Ministère de l'éducation nationale

OBSERVATOIRE DE PARIS
THESE DE DOCTORAT
en
Dynamique des systèmes gravitationnels

préparée
par
Khaled ABDULLAH
17 Décembre 2001

Propriétés du système séculaire

Rapporteurs
Alessandra CELLETTI   Richard MOECKEL

Jury

Ana GÓMEZ-STÉFANOVITCH	Président du jury
Alain ALBOUY	Directeur de Thèse
Alessandra CELLETTI	Rapporteur
Jean CHAPRONT	Examinateur
Philippe ROBUTEL	Examinateur

REMERCIEMENTS

Au début, je tiens à remercier mon directeur de thèse, A. Albouy, pour la disponibilité et la patience qu'il a montré tout le long de la thèse. Nos discussions et ses conseils m'ont été d'une grande utilité. Pas uniquement pour la réalisation de la thèse mais pour toute ma vie professionnelle.
Je remercie aussi les autres membres de l'équipe A.S.D. (A. Chenciner, J. Laskar, ...) pour la merveilleuse ambiance scientifique, dans laquelle j'ai vécu durant la thèse. Je remercie particulièrement P. Robutel pour des nombreuses discussions très riches.
Je remercie sincèrement A. Gómez pour avoir bien voulu présider le jury de cette thèse et J. Chapront pour avoir accepté d'examiner ce travail.
Je tiens à remercier profondément, A. Celletti et R. Moeckel d'avoir bien voulu être mes rapporteurs.
Je remercie aussi tous les personnels de l'observatoire de Paris. Mon séjour parmi eux était très agréable.
Un grand merci à mon épouse qui a su bien m'appuyer le long de ce travail. Elle a supporté une tâche lourde en s'occupant beaucoup plus que moi de nos trois petits démons.
Enfin, j'exprime toute ma gratitude envers mes amis français et syriens. Leur bon humour m'a fait du bien.

Introduction

Traditionnellement, on divise le hamiltonien (énergie totale) du problème planétaire à n planètes en deux parties. La solution associée à la première partie seule correspond à n mouvements képleriens découplés. Pour des conditions initiales convenables, les planètes parcourent des trajectoires elliptiques autour du Soleil. La deuxième partie, appelée fonction perturbatrice, modélise les interactions entre les planètes. En tenant compte de la perturbation, la solution elliptique devient une première approximation. On introduit classiquement plusieurs développements de la fonction perturbatrice. Ces développements sont un très vieux sujet, dont il est hors de question de retracer ici l'histoire. La partie "séculaire au premier ordre des masses" de ce développement joue un rôle très important depuis le début de la mécanique céleste, et est liée à la question de la moyennisation. Toutes ces choses ont été très étudiées (Euler, Lagrange, Laplace, ...), mais certaines relations entre les coefficients n'ont pas été examinées ; elles sont pourtant la cause d'une résonance remarquée par Herman.

Dans ce travail, on s'intéresse, entre autres choses, aux relations entre les coefficients du développement du hamiltonien séculaire dans le problème à deux planètes. Ce hamiltonien s'obtient en moyennisant l'inverse de la distance entre les deux planètes le long des orbites elliptiques, solution du problème non-perturbé. La plupart de ces relations proviennent de l'invariance de la distance entre les deux planètes sous l'action du groupe $O(3)$. Elles sont donc vérifiées pour une fonction, plus générale que le hamiltonien séculaire, obtenue en remplaçant dans notre hamiltonien l'inverse de la distance entre planétaire par une puissance quelconque 2γ de cette distance. Quand $\gamma = -\frac{1}{2}$, on obtient notre hamiltonien séculaire ordinaire que nous disons newtonien. D'autres relations, vérifiées pour le hamiltonien séculaire "newtonien", ne sont pas vérifiées pour le hamiltonien séculaire généralisé. Par conséquent, ces relations ne sont pas dues aux symétries. Elles sont très difficiles à trouver. La résonance d'Herman fait partie de ces relations.

Les coefficients du développement dépendent des variables utilisées. Le choix des variables peut servir à simplifier les relations entre les coefficients. Le **premier chapitre** est consacré à ce sujet. Il contient un exposé sur le problème de Kepler, dans lequel on donne différents systèmes de variables capables de repérer une ellipse. Le principale originalité de ce chapitre est l'introduction des variables de Souriau, des variables s_c, g_c et de la symétrie galoisienne. L'utilisation nouvelle de cette symétrie, dans le problème séculaire, est très intéressante. On donne dans ce chapitre les expressions du vecteur position et du vecteur vitesse de la planète képlerienne en fonction des variables s_c, g_c et la longitude excentrique. On remarque la ressemblance entre les variables s_c, g_c et celles de Poincaré. L'avantage des variables s_c, g_c est que l'expression du vecteur position et du vecteur vitesse de la planète képlerienne est rationnelle dans ces variables. Ce n'est pas le cas avec les variables de Poincaré.

Dans un système planétaire le point circulaire non incliné (les planètes parcourent, dans le même sens, des cercles situés dans le plan de référence) a un intérêt particulier. Les planètes vivent normalement dans son voisinage. Le **deuxième chapitre** contient un exposé sur les techniques du développement du hamiltonien séculaire du premier ordre des masses planétaires, au voisinage de ce point. Les techniques de développement se sont perfectionnées au cours du temps. Citons ici les travaux de Poincaré [8], qui ont donné un grand nombre de propriétés de la fonction perturbatrice. Ces travaux ne nous ont pas paru utilisables. Nous avons largement utilisé les sources classiques et les travaux récents de Laskar et Robutel [10], mais nos variables préférées diffèrent de ces sources. On préfère utiliser les variables s_c, g_c ou celles de Souriau. Les principales originalités de ce chapitre sont : la démonstration de l'analyticité du hamiltonien séculaire dans nos variables préférées et l'application de certaines symétries au hamiltonien séculaire.

Il y a quelques années, M. Herman a signalé une nouvelle résonance du système séculaire, au voisinage du point circulaire non incliné, qu'on peut qualifier de mystérieuse, sauvage, ... Elle ne dépend pas des paramètres (masses et demi-grands axes). Dans cette thèse, on l'appelle "la résonance d'Herman". L'un des premiers objectifs de cette étude sera d'expliquer cette résonance. C'est l'objet du **troisième chapitre**. On établira une propriété géométrique simple liée à notre hamiltonien. Elle fournit des relations entre les coefficients du développement du hamiltonien séculaire ($\gamma = -\frac{1}{2}$) à tous les ordres. L'interprétation de ces relations, dans la partie quadratique uniquement, implique la résonance.

Dans le **quatrième chapitre**, on établira un théorème permettant de comprendre d'autres relations entre les coefficients de notre développement aux ordres supérieurs. Ce théorème est valable pour la fonction perturbatrice généralisée. Sur le développement du hamiltonien séculaire, on constate l'existence d'autres relations, qui commencent à l'ordre quatre. Ces relations ne sont pas vérifiées pour la fonction perturbatrice généralisée. On construira une conjecture permettant de les expliquer. On vérifie, par calcul effectué à l'aide d'ordinateurs, sa validité jusqu'à l'ordre dix. Cette conjecture demeure jusqu'à présent sans démonstration (ni rejet).

Le **cinquième chapitre** sera consacré aux différentes réductions possibles du système séculaire. On donnera des systèmes de variables $SO(3)$-invariantes ou $O(3)$-invariantes. On établira la théorie et la technique permettant de développer le hamiltonien dans ces variables. La plupart de ces systèmes sont quadratiques par rapport aux variables "usuelles" (d'ordre un par rapport aux excentricités et inclinaisons). Cela permet de condenser considérablement le développement. Un intérêt technique de ces variables est que l'algorithme, qui donne le développement dans ces variables et puis convertira dans des variables dites "usuelles", paraît plus rapide qu'un autre développant directement dans les variables "usuelles".

Table des matières

Chapitre 1

Problème de deux corps

Au début de XVII$^{\text{è}}$ siècle, Kepler décrit le mouvement des planètes dans un système héliocentrique [20]. D'après ses travaux, les planètes parcourent des ellipses bien définies dans l'espace ayant le Soleil pour foyer. Ce résultat, d'après la mécanique newtonienne, n'était valable que dans le cas où le Système solaire se composait du Soleil et d'une seule planète, et était isolé. Dans le cas général, les trajectoires elliptiques ne sont qu'une approximation. En effet, chacune des planètes, sous l'influence dominante du Soleil (due à sa forte masse) subit un mouvement képlerien. Les influences mutuelles entre les planètes produisent des faibles perturbations qui modifient continuellement les constantes des mouvements képleriens. Cela construit le fondement des méthodes perturbatrices modernes de la théorie planétaire.
Dans ce chapitre, on donne un exposé du problème de Kepler [16], afin de construire et d'étudier les constantes du mouvement képlerien, qui nous serviront à aborder le problème planétaire des trois corps (où deux des trois masses sont très petites devant la troisième). La principale originalité est l'introduction des vecteurs de Souriau §1.8 et de la symétrie galoisienne §1.9. Le caractère symétrique des variables de Souriau facilite l'étude des relations entre les coefficients du hamiltonien séculaire §2.4.2. La symétrie galoisienne fournit un opérateur, défini sur les éléments elliptique, qui laisse le mouvement képlerien invariant.
Soient O et A deux corps, dans un espace galiléen de dimension trois, de masses respectives m_0 et m_1. Soit

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} \in \mathbb{R}^3$$

le vecteur reliant ces deux corps. D'après la loi de Newton, le vecteur $\vec{r}$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{1.1}$$

avec $\mu = G(m_0 + m_1)$. La constante G est la constante de gravitation universelle et r la norme de $\vec{r}$ (tout au long de cette thèse les vecteurs seront notés avec des flèches, et leurs normes sans flèches, les points désignant la dérivation par rapport au temps.)
Notre problème est donc équivalent au problème du centre fixe O de masse $m_0 + m_1$ autour duquel gravite un point A du vecteur-position $\vec{r}$ et de masse quelconque notée β. En effet l'équation différentielle de ce problème est aussi l'équation 1.1, quelle que soit la valeur de β. Le fait que β ne figure pas dans l'équation 1.1 implique que le mouvement du point A ne doit pas en dépendre. Pour des raisons techniques concernant le problème des trois corps, on préférera étudier ce problème dit "du centre fixe" à la place du problème des deux corps.

1.1 Problème du centre fixe

Munissons notre espace euclidien de dimension 3, contenant les points O et A, d'un repère direct orthonormé d'axes $Ox_1x_2x_3$. Cela permet de l'identifier à $\mathbb{R}^3$. Le champ de forces que subit le point A, dérive du potentiel

$$V = -\frac{\mu\beta}{r},$$

appelé potentiel newtonien. L'énergie cinétique est donnée, naturellement, par la formule

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2\beta}.$$

Le vecteur $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement. Il est donné par

$$\vec{p} = \beta\dot{\vec{r}}.$$

Le hamiltonien, qui est la somme de V et T, est donné par

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\beta} - \frac{\mu\beta}{r}. \tag{1.2}$$

Les équations différentielles de Hamilton, équations différentielles d'ordre 1 équivalentes à l'équation 1.1 d'ordre 2, sont

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{\beta}, \tag{1.3}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\mu\beta\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1.4}$$

Soit la forme symplectique

$$\sigma = d\vec{p} \wedge d\vec{r} = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 + dp_3 \wedge dx_3, \tag{1.5}$$

où le symbole $\wedge$ désigne le produit tensoriel antisymétrique. Soit aussi $\vec{\chi} = (\vec{r}, \vec{p})$ un élément de l'espace des phases

$$E = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

(l'identification de $\mathbb{R}^3$ à son dual $(\mathbb{R}^3)^*$ vient de la métrique euclidienne). Les équations de Hamilton s'écrivent sous la forme

$$\sigma \cdot \dot{\vec{\chi}} = dH. \tag{1.6}$$

Le point dans le premier membre désigne le produit tensoriel contracté.

1.2 Intégrales premières et résolution

Hors l'intégrale d'énergie H, on dispose de deux intégrales premières vectorielles, le vecteur du moment cinétique

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{p} \tag{1.7}$$

et le vecteur d'excentricité, connu sous le nom "vecteur de Laplace"

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu\beta^2}\vec{p} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) - \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.8}$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, car le vecteur $\vec{C}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{p} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p})$ et $\vec{r}$.
Restreignons-nous au cas où

$$\vec{C} \neq 0 \quad \text{et} \quad H < 0.$$

La condition $\vec{C} \neq 0$ exclut le mouvement rectiligne tandis que la condition $H < 0$ est équivalente à l'inégalité

$$L < 1. \tag{1.9}$$

En effet, le carré scalaire de $\vec{L}$ est

$$\vec{L}^2 = \frac{1}{\mu^2\,\beta^4}(p^2\,C^2) - \frac{2}{\mu\,\beta^2\,r}C^2 + 1,$$

ou

$$\vec{L}^2 = \frac{2C^2}{\mu^2\,\beta^3}H + 1.$$

D'après 1.7, le vecteur $\vec{r}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{C}$. Il en découle que le mouvement du point A est plan. Ce plan contient $\vec{L}$ et est perpendiculaire à $\vec{C}$. L'équation 1.8 donne

$$\vec{r}\ \cdot\ \vec{L} = \frac{C^2}{\mu\beta^2} - r.$$

Le point dans le premier membre désigne le produit scalaire. Notons v l'angle entre $\vec{L}$ et $\vec{r}$ (angle qu'on appelle "l'anomalie vraie"). La relation précédente devient

$$r\,L\,\cos v = \frac{C^2}{\mu\beta^2} - r; \tag{1.10}$$

d'où

$$r = \frac{C^2}{\mu\beta^2(1 + L\cos v)}. \tag{1.11}$$

Le point A parcourt donc une ellipse dont l'un des foyers est le point O. Le vecteur $\vec{L}$ est porté par l'axe principal de l'ellipse, dirigé du foyer vers le périhélie. L'excentricité et le demi-grand axe de l'ellipse sont donnés par

$$e = L \tag{1.12}$$

$$a = \frac{C^2}{\mu\beta^2(1 - L^2)}. \tag{1.13}$$

D'où

$$L = e \tag{1.14}$$

$$C = \beta\sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \tag{1.15}$$

1.2.1 L'équation de Kepler

Pour compléter la résolution, il ne reste qu'à trouver l'équation du temps ; c'est à dire l'équation qui permet de déterminer la position du point mobile sur son orbite à tout instant. La formule 1.7 donne

$$\frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{r} = \frac{1}{2\beta}\vec{C}dt. \tag{1.16}$$

Le premier membre de cette relation est le différentiel de l'aire balayée par le rayon vecteur du point A et le coefficient de dt dans le deuxième membre

est constant au cours du temps, d'où la propriété :
l'aire balayée par le rayon vecteur du point A, quand il parcourt une partie de son orbite est proportionnelle au temps nécessaire.
En intégrant 1.16 le long de l'ellipse, l'intégrale du premier membre donne l'aire de l'ellipse, qui vaut

$$\pi\, a^2\sqrt{1-e^2},$$

tandis que celle du deuxième donne

$$\frac{1}{2\beta}C\,\tau,$$

τ est la période. D'où

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \tag{1.17}$$

La dernière équation et la propriété précédente suffisent pour déterminer la position du point A sur son orbite. Avec ce dernier point, le problème du centre fixe, et par conséquent le problème des deux corps, est complètement résolu. Pour mettre cette solution sous forme plus explicite, introduisons d'abord les dénominations astronomiques suivantes[19] : On appelle "anomalie excentrique", notée u, l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{O_1B}$ avec $\vec{L}$ (voir la figure ci-après), "anomalie moyenne", notée l, l'angle proportionnel au temps qui vaut zéro modulo 2π au périhélie. Dans le cas où le mouvement se fait dans le sens direct, on aura

$$l = n\,(t-t_0), \tag{1.18}$$

où t_0 est l'instant de passage au périhélie et

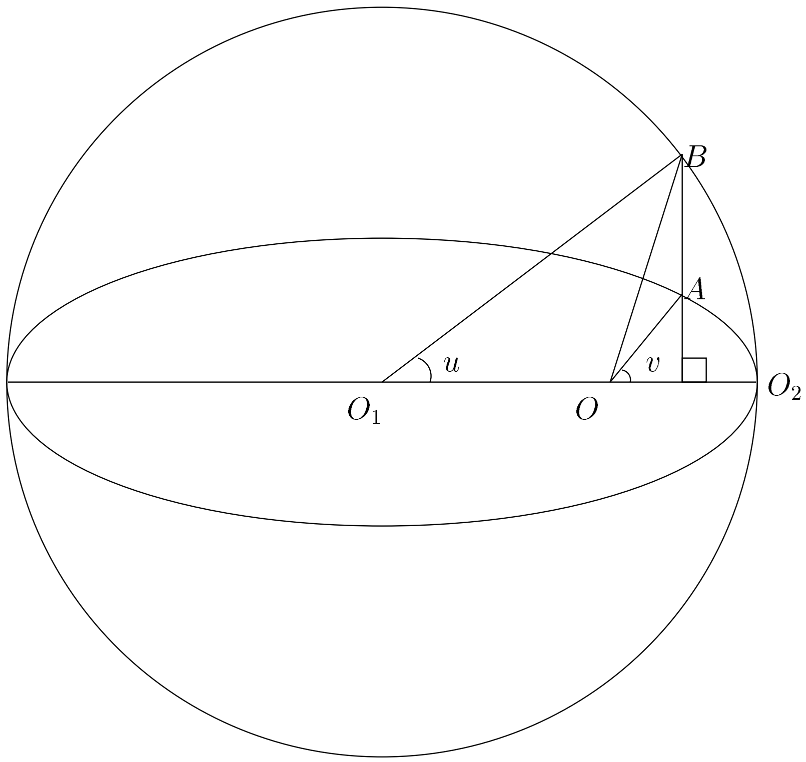
$$n = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \tag{1.19}$$

est la fréquence. D'où, l'aire de la région OO_2A, balayée par $\overrightarrow{OA}$ entre l'instant t_0 et l'instant t (le bord O_2A est l'arc de l'ellipse), noté $\mathcal{A}$, est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{l}{2\pi}\pi a^2\sqrt{1-e^2}\; l = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\; l. \tag{1.20}$$

Notons $\mathcal{B}$ l'aire de la région DO_2B (le bord O_2B est l'arc du cercle). Cette aire vaut la différence entre l'aire du secteur circulaire O_2O_1B et celle du triangle O_1DB, rectangle en D. C'est-à-dire,

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}\,ae\,a\sin u = \frac{1}{2}a^2(u-\sin u). \tag{1.21}$$



Le fait que l'ellipse s'obtienne à partir de son cercle principal par affinité du rapport $\sqrt{1-e^2}$, implique que

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\sqrt{1-e^2}. \tag{1.22}$$

D'où l'équation,

$$l = u - e \sin u, \tag{1.23}$$

qu'on appelle l'équation de Kepler.

1.3 Éléments osculateurs

Dans le repère $Ox_1x_2x_3$, donner la position et la vitesse du point A est équivalent à donner l'ellipse que parcourt ce point, l'une de ses anomalies (vraie, excentrique ou moyenne) et le sens du mouvement. En effet, donner l'ellipse et une anomalie, revient à donner la position du point et son vecteur vitesse au signe près. Le sens de ce vecteur est le sens du mouvement. Cherchons maintenant des paramètres pour déterminer l'ellipse, la position du point A sur l'ellipse en fonction du temps et le sens du mouvement. Les astronomes utilisent souvent la terminologie suivante :

soit $OX_1X_2X_3$ le repère orthonormé direct lié à l'ellipse tel que les axes OX_1 et OX_3 soient confondus respectivement à $\vec{L}$ et $\vec{C}$ et aient les mêmes sens qu'eux. Soit OD l'axe, appelé l'axe du nœud ascendant, situé dans l'intersection des deux plans Ox_1x_2 et OX_1X_2 de telle sorte que le repère Ox_3X_3D soit direct. Notons ω l'angle (OD, OX_1). On appelle l'angle (Ox_3, OX_3), noté δ "inclinaison", l'angle (Ox_1, OD), noté Ω, "longitude du nœud ascendant", la somme $\varpi = \Omega + \omega$, "longitude du périhélie", la somme $\hat{v} = \varpi + v$ "longitude vraie", la somme $\hat{u} = \varpi + u$ "longitude excentrique" et la somme $\hat{l} = \varpi + l$ "longitude moyenne".
Les variables $a, e, \delta, \Omega, \omega$ avec l'une des anomalies sont appelés "éléments osculateurs". Avec ces éléments et selon la convention du nœud ascendant, on est capable de déterminer la position et la vitesse du point A. Les anomalies et l'angle ω deviennent indéterminés quand l'excentricité de l'ellipse s'annule, alors que les différentes longitudes restent définies. C'est pourquoi l'on préfère le système composé des variables $a, e, \delta, \Omega, \varpi$ et l'une des longitudes du point A. Dans la suite de ce paragraphe on donne les relations qui relient ces éléments avec les coordonnées cartésiennes de $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ et la quantité

$$l_u = \frac{dl}{du} = 1 - e\cos u, \tag{1.24}$$

appelée poids, qui joue un rôle important dans le calcul du hamiltonien séculaire.
Constatons d'abord que

$$\begin{aligned} X &= r\cos v = a(\cos u - e), && (1.25)\\ Y &= r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u, && (1.26)\\ Z &= 0. && (1.27) \end{aligned}$$

D'où

$$r = a(1 - e\cos u) = a\, l_u. \tag{1.28}$$

D'après les équations 1.18, 1.23 et 1.7, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{l} &= n, && (1.29)\\ \dot{u} &= \frac{a\,n}{r}, && (1.30)\\ \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu\, a(1-e^2)}}{r^2}. && (1.31) \end{aligned}$$

D'où

$$\dot{X} = -\frac{a\,n}{\sqrt{1-e^2}}\sin v = -\frac{a\,n}{1 - e\cos u}\sin u, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \frac{a\,n}{\sqrt{1-e^2}}(e+\cos v) = \frac{a\,n}{1-e\cos u}\sqrt{1-e^2}\cos u, &(1.33)\\ \dot{Z} &= 0. &(1.34)\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\vec{p}^{\,2} = \beta^2(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}).$$

Enfin, le hamiltonien devient

$$H = -\frac{\mu\beta}{2a}. \tag{1.35}$$

Pour calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ dans le repère $Ox_1x_2x_3$, il suffit de remarquer la formule :

$$\begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_3(\Omega)\mathcal{R}_1(\delta)\mathcal{R}_3(\omega)\begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ Z & \dot{Z} \end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

avec $\mathcal{R}_k(\theta)$ est la matrice de rotation principale autour de l'axe numéro k d'angle θ.

