

# L'inégalité de De Haerdtl : une richesse dynamique insoupçonnée dans le système des satellites galiléens

Benoît NOYELLES & Alain VIENNE

13 juin 2006

## Résumé

L'objet de cette étude est d'examiner les effets dynamiques de l'inégalité de De Haerdtl 7 : 3 entre les satellites galiléens de Jupiter Ganymède et Callisto, au moyen d'outils numériques de détection et d'analyse de chaos. Nous montrons que l'inégalité de De Haerdtl est inductrice de chaos, et que le chaos est important à partir du moment où l'une ou l'autre des excentricités de Ganymède et Callisto est supérieure à  $3 \times 10^{-3}$ , ce qui est le cas actuellement. Cependant, l'obliquité de Jupiter est en partie responsable de ce chaos.

## Introduction

Les 4 satellites galiléens, J-1 Io, J-2 Europe, J-3 Ganymède et J-4 Callisto, sont particulièrement massifs. Ces masses ont pour conséquence d'importantes perturbations mutuelles qui provoquent un certain nombre de phénomènes intéressants. Après une courte revue de ces phénomènes nous détaillons une étude numérique du chaos induit par l'inégalité de De Haerdtl. Cette inégalité résulte d'une quasi-commensurabilité de moyens mouvements 7 : 3 entre Ganymède et Callisto. Ses effets dynamiques à long terme sont méconnus, et tous les scénarii d'évolution orbitale des satellites galiléens la négligent.

## 1 La dynamique des satellites galiléens

La dynamique des satellites galiléens se caractérise essentiellement par la résonance dite laplacienne impliquant Io, Europe et Ganymède. De nombreux scénarii ont été élaborés dans le passé afin d'expliquer la capture dans cette résonance.

### 1.1 Une grande richesse dynamique

L'importance des masses des satellites galiléens provoque un certain nombre de termes à longue période, des librations, une résonance, ainsi qu'une grande inégalité. Plus précisément on a :

- $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$  libre autour de 0 en 1.7 jour
- $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2$  libre autour de  $\pi$  en 486 jours

| $z_3$ | amplitude | période   | ident.                   | $\zeta_4$ | amplitude | période   | ident.  |
|-------|-----------|-----------|--------------------------|-----------|-----------|-----------|---------|
|       | 1530 km   | 135.2 ans | $\nu_3$                  |           | 14471 km  | $\infty$  | $\nu_0$ |
|       | 826 km    | 536.5 ans | $\nu_4$                  |           | 8457 km   | 562.9 ans | $\nu_8$ |
|       | 634 km    | 1.3 ans   | $\lambda_1 - 2\lambda_2$ |           | 981 km    | 137.7 ans | $\nu_7$ |

TAB. 1 – Solutions de  $z_3 = e_3 \exp(\sqrt{-1}\varpi_3)$  et  $\zeta_4 = \sin \frac{i_4}{2} \exp(\sqrt{-1}\Omega_4)$  dans les éphémérides L1-2 (Lainey et al. 2006 [4]). On constate par exemple que le péricentre de Ganymède  $\varpi_3$  ne peut pas être considéré comme un mode propre puisque le deuxième terme de la décomposition en fréquences de  $z_3$  a une amplitude supérieure à la moitié du premier, donc n’est pas négligeable. Le cas de  $\zeta_4$  est intéressant puisqu’il montre l’importance du plan invariant.

- $\lambda_2 - 2\lambda_3 + \varpi_2$  libre autour de 0 en 486 jours
- $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$  est en résonance (dite laplacienne), ce qui provoque une libration de cet argument autour de  $\pi$ , d’amplitude  $0.5^\circ$ , et de période 2060 jours
- $3\lambda_3 - 7\lambda_4$  circule en 8058 jours, car les moyens mouvements de Ganymède et Callisto sont en quasi-commensurabilité 7 : 3 (inégalité de De Haerdtl)

On ne peut parler de résonance pour les 3 premiers arguments. La libration de ces arguments est un simple effet géométrique dû au fait que ceux-ci sont des combinaisons entières de coordonnées et non de modes propres. En effet, l’importance des perturbations mutuelles (due aux masses) rend les nœuds et péricentres inassimilables aux éléments propres, comme le montre le tableau 1. Dans ce tableau, les éléments propres sont notés de  $\nu_0$  à  $\nu_8$ ,  $\nu_0$  désignant le plan invariant du système des satellites galiléens,  $\nu_1$  à  $\nu_4$  les modes propres proches des péricentres respectivement d’Io, Europe, Ganymède et Callisto, et  $\nu_5$  à  $\nu_8$  les modes propres proches des nœuds ascendants de ces mêmes satellites.

