

# Étude en 3 dimensions de la rotation de Titan

B. Noyelles, A. Lemaître (FUNDP, Namur) & A. Vienne

## Introduction

À l'instar de la plupart des satellites naturels, Titan est en rotation synchrone. Il s'agit d'un état d'équilibre dynamique qui a pour conséquence que Titan présente toujours la même face à un éventuel observateur saturnien.

L'étude de la rotation d'un corps nécessite de connaître des paramètres de son champ de gravité qui traduisent son asphéricité. Malheureusement, de tels paramètres ne peuvent être connus avec une bonne précision que grâce aux survols des sondes spatiales, ce qui a interdit l'étude de la rotation des satellites naturels, à l'exception de la Lune, pendant de nombreuses années. Récemment, les premiers survols de Titan par la sonde Cassini ont permis de connaître, outre la masse déjà connue, les paramètres  $J_2$  et  $C_{22}$ <sup>1</sup>, rendant possible une telle étude.

Nous présentons ici une première étude en 3 dimensions de la rotation de Titan. Titan est considéré comme un ellipsoïde rigide triaxial dont 2 paramètres de forme ( $J_2$  et  $C_{22}$ ) sont bien connus et un troisième (le moment d'inertie polaire  $C$ ) pour lequel 2 valeurs sont utilisées. En effet, ce dernier paramètre est mal contraint<sup>2</sup>. L'étude consiste tout d'abord à élaborer une théorie synthétique de la rotation de Titan, avec une approche analytique et une approche numérique qui sont confrontées. Cette théorie a permis de mettre en lumière la possibilité d'un forçage du wobble, i.e. l'angle séparant l'axe des pôles de l'axe du moment cinétique. Dans une troisième partie ce forçage est étudié.

## 1. Étude analytique

Cette étude fait écho aux travaux de Jacques Henrard sur la rotation des satellites galiléens. Ces travaux consistaient en une étude générale de la rotation de ces satellites en considérant leurs orbites comme circulaires (Henrard & Schwanen 2004 [3]), puis des études particulières ont été réalisées pour Io (Henrard 2005 [6]) et Europe ([7] & [8]). Tous ces satellites ont pour point commun d'avoir un nœud orbital qui précède, ce qui n'est pas le cas de Titan. Pour cette raison, nous reprenons dans cette étude analytique le principe des études précédentes, en l'appliquant à un corps en rotation synchrone dont le nœud ne précède pas.

### 1.1 Le modèle

Il s'agit d'une étude en 3 dimensions qui permet de distinguer le mouvement du corps géométrique de Titan du mouvement de son moment cinétique. Ainsi, 3 repères sont considérés :

1. un repère inertiel ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ) (ici le repère de référence des éphémérides TASS, i.e. équateur de Saturne - écliptique J2000)
2. un repère ( $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ ) lié au moment cinétique de Titan
3. un repère ( $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ) lié à Titan

Ces 3 repères impliquent l'utilisation des variables canoniques d'Andoyer (Andoyer 1926 [1]) :

$$\begin{array}{ll} l & L = G \cos J \\ g & G \\ h & H = G \cos K \end{array}$$

où  $l$ ,  $g$  et  $h$  sont des angles et  $L$ ,  $G$  et  $H$  leurs moments associés.  $G$  représente la norme du moment cinétique de Titan et  $L$  et  $H$  sont ses projections respectivement sur  $\vec{f}_3$  (l'axe des pôles de Titan) et  $\vec{e}_3$  (lié au repère inertiel).  $K$  représente l'obliquité de Titan (angle entre l'axe de référence et le moment cinétique), et  $J$  son wobble (angle entre le moment cinétique et l'axe des pôles de Titan). Ces variables sont illustrées Fig.1.

Malheureusement ces variables présentent 2 singularités : si  $J = 0$  (i.e. si le moment cinétique est colinéaire à l'axe des pôles),  $l$  et  $g$  sont indéfinis, et si  $K = 0$  (i.e. moment cinétique colinéaire à l'axe de référence) alors  $g$  et  $h$  sont indéfinis. Pour cette raison, on préfère utiliser les variables d'Andoyer modifiées :

<sup>1</sup>Ces paramètres traduisent respectivement l'aplatissement polaire et l'ellipticité équatoriale du corps considéré.

<sup>2</sup>Il est généralement estimé en faisant l'hypothèse que le corps est à l'équilibre hydrostatique. Malheureusement, cette hypothèse semble fautive pour Titan.