1.4 Variables action-angles de Delaunay

Ce sont des variables classiques du problème de Kepler. Leur avantage est qu' elles sont des variables action-angles de ce problème. Ce qui nous intéresse dans ces variables est que la forme symplectique séculaire s'obtient facilement dans ces variables. Elles sont les six variables suivantes :
les trois angles l, ω, Ω, et les trois quantités

$$\begin{aligned} I_l &= \beta\sqrt{\mu\,a}, &(1.37)\\ I_\omega &= \beta\sqrt{\mu\,a(1-e^2)}, &(1.38)\\ I_\Omega &= \beta\sqrt{\mu\,a(1-e^2)}\cos\delta, &(1.39)\end{aligned}$$

appelées les actions de Delaunay. En exprimant le hamiltonien et la forme symplectique en fonction de ces variables, on trouve

$$H = -\frac{\mu^2\beta^3}{2I_l^2}, \tag{1.40}$$

$$\sigma = d\,I_l \wedge d\,l + d\,I_\omega \wedge d\,\omega + d\,I_\Omega \wedge d\,\Omega. \tag{1.41}$$

Ces sont des variables action-angles selon le sens du théorème du Liouville [17]. Dans l'annexe (B), on consacre un exposé à ces variables, dans lequel, on propose une nouvelle méthode pour démontrer la formule 1.41.

1.5 Les expressions de $\vec{r}$ et de l_u en utilisant l'unité complexe

L'utilisation des nombres complexes sert à faciliter les calculs et rendre les expressions plus simples. Un vecteur quelconque de notre espace comme $\vec{r}$ a trois composantes réelles : r_1, r_2, r_3. Un tel vecteur sera représenté par sa troisième composante et un nombre complexe, qui regroupe les deux premières composantes, qu'on note en mettant c en indice :

$$r_c = r_1 + ir_2,$$

i étant l'unité imaginaire. En injectant 1.25, 1.26 et 1.27 dans 1.36, on trouve

$$\begin{aligned}
r_c &= \frac{a}{4}\{[(1+\cos\delta)(1+\sqrt{1-e^2}) + (1-\cos\delta)(1-\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{2(\Omega-\varpi)\,i}]\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} \\
&\quad +[(1+\cos\delta)(1-\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{2\varpi\,i} + (1-\cos\delta)(1+\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{2\Omega\,i}]\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i} \\
&\quad -2e[(1+\cos\delta)\mathrm{e}^{\varpi\,i} + (1-\cos\delta)\mathrm{e}^{(2\Omega-\varpi)\,i}]\}, && (1.42) \\
r_3 &= \frac{a}{4}\{[(1-\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{(\Omega-2\varpi)\,i} - (1+\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{-\Omega\,i}]\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} \\
&\quad +[(1+\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{\Omega\,i} - (1-\sqrt{1-e^2})\mathrm{e}^{-(\Omega-2\varpi)\,i}]\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i} \\
&\quad -2e[\mathrm{e}^{(\Omega-\varpi)\,i} - \mathrm{e}^{-(\Omega-\varpi)\,i})]\}\,i\sin\delta, && (1.43) \\
l_u &= 1 - \frac{1}{2}e[\mathrm{e}^{(\hat{u}-\varpi)\,i} + \mathrm{e}^{-(\hat{u}-\varpi)\,i}]. && (1.44)
\end{aligned}$$

Attention à la différence entre e, qui désigne le nombre d'Euler, et e représentant l'excentricité de l'ellipse.

1.6 Variables associées aux vecteurs d'excentricité et de moment cinétique normalisé

Soit le vecteur du moment cinétique normalisé,

$$\vec{S} = \frac{\vec{C}}{\sqrt{\mu a}}. \tag{1.45}$$

Il est clair que donner une ellipse orientée, ayant l'origine pour foyer, est équivalent à donner son demi-grand axe et les deux vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{L}$. Chacun de ces deux vecteurs ayant trois cordonnées réelles, l'ellipse est donc donnée par sept variables, quand il n'en faut que cinq indépendantes. La variable a

étant indépendante de $\vec{S}$ et de $\vec{L}$, on doit avoir deux relations entre ces deux vecteurs. En effet, on a

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 + \vec{L}^2 &= 1, && (1.46) \\ \vec{S}\,.\,\vec{L} &= 0. && (1.47) \end{aligned}$$

On va repérer nos ellipses par les variables a, S_c, L_c (Rappelons-le, l'indice c désigne l'affixe de la projection dans le plan de référence). Cherchons à exprimer les quantités r_c, r_3, l_u en fonction de ces variables. Pour ce faire, on commence d'abord par exprimer les quantités $e, \delta, \mathrm{e}^{\Omega\, i}, \mathrm{e}^{\varpi\, i}$ dans $\vec{S}, \vec{L}$ et puis on injecte dans 1.42, 1.43 et 1.44. On a

$$\begin{aligned} e &= L, && (1.48) \\ \sqrt{1-e^2} &= S, && (1.49) \\ \cos\delta &= \frac{S_3}{S}, && (1.50) \\ \sin\delta &= \frac{|S_c|}{S}. && (1.51) \end{aligned}$$

En projetant $\vec{S}$ sur le plan horizontal, on trouve

$$\mathrm{e}^{\Omega\, i} = \frac{S_c}{|S_c|}\, i. \tag{1.52}$$

Il ne reste qu'exprimer $\mathrm{e}^{\varpi\, i}$ dans ces variables. En projetant $\vec{L}$ sur le plan horizontal, on aura

$$(1+\cos\delta)\mathrm{e}^{\varpi\, i} + (1-\cos\delta)\mathrm{e}^{(2\Omega-\varpi)\, i} = 2\frac{L_c}{L}.$$

En substituant $\cos\delta$ et $\mathrm{e}^{\Omega\, i}$ par leurs valeurs, données plus haut, la formule précédente devient

$$(L(S+S_3)\mathrm{e}^{\varpi\, i} - S\,L_c)^2 = S^2 L_c^2 + L^2 S_c^2. \tag{1.53}$$

En utilisant les formules

$$\begin{aligned} S^2 &= S_c\bar{S}_c + S_3^2, && (1.54) \\ L^2 &= L_c\bar{L}_c + L_3^2, && (1.55) \end{aligned}$$

et les formules 1.46, 1.47, qui s'écrivent

$$\begin{aligned} S^2 + L^2 &= 1, && (1.56) \\ S_c\bar{L}_c + \bar{S}_c L_c + 2L_3 S_3 &= 0, && (1.57) \end{aligned}$$

la relation 1.53, devient

$$(L(S+S_3)\mathrm{e}^{\varpi\, i} - S\, L_c)^2 = (S_3 L_c - L_3 S_c)^2. \tag{1.58}$$

Au voisinage de l'orbite circulaire et horizontale, les deux quantités $L(S+S_3)\mathrm{e}^{\varpi\, i} - S\, L_c$, $S_3 L_c + L_3 S_c$ sont au voisinage de L_c. Donc la formule 1.58 donne

$$L(S+S_3)\mathrm{e}^{\varpi\, i} - S\, L_c = S_3 L_c - L_3 S_c,$$

ou

$$\mathrm{e}^{\varpi\, i} = \frac{1}{L}(L_c - \frac{L_3}{S+S_3} S_c). \tag{1.59}$$

En injectant dans les relations 1.42,1.43,1.44, on trouve

$$\begin{aligned}
r_c &= \frac{a}{4}[(\frac{(1+S)(S+S_3)}{S} - \frac{S_c^2 \bar{G}_c^2}{S(1+S)(S+S_3)})\mathrm{e}^{\hat{u}\, i} \\
&\quad +(\frac{(S+S_3)G_c^2}{S(1+S)} - \frac{(1+S)S_c^2}{S(S+S_3)})\mathrm{e}^{-\hat{u}\, i} \\
&\quad -2(\frac{(S+S_3)G_c}{S} - \frac{S_c^2 \bar{G}_c}{S(S+S_3)})], && (1.60) \\
r_3 &= -\frac{a}{4}[(\frac{S_c \bar{G}_c^2}{S(1+S)} + \frac{(1+S)\bar{S}_c}{S})\mathrm{e}^{\hat{u}\, i} \\
&\quad +(\frac{\bar{S}_c G_c^2}{S(1+S)} + \frac{(1+S)S_c}{S})\mathrm{e}^{-\hat{u}\, i} \\
&\quad -2\frac{S_c \bar{G}_c + \bar{S}_c G_c}{S}], && (1.61) \\
l_u &= 1 - \frac{1}{2}(\bar{G}_c \mathrm{e}^{\hat{u}\, i} + G_c \mathrm{e}^{-\hat{u}\, i}), && (1.62)
\end{aligned}$$

avec

$$G_c = L_c - \frac{L_3}{S+S_3} S_c. \tag{1.63}$$

Remarque 1. *D'après 1.59, on a*

$$G_c = L\, e^{\varpi\, i}. \tag{1.64}$$

Les formules précédentes contiennent, en plus des variables S_c, L_c les quantités S, L, S_3, L_3. Ces quantités doivent être regardées comme des fonctions des variables S_c, L_c. On peut obtenir ces fonctions en résolvant le système composé des équations 1.54, 1.55, 1.56, 1.57. Dans le cas où

$$\begin{aligned}
S_3 + L_3 &> 0, && (1.65) \\
S_3 - L_3 &> 0, && (1.66)
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2), && (1.67)\\ L_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2), && (1.68)\\ S &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + S_c\bar{S}_c - L_c\bar{L}_c + \epsilon_1\epsilon_2}, && (1.69)\\ L &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - S_c\bar{S}_c + L_c\bar{L}_c - \epsilon_1\epsilon_2}, && (1.70)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \sqrt{1 - S_c\bar{S}_c - L_c\bar{L}_c - S_c\bar{L}_c - \bar{S}_c L_c}, && (1.71)\\ \epsilon_2 &= \sqrt{1 - S_c\bar{S}_c - L_c\bar{L}_c + S_c\bar{L}_c + \bar{S}_c L_c}. && (1.72)\end{aligned}$$

On peut alléger nos formules en faisant le changement de variables

$$\begin{aligned} s_c &= \frac{S_c}{S + S_3} && (1.73)\\ g_c &= \frac{G_c}{1 + S}. && (1.74)\end{aligned}$$

En effet, les formules donnant la position et le poids deviennent

$$\begin{aligned} &r_c = a\,f[(1 - {s_c}^2{\bar{g}_c}^2)\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + ({g_c}^2 - {s_c}^2)\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i} - 2(g_c - {s_c}^2\bar{g}_c)], && (1.75)\\ &r_3 = -a\,f[(s_c{\bar{g}_c}^2 + \bar{s}_c)\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + (\bar{s}_c{g_c}^2 + s_c)\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i} - 2(\bar{s}_c g_c + s_c\bar{g}_c)], && (1.76)\\ &l_u = 1 - \frac{1}{1 + g_c\bar{g}_c}(\bar{g}_c\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + g_c\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i}), && (1.77)\end{aligned}$$

avec

$$f = \frac{1}{(1 + s_c\bar{s}_c)(1 + g_c\bar{g}_c)}. \quad (1.78)$$

1.7 Variables de Poincaré

Ces sont les variables [10]

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{I_l}\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}\mathrm{e}^{\varpi\,i}, && (1.79)\\ y_p &= \sqrt{I_l}\sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos\delta)}\mathrm{e}^{\Omega\,i}. && (1.80)\end{aligned}$$

En convertissant dans les variables données plus haut, on trouve

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{I_l}\frac{G_c}{\sqrt{1 + S}}, && (1.81)\\ y_p &= \sqrt{I_l}\frac{S_c}{\sqrt{S + S_3}}\,i. && (1.82)\end{aligned}$$

Remarquons la ressemblance avec les formules 1.73, 1.74

1.8 Variables de Souriau

Soit les deux vecteurs

$$\vec{\xi} = \vec{S} + \vec{L}, \tag{1.83}$$

$$\vec{\eta} = \vec{S} - \vec{L}, \tag{1.84}$$

les deux relations 1.46, 1.47 entre $\vec{S}$ et $\vec{L}$ prennent la forme simple suivante

$$\|\vec{\xi}\| = 1, \qquad \|\vec{\eta}\| = 1. \tag{1.85}$$

Ces deux vecteurs sont dus à Souriau [3]. Les relations 1.85 lui ont permis de conclure que l'ensemble des ellipses, à foyer et demi-grand axe fixés, est équivalent au produit de deux sphères : $S^2 \times S^2$. On peut exprimer le vecteur $\vec{r}$ et le poids l_u en fonction de ces variables en utilisant les relations

$$\xi_3 = \sqrt{1 - \xi_c \bar{\xi}_c}, \tag{1.86}$$

$$\eta_3 = \sqrt{1 - \eta_c \bar{\eta}_c}, \tag{1.87}$$

$$S_c = \frac{1}{2}(\xi_c + \eta_c), \tag{1.88}$$

$$L_c = \frac{1}{2}(\xi_c - \eta_c), \tag{1.89}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(\xi_3 + \eta_3), \tag{1.90}$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(\xi_3 - \eta_3). \tag{1.91}$$

Dans le problème planétaire, on s'intéresse particulièrement au point circulaire plan (l'ellipse est un cercle situé dans le plan de référence). En fait, quand l'orbite est circulaire, on aura

$$\vec{L} = 0,$$

et par conséquent

$$\vec{\xi} = \vec{\eta} = \vec{S},$$

et quand l'orbite est situé dans le plan de référence, le vecteur $\vec{S}$ devient vertical, et par conséquent, $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$ deviennent symétriques entre eux par rapport à Ox_3. On aura

$$\xi_c = -\eta_c.$$

Au point circulaire plan, les deux vecteurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$ sont verticaux. On aura

$$\xi_c = \eta_c = 0.$$

1.9 Symétrie galoisienne

Revenons à la lois de Newton, donnée par la formule 1.1.

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

La quantité r, qui est la racine carrée de $\vec{r}^{\ 2}$, peut être remplacée par $\pm r$. Au signe $+$ correspond la dynamique attractive, dans laquelle est situé notre problème. Quand on donne à r le signe $-$, on aurait la dynamique répulsive. Dans ce cas si l'on change aussi le signe de μ, notre équation reste invariante. On va construire un opérateur, noté ψ, qui fait cette symétrie. Cet opérateur envoie μ sur $-\mu$ et r sur $-r$ sans toucher à la dynamique ($\vec{r}$, $\vec{p}$, le hamiltonien et la forme symplectique sont invariants). D'après 1.8, le vecteur $\vec{L}$ sera envoyé sur $-\vec{L}$. L'équation 1.10 montre que cet opérateur ajoute π aux anomalies et l'équation 1.13 montre que ψ fait passer a à $-a$. Plus formellement, on définit cet opérateur par

$$\psi(\beta, \mu, a, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \hat{u}) = (\beta, -\mu, -a, \vec{\eta}, \vec{\xi}, \hat{u} + \pi). \tag{1.92}$$

Autrement dit, cet opérateur a pour effet de changer μ en $-\mu$ et a en $-a$, d'ajouter π à l'anomalie excentrique et de permuter $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$.

Proposition 1. *Les quantités $\vec{r}$ et l_u en tant que fonctions des variables : $a, \vec{\xi}, \vec{\eta}$ et $\hat{u}$, sont invariantes sous l'action de ψ.*

Démonstration.

On va appliquer cet opérateur aux formules 1.75, 1.76 et 1.77. Remarquons d'abord que les quantités β et μ ne figurent pas dans ces formules, et que permuter $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$ est équivalent à conserver $\vec{S}$ et remplacer $\vec{L}$ par $-\vec{L}$. D'après 1.73 et 1.74, cela revient à conserver s_c et changer g_c en $-g_c$. D'où notre énoncé, qui est équivalent aux relations :

$$\begin{aligned} r_c(-a, s_c, -g_c, \hat{u} + \pi) &= r_c(a, s_c, g_c, \hat{u}), && (1.93)\\ r_3(-a, s_c, -g_c, \hat{u} + \pi) &= r_3(a, s_c, g_c, \hat{u}), && (1.94)\\ l_u(-a, s_c, -g_c, \hat{u} + \pi) &= l_u(a, s_c, g_c, \hat{u}). && (1.95) \end{aligned}$$

Ces relations sont vérifiables directement dans 1.75, 1.76 et 1.77. $\odot$
En dérivant les relations 1.75, 1.76 par rapport au temps, on trouve

$$p_c = \beta \dot{r_c} = a\, \beta\, n\, \frac{f}{l_u}[(1 - {s_c}^2 {\bar{g_c}}^2) e^{\hat{u}\, i} - ({g_c}^2 - {s_c}^2) e^{-\hat{u}\, i}], \tag{1.96}$$

$$p_3 = \beta \dot{r_3} = -a\, \beta\, n\, \frac{f}{l_u}[(s_c {\bar{g_c}}^2 + \bar{s_c}) e^{\hat{u}\, i} - (\bar{s_c} {g_c}^2 + s_c) e^{-\hat{u}\, i}], \tag{1.97}$$

n et f sont donnés respectivement par 1.19 et 1.78.

Proposition 2. *La quantité $\vec{p}$ en tant que fonctions des variables : $\beta, \mu, a, \vec{\xi}, \vec{\eta}$ et $\hat{u}$, est invariante sous l'action de ψ.*

Démonstration.

L'action de ψ sur $\vec{p}$ est équivalente aux relation :

$$\begin{aligned} p_c(\beta, -\mu, -a, s_c, -g_c, \hat{u}+\pi) &= p_c(\beta, \mu, a, s_c, g_c, \hat{u}), \quad (1.98) \\ p_3(\beta, -\mu, -a, s_c, -g_c, \hat{u}+\pi) &= p_3(\beta, \mu, a, s_c, g_c, \hat{u}). \quad (1.99) \end{aligned}$$

Ces relations sont vérifiables directement dans 1.96 et 1.97.$\odot$

Corollaire. *La forme symplectique*

$$\sigma = d\,\vec{p} \wedge d\,\vec{r}$$

est invariante sous l'action de ψ.

Remarque 2. *D'après 1.81 et 1.82, l'opérateur ψ envoie x_p à $-x_p$ et la variable y_p à elle même.*

Cet opérateur donne des relations entre les coefficients du développement du hamiltonien séculaire. Nous l'utilisons dans le troisième et le quatrième chapitres.

Chapitre 2

Système séculaire

C'est le système que l'on obtient en remplaçant le hamiltonien du problème planétaire par sa moyenne par rapport aux anomalies moyennes (angles rapides). Cela permet de se débarrasser des variations à courte période des éléments des orbites et de ne tenir compte que des variations à longue période, dites séculaires. Les résonances en longitude moyenne peuvent rendre cette approximation mauvaise [18].
Dans ce chapitre, on définit ce système dans des coordonnées héliocentriques, On démontre l'analyticité du hamiltonien séculaire, au voisinage du point circulaire non incliné (le point de notre espace des phases où les planètes parcourent, dans le même sens, des cercles situés dans le plan de référence), dans différentes familles des variables, décrites dans le premier chapitre et on expose la méthode adaptée pour réaliser le développement de notre hamiltonien, au voisinage du point en question. On étudie, à la fin de ce chapitre, les propiétés de ce développement, dues aux symétries du problème. Cela fournit les outils que nous utilisons dans les chapitres suivants.
Soient O un corps de masse importante m_0 (le Soleil), A_1, A_2 deux petits corps (planètes) de masses respectives m_1, m_2. Dans un référentiel inertiel (lié au centre de masses par exemple), les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} m_0\ddot{\vec{R}}_0 &= \frac{Gm_0m_1}{\|\vec{R}_1-\vec{R}_0\|^3}(\vec{R}_1-\vec{R}_0)+\frac{Gm_0m_2}{\|\vec{R}_2-\vec{R}_0\|^3}(\vec{R}_2-\vec{R}_0), &(2.1)\\ m_1\ddot{\vec{R}}_1 &= -\frac{Gm_0m_1}{\|\vec{R}_1-\vec{R}_0\|^3}(\vec{R}_1-\vec{R}_0)+\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{R}_2-\vec{R}_1\|^3}(\vec{R}_2-\vec{R}_1), &(2.2)\\ m_2\ddot{\vec{R}}_2 &= -\frac{Gm_0m_2}{\|\vec{R}_2-\vec{R}_0\|^3}(\vec{R}_2-\vec{R}_0)-\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{R}_2-\vec{R}_1\|^3}(\vec{R}_2-\vec{R}_1), &(2.3)\end{aligned}$$

où $\vec{R}_0, \vec{R}_1, \vec{R}_2$ sont les vecteurs position respectifs des points O, A_1, A_2. Notons

$$\vec{P}_k = m_k\dot{\vec{R}}_i \quad k = 0, 1, 2, \tag{2.4}$$

les quantités de mouvement respectives des corps O, A_1, A_2. On constate que

$$\sum_{k=0}^{2} \dot{\vec{P}}_k = 0.$$

Donc la somme $\sum\limits_{k=0}^{2} \vec{P}_k$ est une constante. Choisissons le référentiel inertiel de telle sorte que son origine soit le barycentre des trois corps. On aura

$$\sum_{k=0}^{2} m_k \vec{R}_k = 0, \qquad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^{2} \vec{P}_k = 0. \qquad (2.6)$$

Dans ces variables, le hamiltonien et la forme symplectique s'écrivent

$$H = \sum_{k=0}^{2} \frac{\vec{P}_k^2}{2m_k} - \sum_{2 \geq l > k \geq 0} \frac{G m_k m_l}{||\vec{R}_l - \vec{R}_k||}, \qquad (2.7)$$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{2} d\,\vec{P}_k \wedge d\,\vec{R}_k. \qquad (2.8)$$

2.1 Coordonnées héliocentriques

Effectuons le changement des variables

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0, \qquad (2.9)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_0, \qquad (2.10)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_0. \qquad (2.11)$$

En injectant ces formules dans la forme symplectique, on trouve

$$\sigma = (\sum_{k=0}^{2} \vec{P}_k) \wedge \vec{r}_0 + \vec{P}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \wedge \vec{r}_2. \qquad (2.12)$$

Cela montre que les variables

$$\vec{p}_0 = \sum_{k=0}^{2} \vec{P}_k, \qquad (2.13)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{P}_1, \qquad (2.14)$$

$$\vec{p}_2 = \vec{P}_2, \qquad (2.15)$$

sont des conjuguées canoniques des variables $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. Ces nouvelles variables sont appelées les variables héliocentriques. Elles sont dues à Poincaré [6].