## 1.2 Différents modèles d’évolution

Depuis la fin des années 70 et la découverte des marées sur Io, de nombreux auteurs ont tenté d’expliquer la formation de la résonance laplacienne.

Dans les années 80, des travaux analytiques ont conduit à l’élaboration, notamment par Peale, Yoder & Henrard, de scénarii dans lesquels Io et Europe sont d’abord capturés dans une résonance 2 : 1, puis migrent en résonance, sous l’effet des marées, jusqu’à capturer Ganymède dans la résonance laplacienne. Par contre, Greenberg élaborait un scénario de formation primordiale de la résonance laplacienne.

Dans les années 90, les outils numériques ont permis de faire moins d’approximations, notamment les commensurabilités 2 : 1 Io-Europe et Europe-Callisto ne sont plus assimilées à des résonances. Ainsi, Showman et Malhotra (1997 [8]) ont élaboré différents scénarii dans lesquels Io, Europe et Ganymède ont connu d’autres résonances d’ordre 2 des masses avant la résonance laplacienne actuelle.

Enfin, Peale & Lee (2002 [7]) ont utilisé le modèle de formation de Canup & Ward (2002 [1]) pour élaborer un scénario de formation primordiale de la résonance laplacienne.

Aucun de ces scénarii ne prend en compte l’inégalité de De Haerdtl, c’est ce qui a motivé notre étude.

## 2 Étude de l'inégalité de De Haerdtl

Nous avons voulu nous focaliser sur l'inégalité de De Haerdtl afin de savoir s'il est légitime ou non de la négliger. Pour cela, nous avons considéré le système des satellites galiléens avant la formation de la résonance laplacienne. Ainsi, la fréquence de libration associée à l'argument résonant, actuellement de 2060 jours, n'intervient jamais. De plus, notre étude est numérique, car le nombre d'arguments associés à l'inégalité de De Haerdtl (plus de 200) rend déraisonnable toute étude analytique.

### 2.1 La méthode

Du fait des échelles de temps d'évolution d'un tel système (de l'ordre de plusieurs centaines de millions d'années), nous avons réalisé des intégrations numériques à long terme, dans lesquels les termes à courte période étaient moyennés. Cette moyennisation résultait d'une séparation analytique des différentes perturbations à l'aide des routines Maple de Duriez (2000 [3]), puis d'une moyennisation analytique.

Nous avons tenu compte des 4 satellites galiléens, et utilisé un système de 21 variables. Pour chaque satellite, les variables utilisées étaient :

- $a$  : demi-grand axe
- $h = e \cos \varpi$
- $k = e \sin \varpi$
- $p = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega$
- $q = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega$

De plus, nous avons utilisé comme 21ème variable  $3\lambda_3 - 7\lambda_4$ , relative à l'inégalité de De Haerdtl.

Les perturbations prises en compte étaient :

- l'aplatissement de Jupiter, avec les termes en  $J_2$ ,  $J_4$  et  $J_2^2$
- les perturbations mutuelles séculaires
- les perturbations séculaires solaires (solution à long terme de Laskar 1988 [5])
- l'inégalité de De Haerdtl

Les potentiels associés à ces perturbations sont développés jusqu'au degré 2 en excentricité / inclinaison, à l'exception des termes liés à l'inégalité de De Haerdtl qui le sont au degré 4 (soit au degré le plus bas).

### 2.2 Le chaos

Il est important de savoir si cette inégalité est inductrice de chaos, pour cela nous avons utilisé la méthode des cartes de fréquence de Laskar (1993 [6]) pour détecter ce chaos et déterminer ses conditions d'apparition en fonction des valeurs des excentricités et des inclinaisons.

Les valeurs actuelles d'excentricités et d'inclinaisons de Ganymède et de Callisto sont recensées Table 2. On peut remarquer la distinction d'une partie libre et d'une partie forcée. La partie forcée est la valeur moyenne du paramètre considéré lorsque sa condition initiale est très faible, tandis que la partie libre est liée directement à la condition initiale. Cette partie libre représente la marge de manœuvre que l'on a pour faire varier un paramètre dynamique

| Paramètre                  | valeur actuelle       | partie forcée         | partie libre          |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $e_3$                      | $1.53 \times 10^{-3}$ | $9.6 \times 10^{-4}$  | $5.7 \times 10^{-4}$  |
| $\gamma_3 = \frac{i_3}{2}$ | $1.93 \times 10^{-3}$ | $7.9 \times 10^{-4}$  | $1.14 \times 10^{-3}$ |
| $e_4$                      | $7.37 \times 10^{-3}$ | $2.1 \times 10^{-4}$  | $7.16 \times 10^{-3}$ |
| $\gamma_4 = \frac{i_4}{2}$ | $3.93 \times 10^{-3}$ | $3.93 \times 10^{-3}$ | faible                |

