



Groupe de travail sur la lecture des  
**METHODES NOUVELLES DE LA MECANIQUE CELESTE**  
(H. Poincaré)

Comptes rendus

18 et 25 février 1988  
24 mars 1988

- A. Chenciner**      Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi: coordonnées "action-angles" de Delaunay.
- J. Laskar**        Les variables de Poincaré et le développement de la fonction perturbatrice.

Paul Appell déclarait en 1925, à propos des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* : "Il est probable que, pendant le prochain demi-siècle, ce livre sera la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux".

Aujourd'hui, près de cent ans après la parution des *Méthodes Nouvelles*, cette affirmation est toujours vérifiée. Cependant, l'éclatement de son contenu en différents domaines (Mécanique Céleste, Systèmes Dynamiques, Géométrie Différentielle,...) rend difficile la lecture de ce texte fondamental. Nombreux sont ceux qui l'ont cité, certains en ont étudié différents chapitres, mais rare sont ceux qui connaissent l'intégralité de ses trois volumes.

C'est pourquoi nous avons entrepris, à travers ce groupe de travail qui rassemble mathématiciens et astronomes, une lecture collective des *Méthodes Nouvelles*.

J. Laskar, A. Chenciner.

# Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi: coordonnées "action-angle" de Delaunay

par Alain Chenciner  
Université Paris VII

Le paragraphe 8 du chapitre I, que nous explicitons ici, ne représente que trois pages assez "elliptiques" dans les "Méthodes Nouvelles". Nous avons utilisé le chapitre III des "Leçons de Mécanique Céleste" (1905), beaucoup plus détaillé, mais nous n'en avons pas adopté entièrement l'économie, préférant au prix d'un peu de lourdeur effectuer les calculs dans le cas général (voir la remarque 1 à la fin). Notons que le recours à la méthode de Hamilton-Jacobi se trouve déjà dans le premier volume du traité de Tisserand (1888). Quant aux notations, ce sont essentiellement celles de Delaunay ("Théorie du mouvement de la lune", volume I, Mémoires de l'Académie des Sciences, 28<sup>ème</sup> volume, 1860). Il est intéressant de noter que Delaunay n'utilise pas la méthode de Hamilton-Jacobi : il parvient à ses variables en essayant directement de simplifier les équations et "constate" que les équations du mouvement prennent alors la forme hamiltonienne.

Il s'agit de décrire le mouvement dans l'espace  $R^3$  d'un point de masse  $m$  attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse  $M$ .

On ramène à cette question le "problème des deux corps" (positions  $\vec{r}_i$ , masses  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ ) en remarquant que si  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  désigne la position relative du deuxième corps par rapport au premier et  $r = |\vec{r}|$ , leur distance, la différence des équations

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3}$$

s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM \vec{r}}{r^3},$$

où  $M = m_1 + m_2$ ; de plus, le choix de  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  laisse inchangé le potentiel ( $mM = m_1 m_2$ ). On supposera dans la suite que  $G = 1$ .

Sous leur forme hamiltonienne, les équations du mouvement sont

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

où

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad m \frac{d\vec{r}}{dt} = (y_1, y_2, y_3), \quad F = T + U,$$

$$T(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

$$U(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = -\frac{mM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

La forme de U rend naturelle l'utilisation des coordonnées "polaires"

$$x_1 + ix_2 = r \sin \omega e^{i\varphi}, \quad x_3 = r \cos \omega.$$

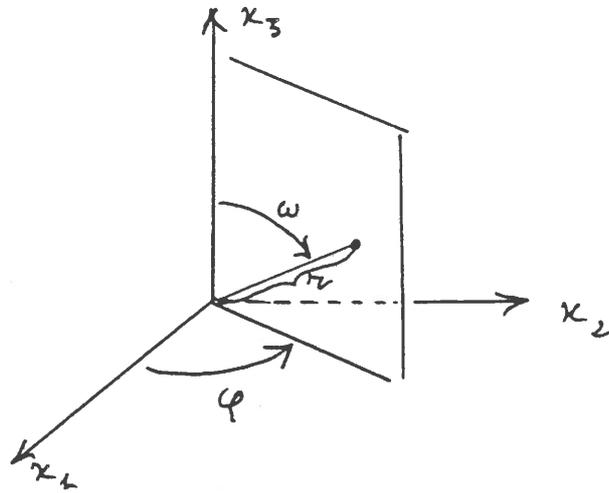


Figure 1

Le module  $r$  est un réel positif, la longitude  $\varphi$  varie entre 0 et  $2\pi$ , et la colatitude  $\omega$  entre 0 et  $\pi$  (figure 1). On montre immédiatement que

$$T = \frac{1}{2m} \left( R^2 + \frac{\Omega^2}{r^2} + \frac{\Phi^2}{r^2 \sin^2 \omega} \right), \quad U = -\frac{mM}{r},$$

où

$$\begin{cases} R = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ \Omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} = mr^2\dot{\omega}, \\ \Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2(\sin^2 \omega)\dot{\varphi}, \end{cases}$$

sont les variables conjuguées de  $r, \omega, \varphi$  ( $L = T - U$  est le lagrangien d'où provient par transformation de Legendre le hamiltonien  $F$ ; on a utilisé

la notation  $\dot{r}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$  pour les variables de vitesse  $\frac{dr}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$  dans le fibré tangent.

L'équation de Hamilton-Jacobi indépendante de  $t$  s'écrit donc en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \omega} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \omega} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right) - \frac{mM}{r} = h,$$

et une (en fait quatre avec le choix des signes) "solution complète" globale de celle-ci est évidemment donnée par la famille à trois paramètres  $L, G, \Theta$  de fonctions

$$S(r, \omega, \varphi, L, G, \Theta) = S_1(r, L, G) + S_2(\omega, G, \Theta) + S_3(\varphi, \Theta)$$

définie à une constante près par les équations

$$\frac{\partial S_3}{\partial \varphi} = \Theta, \quad \left( \frac{\partial S_2}{\partial \omega} \right)^2 + \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega} = G^2, \quad \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{G^2}{r^2} - \frac{2m^2 M}{r} = 2mh$$

dans lesquelles seule est dépourvue d'innocence l'adoption de la notation  $-\frac{m^4 M^2}{L^2}$  pour la constante négative (mouvements elliptiques)  $2mh$  (on supposera  $G$  et  $L$  positifs). Les formules

$$R = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \Omega = \frac{\partial S}{\partial \omega}, \quad \Phi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta},$$

définissent sur un certain domaine un changement de variables symplectique

$$\Sigma: (r, \omega, \varphi, R, \Omega, \Phi) \rightarrow (l, g, \theta, L, G, \Theta),$$

qui transforme le hamiltonien en

$$h = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}$$

(la forme symplectique  $dr \wedge dR + d\omega \wedge d\Omega + d\varphi \wedge d\Phi$  est transformée en  $dl \wedge dL + dg \wedge dG + d\theta \wedge d\Theta$ ).

La solution complète  $S = S(r, \omega, \varphi, L, G, \Theta)$  peut s'écrire

$$S = \int \sqrt{-\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}} d\omega + \Theta \varphi,$$

formule dans laquelle nous avons le choix des déterminations des racines carrées; les constantes  $L, G, \Theta$  étant fixées, il correspond en général à chaque tel choix une sous-variété lagrangienne\* invariante de  $T^*R^3$  (coordonnées  $q = (r, \omega, \varphi)$ ,  $p = (R, \Omega, \Phi)$ ) qui est un graphe  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ . En recollant les quatre graphes ainsi obtenus, on construit un tore lagrangien (donc de dimension trois) invariant  $T_{L,G,\Theta}$ . Nous allons dans la suite expliciter la signification géométrique des variables  $l, g, \theta$ , conjuguées de  $L, G, \Theta$ , qui paramètrent ces tores et en termes desquelles le flot devient linéaire ( $n = \frac{\partial}{\partial L}(-m^3 M^2/2L^2) = m^3 M^2/L^3$  est le mouvement moyen):

$$l = l_0 + nt, \quad g = g_0, \quad \theta = \theta_0,$$

et retrouver en même temps les caractéristiques bien connues des trajectoires elliptiques.

L'équation du tore  $T_{L,G,\Theta}$  s'obtient en prenant toutes les déterminations des racines carrées dans la formule  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ , c'est-à-dire

$$(R, \Omega, \Phi) = \left( \sqrt{-\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}, \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}, \Theta \right);$$

les trois équations, découplées, définissent trois courbes  $(C_1), (C_2), (C_3)$  (respectivement dans les plans  $(r, R), (\omega, \Omega)$ , et le cylindre  $(\varphi, \Phi)$ ), dont  $T_{L,G,\Theta}$  est le produit; la troisième étant évidemment un cercle paramétré par l'angle  $\varphi$ , nous étudierons les deux premières.

**Etude de  $(C_1)$ :** C'est la courbe du plan  $(r, R)$  d'équation

$$R^2 = -\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}.$$

Notons, comme Poincaré,  $[a(1-e), a(1+e)]$  l'intervalle de l'axe des  $r$  sur lequel se projette cette courbe:  $a(1-e)$  et  $a(1+e)$  sont les racines de l'équation

$$-\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2} = 0,$$

donc

$$L = m\sqrt{M}\sqrt{a}, \quad G = m\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}.$$

\* Rappelons qu'on appelle sous-variété lagrangienne de  $T^*R^n$  une sous-variété de dimension  $n$  sur laquelle la forme induite par la forme symplectique est identiquement nulle; généralisant les graphes des dérivées de fonctions  $S(q)$ , ces sous-variétés sont des "solutions géométriques globales" de l'équation de Hamilton-Jacobi.

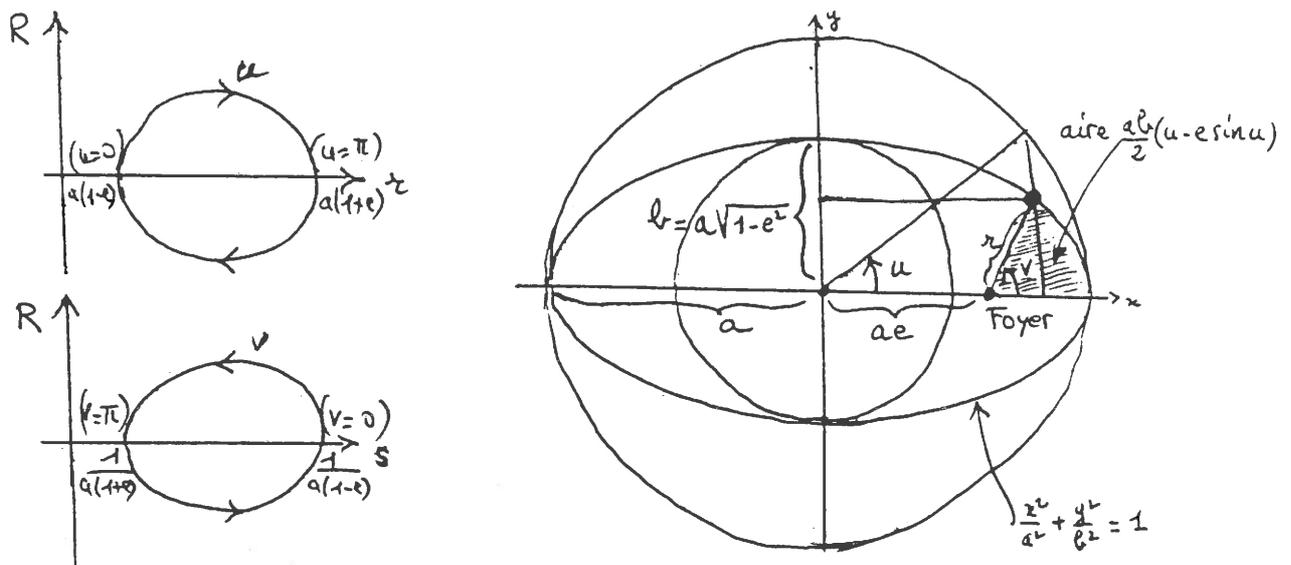


Figure 2

Poincaré utilise pour  $(C_1)$  deux paramètres angulaires  $u$  et  $v$  dont la signification apparaîtra bientôt; le premier, très naturel, est défini par

$$\begin{cases} r &= a(1 - e \cos u), \\ R &= \frac{em^2 M \sin u}{L(1 - e \cos u)} \end{cases}$$

(l'ambiguïté sur les racines carrées a été levée par le choix de la deuxième équation dont seul le carré était déterminé; notons que, pour ce choix,  $u$  croît au cours du mouvement).

Le deuxième est obtenu semblablement après remplacement des coordonnées  $(r, R)$  par les coordonnées  $(s = 1/r, R)$ , bien définies puisque  $r$  reste positif sur  $(C_1)$ . Il s'écrit

$$\begin{cases} s &= \frac{1 + e \cos v}{a(1 - e^2)}, \\ R &= \frac{Ge}{a(1 - e^2)} \sin v; \end{cases}$$

là encore,  $v$  croît au cours du mouvement; l'interprétation géométrique de  $u$  et  $v$  est classique:  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$  est l'équation en coordonnées polaires  $(v, r)$  d'une ellipse rapportée à son foyer ( $v$  est l'anomalie vraie); quant à  $u$ , c'est l'anomalie excentrique (figure 2).

Il est facile de calculer  $l$  et (en partie)  $g$  (correspondant aux quatre choix possibles des radicaux) en terme des angles  $u$  et  $v$ :

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{m^4 M^2}{L^3} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} = \frac{m^4 M^2}{L^3} \int \frac{dr}{R} \\ &= \frac{m^2 M a}{L^2} \int (1 - e \cos u) du = u - e \sin u \end{aligned}$$

(on a choisi la constante de façon que  $l = 0$  pour  $u = 0$ ); c'est l'équation de Kepler\*. De même,

$$g = \frac{\partial S}{\partial G} = G \int \frac{d\omega}{\sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}} - G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}}$$

et la deuxième intégrale vaut

$$G \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + 2m^2 M s - G^2 s^2}} = G \int \frac{ds}{R} = - \int dv,$$

donc

$$g = -v + G \int \frac{d\omega}{\sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}}.$$

**Etude de  $(C_2)$ :** C'est la courbe du plan  $(\omega, \Omega)$  d'équation

$$\Omega^2 = G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}.$$

Sa compréhension exige que l'on interprète  $G$  et  $\Theta$ : on constate tout d'abord que  $\Phi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$  coïncide avec  $\Theta$ . Mais  $\Phi$  et  $G$  sont respectivement la projection sur  $Ox_3$  et la longueur du moment cinétique  $\vec{C}$ ; un calcul immédiat fournit en effet

\* Rappelons (voir la figure 2) que  $u - e \sin u$  est la proportion d'aire enclose par une ellipse entre son grand axe et le rayon issu du foyer d'anomalie excentrique  $u$ .

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -mr^2\dot{\omega} \sin \varphi - mr^2\dot{\varphi} \sin \omega \cos \omega \cos \varphi \\ mr^2\dot{\omega} \cos \varphi - mr^2\dot{\varphi} \sin \omega \cos \omega \sin \varphi \\ mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \omega \end{pmatrix}.$$

Ainsi a-t-on (voir la définition de l'inclinaison  $i$  sur la figure 3)

$$\Theta = \Phi = G \cos i,$$

d'où l'on déduit que  $\cos i$  reste constant au cours d'un mouvement. Nous pouvons maintenant réécrire l'équation de  $(C_2)$

$$\Omega^2 = G^2 \left( 1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2 \omega} \right).$$

Si  $\vec{C}$  n'est pas horizontal ( $\cos i \neq 0$ ),  $\sin \omega$  ne s'annule pas et  $(C_2)$  est homéomorphe à un cercle (figure 5). Ecrivant son équation sous la forme

$$\Omega^2 = G^2 \left( 1 - \frac{\cos^2 i (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)}{\sin^2 \omega} \right) = G^2 \sin^2 i (1 - \cot^2 i \cot^2 \omega),$$

on en obtient facilement le paramétrage suivant dans les coordonnées  $(\cot \omega, \Omega)$ :

$$\begin{cases} \cot \omega &= \frac{\sin \psi}{\cot i}, \\ \Omega &= -G \sin i \cos \psi. \end{cases}$$

Le choix du signe  $-$  dans l'expression de  $\Omega$  implique que, si  $0 < i < \frac{\pi}{2}$ , on tourne à  $\psi$  croissant dans le sens trigonométrique.