2.2 Réduction du centre de masses

C'est une réduction classique du problème planétaire. On l'effectue en utilisant les deux relations 2.5, 2.6, qui s'écrivent

$$\vec{r}_0 = -\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \tag{2.16}$$

$$\vec{p}_0 = 0. \tag{2.17}$$

Ces relations permettent d'enlever les deux variables $\vec{r}_0, \vec{p}_0$ et, par conséquent, de réduire le système de trois degré de liberté. Le hamiltonien devient [10]

$$H = H_0 + H_p, \tag{2.18}$$

avec

$$H_0 = \sum_{k=1}^{2} H_{0k}, \tag{2.19}$$

$$H_{0k} = \frac{\vec{p}_k^2}{2\beta_k} - \frac{\mu_k\,\beta_k}{r_k}, \tag{2.20}$$

$$\beta_k = \frac{m_0 m_k}{m_0 + m_k}, \tag{2.21}$$

$$\mu_k = G(m_0 + m_k), \quad k = 1, 2, \tag{2.22}$$

et

$$H_p = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_0} - \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|}. \tag{2.23}$$

D'après 2.12, la forme symplectique, exprimée dans les nouvelles variables, prend la forme

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{2.24}$$

avec

$$\sigma_k = d\,\vec{p}_k \wedge d\,\vec{r}_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.25}$$

2.3 Solution approchée

Notons E l'espace de phases de notre problème après la réduction du centre de masses. On peut mettre cet espace sous la forme

$$E = E_1 \times E_2,$$

où

$$E_k = \{(\vec{r}_k, \vec{p}_k)/\vec{r}_k \in \mathbb{R}^3, \vec{p}_k \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad k = 1, 2.$$

Dans la suite, on va confondre, par abus de notation, les éléments de E_1 et de E_2 à leurs relevés dans E. Soit $\vec{\chi}$ un élément de E tel que

$$\vec{\chi} = \vec{\chi}_1 + \vec{\chi}_2, \tag{2.26}$$

avec

$$\vec{\chi}_k = (\vec{r}_k, \vec{p}_k) \in E_k. \tag{2.27}$$

L'équation du mouvement s'écrit

$$\sigma \cdot \dot{\vec{\chi}} = dH_0 + dH_p, \tag{2.28}$$

ou

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\dot{\vec{\chi}}_1 + \dot{\vec{\chi}}_2) = d\,H_{01} + d\,H_{02} + d\,H_p. \tag{2.29}$$

La partie H_p du hamiltonien est petite de l'ordre des masses planétaires devant H_0. En faisant abstraction de H_p, l'équation 2.29 devient

$$\sigma_1\dot{\vec{\chi}}_1 + \sigma_2\dot{\vec{\chi}}_2 = d\,H_{01} + d\,H_{02}. \tag{2.30}$$

Les quantités d'indice k dans cette équation ne dépendent que des variables concernant le corps k, $k = 1, 2$. Cela permet d'en déduire les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_1\,\dot{\vec{\chi}}_1 &= d\,H_{01}, && (2.31)\\ \sigma_2\,\dot{\vec{\chi}}_2 &= d\,H_{02}. && (2.32) \end{aligned}$$

Chacune de ces équations présente un problème de Kepler (voir premier chapitre). En imposant les conditions d'énergies négatives et des mouvements cinétiques non nuls, la solution de chacune de ces deux équations sera elliptique. Aussi peut-on profiter des formules du premier chapitre. Le numéro du corps sera mis en indice. En particulier, les relations 1.75, 1.76, 1.77, donnent

$$\begin{aligned} r_{ck} &= a\,f_k[(1 - {s_{ck}}^2\bar{g_{ck}}^2)\mathrm{e}^{\hat{u}_k\,i} + ({g_{ck}}^2 - {s_{ck}}^2)\mathrm{e}^{-\hat{u}_k\,i} \\ &\quad -2(g_{ck} - {s_{ck}}^2\bar{g_{ck}})], && (2.33)\\ r_{3k} &= -a_k\,f_k[(s_{ck}\bar{g_{ck}}^2 + \bar{s_{ck}})\mathrm{e}^{\hat{u}_k\,i} + (\bar{s_{ck}}{g_{ck}}^2 + s_{ck})\mathrm{e}^{-\hat{u}_k\,i} \\ &\quad -2(\bar{s_{ck}}g_{ck} + s_c\bar{g_{ck}})], && (2.34)\\ l_{uk} &= 1 - \frac{1}{1 + g_{ck}\bar{g}_{ck}}(\bar{g}_{ck}\mathrm{e}^{\hat{u}_k\,i} + g_{ck}\mathrm{e}^{-\hat{u}_k\,i}), && (2.35) \end{aligned}$$

avec

$$f_k = \frac{1}{(1 + s_{ck}\bar{s}_{ck})(1 + g_{ck}\bar{g}_{ck})}, \qquad k = 1, 2.$$

2.4 Système séculaire au premier ordre des masses

Quand on tient compte de H_p dans l'équation 2.29, la solution elliptique associée aux équations 2.31, 2.32 devient une approximation. Les éléments décrivant les deux ellipses ne sont plus constants. On peut dire, dans ce cas là, que chacune de deux planètes parcourt une ellipse variant au cours du temps. Ajoutons à ces éléments deux variables décrivant la position de chaque planète sur son ellipse, telles les longitudes moyennes $\hat{l}_k,\ k = 1, 2$. Ainsi obtient-on un système des variables décrivant l'espace des phases E. Les variables de Delaunay ou celles de Souriau,

$$a_k, \xi_{ck}, \eta_{ck}, \hat{l}_k \quad k = 1, 2,$$

sont des telles variables. Exprimons H et σ dans des telles variables. Cela est équivalent à appliquer la méthode de variations des constantes de Lagrange au système 2.29. Remplaçons, maintenant dans ce système le hamiltonien H par sa moyenne par rapport aux longitudes moyennes (ou anomalies moyennes), dit angles rapides. Le problème associé au hamiltonien moyennisé

$$\tilde{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H d\hat{l}_1 d\hat{l}_2 \tag{2.36}$$

s'appelle le problème séculaire du premier ordre des masses (les ordres suivants s'obtiennent par des procédés de "normalisation"). Le but de cette moyennisation est de nous débarrasser des angles rapides, et de ne tenir compte que des variations non-périodiques des éléments orbitaux dits séculaires de premier ordre. Dans la suite, on va utiliser le mot séculaire en sous-entendant toujours séculaire au premier ordre de masses.
Utilisons, à présent, pour étudier le problème séculaire, les variables de Delaunay

$$I_{lk}, I_{\omega k}, I_{\Omega k}, l_k, \omega_k, \Omega_k, \quad k = 1, 2,$$

données dans §1.4. Dans ces variables $\tilde{H}$, s'écrit

$$\tilde{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H d\, l_1 d\, l_2. \tag{2.37}$$

Il ne dépend pas de l_1, l_2. Ces deux variables étant ignorées, leurs conjugués symplectiques I_{l1}, I_{l2} doivent être constants. D'où les demi-grand axes a_1, a_2 sont constants. Cela nous permet de réduire le problème séculaire de deux degrés de liberté. L'espace des phases réduit, noté E_s a huit dimensions seulement. C'est l'espace des couples de deux ellipses orientées à demi-grand axes constants et à foyer commun fixé. En utilisant les variables de Souriau, on peut mettre E_S sous la forme

$$E_s = E_{s1} \times E_{s2}, \tag{2.38}$$

avec

$$E_{sk} = \{(\vec{\xi}_k, \vec{\eta}_k) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 / \|\vec{\xi}_k\| = 1, \|\vec{\eta}_k\| = 1\} = S^2 \times S^2. \tag{2.39}$$

2.4.1 Forme symplectique séculaire

Cette forme est, par définition, la restriction de la forme symplectique du problème à deux planètes, donnée par 2.24, sur l'espace des phases séculaireE_s, donnée par 2.38. Elle s'écrit sous la forme

$$\sigma_s = \sigma_{s1} + \sigma_{s2}, \tag{2.40}$$

où σ_{sk} est la restriction de σ_k, donnée par 2.25, sur E_{sk}, défini par 2.39, $k = 1, 2$.
En utilisant les variables de Delaunay, on constate que les quantités I_{lk}, données dans §1.4 par

$$I_{lk} = \beta_k \sqrt{\mu_k\, a_k}, k = 1, 2,$$

sont constantes sur E_{sk}. Donc, la restriction de $d\,I_{lk} \wedge d\,l_k$ sur E_{sk} est nulle. On en déduit que

$$\sigma_{sk} = d\,I_{\omega k} \wedge d\,\omega_k + d\,I_{\Omega k} \wedge d\,\Omega_k \quad k = 1, 2. \tag{2.41}$$

Dans les variables de Souriau, le calcul de σ_{sk} est plus difficile. On peut, par exemple, exprimer les variables de Delaunay en fonction de celles de Souriau, remplacer dans 2.41, et puis faire les simplifications nécessaires. Cela paraît trop long. Souriau, dans [3], nous donne σ_{sk} sous la forme

$$\sigma_{sk} = C(\sigma_{\vec{\xi}k} + \sigma_{\vec{\eta}k}) \quad k = 1, 2,$$

où C est une fonction des masses et des demi-grands axes, $\sigma_{\vec{\xi}k}, \sigma_{\vec{\eta}k}$ sont respectivement les formes symplectiques standard des sphères unitaires S^2 de $\vec{\xi}_k$ et de $\vec{\eta}_k$, $k = 1, 2$.
Souriau n'est pas très précis sur les signes et sur les coefficients. Je pars de la forme

$$\sigma_{sk} = C_1 \sigma_{\vec{\xi}k} + C_2 \sigma_{\vec{\eta}k} \quad k = 1, 2, \tag{2.42}$$

et je précise les coefficients C_1, C_2 dans la proposition suivante.

Proposition 3.

$$\sigma_{sk} = \frac{1}{2}\,\beta_k\sqrt{\mu_k a_k}(\sigma_{\vec{\xi}k} + \sigma_{\vec{\eta}k}) \quad k = 1, 2. \tag{2.43}$$

Démonstration.

Considérons la transformation qui envoie ω_k sur $\omega_k + \pi$ et conserve les autres éléments elliptiques (c'est la réflexion par rapport au plan passant par le foyer O et ayant le vecteur d'excentricité $\vec{L}_k$ pour normal). D'après 2.41, la forme symplectique σ_{sk} est invariante sous l'action de cette transformation. Cette transformation conserve le vecteur $\vec{S}_k$ et envoie $\vec{L}_k$ sur $-\vec{L}_k$. On en déduit que cette transformation permute les deux vecteurs $\vec{\xi}_k$ et $\vec{\eta}_k$. En appliquant cette transformation à 2.42, on trouve

$$C_1 = C_2. \tag{2.44}$$

Notons $\vec{\zeta}_k,\ \ ;\ k = 1, 2, 3, 4$ respectivement les vecteurs

$$\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2.$$

Soit $\phi_{\vec{\zeta}k}$ l'argument de la projection de $\vec{\zeta}_k$ dans le plan horizontal et ζ_{3k} sa projection sur l'axe vertical. On a

$$\sigma_{\vec{\zeta}k} = d\,\zeta_{3k} \wedge d\,\phi_{\vec{\zeta}k}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{2.45}$$

Restrignons-nous au cas plan et comparons les deux relations 2.42 et 2.41. On a

$$C_1 d\,\xi_{3k} \wedge d\,\phi_{\vec{\xi}k} + C_2 d\,\eta_{3k} \wedge d\,\phi_{\vec{\eta}k} = d\,I_{\omega k} \wedge d\,\omega_k + d\,I_{\Omega k} \wedge d\,\Omega_k \quad k = 1, 2. \tag{2.46}$$

Dans le cas plan, l'inclinaison est nulle, le vecteur $\vec{S}_k$ est vertical, les vecteurs de Souriau $\vec{\xi}_k$ et $\vec{\eta}_k$ sont symétriques par rapport à $\vec{S}_k$ et

$$\xi_{3k} = \eta_{3k} = S_{3k}. \tag{2.47}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} d\,I_{\omega k} &= d\,I_{\Omega k} = d\,(\beta_k\sqrt{\mu_k\,a_k(1-e^2)}) = \beta_k\sqrt{\mu_k\,a_k}d\,S_k \\ &= \beta_k\sqrt{\mu_k\,a_k}d\,S_{3k} = \frac{1}{2}\beta_k\sqrt{\mu_k\,a_k}d\,(\xi_{3k} + \eta_{3k}), \end{aligned} \tag{2.48}$$

et que

$$\phi_{\vec{\xi}k} = \varpi_k, \tag{2.49}$$

$$\phi_{\vec{\eta}k} = \varpi_k + \pi, \tag{2.50}$$

avec $\varpi_k = \Omega_k + \omega_k$. La relation 2.46 donne

$$(C_1 + C_2) d\, S_{3k} \wedge d\, \varpi_k = \beta_k \sqrt{\mu_k\, a_k} d\, S_{3k} \wedge d\, \varpi_k \quad k = 1, 2. \tag{2.51}$$

D'où

$$C_1 + C_2 = \beta_k \sqrt{\mu_k\, a_k}. \tag{2.52}$$

Notre proposition découle de cette relation et de la relation 2.44. $\odot$

Remarque 3. *En convertissant ζ_k et $\phi_{\zeta k}$ dans $\zeta_{ck}, \bar{\zeta}_{ck}, k = 1, 2, 3, 4,$, on trouve*

$$\sigma_{\vec{\zeta}k} = -\frac{i}{2} \frac{d\, \zeta_{ck} \wedge d\, \bar{\zeta}_{ck}}{\sqrt{1 - \zeta_{ck} \bar{\zeta}_{ck}}}. \tag{2.53}$$

2.4.2 Hamiltonien séculaire

La formule 2.36 donne

$$\tilde{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (H_{01} + H_{02} + H_p)\, d\hat{l}_1 d\hat{l}_2.$$

Les fonctions

$$H_{01} = -\frac{\mu_1 \beta_1}{2a_1}, \quad H_{02} = -\frac{\mu_2 \beta_2}{2a_2},$$

ne dépendant que des a_1, a_2, sont, du point de vue séculaire, des constantes. D'où

$$\tilde{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_p\, d\hat{l}_1 d\hat{l}_2 + constante$$

Comme le hamiltonien est une fonction définie à une constante près, on préfère utiliser à la place de $\tilde{H}$ le hamiltonien

$$H_s = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_p\, d\hat{l}_1 d\hat{l}_2, \tag{2.54}$$

qu'on appelle hamiltonien séculaire. D'après 2.23, la perturbation s'écrit

$$H_p = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_0} - \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|}.$$

Il est bien connu que la moyenne du premier terme, dans le deuxième membre, est nulle. En effet, on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2\, d\hat{l}_1 d\hat{l}_2 = \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} \vec{p}_1 l_{u1} d\, u_1) \cdot \vec{p}_2\, d\hat{l}_2.$$

D'après les relations 1.32, 1.33, 1.34 et 1.24, l'intégrale entre les parenthèses dans le deuxième membre de cette relation est nulle. On en déduit que

$$H_s = -\frac{Gm_1m_2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|}\,d\hat{l}_1 d\hat{l}_2 \tag{2.55}$$

Le problème séculaire est équivalent à l'équation

$$\sigma_s\dot{\vec{\chi}}_s = d\,H_s, \tag{2.56}$$

où $\vec{\chi}_s$ est un élément courant de E_s.
Enfin, pour mettre notre problème dans un cadre plus général, on pose

$$h_\gamma = \|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|^{2\gamma} \quad \gamma\in\mathbb{R}, \tag{2.57}$$

$$\tilde{h}_\gamma = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\gamma\, d\hat{l}_1 d\hat{l}_2 \quad \gamma\in\mathbb{R}. \tag{2.58}$$

Le hamiltonien séculaire devient

$$H_s = -Gm_1m_2\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}. \tag{2.59}$$

Dans la suite, on essaye de distinguer les résultats concernant h_γ, valables quel que soit γ, de ceux valables uniquement quand $\gamma = -\frac{1}{2}$.

2.5 Développement du hamiltonien séculaire au voisinage du point circulaire non incliné

Le point circulaire non incliné est le point de l'espace des phases séculaire E_s qui correspond au cas où les deux ellipses sont des cercles situés dans le plan de référence Ox_1x_2 et ont la même orientation. C'est le point où

$$e_1 = e_2 = 0, \tag{2.60}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \tag{2.61}$$

En ce point, les nœuds et les périhélies ne sont pas définis. C'est pourquoi on doit éviter l'utilisation des variables qui leur sont liées, comme les angles $\Omega_k, \omega_k, l_k \quad k = 1, 2$. Les variables de Poincaré répondent bien à cette exigence.
Dans la suite, on va utiliser plusieurs familles de variables : telle la famille $s_{ck}, g_{ck} \quad k = 1, 2$ ou celle de Souriau. La dernière sera notre famille préférée

pour son caractère symétrique. De plus, pour mettre la particularité du potentiel newtonien en évidence, on va parler du développement de la fonction $\tilde{h}_\gamma$. Le cas newtonien s'obtient quand $\gamma = -\frac{1}{2}$. On a

$$\begin{aligned} h_\gamma &= |a_2|^{2\gamma} \| \frac{\vec{r}_2}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} \frac{\vec{r}_1}{a_1} \|^{2\gamma}, \\ &= a_2^{2\gamma} \| \frac{\vec{r}_2}{a_2} - \alpha \frac{\vec{r}_1}{a_1} \|^{2\gamma}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

avec

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}. \tag{2.63}$$

On a identifié a_2 à sa valeur absolue, car il est positif. On doit se rappeler cette identification quand on reparlera de la symétrie galoisienne, évoquée dans §1.9. La dernière relation donne

$$h_\gamma = a_2^{2\gamma}[(\frac{r_{c2}}{a_2} - \alpha\frac{r_{c1}}{a_1})(\frac{\bar{r}_{c2}}{a_2} - \alpha\frac{\bar{r}_{c1}}{a_1}) + (\frac{r_{32}}{a_2} - \alpha\frac{r_{31}}{a_1})^2]^\gamma \tag{2.64}$$

La quantité entre les crochets, qui vaut $\frac{1}{a_2^2}\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2$, est toujours positive. Les points où cette quantité s'annule, ($\vec{r}_1 = \vec{r}_2$), forment une sous variété de notre espace, appelée sous variété de collision. Quand γ est négatif, la fonction h_γ est définie uniquement hors collision.

Proposition 4. *Soit la famille de variables algébriquement indépendantes*

$$s_{ck}, \bar{s}_{ck}, g_{ck}, \bar{g}_{ck}, \quad k = 1, 2,$$

hors collision, la fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique dans ces variables.

Démonstration.

En utilisant les longitudes excentriques, on aura

$$\tilde{h}_\gamma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\gamma \, l_{u1} l_{u2} d\hat{u}_1 d\hat{u}_2 \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{2.65}$$

Au voisinage du point circulaire non incliné et hors collision, la fonction $h_\gamma l_{u1} l_{u2}$ est analytique, dans les variables

$$r_{ck}, \bar{r}_{ck}, r_{3k}, l_{uk} \quad k = 1, 2.$$

D'après 2.33, 2.34, 2.35, ces dernières variables sont analytiques, dans les variables

$$s_{ck}, \bar{s}_{ck}, g_{ck}, \bar{g}_{ck}, \hat{u}_k, \quad k = 1, 2$$

au voisinage du point en question :

$$s_{ck} = \bar{s}_{ck} = g_{ck} = \bar{g}_{ck} = 0.$$

et périodiques, de période 2π, par rapport aux variables $\hat{u}_1, \hat{u}_2$. $\odot$

Remarque 4. *De la même manière, en utilisant les formules de 1.60 à 1.72, on démontre qu'au voisinage du point en question et hors collision, la fonction* $\tilde{h}_\gamma$ *est analytique, dans la famille de variables algébriquement indépendantes*

$$S_{ck}, \bar{S}_{ck}, L_{ck}, \bar{L}_{ck}, \quad k = 1, 2.$$

Proposition 5. *Hors collision et au voisinage du point circulaire non incliné, la fonction* $\tilde{h}_\gamma$ *est analytique, dans la famille de variables algébriquement indépendantes de Souriau*

$$\xi_{ck}, \bar{\xi}_{ck}, \eta_{ck}, \bar{\eta}_{ck}, \quad k = 1, 2.$$

Démonstration.

La proposition découle de la remarque précédente et du changement de variables analytique (linéaire) suivant

$$S_{ck} = \frac{1}{2}(\xi_{ck} + \eta_{ck}), \tag{2.66}$$

$$L_{ck} = \frac{1}{2}(\xi_{ck} - \eta_{ck}).\odot \tag{2.67}$$

2.5.1 Méthode du développement

La fonction $\tilde{h}_\gamma$ étant analytique dans toutes ces familles, notons

$$W = \{x_{ck}, \bar{x}_{ck}, y_{ck}, \bar{y}_{ck} \quad k = 1, 2\}$$

l'une de ces familles, et posons

$$\rho_{ck} = \frac{r_{ck}}{a_k} - \mathrm{e}^{\hat{u}_k i} \quad k = 1, 2. \tag{2.68}$$

Les fonctions ρ_{ck}, $k = 1, 2$, sont périodiques par rapport aux $\hat{u}_1, \hat{u}_2$, analytiques dans les variables de la famille W, et elles s'annulent avec elles au point circulaire non incliné. Injectons ces formules dans l'expression de $\tilde{h}_\gamma$ et remplaçons $\hat{u}_2$ par $\hat{u}_1 + \lambda$ tel que

$$\lambda = \hat{u}_2 - \hat{u}_1. \tag{2.69}$$

La fonction h_γ devient

$$h_\gamma = a_2^{2\gamma}(\nu+\epsilon)^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{2.70}$$

avec

$$\begin{aligned} \nu &= 1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda, & (2.71)\\ \epsilon &= \|\frac{\vec{r}_2}{a_2}-\alpha\frac{\vec{r}_1}{a_1}\|^2-\nu. & (2.72)\end{aligned}$$

ϵ est une fonction analytique dans les variables de la famille W, et nulle au point en question. D'où

$$\tilde{h}_\gamma = \frac{a_2^\gamma}{(2\pi)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\gamma\\ k\end{array}\right)\int_0^{2\pi}\nu^{\gamma-k}(\int_0^{2\pi}\epsilon^k l_{u1}l_{u2}d\,\hat{u}_1)d\,\lambda. \tag{2.73}$$

Tronquons notre calcul à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en les variables de W. On aura

$$\tilde{h}_\gamma = \frac{a_2^\gamma}{(2\pi)^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}\gamma\\ k\end{array}\right)\int_0^{2\pi}\nu^{\gamma-n}(\int_0^{2\pi}\epsilon^k l_{u1}l_{u2}\nu^{n-k}d\,\hat{u}_1)d\,\lambda + O_n(W). \tag{2.74}$$

Développons $\epsilon^k l_{u1}l_{u2}\nu^{n-k}$ en série de Fourier par rapport aux variables $\hat{u}_1$ et λ. L'intégration par rapport à $\hat{u}$ revient à ne garder que les termes constants par rapport à cette variable, tandis que celle par rapport à λ fait apparaître des quantités de la forme

$$b_{n-\gamma}^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{m\lambda i}}{\nu^{n-\gamma}}d\,\lambda \quad m\in Z \tag{2.75}$$

Dans le cas newtonien, $\gamma=-\frac{1}{2}$, les $b_{n-\gamma}^{(m)}$ sont les coefficients de Laplace [7] d'ordre $(\frac{1}{2}+n)$. Ces coefficients ne sont pas indépendants. On peut passer d'un ordre à un autre inférieur en utilisant la formule

$$b_\theta^{(m)} = \frac{1}{(\theta-1)(1-\alpha^2)^2}((\theta+m-1)(1+\alpha^2)\,b_{\theta-1}^{(m)} - 2(2-\theta+m)\alpha\,b_{\theta-1}^{(m+1)}). \tag{2.76}$$

Entre les coefficients du même ordre on dispose des relations de récurrence suivantes,

$$\begin{aligned} b_\theta^{(m)} &= -\tfrac{1}{(\theta-m)\alpha}((m-1)(1+\alpha^2)\,b_\theta^{(m-1)} + (2-\theta-m)\alpha\,b_\theta^{(m-2)}), & (2.77)\\ b_\theta^{(-m)} &= b_\theta^{(m)}. & (2.78)\end{aligned}$$

Grâce à ces relations, on peut exprimer tous les coefficients du développement en fonction de deux coefficients de Laplace choisis arbitrairement. Donc, On peut mettre tous ces coefficients sous la forme

$$\frac{1}{a_2}(f(\alpha)b_\theta^{(0)} + g(\alpha)b_\theta^{(1)}), \tag{2.79}$$

Dans [10], J. Laskar et Ph. Robutel démontrent que, dans le cas newtonien ($\gamma = -\frac{1}{2}$), quand

$$\theta \geq \frac{n+1}{2},$$

les fonctions $f(\alpha), g(\alpha)$ sont des polynômes entiers en α. Ces polynômes sont les plus simples possibles quand

$$\theta = \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi, on termine l'exposé de la méthode utilisée pour effectuer nos développement. Cette méthode était déjà utilisée et perfectionnée dans [10]. Les calculs des coefficients de ce développement sont difficiles à faire à la main. On les a effectués à l'aide de TRIP, logiciel du calcul formel, adapté à ce genre de calcul, développé par J. Laskar et M. Gastineau. On trouve le code de notre programme dans l'annexe (A). La proposition suivante simplifie les calculs dans le dernier terme de la somme dans 2.74.

