1}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{(M_2 M_1)^3} \quad (2.4)$$

Si  $M_1$  est une planète et si  $M_2$  est le Soleil, on dit qu'on a "jeté" la planète dans le Soleil : on suppose que le Soleil est fixe de masse  $(m_1 + m_2)$  et que la planète est de masse nulle. On s'est ainsi ramené au problème de 1-corps.

**le problème képlérien**

(2.1), (2.3) et (2.4) peuvent s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}} \quad (2.5)$$

où  $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$  et  $\mu > 0$ . C'est le problème de Képler.

en résumé :

$$\begin{array}{ll} \text{problème de 1-corps :} & \vec{r} = \overrightarrow{\odot A} \quad \text{où } \odot = \text{Soleil de masse } M_{\odot} \\ & \mu = K M_{\odot} \quad A = \text{Astéroïde ou une sonde} \\ & \quad \quad \quad \text{de masse négligeable} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{problème des 2-corps :} & \odot = \text{Soleil de masse } M_{\odot} \\ & P = \text{planète de masse } m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} = \overrightarrow{GP} & \swarrow \searrow & \vec{r} = \overrightarrow{\odot P} \\ & \text{ou} & \\ \mu = K \frac{M_{\odot}^3}{(M_{\odot} + m)^2} & & \mu = K(M_{\odot} + m) \\ & & = K M_{\odot} \left(1 + \frac{m}{M_{\odot}}\right) \end{array}$$

Les exemples donnés ici sont ceux du système solaire mais il existe d'autres exemples comme celui d'un système d'étoiles doubles.

Nous avons déjà noté que les masses ne peuvent être nulles. Si elles l'étaient, nous n'aurions pu décrire physiquement le système et nous n'aurions donc pu aboutir au système (2.5). Cependant, sans être nulle, une masse peut être négligeable. Si la masse d'une sonde peut être de quelques tonnes, le Soleil lui a une masse d'environ  $2 \cdot 10^{30}$  kg. On pourrait aussi vouloir considérer des masses nulles par un simple passage à la limite : en effet, les trois formulations rappelées ci-dessus deviennent identiques si on fait  $m \rightarrow 0$ . Mais si le passage à la limite a un sens mathématique clair, il n'a pas, ici, de sens physique. D'ailleurs, il est bien connu que le mouvement d'un photon dans un champ gravitationnel ne peut être décrit dans ce cadre. C'est pourquoi nous préférons l'expression de "masse négligeable" plutôt que celle de "masse nulle".

## 2.2 Résolution du problème de Képler par les intégrales du mouvement

Nous allons utiliser les intégrales du mouvement pour trouver les trajectoires de l'équation (2.5). Ces intégrales sont connues par "invariance de moment cinétique", "intégrale de l'énergie" et "intégrale de Laplace". En fait, les deux premières expressions seront utilisées ici par abus de langage. En toute rigueur, elles sont impropres car les intégrales correspondantes seront données à un facteur de masse près.

## 2.2. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE KÉPLER PAR LES INTÉGRALES DU MOUVEMENT 21

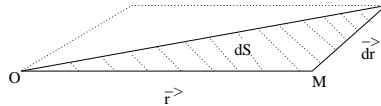
\*

On a la relation suivante qui est vraie pour toute force centrale :  $\vec{r} \wedge \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{0}$ , que l'on peut encore écrire  $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{0}$ , c'est à dire :

$$\boxed{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{G} \quad (\text{Cste})} \quad \text{invariance du moment cinétique} \quad (2.6)$$

Les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  seront donc toujours orthogonaux à  $\vec{G}$ . Ce qui signifie que, si  $\vec{G} \neq \vec{0}$ , le mouvement se fait dans le plan passant par le point  $O$  et orthogonal à  $\vec{G}$ .

De plus, si on note  $dS$  l'élément d'aire parcouru par le rayon vecteur  $\vec{r}$  pendant l'élément de temps  $dt$ ,



on a  $Gdt = 2dS$  puisque  $\|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\| = Gdt$ . Ce qui donne la loi des aires :  $\frac{dS}{dt} = G/2$  ( $=\text{Cste}$ ). Ainsi, l'orientation de  $\vec{G}$  indique le plan du mouvement et son module donne la loi des aires. Si  $\vec{G} = \vec{0}$ , le mouvement est rectiligne et porté par la direction commune de  $\vec{r}$  et  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ .

\*

En remarquant que  $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left( \frac{\mu}{r} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$ , où  $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$  correspond à l'opérateur  $\overrightarrow{\text{Grad}}$  qui est un opérateur de dérivation, et en multipliant l'expression (2.5) par  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left( \frac{\mu}{r} \right) &= 0 \\ \text{ou encore } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

En notant  $v$  la vitesse (ie :  $v = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$ ), on a  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0$ . Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad (\text{cste})} \quad \text{intégrale de l'énergie} \quad (2.7)$$

Si  $h$  est négatif alors  $r$  est borné et le corps ne peut s'éloigner à l'infini. Inversement,

si on suppose que le corps peut s'éloigner à l'infini (c'est à dire si  $r \rightarrow \infty$ , et dans ce cas  $h$  doit être positif) alors  $\sqrt{2h}$  représente la "vitesse à l'infini".

\*

Avec (2.5) et (2.6), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \wedge \vec{G} \\ &= -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \left( \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \end{aligned}$$

En remarquant que  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( r \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{dr}{dt} \frac{\vec{r}}{r} + r \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right) &= -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \left( \vec{r} \wedge \left( \frac{dr}{dt} \frac{\vec{r}}{r} + r \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \right) \right) \\ &= -\mu \frac{\vec{r}}{r^2} \wedge \left( \vec{r} \wedge \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \right) \end{aligned}$$

Or on sait que  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$  et comme  $\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0$  (la norme de  $\frac{\vec{r}}{r}$  est constante), il reste :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e} \quad (\text{cste})} \quad \text{intégrale de Laplace} \quad (2.8)$$

Sur les trois constantes scalaires de ce vecteur une seule est arbitraire car il existe 2 relations qui lient  $\vec{e}$  aux intégrales précédentes. La première indique simplement que  $\vec{e}$  doit nécessairement appartenir au plan du mouvement car  $\vec{e} \cdot \vec{G} = 0$ . La deuxième le lie à  $h$ , en effet :

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \left( \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}}{\mu} \right)^2 - 2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left( \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}}{\mu} \right) + 1$$

on a ainsi :

$$e^2 - 1 = \frac{v^2 G^2}{\mu^2} - \frac{2}{r\mu} (\vec{G} \cdot (\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt})) = h \frac{2G^2}{\mu^2}$$

, d'où la relation :

$$h = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2G^2}$$

Ainsi le seul paramètre arbitraire est celui qui caractérise l'orientation de  $\vec{e}$  dans le plan du mouvement.

Si on calcule  $\vec{e} \cdot \vec{r}$ , on a :

$$\frac{\vec{r} \cdot \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right)}{\mu} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e} \cdot \vec{r} \quad \text{ou encore} \quad \frac{(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) \cdot \vec{G}}{\mu} - r = \vec{e} \cdot \vec{r}$$

on obtient :

$$r + \vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{G^2}{\mu} \quad (2.9)$$

remarque : si  $G = 0$  alors (2.8) donne simplement  $\vec{e} = -\frac{\vec{r}}{r}$ . Le mouvement est donc rectiligne et porté par  $\vec{e}$  et (2.9) est seulement une identité.

Si  $G \neq 0$  et si  $e \neq 0$ , la direction de  $\vec{e}$  représente la direction pour laquelle  $r$  est minimum. Ce point de minimum de distance est appelé péricentre (ou périhélie si le point  $O$  est le Soleil, périégée si  $O$  est la Terre, ...).

Nous allons prendre cette direction particulière comme premier axe d'un nouveau repère orthonormé. Soit le repère  $(O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$  avec  $\vec{u}_0 = \frac{\vec{e}}{e}$  et  $\vec{v}_0 = \frac{\vec{G}}{G} \wedge \vec{u}_0$ .  $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$  représente le plan du mouvement. Si on note par  $W$  l'angle entre  $\vec{u}_0$  et  $\vec{r}$ ,  $(r, W)$  sont les coordonnées polaires de  $M$  dans  $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$  et (2.9) devient :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec} \quad p = G^2/\mu \quad (2.10)$$

qui est l'équation d'une conique de foyer  $O$ , de paramètre  $p$ , d'excentricité  $e$ , d'axe de symétrie  $(Ou_0)$ .

## 2.3 Résolution directe dans le plan de l'orbite

On doit d'abord savoir que le mouvement est plan. Dans ce plan, on repère alors  $M$  par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . L'intégrale des aires est :

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \left( \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = \vec{G}$$

d'où :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = G \quad (2.11)$$

On a aussi besoin de l'intégrale de l'énergie :

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}$$

Puisque  $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1$ ,  $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r$  et que  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \perp \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ , on peut écrire :

$$v^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

éliminons  $dt$  par (2.11), c'est à dire  $dt = \frac{r^2}{G} d\theta$  :

$$v^2 = G^2 \left[ \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

En posant  $u = \frac{1}{r}$  (et donc  $du = -u^2 dr$ ), on obtient :

$$v^2 = G^2 \left[ u^4 \left( \frac{du}{-u^2 d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

On en déduit la *première formule de Binet* :

$$v^2 = G^2 \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

En substituant cette expression dans  $h$ , on a :

$$\frac{G^2}{2} \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - \mu u = h$$

On dérive cette expression par rapport à  $\theta$  :

$$G^2 \left( u \frac{du}{d\theta} + \frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \mu \frac{du}{d\theta} = 0$$

, ce qui donne la *deuxième formule de Binet* :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{G^2} \quad (2.13)$$

## 2.4. LES MOUVEMENTS ELLIPTIQUES, PARABOLIQUES ET HYPERBOLIQUES 25

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. Les solutions peuvent s'écrire :

$$u = \frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha) \quad , \text{ soit encore } r = \frac{1}{\frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha)}$$

$\lambda$  et  $\alpha$  étant des constantes réelles arbitraires. En posant  $p = G^2/\mu$  et  $e = \lambda G^2/\mu$ , on a :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad (2.14)$$

Remarque :  $\alpha$  représentant la direction du péricentre.

## 2.4 Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques

En coordonnées polaires dans un repère  $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$  où  $(O\vec{u}_0)$  est la direction du péricentre on a la formule (2.10) que l'on rappelle :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec } p = G^2/\mu$$

$W$  est appelée anomalie vraie.

On a bien évidemment :

$$1 - e \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

Il faut donc discuter suivant la nature de la conique.