Il vient

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial S}{\partial \Theta} = \varphi - \Theta \int \frac{d\omega}{\sin^2 \omega \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}} = \varphi - \int \frac{G \cos i d\omega}{\Omega \sin^2 \omega} \\ &= \varphi + \int \frac{\cot i d\omega}{\sin^2 \omega \cos \psi} = \varphi - \int d\psi \end{aligned}$$

et on choisit la constante d'intégration de façon que  $\theta = \varphi - \psi$ . De même,

$$g = -v + G \int \frac{d\omega}{\Omega} = -v - \int \frac{d\omega}{\sin i \cos \psi}.$$

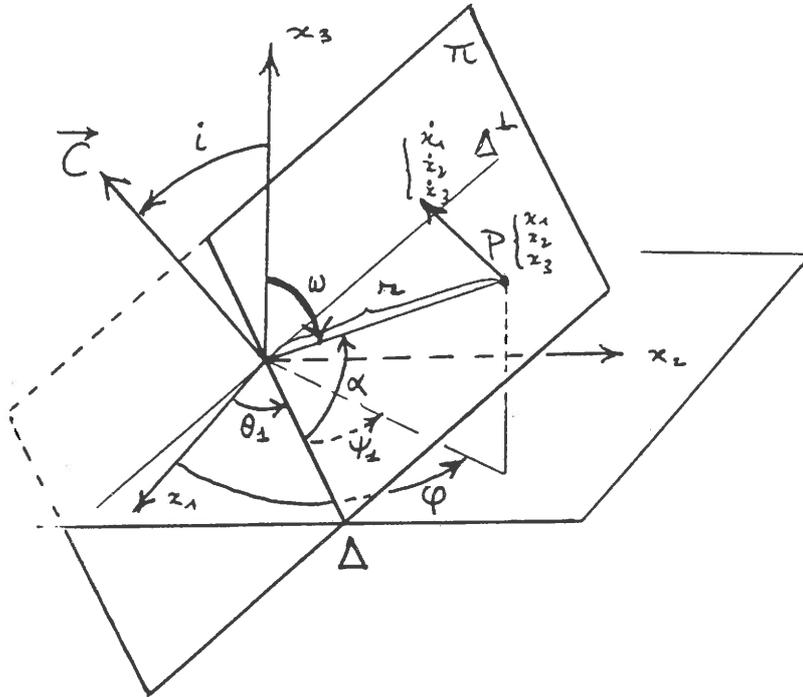


Figure 3

L'interprétation des angles  $\psi, \theta, g$  repose sur les calculs élémentaires suivants (figure 3):

$\pi$  désigne le plan orienté engendré à un instant donné par  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ , autrement dit le plan orthogonal au moment cinétique  $\vec{C}$  (supposé non nul, on ne s'intéresse pas aux collisions). L'inclinaison  $i$  varie entre 0 et  $\pi$ , ainsi que les colatitudes  $\omega$  (dans le plan vertical) et  $\varpi$  (dans le plan  $\pi$ ). Quant aux longitudes  $\theta_1, \varphi, \psi_1 = \varphi - \theta_1$ , elles parcourent tout le cercle, de même que l'angle polaire  $\alpha$  dans le plan  $\pi$ . On suppose pour le moment que  $i \neq 0, \frac{\pi}{2}$ .

Le plan  $\pi$  étant obtenu par rotation d'angle  $i$  du plan horizontal autour de la ligne des noeuds  $\Delta$ , on a manifestement

$$\begin{pmatrix} \sin \omega \cos \psi_1 \\ \sin \omega \sin \psi_1 \\ \cos \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\sin \psi_1 = \cot \omega \cot i.$$

$i$  étant fixé au cours d'un mouvement, on en déduit

$$d\psi_1 = -\frac{\cot i}{\sin^2 \omega \cos \psi_1} d\omega.$$



Il nous reste à traiter le cas, à tous égards plus facile, où  $\vec{C}$  est horizontal:  $\cos i$  est nul, donc également  $\Theta$ ; on en déduit que  $\theta = \varphi$ , qui montre directement que le mouvement se passe dans un plan vertical fixe. Enfin,

$$g = -v + G \int \frac{d\omega}{\Omega} = -v \pm \omega + \text{constante.}$$

L'analogie de la courbe ( $C_2$ ) est décrit sur la figure 5 et indique le choix des signes et de la constante pour lesquels  $g$  est encore la longitude du périhélie:

$$\begin{cases} g = -v + \omega + \frac{\pi}{2} & \text{si } \dot{\omega} > 0, \\ g = -v - \omega + \frac{\pi}{2} & \text{si } \dot{\omega} < 0; \end{cases}$$

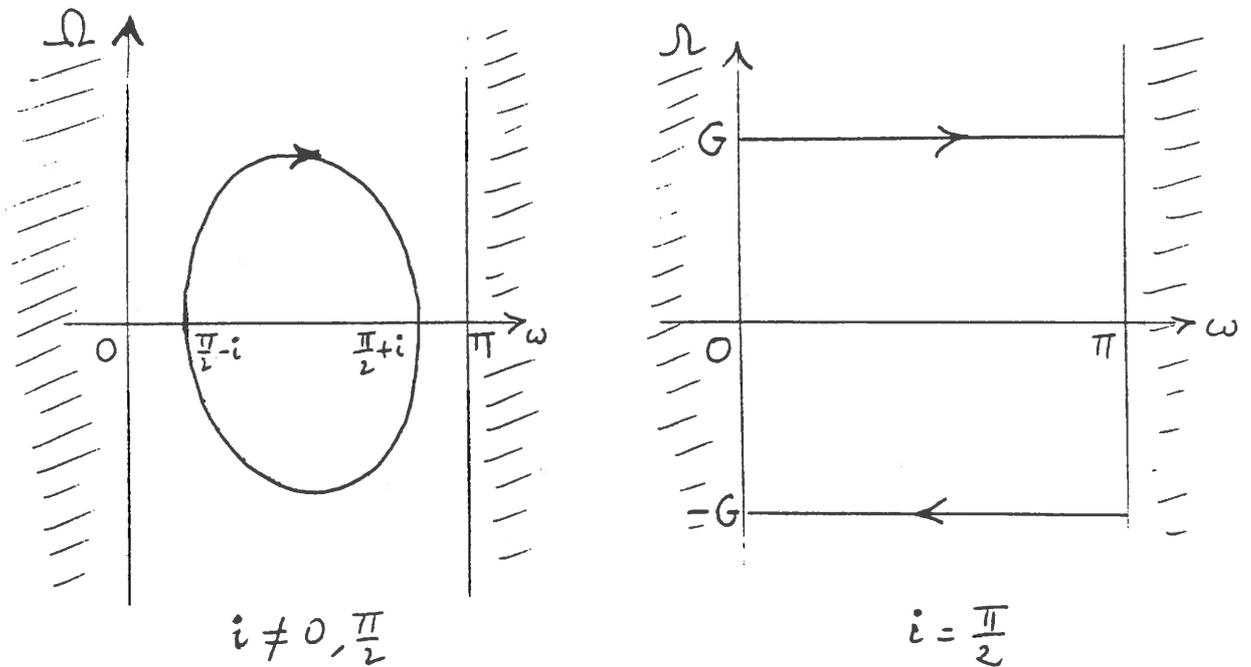


Figure 5

le problème de signe traduit simplement le passage, dans le plan vertical, de la mesure (ambigüe) des angles par la colatitude  $\omega$  à celle par l'angle polaire  $\alpha$  (figure 6).

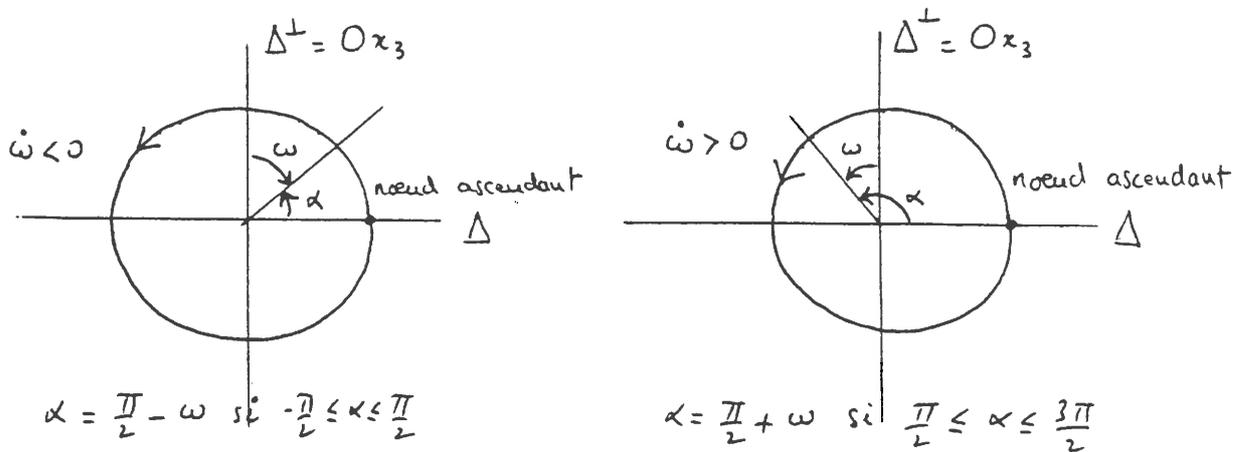


Figure 6

Pour finir, remarquons que l'on peut maintenant caractériser le domaine sur lequel le changement de variables symplectique  $\Sigma$  est défini: il suffit d'éviter

- 1) les mouvements pour lesquels

$$R^2 = -\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2} = 0,$$

c'est-à-dire  $\dot{r} = 0$ , autrement dit les mouvements circulaires,

- 2) ceux pour lesquels

$$\Omega^2 = G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega} = 0,$$

c'est-à-dire  $r^2 \dot{\omega} = 0$ , autrement dit les mouvements qui ont lieu dans le plan horizontal,

- 3) ceux enfin pour lesquels  $G$  (et donc  $\Theta$ ) s'annule, c'est-à-dire les mouvements menant à une collision.

Dans le premier cas c'est la longitude du périhélie  $g$  qui n'est pas définie, dans le deuxième c'est la longitude du noeud  $\theta$ , dans le troisième c'est le plan de l'orbite.

### Remarques :

- 1) Dans ses "Leçons de Mécanique céleste" Poincaré commence par traiter le cas du mouvement dans un plan vertical; ceci revient à ne considérer que la famille à deux paramètres de solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi obtenue à partir de  $S$  en annulant  $\Theta$  et conduit à n'étudier que  $(C_1)$ . La conclusion est obtenue par un argument de symétrie: on ramène en effet par rotation tout plan à devenir vertical.

Cet argument fournit effectivement une solution complète de l'équation de Hamilton-Jacobi à partir de la famille à deux paramètres de solutions considérée, mais encore faut-il vérifier que c'est bien  $S$  qu'on obtient ainsi.

2) Selon Goldstein on pouvait deviner *a priori* (hum hum !) la nature des variables  $g, \theta$ :

(i)  $\Theta$  étant la projection sur l'axe  $Ox_3$  du moment cinétique, sa variable conjuguée  $\theta$  est un angle fixe de rotation autour de cet axe.

(ii)  $G$  étant la longueur du moment cinétique, sa variable conjuguée  $g$  est un angle fixe dans le plan de l'orbite.

3) Les générateurs de l'homologie du tore  $T_{L,G,\Theta}$  définis par les coordonnées  $l, g, \theta$  ne sont pas ceux qui proviennent de sa décomposition en produit des trois "cercles"  $(C_1), (C_2), (C_3)$ ; c'est la raison pour laquelle la recherche directe de coordonnées "action-angle" à l'aide de cette décomposition ne conduit aux variables de Delaunay qu'à un changement linéaire symplectique près de coordonnées. Les nouvelles variables d'action sont

$$\begin{cases} J_r = L - G, \\ J_\omega = G - \Theta, \\ J_\varphi = \Theta, \end{cases}$$

auxquelles correspondent les angles

$$l, l + g, l + g + \theta.$$

Pour le voir, on peut utiliser les formules

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C_1)} \frac{\partial S}{\partial r} dr, \quad J_\omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{(C_2)} \frac{\partial S}{\partial \omega} d\omega, \quad J_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta d\varphi,$$

pour calculer les dérivées partielles de  $J_r, J_\omega, J_\varphi$  par rapport à  $L, G, \Theta$ , ou simplement remarquer que les courbes  $(C_1), (C_2), (C_3)$  sont respectivement paramétrées par  $l, v' + g', v' + g' + \theta$  (les notations sont sur la figure 7). Rappelons qu'un changement de coordonnées linéaires de la forme  $\begin{pmatrix} A & O \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est symplectique (et donc ne change pas la forme canonique des équations) si et seulement si  $B = {}^t r(A^{-1})$ , ce qui indique comment calculer les nouveaux angles à partir des nouvelles actions ou réciproquement.

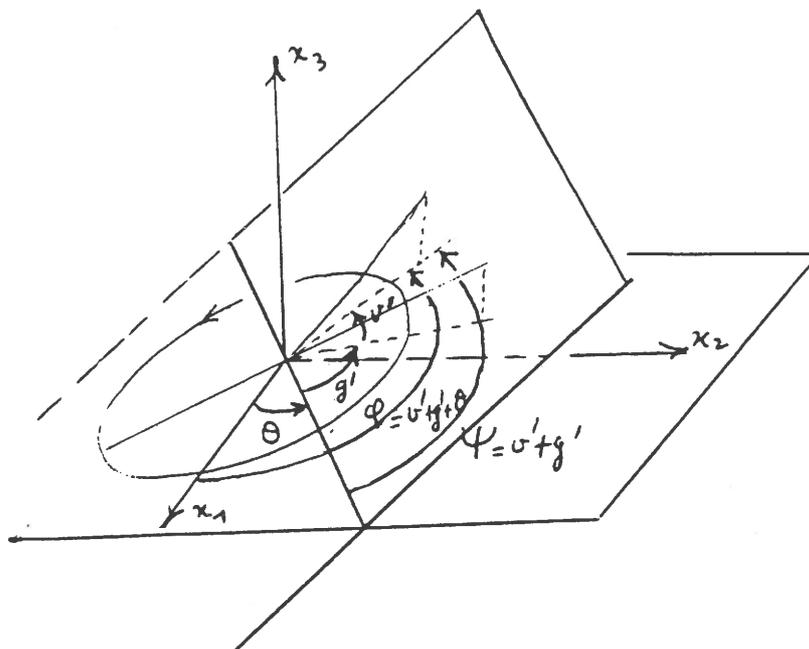


Figure 7

4) Poincaré utilise, pour l'étude des orbites de faibles excentricité et inclinaison, un système de coordonnées obtenu à partir de variables actions-angles  $(\Lambda, H, Z, \lambda, h, \zeta)$  peu différentes des précédentes :

$$\begin{cases} \Lambda = L, & H = L - G, & Z = G - \Theta, \\ \lambda = l + g + \theta, & h = -g - \theta, & \zeta = -\theta. \end{cases}$$

Les variables de Poincaré  $(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q)$  s'obtiennent en considérant les couples  $(H, h)$  et  $(Z, \zeta)$  comme des coordonnées polaires symplectiques planes :

$$\begin{cases} \sqrt{2H} \cos h = \xi, & \sqrt{2H} \sin h = \eta, \\ \sqrt{2Z} \cos \zeta = p, & \sqrt{2Z} \sin \zeta = q, \end{cases}$$

ce qui permet de prolonger leur signification aux cas où  $H = 0$  (excentricité nulle) ou  $Z = 0$  (inclinaison nulle).