Proposition 6.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon^n d\,\hat{u}_1 = \frac{2^n n!}{(\frac{n}{2}!)^2}|g_{c2} - \alpha g_{c1}|^n \nu^{\frac{n}{2}} + O_{n+1}\ ;\ n \textit{ est paire.} \tag{2.80}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon^n d\,\hat{u}_1 = 0\ ;\ n \textit{ est impaire} \tag{2.81}$$

O_m est un polynôme en $s_{ck}, \bar{s}_{ck}, g_{ck}, \bar{g}_{ck}$, $k = 1, 2$, petit d'ordre (m) en ces variables (m est un entier positif).

Démonstration.

Les formules 2.33, 2.34 s'écrivent

$$\frac{r_{ck}}{a_k} = \mathrm{e}^{\hat{u}_k i} - 2g_{ck} + O_2, \tag{2.82}$$

$$\frac{r_{3k}}{a_k} = 0 + O_2, \quad k = 1, 2. \tag{2.83}$$

D'où la relation 2.72 devient

$$\epsilon = -2[(g_{c2} - \alpha g_{c1})(\mathrm{e}^{-\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{-\hat{u}_1 i} + (\bar{g}_{c2} - \alpha\bar{g}_{c1})(\mathrm{e}^{\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i}] + O_2.$$

Donc

$$\epsilon^n = (-2)^n[(g_{c2} - \alpha g_{c1})(\mathrm{e}^{-\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{-\hat{u}_1 i} + (\bar{g}_{c2} - \alpha\bar{g}_{c1})(\mathrm{e}^{\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i}]^n + O_{n+1}$$

La moyenne de ϵ par rapport à $\hat{u}_1$ vaut sa partie constante par rapport à cette variable. D'où découle notre énoncé. $\odot$

2.6 Symétries du problème

La partie quadratique du développement de $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$ est donnée dans le troisième chapitre, paragraphe §3.1 , et l'ordre 4 dans le quatrième chapitre, paragraphe §4.3 . On constate que ce développement a une forme particulière (coefficients réels, ...). L'étude des symétries aide à comprendre les propiétés de ce développent. Ces symétries fournissent des relations entre les coefficients du développement en question. Ces symétries ne sont pas propres au cas $\gamma = -\frac{1}{2}$. La fonction $\tilde{h}_\gamma$ est invariant sous l'action de ces symétries, quel que soit $\gamma \in \mathbb{R}$.
Le fait que la fonction $\tilde{h}_\gamma$ soit une intégrale d'une puissance de la distance $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ implique son invariance par les isométries $O(3)$. Elle est aussi invariante sous l'action de la symétrie galoisienne (exposée dans le premier chapitre §1.9), appliquée au premier ou au deuxième corps. Enfin, on peut profiter aussi du fait que la permutation des rôles des corps dans les calculs de notre développement laisse ce développement invariant. Dans la suite, On expose l'action de ces symétries dans la carte

$$\xi_{ck}, \bar{\xi}_{ck}, \eta_{ck}, \bar{\eta}_{ck} \quad k = 1, 2.$$

2.6.1 L'invariance par réflexion par rapport au plan Ox_1x_3

L'opérateur, dit de conjugaison

$$(\xi_{ck}, \bar{\xi}_{ck}, \eta_{ck}, \bar{\eta}_{ck}) \longmapsto (\bar{\xi}_{ck}, \xi_{ck}, \bar{\eta}_{ck}, \eta_{ck}), \quad k = 1, 2, \tag{2.84}$$

correspond, du point de vue géométrique à transformer les vecteurs de Souriau des deux corps en leur symétrique par rapport au plan Ox_1x_3.
Cette opération revient à transformer simultanément les deux ellipses par cette symétrie.
La fonction $\tilde{h}_\gamma$ étant invariante par isométrie, elle est invariante par cette symétrie. On en déduit que $\tilde{h}_\gamma$ est invariant par 2.84. Cela implique qu'un terme du développement de cette fonction et son conjugué ont le même coefficient. Ce résultat et le fait que la fonction $\tilde{h}_\gamma$ est réelle, impliquent que les coefficients de son développement sont réels.

2.6.2 L'invariance par rotation autour de Ox_3

Notons $\vec{V}_3$ le champ de vecteurs dont l'action fait tourner ensemble les vecteurs $\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2$ et $\vec{\eta}_2$ autour de l'axe Ox_3. La projection de ce vecteur sur le plan des coordonnées $\zeta_{ck}, \bar{\zeta}_{ck} \quad k = 1,2,3,4$ ($\vec{\zeta}_k$ est une notation générique qui présente les vecteurs $\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2$) est

$$V_{3k} = i \begin{pmatrix} \zeta_{ck} \\ -\bar{\zeta}_{ck} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,4. \tag{2.85}$$

L'invariance de h_γ par rotation autour de Ox_3 donne

$$\mathcal{L}_{\vec{V}_3} h_\gamma = 0. \tag{2.86}$$

$\mathcal{L}$ désigne la dérivée de Lie. D'où

$$\sum_{k=1}^{4} (\zeta_{ck} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \zeta_{ck}} - \bar{\zeta}_{ck} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \bar{\zeta}_{ck}}) = 0. \tag{2.87}$$

Cela veut dire que, dans un terme quelconque du développement de h_γ la somme des puissances des variables $\zeta_{ck} \quad k = 1,2,3,4$, est égale à celles des variables $\bar{\zeta}_{ck} \quad k = 1,2,3,4$. De surcroît, on en déduit que les termes de ce développement sont tous pairs. Ces relations sont connues sous le nom de "relations de d'Alembert".

2.6.3 L'invariance par rotation autour de Ox_1

Comme précédemment, notons $\vec{V}_1$ le vecteur qui correspond à cette rotation. Sa projection sur le plan des coordonnées $\zeta_{ck}, \bar{\zeta}_{ck} \quad k = 1,2,3,4$, est

$$V_{1k} = i \begin{pmatrix} -\zeta_{3k} \\ \zeta_{3k} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,4. \tag{2.88}$$

L'équation

$$\mathcal{L}_{V_1} h_\gamma = 0, \tag{2.89}$$

donne

$$\sum_{k=1}^{4} \sqrt{1 - \zeta_{ck}\bar{\zeta}_{ck}} (\frac{\partial h_\gamma}{\partial \zeta_{ck}} - \frac{\partial h_\gamma}{\partial \bar{\zeta}_{ck}}) = 0. \tag{2.90}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{4} \sqrt{1 - \zeta_{ck}\bar{\zeta}_{ck}} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \zeta_{ck}} = 0, \tag{2.91}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \sqrt{1 - \zeta_{ck}\bar{\zeta}_{ck}} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \bar{\zeta}_{ck}} = 0. \tag{2.92}$$

Ces deux relations ne sont pas indépendantes. En effet, 2.92 s'obtient à partir de 2.91 par conjugaisons. On ne peut pas donner des explications simples de ces relations. Pour en profiter, on peut développer le premier membre de 2.91 dans les variables de Souriau et identifier les coefficients de ce développement à zéro. Ce calcul, tronqué à l'ordre 3, donnera la relation 3.5 entre les coefficients de la partie quadratique et les relations 4.2, ..., 4.8, qui relient les coefficients de l'ordre 4 à ceux de la partie quadratique.

2.6.4 Symétrie galoisienne dans le problème séculaire

On a évoqué cette symétrie dans §1.9. L'opérateur ψ, décrit dans ce paragraphe laisse le mouvement képlerien invariant. Donc, la fonction $\tilde{h}_\gamma$ doit être invariante sous l'action de cet opérateur, appliqué au premier corps, noté ψ_1, ou au deuxième, noté ψ_2. Comme cette fonction ne dépend pas des anomalies, l'action de $\psi_k, \quad k = 1, 2$, se résume à permuter $\vec{\xi}_k$ et $\vec{\eta}_k$ et à remplacer α par $-\alpha$ (rappelons-nous que le facteur $\frac{1}{a_2}$ doit être lu comme $\frac{1}{|a_2|}$, voir 2.62).

$$\psi_1(a_2, \alpha, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2) = (a_2, -\alpha, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2), \tag{2.93}$$

$$\psi_2(a_2, \alpha, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2) = (a_2, -\alpha, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\xi}_2). \tag{2.94}$$

L'action de ψ_1 appliquée aux coefficients du développement de $\tilde{h}_\gamma$ est identique à celle de ψ_2 (L'image d'un coefficient sous l'une des deux actions s'obtient en remplaçant α par $-\alpha$.). On note ces deux opérateurs par ψ quand ils sont appliqués à ces coefficients,

$$\psi(a_2, \alpha) = \psi(a_2, -\alpha).$$

Les coefficients de Laplace vérifient

$$b_\gamma^m \circ \psi = (-1)^m b_\gamma^m, \tag{2.95}$$

m étant un entier. La composition de ψ_1 et ψ_2, notée ψ_3, est l'opérateur

$$\psi_3(a_2, \alpha, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2) = (a_2, \alpha, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\xi}_2). \tag{2.96}$$

Bien évidement, $\tilde{h}_\gamma$ est invariante sous l'action de ψ_3. Cet opérateur ne touche pas à a_2 ni à α, donc, les coefficients du développement sont aussi invariants sous l'action de ψ. Cette symétrie sera utilisé dans §3.1 et §4.1.

2.6.5 La permutation des indices des corps

Dans les calculs de $\tilde{h}_\gamma$ permutons les rôles des deux corps. Cela ne doit pas changer $\tilde{h}_\gamma$. Notons ϕ l'opérateur présentant cette symétrie. On a

$$\phi(a_2, \alpha, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_2) = (a_2\alpha, \frac{1}{\alpha}, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_2). \tag{2.97}$$

Cette symétrie sera appliquée dans §3.1 et §4.1. Pour faciliter l'application de cette symétrie sur les coefficients, remarquons que

$$b_\theta^m \circ \phi = \alpha^{2\theta} b_\theta^m. \tag{2.98}$$

Chapitre 3

Résonance d'Herman

Dans le cadre du système séculaire du premier ordre de masse du problème planétaire, Herman a signalé une résonance imprévisible, qui ne dépend pas des masses ni des demi-grand axes.
Dans ce chapitre, on étudie les propriétés de la partie quadratique de $\tilde{h}_\gamma$, dues aux différentes symétries. On démontre l'existence de la résonance d'Herman, pour $\gamma = -\frac{1}{2}$. On établit une propriété géométrique simple, qui implique cette résonance, dans un cas particulier. Dans le cas général, cette propriété donne des relations entre les coefficients du développement du hamiltonien séculaire à tous les ordres. La résonance n'est qu'une de ces relations. L'utilisation des variables de Souriau a permis de donner à la propriété une forme intrinsèque.

3.1 Propriétés de la partie quadratique du hamiltonien séculaire

Développons la fonction $\tilde{h}_\gamma$ $(\gamma \in \mathbb{R})$, définie dans §2.4.2, dans les variables de Souriau, notées comme dans §2.6.2 par ζ_{ck} $k = 1, 2, 3, 4$. Notons le coefficient d'un terme par la lettre c, en mettant la partie littérale du terme en indice. On a vu, dans §2.6, que les coefficients de ce développements sont réels et qu'ils vérifient les relations de D'Alembert (dans chaque terme la somme des puissance des variables ζ_{ck} $k = 1, 2, 3, 4$, est égale à la somme des puissances de leur conjugué). Soit Q_2 la partie quadratique de ce développement. On a

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} c_{\zeta_{cj}\bar{\zeta}_{ck}} \zeta_{cj} \bar{\zeta}_{ck} \tag{3.1}$$

Notons ζ_c la matrice unicolonne d'éléments : ζ_{ck}, $k = 1, 2, 3, 4$, $\bar{\zeta}_c$ celle d'éléments : $\bar{\zeta}_{ck}$, $k = 1, 2, 3, 4$, et c_2 la matrice 4×4 dont l'élément (j, k)

est le coefficient $c_{\zeta_{cj}\bar{\zeta}_{ck}}$. La dernière formule s'écrit

$$Q_2 =^t \bar{\zeta}_c c_2 \zeta_c \tag{3.2}$$

Grâce aux symétries, la matrice c_2 prend la forme

$$c_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_3\psi \\ A_2 & A_1 & A_3\psi & A_3 \\ A_3 & A_3\psi & A_1\phi & A_2\phi \\ A_3\psi & A_3 & A_2\phi & A_1\phi \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

ψ est l'opérateur galoisien défini dans §2.6.4. L'égalité

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} = c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} = A_1, \tag{3.4}$$

par exemple, est obtenue par le raisonnement suivant :
D'un côté, ψ_1 envoie le terme $c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}}\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}$ sur le terme $c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}}\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}$. D'où

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} = c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} \circ \psi.$$

De l'autre côté, ces deux termes sont invariants sous l'action de ψ_2. Donc

$$c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} \circ \psi = c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}}.$$

D'où découle l'égalité 3.4. On peut expliquer cette égalité à l'aide de ψ_3 aussi. En effet, ψ_3 envoie le terme en $\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}$ sur le terme en $\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}$. Donc, ces deux terme ont le même coefficient (On a vu dans §2.6.4 que ψ_3 laisse les coefficients invariants). La symétrie de cette matrice est une conséquence de l'invariance par réflexion par rapport au plan Ox_1x_3. En combinant toujours les symétries décrites dans §2.6, on déduit les relations suivantes :

$$A_1 \circ \psi = A_1, \qquad A_2 \circ \psi = A_2, \qquad A_3 \circ \phi = A_3.$$

De plus, la relation 2.91, tronquée à l'ordre 1, donne

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_3\psi = 0. \tag{3.5}$$

Cette relation est équivalente au fait que la somme des éléments dans chaque ligne et dans chaque colonne de c_2 est nulle.

Proposition 7. *Les coefficients de la partie quadratique Q_2 de $\tilde{h}_\gamma$ vérifient la relation*

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} = c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} = A_1 = \frac{\gamma(2\gamma+1)\alpha^2}{8\,a_2^{-2\gamma}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu^{\gamma-1} d\,\lambda. \tag{3.6}$$

Démonstration.

La démonstration revient à calculer le coefficient du terme en $\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}$, dans le développement du Taylor de $\tilde{h}_\gamma$, au voisinage du point circulaire non incliné. On a exposé la méthode de construction de ce développement dans §2.5.1. On donne les grandes lignes de ce calcul.

Etant intéressé uniquement par le terme en $\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}$, il nous suffit de calculer le développement pour

$$\eta_{c1} = \bar{\eta}_{c1} = \xi_{c2} = \bar{\xi}_{c2} = \eta_{c2} = \bar{\eta}_{c2} = 0.$$

D'après 1.73, 1.74, 2.66 et 2.67, on trouve

$$\begin{aligned}
s_{c1} &= \frac{1}{4}\xi_{c1} + \dots\,, &(3.7)\\
g_{c1} &= \frac{1}{4}\xi_{c1} + \dots\,, &(3.8)\\
s_{c2} &= 0\,, &(3.9)\\
g_{c2} &= 0\,. &(3.10)
\end{aligned}$$

Dans cette démonstration les points de suspension présentent les termes d'ordre supérieur à deux ou les termes en ξ_{c1}^2 ou en $\bar{\xi}_{c1}^2$. La connaissance des coefficients de ces termes n'est pas utile pour le calcul du coefficient du terme en $\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}$. Les formules 2.33, 2.34, 2.35 deviennent

$$\begin{aligned}
r_{c1} &= a_1[(1 - \frac{1}{8}\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1})\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i} - \frac{1}{2}\xi_{c1}] + \dots, &(3.11)\\
r_{31} &= -\frac{a_1}{4}(\bar{\xi}_{c1}\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i} + \xi_{c1}\mathrm{e}^{-\hat{u}_1 i}) + \dots, &(3.12)\\
l_{u1} &= 1 - \frac{1}{4}(\bar{\xi}_{c1}\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i} + \xi_{c1}\mathrm{e}^{-\hat{u}_1 i}) + \dots, &(3.13)\\
r_{c2} &= a_2\mathrm{e}^{\hat{u}_2 i}, &(3.14)\\
r_{32} &= 0, &(3.15)\\
l_{u2} &= 1. &(3.16)
\end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{h}_\gamma = \frac{a_2^{2\gamma}}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\nu + \epsilon)^{2\gamma} l_{u1} d\,\hat{u}_1\,d\,\lambda, \tag{3.17}$$

avec

$$\epsilon = \frac{\alpha}{8}(\alpha + \mathrm{e}^{\lambda i} + \mathrm{e}^{-\lambda i})\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1} + \frac{\alpha}{2}[(\mathrm{e}^{-\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{-\hat{u}_1 i}\,\xi_{c1} + (\mathrm{e}^{\lambda i} - \alpha)\mathrm{e}^{\hat{u}_1 i}\,\bar{\xi}_{c1}] + \dots\,. \tag{3.18}$$

Les quantité α et ν sont données, comme dans 2.63, 2.69 et 2.71, par

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}, \tag{3.19}$$
$$\lambda = \hat{u}_2 - \hat{u}_1, \tag{3.20}$$
$$\nu = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda. \tag{3.21}$$

La relation 3.18 donne

$$\epsilon^2 = \frac{\alpha^2}{2} \nu \xi_{c1} \bar{\xi}_{c1} \tag{3.22}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\gamma &= \frac{a_2^{2\gamma}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nu^\gamma + \gamma \nu^{\gamma-1} \epsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \nu^{\gamma-2} \epsilon^2 + ...) l_{u1} d\, \hat{u}_1\, d\, \lambda, \\ &= \frac{a_2^{2\gamma}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nu^\gamma + \gamma \nu^{\gamma-1} \frac{3\alpha^2}{8} \xi_{c1} \bar{\xi}_{c1} \\ &\qquad + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \nu^{\gamma-2} \frac{\alpha^2}{2} \nu \xi_{c1} \bar{\xi}_{c1}) d\, \hat{u}_1\, d\, \lambda + ... \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

D'où la formule

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} = \frac{\gamma(2\gamma+1)\alpha^2}{8 a_2^{-2\gamma}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu^{\gamma-1} d\, \lambda.$$

D'après 3.3, on a

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} = c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} = A_1 = \frac{\gamma(2\gamma+1)\alpha^2}{8 a_2^{-2\gamma}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu^{\gamma-1} d\, \lambda. \tag{3.24}$$

La démonstration est achevée. Le lecteur non intéressé par les symétries exposées plus haut, peut parvenir à cette égalité en calculant $c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}}$ aussi. Le calcul ressemble à celui de $c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}}$. $\odot$

La quantité A_1 s'annule quand $\gamma = 0$ ou $-\frac{1}{2}$. Le cas $\gamma = 0$ est trivial, car h_0 est constant. On s'intéresse au cas $\gamma = -\frac{1}{2}$. Dans le paragraphe suivant, on montre que cette annulation donne la résonance d'Herman.
La méthode exposée dans §2.5.1, pour $\gamma = -\frac{1}{2}$, donne

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{16 a_2} \{ -2\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)} (\xi_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \xi_{c2}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\xi}_{c2}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\eta_{c1}) \\ &+ [3\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(0)} - (2 - \alpha + 2\alpha^2) b_{\frac{3}{2}}^{(1)}] (\xi_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \eta_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\xi_{c2}) \\ &+ [-3\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + (2 + \alpha + 2\alpha^2) b_{\frac{3}{2}}^{(1)}] (\xi_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \eta_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}\xi_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\eta_{c2}) \}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 0, && (3.25)\\
A_2 &= -\frac{1}{8a_2}\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, && (3.26)\\
A_3 &= \frac{1}{16a_2}[3\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(0)} - (2-\alpha+2\alpha^2) b_{\frac{3}{2}}^{(1)}]. && (3.27)
\end{aligned}
$$

3.2 Nouvelle résonance de la dynamique linéaire du système séculaire

Linéarisons le système séculaire,

$$\dot{\vec{\chi}}_s = \sigma^{-1} d\, H_s, \tag{3.28}$$

au voisinage du point coplanaire non incliné. Dans les variables de Souriau, on aura

$$H_s = -G m_1 m_2^t \bar{\zeta} c_2 \zeta + O_4, \tag{3.29}$$

et

$$\sigma_s = \sigma_{s0} + O_2, \tag{3.30}$$

avec

$$\sigma_{s0} = -\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{4} \mathcal{M}_k d\,\zeta_{ck} \wedge d\,\bar{\zeta}_{ck}. \tag{3.31}$$

$\mathcal{M}_k$ est une fonction des masses et des demi-grands axes.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_k &= \frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\mu_1 a_1}, \text{ quand } k = 1, 2,\\
\mathcal{M}_k &= \frac{1}{2}\beta_2\sqrt{\mu_2 a_2}, \text{ quand } k = 3, 4.
\end{aligned}
$$

Ce n'est pas une forme symplectique standard. Le linéarisé devient

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta}_c &= 2\, i\, G m_1 m_2 \mathcal{M}^{-1} c_2 \zeta_c, && (3.32)\\
\dot{\bar{\zeta}}_c &= -2\, i\, G m_1 m_2 \mathcal{M}^{-1} c_2 \bar{\zeta}_c. && (3.33)
\end{aligned}
$$

avec $\mathcal{M}$ est une matrice diagonale d'élément diagonaux $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4)$. Ces deux équations ne sont pas indépendantes car la deuxième découle de la première par conjugaisons. Il suffit donc de traiter la première.
La matrice $\mathcal{M}^{-1} c_2$ n'est pas symétrique. Soit $\mathcal{N}$ une matrice diagonale d'éléments diagonaux positifs telle que

$$\mathcal{N}\mathcal{N} = \mathcal{M}^{-1}.$$

Effectuons le changement des variables

$$\zeta_c = \mathcal{N}\zeta_c^{(1)}. \tag{3.34}$$

Moyennant ce changement notre système devient

$$\dot{\zeta}_c^{(1)} = 2\,i\,Gm_1m_2\mathcal{N}c_2\mathcal{N}\zeta_c^{(1)}, \tag{3.35}$$

et sa matrice, $\mathcal{N}c_2\mathcal{N}$, devient symétrique et réelle, car les matrices $\mathcal{N}$ et c_2 le sont aussi.