– Si  $e < 1$ , la trajectoire est une ellipse (si  $e = 0$ , c'est un cercle et  $(O\vec{u}_0)$  est choisi arbitrairement) et :

$$r_m = \frac{p}{1 + e} \leq r \leq r_M = \frac{p}{1 - e}$$

Ainsi  $r_m$  est atteint pour  $W = 0$ , et  $r_M$  pour  $W = \pi$ . Si on note  $2a$  la distance entre le péricentre et l'apocentre,  $2a = r_m + r_M$  ( $a$  est appelé le demi-grand axe) et on a

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) \\ r_m &= a(1 - e) \\ r_M &= a(1 + e) \end{aligned} \quad (2.15)$$

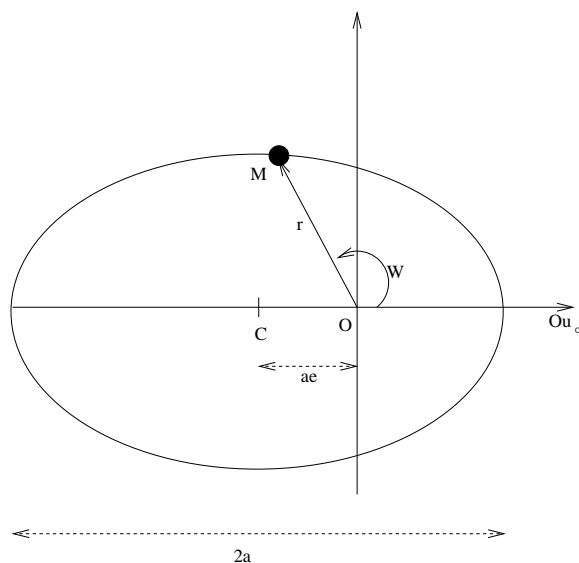


FIG. 2.1 – Ellipse du mouvement képlérien

– Si  $e > 1$ , la trajectoire est une hyperbole et on a :

$$0 \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

et donc :

$$\frac{p}{1+e} \leq r (\leq +\infty)$$

La limite  $\infty$  correspond à  $1 + e \cos W = 0$ , c'est à dire quand  $W$  tend vers l'angle  $W_\infty = +\arccos(-1/e)$  ou vers l'angle  $-W_\infty$ . On utilisera plutôt l'angle  $\delta$ , appelé angle de déviation puisqu'il correspond à la déviation angulaire d'un corps qui a mouvement (presque) rectiligne et uniforme et qui retourne, après avoir interagit avec un autre corps, sur un autre mouvement (presque) rectiligne et uniforme.  $\delta$  est lié à  $W_\infty$  par  $\delta = \pi - 2(\pi - W_\infty)$ , soit :

$$\delta = 2W_\infty - \pi \quad (2.16)$$

La branche de l'hyperbole en pointillés serait la courbe parcourue par  $M$  si  $p$  était négatif, c'est à dire si  $\mu < 0$  (répulsion). On peut encore noter  $2a$  la distance entre le péricentre et "l'apocentre" (ici le symétrique du péricentre par rapport à  $C$ ), d'où

$$2a = -\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} = \frac{p(1+e) + p(1-e)}{e^2 - 1}$$

## 2.4. LES MOUVEMENTS ELLIPTIQUES, PARABOLIQUES ET HYPERBOLIQUES 27

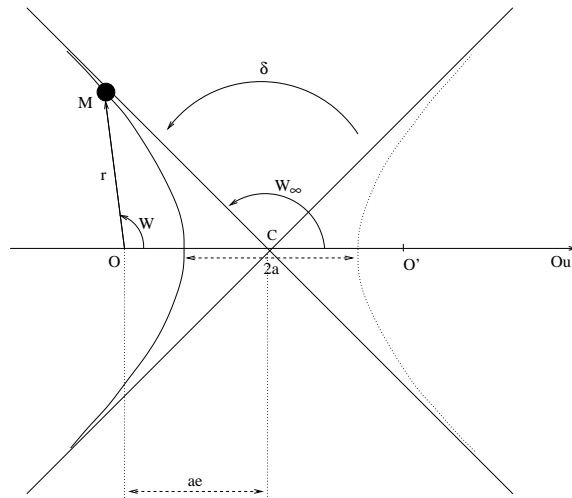


FIG. 2.2 – Hyperbole du mouvement képlérien

soit encore :

$$\begin{aligned} p &= a(e^2 - 1) \\ r_m &= a(e - 1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

- Si  $e = 1$ , la trajectoire est une parabole on a  $\frac{p}{2} \leq r (\leq +\infty)$ . On ne peut définir dans ce cas de demi-grand axe. La parabole est un cas limite entre l'ellipse et l'hyperbole. On peut se la représenter mentalement comme une ellipse dont le deuxième foyer (et donc l'apocentre ou même le centre  $C$ ) est rejeté à l'infini<sup>1</sup>.

On a vu que  $h = (e^2 - 1)\mu/p$ , d'où :

$$\left\| \begin{aligned} h &= -\frac{\mu}{2a} && \text{pour le cas elliptique} \\ h &= 0 && \text{pour le cas parabolique} \\ h &= +\frac{\mu}{2a} && \text{pour le cas hyperbolique} \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

C'est donc le signe de  $h$  qui caractérise la nature de la conique et  $|h|$  caractérise sa taille. Cette formule (2.18) est importante car avec l'intégrale de l'énergie (2.7), elles permettent de résoudre très facilement quelques petits problèmes comme ceux liés aux calculs de la vitesse de libération, la vitesse circulaire.

**Exercice :** vitesse de libération, vitesse de satellisation, nuage de Oort,

<sup>1</sup>Réciproquement, on peut aussi imaginer une "hyperbole limite" même si c'est plus difficile. Le deuxième foyer est rejeté à l'infini et donc aussi la deuxième branche.  $W_\infty$  tend vers  $\pi$  mais le centre  $C$  étant rejeté à l'infini, cela "donne" une branche parabolique de direction asymptotique ( $Ou_0$ ).

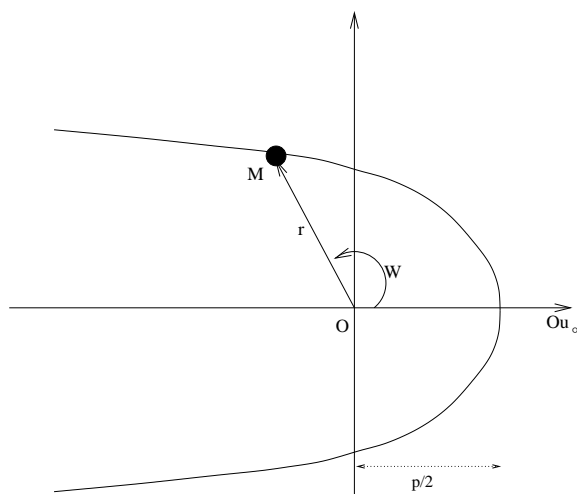


FIG. 2.3 – Parabole du mouvement képlérien

...

On a ainsi vu 5 constantes arbitraires (pour  $\vec{G} \neq \vec{0}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{G} \quad (3) \\ \vec{e} \quad (2) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} \vec{G} & (3) \\ h & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} \text{direction de } \vec{G} & (2 \text{ angles}) \\ a & (1) \\ e & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right.$$

La sixième constante arbitraire est issue du mouvement sur la trajectoire que nous allons voir dans la section suivante.

## 2.5 Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique)

La trajectoire est définie par :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos W} \text{ avec } e < 1$$

, et le mouvement sur la trajectoire est donné par la loi des aires :

$$r^2 dW = G dt \text{ où } G^2 = \mu p = a(1 - e^2)\mu$$

En définissant  $t_p$  comme étant l'instant de passage au péricentre (ie : en  $t = t_p, W = 0$ ),

on obtient :

$$\int_0^W r^2 dW = G(t - t_p)$$

soit encore :

$$I = \int_0^W \frac{dW}{(1 + e \cos W)^2} = [a(1 - e^2)]^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p)$$

Calculons  $I$ . Pour ramener l'expression à celle d'une fraction rationnelle, on doit poser :

$$X = \tan \frac{W}{2}, \text{ d'où}$$

$$\frac{dW}{dX} = \frac{2}{1 + X^2} \text{ et } \cos W = \frac{1 - X^2}{1 + X^2}$$

On obtient donc<sup>2</sup> :

$$I = \int_0^X \frac{2(1 + X^2)dX}{[(1 + X^2) + e(1 - X^2)]^2}$$

Pour intégrer une fraction rationnelle, il est souvent judicieux de la décomposer en éléments simples. Celle-ci est déjà un élément "simple" car l'expression dans le crochet  $(1 - e)X^2 + (1 + e)$  est non nul. On pose donc

$$Y^2 = \frac{1 - e}{1 + e} X^2 \text{ afin que le crochet devienne } (1 + e)(1 + Y^2)$$

Puisque

$$Y dY = \frac{1 - e}{1 + e} X dX \text{ et } 1 + X^2 = 1 + \frac{1 + e}{1 - e} Y^2$$

, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^Y \frac{2[(1 - e) + (1 + e)Y^2] \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}}{(1 - e)(1 + e)^2(1 + Y^2)^2} dY \\ &= \frac{2}{(1 - e)^{3/2}(1 + e)^{3/2}} \left[ \int_0^Y \frac{dY}{1 + Y^2} - e \int_0^Y \frac{1 - Y^2}{(1 + Y^2)^2} dY \right] \end{aligned}$$

Il suffit de poser  $Y = \tan \frac{E}{2}$  pour avoir simplement :

$$I = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \left[ \int_0^E dE - e \int_0^E \cos E dE \right]$$

<sup>2</sup>Mathématiquement la notation  $\int_0^X f(X)dX$  n'a pas de sens. Il faudrait utiliser une autre notation pour le  $X$  de l'une des deux bornes de l'intégrale ce qui alourdirait beaucoup les notations.

On a ainsi :

$$a^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p) = E - e \sin E$$

Il est commode de poser

$$n = a^{-3/2} \sqrt{\mu} \text{ et } M = n(t - t_p)$$

$M$  est un angle et  $n$  une vitesse angulaire appelée moyen mouvement. En un instant  $t + \frac{2\pi}{n}$ ,  $M$  augmente de  $2\pi$ . Or  $M = E - e \sin E$ , donc  $E$  augmente de  $2\pi$ . Et puisque  $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ ,  $W$  augmente aussi de  $2\pi$ . On en déduit que  $r$  est périodique de  $W$ ,  $E$  et  $M$  de période  $2\pi$ . De plus  $W$ ,  $E$  et  $M$  s'annulent en même temps en  $t = t_p$ . Le mouvement est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{n}$  et on a la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = \mu \text{ ou } \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (2.19)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos W} && W \text{ est l'anomalie vraie} \\ \text{(b)} \quad \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} && E \text{ est l'anomalie excentrique} \\ \text{(c)} \quad M &= n(t - t_p) && M \text{ est l'anomalie moyenne} \\ \text{(d)} \quad n^2 a^3 &= \mu \\ \text{(e)} \quad M &= E - e \sin E && \text{équation de képler} \end{aligned} \quad (2.20)$$

De cette manière si les éléments d'orbite sont donnés<sup>3</sup> et si  $\mu$  est donné alors, à une date  $t$ , on calcule :

$M$  par (c),  $n$  étant donné par (d)

$E$  en résolvant l'équation de Képler (e)

$W$  par (b)

$r$  par (a)

---

<sup>3</sup>soit la position du plan de l'orbite, la direction du périastre, l'excentricité, le demi-grand axe et  $t_p$ .