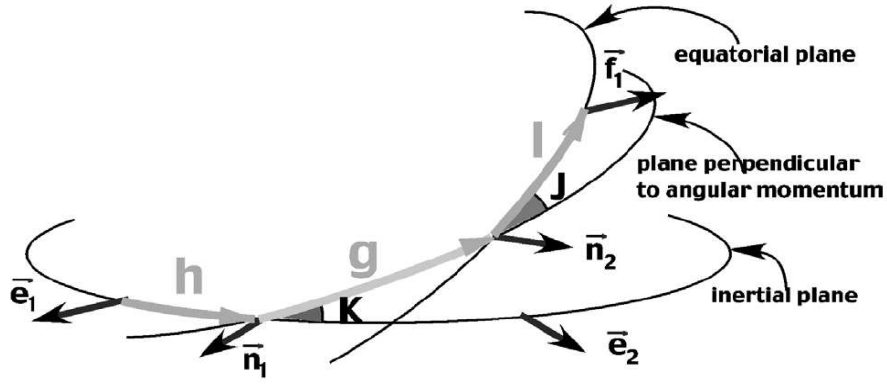


FIG. 1: Les variables d'Andoyer (repris de Henrard 2005 [6]).

$$\begin{aligned}
 p &= l + g + h & P &= \frac{G}{nC} \\
 r &= -h & R &= \frac{G-H}{nC} = P(1 - \cos K) = 2P \sin^2 \frac{K}{2} \\
 \xi_q &= \sqrt{\frac{2Q}{nC}} \sin q & \eta_q &= \sqrt{\frac{2Q}{nC}} \cos q
 \end{aligned}$$

où  $n$  est le moyen mouvement orbital de Titan,  $q = -l$ , et  $Q = G - L = G(1 - \cos J) = 2G \sin^2 \frac{J}{2}$ .

## 1.2 Le Hamiltonien

Le Hamiltonien du problème se compose de 2 parties :

1. l'énergie cinétique, qui représente la libre rotation (i.e. le mouvement d'une toupie)
2. l'énergie potentielle, qui est ici l'influence gravitationnelle de Saturne sur la rotation

L'énergie cinétique se calcule ainsi

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{G} \quad (1)$$

où  $\vec{\omega}$  est le vecteur de rotation instantané et  $\vec{G}$  est le moment cinétique. Dans le repère lié à Titan  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ , on a

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{f}_1 + \omega_2 \vec{f}_2 + \omega_3 \vec{f}_3 \quad (2)$$

et

$$\vec{G} = A \omega_1 \vec{f}_1 + B \omega_2 \vec{f}_2 + C \omega_3 \vec{f}_3 \quad (3)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments d'inertie principaux de Titan, avec  $A \leq B \leq C$ . Des définitions des angles  $l$  et  $J$  on déduit :

$$\vec{G} = G \sin J \sin l \vec{f}_1 + G \sin J \cos l \vec{f}_2 + G \cos J \vec{f}_3 \quad (4)$$

d'où

$$\vec{\omega} = \frac{G}{A} \sin J \sin l \vec{f}_1 + \frac{G}{B} \sin J \cos l \vec{f}_2 + \frac{G}{C} \cos J \vec{f}_3 \quad (5)$$

et enfin

$$\frac{1}{2} (\vec{\omega} | \vec{G}) = \frac{G^2 - L^2}{2} \left[ \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right] + \frac{L^2}{2C} \quad (6)$$

ce qui donne, dans les variables d'Andoyer modifiées :

$$T = \frac{nP^2}{2} + \frac{n}{8} \left[ 4P - \xi_q^2 - \eta_q^2 \right] \left[ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \xi_q^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2} \eta_q^2 \right] \quad (7)$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{2C - A - B}{2C} = J_2 \frac{M_T R_T^2}{C} \quad (8)$$

et

$$\gamma_2 = \frac{B - A}{2C} = 2C_{22} \frac{M_T R_T^2}{C}. \quad (9)$$

Ce dernier potentiel a dû être divisé par  $nC$  car il s'agit du facteur de la transformation canonique permettant de passer des variables d'Andoyer aux variables d'Andoyer modifiées.

Le potentiel perturbateur dû à un Saturne ponctuel s'exprime par :

$$V = -\mathcal{G} M_{\text{Sat}} \int \int \int_W \frac{\rho dW}{d'} \quad (10)$$

où  $M_{\text{Sat}}$  est la masse de Saturne,  $\rho$  la masse volumique de Titan (de volume  $W$ ), et  $d'$  la distance entre Saturne et un élément de volume de Titan. Tous calculs faits, on a

$$V = n^2 C \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \left[ \delta_1 (x^2 + y^2) + \delta_2 (x^2 - y^2) \right] \quad (11)$$

avec

$$\delta_1 = -\frac{3}{2} \left( \frac{n^*}{n} \right)^2 \gamma_1 \quad (12)$$

$$\delta_2 = -\frac{3}{2} \left( \frac{n^*}{n} \right)^2 \gamma_2 \quad (13)$$

et où  $d$  est la distance instantanée Titan-Saturne et  $d_0$  la distance moyenne.  $(x, y, z)$  est le vecteur unitaire Titan-Saturne dans le repère lié à Titan  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . On l'obtient à partir de ses coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  dans le repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  en effectuant 5 rotations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(-l) R_1(-J) R_3(-g) R_1(-K) R_3(-h) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (14)$$