TAB. 2 – Paramètres dynamiques de Ganymède et Callisto. Ces valeurs ont été obtenues avec notre système d'équations et des conditions initiales issues de la théorie L1-2 privée des termes n'intervenant pas dans notre système.

indépendamment des autres. On peut notamment remarquer que l'inclinaison actuelle de Callisto est entièrement forcée, ceci est dû à l'inclinaison du Soleil par rapport à l'équateur jovien, donc en fait à l'inclinaison de Jupiter.

Les cartes obtenues sont constituées de 5700 points qui diffèrent par leurs conditions initiales  $a_3$  et  $a_4$ .  $a_3$  varie entre 1070150 et 1070700 km, et  $a_4$  entre 1883080 et 1883200 km. Ainsi, le rapport des demi-grands axes  $\alpha$  varie entre 0.56826 et 0.56859, ceci afin de couvrir la zone où sont localisées les résonances associées à l'inégalité de De Haerdtl.

Nous avons également cherché à identifier les résonances responsables de l'éventuel chaos détecté, pour cela nous avons, au cours de nos simulations numériques, reconstruit les différents arguments liés à l'inégalité de De Haerdtl afin de visualiser leur comportement. Ces simulations numériques ont été réalisées avec comme conditions initiales les valeurs actuelles des paramètres dynamiques, à l'exception de  $a_3$ , variable comme dans le cas des cartes.

## 3 Résultats

### 3.1 Conditions d'apparition du chaos

La Figure 1 montre 2 cartes de fréquence pour des paramètres dynamiques actuels avec et sans l'inégalité de De Haerdtl. On peut constater clairement qu'avec ces valeurs, l'inégalité de De Haerdtl est inductrice de chaos.

En faisant varier les parties libres des excentricités et inclinaisons, on constate que :

1. Lorsque  $e_4$  (excentricité de Callisto) est petit, le chaos est important pour  $e_3 > 3 \times 10^{-3}$ .
2. Avec la valeur actuelle d' $e_3$  ( $1.5 \times 10^{-3}$ ), le chaos est important pour  $e_4 > 3 \times 10^{-3}$  (actuellement,  $e_4$  vaut environ  $7 \times 10^{-3}$ , donc les valeurs actuelles de  $e_3$  et  $e_4$  vérifient cette condition).
3. Il y a toujours au moins un peu de chaos. La raison est la valeur forcée de l'inclinaison de Ganymède  $\gamma_4$ . Ceci veut dire que le chaos induit par l'inégalité de De Haerdtl est en partie dû à l'obliquité de Jupiter

### 3.2 Identification du chaos

Dans un système planétaire, le chaos est généralement dû à la diffusion de Chirikov (1979 [2]), qui consiste en la superposition de différentes résonances. Les résultats sont en cours d'analyse, mais déjà des captures en résonances (stables ou instables, cf. Fig.2) ont été