Au lieu de calculer  $r$  et  $W$ , on peut vouloir les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= r \cos W \\ y &= r \sin W \end{aligned}$$

ainsi que  $\frac{dx/dt}{dy/dt}$ .

$$\begin{aligned} \cos W &= \frac{1 - X^2}{1 + X^2} = \frac{1 - \frac{1+e}{1-e}Y^2}{1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2} = \frac{(1-e) - (1+e)Y^2}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \frac{(1-Y^2) - e(1+Y^2)}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin W &= \frac{2X}{1 + X^2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{Y}{1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \end{aligned}$$

$$1 + e \cos W = \frac{(1 - e \cos E) + (e \cos E - e^2)}{1 - e \cos E} \Rightarrow r = a(1 - e \cos E)$$

On déduit donc  $\frac{x}{y}$ . De plus on a :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dM} \frac{dM}{dt} = n(1 - e \cos E)^{-1} = \frac{na}{r}$$

On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned} r \frac{dx}{dt} &= ra \frac{dE}{dt} (-\sin E) = -na^2 \sin E \\ r \frac{dy}{dt} &= ra \sqrt{1-e^2} \frac{dE}{dt} \cos E = na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E \end{aligned}$$

Rassemblons ces formules :

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{na}{r} \\ x &= r \cos W = a(\cos E - e) \\ y &= r \sin W = a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \frac{dx}{dt} &= -na^2 \sin E \\ r \frac{dy}{dt} &= na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E \end{aligned} \tag{2.21}$$

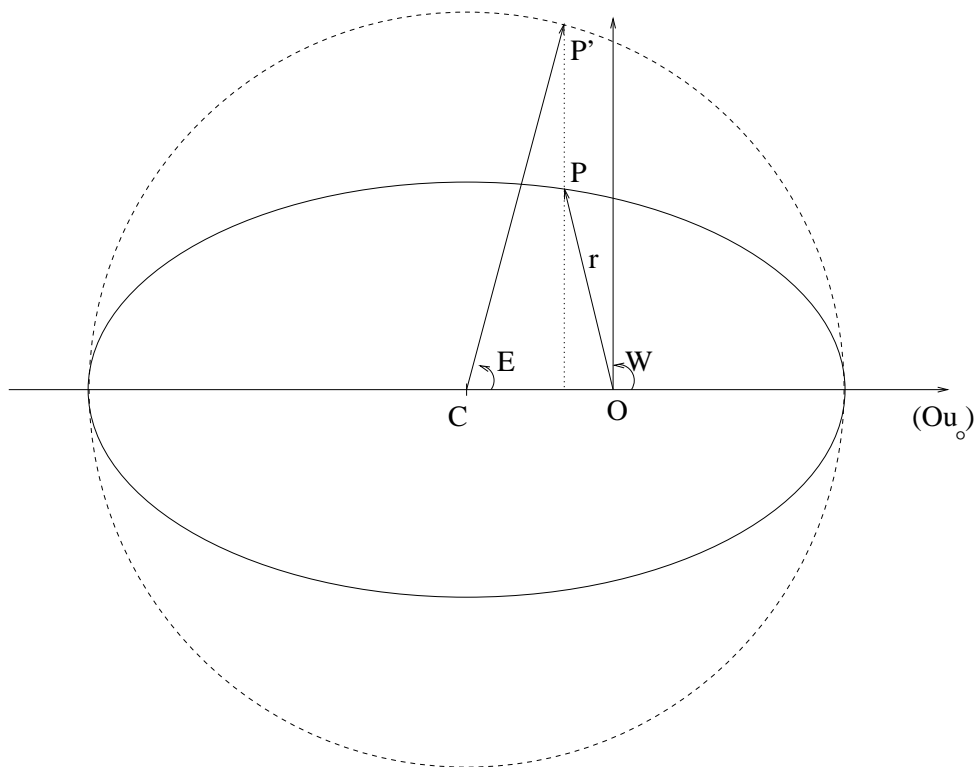


FIG. 2.4 – L'ellipse déduite de son cercle principal

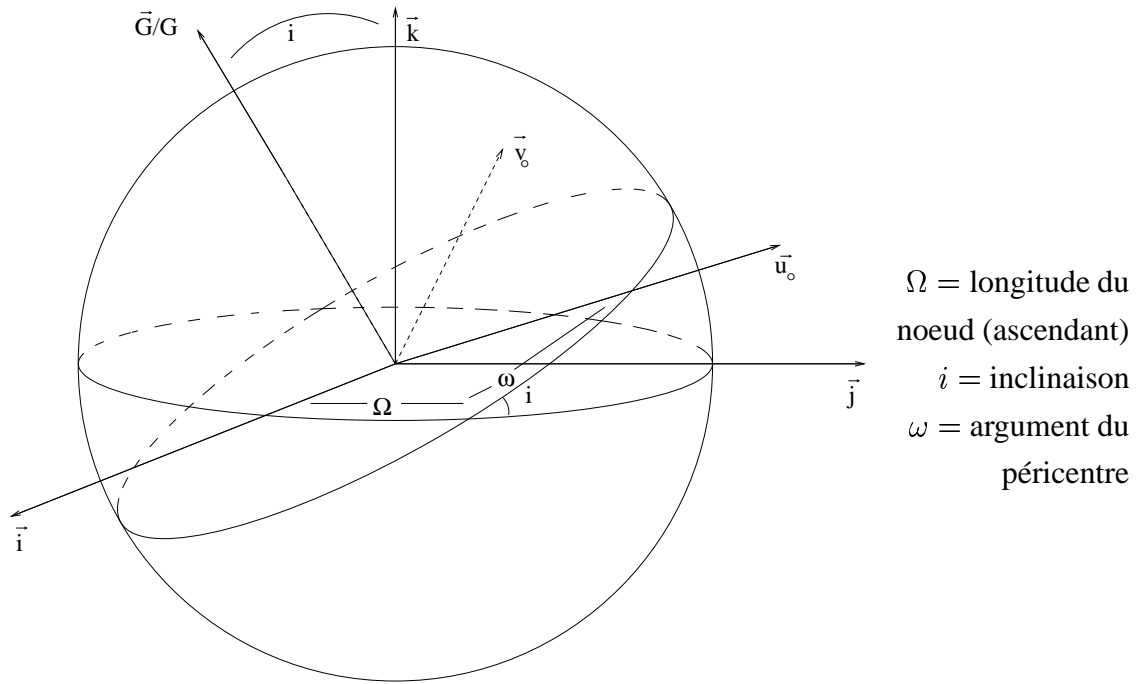
Ces formules permettent d'interpréter géométriquement l'angle  $E$  (fig.2.4). Une ellipse est déduite de son cercle principal  $C(c, a)$  par une affinité de rapport  $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$  perpendiculaire au grand axe. On peut aussi remarquer que, si on limite à l'ordre 1 en  $e$ , on obtient  $x = a(\cos E - e)$ . Ainsi, pour de petites excentricités, l'ellipse pourra être vue comme un cercle excentré, c'est à dire dont le centre est à la distance  $ae$  de  $O$ .

## 2.6 Eléments d'orbites

L'intégration du problème képlérien a fait apparaître 6 constantes arbitraires en plus du paramètre  $\mu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{G} \quad (3) \\ \vec{e} \quad (2) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} \quad (3) \\ h \text{ ou } a \quad (1) \\ \vec{e}/e \quad (1) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \vec{G}/G \quad (2) \\ \vec{e}/e \quad (1) \\ h \text{ ou } a \quad (1) \\ e \quad (1) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right.$$

On a vu que  $R_0 = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{G}/G)$  est le repère propre de la trajectoire. Il faut repérer  $R_0$  par rapport à un repère extérieur indépendant  $R = (Oijk)$ . Cela peut se faire par les classiques angles d'Euler<sup>4</sup> :  $\Omega, i, \omega$



Ces trois angles dépendent évidemment du choix de  $R$ . Il se peut que  $i = 0^\circ$ , dans ce cas  $\Omega$  n'est pas défini ainsi que  $\omega$ . Plus généralement, si  $i$  est petit,  $\Omega$  et  $\omega$  sont mal déterminés. Pour éviter ce problème on utilise plutôt

$$\varpi = \Omega + \omega \text{ longitude du péricentre} \quad (2.22)$$

De la même manière si  $e$  est petit  $W, E$  et  $M$  sont mal déterminés. C'est pourquoi on

<sup>4</sup>Les angles d'Euler sont issues de la succession de rotations dans "l'ordre 313", c'est à dire une rotation de  $\Omega$  autour du troisième axe, puis une rotation de  $i$  autour du (nouveau) second axe et une rotation de  $\omega$  autour du (nouveau) troisième axe. On aurait pu imaginer d'autres successions mais celle définissant les angles d'Euler est la plus utilisée.

utilise :

$$\begin{aligned}
 l &= \varpi + W && \text{longitude vraie} \\
 F &= \varpi + E && \text{longitude excentrique} \\
 \lambda &= \varpi + M && \text{longitude moyenne}
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

A la place de  $t_p$ , lui aussi mal défini si  $e$  est petit, on utilise  $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ , où  $t_0$  est une date origine choisie arbitrairement (par exemple :  $t_0 = J2000$  c'est à dire le 1 janvier 2000 à 12h).

Ainsi on considère souvent les éléments d'orbite suivant :

$$\underline{(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)}$$

ou encore

$$\underline{(a, z, \zeta, \lambda_0)}$$

où

$$z = e \exp \sqrt{-1} \varpi \quad \text{et} \quad \zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega$$

Ces variables complexes ont l'avantage d'être régulières. En effet si  $e$  est nul,  $\varpi$  n'est pas définie mais les deux coordonnées cartésiennes le sont puisque  $z = 0$  (de même avec  $\zeta$ ).

Le tableau (2.1) donne les éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 (voir Chap. 4) et pour la date  $t_0 = J2000$ .

