

ISSN 1243 - 4272
ISBN 2 - 910015 - 08 - 4

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

S049

ORBITES DES SATELLITES DE MARS EN ÉLÉMENTS DE STRUVE

M. Chapront-Touzé

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
URA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
F-75014 Paris

Juillet 1994

ABSTRACT

Orbits of the Martian satellites in Struve-type elements

Solutions ESAPHO and ESADE (sect. 3) provide semi-analytical expressions of the rectangular coordinates of the Martian satellites Phobos and Deimos referred to Mars mean equator of date and to the ascending node of this plane on Mars mean orbit of date. These solutions have been fitted to a large number of observations including Earth-based observations and spacecraft observations from Mariner 9, Viking 1 and 2 and Phobos 2.

In the present paper, the basis expressions of ESAPHO and ESADE in osculating elements with fitted constants (table 1 + table 2) have been converted to semi-analytical expressions of Struve-type elements: semi-major axis a , eccentricity e , inclination I , angles K, P, L (fig. 1 and sect. 2) referred to the Laplacian planes of the satellites and to mean celestial equators and equinoxes of B1950.0 and J2000.0. The method used is described in sect. 4 and 6.

Tables 8, 9 and 10 give the periodic parts of the Struve-type elements for Phobos under formulation (35) and (36). For coefficients a_k and b_k , the unit is km for a and arcsecond for e, I, K, P, L . The arguments $\psi, \varpi', D, F, l, l'$ are given by the expressions of table 3 for Phobos and Mars. The arguments D_D, F_D, M_a, J_u in table 10 are given by the expressions of table 3 for Deimos (D_D and F_D) and table 11 (M_a and J_u). t is time (TDB or ET) in days reckoned from J2000.0 (JED 2 451 545.0). Table 12 gives similar quantities for Deimos, D, F, l being given by the expressions of table 3 for Deimos. The periodic parts of the Struve-type elements do not depend on the reference celestial equator and equinox.

The expressions of the secular parts of the Struve-type elements (mean Struve-type elements) are given in table 6, both for mean celestial equators and equinoxes of B1950.0 and J2000.0. t_* is time in days reckoned from J1950.0 (JED 2 433 282.5).

Tables 4 and 5 give the angles fixing the Laplacian planes with respect to the reference celestial equators and equinoxes (fig. 1, 2 and 4).

Table 13 in sect. 8 gives the maximum over 10 years of the differences between the Struve-type elements computed by substituting time in the expressions of this paper and the similar quantities derived from the numerical values of the rectangular coordinates provided by the previous representations of ESAPHO and ESADE. For each satellite, in the first line the complete series in rectangular coordinates are used; in the second line abridged series (coefficients > 50 m) are used. The third line gives the maximum of the differences between the osculating Struve-type elements and the mean Struve-type elements.

Tables 14 and 15 in sect. 9 give a comparison between the Struve-type elements computed by means of the expressions of this paper for the epoch 11 november 1971 0h ET and values given by other authors for the same epoch.

Orbites des satellites de Mars en éléments de Struve

1. Introduction

Les solutions ESAPHO et ESADE (Chapront-Touzé, 1988, 1989, 1990a, 1990b), pour les satellites de Mars Phobos et Déimos, ont été fournies jusqu'à présent sous forme de séries en coordonnées rectangulaires rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au noeud ascendant de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars. Nous donnons dans ce fascicule les séries en éléments osculateurs de Struve, plus descriptifs que les coordonnées rectangulaires. Par ailleurs, l'introduction du plan de Laplace, utilisé dans les éléments de Struve, permet d'éliminer une perturbation importante dans la longitude du noeud de Déimos.

Les éléments de Struve sont donnés ici sous forme de séries à coefficients numériques calculés à partir des constantes ajustées sur un très grand nombre d'observations comprenant, en particulier, les observations récentes de la sonde Phobos 2.

2. Définition des éléments de Struve

Les éléments de Struve : a , e , I , K , P , L , sont traditionnellement utilisés pour représenter les orbites osculatrices aréocentriques des satellites de Mars. a est le demi-grand axe de l'orbite, e son excentricité, I son inclinaison sur le plan de Laplace du satellite. K est l'arc \widehat{AC} mesuré dans le plan de Laplace (fig. 1), joignant le noeud ascendant A du plan de Laplace sur l'équateur céleste de référence au noeud ascendant C de l'orbite osculatrice du satellite sur le plan de Laplace. P est l'arc brisé joignant l'équinoxe de référence γ au périastre osculateur P du satellite, mesuré le long de l'équateur céleste (arc $\widehat{\gamma A}$), puis le long du plan de Laplace (arc \widehat{AC}), enfin le long de l'orbite (arc \widehat{CP}). L est donné par :

$$L = P + M \quad (1)$$

où M est l'anomalie moyenne du satellite.

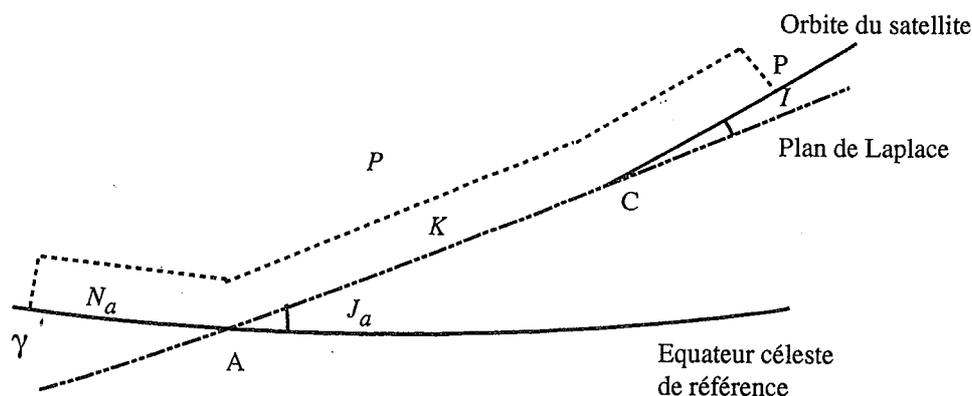


Fig. 1 Eléments de Struve

L'équateur céleste et l'équinoxe de référence sont respectivement l'équateur céleste et l'équinoxe moyens d'une date de référence σ pour un certain repère. Dans ce travail, nous considérerons deux cas : la date $\sigma = \text{B1950.0}$ associée au repère du FK4 et la date $\sigma = \text{J2000.0}$ associée au repère du FK5.

Le plan de Laplace d'un satellite est repéré par son inclinaison J_a sur l'équateur céleste de référence et par l'ascension droite N_a de son noeud ascendant A sur ce plan. Il passe par le noeud ascendant B de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars et a une inclinaison j constante sur le premier plan (fig. 2).

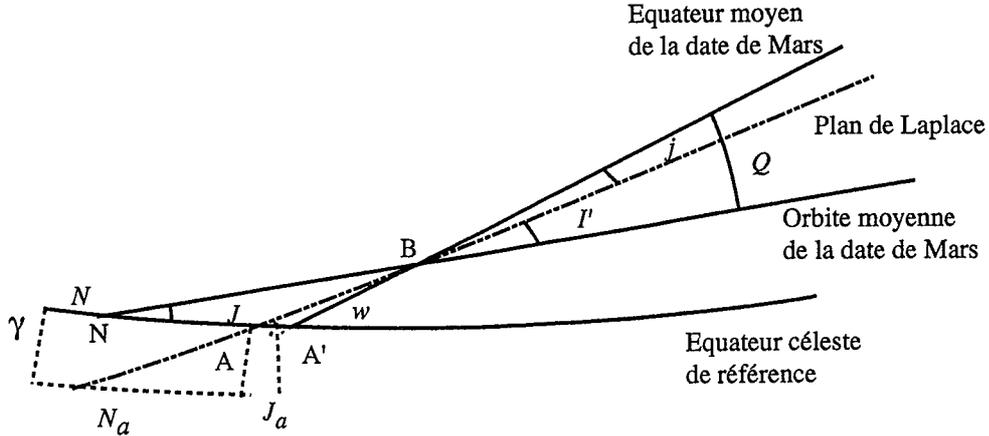


Fig. 2 Plan de Laplace

j est donné par :

$$2n_0^2 J_2 \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^2 \sin 2j = n_0'^2 (1 - e_0'^2)^{-\frac{3}{2}} \sin(2Q_0 - 2j) \quad (2)$$

n_0 et a_0 sont respectivement des valeurs approchées constantes du moyen mouvement osculateur n et du demi-grand axe osculateur a du satellite; r_0 est le rayon équatorial de Mars, J_2 le coefficient de l'harmonique zonal d'ordre 2 de Mars; Q_0 est l'inclinaison de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars pour une époque donnée; e_0' et n_0' sont respectivement l'excentricité moyenne et le moyen mouvement sidéral de Mars pour la même époque.

De la formule (2), on tire :

$$\tan 2j = \frac{B \sin 2Q_0}{A + B \cos 2Q_0} \quad (3)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= 2n_0^2 J_2 \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^2 \\ B &= n_0'^2 (1 - e_0'^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4)$$

L'introduction du plan de Laplace se justifie de la façon suivante. Si on ne tient compte que des perturbations dues au Soleil et à l'harmonique zonal d'ordre 2 du potentiel de Mars, les seuls termes à longue période de la fonction perturbatrice agissant sur le satellite sont d'après (Sinclair, 1972), à des termes d'ordres supérieurs près en excentricité et inclinaison :

$$\frac{3}{8} n'^2 a^2 (1 - e'^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin I \sin 2I' \cos(K - K') - \frac{3}{4} n^2 J_2 r_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin I \sin 2j \cos(K - K') \quad (5)$$

où I' est l'inclinaison de l'orbite moyenne de la date de Mars sur le plan de Laplace et K' l'arc \widehat{AB} augmenté de 180° . On a donc :

$$I' = Q - j \quad (6)$$

En choisissant pour j la valeur issue de (2), on élimine la partie principale des termes à longue période de l'inclinaison et de la longitude du noeud du satellite.

Pendant longtemps, les éléments a, e, I ont été considérés comme constants et les éléments K, P, L comme des fonctions linéaires du temps, les coefficients étant ajustés sur les observations (voir, par exemple, Burton, 1929). Puis, avec la mise en évidence de l'accélération séculaire de Phobos par Sharpless (1945), un terme quadratique est venu s'ajouter à L .

De nos jours, on distingue les éléments osculateurs de Struve, que l'on peut représenter par des séries de Fourier et de Poisson, des éléments moyens de Struve, constitués par les termes constants ou séculaires des développements précédents.

3. Les solutions ESAPHO et ESADE

Les théories aréocentriques ESAPHO et ESADE (Chapront-Touzé, 1988, 1989 et 1990a) sont rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au noeud ascendant B de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars (fig. 3).

Les équations différentielles du mouvement, pour la partie *problème principal*, sont intégrées en variables $n, e \cos \varpi, e \sin \varpi, \gamma \cos h, \gamma \sin h$ et λ où n est le moyen mouvement osculateur, e l'excentricité osculatrice, $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ où i est l'inclinaison de l'orbite sur le plan de référence (équateur moyen de la date de Mars). h est la longitude du noeud C' de l'orbite osculatrice sur le plan de référence (arc $\widehat{BC'}$), ϖ est la longitude du périastre P, arc brisé mesuré le long du plan de référence (arc $\widehat{BC'}$) puis le long de l'orbite (arc $\widehat{C'P}$). λ , longitude moyenne, est donnée par :

$$\lambda = \varpi + M \quad (7)$$

où M est l'anomalie moyenne du satellite.