**Conclusion:** nous décrivons brièvement la position dans l'ensemble des mouvements Kepleriens d'énergie  $h < 0$  donnée, de ceux que l'on peut décrire à l'aide des coordonnées de Delaunay.

La surface  $\Sigma_h$  d'énergie  $h$  est définie dans  $(R^3 - 0) \times R^3$  par l'équation

$$\frac{1}{2m} \|y\|^2 - \frac{mM}{\|x\|} = h;$$

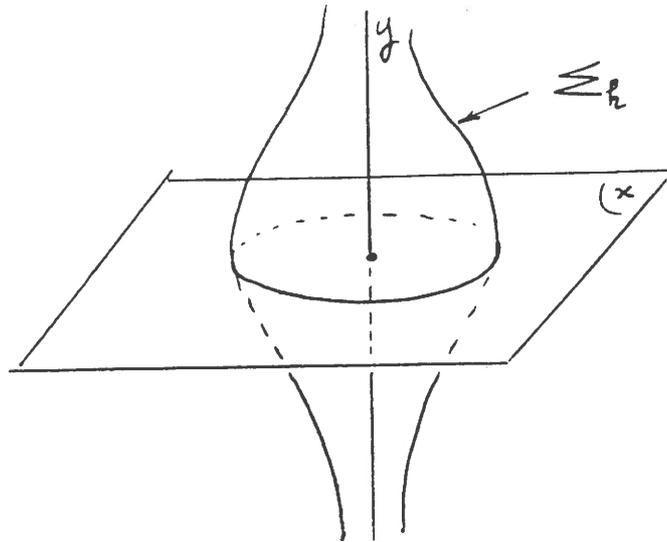


Figure 8

elle est difféomorphe, lorsque  $h$  est négatif, à  $S^2 \times R^3$  (figure 8) et le flot qu'elle porte peut être régularisé, ce qui rend nettement plus agréable sa description.

Ajoutant à l'infini une sphère  $S^2$  de collisions, la régularisation plonge  $\Sigma_h$  dans le fibré tangent unitaire  $T^1S^3 = S^3 \times S^2$  de la sphère  $S^3$  et transforme le flot du problème de Kepler en le flot géodésique de la sphère ronde  $S^3$  (voir J.Moser *Regularisation and the Kepler problem*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIII, 609-636 (1970) et J.Milnor *On the geometry of the Kepler problem*, American Mathematical Monthly, vol. 90 n°6, 353-365 (1983)). L'application associant à un grand cercle orienté de la sphère unité  $S^3$  de  $R^4$  le 2-plan orienté qu'il définit identifie l'ensemble des courbes intégrales de ce flot géodésique à la grassmannienne  $\tilde{G}_{2,4}$  des 2-plans orientés de  $R^4$ . Il est bien connu que cette dernière est difféomorphe à  $S^2 \times S^2$ : voici une manière, que m'a communiquée A. Albouy \*, de décrire directement la correspondance entre éléments de  $S^2 \times S^2$  et mouvements Kepleriens (i.e. orbites du flot) dans  $\Sigma_h$  (figure 9) :

on commence par identifier  $S^2$  à la sphère de  $R^3$  de centre 0 et de diamètre égal à la valeur maximale  $G_h$  de  $G = |\vec{C}|$  sur  $\Sigma_h$ . A un couple  $(x, y) \in S^2 \times S^2$ ,  $x \neq y$ , on fait correspondre l'unique mouvement dont le moment cinétique  $\vec{C}$  soit égal au vecteur  $\vec{xy}$  et la direction du périhélie donnée, lorsque  $x \neq y$  (orbites non circulaires), par le vecteur joignant 0 au point où le segment  $[xy]$  perce le plan de l'orbite. Si  $x = y$ , le mouvement correspondant aboutit à une collision suivant la demi-droite

\* qui a constaté par la suite qu'elle se trouvait déjà exposée en appendice dans le livre "Linear and regular celestial mechanics" de Stiefel et Scheifele.

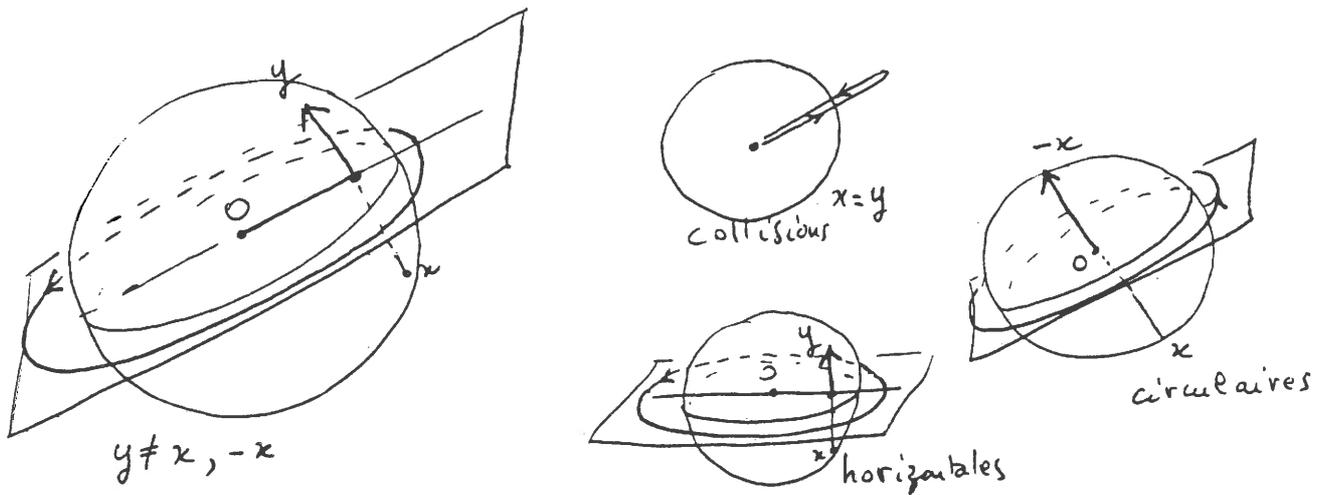


Figure 9

$Ox (\vec{C}=\vec{0})$  et sa régularisation est un aller-retour sur un segment de cette même demi-droite. On notera que l'ellipse associée au couple  $(x, y)$  s'obtient encore, à translation et rotation de  $\pi/2$  près, par projection sur le plan médiateur du segment  $[x, y]$ , du grand cercle orthogonal à  $Ox$  dans la sphère de rayon  $a$ .

L'ensemble  $(D)$  des mouvements (orbites) descriptibles dans les coordonnées de Delaunay est difféomorphe au produit  $T^2 \times \text{int}(\Delta_h)$  d'un tore de dimension deux (paramétré par les angles  $g$  et  $\theta$ ) par l'intérieur du triangle  $\Delta_h$  image de l'application  $(G, \Theta)$  de  $\Sigma_h$  dans  $R^2$  (figure 10).

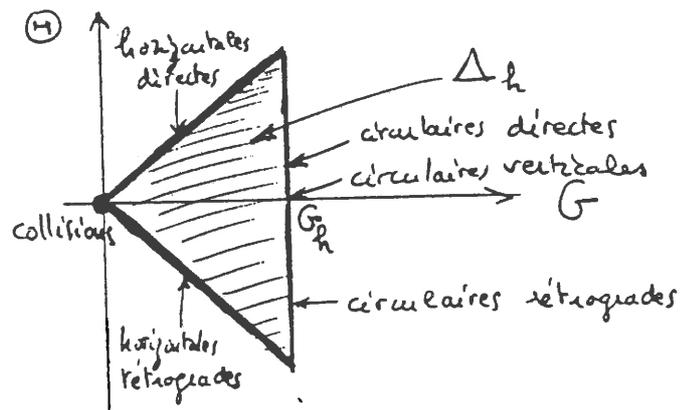


Figure 10

L'équation de  $\Delta_h$  est manifestement

$$0 \leq |\Theta| \leq G.$$

Quant au complémentaire de  $(D)$  dans  $S^2 \times S^2$ , c'est la réunion de trois sphères de dimension deux:

(i) celle des orbites circulaires

$$S_{cir}^2 = \{(x, y) \in S^2 \times S^2, x = -y\},$$

(ii) celle des orbites horizontales

$$S_{hor}^2 = \{(x, y) \in S^2 \times S^2, \vec{xy} \text{ vertical}\},$$

(iii) celle des collisions

$$S_{col}^2 = \{(x, y) \in S^2 \times S^2, x = y\},$$

qui vérifient manifestement

$$S_{cir}^2 \cap S_{col}^2 = \emptyset, S_{cir}^2 \cap S_{hor}^2 \cong S^0, S_{hor}^2 \cap S_{col}^2 \cong S^1$$

(la sphère de dimension zéro  $S^0$  correspond aux deux orbites circulaires horizontales et celle de dimension un  $S^1$  au "cercle" des orbites horizontales de collision).

Il n'est pas difficile de voir que le complémentaire de la réunion de ces trois sphères dans  $S^2 \times S^2$  est difféomorphe à  $T^2 \times R^2$ :

1) L'application

$$\pi : S^2 \times S^2 - S_{cir}^2 \rightarrow S^2$$

qui à un couple  $(x, y)$  de points non antipodaux de  $S^2$  associe le milieu  $\pi(x, y)$  de l'unique arc aigu qu'ils définissent est une fibration isomorphe au fibré tangent en boules ouvertes  $T_0 S^2$  de  $S^2$ . En effet, l'image réciproque  $\pi^{-1}(z)$  d'un point  $z$  de  $S^2$  s'identifie canoniquement à l'hémisphère ouvert centré sur  $z$  ( $x$  et  $\pi(x, y)$  suffisent à définir  $y$ ); enfin, cet hémisphère est en correspondance naturelle avec l'ensemble des vecteurs de longueur strictement inférieure à 1 tangents en  $z$  à  $S^2$  (figure 11).

2) Le complémentaire de  $S_{col}^2$  dans  $S^2 \times S^2 - S_{cir}^2$  s'identifie alors au complémentaire de la section nulle du fibré  $T_0 S^2$ , naturellement difféomorphe au produit  $T_1 S^2 \times R \cong SO(3) \times R$  ( $T_1 S^2$  est le fibré tangent unitaire, sous-espace de  $TS^2$  formé des vecteurs tangents de longueur 1.

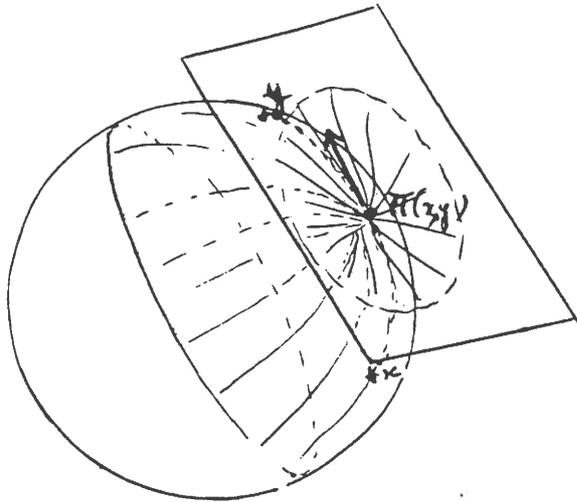


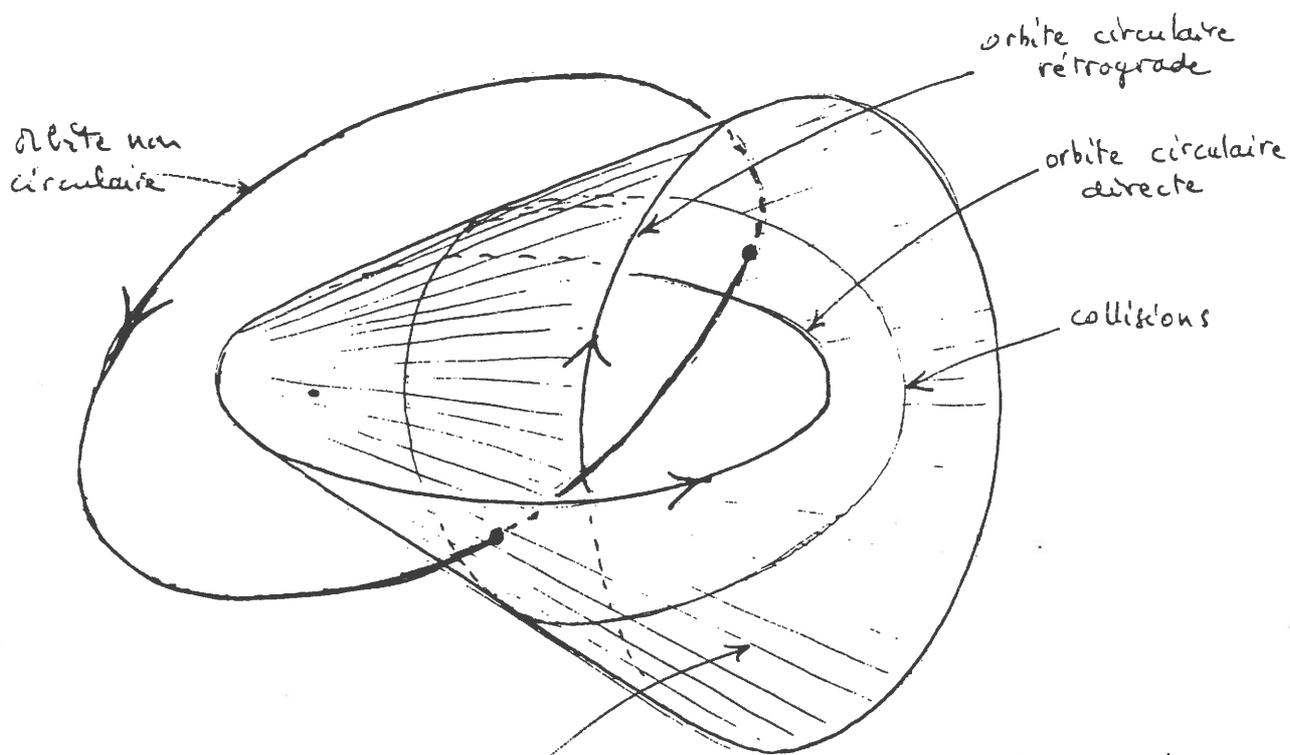
Figure 11

3) Enlever la sphère  $S^2_{hor}$ , revient alors à prendre le complémentaire, dans  $T_0S^2$  privé de sa section nulle, de l'ensemble des vecteurs verticaux tangents à  $S^2$  aux points du cercle horizontal, ou encore le produit par  $R$  du complémentaire dans  $T_1S^2$  de l'ensemble des vecteurs verticaux de longueur 1 tangents à  $S^2$  aux points du cercle horizontal. Ce dernier ensemble, complémentaire dans  $SO(3)$  de deux cercles enlacés est difféomorphe au produit  $T^2 \times R$ : on peut le voir directement ou encore remarquer qu'après rotation de  $\frac{\pi}{2}$  des vecteurs dans leurs plans tangents respectifs, il devient le complémentaire dans  $T_1S^2$  des deux orbites du flot géodésique de la sphère ronde  $S^2$  qui correspondent à un même grand cercle parcouru dans les deux sens - autrement dit le complémentaire des orbites circulaires dans une surface d'énergie régularisée du problème de Képler dans le plan, qu'on peut paramétrer par l'analogie plan des coordonnées de Delaunay  $G, l, g$ .