## 2.7 Unités utilisées en astronomie

Les mouvements elliptiques képlériens que l'on vient de voir permettent de relier les trois grandeurs physiques de longueur, de temps et de masse. Cela se fait principalement avec la troisième loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad \text{où} \quad \mu = KM \text{ ou } K(M + m) \dots$$

Il est donc nécessaire de connaître la constante de gravitation universelle  $K$ . Or, en astronomie, on ne mesure bien que le temps et les distances et  $K$  est mal connu en mètre (m), kilogramme (kg) et seconde (s). Par exemple, l'étude de la trajectoire des satellites

TAB. 2.1 – Eléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 et pour la date  $t_0 = \text{J2000}$ .

	a ua	e	i °	$\Omega$ °	$\varpi$ °	$\lambda_0$ °	n "/jour
Mercure	0,38710	0,2056	7,00	48,33	77,46	252,25	14732,42
Vénus	0,72333	0,0068	3,39	76,68	131,56	181,98	5767,67
Terre	1,00000	0,0167	0,00	-	102,94	100,47	3548,19
Mars	1,52368	0,0934	1,85	49,56	336,06	355,43	1886,52
Jupiter	5,20260	0,0485	1,30	100,46	14,33	34,35	299,128
Saturne	9,55491	0,0555	2,49	113,66	93,06	50,08	120,455
Uranus	19,21845	0,0463	0,77	74,01	173,00	314,05	42,231
Neptune	30,11039	0,0090	1,77	131,78	48,12	304,39	21,534
Pluton	39,44	0,2485	17,13	110,7	224,6	237,7	14,3

artificiels a permis de déterminer

$$K M_T = 398\,600,64 \cdot 10^9 m^3 s^{-2} \text{ où } M_T \text{ est la masse de la Terre}$$

, mais ni  $K$  ni  $M_T$  n'est connu avec autant de précision. Les meilleures déterminations donnent  $K = 6,6720 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ . L'indétermination provient du fait que le kilogramme a une définition "artificielle". En astronomie, on prend comme unité de masse  $m_\odot$  la masse du Soleil qui est beaucoup plus naturelle.

Cependant, si pour les mouvements de satellites artificiels les distances sont bien connues en mètres, cela est moins vrai pour les mouvements planétaires. On pose alors par définition :

$$\sqrt{K} = 0,017\,202\,098\,950\,000 \text{ (constante de Gauss)}$$

et on définit l'unité de longueur par :

L'unité astronomique de longueur (ua) est le demi-grand axe de l'orbite autour du Soleil d'une planète de masse négligeable, non perturbée par d'autres planètes, dont le moyen mouvement est égal à la constante de Gauss  $\sqrt{K}$ , les unités de masse et de temps étant  $m_\odot$  et le jour.

Le jour (unité astronomique de temps) correspond à 86 400 s, la seconde étant, elle, définie par les horloges atomiques. On remarquera que la période de ce mouvement fictif,

TAB. 2.2 – Inverse de la masse des principales planètes du système solaire. L'unité de masse est la masse du Soleil.

Mercure	6 023 600	Saturne	3498,5
Vénus	408 523,5	Uranus	22 869
Terre + Lune	328 900,5	Neptune	19 314
Mars	3 098 710	Pluton	130 000 000 *
Jupiter	1047,355	Cérès	1 700 000 000

\* Avant la découverte de son satellite Charon en 1978 qui a permis d'évaluer correctement la masse de Pluton grâce à la troisième loi de Képler, cette masse était surestimée à 1 / 3 000 000.

$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 365,256\,898\,326\,3$  jours, est proche de l'année. C'est pourquoi l'unité astronomique est proche du demi-grand axe de l'orbite terrestre. Pour la même raison  $K$  est proche de  $4\pi^2$  ( $K = 39,476\,926\,421\,373\,ua^3 \odot^{-1} an^{-2}$  avec  $1 an =$  une année julienne  $= 365,25$  jours).

A partir des constantes primaires, déterminées par d'autres expériences de la physique,

$$c = 299\,792\,458\,m\,s^{-1} \quad (\text{vitesse de la lumière})$$

$$\tau_A = 499,044\,782\,s \quad (\text{temps de lumière pour l'unité de distance})$$

, on en déduit

$$1\,ua = c\tau_A = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11}\,m$$

Le tableau (2.2) donne les masses des principales planètes du système solaire et le tableau (2.3) celles de quelques uns des satellites de ces planètes.

## 2.8 Application du problème des 2-corps : Tremplin gravitationnel

Cette technique consiste à utiliser la masse d'un gros corps (par exemple Jupiter) pour dévier une trajectoire.

Une sonde voyage dans le système solaire suffisamment loin des autres planètes et notamment de Jupiter. Ainsi on suppose que son mouvement est képlérien avec

$$\mu_{\odot} = KM_{\odot} \text{ d'origine } \odot$$

## 2.8. APPLICATION DU PROBLÈME DES 2-CORPS : TREMPLIN GRAVITATIONNEL 37

TAB. 2.3 – Inverse de la masse des principaux satellites de planètes. L'unité de masse est la masse de la planète correspondante.

planète	satellite	$\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$	planète	satellite	$\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$
Terre	Lune	81,301	Mars	Phobos	50 500 000
				Deimos	360 000 000
Jupiter	Io	21 276,6	Saturne	Mimas	15 800 000
	Europe	39 062,5		Encelade	11 000 000
	Ganymède	12 755,1		Téthys	943 400
	Callisto	17 857,1		Dioné	509 400
Uranus	Miranda	1 300 000	Rhéea	231 000	
	Ariel	64 000	Titan	4225,86	
	Umbriel	74 000	Hypérion	30 000 000	
	Titania	24 600	Japet	320 000	
	Obéron	28 800			
				Neptune	Triton
Pluton	Charon	8,0		Néréide	5 000 000

Ensuite, cette trajectoire amène la sonde dans le voisinage de Jupiter. On peut définir une “sphère d’influence” à Jupiter, à l’intérieur de laquelle l’influence du Soleil est (considérée) négligeable par rapport à celle de Jupiter (et inversement à l’extérieur de cette sphère). Dans la description qui suit, il n’est pas nécessaire de définir plus précisément cette sphère<sup>5</sup> car on suppose que la sonde passe très rapidement près de Jupiter de manière à ce que l’on puisse négliger le temps d’interaction avec Jupiter (quelques heures) par rapport au temps de parcours de l’orbite héliocentrique (quelques années). On a donc à l’intérieur de la sphère d’influence un mouvement képlérien hyperbolique avec

$$\mu_J = KM_J \text{ d'origine } J$$

Le mouvement est nécessairement hyperbolique puisque, vue de Jupiter, la sonde “arrive de l’infini” avec une vitesse (à l’infini) non nul (voir 2.7).

A la sortie de la sphère d’influence, la vitesse jovicentrique a simplement changé de direction et donc la vitesse héliocentrique a changé (en direction et en module).

<sup>5</sup>Si on le faisait notre description resterait quand même une approximation.

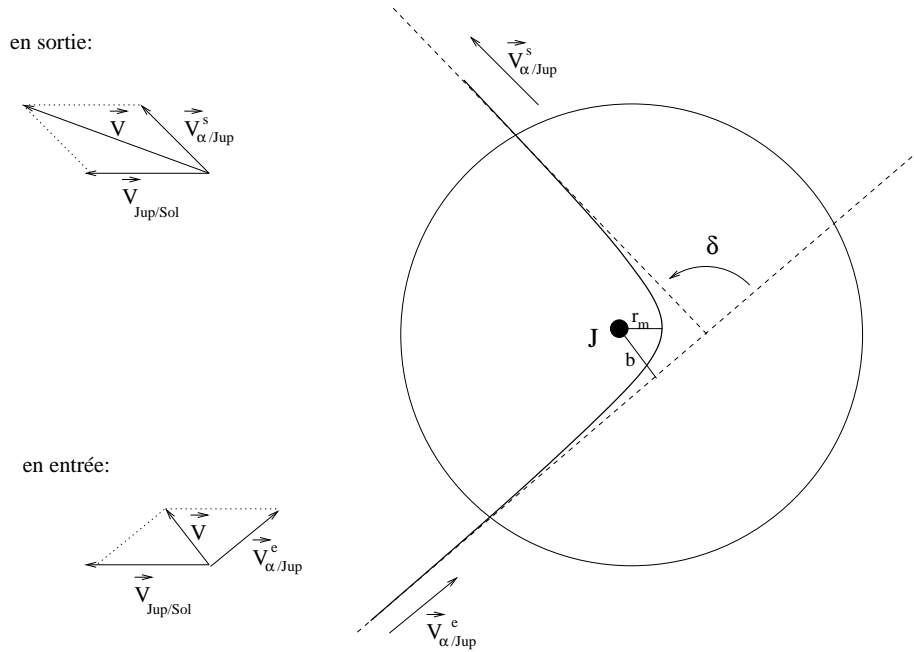


FIG. 2.5 – Principe du tremplin gravitationnel

La formule (2.16) nous donne la déviation de la vitesse jovicentrique (figure 2.5) :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{-\pi + 2W_\infty}{2}\right) = -\cos W_\infty = 1/e$$

Or  $h = +\frac{\mu}{2a} = \frac{V_\infty^2}{2}$  et  $r_m = a(e - 1)$ . On en déduit :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_m V_\infty^2}{\mu}} \quad (2.24)$$

Puisque  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ , on peut aussi écrire :

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 V_\infty^4}{\mu^2}} \quad (2.25)$$

La figure (2.5) aide à comprendre l'approximation qui est faite ici. Celle-ci consiste à supposer que le mouvement héliocentrique de la sonde juste avant l'interaction avec Jupiter est rectiligne et uniforme (avec la vitesse  $\vec{V}_\infty^e$ ) ce qui permet de l'assimiler à la première asymptote (de même après l'interaction avec la deuxième asymptote). Cette supposition signifie que le temps d'interaction est très court. C'est en ce sens que le tremplin

## 2.8. APPLICATION DU PROBLÈME DES 2-CORPS : TREMPLIN GRAVITATIONNEL<sup>39</sup>

gravitationnel peut être assimilable à un choc : “instantanément” le vecteur vitesse de la trajectoire est changé. C’est pour cela que l’on parle aussi de “billard” gravitationnel, la loi du changement de vitesse étant donnée ici par (2.24) ou (2.25).



# Chapitre 3

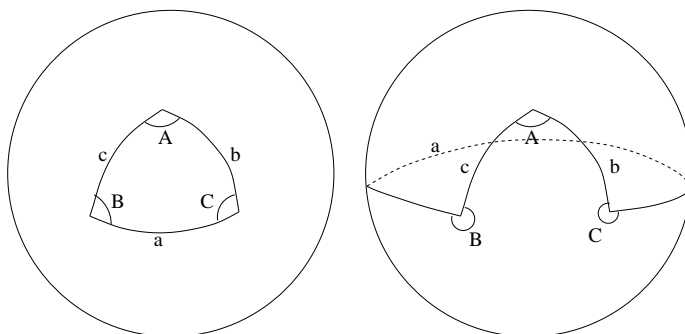
## Coordonnées sur la sphère céleste

### 3.1 Trigonométrie sphérique

Soit une sphère dont le rayon est fixé arbitrairement à 1 et appelons  $O$  le centre de cette sphère<sup>1</sup>.