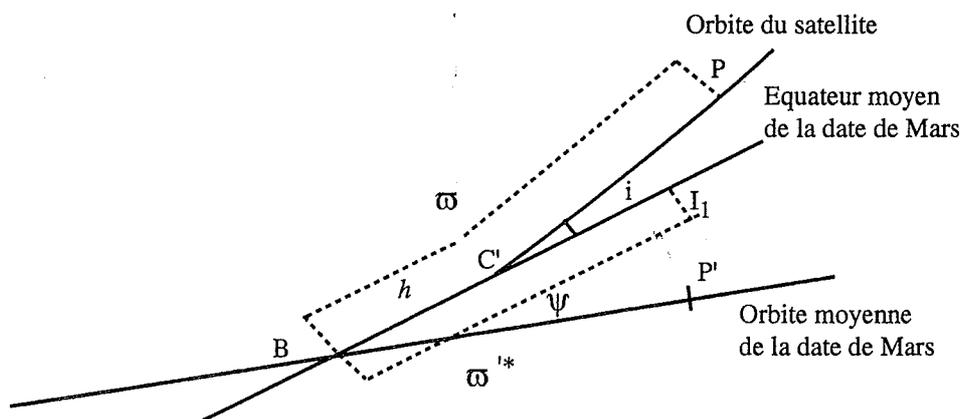


Fig. 3 Angles des théories ESAPHO et ESADE

Les expressions obtenues pour $n, e \cos \varpi, e \sin \varpi, \gamma \cos h, \gamma \sin h$ se présentent sous forme de séries de Fourier à coefficients numériques dont les arguments sont des combinaisons linéaires de six arguments

fondamentaux ψ , ϖ'^* , D , F , l , l' , conservés sous forme littérale. λ est la somme d'une série de Fourier λ_p semblable (mais sans argument nul) et d'un polynôme du temps, $\bar{\lambda}$, appelé *partie séculaire* de λ .

ψ est l'arc $\widehat{BI_1}$ mesuré le long de l'équateur de Mars, où I_1 est l'axe principal d'inertie de Mars associé au plus petit moment. ϖ'^* est l'arc $\widehat{BP'}$, où P' est le périastre moyen du Soleil dans son mouvement relatif autour du centre de gravité de Mars. l' est la partie séculaire de l'anomalie moyenne de Mars dans son mouvement héliocentrique. D , F , l sont définis par :

$$\begin{aligned} D &= \bar{\lambda} - l' - \varpi'^* \\ F &= \bar{\lambda} - \bar{h} \\ l &= \bar{\lambda} - \bar{\varpi} \end{aligned} \quad (8)$$

où \bar{h} est la longitude moyenne du noeud ascendant et $\bar{\varpi}$ la longitude moyenne du périastre, c'est à dire les parties séculaires de h et ϖ respectivement.

ψ , ϖ'^* , \bar{h} et $\bar{\varpi}$ sont considérés comme des fonctions linéaires du temps et les moyens mouvements de \bar{h} et $\bar{\varpi}$ sont fournis par la théorie. $\bar{\lambda}$ est un polynôme de degré deux du temps. Son moyen mouvement en J2000.0 est une des constantes d'intégration ν .

Pour la construction des théories, ν et les deux autres constantes d'intégration métriques, une constante excentricité E et une constante inclinaison Γ , ont reçu les valeurs numériques données dans la table 1.

Table 1. Constantes des théories

	Phobos	Déimos
ν	1128°.844 26 /jour	285°.161 908 /jour
E	0.015	0.000 417
Γ	0.009 657 769	0.015 508

La partie *problème principal* des théories correspond à l'action du potentiel de Mars, jusqu'aux harmoniques 9,9 pour Phobos et 3,3 pour Déimos, et à l'action d'un soleil fictif dont l'orbite aréocentrique est supposée quasi-képlérienne.

La théorie ESAPHO comprend en plus des perturbations intégrées sous forme de séries de Fourier en variables $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, $z_3^{(0)}$, w_1 , w_2 , w_3 . Les perturbations en $z_1^{(0)}$ apparaissent comme une correction variable à la constante $\frac{\nu}{\nu_0}$, où ν_0 est un facteur d'échelle. De même les perturbations en $z_2^{(0)}$, $z_3^{(0)}$, w_1 , w_2 , w_3 apparaissent respectivement comme des corrections variables aux constantes Γ et E et aux polynômes du temps $\bar{\lambda}$, $\bar{\varpi}$ et \bar{h} . Certaines de ces perturbations ne dépendent que des six arguments du problème principal de Phobos. D'autres font intervenir les longitudes des planètes ou les arguments du problème principal de Déimos.

A partir des expressions semi-analytiques de n , $e \cos \varpi$, $e \sin \varpi$, $\gamma \cos h$, $\gamma \sin h$, λ et, pour Phobos, de celles de $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, $z_3^{(0)}$, w_1 , w_2 , w_3 , nous avons construit les expressions semi-analytiques du demi-grand axe osculateur a (lié à n par la troisième loi de Kepler) et des coordonnées rectangulaires x_1 , x_2 , x_3 rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au point B.

Les solutions ESAPHO et ESADE (Chapront-Touzé, 1990b) proviennent de l'ajustement des théories précédentes sur un ensemble d'observations comprenant des observations terrestres et les observations spatiales des sondes Mariner 9, Viking 1 et 2 et Phobos 2. Au cours de cet ajustement, nous avons obtenu des

corrections $\delta\nu$, δE , $\delta\Gamma$ aux constantes des théories données dans la table 1, des corrections δn_{ϖ} et δn_h aux moyens mouvements du périastre et du noeud fournis par la théorie, des valeurs des accélérations séculaires des satellites (coefficient du terme en t^2 de $\bar{\lambda}$) et des valeurs des arguments $\bar{\lambda}$, $\bar{\varpi}$, \bar{h} pour une date origine. Les corrections $\delta\nu$, δE , $\delta\Gamma$ sont données dans la table 2. Elles peuvent être incorporées à la théorie, pour ESAPHO au moyen des dérivées premières semi-analytiques par rapport à ν , E et Γ établies en même temps que la théorie et au moyen des dérivées secondes képlériennes, pour ESADE au moyen des dérivées premières képlériennes, les dérivées complètes n'ayant pas été calculées.

Table 2. Corrections aux constantes des théories

	Phobos	Déimos
$\delta\nu$	0°.000 4994 /jour	-0°.000 0333 /jour
δE	0.000 146	-0.000 221
$\delta\Gamma$	-0.000 341	0.000 103

Au moyen des constantes de la table 2 et des autres constantes ajustées (y compris des corrections observées aux moyens mouvements calculés), nous avons établi les expressions des arguments $\bar{\lambda}$, $\bar{\varpi}$, \bar{h} données dans la table 3. Nous donnons également dans la table 3 les expressions des arguments ψ , ϖ'^* et l' , indépendantes des solutions ESAPHO et ESADE, et celles des arguments D , F , l qui se déduisent des précédentes au moyen des formules (8). t est le temps TDB ou TE en jours compté à partir de J2000.0 (date julienne 2 451 545.0)

Table 3. Arguments des solutions ESAPHO et ESADE

<i>Phobos</i>	
$\bar{\lambda}$	$= 171^\circ.9160 + 1128^\circ.844\,7594\,t + 0^\circ.9518\,10^{-8}\,t^2$
\bar{h}	$= 125^\circ.88 - 0^\circ.436\,025\,t$
$\bar{\varpi}$	$= 342^\circ.91 + 0^\circ.435\,320\,t$
D	$= 81^\circ.5376 + 1128^\circ.320\,7210\,t + 0^\circ.9518\,10^{-8}\,t^2$
F	$= 46^\circ.04 + 1129^\circ.280\,784\,t + 0^\circ.9518\,10^{-8}\,t^2$
l	$= 189^\circ.00 + 1128^\circ.409\,439\,t + 0^\circ.9518\,10^{-8}\,t^2$
<i>Déimos</i>	
$\bar{\lambda}$	$= 215^\circ.2172 + 285^\circ.161\,8747\,t - 0^\circ.377\,10^{-9}\,t^2$
\bar{h}	$= 11^\circ.20 - 0^\circ.018\,001\,t$
$\bar{\varpi}$	$= 224^\circ.01 + 0^\circ.018\,007\,t$
D	$= 124^\circ.8388 + 284^\circ.637\,8363\,t - 0^\circ.377\,10^{-9}\,t^2$
F	$= 204^\circ.02 + 285^\circ.179\,876\,t - 0^\circ.377\,10^{-9}\,t^2$
l	$= 351^\circ.21 + 285^\circ.143\,868\,t - 0^\circ.377\,10^{-9}\,t^2$
<i>Mars</i>	
ψ	$= 208^\circ.5619 + 350^\circ.891\,9885\,t$
ϖ'^*	$= 71^\circ.0053 + 0^\circ.177\,2311\,10^{-4}\,t$
l'	$= 19^\circ.3730 + 0^\circ.524\,0207\,t$

4. Passage des variables $e \cos \varpi$, $e \sin \varpi$, $\gamma \cos h$, $\gamma \sin h$, λ aux variables e , I , K , P , L

En conservant les notations des paragraphes précédents, on note en plus, sur la figure 4, h_L la longitude du noeud ascendant C de l'orbite sur le plan de Laplace mesurée à partir du point B (arc BC), K_1 l'arc \widehat{AB} du plan de Laplace et K_2 l'arc $\widehat{CC'}$ mesuré dans le plan de l'orbite. N_a désigne l'arc $\widehat{\gamma A}$

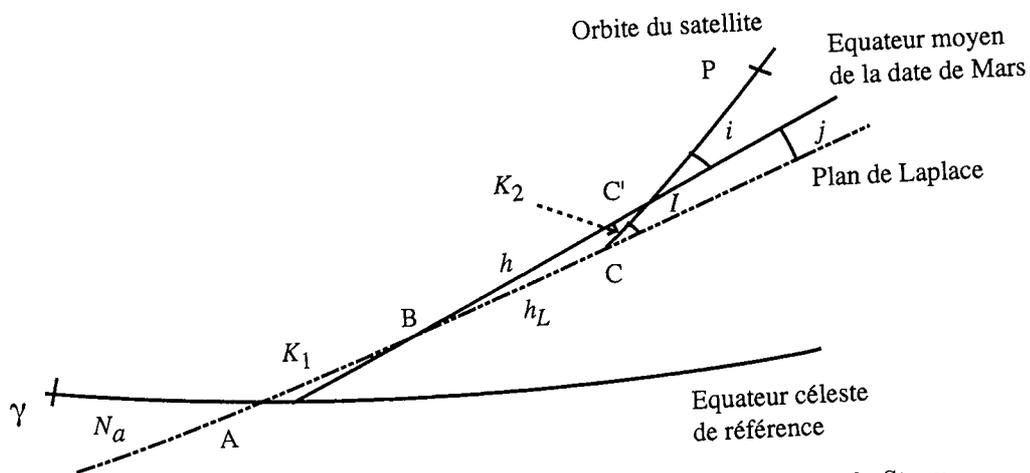


Fig. 4 Passage des éléments ESAPHO et ESADE aux éléments de Struve

On a donc, en comparant les figures 1, 3 et 4 :

$$\begin{aligned} K &= h_L + K_1 \\ P &= N_a + K_1 + h_L + K_2 + \varpi - h \\ L &= N_a + K_1 + h_L + K_2 + \lambda - h \end{aligned} \quad (9)$$

