

UNIVERSITÉ PARIS 7-DENIS DIDEROT

**THÈSE DE DOCTORAT EN
MATHÉMATIQUES**

présentée par Martin CELLI

**Sur les mouvements homographiques de N corps associés à
des masses de signe quelconque, le cas particulier où la
somme des masses est nulle, et une application à la
recherche de chorégraphies perverses**

Thèse dirigée par Monsieur Alain CHENCINER
codirigée par Monsieur Alain ALBOUY

soutenue le 26 septembre 2005 à l'Observatoire de Paris

Rapporteurs

Ernesto PÉREZ-CHAVELA
Carles SIMÓ

Jury

Marc CHAPERON (président)
Alain CHENCINER (directeur)
Alain ALBOUY (codirecteur)
Mikhaël BALABANE
Christian MARCHAL
Alexei TSYGVINTSEV

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur Mikhaël Balabane, professeur à l'Université Paris 13, pour m'avoir donné envie de faire des Mathématiques à mon entrée en école d'ingénieurs. Pour m'avoir encouragé à travailler sur ce sujet de thèse précisément parce qu'il devait lui permettre de comprendre enfin son vieux cours de Mathématiques Spéciales du lycée Sainte Geneviève. Pour m'avoir donné l'espoir insensé de trouver une cohérence aux Mathématiques grâce à ses cours évocateurs à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Pour m'avoir supporté comme chargé de TD à l'Université de Villetaneuse. Pour m'avoir aidé à surmonter diverses difficultés avec un enthousiasme communicatif, pour m'avoir partiellement transmis sa vision informelle, insouciance et chaleureuse des Mathématiques.

Je remercie Monsieur Alain Chenciner, professeur à l'Université Paris 7, pour avoir répondu à mes nombreuses interrogations, aussi bien sur des résultats mathématiques que sur la façon dont on fait des Mathématiques en général, pour m'avoir régulièrement conseillé des références adaptées aux problèmes que je désirais traiter. Pour m'avoir posé des questions auxquelles j'ai parfois su répondre tout en me laissant une certaine liberté dans le choix des problèmes que j'abordais. Je le remercie aussi et surtout pour m'avoir rappelé qu'on ne pouvait faire de Mathématiques sans réfléchir à des questions précises et concrètes, et qu'en même temps le Mathématicien devait savoir répondre à des questions mal posées. Pour m'avoir appris que les problèmes intéressants étaient les problèmes naturels, et que, pour qu'un concept devienne naturel, il fallait se pencher dessus suffisamment longtemps. Pour m'avoir rappelé que même si écrire de la poésie consistait exactement à exhiber un élément d'un sous-espace de fichiers-textes admissibles (défini par un ensemble de contraintes de versification et de sémantique), la seule règle valable dans ce domaine consistait à ne pas avoir cette règle en tête au moment d'écrire. Pour m'avoir dit qu'un résultat difficile n'était pas nécessairement intéressant. Pour m'avoir enseigné avec méthode à ne pas être logique. Pour m'avoir laissé prendre conscience avec discrétion et efficacité de mes erreurs tout en me précisant que, de toute façon, la durée d'une thèse était beaucoup trop courte pour permettre à un étudiant de changer. Pour m'avoir rappelé que le contenu était plus important que le récipient, et que définir un récipient et un contenu, c'était déjà se focaliser sur le récipient. Je le remercie pour sa gentillesse, même s'il la définit comme le résultat de conditionnements qu'il a subis. J'espère avoir l'occasion de continuer à travailler avec lui quelque temps encore pour comprendre le sens exact de ce que je viens d'écrire, ou pour me délivrer définitivement de mon envie de lui trouver un sens (les deux doivent être un peu équivalents), et, d'ailleurs, de mon envie de trouver un sens à beaucoup de choses en général.

Je remercie Monsieur Alain Albouy, chargé de recherche à l'Institut de Mécanique Céleste, pour ses conseils, et en particulier pour m'avoir indiqué les références les plus anciennes concernant des résultats que je croyais connaître. Pour m'avoir supporté pendant près de quatre ans dans son bureau. Pour m'avoir donné en-

vie de partager sa vision épurée et authentique des Mathématiques. Pour avoir répondu efficacement et à de nombreuses reprises à mes questions qui ne voulaient rien dire, par des réponses qui ne voulaient rien dire, mais dont j'ai pu mesurer l'efficacité à plus ou moins long terme. Pour m'avoir appris à apprécier certaines démonstrations foudroyantes, mais aussi à ne pas m'attacher au formalisme dans lequel une démonstration est écrite.