Proposition 8. *Le linéarisé du système séculaire possède la résonance*

$$\sum_{k=1}^{4}\Lambda_k = 0, \tag{3.36}$$

les quantités $\Lambda_k,\ k = 1,2,3,4$ *sont les valeurs propres de la matrice*

$$2\,i\,Gm_1m_2\mathcal{N}c_2\mathcal{N}.$$

Démonstration.

La matrice $\mathcal{N}c_2\mathcal{N}$ étant réelle et symétrique, il existe une matrice réelle $\mathcal{U}$, telle que

$$^t\mathcal{U}\mathcal{U} = I, \tag{3.37}$$

I est l'identité, vérifiant $\mathcal{K} = {}^t\mathcal{U}\mathcal{N}c_2\mathcal{N}\mathcal{U}$ est une matrice diagonale. Faisons le changement des variables

$$\zeta_c^{(1)} = \mathcal{U}\zeta_c^{(2)}. \tag{3.38}$$

L'équation 3.35 devient

$$\dot{\zeta}_c^{(2)} = 2\,i\,Gm_1m_2\mathcal{K}\zeta_c^{(2)}. \tag{3.39}$$

Les éléments diagonaux de la matrice $2\,i\,Gm_1m_2\mathcal{K}$ sont les valeurs propre de la matrice $2\,i\,Gm_1m_2\mathcal{N}c_2\mathcal{N}$, désignées dans l'énoncé par $\Lambda_k,\ k = 1,2,3,4$. Ce sont les fréquences du système.

On a

$$\sum_{k=1}^{4}\Lambda_k = 2\,i\,Gm_1m_2tr(\mathcal{N}c_2\mathcal{N}). \tag{3.40}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{4}\Lambda_k = 4\,i\,Gm_1m_2(\frac{A_1}{\beta_1\sqrt{\mu_1a_1}} + \frac{A_1\phi}{\beta_2\sqrt{\mu_2a_2}}). \tag{3.41}$$

Dans le cas newtonien, $\gamma = -\frac{1}{2}$, on a $A_1 = A_1\phi = 0$. D'où notre énoncé. $\odot$
C'est M. Herman qui a signalé cette résonance, il y a quelques années. On l'appelle "Résonance d'Herman". Cette résonance empêche la construction de la forme normale, mais apparemment, elle n'a pas d'incidence sur la dynamique. En effet, dans [14], on fait une réduction partielle, qui consiste à fixer la direction du moment cinétique total. La forme normale du système réduit sera construite sans problème. Le vecteur moment cinétique total étant intégrale première, la dynamique n'est pas touchée par cette réduction.
L'origine géométrique de cette résonance n'est pas évident. Dans le paragraphe suivant, on donne une propriété géométrique simple qui généralise cette résonance.

3.3 Propriété géométrique

Lemme. *Soit $\mathcal{P}$ une ellipse orientée de foyer O et de demi-grand axe a, qui vit dans notre espace euclidien de dimension trois. Soit aussi $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ ses deux vecteurs unitaires de Souriau, $\Delta_{\vec{\xi},\vec{\eta}}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le produit de deux sphères unités associées aux $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$, p un point de $\mathcal{P}$ et q un point quelconque de l'espace. Notons*

$$D_\gamma(q, a, \vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{pq}\|^{2\gamma} d\,\hat{l}. \tag{3.42}$$

Alors, on a, pour tout $\vec{\xi}$

$$\Delta_{\vec{\xi},\vec{\eta}} D_\gamma(q, a, \vec{\xi}, \vec{\eta})|_{\vec{\eta}=\vec{\xi}} = \gamma(2\gamma+1)a^2 D_{\gamma-1}(q, a, \vec{\xi}, \vec{\xi}). \tag{3.43}$$

Quand $\gamma - 1$ n'est pas positif, le point q ne doit pas appartenir au cercle perpendiculaire à $\vec{\xi}$, de centre O et de rayon a, pour que les deux membres de cette égalité restent définis.

Enoncé équivalent. *Soit (x, y) l'un quelconque des systèmes des variables $(\frac{\xi_c}{\sqrt{2}}, \frac{\eta_c}{\sqrt{2}})$, (S_c, L_c) ou $(-\sqrt{\frac{2}{I_l}}\, i\, y_p, \sqrt{\frac{2}{I_l}}\, x_p)$ (x_p et y_p sont les variables de Poincaré, exposées dans §1.7). Alors, on a*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \bar{x}} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial \bar{y}}\right) D_\gamma(q, a, x, y)|_{y=x=0} = \frac{1}{2}\gamma(2\gamma+1)a^2 D_{\gamma-1}(q, a, 0, 0). \tag{3.44}$$

Démonstration.

La relation 3.44 est la relation 3.43, exprimée dans les variables (x, y), au point

$$x = y = 0. \tag{3.45}$$

L'équivalence des deux énoncés est due à l'invariance de 3.43 par rotation d'ensemble de $\mathcal{P}$ et q.
Pour des raisons techniques, on préfère utiliser les variables (s_c, g_c) qui sont $(\frac{1}{2}S_c, \frac{1}{2}L_c)$ au premier ordre, et la longitude excentrique $\hat{u}$ à la place de $\hat{l}$.

$$D_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{pq}\|^{2\gamma} l_u \, d\,\hat{u}. \tag{3.46}$$

On doit calculer les coefficients des deux termes $s_c\bar{s}_c, g_c\bar{g}_c$ du développement de Taylor de la fonction D_γ dans les variables $s_c, \bar{s}_c, g_c, \bar{g}_c$. Dans les calculs suivants, on expose ce développement, en ne montrant que les termes nécessaires pour le résultat final. Les autres termes seront désignés par des points de suspension. Les formules 1.75,1.76 et 1.77 donnent

$$\begin{aligned} p_c &= a[(1 - s_c\bar{s}_c - g_c\bar{g}_c)\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} - 2g_c] + \ldots & (3.47)\\ p_3 &= -a(\bar{s}_c\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + s_c\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i}) + \ldots & (3.48)\\ l_u &= 1 - \bar{g}_c\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} - g_c\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i} + \ldots\,. & (3.49) \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} J &= a\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} - q_c & (3.50)\\ K &= \|\overrightarrow{pq}\|^2|_{s_c=g_c=0} = J\bar{J} + q_3^2. & (3.51) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{pq}\|^2 &= (p_c - q_c)(\bar{p}_c - \bar{q}_c) + (p_3 - q_3)^2 \\ &= K + \epsilon, & (3.52) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon = -a[&(s_c\bar{s}_c + g_c\bar{g}_c)(\bar{J}\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + J\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i}) + 2(g_c\bar{J} + \bar{g}_cJ) \\ &-2a(s_c\bar{s}_c + 2g_c\bar{g}_c) - 2q_3(\bar{s}_c\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + s_c\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i})] + \ldots\,. & (3.53) \end{aligned}$$

D'où

$$\epsilon^2 = 8a^2(q_3^2 s_c\bar{s}_c + J\bar{J}g_c\bar{g}_c) + \ldots\,, \tag{3.54}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{pq}\|^{2\gamma} l_u &= (K^\gamma + \gamma K^{\gamma-1}\epsilon + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)K^{\gamma-2}\epsilon^2)l_u + \ldots\,, \\ &= \gamma K^{\gamma-1}a[-(\bar{J}\mathrm{e}^{\hat{u}\,i} + J\mathrm{e}^{-\hat{u}\,i})(s_c\bar{s}_c - g_c\bar{g}_c) \\ &\quad +2a(s_c\bar{s}_c + 2g_c\bar{g}_c)] \\ &\quad +\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)K^{\gamma-2}8a^2(q_3^2 s_c\bar{s}_c + J\bar{J}g_c\bar{g}_c) + \ldots\,. & (3.55) \end{aligned}$$

En faisant la somme de coefficients des termes en $s_c\bar{s}_c$ et $g_c\bar{g}_c$, on trouve

$$2a^2\gamma(2\gamma+1)K^{\gamma-1}.$$

Cela donne

$$(\frac{\partial^2}{\partial s_c\partial\bar{s}_c}+\frac{\partial^2}{\partial g_c\partial\bar{g}_c})D_\gamma|_{s_c=g_c=0}=4\gamma(2\gamma+1)a^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K\,d\,\hat{u}. \tag{3.56}$$

D'où découle notre lemme. $\odot$

Remarque 5. *On peut écrire ce lemme sous une forme plus générale. On a*

$$(\frac{\partial^2}{\partial s_c\partial\bar{s}_c}+\frac{\partial^2}{\partial g_c\partial\bar{g}_c})\|\overrightarrow{pq}\|^{2\gamma}l_u|_{s_c=g_c=0}=4\gamma(2\gamma+1)a^2(\|\overrightarrow{pq}\|^{2\gamma}l_u)|_{s_c=g_c=0}. \tag{3.57}$$

Les coordonnées de p doivent être exprimées à l'aide de la longitude excentrique.

Soulignons enfin le fait que dans le cas newtonien, on a

$$\Delta_{\vec{\xi},\vec{\eta}}D_{-\frac{1}{2}}=0 \tag{3.58}$$

La relation 3.43 est une relation géométrique indépendante des systèmes de coordonnées. La composante horizontale et la composante verticale de $\overrightarrow{pq}$ vérifient des relations ressemblables, ayant leur sens uniquement dans un système de coordonnées. On donne ces relations dans la proposition suivante. On ne fait pas d'usage de cette proposition.

Proposition 9. *Soit*

$$\mathcal{Z}_\gamma = [(q_c-p_c)(\bar{q}_c-\bar{p}_c)]^\gamma l_u, \tag{3.59}$$

$$\mathcal{V}_\gamma = (q_3-p_3)^{2\gamma}l_u. \tag{3.60}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^2}{\partial\xi_{c1}\partial\bar{\xi}_{c1}}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_{c1}\partial\bar{\eta}_{c1}})\mathcal{Z}_\gamma\,|_{\eta_{c1}=\xi_{c1}=0} &= \frac{1}{2}a^2\gamma^2\mathcal{Z}_{\gamma-1}\,|_{\eta_{c1}=\xi_{c1}=0},\\ (\frac{\partial^2}{\partial\xi_{c1}\partial\bar{\xi}_{c1}}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_{c1}\partial\bar{\eta}_{c1}})\mathcal{V}_\gamma\,|_{\eta_{c1}=\xi_{c1}=0} &= \frac{1}{4}a^2\gamma(2\gamma-1)\mathcal{V}_{\gamma-1}\,|_{\eta_{c1}=\xi_{c1}=0}.\end{aligned}$$

3.3.1 Application au problème séculaire

Soit $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ les deux ellipses associées aux deux planètes au sens du deuxième chapitre, p_1 un point de $\mathcal{P}_1$ et p_2 un point de $\mathcal{P}_2$.

Proposition 10. *Le lemme précédent implique la résonance d'Herman.*
Démonstration.
Appliquons notre lemme sur le point p_2 et l'ellipse $\mathcal{P}_1$. On a

$$\Delta_{\vec{\xi}_1,\vec{\eta}_1} D_{-\frac{1}{2}}(p_2, a_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1)|_{\vec{\xi}_1=\vec{\eta}_1=0} = 0. \tag{3.61}$$

Moyennisons cette relation le long de l'ellipse $\mathcal{P}_2$. On aura

$$\Delta_{\vec{\xi}_1,\vec{\eta}_1}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{-\frac{1}{2}}(p_2, a_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1) d\, l_2)|_{\vec{\xi}_1=\vec{\eta}_1=0} = 0. \tag{3.62}$$

D'où

$$\Delta_{\vec{\xi}_1,\vec{\eta}_1} \tilde{h}_{-\frac{1}{2}}|_{\vec{\xi}_1=\vec{\eta}_1=0} = 0. \tag{3.63}$$

Examinons le cas où $\mathcal{P}_2$ est circulaire plan ; c'est-à-dire,

$$\xi_{c2} = \eta_{c2} = 0. \tag{3.64}$$

La relation 3.63 donne tout simplement

$$c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}} + c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}} = 0. \tag{3.65}$$

De la même manière, on démontre que

$$c_{\xi_{c2}\bar{\xi}_{c2}} + c_{\eta_{c2}\bar{\eta}_{c2}} = 0. \tag{3.66}$$

On a vu plus haut que ces relations impliquent la résonance d'Herman. ⊙

Remarque 6. *Dans cette démonstration, on n'a pas utilisé toute la puissance du notre lemme. Le cas où le point p_2 est dans le plan de référence était suffisant.*
Remarque 7. *Dans le cas général, le lemme donne*

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial^2}{\partial\xi_{c1}\partial\bar{\xi}_{c1}} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_{c1}\partial\bar{\eta}_{c1}})H_s|_{\xi_{c1}=\eta_{c1}=0} &= 0, && (3.67)\\
(\frac{\partial^2}{\partial\xi_{c2}\partial\bar{\xi}_{c2}} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_{c2}\partial\bar{\eta}_{c2}})H_s|_{\xi_{c2}=\eta_{c2}=0} &= 0. && (3.68)
\end{aligned}$$

En terme de coefficients, cela donne

$$\begin{aligned}
c_{\xi_{c1}\bar{\xi}_{c1}\xi_{c2}^{n_1}\bar{\xi}_{c2}^{n_2}\eta_{c2}^{n_3}\bar{\eta}_{c2}^{n_4}} + c_{\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}\xi_{c2}^{n_1}\bar{\xi}_{c2}^{n_2}\eta_{c2}^{n_3}\bar{\eta}_{c2}^{n_4}} &= 0, && (3.69)\\
c_{\xi_{c2}\bar{\xi}_{c2}\xi_{c1}^{n_1}\bar{\xi}_{c1}^{n_2}\eta_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c1}^{n_4}} + c_{\eta_{c2}\bar{\eta}_{c2}\xi_{c1}^{n_1}\bar{\xi}_{c1}^{n_2}\eta_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c1}^{n_4}} &= 0, && (3.70)
\end{aligned}$$

où n_1, n_2, n_3, n_4 sont des entiers non négatifs, vérifiant

$$n_1 + n_3 = n_2 + n_4. \tag{3.71}$$

Ces formules ne sont pas toutes indépendantes. On en a qui s'obtiennent des autres à l'aide des symétries.
On n'a pas trouvé des explications dynamiques de ces relations.

Remarque 8. *La résonance d'Herman et la proposition précédente restent valables dans le cas de n planètes. La démonstration de cette proposition se généralise facilement.*

Chapitre 4

Conjecture sur la particularité du potentiel newtonien

Dans le chapitre précédent, on a étudié les propriétés de la partie quadratique de $\tilde{h}_\gamma$. Dans ce chapitre, on complète cette étude, en mettant l'accent sur l'ordre 4. L'action des groupes de symétries évoqués dans le deuxième chapitre sera traduite en termes de relations entre les coefficients du développement de $\tilde{h}_\gamma$. On constate, sur le développement du hamiltonien séculaire, l'existence de deux relations supplémentaires. On établit une proposition sur $\tilde{h}_\gamma$ qui explique l'une de ces relations. L'autre relation n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs de γ. C'est une relation propre au cas newtonien. Pour l'expliquer, on construit une conjecture. On vérifie la validité de cette conjecture jusqu'à l'ordre dix. On n'arrive pas à démontrer cette conjecture.

4.1 L'action des groupes de symétries à l'ordre 4

Notons $\mathcal{Z}$ la matrice unicolonne d'éléments respectifs

$$\xi_{c1}^2, \xi_{c1}\eta_{c1}, \eta_{c1}^2, \xi_{c1}\xi_{c2}, \xi_{c1}\eta_{c2}, \xi_{c2}\eta_{c1}, \eta_{c1}\eta_{c2}, \xi_{c2}^2, \xi_{c2}\eta_{c2}, \eta_{c2}^2,$$

$\bar{\mathcal{Z}}$ la matrice unicolonne d'éléments conjugués des précédents. L'ordre 4 du développement de $\tilde{h}_\gamma$ sera

$$Q_4 =^t \bar{\mathcal{Z}} c_4 \mathcal{Z}. \tag{4.1}$$

La matrice c_4 est réelle et symétrique. Cherchons les relations entre ses éléments. En utilisant les opérateurs ϕ et ψ, définis dans §2.6.4, §2.6.5, elle prend la forme suivante :

$$c_4 = \left(\begin{array}{ccc|cccc|ccc}
B_1 & B_2 & B_3 & B_5 & B_5\psi & B_6 & B_6\psi & B_8 & B_9 & B_8\psi \\
B_2 & B_4 & B_2 & B_7 & B_7\psi & B_7\psi & B_7 & B_9\phi & B_{10} & B_9\phi \\
B_3 & B_2 & B_1 & B_6\psi & B_6 & B_5\psi & B_5 & B_8\psi & B_9 & B_8 \\
\hline
B_5 & B_7 & B_6\psi & B_{11} & B_{12} & B_{12}\phi & B_{13} & B_5\phi & B_7\phi & B_6\phi\psi \\
B_5\psi & B_7\psi & B_6 & B_{12} & B_{11}\psi & B_{13}\psi & B_{12}\phi & B_6\phi & B_7\phi\psi & B_5\phi\psi \\
B_6 & B_7\psi & B_5\psi & B_{12}\phi & B_{13}\psi & B_{11}\psi & B_{12} & B_5\phi\psi & B_7\phi\psi & B_6\phi \\
B_6\psi & B_7 & B_5 & B_{13} & B_{12}\phi & B_{12} & B_{11} & B_6\phi\psi & B_7\phi & B_5\phi \\
\hline
B_8 & B_9\phi & B_8\psi & B_5\phi & B_6\phi & B_5\phi\psi & B_6\phi\psi & B_1\phi & B_2\phi & B_3\phi \\
B_9 & B_{10} & B_9 & B_7\phi & B_7\phi\psi & B_7\phi\psi & B_7\phi & B_2\phi & B_4\phi & B_2\phi \\
B_8\psi & B_9\phi & B_8 & B_6\phi\psi & B_5\phi\psi & B_6\phi & B_5\phi & B_3\phi & B_2\phi & B_1\phi
\end{array}\right).$$

Les coefficients

$$B_8, B_{10}, B_{11}, B_{13},$$

sont invariants par ϕ et

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_9, B_{10}, B_{12}$$

par ψ. L'explication de ces propriétés est assez simple. Prenons, par exemple, le terme $B_5\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2}$. Son coefficient est l'élément $(4,1)$ de c_2. L'opérateur ψ_1 envoie ce terme sur le terme en $\eta_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2}$. Donc le coefficient de ce terme doit être $B_5\psi$. C'est l'élément $(6,3)$ de c_4. Sous l'action de ψ_2, ce dernier terme sera envoyé sur le terme en $\eta_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2}$. Le coefficient de ce terme doit être $B_5\psi\psi = B_5$. C'est l'élément $(7,3)$ de c_4 et ainsi de suite. Pour profiter aussi de l'invariance par rotation autour de l'axe Ox_1, il suffit de développer la formule 2.91. Cette formule tronquée à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned}
2B_1 + B_2 + B_5 + B_5\psi &= \frac{1}{2}A_1, && (4.2)\\
2B_2 + B_4 + B_7 + B_7\psi &= \frac{1}{2}A_2, && (4.3)\\
2B_5 + B_7 + B_{11} + B_{12} &= \frac{1}{2}A_3, && (4.4)\\
2B_9 + B_{10} + B_7\phi + B_7\phi\psi &= 0, && (4.5)\\
B_2 + 2B_3 + B_6 + B_6\psi &= 0, && (4.6)\\
B_5 + B_6 + 2B_8 + B_9 &= 0, && (4.7)\\
B_{12} + B_{13} + B_7\phi + 2B_6\phi\psi &= 0. && (4.8)
\end{aligned}$$

Ce sont sept relations indépendantes, entre 13 coefficients. Cela veut dire qu'on peut calculer ces coefficients en connaissant six d'entre eux. Le choix de ces six n'est pas arbitraire, à cause des opérateurs ψ et ϕ. Le nombre de coefficient indépendants peut être réduit d'avantage, grâce aux autres relations entre les coefficients établies dans les paragraphes suivants.

4.2 Nouvelle symétrie de révolution

La proposition suivante donne davantage de relations entre les coefficients de $\tilde{h}_\gamma$. On peut considérer ces relations comme des compléments de celles de D'Alembert.

Proposition 11. *Soit $\vec{k}$ un vecteur non nul, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux ellipses orientées de foyer commun O et de demi-grands axes respectifs fixés a_1, a_2, $\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1$ les vecteurs de Souriau de $\mathcal{P}_1$, $\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2$ ceux de $\mathcal{P}_2$ et $\tilde{h}_\gamma$ la fonction définie comme précédemment. Alors la moyenne de $\tilde{h}_\gamma$ quand l'ellipse $\mathcal{P}_1$ fait un tour uniforme autour de $\vec{k}$ est invariante par réflexion de $\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2$ par rapport à n'importe quel plan passant par O et comprenant $\vec{k}$.*

Enoncé équivalent. *Dans le développement de $\tilde{h}_\gamma$, au voisinage du point coplanaire non incliné, on a*

$$c_{\xi_{c1}^{n_1}\eta_{c1}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c1}^{n_4}\xi_{c2}^{n_5}\eta_{c2}^{n_6}\bar{\xi}_{c2}^{n_7}\bar{\eta}_{c2}^{n_8}} = c_{\xi_{c1}^{n_1}\eta_{c1}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c1}^{n_4}\xi_{c2}^{n_7}\eta_{c2}^{n_8}\bar{\xi}_{c2}^{n_5}\bar{\eta}_{c2}^{n_6}}, \tag{4.9}$$

tels que n_j, $\quad j = 1, 2, ..., 8$, sont huit entiers non négatifs vérifiant

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4, \tag{4.10}$$

$$n_5 + n_6 = n_7 + n_8. \tag{4.11}$$

Démonstration.