Dans le triangle sphérique BCC', on a :

$$\begin{aligned} \sin I \sin h_L &= \sin i \sin h \\ \sin I \cos h_L &= \sin i \cos h \cos j + \cos i \sin j \\ \cos I &= -\sin i \cos h \sin j + \cos i \cos j \end{aligned} \quad (10)$$

or :

$$\begin{aligned} \gamma &= \sin \frac{i}{2} \\ \sin i &= 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \\ \cos i &= 1 - 2\gamma^2 \end{aligned} \quad (11)$$

donc :

$$\begin{aligned} \sin I \sin h_L &= 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \sin h \\ \sin I \cos h_L &= 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \cos h \cos j + (1 - 2\gamma^2) \sin j \\ \cos I &= -2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \cos h \sin j + (1 - 2\gamma^2) \cos j \end{aligned} \quad (12)$$

Dans le triangle sphérique BCC', on a :

$$\begin{aligned} \sin I \sin K_2 &= \sin h \sin j \\ \sin I \cos K_2 &= \cos i \cos h \sin j + \sin i \cos j \end{aligned} \quad (13)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}\sin I \sin(K_2 - h) &= (1 - \cos i) \sin h \cos h \sin j - \sin i \cos j \sin h \\ \sin I \cos(K_2 - h) &= \sin j - (1 - \cos i) \cos^2 h \sin j + \sin i \cos j \cos h\end{aligned}\quad (14)$$

puis, à l'aide des formules (11) :

$$\begin{aligned}\sin I \sin(K_2 - h) &= 2\gamma^2 \sin h \cos h \sin j - 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos j \sin h \\ \sin I \cos(K_2 - h) &= \sin j - 2\gamma^2 \cos^2 h \sin j + 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos j \cos h\end{aligned}\quad (15)$$

Les quantités N_a et K_1 sont des fonctions séculaires du temps qui ne dépendent que du plan de Laplace. Une fois ces quantités connues, les formules (15) et (12) jointes aux formules (9) permettent de calculer les variables de Struve e , I , K , P , L en fonction des variables $e \cos \varpi$, $e \sin \varpi$, $\gamma \cos h$, $\gamma \sin h$ et λ des théories ESAPHO et ESADE.

5. Calcul des quantités ne dépendant que du plan de Laplace

Soient α et δ l'ascension droite et la déclinaison du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe de référence (équateur céleste et équinoxe moyens d'une date de référence σ pour un repère donné). On suppose connues les valeurs de α et δ et de leurs dérivées par rapport au temps, $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$, pour une date particulière σ' .

$\dot{\alpha}$ et $\dot{\delta}$ peuvent être calculés à partir des valeurs $\alpha(\sigma')$ et $\delta(\sigma')$ et de la vitesse de précession de Mars, p_R , à partir des formules (11.32), (11.36) et (11.37) de (Chapront-Touzé et al, 1994), en supposant constante l'inclinaison de l'équateur moyen de la date de Mars sur une orbite fixe de Mars. Dans ce travail, nous avons utilisé, pour $\sigma = \text{B1950.0}$, les valeurs de α et δ données pour $\sigma' = \text{J1978.0}$ (date julienne 2 443 509.5 TE) par Reasenberget al (1977) et reproduites dans la table 4. Pour $\sigma = \text{J2000.0}$, nous avons utilisé les valeurs de la table 4 déduites des précédentes par une transformation de précession. Dans les deux cas, nous avons utilisé la vitesse de précession $p_R = -757.5''/\text{siècle}$ de Reasenberget King (1979). Les valeurs de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\delta}$ obtenues, données dans la table 4, coïncident après arrondi avec les valeurs données dans (Davies et al, 1992) et (Davies et al, 1983). La valeur de $\dot{\varpi}'$ donnée dans la table 3 diffère légèrement de la valeur obtenue à partir des données de la table 4 mais cette différence est sans incidence sur les expressions de D de la table 3 et par suite sur le calcul des positions des satellites.

Sur la figure 2, nous désignons par A' le noeud ascendant de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'équateur céleste de référence et par N le noeud ascendant de l'orbite moyenne de la date de Mars sur ce même plan. Nous notons w l'arc $\widehat{A'B}$ mesuré le long de l'équateur moyen de la date de Mars, N l'ascension droite de N et J l'inclinaison de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'équateur céleste de référence. Nous avons utilisé ici les valeurs de J et N et de leurs dérivées par rapport au temps en J1978 données par la table 4. Ces valeurs ont été obtenues à partir des expressions de l'inclinaison et de la longitude du noeud moyen de Mars rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens inertiels J2000.0 (Simon et al, 1994) par la méthode décrite dans (Chapront-Touzé et al, 1994). Les valeurs de la table 4 sont rapportées aux équinoxes du FK5 (J2000.0) et du FK4 (B1950.0).

L'ascension droite de A' est $90^\circ + \alpha$ et l'inclinaison de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'équateur céleste de référence est $90^\circ - \delta$.

Dans le triangle sphérique $NA'B$, on a :

$$\begin{aligned}\sin Q \sin w &= \sin J \cos(N - \alpha) \\ \sin Q \cos w &= -\sin J \sin(N - \alpha) \sin \delta + \cos J \cos \delta \\ \cos Q &= \sin J \sin(N - \alpha) \cos \delta + \cos J \sin \delta\end{aligned}\quad (16)$$

puis, en dérivant cette expression :

$$\begin{aligned}\dot{w} \sin Q &= \dot{j} \left(\cos J \cos(N - \alpha) \cos w + \cos J \sin(N - \alpha) \sin \delta \sin w + \sin J \cos \delta \sin w \right) \\ &\quad + (\dot{N} - \dot{\alpha}) \left(-\sin J \sin(N - \alpha) \cos w + \sin J \cos(N - \alpha) \sin \delta \sin w \right) + \dot{\delta} \sin w \cos Q \quad (17) \\ \dot{Q} \sin Q &= \dot{j} \left(-\cos J \sin(N - \alpha) \cos \delta + \sin J \sin \delta \right) - (\dot{N} - \dot{\alpha}) \sin Q \sin w \cos \delta - \dot{\delta} \cos w \sin Q\end{aligned}$$

Au moyen des équations (16) et des valeurs de la table 4, on obtient les valeurs de Q et w en J1978.0, puis, en utilisant les équations (17), on en déduit les expressions de Q et w données dans la table 5.

Pour calculer j à l'aide des formules (3) et (4), nous avons utilisé pour Q_0 la valeur de Q en J2000.0, pour a_0 la valeur moyenne du demi-grand axe osculateur, pour n_0 la valeur déduite de la précédente par la troisième loi de Kepler. Ces valeurs et les autres quantités utilisées sont données dans la table 4.

Table 4. Valeurs utilisées pour le calcul des quantités liées au plan de Laplace

Equateur céleste et équinoxe B1950.0 (FK4)	Equateur céleste et équinoxe J2000.0 (FK5)
Epoque J1978.0	Epoque J1978.0
$\alpha = 317^\circ.311$	$\alpha = 317^\circ.705$
$\delta = 52^\circ.694$	$\delta = 52^\circ.899$
$\dot{\alpha} = -0^\circ.108\,143\,834/\text{siècle}$	$\dot{\alpha} = -0^\circ.108\,107\,046/\text{siècle}$
$\dot{\delta} = -0^\circ.061\,026\,520/\text{siècle}$	$\dot{\delta} = -0^\circ.061\,382\,583/\text{siècle}$
$N = 3^\circ.343\,766\,83$	$N = 3^\circ.379\,756\,67$
$J = 24^\circ.693\,106\,91$	$J = 24^\circ.676\,780\,66$
$\dot{N} = -107''.474\,305/\text{siècle}$	$\dot{N} = -107''.416\,602/\text{siècle}$
$\dot{j} = 4''.209\,156/\text{siècle}$	$\dot{j} = 4''.730\,355/\text{siècle}$
$GM = 42\,828.3 \text{ km}^3/\text{s}^2$	
$J_2 = 0.001\,9592$	
$r_0 = 3397.2 \text{ km}$	
$n'_0 = 0^\circ.524\,032\,835\,903/\text{jour}$	
$e'_0 = 0.093\,400\,619\,9454$	
<i>Phobos</i>	
$a_0 = 9378.541\,18 \text{ km}$	
<i>Déimos</i>	
$a_0 = 23\,458.940\,48 \text{ km}$	

Dans le triangle sphérique AA'B, on a :

$$\begin{aligned}\sin J_a \cos(N_a - \alpha) &= \sin w \sin j \\ \sin J_a \sin(N_a - \alpha) &= -\sin \delta \cos w \sin j + \cos \delta \cos j \\ \cos J_a &= \cos \delta \cos w \sin j + \sin \delta \cos j\end{aligned}\quad (18)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin J_a \sin K_1 &= \cos \delta \sin w \\ \sin J_a \cos K_1 &= \cos \delta \cos w \cos j - \sin \delta \sin j\end{aligned}\quad (19)$$

ainsi que :

$$\cos K_1 = \cos w \sin(N_a - \alpha) - \sin w \cos(N_a - \alpha) \sin \delta \quad (20)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(N_a - \alpha) &= \cos K_1 \cos w + \sin w \cos j \sin K_1 \\ \cos(N_a - \alpha) \sin \delta &= -\cos K_1 \sin w + \cos w \cos j \sin K_1 \\ \cos(N_a - \alpha) \cos \delta &= \sin K_1 \sin j\end{aligned}\quad (21)$$

Table 5. Quantités liées au plan de Laplace

Equateur céleste et équinoxe B1950.0 (FK4)	Equateur céleste et équinoxe J2000.0 (FK5)
$w = 42^\circ.9836 - 2^\circ.663 \cdot 10^{-6} t_*$	$w = 43^\circ.2458 - 2^\circ.657 \cdot 10^{-6} t$
$Q = 25^\circ.186 + 0^\circ.333 \cdot 10^{-6} t_*$	$Q = 25^\circ.192 + 0^\circ.333 \cdot 10^{-6} t$

Phobos

$$j = 0^\circ.00938$$

Déimos

$$j = 0^\circ.89509$$

Equateur céleste et équinoxe B1950.0 (FK4)	Equateur céleste et équinoxe J2000.0 (FK5)
<i>Phobos</i>	<i>Phobos</i>
$N_a = 47^\circ.3307 - 2^\circ.960 \cdot 10^{-6} t_*$	$N_a = 47^\circ.6706 - 2^\circ.959 \cdot 10^{-6} t$
$J_a = 37^\circ.282 + 1^\circ.671 \cdot 10^{-6} t_*$	$J_a = 37^\circ.108 + 1^\circ.680 \cdot 10^{-6} t$
$K_1 = 42^\circ.9920 - 2^\circ.664 \cdot 10^{-6} t_*$	$K_1 = 43^\circ.2543 - 2^\circ.658 \cdot 10^{-6} t$
<i>Déimos</i>	<i>Déimos</i>
$N_a = 46^\circ.3187 - 2^\circ.870 \cdot 10^{-6} t_*$	$N_a = 46^\circ.6494 - 2^\circ.869 \cdot 10^{-6} t$
$J_a = 36^\circ.638 + 1^\circ.642 \cdot 10^{-6} t_*$	$J_a = 36^\circ.467 + 1^\circ.651 \cdot 10^{-6} t$
$K_1 = 43^\circ.8007 - 2^\circ.753 \cdot 10^{-6} t_*$	$K_1 = 44^\circ.0721 - 2^\circ.748 \cdot 10^{-6} t$

t_* est le temps TDB ou TE compté en jours à partir de J1950.0 (date julienne 2 433 282.5)
 t est le temps TDB ou TE compté en jours à partir de J2000.0 (date julienne 2 451 545.0)

En dérivant la relation (18), on obtient, à l'aide de la relation (20) :

$$\begin{aligned} (\dot{N}_a - \dot{\alpha}) \sin J_a &= -\dot{\omega} \sin j \cos K_1 - \dot{\delta} \cos(N_a - \alpha) \cos J_a \\ \dot{J}_a &= \dot{\omega} \sin j \sin K_1 - \dot{\delta} \sin(N_a - \alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

En dérivant la relation (19), on obtient, à l'aide de la relation (21) :

$$\dot{K}_1 \sin J_a = \dot{\omega} \sin(N_a - \alpha) \cos \delta + \dot{\delta} \cos(N_a - \alpha) \quad (23)$$

Les relations (18) et (19) et les résultats précédents permettent de calculer N_a , J_a et K_1 en J1978.0. Les expressions (22) et (23) permettent de calculer les dérivées. On obtient ainsi les expressions données dans la table 5.