L'intersection de tout plan passant par  $O$  avec cette sphère est un grand cercle. Ces courbes sont les géodésiques de la sphère (voir 1.3.5).

Un triangle sphérique est la figure formée par trois arcs de grand cercle reliant 2 à 2, trois points distincts  $A$ ,  $B$ , et  $C$ .



On définit les cotés par :

$$a = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \quad b = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}}) \quad c = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$$

et les angles par :

$$A = \text{angles des plans } OAB \text{ et } OAC$$

---

<sup>1</sup>En trigonométrie sphérique, cette sphère joue un rôle similaire au cercle de rayon 1 en trigonométrie plane.

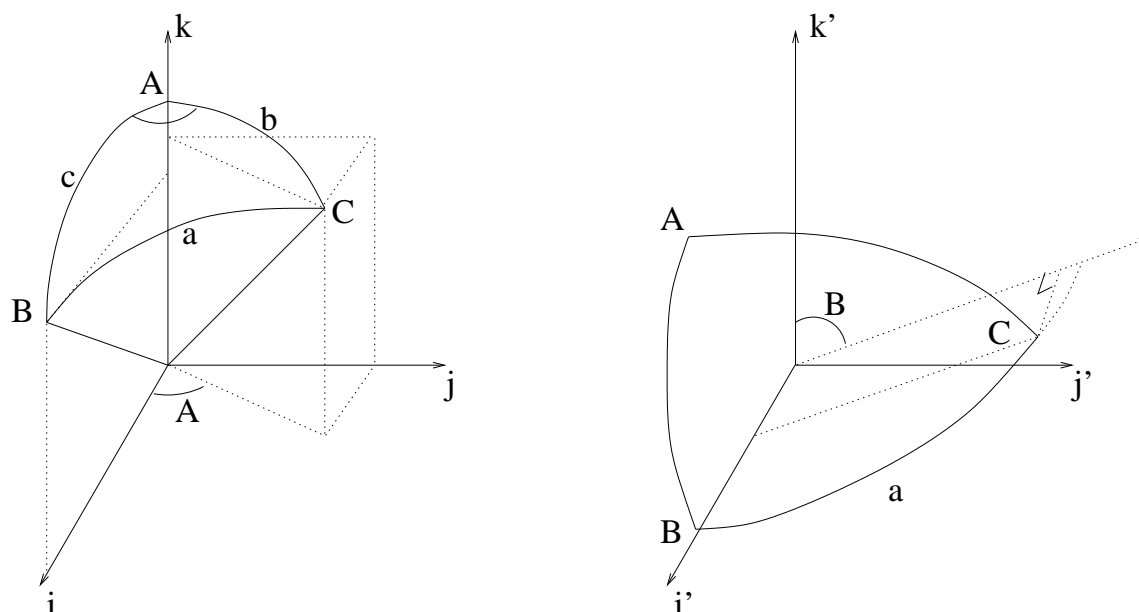


FIG. 3.1 – Coordonnées des trois points d'un triangle sphérique dans deux repères différents afin d'établir les relations de Gauss.

$$B = \text{angles des plans } OBC \text{ et } OAB$$

$$C = \text{angles des plans } OAC \text{ et } OBC$$

Pour simplifier l'exposé, on suppose que  $a, b, c, A, B$  et  $C$  sont différents de 0 et de  $\pi$ . Ce qui signifie que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas sur un même grand cercle.

Pour trois points  $A, B$  et  $C$  donnés, il y a  $2 \times 2 \times 2$  triangles sphériques possibles. Mais il n'y en a qu'un pour lequel tous les cotés sont compris entre 0 et  $\pi$ , c'est le triangle sphérique simple.

La donnée de 3 nombres (par exemple  $A, b$  et  $c$ ) suffit à déterminer un triangle sphérique. Établissons les relations de Gauss qui permettent de résoudre un triangle sphérique.

Rapportons l'espace affine euclidien au repère orthonormé direct  $(Oijk)$ . Sans nuire à la généralité du problème, on peut choisir ce repère de telle manière que  $\overrightarrow{OA} = i$  et que  $B$  soit dans le plan  $(Oik)$ . On a alors (fig. 3.1) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (0 & 0 & 1) \\ \overrightarrow{OB} &= (\sin c & 0 & \cos c) \\ \overrightarrow{OC} &= (\sin b \cos A & \sin b \sin A & \cos b) \end{aligned}$$

Considérons maintenant un autre repère  $(Oi'j'k')$  orthonormé direct tel que  $\overrightarrow{OB} = i'$ .

Le point  $A$  est alors dans le plan  $(Oi'k')$ . Ce nouveau repère se déduit du précédent par la rotation d'axe  $(Oj)$  et d'angle  $c - \frac{\pi}{2}$ . Si  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  sont les coordonnées d'un point dans le premier repère, alors les coordonnées de ce point dans le nouveau repère sont  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(c - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(c - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Déterminons alors les coordonnées de  $C$  dans le repère  $(Oi'j'k')$  de deux manières différentes :

1. par la lecture directe dans ce repère (fig. 3.1) :  $C \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \end{pmatrix}$
2. en utilisant la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} \sin c & 0 & \cos c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos c & 0 & \sin c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin b \cos A \\ \sin b \sin A \\ \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c \\ \sin b \sin A \\ -\cos c \sin b \cos A + \cos b \sin c \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les relations de Gauss :

$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned}$	(3.1)
---	-------

, et des relations équivalentes par permutations circulaires.

On peut montrer que la surface d'un triangle sphérique est

$$S = A + B + C - \pi \tag{3.2}$$

(par exemple : si  $A = B = C = \frac{\pi}{2}$ , on a  $S = \frac{\pi}{2}$  qui correspond bien à  $1/8$  de la sphère).

### remarque sur les triangles plans :

Dans un triangle plan on a  $A + B + C = \pi$  c'est à dire, si on l'identifie à un triangle sphérique,  $S = 0$ . Ainsi un triangle plan peut s'identifier à un triangle sphérique sur une

sphère de rayon  $\infty$ , ou à un triangle sphérique dont  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des infiniment petits.

Par exemple, la première des relations de Gauss s'écrit :

$$1 - \frac{a^2}{2} \simeq \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc \cos A$$

qui devient, en ne gardant que le terme principal :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De la même manière, la deuxième relation devient :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

## 3.2 Système de coordonnées sur la sphère

La notion de sphère céleste est issue du fait que, à un lieu donné et à une date donnée, l'observateur n'a pas accès à la distance entre lui et l'objet céleste (voir 1.2.3 du chapitre 1). Ainsi, cet observateur peut très bien considérer que tous ces objets sont à une distance arbitraire. Il peut aussi considérer qu'ils sont à une même distance (arbitraire elle aussi). De manière équivalente, on peut dire que l'observateur n'appréhende que les directions issues de sa position. Or l'ensemble de ces directions s'identifie à une sphère centrée sur ce point.

Sur la sphère céleste, on distingue la sphère locale et la sphère des fixes.

La sphère locale est liée au lieu géographique de l'observateur. Cela signifie que son horizon est "physiquement" un grand cercle de cette sphère.

La sphère des fixes est liée à la figure indéformable constituée par les images des étoiles sur la sphère céleste.

Ces deux sphères se superposent et l'un des buts de l'astrométrie est de décrire le mouvement de l'une par rapport à l'autre.

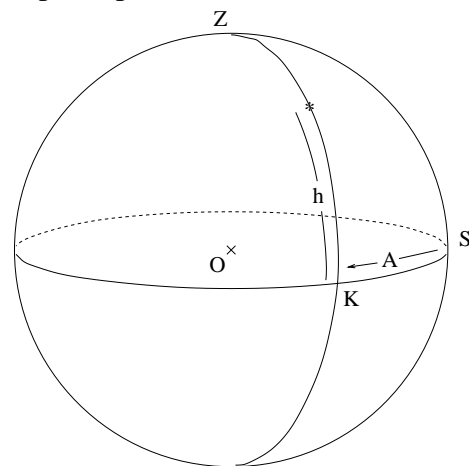
Sur une sphère, un système de coordonnées est un jeu de deux nombres qui positionnent tout les points de la sphère. Il est naturel de les prendre parmi les coordonnées sphériques  $\lambda$  et  $\varphi$  (définies au travers des coordonnées cartésiennes par  $x = r \cos \lambda \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \lambda \cos \varphi$  et  $z = r \sin \varphi$ ). Il faut donc se définir **un grand cercle orienté** (ou, de manière équivalente, un point qu'on pourra nommer pôle) **et une origine sur ce grand cercle**.

Par exemple sur la Terre, le grand cercle origine est l'équateur et l'origine sur ce grand cercle est définie par le méridien (ou demi-grand cercle) origine passant par Greenwich<sup>2</sup>. L'orientation de l'équateur terrestre est donnée par la convention que les longitudes sont comptées positivement vers l'est<sup>3</sup>.

### 3.3 Coordonnées locales

Elles correspondent au repère naturel que nous utilisons dans la vie courante : l'horizon est un grand cercle et nous sommes au centre  $O$  de la sphère. On prend donc ce grand cercle comme grand cercle origine. Le pôle correspondant est appelé Zénith ( $Z$ ). La direction origine est celle où culmine le Soleil, c'est à dire la direction du Soleil à Midi (Sud). On peut dire aussi plus simplement que c'est la direction où culminent les étoiles dans leur mouvement diurne (voir plus loin). Une étoile est repérée par :

- l'azimut  $A$  : angle sphérique  $SZ^*$  dans le sens rétrograde
- la hauteur  $h$  : coté  $*K$  où  $K$  est l'intersection du demi grand cercle  $Z^*$  avec l'horizon



On a :

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$$

<sup>2</sup>En France, le méridien de Paris a tenu lieu de méridien origine jusqu'en 1884, date à laquelle la conférence de l'Union Astronomique Internationale (U.A.I.) à Washington choisit le méridien de Greenwich comme méridien origine. Pour que les délégués adoptent ce méridien, et non celui de Paris, le délégué britannique déclara qu'il était officiellement autorisé à annoncer que son gouvernement avait accepté d'adhérer à la convention métrique ...

<sup>3</sup>En fait à cette même conférence de Washington, les délégués ont retenu de compter les longitudes vers l'est et vers l'ouest à partir d'un méridien central. Dans ce cours, on préfère compter la longitude terrestre positivement suivant une seule direction, comme le recommandent actuellement les commissions de l'U.A.I.