avec

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

et

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (16)$$

On peut finalement ajouter le potentiel perturbateur dû à l'aplatissement de Saturne  $J_{2\text{Sat}}$ , issu de (Henrard 2005 [8]) :

$$V_o = \delta_s C n^2 \left( \frac{d_0}{d} \right)^5 \left[ \delta_1 (x^2 + y^2) + \delta_2 (x^2 - y^2) \right] \quad (17)$$

avec

$$\delta_s = \frac{5}{2} J_{2\text{Sat}} \left( \frac{R_{\text{Sat}}}{d_0} \right)^2 \quad (18)$$

où  $R_{\text{Sat}}$  est le rayon de Saturne.

Finalement, on déduit des équations (7), (11) et (17) que le Hamiltonien du problème est :

$$\mathcal{H} = \frac{nP^2}{2} + \frac{n}{8} \left[ 4P - \xi_q^2 - \eta_q^2 \right] \left[ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \xi_q^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2} \eta_q^2 \right] + n \left( \frac{d_0}{d} \right)^3 \left( 1 + \delta_s \left( \frac{d_0}{d} \right)^2 \right) [\delta_1(x^2 + y^2) + \delta_2(x^2 - y^2)] \quad (19)$$

Enfin, dans le cadre de cette étude analytique, l'orbite de Titan est considérée comme circulaire à inclinaison constante. On a donc

$$x_i = - \left( \cos \delta \Omega_6 \cos(\lambda_6 - \delta \Omega_6) - \cos I_6 \sin \delta \Omega_6 \sin(\lambda_6 - \delta \Omega_6) \right) \quad (20)$$

$$y_i = - \left( \sin \delta \Omega_6 \cos(\lambda_6 - \delta \Omega_6) + \cos I_6 \cos \delta \Omega_6 \sin(\lambda_6 - \delta \Omega_6) \right) \quad (21)$$

et

$$z_i = - \sin I_6 \sin(\lambda_6 - \delta \Omega_6) \quad (22)$$

où  $I_6$  est l'inclinaison orbitale de Titan,  $\delta \Omega_6$  son nœud ascendant et  $\lambda_6$  sa longitude moyenne.<sup>3</sup>

### 1.3 Caractérisation de l'équilibre

On considère ici que Titan est exactement à l'état de Cassini. Ceci implique que :

- L'axe de plus petite inertie  $\vec{f}_1$  est toujours dirigé vers le centre de masse de Saturne, ce qui donne  $p - \lambda_{\vec{f}_1} = 0$ ,  $\lambda_{\vec{f}_1} = \lambda_6 - \pi$  étant la longitude moyenne de Saturne dans le repère  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ .
- Le nœud ascendant du repère  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  précède à la même vitesse que le nœud orbital de Titan (donc il ne précède pas), ce qui donne  $r + \delta \Omega_{\vec{f}_1} = 0$ , où  $\delta \Omega_{\vec{f}_1} = \delta \Omega_6$  est l'argument du nœud ascendant de Saturne.
- Il n'y a pas de wobble ( $J = 0$ ), donc  $\xi_q = \eta_q = 0$ .

Il est dans ce cas pratique d'introduire ce nouveau jeu de variables canoniques :

$$\begin{array}{ll} \sigma = p - \lambda_6 + \pi & P \\ \rho = r + \delta \Omega_6 & R \\ \xi_q & \eta_q \end{array}$$

où  $\sigma$  est l'angle entre  $\vec{f}_1$  et l'axe Titan-Saturne (c'est aussi l'argument de la résonance spin-orbite), et  $\rho$  la différence des nœuds.

De cette façon, le Hamiltonien (19) devient

$$\mathcal{H} = \frac{nP^2}{2} - nP + n\delta_1(1 + \delta_s)[a_1 \sin^2 K + a_2 \sin K \cos K \cos \rho + a_3 \cos 2\rho(1 - \cos 2K)] + n\delta_2(1 + \delta_s)[b_1(1 + \cos K)^2 \cos 2\sigma + b_2 \sin K(1 + \cos K) \cos(2\sigma + \rho) + b_3 \sin^2 K \cos(2\sigma + 2\rho) + b_4 \sin K(1 - \cos K) \cos(2\sigma + 3\rho) + b_5(1 - \cos K)^2 \cos(2\sigma + 4\rho)] \quad (23)$$

où la longitude moyenne a disparu après moyennisation. Les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont explicités dans (Noyelles et al. 2008 [11]).