6. Construction des séries éléments de Struve

Ce calcul a été effectué en utilisant les sous-programmes d'addition et de multiplication de séries de Fourier à coefficients numériques qui ont servi à la construction des théories ESAPHO et ESADE. Les séries de départ sont les séries a , $e \cos \varpi$, $e \sin \varpi$, $\gamma \cos h$, $\gamma \sin h$ et λ du problème principal de ESAPHO et ESADE dans lesquelles on a substitué les corrections de constantes de la table 2. Pour Phobos, on a tenu compte ensuite des perturbations.

La série donnant le demi-grand axe est commune aux deux systèmes de variables. Elle se compose d'une partie constante \bar{a} et d'une série a_p sans argument nul.

Les séries e et ϖ sont déduites des séries $e \cos \varpi$ et $e \sin \varpi$ de la façon suivante :

- On fait choix d'une constante e_0 voisine des coefficients de $\cos(\varpi' + D - l + l')$ et $\sin(\varpi' + D - l + l')$ dans les séries $e \cos \varpi$ et $e \sin \varpi$. Donc $e_0 \cos \bar{\varpi}$ et $e_0 \sin \bar{\varpi}$, avec :

$$\bar{\varpi} = \varpi' + D - l + l' \quad (24)$$

représentent les parties principales respectives de $e \cos \varpi$ et $e \sin \varpi$. On calcule :

$$\left(\frac{e}{e_0}\right)^2 = \frac{e^2 \cos^2 \varpi + e^2 \sin^2 \varpi}{e_0^2} \quad (25)$$

puis :

$$\frac{e_0}{e} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{e}{e_0}\right)^2}} \quad (26)$$

par une méthode itérative qui converge même lorsque, pour Déimos, le terme principal de $\left(\frac{e}{e_0}\right)^2 - 1$ a une amplitude de 0.6.

- On en déduit :

$$e = \left(\frac{e}{e_0}\right)^2 \frac{e_0}{e} e_0 \quad (27)$$

puis la série :

$$\sin(\varpi - \bar{\varpi}) = \frac{1}{e_0} \frac{e_0}{e} (e \sin \varpi \cos \bar{\varpi} - e \cos \varpi \sin \bar{\varpi}) \quad (28)$$

qui est de l'ordre des perturbations.

• De la série $\sin(\varpi - \bar{\varpi})$, on déduit la série $(\varpi - \bar{\varpi})$ à l'aide du développement en série entière de la fonction arcsinus qui converge rapidement même lorsque, pour Déimos, le coefficient du terme principal de $(\varpi - \bar{\varpi})$ atteint 0.3 rad. La série $\varpi_p = \varpi - \bar{\varpi}$ contient uniquement des termes d'argument non nul. La série e se compose d'un terme constant \bar{e} (terme principal) et d'une série e_p sans terme d'argument nul.

A l'aide des formules (12) on calcule les séries $\sin I \sin h_L$ et $\sin I \cos h_L$ d'où l'on tire par la méthode précédente les séries $\sin I$ et :

$$\left(h_L\right)_p = h_L - \bar{h} \quad (29)$$

avec :

$$\bar{h} = \varpi'^* + D - F + I' \quad (30)$$

$\left(h_L\right)_p$ ne contient que des termes d'argument non nul. La série I est ensuite déduite de la série $\sin I$ à l'aide du développement en série entière de la fonction arcsinus. La série I se compose d'un terme constant \bar{I} (terme principal) et d'une série I_p sans terme d'argument nul.

A l'aide des formules (15), on calcule les séries $\sin I \sin(K_2 - h)$ et $\sin I \cos(K_2 - h)$ d'où l'on tire la série :

$$\left(K_2 - h\right)_p = K_2 - h + \bar{h} \quad (31)$$

qui contient uniquement des termes d'argument non nul.

Les éléments moyens de Struve sont $\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}, \bar{K}, \bar{P}, \bar{L}$ où, d'après les formules (9), $\bar{K}, \bar{P}, \bar{L}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{K} &= K_1 + \bar{h} \\ \bar{P} &= N_a + K_1 + \bar{\varpi} \\ \bar{L} &= N_a + K_1 + \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (32)$$

Les éléments osculateurs de Struve sont :

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} \cdot a_p \\ e &= \bar{e} + e_p \\ I &= \bar{I} + I_p \\ K &= \bar{K} + K_p \\ P &= \bar{P} + P_p \\ L &= \bar{L} + L_p \end{aligned} \quad (33)$$

où K_p, P_p et L_p sont les séries de Fourier :

$$\begin{aligned} K_p &= \left(h_L\right)_p \\ P_p &= \left(h_L\right)_p + \left(K_2 - h\right)_p + \varpi_p \\ L_p &= \left(h_L\right)_p + \left(K_2 - h\right)_p + \lambda_p \end{aligned} \quad (34)$$

Pour Phobos, on a tenu compte des perturbations en ajoutant à a_p, e_p, I_p, K_p, P_p et L_p respectivement les perturbations en $-\frac{2}{3}a_0z_1^{(0)}, z_3^{(0)}, 2z_2^{(0)}, w_3, w_2, w_1$, certaines de ces perturbations étant nulles à la précision considérée.

7. Résultats

Nous donnons dans la table 6 les éléments moyens de Struve.

La table 7 donne le niveau de troncature adopté pour chaque série et le nombre de termes.

La table 8 donne, pour le problème principal de Phobos, les séries a_p , e_p , I_p , K_p , P_p et L_p sous la forme :

$$\sum_{k=1}^N (a_k \sin \phi_k + b_k \cos \phi_k) \quad (35)$$

avec :

$$\phi_k = k_1 \varpi'^* + k_2 \psi + k_3 D + k_4 F + k_5 l + k_6 l' \quad (36)$$

On y trouve, pour chaque k , les coefficients k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 , k_6 , les coefficients a_k , b_k et la période du terme. Les coefficients a_k et b_k sont en km pour a et en seconde de degré pour I , K , P , L . Pour e , les coefficients, sans dimension, ont été transformés en secondes c'est à dire multipliés par 206264.8. Les périodes sont en jours.

La table 9 donne pour Phobos, avec les mêmes unités que la table 8, les termes des séries I_p , K_p et L_p provenant des perturbations et dont les arguments se mettent sous la forme (36). Pour les autres variables, il n'y a pas de telles perturbations à la précision considérée. La table 10 donne, pour Phobos, les autres termes provenant des perturbations avec les mêmes unités, les arguments étant donnés explicitement.

Dans les tables 8, 9, 10, les arguments D , F , l doivent être calculés à l'aide des expressions de la table 3 pour Phobos, et les arguments ψ , ϖ'^* et l' à l'aide des expressions de la table 3 pour Mars. Dans la table 10, les arguments D_D et F_D doivent être calculés avec les expressions de D et F pour Déimos. Les expressions des arguments M_a (longitude moyenne de Mars) et J_u (longitude moyenne de Jupiter) sont données dans la table 11.

La table 12 donne, pour le problème principal de Déimos, les séries a_p , e_p , I_p , K_p , P_p et L_p sous la forme (35). Les arguments sont sous la forme (36) dans laquelle D , F , l doivent être calculés à partir des expressions de la table 3 pour Déimos. Les unités sont les mêmes que pour Phobos. Les perturbations agissant sur Déimos n'ont pas été calculées.

Table 6. Eléments moyens de Struve

<i>Phobos</i>	
$\bar{a} = 9378.5412 \text{ km}$	
$\bar{e} = 0.015148636$	
$\bar{I} = 1^\circ.067652$	
<i>Déimos</i>	
$\bar{a} = 23458.9405 \text{ km}$	
$\bar{e} = 0.000204524$	
$\bar{I} = 1^\circ.789001$	

Equateur céleste et équinoxe B1950.0 (FK4)	Equateur céleste et équinoxe J2000.0 (FK5)
<i>Phobos</i>	
$\bar{K} = 211^\circ.78 - 0^\circ.436028 t_*$	$\bar{K} = 169^\circ.13 - 0^\circ.436028 t$
$\bar{P} = 43^\circ.20 + 0^\circ.435314 t_*$	$\bar{P} = 73^\circ.83 + 0^\circ.435314 t$
$\bar{L} = 137^\circ.9946 + 1128^\circ.8444061 t_* + 0^\circ.9518 10^{-8} t_*^2$	$\bar{L} = 262^\circ.8408 + 1128^\circ.8447538 t + 0^\circ.9518 10^{-8} t^2$
<i>Déimos</i>	
$\bar{K} = 23^\circ.74 - 0^\circ.018004 t_*$	$\bar{K} = 55^\circ.27 - 0^\circ.018004 t$
$\bar{P} = 345^\circ.28 + 0^\circ.018001 t_*$	$\bar{P} = 314^\circ.73 + 0^\circ.018001 t$
$\bar{L} = 296^\circ.4741 + 285^\circ.1618828 t_* - 0^\circ.377 10^{-9} t_*^2$	$\bar{L} = 305^\circ.9387 + 285^\circ.1618691 t - 0^\circ.377 10^{-9} t^2$

t et t_* ont la même définition que dans la table 5

Table 7. Niveau de troncature et nombre de termes des séries périodiques

	<i>Phobos</i>		<i>Déimos</i>	
	Troncature	Termes	Troncature	Termes
a	0.01 km	6	0.01 km	6
e	10^{-6}	16	10^{-6}	26
I	10^{-6} rad	20	10^{-6} rad	17
K	$5 10^{-5} \text{ rad}$	23	$5 10^{-5} \text{ rad}$	17
P	$5 10^{-5} \text{ rad}$	22	$5 10^{-4} \text{ rad}$	234
L	10^{-6} rad	26	10^{-6} rad	22

