

Utilisation de l'analyse en fréquences dans les éphémérides

Benoît Noyelles^{1,2}

¹Département de Mathématique - FUNDP

²IMCCE - Observatoire de Paris

23 octobre 2007 - Namur

Plan

- 1 Les éphémérides
- 2 Les méthodes d'analyse
 - Utilisation d'un filtre numérique
 - Utilisation de plusieurs échantillons
- 3 L'identification des termes
 - Les éléments propres
 - Méthode d'identification
- 4 Quelques exemples d'intérêt pratique

Les éphémérides

Définition

Indication de la position calculée des corps célestes à des instants donnés (tables, routines, . . .)

Exemples

- Planètes et leurs satellites
- Satellites artificiels
- Soleil
- Pluies d'étoiles filantes

Représentation des éphémérides

Les coordonnées utilisées

Coordonnées célestes

ascension droite, déclinaison, hauteur, heure de coucher, ...

Coordonnées cartésiennes

- Position x, y, z
- Vitesse $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

Coordonnées elliptiques

$a, \lambda, e, i, \varpi, \Omega, \dots$

Le spectre d'une éphéméride

Caractéristique principale

2 échelles de temps (déplacement sur l'orbite / déplacement de l'orbite)

Exemples

- Satellite géostationnaire : 1 jour / 54 ans
- Terre : 1 an / 75000 ans
- Io : 1.77 jour / 7 ans
- Titan : 15.9 jours / 703 ans

Buts de l'analyse en fréquence

Extrapoler les éphémérides

$S(t) = \sum S_i \cos(\nu_i t + \phi_i)$ ne diverge pas !

Limiter la taille du fichier de données

- 3 paramètres par série
- Optimisation du temps de lecture

Identifier les différentes contributions

- Aplatissement du corps central
- Perturbations par tel ou tel autre corps
- Etc. . .

Le problème

Les contraintes

- Au moins 2 points par période
- Échantillon suffisamment grand pour que les fréquences soient suffisamment séparées

Taille de l'échantillon

- Satellite géostationnaire : 78894 points
- Terre : 300000 points
- Io : 5778 points (en fait 100 fois plus)
- Titan : 68000 points (en fait 10 fois plus)

Plan

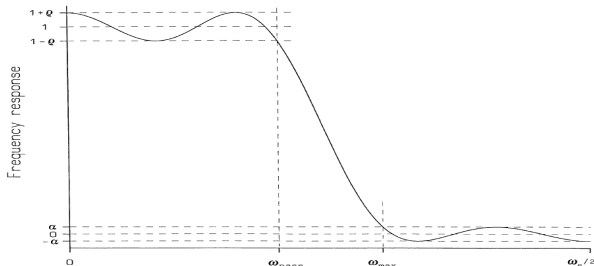
- 1 Les éphémérides
- 2 Les méthodes d'analyse
 - Utilisation d'un filtre numérique
 - Utilisation de plusieurs échantillons
- 3 L'identification des termes
 - Les éléments propres
 - Méthode d'identification
- 4 Quelques exemples d'intérêt pratique

Le filtrage numérique

Carpino, Milani et Nobili 1987

Principe

- Préserver les amplitudes des longues périodes
- Mettre à zéro les amplitudes des courtes périodes
- Préserver les phases des longues périodes



Formulation mathématique

Convolution à $2p + 1$ coefficients

$$S_1(t'_k) = \sum_{j=-p}^p f_j S(t_{k,j})$$

f_j obtenus par FIR (Rabiner & Gold 1975)

$$t'_k = t_0 + p\Delta t + k\delta t$$

$$t_{k,j} = t'_k + j\Delta t$$

Paramètres du filtre

- $\Delta t, \delta t$: échantillonnage
- T_0 : plus courte longue période
- T_1 : plus longue courte période
- $2p$: nombre de coefficients