**Remarque:** La possibilité de choisir de manière canonique (en particulier continue) un point privilégié (périhélie ou aphélie\*) sur chaque orbite non circulaire montre qu'au-dessus de  $S^2 \times S^2 - S^2_{cir}$ , l'application qui à un point de la surface d'énergie régularisée fait correspondre son orbite sous le flot de Képler régularisé est une fibration triviale: elle possède en effet une "section", difféomorphe à  $S^2 \times S^2 - S^2_{cir} \cong T_0S^2$ , qui coupe chaque fibre (orbite du flot) en un seul point. L'adhérence de cette section dans la surface d'énergie régularisée s'obtient en ajoutant la réunion (difféomorphe à  $SO(3)$ ) de toutes les orbites circulaires: on obtient  $T_0S^2$ , fibré en boules fermées tangent à  $S^2$  dont le bord  $T_1S^2$  est

\* Nous faisons le choix du périhélie qui a l'avantage de conduire à une section contenant la sphère des collisions.

bien difféomorphe à  $SO(3)$ . C'est l'analogie de l'anneau de section de Poincaré dans le problème de Képler plan. Dans ce dernier cas,  $T^1S^3$  est remplacé par  $T^1S^2 \cong SO(3)$ , et  $T.S^2$  par  $T.S^1 \cong S^1 \times [0, 1]$ . Notons que, aussi bien dans l'espace que dans le plan, l'application de premier retour sur la "surface de section" est l'identité (figure 12 dans le cas plan après passage au revêtement à deux feuillets  $S^3$  de  $SO(3)$  où elle devient la rotation de  $\pi$  de l'anneau  $T.S^1$ . Pour de plus amples détails on se reportera au cours de A. Chenciner *Le problème de la lune et la théorie des systèmes dynamiques* à l'Université Paris VII, basé sur la thèse de C. Conley).



Anneau de section de Poincaré, rencontré transversalement par les orbites de Delaunay (i.e. non circulaires).

Figure 12

**Remarque.**  $G$  et  $g$  forment un système de coordonnées globales dans l'anneau de section du problème plan. Dans l'espace au contraire, nous avons vu que  $G, \Theta, g, \theta$  ne permettent de décrire qu'une partie de  $T.S^2$ .

## Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi : Corrections

page 1 Dans l'introduction on note que, dans son traité de Mécanique Céleste en 1888, Tisserand utilisait la méthode de Hamilton-Jacobi pour obtenir les coordonnées de Delaunay. Il faut préciser que la thèse de Tisserand, qui date de 1868, porte le titre suivant : *Exposition, d'après les principes de Jacobi, de la méthode suivie par M. Delaunay dans sa théorie du mouvement de la lune autour de la terre; extension de cette méthode.*

page 1 La véritable justification du choix  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  vient de l'utilisation des coordonnées héliocentriques canoniques dans le problème des  $1 + n$  corps (voir le compte-rendu "séries de Lindstedt", début de l'appendice 2).

Remarque : afin de ne pas utiliser deux fois la lettre  $G$ , il est préférable de noter  $\gamma$  la constante universelle de gravitation. Si on ne désire pas l'égaliser à 1, il faudra remplacer partout  $m \sqrt{M}$  par  $\int m \sqrt{M}$ ; en particulier,  $L, G, \Theta, \Lambda, H, Z$  sont multipliés par  $\sqrt{\gamma}$ , et  $\xi, \eta, p, q$  par  $\sqrt[4]{\gamma}$ .

page 7 Noter que l'inclinaison  $i$  varie de 0 à  $\pi$ .

$\int \sqrt{\gamma}$

## LES VARIABLES DE POINCARÉ ET LE DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE

J. Laskar

SCMC du Bureau des Longitudes, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris

**Introduction.** Cet exposé se rapporte au chapitre I des *Méthodes Nouvelles*. Cependant, quand Poincaré écrit les *Méthodes Nouvelles*, il s'adresse à des lecteurs qui connaissent la mécanique céleste classique de l'époque, et en particulier le livre de Tisserand (*Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris 1889), paru quelques temps auparavant. C'est pourquoi sans doute le premier chapitre est aussi *elliptique*. Poincaré comblera cette lacune plus de dix ans plus tard en écrivant les *Leçons de Mécanique Céleste* qui reste aujourd'hui encore pour les astronomes un ouvrage fondamental dans l'apprentissage de la mécanique céleste. Le présent exposé couvre du matériel qui se trouve en grande partie dans les *Leçons* (Chapitres I-IV du tome I pour les sections (1-3), 1ère partie du tome II pour la section 5). J'espère qu'il apportera pour certains une meilleure compréhension de la partie "astronomique" des *Méthodes Nouvelles*.

Dans le premier chapitre des *Méthodes Nouvelles*, Poincaré introduit les variables dont il va se servir par la suite. Il recherche principalement un ensemble de variables canoniques régulières pour le problème des trois corps. Un tel système lui sera donné par des éléments elliptiques dérivés des variables de Delaunay, dans un système de coordonnées de Jacobi. Ce n'est pas le seul système possible, et Poincaré introduira plus tard le système de coordonnées appelées ici "héliocentriques canoniques" (Poincaré, 1896, CRAS 123, 1031-1035, *Bull. Astron.* 14, 53-67 1897, *Leçons*, Chapitre II). En plus de ces deux systèmes de coordonnées, les équations du mouvement s'écrivent naturellement sous forme canonique dans tout repère galiléen (repère en translation uniforme).

Nous allons regarder la forme des équations du mouvement dans les trois systèmes de coordonnées : Barycentriques, Héliocentriques ou Jacobi. Dans chacun des cas, on mettra le problème des  $(n + 1)$ -corps sous la forme hamiltonienne de problèmes de 2 corps perturbés. On cherche plus particulièrement à savoir dans quel système de coordonnées l'écriture des équations du mouvement des planètes est la plus simple.

Nous nous plaçons ici résolument dans le cadre de la mécanique céleste appliquée et nous ferons explicitement une grande partie des calculs.

## 1. REPÈRE BARYCENTRIQUE

### 1.1 Equations du mouvement

Soit  $P_0, P_1, \dots, P_n$   $n+1$  corps en interaction gravitationnelle, de masses  $m_0, m_1, \dots, m_n$ , et soit  $G_0$  leur barycentre. On se place dans le repère barycentrique d'origine  $G_0$  et on pose pour tout corps  $P_i$ ,  $\mathbf{u}_i = \overrightarrow{G_0 P_i}$ . Les équations de Newton forment un système différentiel d'ordre  $6(n+1)$  et s'écrivent pour tout  $i$

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = -G m_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j}{\Delta_{ij}^3} \quad (1.1)$$

avec  $\Delta_{ij} = \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|$ , et  $G$  la constante de gravitation, soit encore pour tout  $i$

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j}{\Delta_{ij}^3} \quad (1.2)$$

On passe aisément à la formulation Hamiltonienne. Soit le potentiel

$$U = -G \sum_{0 \leq i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (1.3)$$

L'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \|\dot{\mathbf{u}}_i\|^2 \quad (1.4)$$

les quantités de mouvement généralisées, où variables conjuguées des variables de position  $\mathbf{u}_i$  sont alors

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = m_i \dot{\mathbf{u}}_i \quad (1.5)$$

et l'énergie cinétique du système devient

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_i\|^2}{m_i} \quad (1.6)$$

Le Hamiltonien du système est alors

$$F = T + U \quad (1.7)$$

Les équations du mouvement

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = \text{grad}_{\mathbf{u}_i} U \quad (1.8)$$

peuvent s'écrire sous forme Hamiltonienne

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \text{grad}_{\tilde{\mathbf{u}}_i} F, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_i}{dt} = -\text{grad}_{\mathbf{u}_i} F \quad (1.9)$$

## 1.2 Perturbation d'un système intégrable

Dans le formalisme hamiltonien, on posera  $F = F_0 + F_1$  avec  $F_0 = T_0 + U_0$  un hamiltonien intégrable, et  $F_1 = T_1 + U_1$  une perturbation. Dans le cas du système solaire, on veut que le rapport entre la perturbation  $F_1$  et le hamiltonien non perturbé  $F_0$  soit de l'ordre des masses planétaires. Ceci laisse une grande liberté de choix pour  $F_0$  et  $F_1$ . On peut poser

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_i\|^2}{m_i}, \quad T_1 = \frac{1}{2} \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|^2}{m_0}$$

$$U_0 = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i m_0}{u_i}, \quad U_1 = -G \sum_{0 < i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} - G \sum_{i=1}^n m_i m_0 \left[ \frac{1}{\Delta_{0i}} - \frac{1}{u_i} \right] \quad (1.10)$$

Pour tout  $i \neq 0$ , on peut aussi écrire les équations du second ordre comme un système intégrable perturbé

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = \text{grad}_{\mathbf{u}_i} \frac{Gm_0}{u_i} + \text{grad}_{\mathbf{u}_i} \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j}{\Delta_{ij}} + \text{grad}_{\mathbf{u}_i} Gm_0 \left[ \frac{1}{\Delta_{0i}} - \frac{1}{u_i} \right] \quad (1.11)$$

Dans ce cas

$$R_i = \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j}{\Delta_{ij}} + Gm_0 \left[ \frac{1}{\Delta_{0i}} - \frac{1}{u_i} \right] \quad (1.12)$$

est appelé la fonction perturbatrice. Le passage de la formulation hamiltonienne (1.9–10) aux équations de second ordre (1.11) est très simple. Ce ne sera pas le cas dans la formulation héliocentrique.

**Remarque** Le problème non perturbé du corps  $P_i$  est le mouvement keplerien d'un corps de masse  $m_i$  attiré par un centre fixe de masse  $m_0$  placé au centre de gravité du système. Dans le système non perturbé, le soleil est supposé fixe, placé au centre de gravité du système.

### 1.3 Réduction du centre de masse

Dans tout repère galiléen, le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme. En effet, par un calcul immédiat, on trouve que

$$\sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{u}}_i = Cte \quad (1.13)$$

ce qui donne trois intégrales premières du mouvement par projection sur les trois axes de coordonnées. Dans le repère barycentrique, on a

$$\sum_{i=0}^n m_i \mathbf{u}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{u}}_i = 0 \quad (1.14)$$

On obtient ainsi 6 relations qui permettent d'abaisser de 6 l'ordre du système (1.9). Le principal inconvénient de cette formulation est que ces relations apparaissent comme des relations supplémentaires. La réduction est possible, mais elle n'a pas été effectuée sur les équations du mouvement. Elle le sera effectivement en passant aux coordonnées héliocentriques (section 2) où aux coordonnées de Jacobi (section 3).

### 1.4 Réduction du moment cinétique

On a en plus trois intégrales provenant de la conservation du moment cinétique total du système de  $n + 1$  points (On montre que ces intégrales ne sont pas en involution, et le moment cinétique ne fournit en fait que 2 intégrales premières en involution). Le moment cinétique  $\mathbf{G}$  est égal à

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{u}_i \wedge \dot{\mathbf{u}}_i \quad (1.15)$$

soit dans les variables canoniques

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^n \mathbf{u}_i \wedge \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (1.16)$$

La constance du moment cinétique résulte directement du fait que la force est centrale (calcul simple). Soit alors la transformation linéaire

$$(\mathbf{r}_i) = A(\mathbf{u}_i), \quad (\tilde{\mathbf{r}}_i) = B(\tilde{\mathbf{u}}_i) \quad (1.17)$$

On a

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i \wedge \tilde{\mathbf{r}}_i = \sum_{j,k} \left( \sum_i a_{ij} b_{ik} \right) \mathbf{u}_j \wedge \tilde{\mathbf{u}}_k \quad (1.18)$$

Si la transformation considérée est canonique, on a  ${}^tAB = I$  et  $\sum_i a_{ij} b_{ik} = \delta_{ij}$  soit

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i \wedge \tilde{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=0}^n \mathbf{u}_i \wedge \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (1.19)$$

Les transformations canoniques (1.17) conservent donc la forme de l'intégrale du moment cinétique. Les deux intégrales premières du moment cinétique en involution permettent d'abaisser de 4 l'ordre du système. Cette réduction sera faite explicitement dans la section 6.

## 2. REPÈRE HÉLIOCENTRIQUE

Les relations (1.14) permettent de réduire le système (1.2) d'ordre  $6(n+1)$  à l'ordre  $6n$ . Cette réduction est effectivement faite en utilisant les coordonnées héliocentriques. Ces coordonnées ont été naturellement adoptées par les astronomes depuis l'époque de Laplace, mais les coordonnées héliocentriques des astronomes  $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$  ne forment pas un système de variables canoniques. Ceci conduit Poincaré à présenter en 1896 le système de variables que nous allons appeler "héliocentrique canonique". Ces variables présentent de nombreux avantages (expression très simple de la fonction perturbatrice, *proximité* des variables héliocentriques des astronomes), mais il ne semble pas que ce système de variables ait été utilisé jusqu'à présent dans la construction de théories planétaires.

### 2.1. Les équations du second ordre

Ce sont les équations utilisées classiquement par les astronomes, qui correspondent à l'utilisation des variables héliocentriques non canoniques citées plus haut  $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ . Les équations du second ordre se déduisent aisément des équations barycentriques du second ordre (1.2) à l'aide des relations (1.14) sur les coordonnées. Si  $\mathbf{r}_i$  désigne le vecteur héliocentrique de  $P_i$  ( $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$ ), on a

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0 \quad (2.1)$$

On obtient alors

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\frac{G(m_0 + m_i) \mathbf{r}_i}{r_i^3} - \sum_{j \neq i} Gm_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2.2)$$

Soit encore pour chaque corps  $P_{i,i=1,n}$ .