Table 8. Phobos : Termes périodiques des éléments de Struve. Problème principal

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>a</i>	1	2	-2	-2	0	0	-2	0.0076	0.6802	0.231
<i>a</i>	2	3	-3	-3	0	0	-3	-0.0184	-0.1144	0.154
<i>a</i>	3	0	0	0	0	1	0	0.0000	0.1097	0.319
<i>a</i>	4	1	-1	-1	0	0	-1	0.0041	-0.0506	0.463
<i>a</i>	5	2	-2	-2	0	-1	-2	0.0004	0.0314	0.134
<i>a</i>	6	4	-4	-4	0	0	-4	0.0082	0.0116	0.116
<i>e</i>	1	0	0	0	0	1	0	0.0000	79.6243	0.319
<i>e</i>	2	0	0	2	0	-2	0	0.0000	14.4181	2028.901
<i>e</i>	3	0	0	0	1	-1	0	-11.2697	0.0000	413.154
<i>e</i>	4	2	-2	-2	0	-1	-2	0.1098	7.5979	0.134
<i>e</i>	5	2	-2	-2	0	1	-2	-0.0816	6.7586	0.842
<i>e</i>	6	3	-3	-3	0	-1	-3	-0.2262	-1.4118	0.104
<i>e</i>	7	1	-1	-1	0	1	-1	0.1136	-1.2096	1.027
<i>e</i>	8	0	0	0	0	2	0	0.0002	1.2942	0.160
<i>e</i>	9	0	0	2	0	-2	-1	0.0000	1.1858	513.218
<i>e</i>	10	3	-3	-3	0	1	-3	-0.1334	-0.8186	0.299
<i>e</i>	11	1	-1	-1	0	-1	-1	0.0580	-0.6764	0.189
<i>e</i>	12	0	0	2	0	-2	1	0.0000	0.3459	1038.707
<i>e</i>	13	2	-2	-2	0	-2	-2	0.0053	0.2967	0.094
<i>e</i>	14	0	2	2	0	-2	2	0.0000	-0.2999	413.489
<i>e</i>	15	0	0	2	0	-1	0	0.0000	0.2724	0.319
<i>e</i>	16	4	-4	-4	0	-1	-4	0.1078	0.1524	0.085
<i>I</i>	1	0	1	1	-1	0	2	0.0000	23.3744	4091.089
<i>I</i>	2	0	1	-1	1	0	1	0.0000	10.0496	242.571
<i>I</i>	3	0	0	0	1	-1	0	9.1347	0.0000	413.154
<i>I</i>	4	0	1	-1	1	0	2	0.0000	2.4378	179.272
<i>I</i>	5	0	1	1	-1	0	0	0.0000	-2.1333	374.982
<i>I</i>	6	2	-2	-2	1	0	-2	-1.2600	0.0130	0.844
<i>I</i>	7	0	3	1	-1	0	3	0.0000	1.2155	588.185
<i>I</i>	8	0	0	0	2	0	0	0.0000	0.7420	0.159
<i>I</i>	9	0	1	-1	1	0	0	0.0000	-0.7418	374.968
<i>I</i>	10	0	1	1	-1	0	3	0.0000	0.4676	588.219
<i>I</i>	11	0	0	0	1	0	0	0.4508	0.0000	0.319
<i>I</i>	12	0	1	-1	1	0	3	0.0000	0.4388	142.172
<i>I</i>	13	3	-3	-3	2	0	-3	0.0541	0.3538	4.781
<i>I</i>	14	0	3	1	-1	0	2	0.0000	-0.4061	4089.442
<i>I</i>	15	0	0	2	-2	0	0	0.0000	0.3164	187.488
<i>I</i>	16	1	-1	-1	1	0	-1	-0.2430	0.0110	1.025
<i>I</i>	17	0	3	1	-1	0	4	0.0000	0.2146	316.881

Table 8. Phobos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>K</i>	1	0	1	1	-1	0	2	-1251.4432	-0.0002	4091.089
<i>K</i>	2	0	1	-1	1	0	1	539.1253	0.0000	242.571
<i>K</i>	3	0	0	0	1	-1	0	0.0000	-490.2153	413.154
<i>K</i>	4	0	1	-1	1	0	2	130.7224	0.0000	179.272
<i>K</i>	5	0	1	1	-1	0	0	114.5029	0.0000	374.982
<i>K</i>	6	2	-2	-2	1	0	-2	0.6910	67.5544	0.844
<i>K</i>	7	0	3	1	-1	0	3	-65.2209	0.0000	588.185
<i>K</i>	8	0	0	0	2	0	0	39.8198	0.0000	0.159
<i>K</i>	9	0	1	-1	1	0	0	-39.8033	0.0000	374.968
<i>K</i>	10	0	1	1	-1	0	3	-25.0921	0.0000	588.219
<i>K</i>	11	0	0	0	1	0	0	-0.0001	-24.1918	0.319
<i>K</i>	12	0	1	-1	1	0	3	23.5276	0.0000	142.172
<i>K</i>	13	3	-3	-3	2	0	-3	18.9900	-2.9026	4.781
<i>K</i>	14	0	3	1	-1	0	2	21.7906	0.0000	4089.442
<i>K</i>	15	0	0	2	-2	0	0	-16.5628	0.0000	187.488
<i>K</i>	16	0	0	0	0	0	1	-14.7925	0.0000	686.996
<i>K</i>	17	1	-1	-1	1	0	-1	0.5943	13.0255	1.025
<i>K</i>	18	0	3	1	-1	0	4	-11.5125	0.0000	316.881
<i>K</i>	19	2	-2	-2	-1	0	-2	-0.1103	-10.7320	0.134
<i>K</i>	20	0	1	1	-1	0	-1	10.3456	0.0000	242.577
<i>P</i>	1	0	0	0	0	1	0	5259.3751	-0.0003	0.319
<i>P</i>	2	0	0	2	0	-2	0	-954.1279	-0.0028	2028.901
<i>P</i>	3	0	0	0	1	-1	0	0.0000	-744.5212	413.154
<i>P</i>	4	2	-2	-2	0	-1	-2	-501.0247	7.2471	0.134
<i>P</i>	5	2	-2	-2	0	1	-2	446.1710	5.4024	0.842
<i>P</i>	6	3	-3	-3	0	-1	-3	92.9941	-14.8984	0.104
<i>P</i>	7	1	-1	-1	0	1	-1	-79.9519	-7.5093	1.027
<i>P</i>	8	0	0	2	0	-2	-1	-78.2802	0.0000	513.218
<i>P</i>	9	3	-3	-3	0	1	-3	-54.0454	8.8054	0.299
<i>P</i>	10	0	0	0	0	2	0	51.4105	-0.0289	0.160
<i>P</i>	11	1	-1	-1	0	-1	-1	44.6575	3.8335	0.189
<i>P</i>	12	0	0	2	0	-3	0	24.2454	0.0001	0.319
<i>P</i>	13	0	0	2	0	-2	1	-22.8485	0.0000	1038.707
<i>P</i>	14	0	2	2	0	-2	2	19.8100	0.0001	413.489
<i>P</i>	15	0	0	0	1	-2	0	-0.0002	18.9698	0.319

Table 8. Phobos : Termes périodiques des éléments de Struve (*fn*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>P</i>	16	2	-2	-2	0	0	-2	18.6061	0.0996	0.231
<i>P</i>	17	4	-4	-4	0	-1	-4	-10.0093	7.0886	0.085
<i>P</i>	18	0	0	0	0	0	1	15.3722	0.0000	686.996
<i>P</i>	19	2	-2	-2	0	-2	-2	-13.1618	0.2454	0.094
<i>P</i>	20	0	1	1	0	-1	1	0.0000	13.0226	826.977
<i>P</i>	21	2	-2	-2	0	2	-2	-11.3657	-0.2790	0.514
<i>P</i>	22	0	1	1	-1	0	2	-10.3675	-0.0004	4091.089
<i>L</i>	1	0	0	0	0	0	1	-19.7345	0.0000	686.996
<i>L</i>	2	0	1	1	-1	0	2	-13.6721	0.0000	4091.089
<i>L</i>	3	0	2	0	0	0	2	-12.7217	0.0000	343.486
<i>L</i>	4	2	-2	-2	0	0	-2	-6.2081	0.2419	0.231
<i>L</i>	5	0	1	1	-1	0	1	-6.2786	0.0000	825.642
<i>L</i>	6	0	0	0	0	1	0	4.2282	0.0000	0.319
<i>L</i>	7	0	0	2	0	-2	0	-3.4774	0.0000	2028.901
<i>L</i>	8	0	2	0	0	0	3	-2.7863	0.0000	228.993
<i>L</i>	9	1	-1	-1	0	0	-1	1.9852	0.1887	0.463
<i>L</i>	10	3	-3	-3	0	0	-3	1.5118	-0.2391	0.154
<i>L</i>	11	0	0	0	0	0	2	-1.3788	0.0000	343.498
<i>L</i>	12	0	2	0	0	0	1	1.2145	0.0000	686.949
<i>L</i>	13	0	1	-1	1	0	1	-1.0423	0.0000	242.571
<i>L</i>	14	0	2	0	0	0	4	-0.4742	0.0000	171.746
<i>L</i>	15	0	0	0	1	-1	0	-0.0168	-0.3607	413.154
<i>L</i>	16	2	-2	-2	0	-1	-2	-0.3145	0.0114	0.134
<i>L</i>	17	4	-4	-4	0	0	-4	-0.1782	0.1293	0.116
<i>L</i>	18	0	1	1	-1	0	0	-0.2662	0.0000	374.982
<i>L</i>	19	0	3	1	-1	0	2	0.2359	0.0000	4089.442
<i>L</i>	20	0	1	-1	1	0	2	-0.2284	0.0000	179.272

Table 9. Phobos : Termes périodiques des éléments de Struve. Perturbations. I

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>I</i>	18	0	1	1	-1	0	1	-0.0028	1.1182	825.642
<i>I</i>	19	0	1	1	-1	0	2	0.0000	-0.6377	4091.089
<i>K</i>	21	0	1	1	-1	0	1	-57.9075	-0.1473	825.642
<i>K</i>	22	0	1	1	-1	0	2	32.9368	0.0000	4091.089
<i>L</i>	21	0	1	1	-1	0	2	-35.2129	-0.0045	4091.089
<i>L</i>	22	0	0	2	0	-2	0	-2.3575	-0.0005	2028.901
<i>L</i>	23	0	3	1	-1	0	2	0.7475	0.0001	4089.442
<i>L</i>	24	0	1	1	0	-1	0	0.0001	-0.3304	4058.612

Table 10. Phobos : Termes périodiques des éléments de Struve. Perturbations. II

	k	Argument	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
I	20	$2M_a - J_u + D - F$	0.2195	0.0048	73304
K	23	$2M_a - J_u + D - F$	-0.2417	10.9515	73304
L	25	$2M_a - J_u + D - F$	-0.0614	2.7834	73304
L	26	$\varpi'_* + D_D - F_D + l'$	2.2760	0.0000	19999