Caractérisation du filtre

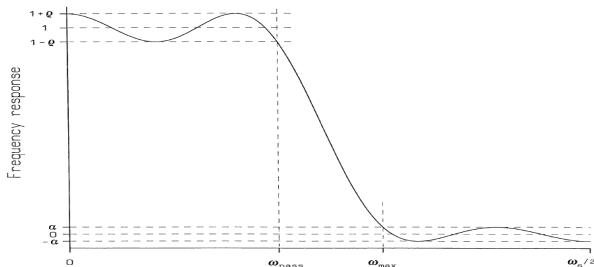
2 paramètres importants

- atténuation α

$$T < T_1 \implies 0 < A_i^* < \alpha A_i$$

- ripple ρ

$$T > T_0 \implies (1 - \rho)A_i < A_i^* < (1 + \rho)A_i$$



Inconvénients

Temps de calcul

Convolution coûteuse en temps de calcul

⇒ il faut limiter p

⇒ utilisation de 2 filtres

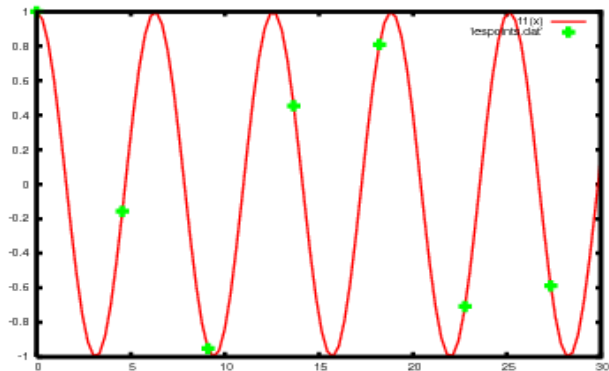
Précision du filtrage

Des termes à longue période se retrouvent dans les courtes !

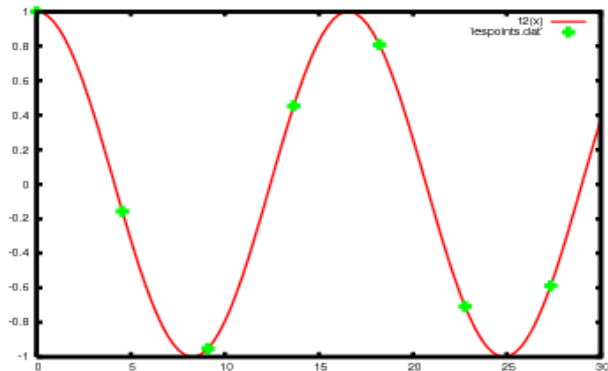
Plan

- 1 Les éphémérides
- 2 Les méthodes d'analyse
 - Utilisation d'un filtre numérique
 - Utilisation de plusieurs échantillons
- 3 L'identification des termes
 - Les éléments propres
 - Méthode d'identification
- 4 Quelques exemples d'intérêt pratique

L'aliasing (ou crénelage...) (1/2)



L'aliasing (ou crénelage...) (2/2)



Utilisation de 2 échantillons

Laskar 2003

Utilisation de l'aliasing pour détecter les courtes périodes

Soit la fréquence ν et 2 échantillons de pas h_1 et h_2 trop grands

- échantillon 1 : $\nu_1 = \nu + \frac{k_1}{h_1}$ k_1 entier
- échantillon 2 : $\nu_2 = \nu + \frac{k_2}{h_2}$ k_2 entier

Idee : utilisation de la différence pour retrouver ν

Problème

Nécessite une très grande précision sur ν_1 et ν_2

Solution proposée

Utilisation de 3 échantillons

Processus itératif

- 3 échantillons de pas h_1 , h_2 (adaptés aux longues périodes), h_3 (adapté aux courtes périodes)
- détection des longues périodes par comparaison des analyses des 2 premiers échantillons, retrait dans le 3ème
- détermination des courtes périodes dans le 3ème
- on réitère le processus ...

Problème

Couteux en temps de calcul ...

Pourquoi ne pas s'arrêter là ?

Suffisant pour faire des éphémérides

- On a une représentation en séries des solutions
- La solution peut être extrapolée sans diverger

Mais...