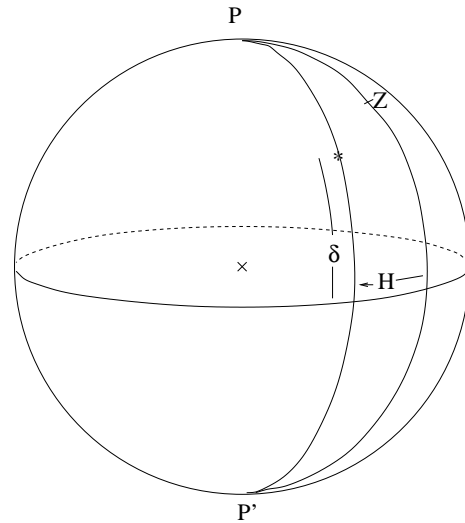
FIG. 3.2 – Traînées des étoiles autour du pôle nord céleste. Photographie obtenue avec une pose d'environ 6 heures.

### 3.4 Mouvement diurne et coordonnées horaires

Le mouvement diurne s'observe par le mouvement apparent des étoiles (le Soleil, la Lune et les planètes ont un mouvement de nature différente et plus compliqué) : les étoiles décrivent des arcs de cercle, centrés sur un point particulier de la sphère céleste (fig. 3.2). Ce point est appelé pôle céleste nord et noté  $P$ .

On construit à partir de ce point un nouveau système de coordonnées. Le grand cercle origine est celui correspondant au pôle  $P$ . Il est appelé équateur céleste. Le demi grand cercle origine est celui passant par le zénith. Une étoile est repérée par :

- l'angle horaire  $H$  : angle sphérique  $ZP^*$  dans le sens rétrograde
- la déclinaison  $\delta : = 90^\circ - P^*$



On a :

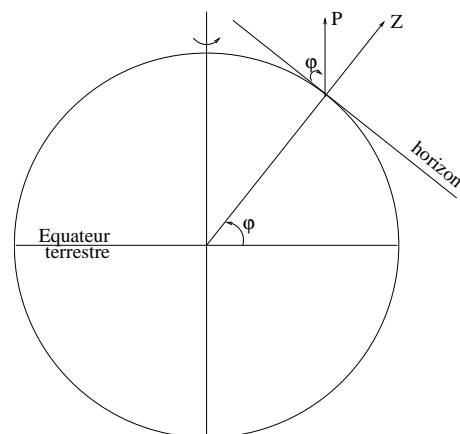
$$0 h \leq H \leq 24 h$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$$

### Interprétation du mouvement diurne et hauteur du pôle sur l'horizon

Le mouvement diurne s'interprète comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. Ce mouvement peut être considéré comme uniforme en une bonne première approximation.

- la hauteur du pôle sur l'horizon est la latitude du lieu.
- $P$ ,  $Z$  et  $S$  sont sur un même grand cercle, c'est à dire, le Sud est le point sur l'horizon et sur le demi grand cercle  $P'Z$ .



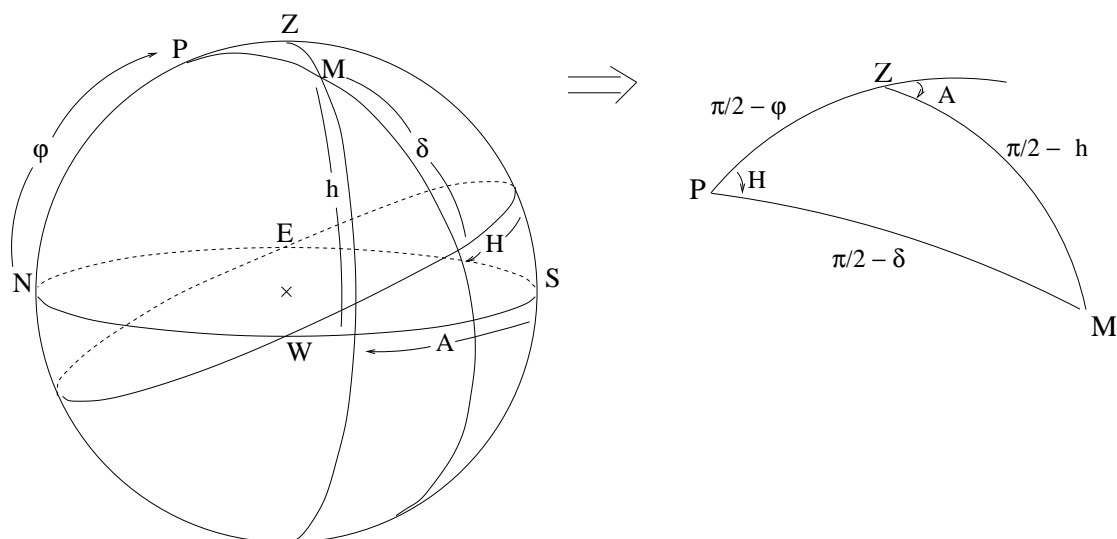
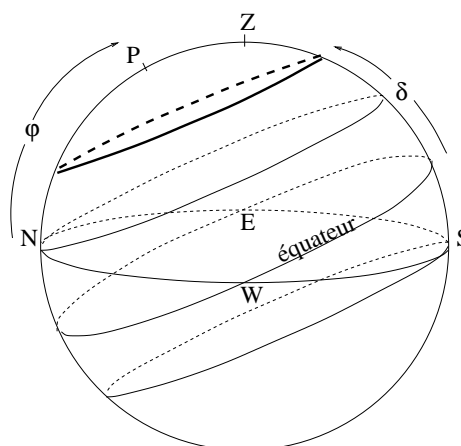


FIG. 3.3 – Liens entre les coordonnées locales et les coordonnées horaires

Soit un lieu de latitude  $\varphi$  avec  $\varphi > 0$  et une étoile de déclinaison  $\delta$  ;

- si  $(\frac{\pi}{2} - \varphi) < \delta$  alors l'étoile est toujours visible. On dit qu'elle est circumpolaire.
- si  $\delta < -(\frac{\pi}{2} - \varphi)$  alors l'étoile est toujours invisible



### 3.5 Changement de coordonnées

La figure (3.3) fait apparaître un triangle sphérique dans lequel, on peut appliquer les formules de Gauss (3.1) :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin(\pi - A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos(\pi - A) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos H \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\
 \cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \\
 \cos h \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

De la même manière, on peut établir les formules inverses :

$$\begin{aligned}
 \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A \\
 \cos \delta \sin H &= \cos h \sin A \\
 \cos \delta \cos H &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

### 3.6 Coordonnées équatoriales et temps sidéral local

On a vu que la sphère des fixes est animée d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à la sphère céleste locale. Si on définit un système de coordonnées sur la sphère des fixes, les étoiles auront des coordonnées constantes dans ce système.

- Le pôle est le même que pour le repère horaire (ce point est fixe dans les deux repères). Le grand cercle origine est donc aussi l'équateur.

- L'origine sur l'équateur est le point  $\gamma$ . Ce point est a priori arbitraire. On verra dans le chapitre suivant (chap. 4) comment il est défini. Pour l'instant, il suffit de dire qu'il est proche de la constellation des Poissons.

Les coordonnées équatoriales sont :

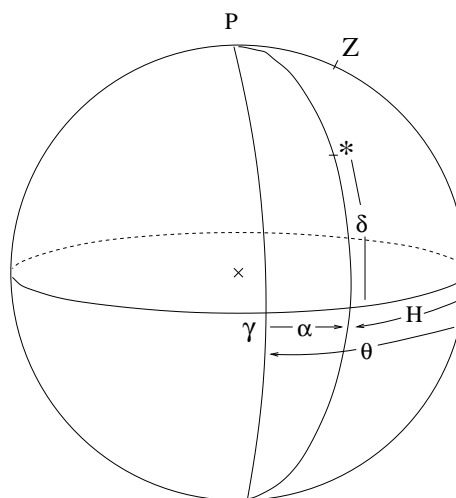
- l'ascension droite  $\alpha$  : angle  $\gamma P^*$  dans le sens direct
- la déclinaison  $\delta$  : (la même que pour les coordonnées horaires)

Le mouvement de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale permet de définir une échelle de temps : le temps sidéral local. Il est noté  $\theta$  et c'est l'angle horaire du point

$\gamma$ .

Quelque soit l'étoile considérée et à chaque instant, on a :

$$\underline{H = \theta - \alpha} \quad (3.5)$$



Le mouvement diurne étant issu de la rotation de la Terre sur elle même, on peut relier les temps sidéraux de deux lieux différents. Soit deux lieux  $A$  et  $B$  sur la Terre, la différence entre leur heure sidérale est égale à la différence de leur longitude terrestre  $L$ . Si on compte positivement les longitudes à l'est, on a :

$$L_A - L_B = \theta_A - \theta_B \quad (3.6)$$

Le jour sidéral est la durée qui s'écoule entre deux passages au Sud du point  $\gamma$ .

# Chapitre 4

## Le mouvement du Soleil

Le Soleil se déplace sur la sphère des fixes, c'est à dire  $\alpha_{\odot}$  et  $\delta_{\odot}$  ne sont pas constants.

- Les variations de  $\delta_{\odot}$  s'observent par

la variation de la durée du jour  
de la hauteur du Soleil à midi  
d'azimut au coucher du Soleil (ou au lever)

- Les variations de  $\alpha_{\odot}$  s' "observent" par

le déplacement du Soleil dans les constellations du zodiac.

### 4.1 Coordonnées écliptiques

Puisque le mouvement du Soleil autour de la Terre est pratiquement une courbe plane, le mouvement du Soleil parmi ces constellations est un grand cercle. On le nomme écliptique. On observe que le Soleil parcourt tout l'écliptique en 366,2 jours sidéraux. Ce temps est appelé l'année.

Soit  $E$  le pôle de l'écliptique, on a :

$$\widehat{EP} = \omega = 23^{\circ}26'$$

$P$  étant le pôle céleste nord.  $\omega$  est appelé l'obliquité.

Le point  $\gamma$ , vu au chapitre précédent (chap. 3), est défini par l'intersection de l'écliptique avec l'équateur pour lequel le Soleil passe avec une déclinaison croissante (équinoxe de printemps).