Table 11. Arguments planétaires

$$M_a = 355^\circ.4333 + 0^\circ.5240328 t$$

$$J_u = 34^\circ.3515 + 0^\circ.0830912 t$$

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve. Problème principal

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>a</i>	1	2	-2	-2	0	0	-2	0.0000	-0.8090	2.738
<i>a</i>	2	0	0	2	0	0	0	0.0000	0.1063	0.632
<i>a</i>	3	3	-3	-3	0	0	-3	0.0090	0.0552	1.826
<i>a</i>	4	0	0	2	0	0	-1	0.0000	0.0349	0.633
<i>a</i>	5	1	-1	-1	0	0	-1	-0.0018	0.0246	5.477
<i>a</i>	6	0	2	2	0	0	2	0.0000	0.0105	0.631
<i>e</i>	1	0	0	0	0	1	0	-0.0001	12.0307	1.263
<i>e</i>	2	0	1	1	0	-1	1	6.7008	0.0000	19992.533
<i>e</i>	3	0	0	0	1	-1	0	-6.4933	0.0000	9997.778
<i>e</i>	4	2	-2	-2	0	-1	-2	0.0001	5.0951	2.342
<i>e</i>	5	0	0	2	0	-1	0	0.0000	1.3884	1.267
<i>e</i>	6	0	1	1	0	0	1	1.0735	0.0000	1.262
<i>e</i>	7	0	0	0	1	0	0	-1.0629	0.0000	1.262
<i>e</i>	8	3	-3	-3	0	-1	-3	-0.1412	-0.8685	4.093
<i>e</i>	9	0	1	1	0	-2	1	-0.9824	0.0000	1.263
<i>e</i>	10	0	0	0	1	-2	0	0.9583	0.0001	1.263
<i>e</i>	11	0	0	0	0	2	0	-0.0001	-0.8567	0.631
<i>e</i>	12	2	-2	-2	0	0	-2	0.0002	0.8026	2.738
<i>e</i>	13	2	-2	-2	0	-2	-2	0.0001	-0.7519	0.820
<i>e</i>	14	0	1	1	1	-2	1	0.0000	-0.5964	6664.849
<i>e</i>	15	0	1	1	-1	0	1	0.0000	-0.5805	19998.581
<i>e</i>	16	2	-3	-3	0	0	-3	-0.4678	0.0000	2.342
<i>e</i>	17	2	-2	-2	-1	0	-2	0.4584	0.0001	2.342
<i>e</i>	18	0	2	2	0	-2	2	0.0000	-0.4576	9996.266
<i>e</i>	19	0	0	2	0	-1	-1	0.0000	0.4479	1.269
<i>e</i>	20	2	-2	-2	1	-2	-2	0.3996	0.0001	2.343
<i>e</i>	21	2	-1	-1	0	-2	-1	-0.3993	-0.0001	2.343
<i>e</i>	22	2	-2	-2	0	1	-2	0.0000	-0.3303	0.864
<i>e</i>	23	0	0	0	2	-2	0	0.0000	0.2544	4998.889
<i>e</i>	24	0	0	2	0	0	0	0.0000	0.2433	0.632
<i>e</i>	25	0	1	1	1	-3	1	0.0000	0.2394	1.263
<i>e</i>	26	0	1	1	0	-3	1	0.2071	0.0000	0.631
<i>I</i>	1	0	1	-1	1	0	1	0.0000	53.7090	337.686
<i>I</i>	2	0	1	1	-1	0	2	0.0000	15.5939	711.435
<i>I</i>	3	0	1	1	-1	0	0	0.0000	-14.5390	664.180
<i>I</i>	4	0	1	-1	1	0	2	0.0000	11.8202	226.401
<i>I</i>	5	0	2	2	-2	0	2	0.0000	11.3033	9999.291
<i>I</i>	6	0	1	-1	1	0	0	0.0000	-5.0766	664.136
<i>I</i>	7	0	0	2	-2	0	0	0.0000	3.7720	332.079
<i>I</i>	8	0	1	1	-1	0	1	0.0000	3.4997	19998.581
<i>I</i>	9	0	3	1	-1	0	3	0.0000	2.6190	349.489

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>I</i>	10	0	1	-1	1	0	3	0.0000	2.0177	170.284
<i>I</i>	11	0	1	1	-1	0	3	0.0000	1.0689	349.501
<i>I</i>	12	0	1	1	-1	0	-1	0.0000	-1.0331	337.698
<i>I</i>	13	0	0	2	-2	0	-1	0.0000	0.8965	223.867
<i>I</i>	14	0	3	1	-1	0	4	0.0000	0.5680	231.646
<i>I</i>	15	0	0	2	-2	0	1	0.0000	-0.4182	642.790
<i>I</i>	16	0	1	-1	1	0	4	0.0000	0.3125	136.460
<i>I</i>	17	0	3	1	-1	0	2	0.0000	-0.2549	711.385
<i>K</i>	1	0	1	-1	1	0	1	1717.9441	0.0000	337.686
<i>K</i>	2	0	1	1	-1	0	2	-499.1264	0.0000	711.435
<i>K</i>	3	0	1	1	-1	0	0	465.5768	0.0000	664.180
<i>K</i>	4	0	1	-1	1	0	2	377.9326	0.0000	226.401
<i>K</i>	5	0	2	2	-2	0	2	-362.1854	0.0000	9999.291
<i>K</i>	6	0	1	-1	1	0	0	-162.2374	0.0000	664.136
<i>K</i>	7	0	0	2	-2	0	0	-119.6598	0.0000	332.079
<i>K</i>	8	0	1	1	-1	0	1	-110.8958	0.0000	19998.581
<i>K</i>	9	0	3	1	-1	0	3	-82.2678	0.0000	349.489
<i>K</i>	10	0	1	-1	1	0	3	64.4933	0.0000	170.284
<i>K</i>	11	0	0	0	0	0	1	-59.5433	0.0000	686.996
<i>K</i>	12	0	2	0	0	0	2	-34.8047	0.0000	343.486
<i>K</i>	13	0	1	1	-1	0	3	-34.2097	0.0000	349.501
<i>K</i>	14	0	1	1	-1	0	-1	33.0879	0.0000	337.698
<i>K</i>	15	0	0	2	-2	0	-1	-30.4609	0.0000	223.867
<i>K</i>	16	0	3	1	-1	0	4	-17.8499	0.0000	231.646
<i>K</i>	17	0	0	2	-2	0	1	15.4656	0.0000	642.790
<i>P</i>	1	0	0	0	0	1	0	63352.2064	0.2229	1.263
<i>P</i>	2	0	1	1	0	-1	1	0.1324	35286.3675	19992.533
<i>P</i>	3	0	0	0	1	-1	0	-0.0645	-34571.4814	9997.778
<i>P</i>	4	2	-2	-2	0	-1	-2	-27118.7428	-0.2792	2.342
<i>P</i>	5	0	1	1	0	-2	1	-0.2126	-10778.9022	1.263
<i>P</i>	6	0	0	0	1	-2	0	0.1136	10609.8014	1.263
<i>P</i>	7	0	0	0	0	2	0	-9504.6802	-0.1020	0.631
<i>P</i>	8	2	-2	-2	0	-2	-2	8280.4942	-0.2666	0.820
<i>P</i>	9	0	0	2	0	-1	0	-7124.2805	0.0191	1.267
<i>P</i>	10	0	1	1	1	-2	1	6252.0637	-0.0124	6664.849

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
P	11	3	-3	-3	0	-1	-3	4609.5126	-749.3487	4.093
P	12	2	-1	-1	0	-2	-1	0.2800	-4570.6345	2.343
P	13	2	-2	-2	1	-2	-2	-0.5100	4541.8643	2.343
P	14	0	1	1	1	-3	1	-3712.3938	0.0205	1.263
P	15	0	1	1	0	-3	1	0.0685	3227.5806	0.631
P	16	0	0	0	1	-3	0	-0.0765	-3178.9274	0.631
P	17	0	0	0	2	-2	0	-2856.2068	0.0041	4998.889
P	18	2	-1	-1	0	-3	-1	0.0006	2777.1050	0.820
P	19	2	-2	-2	1	-3	-2	0.1430	-2764.2447	0.820
P	20	2	-2	-2	0	-3	-2	-2489.9190	0.0235	0.497
P	21	0	0	2	0	-1	-1	-2339.2004	0.0099	1.269
P	22	0	0	0	0	3	0	1847.2444	0.0593	0.421
P	23	4	-4	-4	0	-2	-4	1754.5615	-0.5981	1.171
P	24	0	0	0	2	-3	0	1739.9718	-0.0343	1.263
P	25	3	-3	-3	0	-2	-3	-1449.7801	222.6110	0.965
P	26	0	1	1	1	-4	1	1652.6976	0.0454	0.631
P	27	2	-1	-1	1	-3	-1	-1578.5165	-0.2083	2.343
P	28	2	-2	-2	0	1	-2	-1431.5224	0.4825	0.864
P	29	2	-1	-1	1	-4	-1	1431.5902	-0.0234	0.820
P	30	2	-1	-1	0	-4	-1	-0.2017	-1252.4531	0.497
P	31	2	-2	-2	1	-4	-2	0.0865	1236.9642	0.497
P	32	0	1	3	0	-2	1	0.0294	-1189.0159	1.267
P	33	0	0	2	1	-2	0	-0.0420	1164.0496	1.267
P	34	4	-4	-4	0	-3	-4	-1058.1142	0.2171	0.608
P	35	0	1	1	2	-3	1	0.0178	-1008.8769	3998.990
P	36	0	2	2	0	-2	2	960.6408	0.0834	9996.266
P	37	0	0	0	1	-4	0	0.1225	922.5130	0.421
P	38	0	1	1	0	-4	1	0.0478	-921.3902	0.421
P	39	0	1	1	2	-4	1	-0.0102	911.7467	1.263
P	40	2	-2	0	0	-2	-2	901.9593	-0.0182	2.760
P	41	3	-2	-2	0	-2	-2	123.6768	754.9458	4.094
P	42	3	-3	-3	1	-2	-3	-122.1673	-745.7489	4.095
P	43	2	-1	-1	1	-5	-1	-839.3669	0.2990	0.497
P	44	0	0	2	0	-2	0	805.7504	0.0880	355.709
P	45	0	0	0	2	-4	0	-779.9620	-0.0362	0.631
P	46	0	0	2	0	1	0	778.7547	-0.0689	0.421
P	47	2	-2	-2	2	-3	-2	728.6105	0.0577	2.344
P	48	2	-2	-2	0	-4	-2	727.7385	-0.3190	0.357
P	49	0	2	2	0	-1	2	-699.7774	-0.0131	1.262
P	50	5	-5	-5	0	-2	-5	-576.1036	94.1656	1.490

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
P	51	2	-2	-2	2	-4	-2	-662.4052	0.0381	0.821
P	52	0	2	2	0	-3	2	612.3557	-0.0042	1.263
P	53	0	1	1	1	-5	1	-603.0409	0.2039	0.421
P	54	4	-3	-3	0	-3	-3	-0.1251	573.3266	1.171
P	55	4	-4	-4	1	-3	-4	0.2423	-569.4878	1.171
P	56	3	-2	-2	0	-3	-2	-72.1287	-471.5997	0.965
P	57	0	2	2	1	-4	2	0.0344	-533.6132	1.263
P	58	3	-3	-3	1	-3	-3	70.5596	462.1683	0.965
P	59	0	1	1	2	-5	1	-0.0924	-528.2470	0.631
P	60	4	-4	-4	1	-4	-4	-0.5250	521.4689	0.608
P	61	4	-3	-3	0	-4	-3	0.2450	-521.6813	0.608
P	62	0	0	2	0	-1	-2	-519.3691	-0.0010	1.272
P	63	1	-1	-1	0	-1	-1	474.3653	36.2109	1.641
P	64	3	-3	-3	0	-3	-3	439.5433	-62.7033	0.547
P	65	2	-1	-1	0	-5	-1	0.2446	491.9633	0.357
P	66	0	1	3	0	-3	1	-0.0745	488.3539	362.152
P	67	2	-2	-2	1	-5	-2	-0.2266	-482.4645	0.357
P	68	0	0	2	1	-3	0	0.0780	-476.1589	368.832
P	69	2	-1	-1	2	-5	-1	-0.1307	-471.9951	0.821
P	70	4	-4	-4	0	-4	-4	461.9554	0.0386	0.410
P	71	0	2	2	0	-4	2	-446.4798	-0.0903	0.631
P	72	2	-2	-2	0	2	-2	446.0859	0.0210	0.513
P	73	5	-5	-5	0	-3	-5	355.6852	-55.9070	0.683
P	74	2	-2	-2	2	-5	-2	406.1350	-0.1383	0.497
P	75	0	0	2	0	-2	-1	406.1471	-0.0153	234.362
P	76	2	-1	-1	1	-6	-1	400.5598	-0.2328	0.357
P	77	0	1	3	1	-3	1	-394.2591	-0.0265	1.267
P	78	0	1	3	0	-2	0	-0.0033	-390.5352	1.269
P	79	0	0	0	0	4	0	-383.7892	0.0907	0.316
P	80	0	0	2	1	-2	-1	0.0114	378.3755	1.269
P	81	2	-2	0	0	-3	-2	-376.9003	-0.0070	2.327
P	82	2	-1	-1	2	-4	-1	-0.0772	373.4280	2.344
P	83	4	-3	-3	1	-5	-3	-368.2449	-0.1095	0.608
P	84	2	0	0	0	-4	0	-367.7879	0.0418	0.820
P	85	0	2	2	1	-5	2	-0.0116	363.4941	0.631
P	86	2	-1	-1	2	-6	-1	0.1364	362.6753	0.497
P	87	0	3	3	0	-3	3	0.0062	361.9115	6664.178
P	88	0	2	2	1	-3	2	0.0088	347.6917	4998.511
P	89	0	0	2	0	-1	1	334.7332	0.0010	1.265
P	90	4	-3	-3	0	-5	-3	0.1387	322.1540	0.410