Je remercie l'ensemble des membres de l'Institut de Mécanique Céleste pour m'avoir fait profiter de leurs conseils et de leur bonne humeur, en particulier les membres de l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques, et les (ex-) (post-) doctorants et stagiaires. Je remercie tout particulièrement Stefanella Boatto pour son enthousiasme, sa gentillesse, ses conseils, de nombreuses conversations intéressantes sur les Mathématiques ou la psychologie, et sa présence amicale, Jacques Féjoz pour m'avoir révélé et confirmé à plusieurs reprises l'existence d'un Pont entre le calcul des structures et les Mathématiques théoriques, et pour quelques conseils, Anne Robadey et Andrea Venturelli pour de nombreuses discussions.

Je remercie Monsieur Carles Simó, professeur à la Universitat de Barcelona, pour avoir relu certaines notes contenant une partie des résultats figurant dans cette thèse, pour m'avoir donné quelques conseils utiles sur les chorégraphies perverses et pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie Monsieur Ernesto Pérez-Chavela, professeur à la Universidad Autónoma Metropolitana de Mexico, pour quelques discussions sur les configurations centrales, l'existence de continua, et quelques problèmes analogues au problème newtonien, et pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie Monsieur Marc Chaperon, professeur à l'Université Paris 7, pour avoir, à un moment crucial de mon parcours universitaire, fermé les yeux sur ma connaissance approximative des théorèmes de fonctions implicites. Et je le remercie à nouveau d'assumer les lourdes conséquences de cet acte en présidant le jury de ma thèse.

Je remercie Messieurs Christian Marchal, ingénieur général des Mines, et Alexei Tsygvintsev, maître de conférences à l'École Normale Supérieure de Lyon, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Madame Michèle Wasse pour m'avoir aidé à résoudre certaines difficultés administratives tout au long de la préparation de cette thèse.

Je remercie ma famille pour m'avoir aidé et encouragé dans la préparation de cette thèse, et plus généralement pendant mes études, pour avoir soutenu dès le début une aventure dont on elle ne connaissait exactement ni les tenants ni les aboutissants, et pour avoir su depuis toujours que ce travail aboutirait.

Je remercie mes étudiants, en particulier à l'Université de Villetaneuse, pour

m'avoir, à différentes occasions, transmis leur enthousiasme, d'origine non nécessairement mathématique.

Je remercie quelques amis pour m'avoir diverti avec leur humour.

Je remercie les galaxies de somme des masses nulle pour m'avoir inspiré la plus grande partie de cette thèse tout en n'existant que comme objets mathématiques abstraits, et, *last but not least*, toutes celles et tous ceux qui, pour un temps ou pour toujours, par fantaisie, par compassion ou par indulgence, parfois à mon insu, se sont faits plus ou moins consciemment Mathématiciens et m'ont aidé à croire à l'existence de ces galaxies.

”Si, au lieu de s’arrêter à la lecture d’une certaine décimale, on regarde la décimale suivante, et ainsi de suite, alors le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel.”

Un élève.

Table des matières

1	Systèmes de N corps de somme des masses nulle	18
1.1	Le vecteur d'inertie	18
1.2	Le problème des deux corps à somme des masses nulle	20
1.3	Configurations de vecteur d'inertie nul	21
2	Solutions homographiques planes et homothétiques associées à des masses de signe quelconque	23
2.1	Une condition nécessaire et suffisante sur la configuration et les vitesses à la date 0	23
2.2	Configurations centrales complexes de trois corps	28
2.3	Configurations centrales de quatre corps à somme des masses nulle .	31
2.4	Equilibres de N corps à somme des masses nulle	39
3	Solutions rigides associées à des masses de signe quelconque	42
3.1	Notations	42
3.2	Un résultat d'algèbre linéaire	43
3.3	Configurations équilibrées et mouvements rigides	44
3.4	Mouvements rigides de dimension 3	47
4	Sur le gain d'intégrabilité à somme des masses nulle	53
5	Sur les éventuelles chorégraphies perverses	57

Résumé

Cette thèse a été préparée à l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE) de l'Observatoire de Paris, de septembre 2001 à avril 2005, sous la direction de Messieurs Alain Chenciner et Alain Albouy. Elle traite du problème des N corps, qui consiste en l'étude des solutions des équations de Newton, qui décrivent le mouvement d'un système de N particules ponctuelles en interaction gravitationnelle. Cette thèse a plus précisément pour objet l'étude des solutions homographiques du problème des N corps associées à des masses de signe quelconque.