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \text{grad}_{\mathbf{u}_i} \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i} + \text{grad}_{\mathbf{u}_i} \left( \sum_{j \neq i} G m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \right) \quad (2.3)$$

### Variables Héliocentrique canoniques

On pose en plus  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0$ . En notation matricielle, on obtient pour le changement de coordonnées

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = A_H \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

avec pour transformation inverse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} = A_H^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Cette transformation linéaire se prolonge aisément en une transformation canonique

$$(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i) \longrightarrow (\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i) = (A_H \mathbf{u}_i, {}^t A_H^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_i) \quad (2.6)$$

soit

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_0 \\ \tilde{\mathbf{r}}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_{n-1} \\ \tilde{\mathbf{r}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} = {}^t A_H^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La réduction du centre de masse (1.14) donne alors  $\tilde{\mathbf{r}}_0 = 0$  et

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = -\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2 - \dots - \tilde{\mathbf{r}}_n, \quad \tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i \quad (i = 1, n) \quad (2.8)$$

L'énergie cinétique  $T$  est donnée par

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_i\|^2}{m_i} + \frac{1}{2} \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_1 + \tilde{\mathbf{r}}_2 + \dots + \tilde{\mathbf{r}}_n\|^2}{m_0} \quad (2.9)$$

Soit encore

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\tilde{\mathbf{r}}_i\|^2 \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} \right] + \sum_{0 < i < j} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j}{m_0} \quad (2.10)$$

Le potentiel s'obtient aussi facilement et on a

$$U = -G \sum_{0 < i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} - G \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i} \quad \text{avec} \quad \Delta_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \quad (2.11)$$

Le système canonique engendré par cet hamiltonien fournit donc

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{dt} = \mathbf{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}_i} F = \mathbf{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}_i} T = \tilde{\mathbf{r}}_i \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} \right] + \sum_{j \neq i} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{m_0} \quad (2.12)$$

La dérivée du vecteur position ( $\dot{\mathbf{r}}_i$ ) n'est pas ici proportionnelle aux moments généralisés ( $\tilde{\mathbf{r}}_i$ ), contrairement à ce qui se passe dans les coordonnées barycentriques ou dans les coordonnées de Jacobi (voir la section 3). Ceci implique que l'orbite *osculatrice* qui sera définie à partir des variables ( $\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i$ ) (voir section 6.4) n'est plus tangente à la trajectoire du corps  $P_i$ . Comme l'a souligné Poincaré, ceci ne présente pas de réel inconvénient dans l'élaboration de théories planétaires où les orbites dites *osculatrice* ne sont en fait que des intermédiaires dans le calcul, mais il est possible que cela soit responsable de la désaffectation de ce système de variables par les astronomes. On aura encore

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{dt} = -\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i} F = -\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i} U = -G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\Delta_{ij}^3} - G m_0 m_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.13)$$

et si on passe aux équations du second ordre

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} \right] \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i} U - \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_0} \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_j} U \quad (2.14)$$

et on retrouve les formules (2.2) en faisant attention aux calculs.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = & -G \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} \right] \left( \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\Delta_{ij}^3} + m_0 m_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) \\ & -G \frac{1}{m_0} \sum_{j \neq i} \left( \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{\Delta_{jk}^3} + m_0 m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ceci se calcule en remarquant d'abord que

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{\Delta_{jk}^3} = \sum_{j \neq i} m_j m_i \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ji}^3} \quad (2.16)$$

il reste alors

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \left[ \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\Delta_{ij}^3} + (m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right] \quad (2.17)$$

### 2.3. Expression du moment cinétique

L'expression de l'intégrale des aires est conservée par la transformation canonique (2.6). On a donc

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i \wedge \tilde{\mathbf{r}}_i \quad (2.18)$$

comme ici  $\tilde{\mathbf{r}}_0 = 0$ , on obtient

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge \tilde{\mathbf{r}}_i \quad (2.19)$$

### 2.4. Perturbation d'un système intégrable

De même que dans la section (1.3), on peut écrire maintenant le hamiltonien  $F = T + U$  du système comme la somme d'un hamiltonien  $F_0 = T_0 + U_0$  d'une somme de problèmes de 2 corps, et d'une perturbation  $F_1 = T_1 + U_1$ . On posera ici

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\tilde{\mathbf{r}}_i\|^2 \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} \right], \quad T_1 = \sum_{0 < i < j} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j}{m_0} \quad (2.20)$$

$$U_0 = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i}, \quad U_1 = -G \sum_{0 < i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (2.21)$$

Les équations du problème non perturbé sont définies par le hamiltonien  $F_0 = T_0 + U_0$ , ce qui donne pour le système du second ordre

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.22)$$

Le mouvement non perturbé est une somme de mouvements keplériens d'une planète de masse  $m_i$  autour du soleil de masse  $m_0$ . On peut aussi l'interpréter comme le mouvement keplérien de corps de masse  $\frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}$  autour d'une centre fixe de masse  $m_0 + m_i$ . On remarque que  $F_1$  a une forme particulièrement simple et symétrique. Il est alors très intéressant de se placer dans ces variables pour la construction de théories planétaires.

### 3. COORDONNEES DE JACOBI

Les coordonnées de Jacobi permettent aussi d'avoir une formulation hamiltonienne du système tout en conservant le bénéfice de la réduction à l'ordre  $6n$ . Elles ont été introduites par Jacobi pour effectuer la réduction du problème des trois corps, puis développées par Radau. Ce sont les variables classiquement utilisées pour mettre le problème sous forme canonique. Le principe consiste à repérer chaque corps  $P_i$  par rapport au barycentre  $G_{i-1}$  des  $i$  corps  $P_0, \dots, P_{i-1}$  précédents (Fig.1). Ce système présente des inconvénients d'utilisation pratique et il est surtout utilisé dans les études du problème des trois corps (Il est difficile d'introduire un nouveau corps et la fonction perturbatrice est développée en puissance des masses).

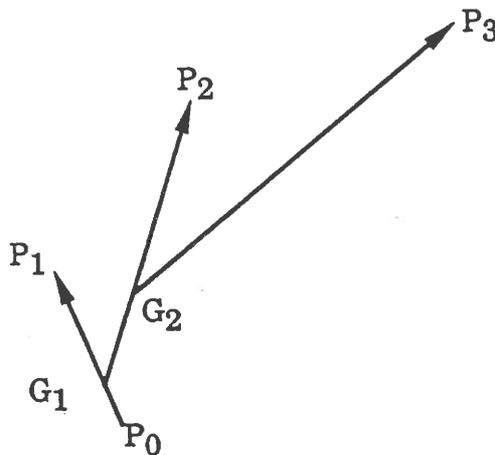


Fig. 1. Coordonnées de Jacobi

#### 3.1. Les coordonnées de Jacobi

Soit

$$\mu_k = \sum_{i=0}^k m_i, \quad (k = 1, n) \quad (3.1)$$

Le changement de coordonnées barycentrique ( $u_i$ ) aux coordonnées de Jacobi ( $v_i$ ) est défini par

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_0}{\mu_n} & \frac{m_1}{\mu_n} & \frac{m_2}{\mu_n} & \cdots & \frac{m_{n-1}}{\mu_n} & \frac{m_n}{\mu_n} \\ -\frac{m_0}{\mu_0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{m_0}{\mu_1} & -\frac{m_1}{\mu_1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{m_0}{\mu_{n-2}} & -\frac{m_1}{\mu_{n-2}} & -\frac{m_2}{\mu_{n-2}} & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{m_0}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_1}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_2}{\mu_{n-1}} & \cdots & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = A_J \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Avec pour transformation inverse

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m_1}{\mu_1} & -\frac{m_2}{\mu_2} & \cdots & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_n}{\mu_n} \\ 1 & \frac{\mu_0}{\mu_1} & -\frac{m_2}{\mu_2} & \cdots & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_n}{\mu_n} \\ 1 & 0 & \frac{\mu_1}{\mu_2} & \cdots & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_n}{\mu_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\mu_{n-2}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_n}{\mu_n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = A_J^{-1} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Cette transformation linéaire se prolonge en une transformation canonique

$$(u_i, \tilde{u}_i) \longrightarrow (v_i, \tilde{v}_i) = (A_J u_i, {}^t A_J^{-1} \tilde{u}_i) \quad (3.4)$$

soit

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n-1} \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\frac{m_1}{\mu_1} & \frac{\mu_0}{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{m_2}{\mu_2} & -\frac{m_2}{\mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & -\frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} & \cdots & \frac{\mu_{n-2}}{\mu_{n-1}} & 0 \\ -\frac{m_n}{\mu_n} & -\frac{m_n}{\mu_n} & -\frac{m_n}{\mu_n} & \cdots & -\frac{m_n}{\mu_n} & \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1} \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix} = {}^t A_J^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1} \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Les équations du centre de masse (1.14) donnent alors pour tout temps

$$v_0 = 0, \quad \tilde{v}_0 = 0 \quad (3.6)$$

On peut donner aussi les expressions des variables de Jacobi en fonction des variables héliocentriques

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_2 - m_1 \mathbf{r}_1 / \mu_1 \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{r}_3 - (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / \mu_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_n = \mathbf{r}_n - (m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_{n-1} \mathbf{r}_{n-1}) / \mu_{n-1} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ceci s'inverse aisément et donne

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{m_1}{\mu_1} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{v}_3 + \frac{m_2}{\mu_2} \mathbf{v}_2 + \frac{m_1}{\mu_1} \mathbf{v}_1 \\ \dots \\ \mathbf{r}_n = \mathbf{v}_n + \frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}} \mathbf{v}_{n-1} + \dots + \frac{m_2}{\mu_2} \mathbf{v}_2 + \frac{m_1}{\mu_1} \mathbf{v}_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.2 Energie cinétique en variables de Jacobi

L'énergie cinétique en fonction des variables barycentriques est donnée en (1.6). On a pour tout  $0 \leq k \leq n$

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{v}}_k - m_k \left( \sum_{i>k} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{\mu_{i-1}} \right) \quad (3.9)$$

d'où

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{m_k} \left( \tilde{\mathbf{v}}_k - m_k \left( \sum_{i>k} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{\mu_{i-1}} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{\mathbf{v}}_k^2}{m_k} + \sum_{i>k} m_k \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i^2}{\mu_{i-1}^2} + 2 \sum_{k=0}^n m_k \sum_{i>j>k} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j}{\mu_{i-1} \mu_{j-1}} - 2 \sum_{i>k} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_k \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i}{\mu_{i-1}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les deux derniers termes se détruisent et on obtient

$$T = \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{\mathbf{v}}_k^2}{m_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i^2}{\mu_{i-1}^2} \sum_{i>k} m_k \quad (3.11)$$

soit finalement, comme  $\tilde{\mathbf{v}}_0 = 0$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i^2}{m_i} \quad (3.12)$$

Les moments généralisés  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  sont maintenant proportionnels aux  $\dot{\mathbf{v}}_i$

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mu_{i-1}}{\mu_i} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \quad (3.13)$$

### 3.3 Calcul de l'énergie potentielle

Le calcul de l'énergie potentielle est plus compliqué. Il est exposé dans les *Leçons de Mécanique Céleste* dans le cas du problème des 3 corps. En fait, prendre le cas général simplifie plutôt l'exposé. On rappelle que le potentiel est

$$U = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (3.14)$$

La difficulté est que maintenant les distances mutuelles  $\Delta_{ij}$  ne s'expriment plus simplement en fonction des coordonnées  $\mathbf{v}_i$ . Il ne faut pas oublier d'autre part qu'on veut obtenir une séparation du problème en un problème intégrable et une perturbation de l'ordre des masses. Dans le cas des variables de Jacobi, l'examen direct de l'expression du potentiel ne permet pas d'effectuer cette séparation. On va donc isoler artificiellement la partie du potentiel qui correspond au potentiel d'une somme de problèmes de 2 corps d'énergie cinétique (3.12).

Le problème "naturel" non perturbé en variables de Jacobi est le problème à deux corps de  $m_i$  attiré par la masse  $\mu_{i-1}$  placé au centre de masse  $G_{i-1}$  de  $m_0, m_1, \dots, m_{i-1}$ . Ceci correspond au potentiel

$$-G \frac{m_i \mu_{i-1}}{v_i} \quad (3.15)$$

avec pour énergie cinétique

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_i}{m_i \mu_{i-1}} \tilde{\mathbf{v}}_i^2 \quad (3.16)$$

L'équation du second ordre de chaque corps non perturbé est alors

$$\frac{d^2 \mathbf{v}_i}{dt^2} = G(m_i + \mu_{i-1}) \frac{\mathbf{v}_i}{v_i^3} \quad (3.17)$$

On écrit donc le potentiel sous la forme

$$U = U_0 + U_1 \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned}
 U_0 &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mu_{i-1}}{v_i} \\
 U_1 &= G \left[ \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mu_{i-1}}{v_i} - G \sum_{0 \leq i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme  $\mu_{i-1} = \sum_{j < i} m_j$ , on a encore

$$U_1 = G \sum_{0 \leq i < j} m_i m_j \left[ \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\Delta_{ij}} \right] \tag{3.20}$$

Soit, si on cherche à faire apparaître  $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= G \sum_{0 < i < j} m_i m_j \left[ \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} \right] + G \sum_{0 < i < j} m_i m_j \left[ \frac{1}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} - \frac{1}{\Delta_{ij}} \right] \\
 &\quad + G \sum_{i=2}^n m_0 m_i \left[ \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\Delta_{0i}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le premier terme de (3.21) s'appelle la partie principale, et la somme des deux autres la partie complémentaire. Contrairement aux cas précédents, on n'obtient pas ici des expressions simples de l'inverse de la distance, et le calcul analytique nécessite un développement de Taylor de la partie complémentaire en fonction des masses planétaires. On va effectuer ici ce développement à l'ordre 2 des masses planétaires. On néglige donc ici le deuxième terme qui est d'ordre 3 par rapport aux masses. On a

$$\Delta_{0i} = \left\| \mathbf{v}_i + \sum_{j < i} \frac{m_j}{\mu_j} \mathbf{v}_j \right\| \tag{3.22}$$

On rappelle que

$$\left( \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \right)' = -\frac{\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^3} \tag{3.23}$$

On aura alors, en effectuant le développement de Taylor de l'inverse de la distance  $\Delta_{0i}$

$$\frac{1}{\Delta_{0i}} = \frac{1}{v_i} - \sum_{j < i} \frac{m_j}{\mu_j} \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{v_i^3} + o(m) \tag{3.24}$$

Donc, aux termes d'ordre 3 par rapport aux masses près, le troisième terme de (3.21) se réduit à

$$G \sum_{i=2}^n \sum_{j<i} m_0 m_i \frac{m_j}{\mu_j} \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{v_i^3} \quad (3.25)$$

Comme  $m_0 = \mu_i + o(m)$ , aux termes d'ordre 3 près, (3.25) se réduit à

$$G \sum_{0<j<i} m_i m_j \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{v_i^3} \quad (3.26)$$

L'expression finale de  $U_1$  limité aux termes d'ordre 2 est alors

$$U_1 = G \sum_{0<j<i} m_i m_j \left[ \frac{1}{v_i} + \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{v_i^3} - \frac{1}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} \right] + o(m^2) \quad (3.27)$$

On retrouve une expression comparable aux expressions dans les autres systèmes de variables (1.10) et (2.22), mais ici on n'a pas une expression exacte, et on s'est limité aux termes d'ordre 2 par rapport aux masses. C'est à ce développement que Poincaré fait allusion quand il écrit dans les *Méthodes Nouvelles* l'expression du hamiltonien sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \dots \quad (3.28)$$

$F_0$  est la partie non perturbé du hamiltonien correspondant à une somme de problèmes de 2 corps. Elle est d'ordre 1 par rapport aux masses planétaires.  $\mu F_1$  est la partie d'ordre 2 par rapport aux masses, et c'est pour cela qu'apparaît devant un facteur fictif  $\mu$  de l'ordre des masses. Le terme suivant serait un terme en  $\mu^2 F_2$ , mais il n'est jamais considéré par Poincaré, et les développements (3.21–27) montrent que les choses vont se compliquer singulièrement si on veut calculer les ordres supérieurs. Il faut remarquer cependant, que si on se place dans les variables héliocentriques canoniques de la section 2, on a seulement

$$F = F_0 + \mu F_1 \quad (3.29)$$

Et quasiment rien par ailleurs n'est changé. On n'a donc nullement besoin de considérer les termes  $\mu^2 F_2 + \dots$  de (3.28).

#### 4. VARIABLES ELLIPTIQUES DE POINCARÉ

Nous disposons maintenant de systèmes de variables canoniques rectangulaires (section 2, 3) dans lesquels la réduction du centre de masse a été effectuée. Dans beaucoup de problèmes on peut mettre le système sous la forme d'une somme de plusieurs problèmes de 2 corps perturbés (1.10, 2.20–21, 3.19). On peut alors appliquer la méthode de variation des constantes de Lagrange. Dans le système non perturbé, les corps décrivent

des ellipses Keplériennes fixes. Avec les perturbations, ces ellipses vont varier lentement dans le temps. On utilise alors comme variables les éléments elliptiques qui sont fixes dans le mouvement non troublé. Comme on veut conserver la forme hamiltonienne des équations, on recherche un changement de variables canonique où les nouvelles variables sont constantes dans le mouvement keplerien non perturbé. Un tel système de variable est donné par la résolution du problème des 2 corps par la méthode de Hamilton-Jacobi (Voir l'exposé de A. Chenciner).