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
P	91	4	-4	-4	1	-5	-4	-0.0676	-321.5827	0.410
P	92	4	-3	-3	1	-6	-3	310.6306	-0.1720	0.410
P	93	2	0	0	1	-5	0	0.0960	309.5489	0.821
P	94	2	-2	0	0	-2	-3	300.3238	-0.0020	2.771
P	95	0	0	0	3	-3	0	-0.0192	294.4032	3332.593
P	96	2	-1	1	0	-3	-1	-0.0006	292.6168	2.759
P	97	0	0	0	2	-5	0	285.8065	0.0271	0.421
P	98	0	1	3	1	-4	1	283.4043	-0.0069	375.764
P	99	4	-3	-3	1	-4	-3	282.6262	0.3254	1.171
P	100	3	-2	-2	1	-3	-2	242.4763	-39.9697	4.096
P	101	3	-2	-2	1	-4	-2	-244.7634	36.1438	0.965
P	102	2	-2	0	1	-3	-2	0.0151	-280.4805	2.759
P	103	0	0	0	3	-4	0	0.0486	-279.1779	1.263
P	104	2	0	0	0	-5	0	278.5469	-0.0709	0.497
P	105	2	0	0	1	-6	0	-0.1073	-271.2417	0.497
P	106	0	0	1	0	-1	1	-270.6675	-0.0001	20012.230
P	107	2	-1	-1	2	-7	-1	-0.0101	-258.4896	0.357
P	108	0	1	1	2	-6	1	-0.0164	256.0567	0.421
P	109	2	-2	-2	-1	2	-2	0.3119	-250.6654	0.864
P	110	3	-2	-2	0	-4	-2	29.8340	216.8483	0.547
P	111	0	1	1	-1	-1	1	-246.2857	0.0433	1.262
P	112	0	0	2	0	1	-1	241.9009	-0.0072	0.422
P	113	0	1	1	0	-5	1	-0.1664	240.4295	0.316
P	114	3	-3	-3	1	-4	-3	-28.9609	-210.6285	0.547
P	115	2	-3	-3	0	2	-3	-0.2298	238.9827	0.864
P	116	0	0	2	0	-3	0	-235.9688	0.0018	1.258
P	117	0	0	0	1	-5	0	0.1122	-233.5266	0.316
P	118	0	2	0	0	1	2	-226.7730	-0.0017	1.258
P	119	2	0	0	0	-3	0	226.5936	-0.0055	2.343
P	120	2	-1	-1	1	-7	-1	-222.7405	-0.0313	0.278
P	121	0	0	2	0	2	0	-220.6940	0.0368	0.316
P	122	2	-1	1	0	-4	-1	0.0267	-218.5639	2.327
P	123	5	-5	-5	1	-3	-5	29.9916	183.6766	1.490
P	124	0	0	0	0	1	1	-213.3405	0.0010	1.260
P	125	5	-4	-4	0	-3	-4	-29.9924	-182.7740	1.490
P	126	2	-2	0	1	-4	-2	-0.0209	211.8705	2.328
P	127	2	-2	-2	2	-6	-2	-208.3385	-0.0016	0.357
P	128	2	0	0	1	-7	0	-0.0183	207.9322	0.357
P	129	2	-1	-1	-1	-1	-1	-207.2660	0.0401	2.342
P	130	0	1	1	1	-6	1	206.1265	0.0893	0.316

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
P	131	0	2	0	0	-1	2	206.0702	-0.0029	1.267
P	132	0	2	2	2	-5	2	-204.9271	-0.0102	1.263
P	133	5	-4	-4	0	-4	-4	27.7315	174.1527	0.683
P	134	4	-3	-3	1	-7	-3	-200.8454	-0.0893	0.310
P	135	2	0	0	1	-4	0	-0.0087	-200.7550	2.344
P	136	3	-3	-3	0	1	-3	171.2819	-27.5020	0.746
P	137	5	-5	-5	1	-4	-5	-27.1354	-170.4793	0.683
P	138	2	-2	-2	0	-5	-2	-196.4692	0.0246	0.278
P	139	0	2	2	0	-5	2	194.6602	0.0200	0.421
P	140	0	2	2	1	-6	2	0.0137	-190.3833	0.421
P	141	0	1	1	3	-5	1	189.7160	0.0112	1.263
P	142	2	0	0	2	-7	0	-188.8759	0.0190	0.497
P	143	4	-3	-3	2	-7	-3	-0.1025	-186.0245	0.410
P	144	0	0	2	2	-3	0	180.9477	0.0051	1.267
P	145	0	2	2	2	-6	2	180.0101	0.0366	0.631
P	146	3	-2	-2	1	-5	-2	156.5853	-22.3971	0.547
P	147	4	-4	-4	0	-5	-4	-177.5093	0.0504	0.310
P	148	0	1	3	0	-4	1	0.0212	-175.7587	1.258
P	149	0	0	2	1	-4	0	-0.0355	175.6422	1.258
P	150	2	-1	1	1	-5	-1	-175.6100	0.0657	2.328
P	151	5	-5	-5	0	-4	-5	-151.8152	23.5972	0.443
P	152	3	-3	-1	0	-2	-3	-151.1302	24.2479	1.835
P	153	4	-3	-3	2	-6	-3	-0.0599	174.9439	0.608
P	154	6	-6	-6	0	-3	-6	-164.3186	10.1161	0.781
P	155	0	1	3	0	-3	0	-0.0087	174.3820	237.142
P	156	2	-1	-1	0	-6	-1	0.0057	-174.1781	0.278
P	157	2	-3	-3	1	-1	-3	173.8790	0.0120	2.343
P	158	4	-4	-4	2	-5	-4	171.9544	0.1649	0.608
P	159	2	-2	-2	1	-6	-2	0.0016	168.4344	0.278
P	160	2	0	0	2	-6	0	168.1411	-0.0460	0.821
P	161	0	0	2	1	-3	-1	0.0044	-167.8054	239.988
P	162	4	-4	-4	1	-6	-4	-0.1975	165.8515	0.310
P	163	4	-3	-3	0	-6	-3	0.1106	-162.7877	0.310
P	164	2	-1	-1	2	-8	-1	-0.0583	157.7430	0.278
P	165	5	-4	-4	1	-6	-4	-136.8459	20.7131	0.443
P	166	0	1	1	3	-4	1	-155.8446	0.0049	2856.446
P	167	0	1	1	3	-6	1	-155.5836	-0.0312	0.631
P	168	2	-1	-1	3	-6	-1	-155.1243	0.0151	0.821
P	169	2	-1	1	1	-6	-1	155.0780	0.0102	0.819
P	170	0	1	3	1	-5	1	-154.5068	-0.0123	1.258

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
P	171	2	-1	-1	3	-7	-1	153.0072	-0.0132	0.497
P	172	6	-6	-6	0	-4	-6	146.7760	-5.9241	0.482
P	173	0	0	0	0	1	-1	-152.0167	0.0001	1.265
P	174	2	-2	-2	3	-5	-2	0.0094	150.2828	0.821
P	175	2	-1	1	1	-4	-1	148.5795	-0.0186	2.759
P	176	5	-4	-4	1	-5	-4	127.2568	-20.2235	0.683
P	177	2	-3	-3	0	3	-3	0.2595	-145.3550	0.513
P	178	2	-2	-2	-1	3	-2	-0.2931	144.6083	0.513
P	179	0	0	0	3	-5	0	0.0144	144.6340	0.631
P	180	2	0	0	0	-6	0	-143.5434	0.0207	0.357
P	181	2	0	0	2	-8	0	141.0944	0.0337	0.357
P	182	0	2	2	2	-4	2	141.0691	-0.0036	3332.425
P	183	4	-4	-4	2	-6	-4	-140.7392	-0.0961	0.410
P	184	3	-3	-3	0	-4	-3	-124.1277	15.7916	0.382
P	185	4	-2	-2	1	-7	-2	-0.0430	137.5086	0.410
P	186	5	-4	-4	0	-5	-4	-18.2374	-117.8494	0.443
P	187	4	-2	-2	1	-6	-2	-0.0234	-135.3612	0.608
P	188	4	-3	-3	2	-8	-3	-0.1163	134.5513	0.310
P	189	3	-3	-3	2	-3	-3	-114.2476	18.8537	4.096
P	190	0	1	1	2	-7	1	0.0835	-132.3518	0.316
P	191	2	-2	0	0	-4	-2	131.8613	0.0031	0.818
P	192	0	1	3	1	-3	0	-130.8662	0.0019	1.269
P	193	0	0	2	2	-4	0	-130.5470	0.0233	382.959
P	194	4	-3	-3	1	-8	-3	129.3347	0.1817	0.249
P	195	5	-5	-5	1	-5	-5	17.4927	111.2740	0.443
P	196	4	-4	-4	2	-4	-4	-127.3525	-0.3431	1.172
P	197	2	0	0	1	-8	0	0.0531	-126.8337	0.278
P	198	2	-2	0	0	-3	-3	-125.5667	0.0002	2.319
P	199	0	0	0	0	0	1	124.6869	-0.0007	686.996
P	200	3	-3	-3	2	-4	-3	107.9834	-16.2271	0.965
P	201	2	-2	-2	0	3	-2	-123.4813	-0.1531	0.365
P	202	0	2	2	2	-7	2	-122.9306	-0.0515	0.421
P	203	2	-1	1	0	-5	-1	0.0136	122.1026	0.819
P	204	2	-2	0	1	-5	-2	-0.0021	-121.4709	0.819
P	205	0	1	-1	0	-2	1	-0.0080	-119.0265	0.421
P	206	0	1	3	2	-5	1	-0.0034	-118.7909	390.438
P	207	4	-2	-2	0	-5	-2	117.8798	0.1572	0.608
P	208	0	3	3	0	-4	3	-0.0155	-117.9106	1.263
P	209	2	-1	-1	3	-8	-1	-117.1688	-0.0062	0.357
P	210	2	-1	-1	1	-8	-1	116.8630	0.0655	0.228