Compte tenu de l'invariance de $\tilde{h}_\gamma$ par rotation, la proposition est équivalente à son cas particulier où le vecteur $\vec{k}$ est vertical (confondu à l'axe Ox_3). Démontrons la proposition dans ce cas particulier. Mettons les deux nombres complexes ξ_{c1}, η_{c1} sous la forme polaire suivante

$$\xi_{c1} = \rho_1 \mathrm{e}^{\theta_1 i} \tag{4.12}$$

$$\eta_{c1} = \rho_2 \mathrm{e}^{(\theta_1+\theta) i} \tag{4.13}$$

Posons la fontion

$$M_{\gamma,a_1,a_2,\rho_1,\rho_2,\theta}(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{h}_\gamma \, d\,\theta_1 \tag{4.14}$$

On a

$$M_{\gamma,a_1,a_2,\rho_1,\rho_2,\theta}(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\int_0^{2\pi} \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^\gamma d\,\theta_1), d\,\hat{l}_1 d\,\hat{l}_2. \tag{4.15}$$

Quand on varie θ_1 de 0 à 2π, les deux vecteurs de Souriau $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\eta}_1$ font ensemble un tour complet autour de Ox_3. Par conséquent l'ellipse $\mathcal{P}_1$ fait aussi un tour complet autour de Ox_3. D'où le vecteur $\vec{r}_1$, fait aussi le même tour et dessine un cercle d'axe Ox_3. Donc l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^\gamma d\,\theta_1$$

est invariante par réflexion de $\vec{r}_2$ par rapport à n'importe quel plan passant par Ox_3. D'où découle la proposition. Pour démontrer l'énoncé équivalent, constatons que la moyennisation de $\tilde{h}_\gamma$ par rapport à θ_1 élimine tous les termes de son développement, qui ne vérifient pas 4.10. Grâce aux relations de D'Alembert les termes qui vérifient 4.10, vérifient 4.11 aussi. La fonction $M_{\gamma,a_1,a_2,\rho_1,\rho_2,\theta}(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2)$ étant invariante par rotation autour de Ox_3, son invariance par réflexion par rapport à n'importe quel plan passant par Ox_3, est équivalente à son invariance par réflexion (des vecteurs $\vec{\xi}_2$ et $\vec{\eta}_2$) par rapport au plan x_1Ox_3. Cette réflexion envoie les variables concernant la deuxième ellipse à leur conjugué. D'où la formule 4.9 $\odot$

Evidemment, on peut écrire la même proposition en permutant les rôles des indices désignant les ellipses, mais cela donne une proposition équivalente.

Grâce à cette proposition, on a la relation suivante entre les coefficients de l'ordre 4

$$B_{13}\psi = B_{13}. \tag{4.16}$$

Les autres relations entre ces coefficients (à l'ordre 4), données par cette proposition ne sont pas indépendantes des relations données plus haut et de la dernière.

4.3 Particularité du cas newtonien

Dans le cas newtonien, $\gamma = -\frac{1}{2}$, la propriété géométrique du chapitre précédent donne d'autres relations. En effet, à l'ordre 4 les formules 3.69, 3.70 donnent huit relations. L'opérateur ϕ envoie celles qui viennent de 3.69 sur celles qui viennent de 3.70. Cela réduit le nombre de ces relations à quatre. La symétrie de c_4 enlève une relation et ψ enlève une autre. En fin de compte, la propriété géométrique donne les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} B_{11} + B_{11}\psi &= 0, \\ B_{12} + B_{12} &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$B_{11}\psi = -B_{11}, \tag{4.17}$$
$$B_{12} = 0. \tag{4.18}$$

Les calculs exposés dans le deuxième chapitre, $\gamma = -\frac{1}{2}$, donnent

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \frac{3}{256a_2}\{\mathcal{C}_1(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}^2 + \eta_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}^2) + \mathcal{C}_2(\xi_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}^2 + \eta_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}^2) \\
&+ \mathcal{C}_3^+(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c2}^2 + \eta_{c1}\bar{\eta}_{c2}^2 + \bar{\eta}_{c1}\eta_{c2}^2 + \bar{\xi}_{c1}^2\xi_{c2}^2) \\
&+ \mathcal{C}_3^-(\xi_{c1}^2\bar{\eta}_{c2}^2 + \eta_{c1}^2\bar{\xi}_{c2}^2 + \bar{\eta}_{c1}^2\xi_{c2}^2 + \bar{\xi}_{c1}^2\eta_{c2}^2) \\
&+ 3\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}[\alpha(\xi_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}^2 + \bar{\xi}_{c1}^2\eta_{c1}^2) + (\xi_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}^2 + \bar{\xi}_{c2}^2\eta_{c2}^2)] \\
&+ \mathcal{C}_4^+(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \eta_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}^2\eta_{c1}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}^2\xi_{c1}\xi_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_4^-(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \eta_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}^2\eta_{c1}\xi_{c2} + \bar{\xi}_{c1}^2\xi_{c1}\eta_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_5(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \eta_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \bar{\eta}_{c1}^2\xi_{c1}\eta_{c1} + \bar{\xi}_{c1}^2\xi_{c1}\eta_{c1}) \\
&+ \alpha\mathcal{C}_6^+(\xi_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \eta_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}^2\xi_{c1}\xi_{c2} + \bar{\xi}_{c1}^2\eta_{c1}\eta_{c2}) \\
&- \alpha\mathcal{C}_6^-(\xi_{c1}^2\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \eta_{c1}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}^2\xi_{c1}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}^2\eta_{c1}\xi_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_7(\xi_{c1}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2} + \eta_{c1}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\eta}_{c1}^2\xi_{c2}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}^2\xi_{c2}\eta_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_8(\xi_{c2}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \eta_{c2}^2\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \bar{\eta}_{c2}^2\xi_{c1}\eta_{c1} + \bar{\xi}_{c2}^2\xi_{c1}\eta_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_6^-(\xi_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \eta_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \bar{\eta}_{c2}^2\xi_{c2}\eta_{c1} + \bar{\xi}_{c2}^2\eta_{c2}\xi_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_6^+(\xi_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \eta_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \bar{\eta}_{c2}^2\xi_{c2}\xi_{c1} + \bar{\xi}_{c2}^2\eta_{c2}\eta_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_9(\xi_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2} + \eta_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\eta}_{c2}^2\xi_{c2}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c2}^2\xi_{c2}\eta_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_{10}^-(\xi_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \eta_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \bar{\eta}_{c2}^2\eta_{c2}\xi_{c1} + \bar{\xi}_{c2}^2\xi_{c2}\eta_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_{10}^+(\xi_{c2}^2\bar{\xi}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \eta_{c2}^2\bar{\eta}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \bar{\eta}_{c2}^2\eta_{c2}\eta_{c1} + \bar{\xi}_{c2}^2\xi_{c2}\xi_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_{11}\xi_{c1}\eta_{c1}\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1} + \mathcal{C}_{12}\xi_{c2}\eta_{c2}\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2} \\
&+ \mathcal{C}_{13}^+(\xi_{c1}\eta_{c1}\bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \xi_{c1}\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1}\eta_{c1}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1}\xi_{c1}\xi_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_{13}^-(\xi_{c1}\eta_{c1}\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \xi_{c1}\eta_{c1}\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1}\eta_{c1}\xi_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c1}\xi_{c1}\eta_{c2}) \\
&+ \mathcal{C}_{14}^-(\xi_{c2}\eta_{c2}\bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \xi_{c2}\eta_{c2}\bar{\eta}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2}\eta_{c2}\xi_{c1} + \bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2}\xi_{c2}\eta_{c1}) \\
&+ \mathcal{C}_{14}^+(\xi_{c2}\eta_{c2}\bar{\xi}_{c2}\bar{\xi}_{c1} + \xi_{c2}\eta_{c2}\bar{\eta}_{c2}\bar{\eta}_{c1} + \bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2}\eta_{c2}\eta_{c1} + \bar{\xi}_{c2}\bar{\eta}_{c2}\xi_{c2}\xi_{c1}) \\
&- 12\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)}(\xi_{c1}\xi_{c2}\bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \eta_{c1}\eta_{c2}\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2} - \xi_{c1}\eta_{c2}\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2} - \eta_{c1}\xi_{c2}\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2}) \\
&+ 12\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)}(\xi_{c1}\xi_{c2}\bar{\eta}_{c1}\bar{\eta}_{c2} + \xi_{c1}\eta_{c2}\bar{\eta}_{c1}\bar{\xi}_{c2} + \xi_{c1}\eta_{c2}\bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2} \\
&+ \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2}\xi_{c1}\eta_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\eta}_{c2}\eta_{c1}\xi_{c2} + \bar{\xi}_{c1}\bar{\xi}_{c2}\eta_{c1}\eta_{c2})\},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= 2\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha(4+\alpha^2)b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, \\
\mathcal{C}_2 &= 2\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha(1+4\alpha^2)b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, \\
\mathcal{C}_3^{\mp} &= \pm 2\alpha(5 \pm 4\alpha + 5\alpha^2)b_{\frac{5}{2}}^{(0)} \mp (2 \pm \alpha + 2\alpha^2)^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, \\
\mathcal{C}_4^{\mp} &= \mp\alpha(20 \pm 7\alpha + 15\alpha^2)b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + (\pm 8 + 6\alpha \pm 18\alpha^2 + 4\alpha^3 \pm 6\alpha^4)b_{\frac{5}{2}}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_5 &= 10\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 2\alpha(2+3\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)},\\
\mathcal{C}_6^{\mp} &= -5\alpha(\mp 1+\alpha) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + 2(\mp 1+\alpha)(1\pm\alpha+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)},\\
\mathcal{C}_7 &= -4\alpha^2(b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}),\\
\mathcal{C}_8 &= -4\alpha(\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - b_{\frac{5}{2}}^{(1)}),\\
\mathcal{C}_9 &= 10\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 2\alpha(3+2\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)},\\
\mathcal{C}_{10}^{\mp} &= \mp\alpha(15\pm 7\alpha+20\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + (\pm 6+4\alpha\pm 18\alpha^2+6\alpha^3\pm 8\alpha^4) b_{\frac{5}{2}}^{(1)},\\
\mathcal{C}_{11} &= 4\alpha^2(4 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}),\\
\mathcal{C}_{12} &= 4\alpha(\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - b_{\frac{5}{2}}^{(1)}),\\
\mathcal{C}_{13}^{\mp} &= -2\alpha^2(1\pm 5\alpha) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 4\alpha(1\mp\alpha)(1\pm\alpha+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\\
\mathcal{C}_{14}^{\mp} &= -2\alpha(\pm 5+\alpha) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 4(\mp 1+\alpha)(1\pm\alpha+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$B_1 = -\frac{3\alpha}{256a_2}[(\alpha^2+4) b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - 2\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.19}$$

$$B_2 = -\frac{3\alpha}{128a_2}[(3\alpha^2+2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - 5\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.20}$$

$$B_3 = \frac{9\alpha^3}{256a_2} b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, \tag{4.21}$$

$$B_4 = -\frac{3\alpha^2}{64a_2}(\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - 4 b_{\frac{5}{2}}^{(0)}), \tag{4.22}$$

$$B_5 = -\frac{3}{256a_2}[2(3\alpha^4-2\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha+4) b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - (15\alpha^2-7\alpha+20)\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.23}$$

$$B_6 = -\frac{3\alpha}{256a_2}[2(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1) b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - 5\alpha(\alpha-1) b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.24}$$

$$B_7 = -\frac{3\alpha}{128a_2}[2(\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1) b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - \alpha(5\alpha-1) b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.25}$$

$$B_8 = \frac{3}{256a_2}[(2\alpha^2-\alpha+2)^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - 2\alpha(5\alpha^2-4\alpha+5) b_{\frac{5}{2}}^{(0)}], \tag{4.26}$$

$$B_9 = \frac{3\alpha^2}{64a_2}(\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)} - b_{\frac{5}{2}}^{(0)}), \tag{4.27}$$

$$B_{10} = \frac{9\alpha^2}{64a_2} b_{\frac{5}{2}}^{(0)}, \tag{4.28}$$

$$B_{11} = -\frac{9\alpha^2}{64a_2} b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, \tag{4.29}$$

$$
\begin{aligned}
B_{12} &= 0, & (4.30)\\
B_{13} &= \frac{9\alpha^2}{64a_2} b^{(0)}_{\frac{5}{2}}. & (4.31)
\end{aligned}
$$

On constate sur ces formules l'existence d'une égalité supplémentaire.

$$B_{10} = B_{13}. \tag{4.32}$$

Cette égalité n'est pas une conséquence des symétries, car les calculs montrent qu'elle n'a pas lieu pour toutes les valeurs de γ. Pour expliquer cette égalité on propose la conjecture suivante, établie à la lumière de la proposition précédente. En effet, dans la proposition, on fait tourner une ellipse autour d'un vecteur $\vec{k}$. Cela revient à faire tourner ses vecteurs de Souriau autour de $\vec{k}$. Dans la conjecture, on faire tourner ensemble un vecteur de Souriau de la première ellipse et un autre de la deuxième ellipse. Le sens géométrique de cette rotation de deux vecteurs de Souriau des ellipses différentes n'est pas claire. La conjecture obtenue, n'est pas vérifiée pour toute les valeurs de γ. Nous conjecturons qu'elle est vérifiée dans le cas newtonien ($\gamma = -\frac{1}{2}$).

Conjecture. *Soit $\vec{k}$ un vecteur non nul, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux ellipses orientées de foyer commun O et de demi-grands axes respectifs fixés a_1, a_2, $\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1$ les vecteurs de Souriau de $\mathcal{P}_1$, $\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2$ ceux de $\mathcal{P}_2$ et $\tilde{h}_\gamma$ la fonction définie comme précédemment. Notons $\mu_{\vec{k},\gamma,a_1,a_2,\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2}(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ la moyenne de $\tilde{h}_\gamma$ quand $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_2$ font ensemble un tour uniforme autour de $\vec{k}$ et $\mu_{\vec{k},\gamma,a_1,a_2,\vec{\xi}_1,\vec{\eta}_2}(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_1)$ la moyenne de $\tilde{h}_\gamma$ quand $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\eta}_2$ font ensemble un tour uniforme autour de $\vec{k}$. Alors les fonctions $\mu_{\vec{k},-\frac{1}{2},a_1,a_2,\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2}(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ et $\mu_{\vec{k},-\frac{1}{2},a_1,a_2,\vec{\xi}_1,\vec{\eta}_2}(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_1)$ sont invariantes par réflexion de leurs arguments par rapport à n'importe quel plan passant par O et comprenant $\vec{k}$.*

Enoncé équivalent. *Dans le développement de $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$, on a*

$$
\begin{aligned}
c_{\xi_{c1}^{n_1}\xi_{c2}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\xi}_{c2}^{n_4}\eta_{c1}^{n_5}\eta_{c2}^{n_6}\bar{\eta}_{c1}^{n_7}\bar{\eta}_{c2}^{n_8}} &= c_{\xi_{c1}^{n_1}\xi_{c2}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\xi}_{c2}^{n_4}\eta_{c1}^{n_7}\eta_{c2}^{n_8}\bar{\eta}_{c1}^{n_5}\bar{\eta}_{c2}^{n_6}}, & (4.33)\\
c_{\xi_{c1}^{n_1}\eta_{c2}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c2}^{n_4}\xi_{c2}^{n_5}\eta_{c1}^{n_6}\bar{\xi}_{c2}^{n_7}\bar{\eta}_{c1}^{n_8}} &= c_{\xi_{c1}^{n_1}\eta_{c2}^{n_2}\bar{\xi}_{c1}^{n_3}\bar{\eta}_{c2}^{n_4}\xi_{c2}^{n_7}\eta_{c1}^{n_8}\bar{\xi}_{c2}^{n_5}\bar{\eta}_{c1}^{n_6}}, & (4.34)
\end{aligned}
$$

tels que n_j, $\quad j = 1, 2, ..., 8$, sont huit entiers non négatifs vérifiant

$$
\begin{aligned}
n_1 + n_2 &= n_3 + n_4, & (4.35)\\
n_5 + n_6 &= n_7 + n_8. & (4.36)
\end{aligned}
$$

Dans le cas où

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4 = n_5 + n_6 = n_7 + n_8. \tag{4.37}$$

L'opérateur ψ_2 envoie la formule 4.33 sur 4.34. Dans ce cas, ces deux familles des relations entre les coefficients de $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$ sont équivalentes. On a vérifié la validité de cette conjecture sur le développement de $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$ jusqu'à l'ordre dix. La démonstration ou le rejet de cette conjecture me paraît difficile. Je serais reconnaissant à quiconque peut me suggérer une idée permettant de y parvenir.
En calculant les relations données par la conjecture à l'ordre 4, on trouve bien la formule 4.32. Evidemment, on peut obtenir une conjecture équivalente en permutant les indices désignant les ellipses.

Chapitre 5

Développement réduit du hamiltonien séculaire

La fonction $\tilde{h}_\gamma$, définie dans §2.4.2, est invariante par toutes les symétries $O(3)$. On cherche à l'exprimer dans des variables ayant cette propriété. On établit d'abord une famille de variables $SO(3)$-invariantes, d'ordre 1 en excentricités et inclinaisons. Comme on le sait, la fonction $\tilde{h}_\gamma$ est paire dans de telles variables. On cherche donc à l'exprimer dans des variables d'ordre 2 par rapport aux précédentes. On établit deux familles des variables $O(3)$-invariantes. Dans ces variables, notre fonction prend une forme très condensée mais le nombre des variables augmente d'une unité. Cela donne lieu à une relation de dépendance entre ces variables.
Ce chapitre est assez indépendant des chapitre trois et quatre. Cependant, certaines des relations, mises en lumière aux chapitres trois et quatre, peuvent s'exprimer dans les variables $O(3)$-invariantes.

5.1 Famille linéaire $SO(3)$-invariante

Soit D un axe commun entre les deux plans de nos deux ellipses orientées, ϖ_{1m} (L'indice m veut dire mutuel) l'angle entre D et $\vec{L}_1$ compté positivement dans le sens de l'orientation de la première ellipse, ϖ_{2m} celui entre D et $\vec{L}_2$ compté positivement dans le sens de l'orientation de la deuxième ellipse, et δ_m l'angle entre $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ (appelé traditionnellement inclinaison mutuelle). La valeur des angles ϖ_{1m} et ϖ_{2m} dépendent de l'orientation de l'axe D.

Proposition 12. *La fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique au voisinage du point coplanaire non incliné, dans la famille des variables*

$$\rho = \sin \delta_m, \quad \tau_1 = L_1 e^{\varpi_{1m}\, i}, \quad \tau_2 = L_2 e^{\varpi_{2m}\, i}, \quad \bar{\tau}_1, \quad \bar{\tau}_2.$$

Démonstration.

Dans le paragraphe §2.5, on a vu que la fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique au voisinage du point coplanaire non incliné, dans les variables

$$S_{c1}, \bar{S}_{c1}, G_{c1}, \bar{G}_{c1}, S_{c2}, \bar{S}_{c2}, G_{c2}, \bar{G}_{c2}.$$

Choisissons le repère $Ox_1x_2x_3$ de telle sorte que le plan Ox_1x_2 comprenne la première ellipse, l'axe Ox_1 soit confondu à D et l'axe Ox_3 soit du côté de $\vec{S}_2$ par rapport au plan Ox_1x_2. En tenant compte de la formule 1.64, on trouve

$$\begin{aligned} S_{c1} &= 0, & (5.1)\\ S_{c2} &= -\rho\sqrt{1-\tau_2\bar{\tau}_2}\,i, & (5.2)\\ G_{c1} &= \tau_1, & (5.3)\\ G_{c2} &= \tau_2. & (5.4) \end{aligned}$$

Ces formules avec leurs conjuguées fournissent un changement des variables analytique au voisinage du point en question. D'où découle la proposition. ⊙

Ces variables sont au nombre de cinq. C'est le nombre qu'il faut car on avait auparavant huit variables, et on a réduit ce nombre en utilisant l'invariance par les trois rotations. Dans ces variables $\tilde{h}_\gamma$ prend la forme

$$\tilde{h}_\gamma = \sum_{j_1,j_2,j_3,k,l\in\mathcal{N}} \rho^{2j_1}(\tau_1\bar{\tau}_1)^{j_2}(\tau_2\bar{\tau}_2)^{j_3}(c_{j_1,j_2,j_3,\alpha(k,l)}\alpha(k,l) + c_{j_1,j_2,j_3,\beta(k,l)}\beta(k,l)), \tag{5.5}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(k,l) &= \rho^{k+l}(\tau_1^k\tau_2^l + (-1)^{k+l}\bar{\tau}_1^k\bar{\tau}_2^l), & (5.6)\\ \beta(k,l) &= \rho^{|k-l|}(\tau_1^k\bar{\tau}_2^l + (-1)^{|k-l|}\bar{\tau}_1^k\tau_2^l), & (5.7) \end{aligned}$$

$\mathcal{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : $\mathcal{N} = \{0,1,2,...\}$ et les coefficients $c_{j_1,j_2,j_3,\alpha(k,l)}, c_{j_1,j_2,j_3,\beta(k,l)}$ sont complexes. Dans le cas newtonien, la partie quadratique et l'ordre 4 seront donnés respectivement par

$$\begin{aligned} Q_2^{(l)} &= \frac{3}{4a_2}[k_1(\tau_1\bar{\tau}_1 + \tau_2\bar{\tau}_2 - \rho^2) + k_2(\tau_1\bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_1\tau_2)], & (5.8)\\ Q_4^{(l)} &= \frac{3}{64a_2}\{12\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)}[\tau_1\bar{\tau}_1\tau_2\bar{\tau}_2 - \rho^2(\tau_1\bar{\tau}_1 + \tau_2\bar{\tau}_2)] - 6\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\rho^2(\tau_1\tau_2 + \bar{\tau}_1\bar{\tau}_2) \\ &\quad +k_3[\tau_1^2\bar{\tau}_1^2 + \rho^2(\tau_2^2 + \bar{\tau}_2^2)] + k_4[\tau_2^2\bar{\tau}_2^2 + \rho^2(\tau_1^2 + \bar{\tau}_1^2)] \\ &\quad +2(k_5\rho^2 + k_6\tau_1\bar{\tau}_1 + k_7\tau_2\bar{\tau}_2)(\tau_1\bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_1\tau_2) \\ &\quad +3k_8(\tau_1^2\bar{\tau}_2^2 + \bar{\tau}_1^2\tau_2^2 + \rho^4)\}, & (5.9) \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \alpha[-2\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}], && (5.10)\\
k_2 &= 5\alpha(1+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 2(1+3\alpha^2+\alpha^4) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, && (5.11)\\
k_3 &= -5\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + 2\alpha(1+3\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, && (5.12)\\
k_4 &= -5\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + 2\alpha(3+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, && (5.13)\\
k_5 &= 2[5\alpha(1+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - (2+3\alpha^2+2\alpha^4) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}], && (5.14)\\
k_6 &= 10\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - (4+9\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, && (5.15)\\
k_7 &= 10\alpha^3 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha^2(9+4\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}, && (5.16)\\
k_8 &= 5\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - 2\alpha(1+\alpha^2) b_{\frac{5}{2}}^{(1)}. && (5.17)
\end{aligned}
$$

Ce genre des variables était déja utilisées dans [9].