À l'équilibre on a  $\sigma = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 0$  et  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = 0$ . Ces 2 dernières équations donnent

$$E_1(P, K) = n \left[ P - 1 + (1 + \delta_s) \Delta \frac{\cos K - 1}{P \sin K} \right] = 0 \quad (24)$$

et

$$E_2(P, K) = \delta \dot{\Omega}_6 + (1 + \delta_s) \frac{n\Delta}{P \sin K} = 0 \quad (25)$$

avec

---

<sup>3</sup>L'indice 6 est dû au fait que Titan est le satellite S-6.

$$\begin{aligned} \Delta = & \delta_1 [a_1 \sin 2K + a_2 \cos 2K + 2a_3 \sin 2K] \\ & + \delta_2 [-2b_1 \sin K(1 + \cos K) + b_2(\cos K + \cos 2K) + b_3 \sin 2K \\ & + b_4(\cos K - \cos 2K) + 2b_5 \sin K(1 - \cos K)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Une résolution numérique, effectuée à l'aide des valeurs données dans la Tab.1, donne

$$K^* = 1.1204858615 \times 10^{-2} rad = 2311.168 arcsec = 38'31.168'' \quad (27)$$

et

$$P^* = 1. \quad (28)$$

Paramètres	Valeurs	Références
$n$	$143.9240478491399 rad.y^{-1}$	TASS1.6 [18]
$e$	0.0289	TASS1.6 [18]
$\gamma = \sin \frac{I_6}{2}$	$5.6024 \times 10^{-3}$	TASS1.6 [18]
$R_{\tilde{\eta}}$	58232 km	IAU 2000 [14]
$J_2 \tilde{\eta}$	$1.6298 \times 10^{-2}$	Pioneer & Voyager [2]
$M$	$2.36638 \times 10^{-4} M_{\tilde{\eta}}$	Pioneer & Voyager [2]
$R$	2575 km	IAU 2000 [14]
$\mathcal{G} M_{\tilde{\eta}}$	$3.77747586645 \times 10^{22}.km^3.y^{-2}$	Pioneer, Voyager + IERS 2003
$J_2$	$(3.15 \pm 0.32) \times 10^{-5}$	Cassini [17]
$C_{22}$	$(1.1235 \pm 0.0061) \times 10^{-5}$	Cassini [17]
$\frac{C}{M_T R_{\tilde{\eta}}^2}$	0.31	(...)

**TAB. 1:** Paramètres physiques et dynamiques.

Il est intéressant également de connaître les petits mouvements autour de cet équilibre. Il s'agit de petites oscillations libres dans les 3 dimensions. Nous détaillons ici le principe de leur détermination sans expliciter les différents calculs. Le lecteur pourra se référer à (Noyelles et al. 2008 [11]).

L'approche de ces termes libres se fait en 3 étapes :

- centrage du Hamiltonien (19) autour de l'équilibre précédemment calculé. Il s'agit d'une simple translation qui a pour effet d'éliminer la partie linéaire du Hamiltonien.
- découplage des modes propres du système. Il s'agit d'une diagonalisation dont le but est de travailler sur 3 degrés de liberté indépendants les uns des autres. Nous utilisons pour cela la *Untangling transformation* décrite dans (Henrard & Lemaître 2005 [4]).
- passage en variables action-angle.

Une fois ces étapes réalisées, les variables sont :

$$\begin{array}{cc} u & U \\ v & V \\ w & W \end{array}$$

et le Hamiltonien du système s'écrit

$$\mathcal{N} = \omega_u U + \omega_v V + \omega_w W \quad (29)$$

dans lequel les termes d'ordre supérieur ont été négligés. Ce Hamiltonien est trivialement intégrable, les solutions sont des termes sinusoïdaux de périodes respectives  $\frac{2\pi}{\omega_u}$ ,  $\frac{2\pi}{\omega_v}$  et  $\frac{2\pi}{\omega_w}$ , et d'amplitudes  $U$ ,  $V$  et  $W$ .

## 2. Étude numérique

L'étude analytique permet une description rigoureuse de la dynamique du système mais peut se révéler inefficace lorsque le système atteint une certaine complexité, du fait de la difficulté de sa mise en œuvre. Nous avons donc réalisé une étude numérique utilisant un modèle moins simple, étude que nous avons validée en comparant ses résultats à ceux de l'étude analytique.

**TAB. 2:** Fréquences fondamentales des petites librations autour de l'équilibre, pour 2 valeurs du moment d'inertie polaire  $C$ .