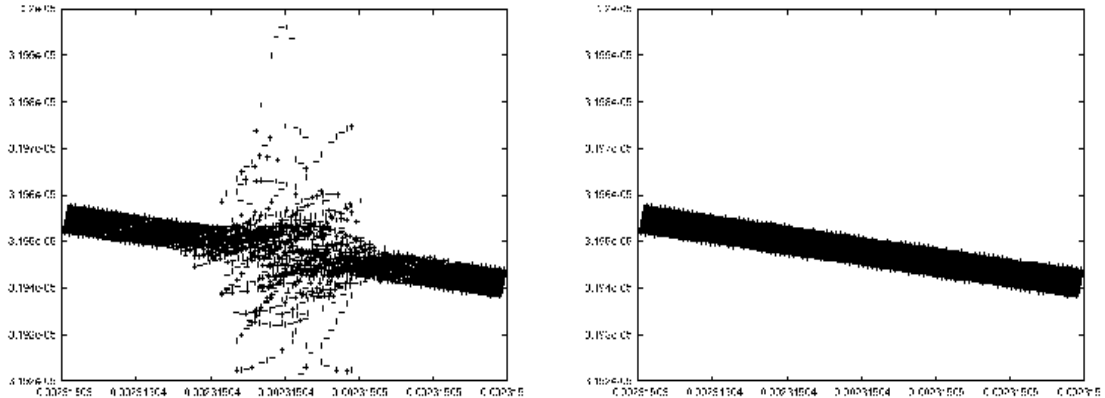


FIG. 1 – Cartes de fréquences  $(\nu_1, \nu_4)$  pour le système considéré avec les valeurs actuelles d'excentricité et d'inclinaison, en tenant compte de l'inégalité de De Haerdtl (à gauche) et sans en tenir compte (à droite). La forte dispersion sur la carte de gauche, comparée à la régularité de la carte de droite, indique clairement que l'inégalité de De Haerdtl est inductrice de chaos.

observées, ainsi que des cas de chaos stable (le système oscille aléatoirement d'une résonance à l'autre), signe d'un recouvrement de résonances. Des cas de résonance séculaire semblent également apparaître.

## Conclusion et perspectives

L'inégalité de De Haerdtl est inductrice de chaos, avec les valeurs actuelles d'excentricités et d'inclinaisons. L'identification du chaos, une fois terminée, permettra de connaître les principales résonances qui en sont responsables. Ceci sera un point de départ pour l'élaboration de scénarii incluant la résonance laplacienne. Ces scénarii devront tenir compte de l'évolution à long terme de l'obliquité de Jupiter, dont l'importance a été soulignée. Nous espérons qu'ils expliqueront l'actuelle différenciation de Ganymède par une ancienne excentricité élevée de ce satellite, preuve d'un épisode de chauffage important par les marées.

## Références

- [1] Canup R.M. & Ward W.R., 2002, AJ, 124, 3404
- [2] Chirikov B.V., 1979, Physics Reports, 52, 263
- [3] Duriez L., 2000, Notes Scientifiques et Techniques de l'IMCCE, S076, 7
- [4] Lainey V., Duriez L. & Vienne A., 2006, A&A, sous presse
- [5] Laskar J., 1988, A&A, 198, 341
- [6] Laskar J., 1993, Physica D, 67, 257
- [7] Peale S.J. & Lee M.H., 2002, Science, 298, 593
- [8] Showman A.P. & Malhotra R., 1997, Icarus, 127, 93

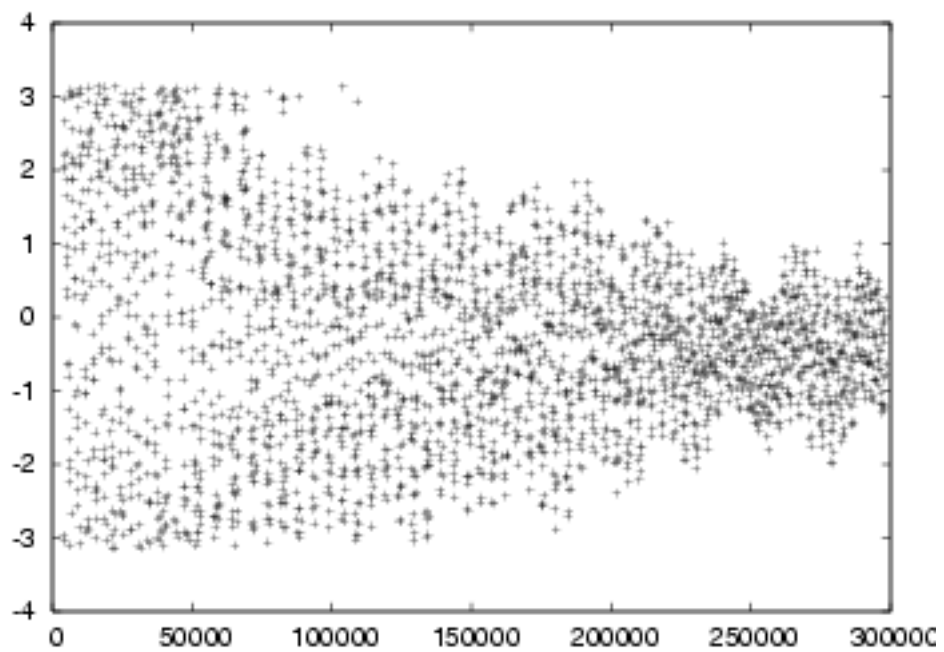


FIG. 2 – Capture dans la résonance d'argument  $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_0 + \nu_3 + \nu_4$ . L'unité de temps est l'année.