#### 4.1 Les variables elliptiques de Poincaré

On considère le mouvement Képlérien d'un corps de masse  $m$  attiré par un centre fixe de masse  $\mu$  suivant la loi

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.1)$$

Un système de variables canoniques est  $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ , avec  $\tilde{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}}$ . Avec ces variables, le hamiltonien du système est

$$F = \frac{1}{2} \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}\|^2}{m} - \frac{\mu m}{r} \quad (4.2)$$

Par la méthode de Hamilton-Jacobi, on obtient un changement de variable canonique \*

$$(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \longrightarrow (mL, mG, m\Theta, l, g, \theta) \quad (4.3)$$

où  $L, G, \Theta, l, g, \theta$  sont les variables de Delaunay

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} \\ G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ \Theta &= G \cos i = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \\ l &= M && \text{(anomalie moyenne)} \\ g &= \omega && \text{(argument du périhélie)} \\ \theta &= \Omega && \text{(longitude du nœud)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dans ces variables, le hamiltonien  $F$  devient

$$F = \frac{\mu m}{2a} = \frac{\mu^2 m}{2L^2} \quad (4.5)$$

\* Dans son exposé, A. Chenciner utilise comme notations  $L, G, \Theta$  alors que nous utilisons  $mL, mG, m\Theta$  ici pour désigner les variables conjuguées de  $l, g, \theta$ . De plus, le changement dans l'ordre des variables entraîne un changement de signe du hamiltonien.

Le hamiltonien ne dépend alors que de la variable  $L$ . Toutes les variables sont donc constantes, sauf l'anomalie moyenne,  $l$ , pour qui on a

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\mu^2 m}{L^3} \quad (\text{Loi de Kepler}) \quad (4.6)$$

Si on utilise les variables (4.4), les équations du mouvement troublé (2.20-21) s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial(F_0 + F_1)}{\partial(L)}; & \frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial G}; & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \Theta} \\ m \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial l}; & m \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial l}; & m \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ces équations sont équivalentes aux équations de Lagrange utilisées dans les variables non-canoniques classiques des théories planétaires. Les variables (4.4) présentent des inconvénients dans le cas des théories planétaires où les excentricités et inclinaisons sont faibles. En effet, on voudra développer le hamiltonien perturbateur  $F_1$  en fonction des excentricités et inclinaisons, considérés comme petits paramètres. Poincaré effectue alors une première transformation canonique sur les variables de Delaunay pour ramener  $G$  et  $\Theta$  à des variables de l'ordre de l'excentricité et de l'inclinaison. Il pose

$$\begin{aligned} \Lambda &= mL \\ H &= mL - mG = m\sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ Z &= mG - m\Theta = m\sqrt{\mu a}(1 - e^2)(1 - \cos i) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ce changement linéaire sur les coordonnées se prolonge aisément en une transformation canonique en posant

$$\begin{aligned} \lambda &= l + g + \theta && \text{longitude moyenne} \\ h &= -g - \theta \quad (= -\varpi) && (-\text{longitude du périhélie}) \\ \zeta &= -\theta \quad (= -\Omega) && (-\text{longitude du nœud}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ces variables présentent encore le même inconvénient que les coordonnées polaires : elles ne sont pas régulières pour les excentricités et inclinaisons nulles. Poincaré effectue alors un deuxième changement de variable canonique et obtient les variables

$$\begin{aligned} \Lambda &= m\sqrt{\mu a} \\ \lambda & \\ \xi &= \sqrt{2H} \cos h = \sqrt{2\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \cos \varpi \\ \eta &= \sqrt{2H} \sin h = -\sqrt{2\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \sin \varpi \\ p &= \sqrt{2Z} \cos \zeta = \sqrt{2\Lambda} \sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} \cos \Omega \\ q &= \sqrt{2Z} \sin \zeta = -\sqrt{2\Lambda} \sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} \sin \Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

On obtient alors un système de variables canoniques, petites aux faibles excentricités et inclinaisons, et régulières pour les excentricités et inclinaisons nulles.

#### 4.2. Rapport entre les variables de Poincaré et les variables classiques des astronomes

Les variables (4.10) forment un système de variables canoniques bien adapté à l'élaboration de théories planétaires. Les astronomes utilisent classiquement un autre système de variables présentant les mêmes caractéristiques de régularité, mais non canonique. A des variantes mineures près, on peut considérer qu'elles ont été introduites par Laplace dans l'étude des variations séculaires des planètes. La variante que nous utilisons aujourd'hui au Bureau des Longitudes consiste à utiliser, en dehors de la longitude moyenne  $\lambda$  et du demi-grand axe,  $a$  les variables elliptiques

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= e \cos \varpi & \mathbf{q} &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \\ \mathbf{h} &= e \sin \varpi & \mathbf{p} &= \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \end{aligned} \quad (4.11)$$

On préfère aussi souvent utiliser les notations complexes

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{k} + i\mathbf{h} = e E^{i\varpi} \\ \zeta &= \mathbf{q} + i\mathbf{p} = \sin \frac{i}{2} E^{i\Omega} \end{aligned} \quad (4.12)$$

On évitera de confondre la variable  $\zeta$  définie ici avec le  $\zeta$  de Poincaré (4.9).

Dans ces variables, on connaît bien le développement de la fonction perturbatrice  $F_1$ . De plus, la longue expérience des astronomes a montré qu'elles sont bien adaptées à l'étude des mouvements planétaires. Elles sont proche des variables de Poincaré (4.10), et on va établir les formules de conversion entre les variables (4.12) et les variables de Poincaré (4.10)

On effectue d'abord une nouvelle transformation canonique sur les variables de Poincaré pour obtenir une formulation complexe similaire à (4.12). On utilise la transformation canonique

$$(a, b) \longrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(a - ib), \frac{-i}{\sqrt{2}}(a + ib) \right) \quad (4.13)$$

On obtient alors les nouvelles variables complexes  $(x, -i\bar{x}, y, -i\bar{y})$  définies par

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i\eta) = \sqrt{\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} E^\varpi \\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq) = \sqrt{\Lambda} \sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} E^\Omega
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

On a les développements

$$\begin{aligned}
\sqrt{(1 - \cos i)} &= \sqrt{2} \sin \frac{i}{2} \\
\sqrt{1 - e^2} &= 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + o(e^4) \\
\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} &= \frac{e}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{1}{8}e^2 + \frac{7}{128}e^4 + o(e^4) \right] \\
(1 - e^2)^{1/4} &= 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{32}e^4 + o(e^4)
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

On obtient alors les relations

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} z \left( 1 + \frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{7}{128}(z\bar{z})^2 + o(e^4) \right) \\
y &= \sqrt{2\Lambda} \zeta \left( 1 - \frac{1}{4}z\bar{z} - \frac{3}{32}(z\bar{z})^2 + o(e^4) \right)
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Les relations entre les variables de Poincaré et les variables classiques des théories planétaires (4.12) sont donc très simples. La variable  $x$  joue exactement le même rôle que la variable  $z$ , et la variable  $y$  le même rôle que la variable  $\zeta$ . Le passage d'un système de variables à l'autre ne changera pas la forme de la fonction perturbatrice. Les relations de parité et les relations de d'Alembert (voir section 6) seront conservées. Ceci montre que l'on a tout intérêt à utiliser les variables de Poincaré (4.14). L'idéal étant alors de les utiliser dans le repère héliocentrique canonique de la section 2 (du moins pour les théories planétaires).

## 5. LE DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE

Dans les sections (1,2,3), on a exprimé le problème des  $n + 1$  corps sous la forme d'une somme de problèmes de 2 corps perturbés par un hamiltonien perturbateur  $F_1$ . Dans la section 4 on a trouvé un système de variables canoniques, constantes dans le problème non perturbé. Il faut maintenant exprimer la fonction perturbatrice  $F_1$  en fonction des nouvelles coordonnées, c'est-à-dire en fonction des éléments elliptiques de Poincaré

(4.10). De manière équivalente, on va exprimer la fonction perturbatrice en fonction des éléments elliptiques non canoniques (4.12), de la longitude moyenne  $\lambda$ , et du demi-grand axe  $a$ .

### 5.1 Développement de l'inverse de la distance

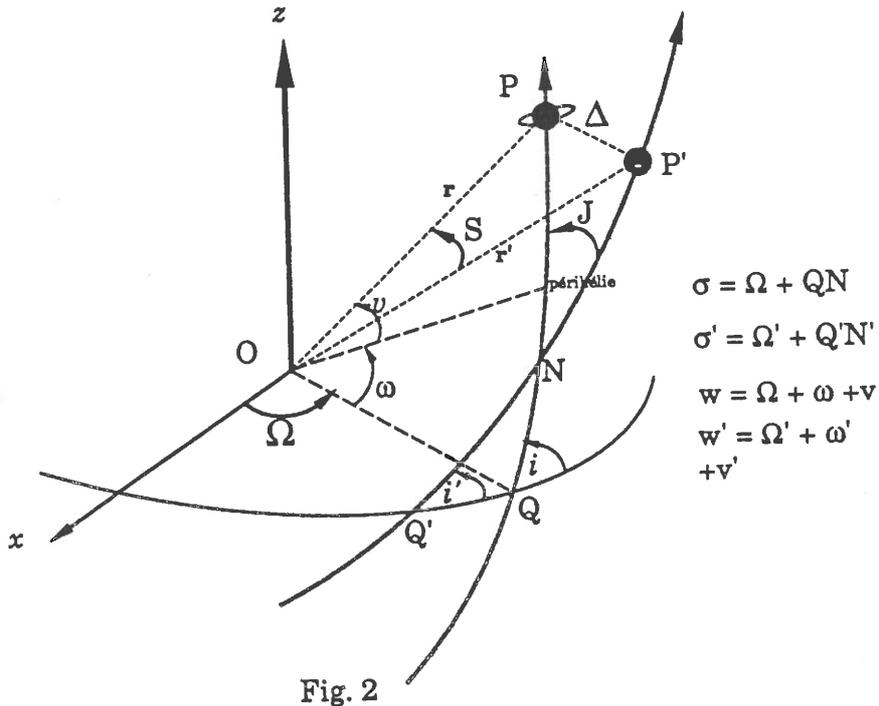


Fig. 2

Dans le calcul de la fonction perturbatrice (1.10, 2.22, 3.19), la difficulté essentielle consiste dans le développement de l'inverse de la distance

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (5.1)$$

en fonction des éléments elliptiques des planètes  $P$  et  $P'$ . Si  $S$  désigne l'angle des rayons vecteurs  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  on a (Fig.2)

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S)^{-1/2} \quad (5.2)$$

soit

$$\rho = \frac{r}{r'}; \quad \alpha = \frac{a}{a'} \quad (5.3)$$

on a alors

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos S)^{-1/2} \quad (5.4)$$

Lorsque  $\rho$  est petit (cas du problème de la lune perturbée par le soleil), le plus efficace est d'effectuer un développement en série par rapport à  $\rho$ . On a alors immédiatement

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i P_i(\cos S)$$

où les polynômes  $P_i$  sont les polynômes de Legendre. Ce développement n'est pas utilisé dans le cas planétaire où  $\rho$  peut atteindre des valeurs élevées (0.72 pour le couple Venus-Terre). On effectue alors un développement en fonction des excentricités et inclinaisons.

## 5.2 Passage au problème plan

Une première réduction consiste à se ramener au problème plan. Dans ce cas, l'angle des rayons vecteurs,  $S$  est tout simplement la différence des longitudes vraies  $w - w'$ . Si on pose

$$U = 2(\cos S - \cos(w - w')) \quad (5.5)$$

on va pouvoir exprimer  $1/\Delta$  en fonction de  $U$  et de  $w - w'$ . D'autre part  $U$  sera une quantité petite, de l'ordre du carré des inclinaisons. On pose

$$D^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(w - w') \quad (5.6)$$

et on obtient alors une expression de l'inverse de la distance où n'intervient plus  $S$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} D^{-1} (1 - \rho U D^{-2})^{-1/2} \quad (5.7)$$

Si la quantité  $\rho U D^{-2}$  est petite, ce qui est le cas dans le système solaire, on peut développer en une série convergente

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1/2)_k}{(1)_k} (\rho U)^k D^{-2k-1} \quad (5.8)$$

Il faut donc maintenant exprimer les puissances  $D^{-s}$  en fonction des éléments elliptiques. On a le développement classique en coefficients de Laplace

$$D^{-s} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(w - w'))^{-s/2} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{s/2}^j(\rho) \cos j(w - w') \quad (5.9)$$

Les coefficients de Laplace  $b_{s/2}^j(\rho)$  s'expriment en fonction des fonctions hypergéométriques sous la forme

Attention ici  $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$

$$\frac{1}{2} b_{s/2}^j(\rho) = \frac{(s/2)_j}{(1)_j} \rho^j F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + j, j + 1; \rho^2\right) \quad (5.10)$$

Le travail n'est pas fini car il nous reste à exprimer  $\rho$  et  $U$  en fonction des éléments elliptiques. De nombreuses méthodes ont été proposées pour le calcul des coefficients de Laplace en fonction du rapport des demi-grands axes  $\alpha$  (Leverrier, Newcomb, ...) dans tous les cas il s'agit d'obtenir des formules de récurrence permettant d'obtenir les coefficients des puissances de  $\alpha$  dans le développement de Taylor du coefficient de Laplace au voisinage de  $\alpha$ . Actuellement, avec l'apparition des ordinateurs, il semble préférable d'effectuer un calcul direct (Abu-El-Ata and Chapront, 1975, *Astron. Astrophys.* 38, 57). On utilise pour cela le développement de Taylor de la fonction hypergéométrique:

$$F(a, b, c; x + y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{y^m}{(1)_m} F(a + m, b + m, c + m; x) \quad (5.11)$$

Ce qui donne, en posant

$$\rho^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right) \quad (5.12)$$

une série entière en la petite quantité  $\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right)$

$$\frac{1}{2} b_{s/2}^j(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right)^m \quad (5.13)$$

Les  $\phi_{s,m}^{(j)}(\alpha)$  dépendant uniquement de  $\alpha$ .

$$\phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) = \frac{(s/2)_j (s/2)_m (s/2 + j)_m}{(1)_j (j + 1)_m} \frac{\alpha^{2m+j}}{(1)_m} F(s/2 + m, s/2 + m + j, j + m + 1; \alpha^2) \quad (5.14)$$

On obtient alors pour  $D^{-s}$

$$D^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right)^m \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^j \cos j(w - w') \quad (5.15)$$

Soit aussi

$$D^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(|j|)}(\alpha) \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right)^m \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{|j|} E^j(w - w') \quad (5.16)$$

## 5.2. Développements classiques du problème des 2 corps

Nous avons obtenu en (5.16) un développement de  $D^{-s}$  en fonction de  $\alpha, \rho, E^{j(w-w')}$ . On peut alors considérer que le travail est terminé car toutes ces quantités s'expriment en fonction des éléments elliptiques par les développements classiques du problème des 2 corps (voir tout texte classique de mécanique céleste; par exemple Brouwer et Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Acad. Press., 1961). Ces développements dérivent des trois relations.

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E \\ \frac{r}{a} &= 1 - e \cos E \\ \tan \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

On aura alors par exemple

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_k(ke) \cos kM \quad (5.18)$$

où  $J_k(e)$  est la fonction de Bessel

$$J_k(e) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(k+j)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{k+2j} \quad (5.19)$$

On obtient aussi de manière plus générale, pour tous entiers  $n$  et  $m$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n E^{imv} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e) E^{ikM} \quad (5.20)$$

On rappelle que  $v$  est l'anomalie vraie, donc  $w = v + \varpi$ ,  $\lambda = M + \varpi$ . Les coefficients  $X_k^{n,m}(e)$  s'appellent les coefficients de Hansen. Ce sont des séries entières en  $e$ , de la forme  $e^{|k-m|} F(e^2)$ , où  $F(e^2)$  est une série entière en  $e^2$ . Si on pose

$$\theta = E^{i(v-M)} = E^{i(w-\lambda)} \quad (5.21)$$

on peut aussi écrire les relations (5.20) sous la forme

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n \theta^m = \sum_{k_1, k_2} C_{k_1, k_2}^{n,m} \bar{z}^{k_1} z^{k_2} E^{i(k_1-k_2)\lambda} \quad (5.22)$$

Les coefficients  $C_{k_1, k_2}^{n,m}$  sont des coefficients rationnels. A partir des relations (5.22) on est alors capable d'exprimer  $\rho, E^{j(w-w')}$  ainsi que leurs puissances en fonction de

$z, \bar{z}, z', \bar{z}', \lambda, \lambda'$ . On a donc bien exprimé  $D^{-s}$  en fonction des éléments elliptiques (4.12). Pour terminer le travail, il ne reste plus qu'à exprimer  $U$  (5.5) en fonction des éléments elliptiques.