$\frac{C}{M_T R_T^2}$	0.31	0.35
$T_u$	2.098 y	2.226 y
$T_v$	167.488 y	188.988 y
$T_w$	306.336 y	346.236 y

## 2.1 Principe

Le principe consiste à intégrer numériquement les équations issues du Hamiltonien (19), et à réaliser une décomposition quasi-périodique des solutions obtenues afin, d'abord, de distinguer la partie libre de la partie forcée, et ensuite de déterminer les différentes contributions composant ces solutions. Le modèle orbital de Titan n'est plus un modèle circulaire mais un modèle complet issu des éphémérides TASS 1.6 (Vienne & Duriez 1995 [18]). Ces éphémérides sont constituées de modes propres (listés Tab.3) qui, ajoutés aux 3 modes propres de la rotation calculés précédemment, doivent constituer les solutions numériques du système. Il est à noter que les équations intégrées ne supposent pas a priori la résonance spin-orbite réalisée, cette résonance n'apparaît que dans les conditions initiales. Ces conditions initiales sont choisies arbitrairement très proches de la résonance, mais pas à la résonance exacte, de façon à ce que la solution libre soit détectable.

**TAB. 3:** Modes propres du système.

Mode propre	Fréquence ( $rad.y^{-1}$ )	Période	Cause
$\lambda_5$	508.00932017	4.52 d	Rhéea
$\lambda_6$	143.92404729	15.95 d	Titan
$\lambda_8$	28.92852233	79.33 d	Japet
$\phi_5$	0.17554922	35.79 y	$e_5$
$\Phi_5$	-0.17546762	35.81 y	$\gamma_5$
$\phi_6$	0.00893386	703.30 y	$e_6$
$\Phi_6$	-0.00893124	703.51 y	$\gamma_6$
$\phi_8$	0.00197469	3181.86 y	$e_8$
$\Phi_8$	-0.00192554	3263.07 y	$\gamma_8$
$\lambda_9$	0.21329912	29.46 y	Soleil
$u$	2.995	2.09773 y	$\sqrt{U}$
$v$	0.0375	167.4883 y	$\sqrt{V}$
$w$	0.0205	306.3360 y	$\sqrt{W}$