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*suite*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>P</i>	211	1	-1	-1	0	-2	-1	-102.4522	-14.2331	0.713
<i>P</i>	212	2	-2	-2	3	-4	-2	0.0157	-114.5084	2.344
<i>P</i>	213	2	-2	-2	3	-6	-2	-0.0048	-113.4749	0.497
<i>P</i>	214	0	2	2	1	-7	2	-0.0822	113.1662	0.316
<i>P</i>	215	0	2	2	-1	2	0	0.0004	112.9741	0.421
<i>P</i>	216	5	-4	-4	1	-4	-4	-96.6909	16.0026	1.490
<i>P</i>	217	0	2	2	1	-2	2	-0.0278	112.4512	1.262
<i>P</i>	218	2	-1	-1	-1	-2	-1	112.2286	-0.1221	0.820
<i>P</i>	219	4	-4	-2	0	-3	-4	-112.0676	-0.1694	15.494
<i>P</i>	220	6	-5	-5	1	-7	-5	-108.6983	1.8206	0.349
<i>P</i>	221	3	-2	-2	1	-6	-2	-96.1269	14.0432	0.382
<i>P</i>	222	2	-3	-3	-1	3	-3	-109.6676	0.1266	0.864
<i>P</i>	223	3	-2	-2	0	-5	-2	-12.8803	-96.6296	0.382
<i>P</i>	224	0	3	3	0	-2	3	0.0099	-109.1233	1.262
<i>P</i>	225	0	0	2	0	-3	-1	-107.9689	-0.0090	1.256
<i>P</i>	226	5	-4	-4	1	-7	-4	94.0233	-13.1228	0.328
<i>P</i>	227	0	2	1	0	-1	1	-107.0754	0.0002	19972.874
<i>P</i>	228	4	-2	-2	1	-8	-2	0.2325	-106.7619	0.310
<i>P</i>	229	3	-2	-2	2	-6	-2	-12.6321	-94.2838	0.547
<i>P</i>	230	3	-2	-2	2	-5	-2	14.0266	92.7712	0.965
<i>P</i>	231	0	1	3	2	-6	1	-0.0800	106.0234	1.258
<i>P</i>	232	0	1	3	1	-4	0	105.6761	0.0042	242.904
<i>P</i>	233	0	1	1	3	-7	1	104.9544	0.0601	0.421
<i>P</i>	234	6	-5	-5	0	-5	-5	3.4761	99.7975	0.482
<i>L</i>	1	0	1	1	-1	0	1	-969.7288	0.0000	19998.581
<i>L</i>	2	0	0	0	0	0	1	-80.0016	0.0000	686.996
<i>L</i>	3	0	2	0	0	0	2	-46.8695	0.0000	343.486
<i>L</i>	4	2	-2	-2	0	0	-2	33.8235	0.0000	2.738
<i>L</i>	5	0	2	0	0	0	3	-10.2594	0.0000	228.993
<i>L</i>	6	0	1	-1	1	0	1	-6.0106	0.0000	337.686
<i>L</i>	7	0	0	0	0	0	2	-5.5880	0.0000	343.498
<i>L</i>	8	0	2	0	0	0	1	4.5011	0.0000	686.949
<i>L</i>	9	1	-1	-1	0	0	-1	-2.2762	-0.1681	5.477
<i>L</i>	10	3	-3	-3	0	0	-3	-1.7003	0.2764	1.826

Table 12. Déimos : Termes périodiques des éléments de Struve (*fin*)

	k	ψ	ϖ'_*	D	F	l	l'	$a_k(\sin)$	$b_k(\cos)$	Période
<i>L</i>	11	0	2	0	0	0	4	-1.7460	0.0000	171.746
<i>L</i>	12	0	1	1	-1	0	0	-1.6888	0.0000	664.180
<i>L</i>	13	0	2	2	-2	0	2	1.6392	0.0000	9999.291
<i>L</i>	14	0	0	2	0	0	0	-1.6364	0.0000	0.632
<i>L</i>	15	0	1	1	-1	0	2	1.5744	0.0000	711.435
<i>L</i>	16	0	1	-1	1	0	2	-1.3092	0.0000	226.401
<i>L</i>	17	0	1	-1	1	0	0	0.5858	0.0000	664.136
<i>L</i>	18	0	0	2	0	0	-1	-0.5378	0.0000	0.633
<i>L</i>	19	0	0	0	0	0	3	-0.5109	0.0000	228.999
<i>L</i>	20	0	2	0	0	0	5	-0.2700	0.0000	137.397
<i>L</i>	21	0	3	1	-1	0	3	0.2576	0.0000	349.489
<i>L</i>	22	0	1	-1	1	0	3	-0.2233	0.0000	170.284

8. Vérification

A titre de vérification, nous donnons dans la table 13 :

- La borne supérieure des valeurs absolues des écarts entre les éléments de Struve calculés à l'aide des tables de ce fascicule et ceux calculés à partir des solutions ESAPHO et ESADE les plus complètes en coordonnées rectangulaires. Pour ce dernier calcul, on a déduit des séries "coordonnées rectangulaires", les séries "composantes des vitesses", puis, après substitution du temps, on a déduit des valeurs numériques des positions et vitesses à chaque instant les valeurs numériques des éléments osculateurs a , e , i , ϖ , h , λ . Les éléments de Struve ont alors été calculés à partir de ces quantités par les formules (9), (10) et (13). Dans ce calcul, les quantités relatives au plan de Laplace sont toujours données par les expressions de la table 5.
- La quantité analogue obtenue en remplaçant les solutions les plus complètes en coordonnées rectangulaires par les solutions abrégées (termes supérieurs à 50 m);
- les bornes supérieures des valeurs absolues des quantités a_p , e_p , I_p , K_p , P_p , L_p obtenues par substitution du temps dans les termes périodiques des éléments de Struve. Ces quantités représentent donc la différence maximum entre les éléments osculateurs de Struve et les éléments moyens de Struve.

Dans tous les cas, la période couverte, centrée sur 1990, est de 10 ans environ et va de la date julienne 2 446 066.5 à la date julienne 2 449 725.5. Le pas est de un jour.

Pour Phobos, les éléments de Struve calculés à partir des tables du présent fascicule sont beaucoup plus précis que les éléments que l'on peut déduire des coordonnées rectangulaires calculées à partir de la solution abrégée. Pour Déimos, le gain de précision est moins important sauf pour P . Il est possible que la solution pour Déimos souffre du manque de dérivées précises par rapport aux constantes métriques.

Table 13. Eléments de Struve. Comparaison interne

	a (km)	e	I (°)	K (°)	P (°)	L (°)
<i>Phobos</i>						
Solution complète	0.042	0.000 007	0.000 28	0.0140	0.0190	0.000 34
Solution abrégée	0.520	0.000 050	0.001 30	0.0840	0.1820	0.004 60
Eléments moyens	0.998	0.000 603	0.011 79	0.6538	2.2140	0.027 68
<i>Déimos</i>						
Solution complète	0.246	0.000 013	0.000 54	0.0196	3.5090	0.000 63
Solution abrégée	1.130	0.000 040	0.001 00	0.0330	22.1050	0.003 00
Eléments moyens	1.025	0.000 125	0.026 22	0.8407	44.5035	0.303 58

9. Comparaison avec les résultats d'autres auteurs

Pour Phobos, nous donnons dans les deux premières lignes de la table 14 les éléments moyens de Struve et les éléments osculateurs de Struve rapportés à l'équateur céleste et l'équinoxe du FK4, calculés à partir des données du présent fascicule pour la date julienne 2 441 266.5 (11 novembre 1971 à 0h TE). Dans les lignes 4, 5 et 6 nous donnons, pour comparaison, les éléments obtenus par d'autres auteurs pour la même date et le même repère. Pour Jacobson et al (1989) et Morley (1989), il s'agit, d'après les auteurs, d'éléments osculateurs. Pour Sinclair (1989), il s'agit d'éléments moyens. Comme, pour ces différents auteurs, les

éléments de Struve proviennent de l'ajustement d'une théorie sur un ensemble d'observations ne comprenant pas les observations de la sonde Phobos 2, nous donnons dans la ligne 3 les corrections à ajouter à nos éléments moyens et à nos éléments osculateurs pour se ramener à ce cas. Les corrections proviennent de la table 10 de (Chapront-Touzé, 1990b). Pour Déimos, les quantités analogues sont données dans la table 15.

Table 14. Eléments de Struve pour Phobos. Comparaison externe

	a (km)	e	I (°)	K (°)	P (°)	L (°)
ESAPHO, éléments moyens	9378.54	0.015 15	1.0677	330.532	278.747	232.3396
ESAPHO, éléments osculateurs	9377.88	0.015 34	1.0711	330.614	277.859	232.3485
ESAPHO, corrections	0.00	-0.000 30	0.0151	- 1.490	0.610	- 0.0133
Jacobson et al (1989)	9376.66	0.015 3	1.08	328.60	278.38	232.35
Morley (1989)	9377.87	0.014 94	1.081	327.69	278.26	232.33
	± 0.04	$\pm 0.000 07$	± 0.009	± 0.72	± 0.76	± 0.02
Sinclair (1989)	9379.40	0.014 979	1.1029	327.90	278.96	232.412

Table 15. Eléments de Struve pour Déimos. Comparaison externe

	a (km)	e	I (°)	K (°)	P (°)	L (°)
ESADE, éléments moyens	23 458.94	0.000 20	1.7890	239.996	129.000	28.9224
ESADE, éléments osculateurs	23 459.77	0.000 23	1.8069	240.293	132.711	28.9871
ESADE, corrections	0.00	0.000 00	-0.0042	- 0.260	- 5.970	0.0017
Jacobson et al (1989)	23 463.90	0.000 36	1.803	239.68	111.60	28.965
Morley (1989)	23 459.77	0.000 24	1.798	239.92	117.3	28.965
	± 0.09	$\pm 0.000 03$	± 0.005	± 0.16	± 6.7	± 0.015
Sinclair (1989)	23 461.13	0.000 391	1.7901	240.38	111.7	28.963

Références

- Burton, H.E.: 1929, Elements of the orbits of the satellites of Mars, *Astron. J.*, **39**, 155
- Chapront-Touzé, M.: 1988, ESAPHO: a semi-analytical theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.*, **200**, 255
- Chapront-Touzé, M.: 1989, Construction d'une éphéméride de Phobos issue de la théorie ESAPHO, *Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes S024*, Paris
- Chapront-Touzé, M.: 1990a, Phobos' physical libration and complements to the ESAPHO theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.*, **235**, 447
- Chapront-Touzé, M.: 1990b, Orbits of the Martian satellites from ESAPHO and ESADE theories, *Astron. Astrophys.*, **240**, 159
- Chapront-Touzé, M., Francou, G., Morando, B.: 1994, Les systèmes de référence utilisés en astronomie, *Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes S046*, Paris

- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Sinzi, A.M., Smith, B.A., Tjuffin, Y.S.: 1983, Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites 1982, *Celes. Mech.*, **29**, 309
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Brahic, A., Bursă, M., Chovitz, B.H., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuffin, Y.S.: 1992, Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites 1991, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **53**, 337
- Jacobson, R.A., Synnot, S.P., Campbell, J.K.: 1989, The orbits of the satellites of Mars from spacecraft and Earth-based observations, *Astron. Astrophys.*, **225**, 548
- Morley, T.A.: 1989, Determination of the orbits of the Martian satellites using ground-based and spacecraft observations, *OAD Working Paper n° 388.*, European Space Agency
- Reasenberg, R.D., Goldstein, R.B., Macneil, P.E., Shapiro, I.I., King, R.W.: 1977, The pole direction and precession of Mars, *Bull. Am. Astron. Soc.*, **9**, 520
- Reasenberg, R.D., King, R.W.: 1979, The rotation of Mars, *J. Geophys. Res.*, **84**, 6231
- Sharpless, B.P.: 1945, Secular acceleration in the longitudes of the satellites of Mars, *Astron. J.*, **51**, 185
- Simon, J.L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J.: 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, **282**, 663
- Sinclair, A.T.: 1972, The motions of the satellites of Mars, *Mont. Not. R. astr. Soc.*, **155**, 249
- Sinclair, A.T.: 1989, The orbits of the satellites of Mars determined from Earth-based and spacecraft observations, *Astron. Astrophys.*, **220**, 321