### 5.3. Le développement de $\cos S$

Les développements anciens sont en général exprimés en fonction de l'inclinaison mutuelle  $J$  des deux corps. Ceci implique une modification des équations de Lagrange car elles ne sont plus écrites dans un repère fixe. Quand on veut traiter plusieurs corps, au prix de développements un peu plus volumineux pour la fonction perturbatrice, il est préférable de se placer dans un plan fixe et d'exprimer la fonction perturbatrice en fonction des inclinaisons  $i, i'$  par rapport à ce plan fixe. Il faut remarquer au passage que quand Poincaré évoque p.31 le développement de la fonction perturbatrice, il suppose que les développements ont bien été faits dans ces conditions, alors qu'à l'époque, tous les développements effectués (Le Verrier, Newcomb,...) le sont en fonction de l'inclinaison mutuelle des deux corps. Il faut attendre l'époque des ordinateurs, par exemple (Brumberg, 1967, *Bioull. Inst. Teor. Astr.*, XI, 2, 73) pour trouver des développements en fonction des inclinaisons  $i, i'$ .

Les formules classiques de la trigonométrie sphérique donnent (voir Fig. 2)

$$\cos S = \cos^2 \frac{J}{2} \cos((w - w') - (\sigma - \sigma')) + \sin^2 \frac{J}{2} \cos((w + w') - (\sigma + \sigma')) \quad (5.23)$$

Un calcul classique (présent dans Le Verrier, 1855, *Annales de L'Observatoire de Paris*, T1) utilise alors les formules de Delambre pour un triangle sphérique d'angles  $A, B, C$  et de côtés respectifs  $a, b, c$ .

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{B - C}{2} &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{b + c}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \sin \frac{B - C}{2} &= \cos \frac{A}{2} \sin \frac{b - c}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \cos \frac{B + C}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{b + c}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{B + C}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{b - c}{2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ce qui donne ici

$$\begin{aligned}
\sin \frac{J}{2} \cos \frac{\sigma + \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \cos \Omega - \cos \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \cos \Omega' \\
\sin \frac{J}{2} \sin \frac{\sigma + \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \sin \Omega - \cos \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin \Omega' \\
\cos \frac{J}{2} \cos \frac{\sigma - \sigma'}{2} &= \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \cos(\Omega - \Omega') \\
\cos \frac{J}{2} \sin \frac{\sigma - \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(\Omega - \Omega')
\end{aligned} \tag{5.25}$$

soit en notation complexe

$$\begin{aligned}
\sin \frac{J}{2} E^{i \frac{\sigma + \sigma'}{2}} &= \cos \frac{i'}{2} \zeta - \cos \frac{i}{2} \zeta' \\
\cos \frac{J}{2} E^{i \frac{\sigma - \sigma'}{2}} &= \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \zeta \bar{\zeta}'
\end{aligned} \tag{5.26}$$

On obtient alors

$$\cos S = \operatorname{Re} \left[ E^{i(w-w')} \left( \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \bar{\zeta} \zeta' \right)^2 + E^{i(w+w')} \left( \cos \frac{i'}{2} \bar{\zeta} - \cos \frac{i}{2} \bar{\zeta}' \right)^2 \right] \tag{5.27}$$

soit encore

$$U = 2(\cos S - \cos(w - w')) = 2 \operatorname{Re} \left[ E^{i(w-w')} A(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') + E^{i(w+w')} B(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') \right] \tag{5.28}$$

avec, a l'ordre 4 par rapport aux inclinaisons

$$\begin{aligned}
A(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') &= \left( \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \bar{\zeta} \zeta' \right)^2 - 1 \\
&= -\zeta \bar{\zeta} - \zeta' \bar{\zeta}' + 2\bar{\zeta} \zeta' + \zeta \bar{\zeta} \zeta' \bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^2 \zeta'^2 - \zeta \bar{\zeta}^2 \zeta' - \bar{\zeta} \zeta'^2 \zeta' + o(\zeta^4)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
B(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') &= \left( \cos \frac{i'}{2} \bar{\zeta} - \cos \frac{i}{2} \bar{\zeta}' \right)^2 \\
&= \bar{\zeta}^2 + \bar{\zeta}'^2 - 2\bar{\zeta} \bar{\zeta}' - \zeta \bar{\zeta} \bar{\zeta}'^2 + \zeta \bar{\zeta}^2 \bar{\zeta}' + \bar{\zeta} \zeta' \bar{\zeta}'^2 - \bar{\zeta}^2 \zeta' \bar{\zeta}' + o(\zeta^4)
\end{aligned}$$

Si on pose

$$\theta = E^{i(v-M)}, \quad \text{on a} \quad E^{iw} = \theta E^{i\lambda} \tag{5.30}$$

et donc

$$U = \theta\bar{\theta}' E^{i(\lambda-\lambda')} A(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') + \theta\theta' E^{i(\lambda+\lambda')} B(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') \\ + \bar{\theta}\theta' E^{-i(\lambda-\lambda')} \bar{A}(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') + \bar{\theta}\bar{\theta}' E^{-i(\lambda+\lambda')} \bar{B}(\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}') \quad (5.31)$$

Le développement de  $\theta$  est un des développements classiques du problème des deux corps en fonction de  $z, \bar{z}, \lambda$  (5.22).

## 6. REDUCTION DU PROBLEME DES N CORPS

### 6.1 La caractéristique de d'Alembert des séries planétaires (n°12)

Nous avons montré que l'on peut écrire la fonction perturbatrice sous la forme d'une série de terme général

$$T = C(\alpha) z^n z'^{n'} \bar{z}^{\bar{n}} \bar{z}'^{\bar{n}'} \zeta^\nu \zeta'^{\nu'} \bar{\zeta}^{\bar{\nu}} \bar{\zeta}'^{\bar{\nu}'} E^{i(k\lambda+k'\lambda')} \quad (6.1)$$

Pour un tel terme  $T$ , les astronomes appellent inégalité  $(k\lambda + k'\lambda')$  et caractéristique de l'inégalité

$$c_I(T) = k + k' \quad (6.2)$$

Nous pouvons aussi introduire la notion de caractéristique de monôme

$$c_M(T) = (\bar{n} + \bar{n}' + \bar{\nu} + \bar{\nu}') - (n + n' + \nu + \nu') \quad (6.3)$$

Heureusement pour les astronomes, tous les termes de la forme (6.1) n'interviennent pas dans le développement de la fonction perturbatrice. Ces termes doivent vérifier des relations de degré et de parité mises en évidence par d'Alembert et appelées relations de d'Alembert depuis Brown (Brown and Schook, *Planetary theory*, Cambridge Univ. Press, 1933). Ces relations de d'Alembert peuvent s'exprimer en disant que dans les termes des séries de perturbations planétaires, la caractéristique du monôme  $c_M(T)$  est égale à la caractéristique de l'inégalité  $c_I(T)$

$$c_M(T) = c_I(T) \quad (6.4)$$

Ceci se vérifie directement sur les développements du problème des 2 corps (5.22). Il est aussi facile de le vérifier sur les développements de  $U$  (5.31). Comme cette propriété est conservée par multiplication et addition, elle sera vérifiée dans les séries complètes. Dans les *Méthodes Nouvelles*, la discussion sur les relations de d'Alembert (que bien sûr Poincaré n'appelle pas encore ainsi) est contenue dans les pages 30, 31, 32 du chapitre

I. Dans les deux derniers paragraphes du n°12 Poincaré rappelle aussi que la fonction perturbatrice est réelle et paire par rapport aux variables d'inclinaisons, ce qui se voit aisément en (5.29) et (5.30).

Les changements de coordonnées (4.16) permettant de passer dans les variables de Poincaré modifiées (4.14) ne changent pas la caractéristique des monômes. Ils ne modifient pas non plus la parité en inclinaison. Tout ce que nous venons de dire dans les variables non canoniques (4.12) reste donc vrai dans les variables canoniques de Poincaré.

Il faut remarquer que dans cette section 12, Poincaré ne justifie pas les relations de d'Alembert, mais se contente de se référer à Tisserand. Pourtant, ces relations sont l'expression des symétries du problème et on peut aussi en donner une vision plus géométrique.

**Prop 1:** Il y a équivalence entre les relations de d'Alembert et l'invariance par rotation autour de l'axe  $Oz$ .

dem: Par une rotation d'angle  $\phi$  autour de  $Oz$ ,  $a, e, i, M, \omega$  sont inchangés, et  $\Omega \rightarrow \Omega + \phi$ . On aura donc aussi  $\lambda \rightarrow \lambda + \phi$  et  $\varpi \rightarrow \varpi + \phi$ . Le terme générique  $T$  est donc transformé en

$$T \times E^{i(c_I(T) - c_M(T)) \phi} \quad (6.5)$$

l'invariance par rotation autour de  $Oz$  de la fonction perturbatrice est donc équivalent à  $c_I(T) = c_M(T)$ . Dans le cas d'un problème plan, ceci se traduit par le fait que la fonction perturbatrice dépend de  $\varpi$  et  $\varpi'$  uniquement par leur différence  $\varpi - \varpi'$ . Dans le cas général, la fonction perturbatrice dépend de  $\Omega$  et  $\Omega'$  uniquement par leur différence  $\Omega - \Omega'$ .

**Prop 2:** Il y a équivalence entre la parité en inclinaisons du développement de la fonction perturbatrice et l'invariance par symétrie par rapport au plan  $Oxy$ .

dem: Par une symétrie par rapport au plan  $Oxy$ , le noeud ascendant  $\Omega$  est transformé en le noeud opposé  $\Omega + \pi$ , donc  $\omega \rightarrow \omega + \pi$  mais  $M$  est inchangé. Les variables  $z$  sont donc inchangées,  $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi$  et  $\zeta$  est transformé en  $-\zeta$ . Le terme générique  $T$  est donc transformé en

$$(-1)^{(\bar{\nu} + \bar{\nu}' + \nu + \nu')} T \quad (6.6)$$

Le développement de la fonction perturbatrice est donc conservé si et seulement si le degré total des termes en  $\zeta, \bar{\zeta}, \zeta', \bar{\zeta}'$  est pair.

## 6.2 Réduction du problème des trois corps (n°15)

On a vu que les symétries du problème des trois corps se traduisent par les relations de d'Alembert et la parité en inclinaisons dans le développement de la fonction perturbatrice. Ces relations permettent de réduire considérablement le nombre de termes présents dans les séries des développements planétaires. L'invariance par rotation est aussi équivalente à la conservation du moment cinétique et on peut utiliser ces relations de symétrie pour réduire effectivement l'ordre du système étudié. Ce sera surtout vrai dans le cas du problème des trois corps, car autrement, pour préserver la symétrie des équations, on préférera ne pas faire de réduction et utiliser uniquement les relations de d'Alembert dans les séries pour alléger les calculs.

Poincaré se place dans le cas des variables de Jacobi. La discussion peut être étendue sans problème aux variables canoniques héliocentriques. On utilisera dans les deux cas les notations  $\mathbf{r}$  et  $\tilde{\mathbf{r}}$  pour les vecteurs position et les moments associés. Pour conserver des notations équivalentes à celles de Poincaré, on posera pour les variables de Jacobi

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, & \mu &= G(m_0 + m_1), \\ \beta' &= \frac{(m_0 + m_1)m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, & \mu' &= G(m_0 + m_1 + m_2)\end{aligned}\tag{6.7}$$

et pour les variables canoniques héliocentriques

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, & \mu &= G(m_0 + m_1), \\ \beta' &= \frac{m_0 m_2}{m_0 + m_2}, & \mu' &= G(m_0 + m_2)\end{aligned}\tag{6.8}$$

Dans les deux cas, le problème non perturbé est alors une somme de deux problèmes de deux corps de masse  $\beta$  et  $\beta'$  attirés par un centre fixe de masse respective  $\mu$  et  $\mu'$ . On peut alors utiliser tous les résultats de la section (4).

Les équations du mouvement dans les variables de Delaunay (4.4) sont données par (4.7)

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial l}; & \frac{dG}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial l}; & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \theta}; \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial L}; & \frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial G}; & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \Theta}\end{aligned}\tag{6.9}$$

et les relations correspondantes pour  $L', G', \theta', l', g', \theta'$ .

Par ailleurs, le moment cinétique  $C$  est donné par

$$C = r \wedge \dot{r} + r' \wedge \dot{r}' \quad (6.10)$$

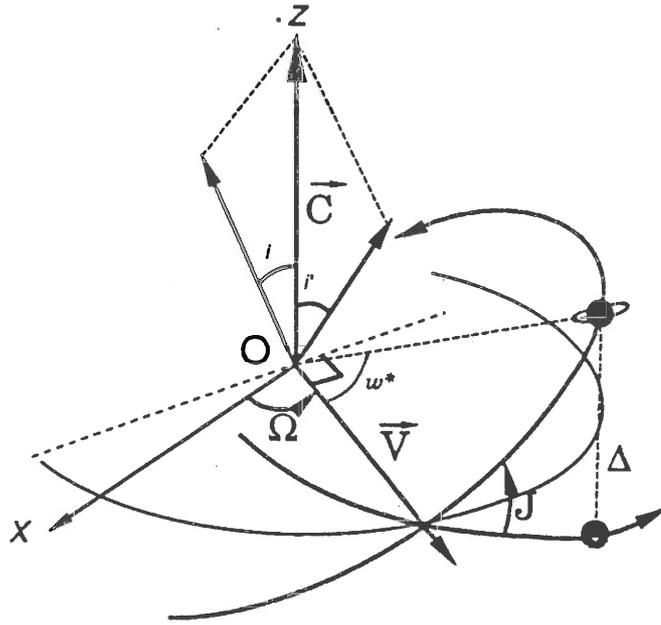


Fig. 3. Réduction du noeud

Soit  $V$  le vecteur dirigé suivant l'intersection des deux orbites des deux corps fictifs  $P$  et  $P'$ . On a (Fig.3)

$$V \cdot C = V \cdot (r \wedge \dot{r}) + V \cdot (r' \wedge \dot{r}') = 0 \quad (6.11)$$

car  $V$  est dans chacun des plans  $(r, \dot{r})$  et  $(r', \dot{r}')$ . L'intersection des deux orbites reste donc toujours dans un même plan, orthogonal au moment cinétique  $C$ . On choisit ce plan comme plan de référence (ce plan est appelé plan invariable ou plan de Laplace du système). Les deux noeuds  $\theta$  et  $\theta'$  sont alors confondus.

$F$  est de la forme  $F(\theta - \theta')$  (invariance par rotation autour de  $Oz$ ). Comme  $\theta = \theta'$ ,  $F$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\theta'$ .