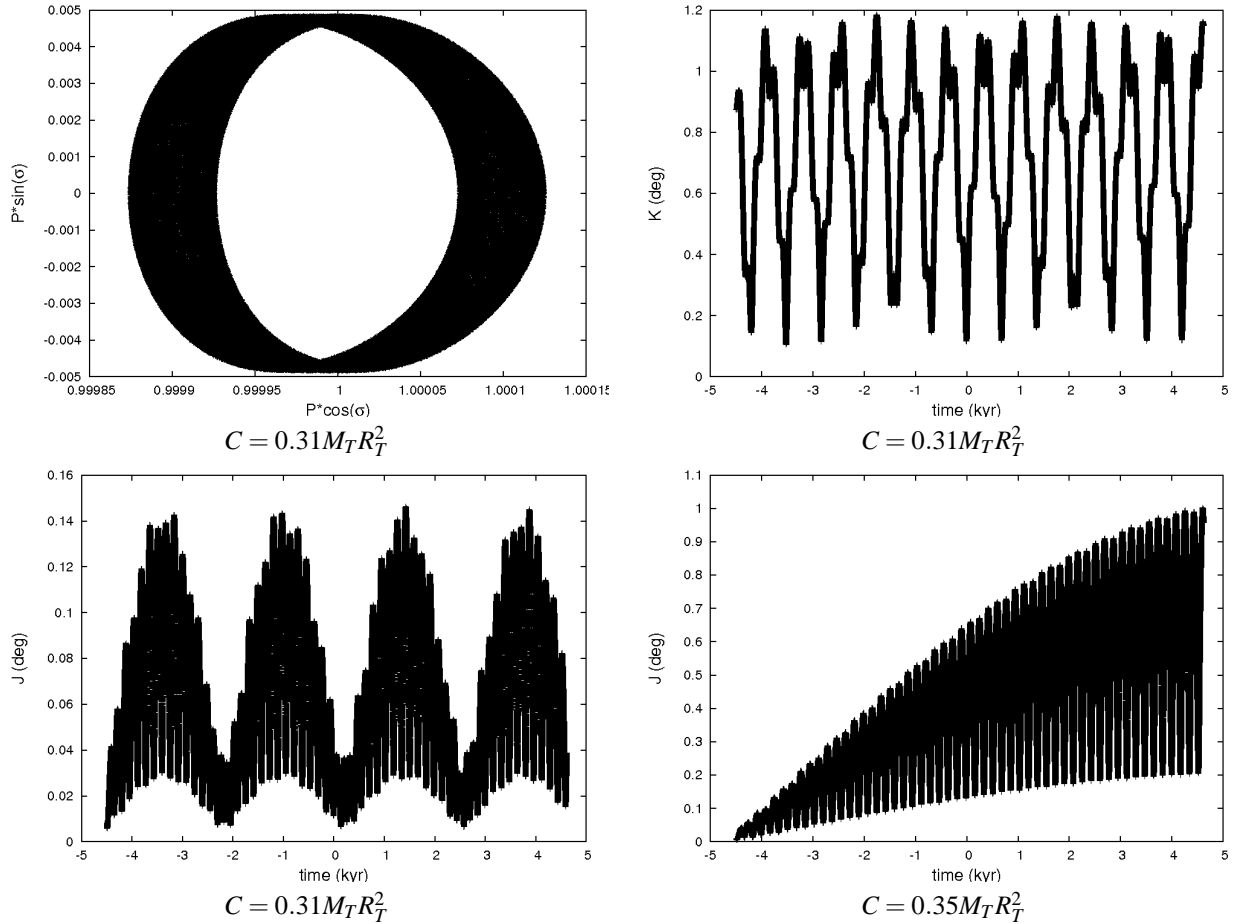
## 2.2 Résultats

2 intégrations numériques ont été réalisées, pour  $C = 0.31M_T R_T^2$  et  $C = 0.35M_T R_T^2$ , à chaque fois sur 9000 ans, car il s'agit de la limite de validité des éphémérides TASS1.6. La Table 4 indique un bon accord entre la solution analytique et la solution numérique pour les périodes des termes libres. Un écart significatif est à noter pour l'obliquité, il peut en partie s'expliquer par la prise en compte d'un modèle trop simple pour l'inclinaison dans l'étude analytique (cf. Noyelles 2008 [12]).

**TAB. 4:** Comparaison entre nos résultats analytiques et numériques, pour  $C = 0.31M_T R_T^2$ .  $\varepsilon$  désigne l'obliquité par rapport à la normale à l'orbite.

Paramètre	Analytique	Numérique	Écart
$K^*$ (rad)	$1.1204859 \times 10^{-2}$	$1.25481164 \times 10^{-2}$	12%
$\varepsilon$ (arcmin)	0	2.233	(...)
$T_u$ (y)	2.094508	2.09773	0.15%
$T_v$ (y)	167.36642	167.49723	0.08%
$T_w$ (y)	306.62399	306.33602	0.09%

La Figure 2 montre les évolutions des variables  $P \exp(i\sigma)$ ,  $K$  et  $J$  lors des intégrations numériques. On peut vérifier que l'angle résonnant  $\sigma$  est bien centré sur 0 et  $P$  sur 1, ce qui confirme que le système est bien en synchronisation spin-orbite. L'évolution de l'obliquité  $K$  (par rapport à la normale au plan de référence) indique une période d'environ 700 ans, il s'agit du mode propre  $\Phi_6$  forcé par les éphémérides, dû aux oscillations du noeud orbital de Titan autour d'une valeur constante. L'aspect visuel de ces 2 solutions ne change pas pour  $C = 0.35M_T R_T^2$ .



**FIG. 2:** Simulations numériques de la rotation de Titan. L'origine des temps est  $J1980 = 2444420JD$ .

Par contre, le comportement du wobble  $J$  semble dépendre de la valeur de  $C$ . Lorsque  $C$  s'approche de  $0.35M_T R_T^2$ ,  $J$  semble avoir un comportement quasi-résonnant. On peut remarquer que dans ce cas, la période propre associée au wobble s'approche de 350 ans, or 2 modes propres issus des éphémérides ( $\phi_6$  et  $\Phi_6$ ) ont des périodes proches de 700 ans. On peut donc suspecter une résonance.

**TAB. 5:** Décomposition quasi-périodique de la variable associée au wobble  $\eta_q + \sqrt{-1}\xi_q$ , pour  $C = 0.31M_T R_T^2$ .

N°	Amp. $\times 10^4$	Phase (°)	T (y)	Ident.	Cause
1	9.12391728	-51.69	306.33602	$w$	$\sqrt{W}$
2	6.01688587	51.69	-306.33605	$-w$	$\sqrt{W}$
3	5.73033451	158.48	351.70284	$\phi_6 - \Phi_6$	$e_6 \gamma_6$
4	3.83212940	-158.48	-351.70284	$\Phi_6 - \phi_6$	$e_6 \gamma_6$
5	0.63642954	-35.86	135.27368	$v - \Phi_6$	$\sqrt{V} \gamma_6$
6	0.38395548	35.86	-135.27368	$\Phi_6 - v$	$\sqrt{V} \gamma_6$

La Table 5 donne un exemple de décomposition quasi-périodique d'une des solutions. Le lecteur pourra trouver les autres dans (Noyelles et al. 2008 [11]). Cette décomposition a été obtenue par analyse en fréquence, à l'aide d'un algorithme inspiré de celui de Laskar (1988 [9]). Ensuite l'identification des solutions permet de distinguer la partie libre de la partie forcée. La partie libre des solutions est due aux conditions initiales, qui ont été choisies arbitrairement faute de pouvoir être ajustées aux observations. On s'attend à ce que cette partie libre soit amortie par les marées, dans ce cas on obtient la rotation réelle en retirant tout simplement les termes libres des solutions.