5.2 Première famille quadratique $O(3)$-invariante

La fonction $\tilde{h}_\gamma$ est une fonction des vecteurs

$$\vec{S}_1, \vec{L}_1, \vec{S}_2, \vec{L}_2.$$

Il est, donc, naturel de penser aux produits scalaire de ces quatre vecteurs, quand on est à la recherche des variables $O(3)$-invariante. On dispose déjà des relations suivantes entre ces produits :

$$
\begin{aligned}
\vec{S}_k^{\,2} &= 1 - \vec{L}_k^{\,2}, && (5.18)\\
\vec{S}_k \cdot \vec{L}_k &= 0, \quad k = 1, 2. && (5.19)
\end{aligned}
$$

Donc, il ne nous reste que les produits

$$\vec{L}_1^{\,2}, \vec{L}_2^{\,2}, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \vec{S}_1 \cdot \vec{L}_2, \vec{S}_2 \cdot \vec{L}_1, \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2.$$

Ces six produits aussi ne sont pas indépendants, car ils vivent dans un espace de dimension 5 (le quotient de notre espace de phases, qui est de dimension 8, par le groupe des isométries de dimension trois). La relation entre ces produits ne permet pas d'exprimer l'un d'eux analytiquement en fonction des autres. On donnera cette relation de dépendance, pour toutes les familles des variables qu'on construit. Pour avoir des relations simples entre les variables de la famille linéaire et les variables $O(3)$-invariante, on préfère ne pas utiliser directement les produits, mais plutôt les fonctions suivantes de ces produits

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1^2, && (5.20)\\ A_2 &= L_2^2, && (5.21)\\ B_1 &= -\frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{L}_1}{S_2}, && (5.22)\\ B_2 &= \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{L}_2}{S_1}, && (5.23)\\ C_1 &= 1 - \frac{(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2}{S_1^2 S_2^2}, && (5.24)\\ C_2 &= \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 - \frac{(\vec{S}_1 \cdot \vec{L}_2)(\vec{S}_2 \cdot \vec{L}_1)}{S_1 S_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}. && (5.25) \end{aligned}$$

En effet, en passant au variables linéaires, on trouve

$$\begin{aligned} C_1 &= \rho^2, && (5.26)\\ C_2 &= \frac{1}{2}(\tau_1 \bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_1 \tau_2), && (5.27)\\ B_k &= \varepsilon\, \rho \frac{\tau_k - \bar{\tau}_k}{2\, i}, && (5.28)\\ A_k &= \tau_k \bar{\tau}_k, \quad k = 1, 2, && (5.29) \end{aligned}$$

ε est une constante qui vaut ± 1, selon le choix de l'orientation de l'axe D (voir §5.1). Ce sont des variables homogènes d'ordre 2 en $\rho, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2$; leur sens géométrique est très simple. En effet, on a

$$\begin{aligned} C_1 &= \sin^2 \delta_m, && (5.30)\\ C_2 &= L_1 L_2 \cos(\varpi_{2m} - \varpi_{1m}), && (5.31)\\ B_k &= \varepsilon\, L_k \sin \delta_m \sin \varpi_{km}, && (5.32)\\ A_k &= L_k^2, \quad k = 1, 2. && (5.33) \end{aligned}$$

Proposition 13. *La fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique au voisinage du point coplanaire non incliné, dans les variables*

$$C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2.$$

Démonstration.

La formule 5.5 s'écrit

$$\tilde{h}_\gamma = \sum_{j_1,j_2,j_3,k,l\in\mathcal{N}} C_1^{j_1} A_1^{j_2} A_2^{j_3} (c_{j_1,j_2,j_3,\alpha(k,l)}\alpha(k,l) + c_{j_1,j_2,j_3,\beta(k,l)}\beta(k,l)), \quad (5.34)$$

D'après les relations de récurrence suivantes,

$$\begin{aligned}
&\beta(k,l) = 2C_2\beta(k-1,l-1) - A_1A_2\beta(k-2,l-2) \quad k,l \geq 2, && (5.35)\\
&\beta(k,1) = 2C_2\beta(k-1,0) - A_1\alpha(k-2,1) \quad k \geq 2, && (5.36)\\
&\beta(1,l) = (-1)^{l-1}(2C_2\beta(0,l-1) - A_2\alpha(1,l-2)) \quad l \geq 2, && (5.37)\\
&\beta(k,0) = \alpha(k,0), \quad \beta(0,l) = (-1)^l\alpha(0,l), &&\\
&\alpha(k,l) = 2i\varepsilon\, B_2\alpha(k,l-1) + A_2C_1\alpha(k,l-2) \quad l \geq 2, && (5.38)\\
&\alpha(k,l) = 2i\varepsilon\, B_1\alpha(k-1,l) + A_1C_1\alpha(k-2,l) \quad k \geq 2, && (5.39)\\
&\alpha(0,0) = 2, \quad \alpha(1,0) = 2i\varepsilon\, B_1, \quad \alpha(0,1) = 2i\varepsilon\, B_2, && (5.40)\\
&\alpha(1,1) = 2(C_1C_2 - 2B_1B_2), \quad \beta(0,0) = 2, \quad \beta(1,1) = 2C_2, && (5.41)
\end{aligned}$$

les quantités $\alpha(k,l), \beta(k,l)$ sont des fonctions analytiques dans les variables $C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2$. En remplaçant dans 5.34, on obtient un développement de $\tilde{h}_\gamma$ dans ces variables. Le fait que les variables $C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2$, soient homogènes d'ordre 2 en fonction de $\rho, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2$, implique que l'ordre $2n$ de $\tilde{h}_\gamma$ dans $C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2$ passe à l'ordre n dans les variables $\rho, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2$. D'où découle la convergence du développement de $\tilde{h}_\gamma$ dans ces dernières variables. Donc la fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique dans ces variables. $\odot$

Remarque 9. *La fonction $\tilde{h}_\gamma$ étant $O(3)$-invariante, elle ne dépend pas de la quantité ε. Cela implique que cette fonction est paire dans les variables B_1, B_2.*

Ces six variables ne sont pas indépendantes ; elles sont reliées par la relation suivante :

$$A_1A_2C_1 - A_1B_2^2 - A_2B_1^2 - C_2^2C_1 + 2C_2B_1B_2 = 0, \quad (5.42)$$

qu'on déduit facilement des relations 5.30, ...,5.33.
Dans le cas newtonien, on aura

$$\begin{aligned}
Q_2^{(p)} &= \frac{3}{4a_2}[k_1(A_1 + A_2 - C_1) + 2k_2C_2], \quad (5.43)\\
Q_4^{(p)} &= \frac{3}{64a_2}\{k_3(A_1^2 - 4B_2^2) + k_4(A_2^2 - 4B_1^2)\\
&\quad +6[(2\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - k_8)A_1A_2 + 4\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)} B_1B_2]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2[(k_4 - 6\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)})A_1 + (k_3 - 6\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(0)})A_2]C_1 \\
&+4(k_6 A_1 + k_7 A_2)C_2 + 3k_8(C_1^2 + 4C_2^2) \\
&+4(k_5 - 3\alpha^2 b_{\frac{5}{2}}^{(1)})C_1 C_2\}. \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

5.3 Seconde famille quadratique $O(3)$-invariante

Soit la famille des variables,

$$T_1 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\xi}_1 \vec{\eta}_1), \qquad (5.45)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\xi}_2 \vec{\eta}_2), \qquad (5.46)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\xi}_1 \vec{\xi}_2), \qquad (5.47)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\eta}_1 \vec{\eta}_2), \qquad (5.48)$$

$$W_1 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\xi}_1 \vec{\eta}_2), \qquad (5.49)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{\xi}_2 \vec{\eta}_1). \qquad (5.50)$$

Ces variables sont en fait les carrés des demi-distances mutuelles entre les points représentés sur la sphère unité par les vecteurs $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$. Par exemple

$$T_1 = [\frac{1}{2}(\vec{\xi}_1 - \vec{\eta}_1)]^2. \qquad (5.51)$$

Proposition 14. *La fonction $\tilde{h}_\gamma$ est analytique au voisinage du point coplanaire non incliné, dans les variables*

$$T_1, T_2, V_1, V_2, W_1, W_2.$$

Démonstration.

D'après les formules 5.20, ..., 5.25, les quantités

$$C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2,$$

sont des fonctions des produits scalaires des vecteurs

$$\vec{S}_1, \vec{L}_1, \vec{S}_2, \vec{L}_2.$$

En passant de ces vecteurs aux vecteurs de Souriau et puis dans les variables

$$T_1, T_2, V_1, V_2, W_1, W_2,$$

On trouve le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
A_1 &= T_1, && (5.52)\\
A_2 &= T_2, && (5.53)\\
B_1 &= -\frac{V_2 - V_1 + W_2 - W_1}{2\sqrt{1-T_2}}, && (5.54)\\
B_2 &= \frac{V_2 - V_1 + W_1 - W_2}{2\sqrt{1-T_1}}, && (5.55)\\
C_1 &= 1 - \frac{(2 - V_1 - V_2 - W_1 - W_2)^2}{4(1-T_1)\,(1-T_2)}, && (5.56)\\
C_2 &= \frac{1}{2}(W_1 + W_2 - V_1 - V_2) + \frac{1}{2}\frac{B_1 B_2}{1+\sqrt{1-C_1}}. && (5.57)
\end{aligned}$$

La proposition découle de l'analyticité de ces formules, au voisinage du point coplanaire non incliné. ⊙

La relation de dépendance de ces variables résulte de la nullité du déterminant de Gram des quatre vecteurs de Souriau. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-2T_1 & 1-2V_1 & 1-2W_1 \\ 1-2T_1 & 1 & 1-2W_2 & 1-2V_2 \\ 1-2V_1 & 1-2W_2 & 1 & 1-2T_2 \\ 1-2W_1 & 1-2V_2 & 1-2T_2 & 1 \end{pmatrix} = 0. \qquad (5.58)$$

Cette relation n'est pas homogène.

Dans ces variables, la partie quadratique et celle d'ordre 4, de $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$, seront données par

$$\begin{aligned}
Q_2^{(s)} &= \frac{3}{4a_2}[2k_1(T_1+T_2) - (k_1+k_2)(V_1+V_2)\\
&\quad -(k_1-k_2)(W_1+W_2)], && (5.59)\\
Q_4^{(s)} &= \frac{1}{48a_2}\{c_1(\alpha^2 T_1^2 + T_2^2) + c_2^+(V_1^2+V_2^2) + c_2^-(W_1^2+W_2^2)\\
&\quad + c_3(T_1T_2 + V_1V_2 + W_1W_2) + c_4^+(\alpha T_1 - T_2)(V_1+V_2)\\
&\quad + c_4^-(\alpha T_1 + T_2)(W_1+W_2) + c_5(V_1W_1 + V_2W_2)\\
&\quad + c_6(V_1W_2 + V_2W_1)\}, && (5.60)
\end{aligned}$$

avec

$$c_1 = 27\alpha b_{5/2}^{(1)},$$

$$
\begin{aligned}
c_2^{\pm} &= 18\alpha(\mp 5 + 4\alpha \mp 5\alpha^2)b_{5/2}^{(0)} \pm 9(2 \mp \alpha + 2\alpha^2)^2 b_{5/2}^{(1)} \\
c_3 &= 54\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}, \\
c_4^{\pm} &= -45\alpha(1 \mp \alpha)b_{5/2}^{(0)} + 18(1 \mp \alpha^3)b_{5/2}^{(1)}, \\
c_5 &= -36\alpha^2(b_{5/2}^{(0)} - \alpha b_{5/2}^{(1)}), \\
c_6 &= -36\alpha(\alpha b_{5/2}^{(0)} - b_{5/2}^{(1)}).
\end{aligned}
$$

On a exposé dans ce chapitre, différentes familles des variables dans lesquelles s'exprime $\tilde{h}_\gamma$ (et par conséquent le hamiltonien séculaire). La forme symplectique de notre problème n'est pas $O(3)$-invariante, mais $SO(3)$-invariante. Par conséquent, les équations du mouvement sont ainsi. Donc, on ne peut pas les exprimer dans les variables des familles quadratiques $O(3)$-invariante. Il faut ajouter à la dernière famille, par exemple, les quatre volumes orientés des tétraèdres associés aux quatre choix différents de trois vecteurs de Souriau parmi les quatre [12]. L'arbitraire dans le développement dû à la relation de dépendance présente un autre défaut des familles quadratique $O(3)$-invariante. La famille linéaire est exempte de ces défauts. Un avantage important de nos familles quadratiques est l'élégance de leur construction.

Annexe A

Codes des programmes

Je donne dans cette annexe les codes de mes calculs tournant sous Trip.

Le programme suivant calcule $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$ dans les variables de Souriau.

programme(1)

```
_cleanflag=3$
n= $ /* n est l'ordre du développement */
P=expi(l1,1,0)$ /* l1 est la longitude excentrique de la première
                   planète, noté \hat u_1 dans la thèse */
H=expi(T,1,0)$  /* l1+T est la longitude excentrique de la deuxième
                   planète */
Q=H*P$



/* on établit ici la règle de conjugaison et la troncature */

varconj((x,X),(y,Y),(z,Z),(u,U))$
tr=({(x,X,y,Y,z,Z,u,U),n})$
usetronc(tr)$



/* Définir des variables concernant le premier corps */

xic1=x$
etac1=y$
```

```
xi31=sqrt(1-xic1*conj(xic1))$
eta31=sqrt(1-etac1*conj(etac1))$
Sc1=1/2*(xic1+etac1)$
Lc1=1/2*(xic1-etac1)$
S31=1/2*(xi31+eta31)$
L31=1/2*(xi31-eta31)$
S1=1*(Sc1*conj(Sc1)+S31^2)^(1/2)$
Gc1=Lc1-L31*(S1+S31)^-1*Sc1$
gc1=1*(1+S1)^-1*Gc1$
sc1=1*(S1+S31)^-1*Sc1$



/* Calcul de la position de la première planète */

FAC1=(1/4)*S1^-1*(1+S1)*(S1+S31)$
Rc1=FAC1*((1-sc1^2*conj(gc1^2))*P
   +(gc1^2-sc1^2)*P^(-1)-2*(gc1-sc1^2*conj(gc1)))$
/* Rc1 est l'affixe de la composante horizontale du vecteur
   position du premier corps divisé par le demi-grand axe */
RR3=-1*FAC1*((conj(sc1)*gc1^2+sc1)*P^(-1)-2*conj(sc1)*gc1)$
R31=RR3+conj(RR3)$
/* R31 est la projection du vecteur position du premier corps
   sur l'axe vertical */
POI1=1-(1/2)*(1+S1)*(conj(gc1)*P+gc1*P^(-1))$
/* POI1 est le poids concernant la première planète */



/* Le passage au 2ème corps */

gc2=1*substvar(gc,(x,z),(X,Z),(y,u),(Y,U))$
sc2=1*substvar(sc,(x,z),(X,Z),(y,u),(Y,U))$
Rc2f= 1*substvar(Rc1,(x,z),(X,Z),(y,u),(Y,U))$
R32f= 1*substvar(R31,(x,z),(X,Z),(y,u),(Y,U))$
POI2f= 1*substvar(POI1,(x,z),(X,Z),(y,u),(Y,U))$
Rc2=1*subst(Rc2f,P,Q)$
R32=1*subst(R32f,P,Q)$
POI2=1*subst(POI2f,P,Q)$
```

```
/* Calcul de \tilde h_{-\frac{1}{2}} */

/* On calcule la moyenne de  (1/a2)* ( ||R2-a*R1||^2 )^(-1/2)
   avec a=a1/a2.  On pose d=H-a, D=|d|^2  et
   ||R2-a*R1||^2= | d*P+ctrc |^2+(R31-a*R32)^2=D+ep
   Dans la thèse, D est noté \nu   et ep noté \epsilon */

ctrc=Rc2-a*Rc1-(H-a)*P$
ep=ctrc*D*(d*P)^-1+conj(ctrc)*d*P+ctrc*conj(ctrc)
   +(R32-a*R31)*conj(R32-a*R31)$

PP=POI1*POI2$

dim vtt[0:n-1]$
vtt[0]=D^(n-1)$
for k=1 to n-1 {vtt[k]=vtt[k-1]/(k*D)*(1/2-k)*ep$}$
for k=0 to n-1 {vtt[k]=coef_ext(vtt[k]*PP,(P,0))$}$
Mf=0$
for k=0 to n-1 {Mf=Mf+vtt[k]$}$
/* Mf regroupe les n premiers termes du développement
   de D^(n-1/2)*(1+ep/D)^-1/2 */
drt=1*coef_ext((-1)^n*fac(2*n-1)/(2^(n-1)*fac(n-1)*(fac(n/2))^2)
*D^(n/2-1)*((gc2-a*gc1)*conj(gc2-a*gc1))^(n/2),(P,0))$
/* drt est le dernier terme, calculé selon la proposition 6 */
M=Mf+drt$
M=subst(M,D,d*b)$
M=subst(M,d,H-a)$
M=subst(M,b,H^-1-a)$
/* \tilde h_{-\frac{1}{2}} vaut D^(1/2-n)*M.
   Dans la série M, la quantité H^k présente le coefficient
   de Laplace b_{n-\frac{1}{2}}^{(k)}, k est un entier. */



/*L'utilisation des relations de récurrence entre
  les coefficients de Laplace */

N1=abs(puismax(M,H))$
N2=abs(puismin(M,H))$
```

```
Nm=puismax(xx^N1+xx^N2,xx)$
dim mm [0:Nm ]$
 mm[0] = coef_ext(M,(H,0)) $
 for j=1 to Nm  {  mm[j] = coef_ext(M,(H,j))+coef_ext(M,(H,-j))$ }$
s=n-1/2$
for k=0 to Nm-2  {
        j=Nm-k$
 mm[j-1]= mm[j-1]-((j-1)/(s-j))*((1+a^2)/a)*mm[j]$
 mm[j-2]= mm[j-2]-((2-s-j)/(s-j))*mm[j]$
 mm[j]=0 $             }$


s0=n/2+1/2$
while    ( s != s0 )   do
{
mm[2]=mm[1]*2*(s-3)/(s-1)*a/(aa)^2$
mm[1]=mm[0]*2*(s-2)/(s-1)*a/(aa)^2
     +mm[1]*s/(s-1)*(1+a^2)/(aa)^2$
mm[0]=mm[0]*(1+a^2)/(aa)^2$
s=s-1$
mm[1]= mm[1]-1/(s-2)*(1+a^2)/a*mm[2]$
mm[0]= mm[0]+s/(s-2)*mm[2]$
mm[2]=0 $

}$
M=mm[0]+mm[1]*H$
tra=({a,puismax(M,a)})$
usetronc(tra)$
M=subst(M,aa,1-a^2)$
/* Dans cette série, il n'y a que deux coefficients de Laplace,
 à savoir b_{s0}^{(0)} et b_{s0}^{(1)} : s0=n/2+1/2 */
```

Le programme suivant calcule $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$ dans les variables de la famille linéaire $SO(3)$-invariante du paragraphe §5.1.

programme(2)

```
_cleanflag=3$
n= $ /* n est l'ordre du développement */
P=expi(l1,1,0)$ /* l1 est la longitude excentrique de la première
                   planète, noté \hat u_1 dans la thèse */
H=expi(T,1,0)$  /* l1+T est la longitude excentrique de la deuxième
                   planète */
Q=H*P$



/* on établit ici la règle de conjugaison et la troncature */

varconj((x,X),(z,Z))$
tr=({(x,X,z,Z,u),n})$
usetronc(tr)$
/* x=L1*P noté \tau_1 dans la thèse,
   z=L2*Q noté \tau_2 dans la thèse,
   u=sin(angle entre les deux ellipse), noté \rho dans la thèse */



/* Calcul des positions des planètes */
/* On prend le plan de la première ellipse
   pour plan de référence */
S1=sqrt(1-x*X)$
S2=sqrt(1-z*Z)$
S32=S2*sqrt(1-u^2)$

Rc1=1/2*(1+S1)*P+1/(2*(1+S1))*x^2*P^(-1)-x$
R31=0$
POI1=1-1/2*X*P-1/2*x*P^(-1)$

Sc2=-i*S2*u$

Rc2=1/4*(((S2+S32)*(1+S2)/S2-Sc2^2*Z^2/(S2*(S2+S32)*(1+S2)))*Q
```

```
+((S2+S32)*z^2/(S2*(1+S2))-(1+S2)*Sc2^2/(S2*(S2+S32)))*Q^(-1)-2
*((S2+S32)*z/S2-Sc2^2*Z/(S2*(S2+S32))))$
RR3=(1/4)*(-(Sc2*Z^2/(S2*(1+S2))-(1+S2)*Sc2/S2)*Q+2*Sc2*Z/S2)$
R32=RR3+conj(RR3)$
POI2=1-1/2*Z*Q-1/2*z*Q^(-1)$



/* Calcul de \tilde h_{-\frac{1}{2}} */

/* On calcule la moyenne de  (1/a2)* ( ||R2-a*R1||^2 )^(-1/2)
   avec a=a1/a2.  On pose d=H-a, D=|d|^2  et
   ||R2-a*R1||^2= | d*P+ctrc |^2+(R31-a*R32)^2=D+ep
   Dans la thèse, D est noté \nu   et ep noté \epsilon */


ctrc=Rc2-a*Rc1-(H-a)*P$
ep=ctrc*D*(d*P)^-1+conj(ctrc)*d*P+ctrc*conj(ctrc)
+(R32-a*R31)*conj(R32-a*R31)$

PP=POI1*POI2$

dim tt[0:n-1]$
tt[0]=D^(n-1)$
for k=1 to n-1 {tt[k]=tt[k-1]/(k*D)*(1/2-k)*ep$}$
for k=0 to n-1 {tt[k]=coef_ext(tt[k]*PP,(P,0))$}$
Mf=0$
for k=0 to n-1 {Mf=Mf+tt[k]$}$
/* Mf regroupe les n premiers termes du développement
   de D^(n-1/2)*(1+ep/D)^-1/2 */
drt=1*coef_ext((-1)^n*fac(2*n-1)/(2^(n-1)*fac(n-1)
*(fac(n/2))^2)*D^(n/2-1)*((z/(1+S2)-a*x/(1+S1))
*(Z/(1+S2)-a*X/(1+S1)))^(n/2),(P,0))$
/* drt est le dernier terme, calculé selon la proposition 6 */
M=Mf+drt$
M=subst(M,D,d*b)$
M=subst(M,d,H-a)$
M=subst(M,b,H^-1-a)$
/* \tilde h_{-\frac{1}{2}} vaut D^(1/2-n)*M.
   Dans la série M, la quantité H^k présente le coefficient
   de Laplace b_{n-\frac{1}{2}}^{(k)}, k est un entier. */
```

```
/*L'utilisation des relations de récurrence entre
  les coefficients de Laplace */

N1=abs(puismax(M,H))$
N2=abs(puismin(M,H))$
Nm=puismax(xx^N1+xx^N2,xx)$
dim mm [0:Nm ]$
 mm[0] = coef_ext(M,(H,0)) $
 for j=1 to Nm  {  mm[j] = coef_ext(M,(H,j))+coef_ext(M,(H,-j))$ }$
s=n-1/2$
for k=0 to Nm-2  {
        j=Nm-k$
  mm[j-1]= mm[j-1]-((j-1)/(s-j))*((1+a^2)/a)*mm[j]$
  mm[j-2]= mm[j-2]-((2-s-j)/(s-j))*mm[j]$
  mm[j]=0 $             }$


s0=n/2+1/2$
while    ( s != s0 )   do
{
mm[2]=mm[1]*2*(s-3)/(s-1)*a/(aa)^2$
mm[1]=mm[0]*2*(s-2)/(s-1)*a/(aa)^2
     +mm[1]*s/(s-1)*(1+a^2)/(aa)^2$
mm[0]=mm[0]*(1+a^2)/(aa)^2$
s=s-1$
 mm[1]= mm[1]-1/(s-2)*(1+a^2)/a*mm[2]$
 mm[0]= mm[0]+s/(s-2)*mm[2]$
 mm[2]=0 $

}$
M=mm[0]+mm[1]*H$
tra=({a,puismax(M,a)})$
usetronc(tra)$
M=subst(M,aa,1-a^2)$
*/ Dans cette série, il n'y a que deux coefficients de Laplace,
 à savoir b_{s0}^{(0)} et b_{s0}^{(1)} : s0=n/2+1/2 */
```