Ce point est l'origine sur l'écliptique et les coordonnées écliptiques sont donc :

$l$  = longitude céleste

$b$  = latitude céleste

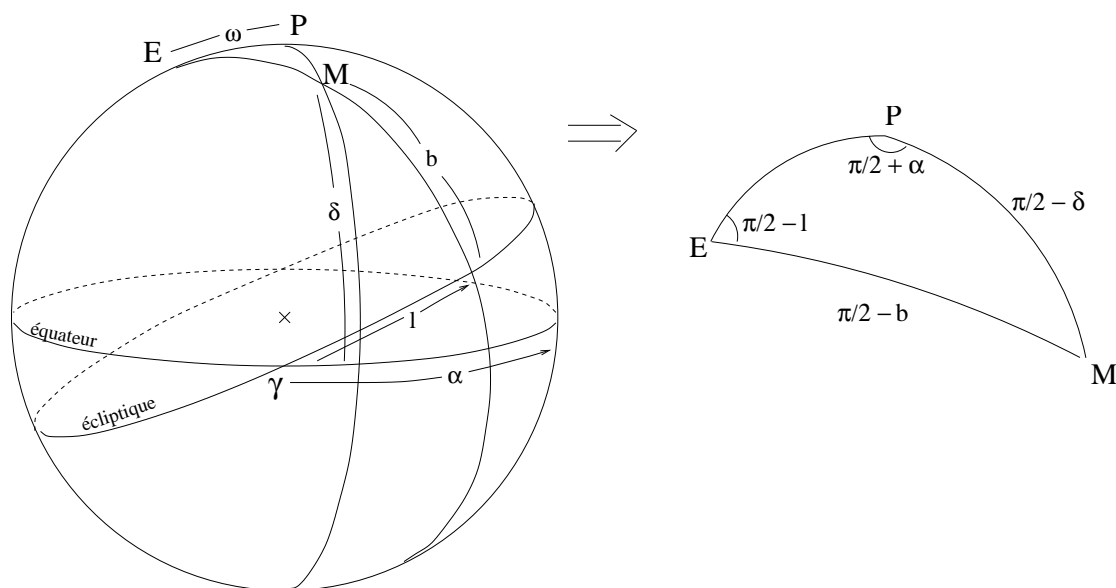
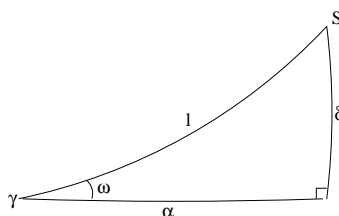


FIG. 4.1 – Coordonnées équatoriales et écliptiques

La figure (4.1) permettrait d'écrire, comme précédemment, les formules de changements de coordonnées. Il n'est pas utile ici de le faire. Ecrivons seulement ces formules dans le cas du Soleil, c'est à dire le cas où  $b = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \omega \sin l \\ \tan \alpha &= \cos \omega \tan l \end{aligned} \quad (4.1)$$



## 4.2 Première approximation :

### mouvement uniforme du Soleil en ascension droite

Cette "hypothèse" serait exacte si  $e = 0$  (en fait  $e = 0,0167$ ) et si  $\omega = 0$  ! Cette approximation grossière a été utilisée en France jusqu'en 1816 pour l'établissement des échelles de temps. Ces échelles de temps sont matérialisées par les cadrans solaires.

On suppose donc que :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 \text{ tour par an (=Cst)} = \frac{1}{366,2} \text{ tour par jour sidéral}$$

, et puisque en (3.5) on a vu que  $H = \theta - \alpha$  :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\theta} &= 1 - \frac{d\alpha}{d\theta} \\ &= 1 - \frac{1}{366,2} \\ &= \frac{365,2}{366,2} \text{ tour par jour sidéral} \end{aligned}$$

On définit le jour solaire par  $\frac{dH}{dt} = 1$  tour par jour solaire.

On a donc

$$\begin{aligned} 366,2 \text{ jours sidéraux} &= 365,2 \text{ jours solaires} = 1 \text{ an} \\ 1 \text{ jour solaire} &= 1 \text{ j } 0 \text{ h } 3 \text{ mn } 56,6 \text{ s de temps sidéral} \\ 1 \text{ jour sidéral} &= 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4,1 \text{ s de temps solaire} \end{aligned}$$

On définit aussi le temps solaire local par :

$$t = H_{\odot} \pm 12 \text{ h} \quad (4.2)$$

Il est ainsi 12h quand le Soleil est au méridien.

Comme pour le temps sidéral, les temps solaires de deux lieux  $A$  et  $B$  de longitudes terrestres respectives  $L_A$  et  $L_B$  sont reliés par :

$$t_B - t_A = L_B - L_A \quad (4.3)$$

## 4.3 Equation du temps :

### mouvement “réel” du Soleil

Le mouvement du Soleil n'est pas uniforme le long de l'écliptique puisque l'orbite de la Terre a une excentricité de 0,0167. De plus, si on “lit” l'heure par l'ascension droite, il faut tenir compte de l'obliquité. Pour ces deux raisons, le mouvement du Soleil n'est

pas uniforme en  $\alpha$ . C'est l'écart au mouvement uniforme qui sera appelé l'"équation du temps".

### 4.3.1 partie due à l'excentricité

Le mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique suit la loi des aires. Celle-ci est donnée par les formules vues au chapitre 2 que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E & M &= \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \\ \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} & \theta_0 &\approx 4 \text{ janvier} \\ l &= \varpi + W & \varpi &= 282^\circ 56' \end{aligned}$$

$\theta_0$  représente l'instant de passage au péricentre et  $\varpi$  la longitude du péricentre. Ainsi  $l$  est bien la longitude du Soleil comptée sur l'écliptique à partir du point  $\gamma$ .

Calculons  $W$  en fonction de  $M$  à l'ordre 1 par rapport à  $e$  :

$$W = M + (W - E) + (E - M)$$

Or

$$E - M = e \sin E \simeq e \sin M$$

Par ailleurs,  $W - E$  se calcule par  $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$  qui est une formule de la forme  $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$ , car

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq \sqrt{(1+e)(1+e)} = 1 + e$$

Développons  $\tan u$  au voisinage de  $v$  :

$$\tan u \simeq \tan v + \frac{1}{\cos^2 v}(u - v)$$

, ainsi

$$\tan u - \tan v = \varepsilon \tan v \simeq \frac{u - v}{\cos^2 v} \quad \text{c'est à dire} \quad u - v \simeq \varepsilon \sin v \cos v$$

On en tire le petit lemme suivant :

*L'expression  $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$  s'exprime approximativement (à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ ) par  $u - v = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2v$ .*

On en déduit ici :

$$\frac{W}{2} - \frac{E}{2} \simeq \frac{e}{2} \sin 2\frac{E}{2} \quad \text{c.a.d.} \quad W - E \simeq e \sin E \simeq e \sin M$$

, d'où finalement :

$$\begin{aligned} W &= M + (W - E) + (E - M) \\ &= M + 2e \sin M \end{aligned}$$

La longitude du Soleil s'écrit ainsi :

$$l = \varpi + M + 2e \sin M \quad (4.4)$$

avec

$$\varpi = 282^\circ 56', \quad e = 0,0167, \quad M = \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad \theta_0 \approx 4 \text{ janvier}$$

### application à la durée des saisons

L'équinoxe de printemps correspond à  $l = 0^\circ$ , il faut donc résoudre (numériquement) :

$$0^\circ = 282^\circ 56' + M + 115' \sin M$$

On trouve  $M = 75^\circ 13' = 0,2089$  tour, d'où  $\theta - \theta_0 = 0,2089$  an = 76,3 jours solaires (moyens). On en déduit encore que  $\theta = 4$  janvier +76,3 jours = 80,3 janvier = 49,3 février = 21,1 mars.

De même, en faisant  $l = 90^\circ$  (solstice d'été),  $l = 180^\circ$  (équinoxe d'automne) et  $l = 270^\circ$  (solstice d'hiver), on trouve :

	début de la saison		durée (jours)
printemps	21,1	mars	92,7
été	21,8	juin	93,7
automne	23,5	septembre	89,8
hiver	22,3	décembre	89,0

### 4.3.2 partie due à l'obliquité

Pour avoir maintenant l'ascension droite du Soleil, il faut utiliser la relation

$$\tan \alpha = \cos \omega \tan l$$

,  $\omega$  étant l'obliquité et vaut  $23^\circ 26'$ . Puisque  $\cos \omega = 0,918$ , on peut dire que  $\tan \alpha$  et  $\tan l$  sont peu différents (à 8% près). Grâce au petit lemme précédent, on peut approcher la relation par

$$\alpha - l = \frac{-\omega^2/2}{2} \sin 2l$$

Si l'obliquité n'apparaît pas petite, la quantité  $-\frac{\omega^2}{4}$  l'est puisqu'elle vaut  $-0,0418$ , soit  $-144''$ . Un développement plus correct donnera la valeur de  $148''$ . On écrit ainsi

$$\alpha = l - 148'' \sin 2l \quad (4.5)$$

### 4.3.3 Equation du temps

Les deux expressions (4.4) et (4.5) que l'on vient de voir sont en fait le début du développement en série de Fourier de :

$$\begin{aligned} l + \varpi - M & \text{ en série de } M \\ \alpha - l & \text{ en série de } l \end{aligned}$$

On pourrait donc poursuivre pour affiner les formules. On s'y prendrait toutefois autrement, en introduisant notamment les fonctions de Bessel. Les formules trouvées ici suffisent pour assurer une précision de  $1''$ . On a :

$$\begin{aligned} E &= 115'' \sin M - 148'' \sin 2l \\ &= 460^S \sin M - 592^S \sin 2l \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec

$$\alpha = \varpi + M + E = \alpha_m + E$$

---

<sup>1</sup>Il peut paraître surprenant de voir que l'effet de l'obliquité est du même ordre de grandeur que l'effet de l'excentricité.

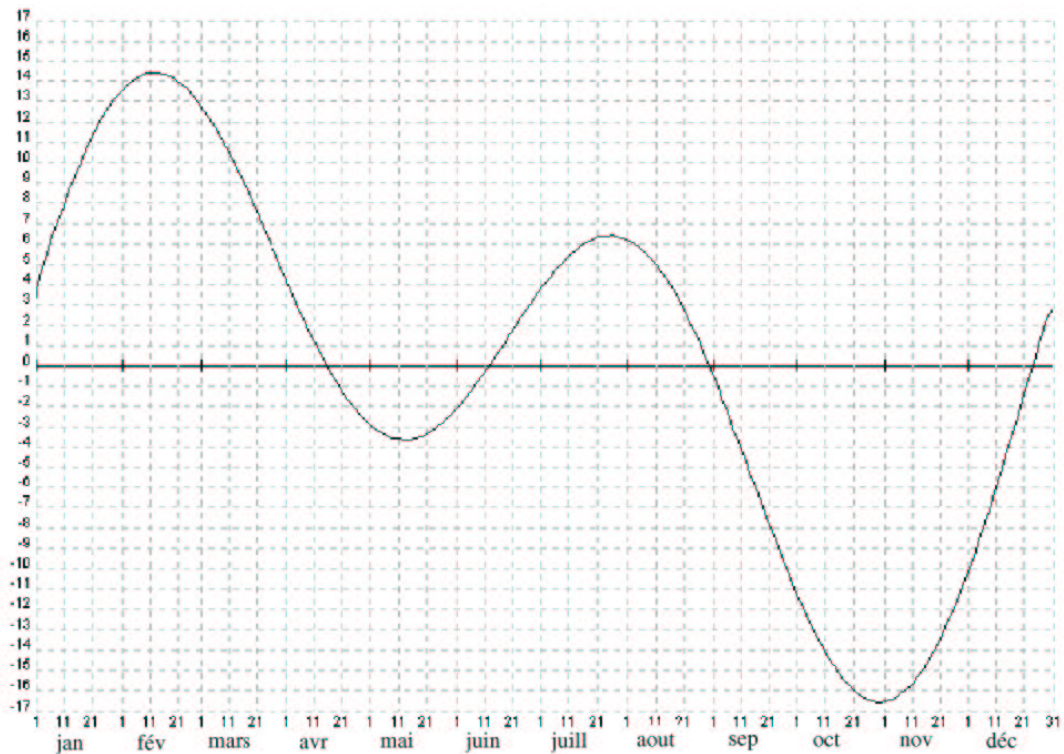


FIG. 4.2 – Equation du temps (en minutes) pour 2003 (réalisé avec le logiciel “Shadow 1.5.4”)

où  $\alpha_m$  est la partie linéaire de  $\alpha$ . De cette manière l’angle horaire du Soleil s’écrit

$$\begin{aligned} H &= (\theta - \alpha) \\ &= (\theta - \alpha_m) - E \end{aligned}$$

, soit encore

$$H = H_m - E$$

L’expression de  $E$  est appelée “équation du temps” et elle est représentée pour 2003 sur la figure (4.2).