### 3. Le wobble résonnant

La suspicion d'un phénomène résonnant susceptible de régir le comportement du wobble de Titan nous a poussés à réaliser une étude analytique de la résonance (cf. Noyelles 2008 [12]). La Table 5 indique que cette résonance est probablement  $w + \Phi_6 - \phi_6$ . Nous avons vérifié cette assertion en comparant les comportements de plusieurs systèmes simplifiés.

#### 3.1 Le Hamiltonien résonnant

Nous partons du Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \mathcal{N} + \mathcal{P} = \omega_u U + \omega_v V + \omega_w W + \mathcal{P} \quad (30)$$

qui est le Hamiltonien quadratique (29) auquel on a ajouté la partie d'ordre supérieur  $\mathcal{P}$ . Afin d'exprimer l'argument résonnant nous effectuons ce changement de variables :

$$\begin{aligned} u &= U \\ v &= V \\ \theta = w + \Phi_6 - \phi_6 = f &= \Theta = W \end{aligned}$$

qui donne ce nouveau Hamiltonien  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \omega_u U + \omega_v V + (\omega_w + \dot{\Phi}_6 - \dot{\phi}_6)\Theta + \mathcal{T}_2 \quad (31)$$

En considérant que l'argument résonnant  $\theta$  est le seul angle lent, les autres angles (rapides) disparaissent par moyennisation, ainsi  $\mathcal{T}$  devient :

$$\mathcal{T} = \psi\Theta + \mu\Theta^2 + \varepsilon\sqrt{2\Theta}\cos\theta \quad (32)$$

les expressions de  $\psi$ ,  $\mu$  et  $\varepsilon$  étant explicitées dans (Noyelles 2008 [12]).

Le Hamiltonien (32) est un classique connu comme le Second Modèle Fondamental de la Résonance (Henrard & Lemaître 1983). Il décrit l'évolution du système en résonance et a pour équilibre la solution positive (quand elle existe) de l'équation cubique  $x^3 - 3(\delta + 1)x - 2 = 0$  avec  $\delta = -1 - \text{sign}(\psi\mu) \left| \frac{4}{27} \frac{\psi^3}{\mu\varepsilon^2} \right|^{\frac{1}{3}}$ . Cet équilibre va donner la valeur de  $W$  forcée par la résonance, ainsi on aura un terme "libre" qu'une résonance empêchera d'être amorti. Ce phénomène a pour conséquence un wobble forcé, dépendant du paramètre  $C$  (cf. Tab.6).

**TAB. 6:** Le wobble forcé par la résonance.

$\frac{C}{M_T R_T^2}$	$W_0$ (forced)	$\langle J \rangle$
0.34	(pas de solution réelle)	
0.35	0.342	80.368°
0.355	0.108	40.702°
0.3555	0.034	22.337°
0.355551	0.010	12.034°
0.35555146967191	0.009	11.413°
0.35555146967192	(pas de résonance)	

#### 3.2 Lien avec la dissipation

L'attraction gravitationnelle de Saturne soulève sur Titan un bourrelet de marée qui tend à pointer vers Saturne. Tout déphasage de ce bourrelet va induire un couple de rappel, qui va entraîner une dissipation d'énergie interne dans le satellite.

Jusqu'à présent, il a été communément admis que la seule cause de déphasage du bourrelet pour un satellite en rotation synchrone était l'excentricité, ce qui a donné cette formule, issue de (Peale & Cassen 1978 [13]) :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{21}{2} e^2 \frac{k_2}{Q} f \frac{\mathcal{G} M_T^2 n R_T^2}{a^6} \quad (33)$$

où  $k_2$  est un nombre de Love,  $Q$  la fonction de dissipation à la fréquence orbitale  $n$ , et  $f > 1$  un facteur de majoration qui tient compte du fait que la structure interne de Titan n'est probablement pas rigide.

Si Titan a un wobble significatif, alors ce wobble est cause de déphasage du bourrelet de marée, donc de dissipation interne. Nous avons évalué cette contribution et proposons cette formule originale :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2} J_0^2 \left( \frac{n+w}{w} \right)^2 \frac{k_2}{Q} f \frac{\mathcal{G} M_{\text{I}}^2 n R_T^2}{a^6} \quad (34)$$

où  $J_0$  est le wobble moyen, et  $w$  la fréquence associée au wobble. On peut remarquer la présence de la quantité  $n + w$ . Elle signifie que, par un effet de composition de mouvement, la fréquence d'excitation de marée dans le cas de la contribution du wobble est  $n + w$  et non pas  $n$ . En pratique, ces 2 fréquences sont très proches, ce qui explique que l'on peut considérer la même valeur de la fonction de dissipation  $Q$ . Ainsi, la formule donnant la dissipation de marée que nous proposons est, par sommation de (33) et (34) :

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \frac{21}{2} e^2 + \frac{3}{2} J_0^2 \left( \frac{n+w}{w} \right)^2 \right] \frac{k_2}{Q} f \frac{\mathcal{G} M_{\text{I}}^2 n R_T^2}{a^6}. \quad (35)$$

Une application numérique montre que la contribution du wobble dans la dissipation est supérieure à celle de l'excentricité si  $J_0 > 4.4^\circ$ .