On peut essayer de connaître les effets des différentes contributions

Plan

- 1 Les éphémérides
- 2 Les méthodes d'analyse
 - Utilisation d'un filtre numérique
 - Utilisation de plusieurs échantillons
- 3 **L'identification des termes**
 - **Les éléments propres**
 - Méthode d'identification
- 4 Quelques exemples d'intérêt pratique

Les éléments propres

Exemple : Les satellites galiléens de Jupiter (Lainey, Duriez & Vienne 2006)

Fundamental argument	Frequency (rad/day)	Phase (deg)	Period (day)	Period (year)	Issued from solution
L_1	3.551552286182	82.861918	1.769	0.005	\mathcal{L}_1
L_2	1.769322711123	338.598517	3.551	0.010	\mathcal{L}_2
L_3	0.878207923589	16.467319	7.154	0.019	\mathcal{L}_3
L_4	0.376486233434	339.256972	16.689	0.046	\mathcal{L}_4
L_5	0.001450183749	318.603037	4332.938	11.863	z_4
Ψ	0.003050648672	109.319546	2059.622	5.639	\mathcal{L}_2
ν	0.012906864147	125.663720	486.809	1.333	z_1, z_2 or z_3
ρ	-0.000779862000	194.603151	8056.791	22.058	$= 3L_3 - 7L_4$
ϖ_1	0.002664253355	25.288760	2358.328	6.457	z_1
ϖ_2	0.000677973430	157.191935	9267.598	25.373	z_2
ϖ_3	0.000127274130	121.789605	49367.340	135.160	z_3
ϖ_4	0.000032065099	319.917125	195950.909	536.484	z_4
Ω_1	-0.002315096098	160.223177	2714.006	7.431	ζ_1
Ω_2	-0.000569206405	60.029150	11038.500	30.222	ζ_2
Ω_3	-0.000124913071	191.189501	50300.463	137.715	ζ_3
Ω_4	-0.000030561255	342.180346	205593.170	562.883	ζ_4
Ω_0	0.000000000000	138.277188	∞	∞	ζ_4

Tout s'exprime avec 15 éléments !

Plan

- 1 Les éphémérides
- 2 Les méthodes d'analyse
 - Utilisation d'un filtre numérique
 - Utilisation de plusieurs échantillons
- 3 L'identification des termes
 - Les éléments propres
 - **Méthode d'identification**
- 4 Quelques exemples d'intérêt pratique

Le principe

Algorithme

- Identification des éléments propres dans les solutions
- Combinaisons entières pour identifier les autres termes
- Comparaisons avec les fréquences et les phases

Amplitude (km)	Phase (deg)	Frequency (rad/day)	Identification	Freq. diff. (rad/day)	Ph. diff. (deg)
1751.882	234.33628	-0.0129068641	$-v$	0.000D+00	0.00000
264.213	82.86052	3.5515522950	L_1	-0.880D-08	0.00140
14.887	121.78955	0.0001272742	ϖ_3	-0.354D-10	0.00005
8.364	319.91454	0.0000320658	ϖ_4	-0.652D-09	0.00258
6.179	25.28876	0.0026642534	ϖ_1	0.000D+00	0.00000
4.168	25.82671	-3.5773660260	$-3L_1 + 4L_2$	0.119D-07	-0.01840
-4.086	338.60240	1.7693227079	L_2	0.318D-08	-0.00388
-3.506	16.47338	0.8782079195	L_3	0.407D-08	-0.00606
2.519	290.72310	7.1160118049	$3L_1 - 2L_2$	-0.369D-06	0.66562
-2.204	157.33840	0.0006779610	ϖ_2	0.124D-07	-0.14646
1.964	281.56981	-5.3595956184	$-4L_1 + 5L_2$	0.293D-07	-0.02490
1.939	243.69908	-4.4684808201	$-2L_1 + 3L_3$	0.185D-07	-0.02096
-1.592	310.08529	-1.7951364446	$-L_1 + 2L_3$	0.558D-08	-0.01257
1.579	177.31174	-7.1418251641	$-3L_1 + 4L_3$	-0.983D-10	-0.02822

L'importance des variables utilisées

Propriété de D'Alembert

Arguments du potentiel perturbateur

$$\phi = \sum a_i \lambda_i + \sum b_j \varpi_j + \sum c_k \delta \Omega_k$$

- $\sum a_i + \sum b_j + \sum c_k = 0$ (invariance rotationnelle)
- $\sum c_k$ paire

Ca dépend des variables utilisées !