Le programme suivant effectue le changement de variables, dans $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$, entre la famille linéaire $SO(3)$-invariante et la première famille quadratique $O(3)$-invariante du paragraphe §5.2. On applique ce programme après avoir appliqué le programme(2).

programme(3)

```
N=n/2$ /* N est le nouvel ordre du développement */
efftronc$
tr=({(A1,A2,B1,B2,C1,C2),N})$
/* Ce sont les variables données dans le paragraphe 5.2 */
usetronc(tr)$



/* définir les tableaux \alpha et \beta du paragraphe 5.1 */

dim A[0:N,0:N]$
dim B[0:N,0:N]$

/* initialiser les éléments des tableaux */

A[0,0]=2$ B[0,0]=2$
A[1,0]=2*i*B1$ A[0,1]=2*i*B2$ A[1,1]=2*(C1*C2-2*B1*B2)$ B[1,1]=2*C2$



/* Appliquer les relations de récurrence du paragraphe 5.2*/

for k=0 to 1 {   for l=2 to N {
    A[k,l]=2*i*B2*A[k,l-1]+A2*C1* A[k,l-2]$   }$}$
for l=0 to N {   for k=2 to N {
    A[k,l]=2*i*B1*A[k-1,l]+A1*C1*A[k-2,l]$    }$}$
for k=1 to N { B[k,0]=A[k,0]$ B[0,k]=(-1)^k*A[0,k]$ }$
for k=2 to N { B[k,1]=2*C2*B[k-1,0]-A1*A[k-2,1]$
               B[1,k]=(-1)^(k-1)*(2*C2*B[0,k-1]-A2*A[1,k-2])$ }$
for k=2 to N {   for l=2 to N {
               B[k,l]=2*C2*B[k-1,l-1]-A1*A2* B[k-2,l-2]$ }$}$
```

```
/* Remplacement dans M des variables de la famille linéaire
   par les éléments des tableaux A et B */

for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(x,j),(X,jj))*x^j*X^jj
+coef_ext(M,(x,j),(X,jj))*A1^j*X^(jj-j)$
}$}$

for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(X,j),(x,jj))*X^j*x^jj
+coef_ext(M,(X,j),(x,jj))*A1^j*x^(jj-j)$
}$}$

for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(z,j),(Z,jj))*z^j*Z^jj
+coef_ext(M,(z,j),(Z,jj))*A2^j*Z^(jj-j)$
}$}$

for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(Z,j),(z,jj))*Z^j*z^jj
+coef_ext(M,(Z,j),(z,jj))*A2^j*z^(jj-j)$
}$}$


for k=0 to N {   for l=0 to N {
M=M-coef_ext(M,(x,k),(z,l),(X,0),(Z,0))*(x^k*z^l+(-1)^(k+l)*X^k*Z^l)
+(coef_ext(M,(x,k),(z,l),(X,0),(Z,0))/u^(k+l))*A[k,l]$

M=M-coef_ext(M,(x,k),(Z,l),(X,0),(z,0))*(x^k*Z^l+(-1)^(abs(k-l))*X^k*z^l)
+coef_ext(M,(x,k),(Z,l),(X,0),(z,0))*u^(-abs(k-l))*B[k,l]$
                                                  }$}$
M=substpow(M,u,2,C1,0);
/* Rappelons-le, \tilde h_{-\frac{1}{2}} vaut D^(1/2-n)*M.
   Dans la série M, la quantité H^k présente le coefficient
   de Laplace b_{n-\frac{1}{2}}^{(k)}, k est un entier. */
```

Le programme suivant effectue le changement de variables, dans $\tilde{h}_{-\frac{1}{2}}$, entre la famille linéaire $SO(3)$-invariante et la deuxième famille quadratique $O(3)$-invariante du paragraphe §5.3. On applique ce programme après avoir appliqué le programme(2).

programme(4)

```
N=n/2$ /* N est le nouvel ordre du développement */
efftronc$
tr=({(T1,T2,V1,V2,W1,W2),N})$
/* Ce sont les variables données dans le paragraphe 5.3 */
usetronc(tr)$



/* définir les tableaux \alpha et \beta du paragraphe 5.1 */

dim A[0:N,0:N]$
dim B[0:N,0:N]$

/* initialiser les éléments des tableaux */

LL1=T1$  LL2=T2$  S1=sqrt(1-T1)$ S2=sqrt(1-T2)$
L1L2=1/2*(W1+W2-V1-V2)$
S1S2=1-1/2*(W1+W2+V1+V2)$
S2L1=1/2*(V2-V1+W2-W1)$  S1L2=1/2*(V2-V1+W1-W2)$
A1=LL1$   A2=LL2$
B1=-S2L1/S2$    B2=S1L2/S1$
C1=1-(S1S2/(S1*S2))^2$  C2=L1L2-(S1L2*S2L1)/(S1*S2+S1S2)$

A[0,0]=2$ B[0,0]=2$
A[1,0]=2*i*B1$ A[0,1]=2*i*B2$ A[1,1]=2*(C1*C2-2*B1*B2)$ B[1,1]=2*C2$



/* Appliquer les relations de récurrence du paragraphe 5.2*/

for k=0 to 1 {   for l=2 to N {
    A[k,l]=2*i*B2*A[k,l-1]+A2*C1* A[k,l-2]$   }$}$
for l=0 to N {   for k=2 to N {
```

```
    A[k,l]=2*i*B1*A[k-1,l]+A1*C1*A[k-2,l]$    }$}$
for k=1 to N { B[k,0]=A[k,0]$ B[0,k]=(-1)^k*A[0,k]$ }$
for k=2 to N { B[k,1]=2*C2*B[k-1,0]-A1*A[k-2,1]$
               B[1,k]=(-1)^(k-1)*(2*C2*B[0,k-1]-A2*A[1,k-2])$ }$
for k=2 to N {   for l=2 to N {
               B[k,l]=2*C2*B[k-1,l-1]-A1*A2* B[k-2,l-2]$ }$}$



/* Remplacement dans M des variables de la famille linéaire
   par les éléments des tableaux A et B */

for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(x,j),(X,jj))*x^j*X^jj
+coef_ext(M,(x,j),(X,jj))*A1^j*X^(jj-j)$
}$}$
for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(X,j),(x,jj))*X^j*x^jj
+coef_ext(M,(X,j),(x,jj))*A1^j*x^(jj-j)$
}$}$
for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(z,j),(Z,jj))*z^j*Z^jj
+coef_ext(M,(z,j),(Z,jj))*A2^j*Z^(jj-j)$
}$}$
for j=1 to N {  for  jj=j to N {
M=M-coef_ext(M,(Z,j),(z,jj))*Z^j*z^jj
+coef_ext(M,(Z,j),(z,jj))*A2^j*z^(jj-j)$
}$}$
for k=0 to N {   for l=0 to N {
M=M-coef_ext(M,(x,k),(z,l),(X,0),(Z,0))*(x^k*z^l+(-1)^(k+l)*X^k*Z^l)
+(coef_ext(M,(x,k),(z,l),(X,0),(Z,0))/u^(k+l))*A[k,l]$
M=M-coef_ext(M,(x,k),(Z,l),(X,0),(z,0))*(x^k*Z^l+(-1)^(abs(k-l))*X^k*z^l)
+coef_ext(M,(x,k),(Z,l),(X,0),(z,0))*u^(-abs(k-l))*B[k,l]$
                                                  }$}$
M=substpow(M,u,2,C1,0);
/* Rappelons-le, \tilde h_{-\frac{1}{2}} vaut D^(1/2-n)*M.
   Dans la série M, la quantité H^k présente le coefficient
   de Laplace b_{n-\frac{1}{2}}^{(k)}, k est un entier. */
```

Annexe B

Variables actions-angles de Delaunay

Dans cette annexe, nous montrons qu'on peut obtenir les variables de Delaunay en appliquant le théorème de Liouville sur les systèmes intégrables [17], au problème de Kepler. Notre problème ayant trois degré de liberté, pour obtenir notre résultat on a besoin de trois intégrales premières, indépendantes, en involution et dont la sous-varété de niveaux est compacte. Remarquons qu'on a cinq intégrales premières :

$$a, e, \delta, \Omega, \omega.$$

Appliquons le théorème de Liouville aux intégrales a, e, δ. Ces intégrales premières sont indépendantes et la sous-variété de niveaux est décrite par une anomalie et les angles ω, Ω. Donc cette sous-variété est compacte. Démontrons que ces intégrales sont en involution ; c'est-à-dire

$$\{a, e\} = \{a, \delta\} = \{e, \delta\} = 0 \tag{B.1}$$

Remarquons que a est une fonction de H, donc a est en involution avec toute intégrale première. D'où

$$\{a, e\} = \{a, \delta\} = 0.$$

On a

$$C_1 = C \sin \delta \sin \Omega \tag{B.2}$$
$$C_2 = -C \sin \delta \cos \Omega \tag{B.3}$$
$$C_3 = C \cos \delta \tag{B.4}$$

Injectons dans les célèbres formules

$$\{C_i, C_j\} = -\,C_k. \tag{B.5}$$

(i, j, k) étant une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$. On trouve un système linéaire de trois équation à trois inconnues $\{\Omega, \delta\}, \{C, \Omega\}, \{C, \delta\}$ dont la solution est

$$\begin{aligned}
\{\Omega, \delta\} &= \frac{1}{C \sin \delta} \\
\{C, \Omega\} &= 0 \\
\{C, \delta\} &= 0
\end{aligned} \tag{B.6}$$

En remplaçant

$$C = \beta\sqrt{\mu a(1-e^2)} \tag{B.7}$$

dans la dernière équation, on trouve

$$\{e, \delta\} = 0. \tag{B.8}$$

Cela achève la démonstration de B.1

B.1 Calcul des actions

D'après le théorème de Liouville, la sous-variété de niveaux des intégrales a, e et δ est difféomorphe à un tore de dimension 3. Les angles Ω, ω avec une anomalie (vraie, excentrique ou moyenne) décrivent des cycles de base de ce tore qu'on note respectivement $\gamma_\Omega, \gamma_\omega, \gamma_l$. Notons I_Ω, I_ω, I_l les actions correspondantes à ces cycles. On a

$$\begin{aligned}
I_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_l} \vec{p}\, d\vec{r} \\
&= \frac{1}{2\pi n\beta}\int_0^{2\pi} \vec{p}^2\, dl \\
&= \frac{\beta}{2\pi n}\int_0^{2\pi} 2\mu(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})\, dM \\
&= -\frac{\mu\beta}{a\, n} + \frac{\mu\beta}{\pi n}\int_0^{2\pi} \frac{dl}{r} \\
&= -\frac{\mu\beta}{a\, n} + \frac{\mu\beta}{\pi n}\int_0^{2\pi} \frac{du}{a} \\
&= \frac{\mu\beta}{a\, n} \\
&= \beta\sqrt{\mu\, a}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Une autre démonstration de cette formule peut s'obtenir en exprimant $\vec{p}, \vec{r}$ directement en fonction de l'anomalie vraie ou excentrique.
Calculons l'action I_ω. On a

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \vec{p}\, d\vec{r}.$$

Exprimons $\vec{p}\, d\vec{r}$ dans le repère $(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y)$ porté par les axes principaux de l'ellipse. En tenant compte des formules

$$\frac{\partial \vec{e}_X}{\partial \omega} = \vec{e}_Y, \quad \frac{\partial \vec{e}_Y}{\partial \omega} = -\vec{e}_X,$$

on trouve

$$\begin{aligned} I_\omega &= \beta \int_0^{2\pi} r(-\dot{X} \sin v + \dot{Y} \cos v)\, d\omega \\ &= a^2 n \beta \sqrt{1-e^2} \\ &= \beta \sqrt{\mu a (1-e^2)} \end{aligned} \tag{B.10}$$

Pour calculer I_Ω, exprimons $\vec{r}$ et $\vec{p}$ dans le repère fixe $Ox_1x_2x_3$, on trouve

$$\begin{aligned} I_\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\Omega} \vec{p}\, d\vec{r} \\ &= \beta \int_0^{2\pi} r(-\dot{X} \sin v + \dot{Y} \cos v) \cos\delta \, d\Omega \\ &= a^2 n \beta \sqrt{1-e^2} \cos\delta \\ &= \beta \sqrt{\mu a (1-e^2)} \cos\delta. \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 Calcul des angles

Les actions étant calculées, plusieurs méthodes permettent de calculer les angles associés. Chacun de ces angles est une variable angulaire, défini mod 2π et décrivant le cycle de base correspondant proportionnellement au flot de son action. Cela fournit une méthode directe pour calculer les angles. Cette méthode était déja utilisée dans [21].
Calculons les champs de nos actions.
L'action I_Ω est la composante verticale du vecteur moment cinétique. Pour calculer son champ, passons aux coordonnées cartisiennes. on a

$$I_\Omega = x_1 p_2 - x_2 p_1. \tag{B.12}$$

Le champ de cette fonction est donné par

$$d\,\vec{p} \wedge d\,\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}) = d\,I_\Omega. \tag{B.13}$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = 0, && \text{(B.14)} \\ \dot{p}_1 &= -p_2, \quad \dot{p}_2 = p_1, \quad \dot{p}_3 = 0. && \text{(B.15)} \end{aligned}$$

C'est le champ de la rotation $\mathcal{R}_3(\Omega)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \{I_\Omega, \Omega\} &= 1, \quad \{I_\Omega, \omega\} = 0, \quad \{I_\Omega, l\} = 0, && \text{(B.16)} \\ \{I_\Omega, I_\omega\} &= 0, \quad \{I_\Omega, I_l\} = 0. && \text{(B.17)} \end{aligned}$$

Pour calculer le champ de l'action I_ω, remarquons que cette action vaut la norme du vecteur moment cinétique. L'équation

$$d\,\vec{p} \wedge d\,\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}) = d\,I_\omega \tag{B.18}$$

étant invariante par rotation, on peut l'étudier dans un repère particuler dont la direction de l'axe vertical est confondue avec celle du vecteur du moment cinétique. D'où, on aura dans ce repère des équations identiques à B.14, B.15. Le champ de I_ω est donc le champ de la rotation d'angle ω autour du vecteur moment cinétique. Cela donne

$$\begin{aligned} \{I_\omega, \Omega\} &= 0, \quad \{I_\omega, \omega\} = 1, \quad \{I_\omega, l\} = 0, && \text{(B.19)} \\ \{I_\omega, I_\Omega\} &= 0, \quad \{I_\Omega, I_l\} = 0. && \text{(B.20)} \end{aligned}$$

Le champ de l'action I_l est proportionnel au champ du hamiltonien H. En effet, on a

$$H = -\mu^2 \frac{\beta^3}{2\,I_l^2}. \tag{B.21}$$

Cela donne

$$d\,H = n\,d\,I_l. \tag{B.22}$$

Donc le champ de I_l s'obtient à partir du champ de H en le multipliant par l'inverse de la fréquence n. D'où

$$\begin{aligned} \{I_l, \Omega\} &= 0, \quad \{I_l, \omega\} = 0, \quad \{I_l, l\} = 1, && \text{(B.23)} \\ \{I_l, I_\Omega\} &= 0, \quad \{I_l, I_\omega\} = 0. && \text{(B.24)} \end{aligned}$$

Les équations en B.17, B.20, B.24 sont une conséquence du fait que I_l, I_ω, I_Ω sont un système des variables d'actions.
Notons des angles correspondant aux actions I_l, I_ω et I_Ω par Φ_l, Φ_ω et Φ_Ω. La forme symplectique s'écrit

$$\sigma = d\,I_l \wedge d\,\Phi_l + d\,I_\omega \wedge d\,\Phi_\omega + d\,I_\Omega \wedge d\,\Phi_\Omega. \tag{B.25}$$

D'après la définition des variables action-angles, On a

$$\{I_\Omega, \Phi_\Omega\} = 1. \tag{B.26}$$

Cette équation, comparée à la première de B.16, donne

$$\Phi_\Omega = \Omega + \Omega_0, \tag{B.27}$$

avec Ω_0 est une fonction des actions et des deux angles ω et l. D'après la définition des variables action-angles, On a aussi

$$\{I_\omega, \Phi_\Omega\} = 0, \quad \{I_l, \Phi_\Omega\} = 0. \tag{B.28}$$

L'équation B.27 et ces deux équations, comparées à la première équation de B.19 et à la première équation de B.23, donnent

$$\{I_\omega, \Omega_0\} = 0, \quad \{I_l, \Omega_0\} = 0. \tag{B.29}$$

Cela montre que Ω_0 ne dépend pas de ω ni de l. C'est-à-dire que I_Ω ne dépend que des actions.

$$\Phi_\Omega = \Omega + \Omega_0(I). \tag{B.30}$$

Un raisonnement identique donne

$$\begin{aligned} \Phi_\omega &= \omega + \omega_0(I), && \text{(B.31)} \\ \Phi_l &= l + l_0(I). && \text{(B.32)} \end{aligned}$$

Remplaçons dans la formule B.25, on trouve

$$\sigma = d\,\vec{p} \wedge d\,\vec{r} = \sigma_D + \sigma_O, \tag{B.33}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_D &= d\,I_l \wedge d\,l + d\,I_\omega \wedge d\,\omega + d\,I_\Omega \wedge d\,\Omega && \text{(B.34)} \\ \sigma_O &= d\,I_l \wedge d\,l_0 + d\,I_\omega \wedge d\,\omega_O + d\,I_\Omega \wedge d\,\Omega_0. && \text{(B.35)} \end{aligned}$$

La 2-forme σ_O ne dépendant pas des angles l, ω et Ω, elle est connue par sa restriction sur la sous-variété définie par

$$l = \omega = \Omega = 0. \tag{B.36}$$

La restriction de σ_D sur cette sous-variété est clairement nulle. Calculons la restriction de $d\vec{p}\wedge d\vec{r}$ sur cette sous-variété. Sur cette sous-variété, le vecteur $\vec{r}$ vit sur l'axe Ox_1 et le vecteur $\vec{p}$ est perpendiculaire à l'axe Ox_1. D'où la restriction de $d\vec{p}\wedge d\vec{r}$ sur cette sous-variété est nulle. On en déduit que

$$\sigma_O = 0. \tag{B.37}$$

Cela montre d'une part que

$$\sigma = d\vec{p}\wedge d\vec{r} = \sigma_D. \tag{B.38}$$

et d'autre part que les angles possibles sont donnés par

$$\Phi_l = l + \frac{\partial \Phi}{\partial I_l}, \tag{B.39}$$

$$\Phi_\omega = \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial I_\omega}, \tag{B.40}$$

$$\Phi_\Omega = \Omega + \frac{\partial \Phi}{\partial I_\Omega}. \tag{B.41}$$

Φ étant une fonction régulière quelconque des actions.

Conclusion

Notre lemme, qui généralise la résonance d'Herman, donne des relations algébriques entre les coefficients du développement du hamiltonien séculaire à tous les ordres. L'interprétation dynamique de ces relations à l'ordre deux est la résonance d'Herman. On n'a pas trouvé d'interprétation dynamique pour ces relations, aux ordres supérieurs. Il est important de diriger la recherche de ce côté.

On a trouvé d'autres relations entre les coefficients de notre développement. Ces relations demeurent, jusqu'à présent, sans démonstrations. Il est indispensables de chercher à démontrer ces relations et peut être trouver des liens avec notre lemme. L'interprétation dynamique de ces relations sera aussi à étudier.

Certaines des variables utilisées ou construites dans ce travail ont des caractéristiques très intéressantes. Il est important de les exploiter dans d'autres problèmes. Les variables de Souriau sont très utiles quand on est à la recherche des propriétés globales et les variables s_c et g_c sont à conseiller pour traiter les aspects techniques. Les familles $SO(3)$-invariantes et $O(3)$-invariantes réduisent considérablement la taille des développements.

Bibliographie

[1] K. Abdullah, Développement réduit de la fonction perturbatrice, C. R. Acad. Sci. Paris, t.332, Série 1 (2001) p. 541–544

[2] J. L. Lagrange, Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, Œuvres, V5, Gauthier-Villars, Paris 1781, pp.125–207,

[3] J. M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris 1969,

[4] H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste, Tome $I\!I$, I^{er} partie, Développement de la fonction perturbatrice, Gauthier-Villars, Paris 1907,

[5] H. Poincaré, Sur les petits diviseurs dans la théorie de la Lune, Bulletin astronomique, 25 (1908) pp. 321–360, Œuvres, Gauthier-Villars, Paris, tome 8, pp. 332–366

[6] H. Poincaré, Œuvres, Vol. 7, Gauthier-Villars, Paris 1896, pp. 496–511,

[7] H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste, tome I, ch $XV\!I\!I\!I$, Gauthier-Villards, Paris 1905,

[8] H. Poincaré, Œuvres, Vol. 8, Gauthier-Villars, Paris 1896, pp. 5–109,

[9] U.-J. Le Verrier, Annales de l'Observatoire impérial de Paris, Tome I, Paris 1855, p.258,

[10] J. Laskar et P. Robutel, Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the planetary Hamiltonian, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 62 No. 3, 1995,

[11] P. Robutel, Contribution à l'étude de la stabilité du problème planétaire des trois corps, thèse de doctorat de l'Observatoire de Paris, Paris 1993, pp.5–6,

[12] A. V. Borisov et A. E. Pavlov, Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere - I, Regular & chaotic dynamics, Vol. 3, No. 1, 1998, p. 29,

[13] C. Delaunay, Note sur les mouvements du périgée et du nœud de la Lune, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 74 (1872), p. 17

[14] F. Malige, P. Robutel, J. Laskar, Partial reduction in the N-body planetary problem using the angular momentum integral, preprint, avril 2001

[15] A. Milani, Z. Knežević, Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 49 (1990) p. 368

[16] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tom I, Albert Blanchard, paris, p ,

[17] V. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou, p. 276

[18] V. Arnold, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Editions Mir, Moscou, pp. 141–168,

[19] A. Danjon, Astronomie générale, Edition Albert Blanchard, Paris pp. 165–170,

[20] R. Westfall, Newton, Figures de la science, France.

[21] J. Moser, E. Zehnder, Notes on dynamical systems, Institut Nyu 1979, pp. 395–412.

Récapitulatif des familles des variables et des séries

	Définition	Partie quadratique	Partie quartique
Variables de Souriau ξ_c, η_c	p. 13	p. 38	p. 51
Variables de Poincaré x_p, y_p	p. 12	non fournie	non fournie
Variables rationnelles s_c, g_c	p. 12	non fournie	non fournie
La famille linéaire $\rho, \tau_1, \tau_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$	p. 55	p. 56	p. 56
La première famille quadratique $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$	p. 57	p. 59	p. 60
La deuxième famille quadratique $T_1, T_2, V_1, V_2, W_1, W_2$	p. 60	p. 61	p. 61