Les composantes du moment cinétique dans le plan orthogonal à  $V$  donnent alors

$$\begin{aligned} \beta G \cos i + \beta' G \cos i' &= C \\ \beta G \sin i + \beta' G \sin i' &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

où  $C$  est une constante du mouvement. Soit aussi

$$\begin{aligned} \beta \Theta + \beta' \Theta' &= C \\ \beta^2 (G^2 - \Theta^2) &= \beta'^2 (G'^2 - \Theta'^2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

ces deux relations permettent de fournir alors les lois de  $\Theta$  et  $\Theta'$

$$\beta\Theta = \frac{C}{2} + \frac{\beta^2 G^2}{2C} - \frac{\beta'^2 G'^2}{2C}, \quad \beta'\Theta' = \frac{C}{2} + \frac{\beta'^2 G'^2}{2C} - \frac{\beta^2 G^2}{2C} \quad (6.14)$$

On a par ailleurs

$$\theta = \dot{\theta}', \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial C} \quad (6.15)$$

On peut faire une variante ici par rapport à Poincaré. Le changement de variables:

$$\begin{aligned} \beta\Theta &\longrightarrow \Psi = \beta\Theta + \beta'\Theta' \\ \beta\Theta' &\longrightarrow \Psi' = \beta\Theta - \beta'\Theta' \\ \theta &\longrightarrow \psi = (\theta + \theta')/2 \\ \theta &\longrightarrow \psi' = (\theta - \theta')/2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

est canonique. Nous savons d'autre part que

$$\psi = \theta, \quad \psi' = 0, \quad \Psi = C$$

$C$  est une constante du mouvement et le hamiltonien  $F$  ne dépend plus alors que de  $L, G, l, g, L', G', l', g'$ . On obtient alors un système hamiltonien ne possédant plus que 4 degrés de liberté.

On effectue ensuite les changements de variables canoniques analogues à (4.8) et (4.9)

$$\begin{aligned} \Lambda &= \beta L \\ H &= \beta L - \beta G \\ \lambda^* &= l + g \\ h^* &= -g \end{aligned} \quad (6.17)$$

puis

$$\begin{aligned} \Lambda &= \beta\sqrt{\mu a} \\ \lambda^* & \\ \xi^* &= \sqrt{2H} \cos h^* = \sqrt{2\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \cos \omega \\ \eta^* &= \sqrt{2H} \sin h^* = -\sqrt{2\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \sin \omega \end{aligned} \quad (6.18)$$

On peut enfin passer aux variables  $\Lambda, \lambda^*, \chi, -i\bar{\chi}$  par (4.13) avec

$$\chi = \sqrt{2\Lambda} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} E^{i\omega} \quad (6.19)$$

Le système Hamiltonien devient dans ces nouvelles variables

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda^*}; & \frac{d\lambda^*}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}; & \frac{d\chi}{dt} &= i\frac{\partial F}{\partial \bar{\chi}}; & \frac{d\bar{\chi}}{dt} &= -i\frac{\partial F}{\partial \chi}; \\ \frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'^*}; & \frac{d\lambda'^*}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'}; & \frac{d\chi'}{dt} &= i\frac{\partial F}{\partial \bar{\chi}'}; & \frac{d\bar{\chi}'}{dt} &= -i\frac{\partial F}{\partial \chi'}; \end{aligned} \quad (6.20)$$

Il reste à examiner la forme de la fonction perturbatrice dans ces nouvelles variables.

### 6.3 Développement de la fonction perturbatrice dans le problème réduit

Dans les Méthodes Nouvelles, Poincaré ne fait pas le développement de la fonction perturbatrice mais montre comment on peut utiliser ses variables à partir des développements classiques des astronomes. Pourtant il est intéressant d'obtenir directement le développement du problème réduit. On va utiliser des notations similaires à celles de Poincaré en Posant

$$\lambda^* = l + g \quad (= M + \omega), \quad w^* = v + \omega \quad (6.21)$$

On obtient alors le développement de l'inverse de la distance

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1/2)_k}{(1)_k} (\rho U)^k D^{-2k-1} \quad (6.22)$$

avec

$$D^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(|j|)}(\alpha) \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\right)^m \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{|j|} E^{j(w^* - w'^*)} \quad (6.23)$$

et

$$U = 2(\cos S - \cos(w^* - w'^*)) \quad (6.24)$$

Le calcul de  $\cos S$  est maintenant beaucoup plus simple. Les relations de la trigonométrie sphérique donnent immédiatement

$$\cos S = \cos w^* \cos w'^* + \sin w^* \sin w'^* \cos J \quad (6.25)$$

et

$$U = 2 \sin w^* \sin w'^* (\cos J - 1) \quad (6.26)$$

où  $J$  est l'inclinaison mutuelle des deux corps. On a d'autre part immédiatement

$$C^2 = \beta^2 G^2 + \beta'^2 G'^2 + 2\beta G \beta' G' \cos J \quad (6.27)$$

soit

$$\cos J - 1 = \frac{C^2 - (\Lambda\sqrt{1-e^2} + \Lambda'\sqrt{1-e'^2})^2}{2\Lambda\Lambda'\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2}} \quad (6.28)$$

ou encore

$$\cos J - 1 = \frac{4C^2 - (2\Lambda - \chi\bar{\chi} + 2\Lambda' - \chi'\bar{\chi}')^2}{2(2\Lambda - \chi\bar{\chi})(2\Lambda' - \chi'\bar{\chi}')} \quad (6.29)$$

#### 6.4 Partie complémentaire de la fonction perturbatrice en variables canoniques héliocentriques

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes occupés uniquement de la partie principale de la fonction perturbatrice, c'est à dire l'inverse de la distance des deux corps. Il reste dans n'importe quel type de variables une partie complémentaire qui en général est plus simple à calculer. Nous allons regarder uniquement le cas des variables canoniques héliocentriques dans le problème réduit. On a alors (2.21)

$$T_1 = \frac{\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{r}}'}{m_0} \quad (6.30)$$

Les problèmes de deux corps fictifs du mouvement non troublés ont des vecteur vitesses liés aux moments  $\bar{\mathbf{r}}$  et  $\bar{\mathbf{r}}'$  et respectivement égaux à  $\bar{\mathbf{r}}/\beta$  et  $\bar{\mathbf{r}}'/\beta'$ . Dans le plan de l'orbite, avec pour origine le périhélie, les coordonnées de la position et de la vitesse dans un mouvement de deux corps, exprimés en fonction de l'anomalie vraie sont (voir tout texte classique de mécanique céleste).

$$\begin{aligned} X &= r \cos v; & Y &= r \sin v \\ \dot{X} &= -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin v; & \dot{Y} &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos v) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dans le repère ayant pour origine la ligne des nœud les coordonnées de la vitesse sont alors

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathfrak{R}_1(i) \times \mathfrak{R}_3(\omega) \times \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

avec

$$\mathfrak{R}_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{R}_3(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

On aura alors

$$\frac{\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}'}{\beta\beta'} = \mathfrak{R}_1(i) \times \mathfrak{R}_3(\omega) \times \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{R}_1(i') \times \mathfrak{R}_3(\omega') \times \begin{bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Si on pose

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{R}_3(\omega) \times \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

et en composant par une rotation  $\mathfrak{R}_1(-i')$ , on obtient

$$T_1 \frac{m_0}{\beta\beta'} = \hat{X}\hat{X}' + \hat{Y}\hat{Y}' \cos J \quad (6.36)$$

On pose alors  $Z = \hat{X} + i\hat{Y}$ . On a donc

$$Z = \frac{ina}{\sqrt{1-e^2}} (E^{i\omega^*} + z^*) \quad (6.37)$$

et

$$T_1 = \frac{\beta\beta'}{2m_0} \{ Z\bar{Z}' + \bar{Z}Z' + (Z - \bar{Z})(Z' - \bar{Z}')(\cos J - 1)/2 \} \quad (6.38)$$

Ce qui nous donne une expression de  $T_1$  en fonction des variables elliptiques de Poincaré à travers (4.16) et (6.29).

## 7. DEVELOPPEMENT EN ANOMALIE EXCENTRIQUE

Nous avons présenté dans la section 5 le développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies moyennes. C'est la méthode utilisée par Le Verrier<sup>1</sup> et adaptée ensuite pour le calcul sur ordinateur par Brumberg<sup>2</sup>, Abu-El-Ata et Chapront<sup>3</sup>, et Duriez<sup>4</sup>. On peut cependant développer la fonction perturbatrice en utilisant d'abord un développement en anomalie excentrique. Ce développement a été utilisé par Cauchy

<sup>1</sup> *Annales de L'Observatoire de Paris*, tome I, Paris, 1855

<sup>2</sup> *Biull. Inst. Teor. Astr. Leningrad*, 1967

<sup>3</sup> *Astron. Astrophys.* 38, 57

<sup>4</sup> *Astron. Astrophys.* 54, 93

pour vérifier partiellement les travaux de Le Verrier<sup>5</sup>. Il a été ensuite repris par Hansen<sup>6</sup> et Newcomb<sup>7</sup>. Ce développement est plus simple et sans doute plus didactique. Poincaré l'utilise très souvent dans les *Leçons*<sup>8</sup> et dans les *Méthodes Nouvelles*. De plus il se prête très bien à un calcul sur ordinateur.

### 7.1. Quelques formules utiles

$$M = E - e \sin E$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$$

$$\frac{r}{a} \cos v = \cos E - e$$

$$\frac{r}{a} \sin v = \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$dM = \frac{r}{a} dE$$

d'où

$$\Theta = \frac{r}{a} E^{i(v-E)} = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} - e E^{-iE} + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2} E^{-2iE}$$

ce qui peut être considéré comme un polynôme en  $e, 1 - \sqrt{1 - e^2}, E^{-iE}, E^{iE}$ .

### 7.2. Développement de la fonction perturbatrice

On effectue d'abord le développement de la fonction perturbatrice en fonction de l'anomalie excentrique  $E$ . La fonction perturbatrice se présente alors sous une forme simple, facilement implantable sur ordinateur. Le passage en anomalie moyenne se calcule par des formules explicites utilisant les fonctions de Bessel. En particulier, on obtient un

<sup>5</sup> *Comptes rendus à l'academie des sciences*, t. XX, 1845

<sup>6</sup> voir Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, t. III, 1894 et t. IV, 1896

<sup>7</sup> *Astron. Pap. of the Amer. Ephem.*, vol III, 1891

<sup>8</sup> voir en particulier le t.II, première partie

algorithme qui permet de calculer chaque inégalité en anomalie moyenne de manière indépendante. Le carré de la distance des deux corps est

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S$$

Soit, en isolant la partie correspondant à un mouvement circulaire plan et en posant  $\alpha = a/a'$

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\tilde{E} - \tilde{E}') + U_1 + U_2 + U_3$$

$\tilde{E}$  désigne la longitude excentrique, soit  $\tilde{E} = E + \varpi$ . On a posé

$$U_1 = \alpha^2 \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{r^2}{a'^2} - 1$$

$$U_2 = 2\alpha \cos(\tilde{E} - \tilde{E}') - 2\alpha \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos(w - w')$$

$$U_3 = 2\alpha \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} (\cos(w - w') - \cos S)$$

Nous allons alors montrer que  $U_1, U_2, U_3$  peuvent s'exprimer comme des polynômes. D'autre part, on verra que  $U_1$  et  $U_2$  sont de l'ordre d'une excentricité, et  $U_3$  de l'ordre du carré d'une inclinaison.

calcul de  $U_1$

On a

$$r = a(1 - e \cos E)$$

donc

$$U_1 = \alpha^2 (e^2 \cos^2 E - 2e \cos E) + e'^2 \cos^2 E' - 2e' \cos E'$$

calcul de  $U_3$

On a (5.28)

$$\cos S - \cos(w - w') = \operatorname{Re} \left[ E^{i(w-w')} A + E^{i(w+w')} B \right]$$

avec

$$A = \left( \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \bar{\zeta} \zeta' \right)^2 - 1$$

$$B = \left( \cos \frac{i'}{2} \bar{\zeta} - \cos \frac{i}{2} \zeta' \right)^2$$

d'autre part

$$\frac{r}{a} E^{i(w-\bar{E})} = \frac{r}{a} E^{i(v-E)} = \Theta$$

soit finalement

$$U_3 = -2\alpha \operatorname{Re} \left[ E^{i(\bar{E}-\bar{E}')} \Theta \bar{\Theta}' A + E^{i(\bar{E}+\bar{E}')} \Theta \Theta' B \right]$$

calcul de  $U_2$

$$\begin{aligned} U_2 &= -2\alpha \left[ \frac{rr'}{aa'} \cos(w-w') - \cos(\bar{E}-\bar{E}') \right] \\ &= -2\alpha \operatorname{Re} \left[ \frac{rr'}{aa'} E^{i(w-w')} - E^{i(\bar{E}-\bar{E}')} \right] \\ &= -2\alpha \operatorname{Re} \left[ (\Theta \bar{\Theta}' - 1) E^{i(\bar{E}-\bar{E}')} \right] \end{aligned}$$

développement de  $1/\Delta$

On a donc mis  $\Delta^2$  sous la forme

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = A + U$$

avec  $U$  petit. On obtient alors, en développant par exemple à l'ordre 10

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} = & A^{-1/2} - \frac{1}{2}U A^{-3/2} + \frac{3}{8}U^2 A^{-5/2} - \frac{5}{16}U^3 A^{-7/2} + \frac{35}{128}U^4 A^{-9/2} \\ & - \frac{63}{256}U^5 A^{-11/2} + \frac{231}{1024}U^6 A^{-13/2} - \frac{429}{2048}U^7 A^{-15/2} \\ & + \frac{6435}{32768}U^8 A^{-17/2} - \frac{12155}{65536}U^9 A^{-19/2} + \frac{46189}{262144}U^{10} A^{-21/2} \end{aligned}$$

Les  $U^i$  sont des polynômes qui peuvent se calculer exactement. On a d'autre part les expressions classiques en fonction des coefficients de Laplace

$$\begin{aligned} A^{-s/2} &= (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\tilde{E} - \tilde{E}'))^{-s/2} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{s/2}^j(\alpha) \cos j(\tilde{E} - \tilde{E}') \end{aligned}$$

Le passage du développement en anomalie excentrique au développement en anomalie moyenne est alors obtenu à l'aide des fonctions de Bessel<sup>1</sup>. On aura pour  $m$  et  $m'$  différents de zéro

$$A_{mm'} = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e')$$

où  $A_{mm'}$  est le coefficient de  $E^{i(mM+m'M')}$  et  $B_{mm'}$  celui de  $E^{i(mE+m'E')}$  dans le développement de  $a'/\Delta$ .

Cette formulation est particulièrement avantageuse pour calculer chaque terme indépendamment des autres. Si  $m = 0$  ou  $m' = 0$  on a une légère modification, et en particulier le terme séculaire est directement obtenu par (produits symboliques  $B_{ij} = B_i B_j$ )<sup>1</sup>

$$A_{00} = \left[ B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1}) \right] \left[ B'_0 - \frac{e'}{2}(B'_1 + B'_{-1}) \right]$$

<sup>1</sup> *Leçons de Mécanique Céleste, ch. XV*

## Annexe A. NOTATIONS.

	Le Verrier	Tisserand	Poincaré	Brouwer Clemence	BdL
anomalie vraie		$w$		$f$	$v$
anomalie moyenne	$\zeta$	$\zeta$	$l$	$l$	$M$
anomalie excentrique	$u$	$u$	$u$	$u, E$	$E$
argument du périhélie		$w$	$g$	$w$	$w$
longitude du nœud ascendant	$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\Omega$	$\Omega$
longitude du périhélie	$\varpi$	$\varpi$	$\varpi$	$\varpi$	$\varpi$
longitude vraie	$\nu$	$\nu$		$\psi$	$w$
longitude moyenne	$l$	$l$	$\lambda, \zeta$	$\lambda$	$\lambda$
inclinaison	$\varphi$	$\varphi$	$i$	$I$	$i$
inclinaison mutuelle	$\gamma$	$J$	$J$	$\gamma, \mathcal{J}$	$J$
longitude du nœud P/P'	$\tau$	$\tau$			$\sigma$
angle r r'	$s^*$	$\sigma$	$\sigma$	$S$	$S$
angle G périhélie				$\Pi$	