Les notions introduites dans la section (4.2) restent vraies si on ajoute le qualificatif moyen.

Le temps solaire moyen local est :

$$t = H_m \pm 12 h \quad (4.7)$$



FIG. 4.3 – Courbe en 8 montrant l’effet de l’équation du temps dans le ciel de Crimée (V. Rummyantsev/observatoire de Naucsny). On a superposé des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours le matin à la même heure

Le jour solaire moyen est tel que  $\frac{dH_m}{dt} = 1$  tour par jour solaire moyen.

Les autres sont qualifiées de vraies : Le temps solaire vrai local est  $H \pm 12h$ . Le terme de “temps” est ici impropre car il ne peut s’identifier au temps newtonien (celui que l’on utilise dans les équations de la mécanique). C’est pourtant ce “temps” qui est donné par les cadrans solaires.

Le temps newtonien est accessible par le temps solaire moyen.

Enfin, le temps solaire moyen local de Greenwich est appelé Temps Universel (TU ou UT pour Universal Time).

En superposant des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours à la même heure, on devine une courbe en 8. Si cette photo est faite vers midi l’axe du 8 est vertical sinon celui-ci est incliné comme sur la photo de la figure (4.3). L’axe de symétrie du 8 correspond aux variations en déclinaisons et l’axe perpendiculaire (donc suivant l’équateur céleste) représente les écarts dus à l’équation du temps.

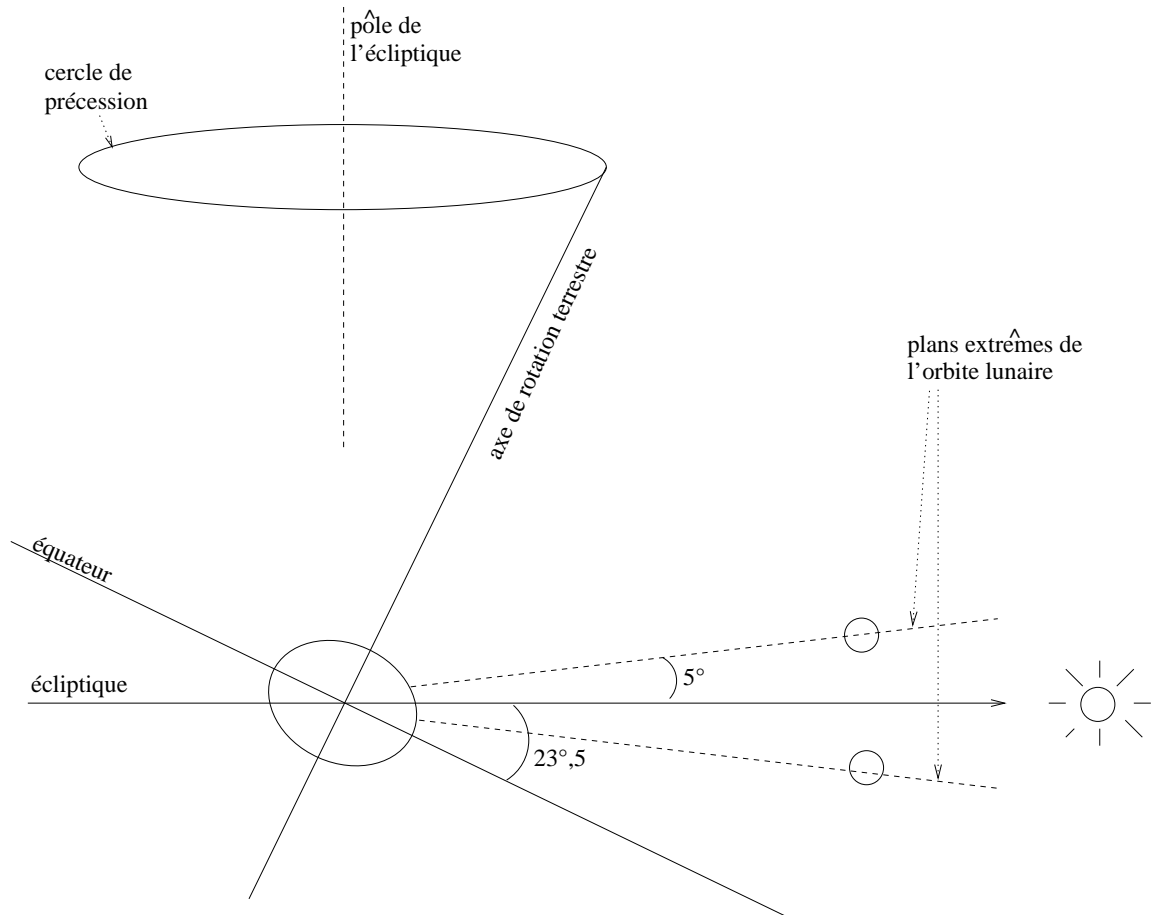


FIG. 4.4 – Action conjuguée de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre qui induit le phénomène de précession.

Cette courbe en 8, appelée aussi analemne, est quelques fois dessinée sur les cadrans solaires. Cela permet d'effectuer, directement à la lecture, la correction due à l'équation du temps.

Quand  $E$  est maximum ou minimum, l'heure donnée par un cadran solaire est erronée (l'erreur atteint plus de 16 minutes le 31 octobre) mais la marche du cadran est juste puisque  $\frac{dE}{dt} = 0$  pour ces dates. Inversement aux points d'inflexion  $\frac{dE}{dt}$  est extrémum. Par exemple le 22 décembre,  $\frac{dE}{dt} = 3,2 \cdot 10^{-4}$  et donc le jour solaire vrai à cette date est 24h 0mn 28s.

## 4.4 Précession

Jusqu'à maintenant, on a supposé que le point  $\gamma$  était fixe. Or, l'action conjuguée de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre fait que l'axe de rotation de la Terre tourne autour du pôle de l'écliptique à la manière d'une toupie dont l'axe de rotation tourne autour de la verticale (figure 4.4).

L'axe de rotation de la Terre parcourt le cercle de précession en 26 000 ans . Ainsi le point  $\gamma$  ou point vernal dont la longitude est 0 par définition se déplace parmi les étoiles. Ce mouvement est appelé précession des équinoxes (précession car il se déplace en sens inverse du Soleil). Le point  $\gamma$  tourne donc sur l'écliptique à raison de 1 tour en 26 000 ans (25 778 ans plus exactement).

Le temps que met la longitude du Soleil pour augmenter de  $360^\circ$  est l'année tropique qui est égale à 365,242 198 79 jours solaires moyens. Or partant du point vernal  $\gamma_1$  d'une année et arrivant au point  $\gamma_2$  de l'autre année, le Soleil doit encore parcourir l'arc  $\widehat{\gamma_1\gamma_2} = \frac{1}{25778}$  tour = 50," 275. Le temps mis pour faire un tour complet sur l'écliptique est donc plus long, c'est l'année sidérale.

### Calendrier grégorien

Ce calendrier est universellement reconnu.<sup>2</sup> Il est basé sur l'année tropique afin que l'année civile soit calée sur le rythme des saisons.

En 46 avant JC, Jules César fixait l'équinoxe de printemps au 25 mars et imposait le système des années bissextiles : 3 années communes de 365 jours sont suivies d'une année bissextile de 366 jours (celle dont le millésime est divisible par 4). Ainsi la durée moyenne de l'année dite julienne vaut 365.25 jours. L'écart avec l'année tropique est donc de 0, 0078 jour (par an).

En 1582 le calendrier julien ayant pris de l'avance sur les saisons, le printemps tombait le 11 mars. C'est pourquoi le Pape Grégoire XIII décréta que le jeudi 4 octobre 1582 serait suivi du vendredi 15 octobre. Il ne supprima donc que 10 jours afin que le printemps soit le 21 mars ( pour respecter les choix du Concile de Nicée relatif à Pâques qui ne doit pas être fêté à la nouvelle lune). Mais surtout, il décréta une diminution de l'année civile de 0,0075 jour : les années séculaires rondes ne sont bissextiles que si le nombre des centaines est divisible par 4. Ainsi, les années 1700, 1800, 1900 sont communes alors que l'année 2000 est bissextile. La durée moyenne de l'année civile est maintenant de

---

<sup>2</sup>Les autres calendriers sont éventuellement utilisés en parallèle pour organiser diverses traditions culturelles ou religieuses.

$365 + 1/4 - 3/400 = 365,2425$  jours, la différence avec l'année tropique n'est plus que de 0,0003 jour. Cette différence ne sera visible que dans environ 3000 ans (décalage de 1 jour).

Le calendrier grégorien a été adopté immédiatement en Italie, Espagne et Portugal. En France, c'est le roi Henri III qui décréta la suppression de 10 jours la même année, le dimanche 9 décembre 1582 étant suivi du lundi 20 décembre. Les anglais passèrent du calendrier julien au calendrier grégorien en 1752 (le lendemain du mercredi 2 septembre 1752 étant le jeudi 14 septembre<sup>3</sup>). Les autres pays n'ont adopté le calendrier grégorien que plus tard : le Japon en 1873, la Bulgarie et l'Albanie en 1912, la Russie en 1918<sup>4</sup>, la Chine en 1912, la Roumanie et la Yougoslavie en 1919, la Grèce en 1923, la Turquie en 1926.

---

<sup>3</sup>Cela provoqua quelques émeutes car la population pensait que le gouvernement essayait de leur voler onze jours de salaire.

<sup>4</sup>Ce qui explique que les commémorations de la révolution d'octobre 1917 sur la place rouge se faisaient, du temps de l'Union Soviétique, en novembre.