- Pas dans les coordonnées cartésiennes x, y, z
- Utilisable dans les coordonnées elliptiques λ, e, \dots

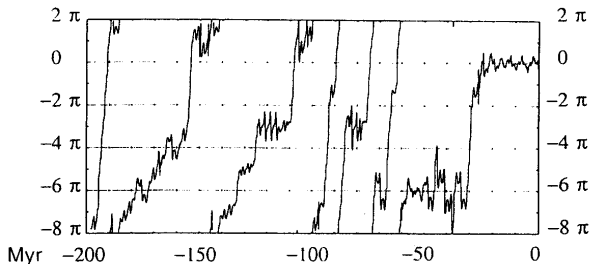
Exemples d'utilisation

- Planètes du système solaire : Laskar 1988
- Satellites de Mars : Lainey, Dehant & Pätzold 2007
- Satellites de Jupiter : Lainey, Duriez & Vienne 2006
- Satellites de Saturne : Vienne & Duriez 1995
- Satellites d'Uranus : Laskar & Jacobson 1987
- Rotation de Titan : Noyelles, Lemaître & Vienne 2007

Le chaos dans le système solaire (1/2)

Laskar 1990

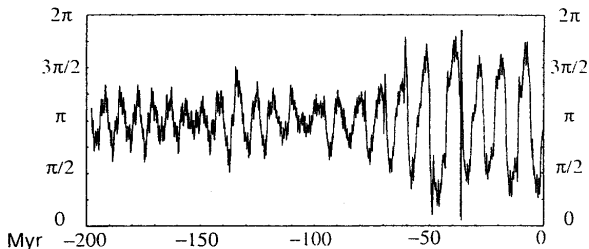
$$2(\varpi_4^\bullet - \varpi_3^\bullet) - (\Omega_4^\bullet - \Omega_3^\bullet)$$



Le chaos dans le système solaire (2/2)

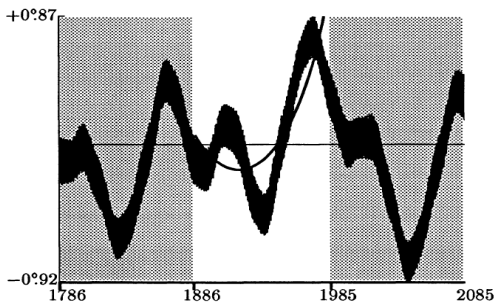
Laskar 1990

$$(\varpi_1^\bullet - \varpi_5^\bullet) - (\Omega_1^\bullet - \Omega_2^\bullet)$$



L'accélération "séculaire" de Mimas

Vienne, Sarlat & Duriez 1992



En fait $2\Omega_1 + \varpi_3$ (200.15 ans) !

La capture en résonance Mimas-Téthys

Champenois & Vienne 1999

Mimas et Téthys en résonance $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \Omega_1 + \Omega_3$

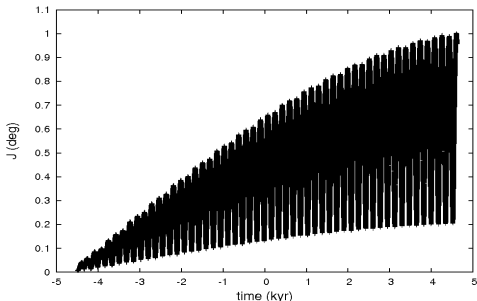
- Si résonance isolée : probabilité de capture de 4%
- Résonance secondaire avec $2\Omega_1 + \varpi_3$ augmente considérablement la probabilité de capture

Mise en valeur du rôle de l'excentricité de Téthys !

La rotation de Titan

Noyelles 2007

Possible forçage du wobble de Titan



(Noyelles, Lemaître & Vienne 2007)

Résonance d'argument $w + \Omega_6 - \varpi_6$