Ce phénomène de composition de mouvements indique aussi qu'une rotation de Titan observé en négligeant un wobble significatif peut donner une mesure légèrement surévaluée. Ainsi, la rotation de Titan peut paraître légèrement plus rapide que la rotation synchrone.

### 3.3 Comparaison avec les observations

Actuellement la sonde Cassini est en rotation autour de Saturne, et effectue de nombreux survols de Titan. Lors de ces survols, des images de la surface sont prises et sont comparées avec des images prises lors d'autres survols, ceci afin d'estimer la rotation de Titan. Récemment, Stiles et al. (2008 [15]) ont mesuré une rotation de Titan très légèrement super-synchrone, de  $+0.36^\circ/an$ , alors que la vitesse de rotation de Titan est d'environ 8000 degrés par an. Les auteurs interprètent ce résultat comme la signature d'un océan interne (cf. Lorenz et al. 2008 [10]) qui découplerait la rotation de la croûte de la rotation du reste du corps. Cette croûte, d'inertie réduite, serait ainsi sensible aux échanges d'énergie saisonniers (cf. Tokano & Neubauer 2005 [16]) qui induiraient des variations à longue période (environ 29 ans, soit l'année saturnienne) de la vitesse de rotation de Titan. Un wobble négligé est une explication alternative à cette mesure.

## Conclusion

Cette première étude en 3 dimensions de la rotation a soulevé la question de l'éventualité d'une résonance entre une fréquence propre de la rotation et des fréquences orbitales. On aurait ainsi un cas de résonance secondaire spin-orbite.

Cependant, certains paramètres liés à la structure interne de Titan sont encore mal connus. Leur connaissance, associée à l'utilisation d'un modèle de structure interne plus complet (et donc plus réaliste), permettra de mieux comprendre la mesure de la rotation qui a été faite par Cassini.

## Références

- [1] Andoyer H., 1926, *Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris
- [2] Campbell J.K. & Anderson J.D., 1989, *Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data*, AJ, 97, 1485-1495
- [3] Henrard J. & Schwanen G., 2004, *Rotation of synchronous satellites - Application to the Galilean satellites*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 89, 181
- [4] Henrard J. & Lemaître A., 2005, *The untangling transformation*, Astron. J., 130, 2415-2417
- [5] Henrard J. & Lemaître A., 1983, *A second fundamental model for resonance*, Celes. Mech., 30, 197-218
- [6] Henrard J., 2005, *The rotation of Io*, Icarus, 178, 144-153

- [7] Henrard J., 2005, *The rotation of Europa*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 91, 131-149
- [8] Henrard J., 2005, *Additions to the theory of the rotation of Europa*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 93, 101-112
- [9] Laskar J., 1988, *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, Astron. Astrophys., 198, 341-362
- [10] Lorenz R.D., Stiles B.W., Kirk R.L. et al., 2008, *Titan's Rotation Reveals an Internal Ocean and Changing Zonal Winds*, Science, 319, 1649
- [11] Noyelles B., Lemaître A. & Vienne A., 2008, *Titan's rotation. A 3-dimensional theory*, Astron. Astrophys., 478, 959-970
- [12] Noyelles B., 2008, *Titan's rotational state : The effects of a forced "free" resonant wobble*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 101, 13-30
- [13] Peale S.J. & Cassen P., 1978, *Contribution of tidal dissipation to lunar thermal history*, Icarus, 36, 245-269
- [14] Seidelmann P.K., Abalakin V.K., Bursa M. et al., 2002, *Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites : 2000*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 82, 83-111
- [15] Stiles B.W., Kirk R.L., Lorenz R.D. et al., 2008, *Determining Titan's Spin State from Cassini Radar Images*, Astron. J., 135, 1669-1680
- [16] Tokano T. & Neubauer F.M., 2005, *Wind-induced seasonal angular momentum exchange at titan's surface and its influence on Titan's length-of-day*, Geophysical Research Letters, 32, L24203
- [17] Tortora P., Armstrong J.W., Asmar S.W. et al., 2006, *The determination of Titan's gravity field with Cassini*, DPS meeting 38, 56.01
- [18] Vienne A. & Duriez L., 1995, *TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites*, Astron. Astrophys., 297, 588-605