Le point de départ de ce travail est une question qui m'a été posée par A. Chenciner en octobre 2000, au sujet des chorégraphies. Une chorégraphie est une solution des équations de Newton dans laquelle les N corps se suivent sur la même courbe à intervalles de temps égaux ([CGMS]). La première chorégraphie connue est la solution de Lagrange : trois corps se suivent sur un cercle en formant un triangle équilatéral. Le premier exemple non trivial de chorégraphie, le "huit", a été mis en évidence par C. Moore en 1993, et son existence a été prouvée par A. Chenciner et R. Montgomery en 1999 ([CM]). Toutes les chorégraphies connues actuellement nécessitent des masses égales, et A. Chenciner a prouvé qu'il n'existait pas, dans le plan, de chorégraphie à masses distinctes, ou chorégraphie "perverse", pour un nombre de corps N inférieur ou égal à 5 ([Ch1], [Ch2]). Aussi, la question qu'il m'a posée portait sur l'éventuelle existence de chorégraphies perverses pour $N \geq 6$. La section 5 de cette thèse répond négativement à cette question dans le cas où le potentiel est logarithmique. Ceci permet de prouver qu'il n'existe pas de chorégraphie perverse pour un système de N tourbillons satisfaisant les équations de Helmholtz ([He]). La section 5 propose également une minoration du plus grand rapport des distances mutuelles au cours d'une éventuelle chorégraphie perverse pour le potentiel newtonien.

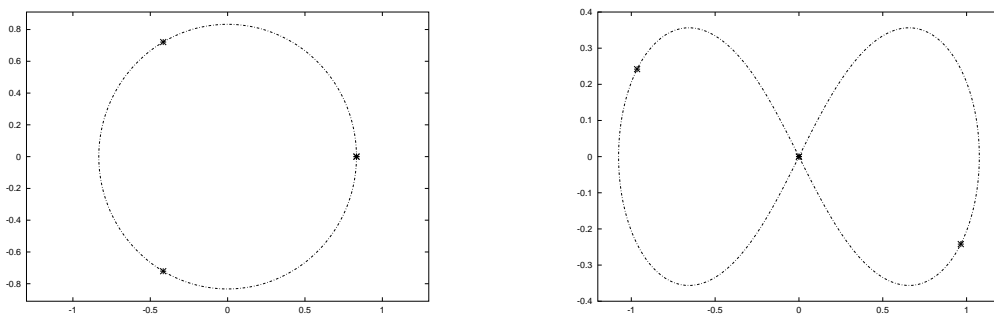


FIG. 1 – La solution circulaire de Lagrange et le "huit" (d'après [Si4]). Trois corps se suivent sur la même courbe.

L'obtention de ce résultat a nécessité l'étude d'équilibres absolus associés à des masses de somme nulle. Ces masses sont en fait des intermédiaires de calcul qui apparaissent quand on soustrait les équations de Newton associées à deux systèmes de masses positives. Les systèmes de N corps de somme des masses nulle possèdent

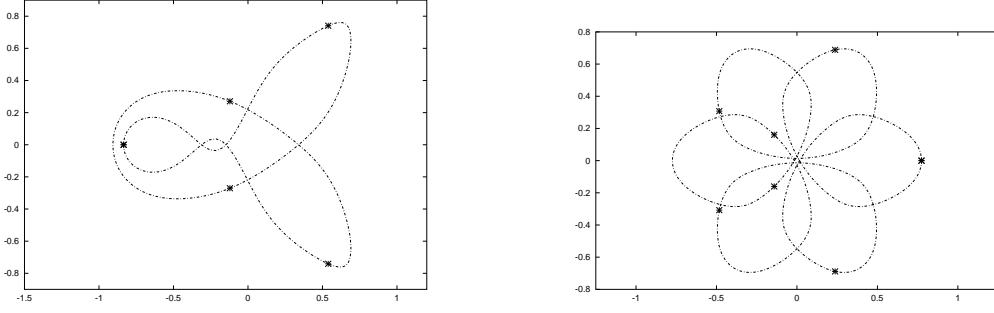


FIG. 2 – Deux chorégraphies de 5 et 7 corps de masses égales (d’après [Si4]).

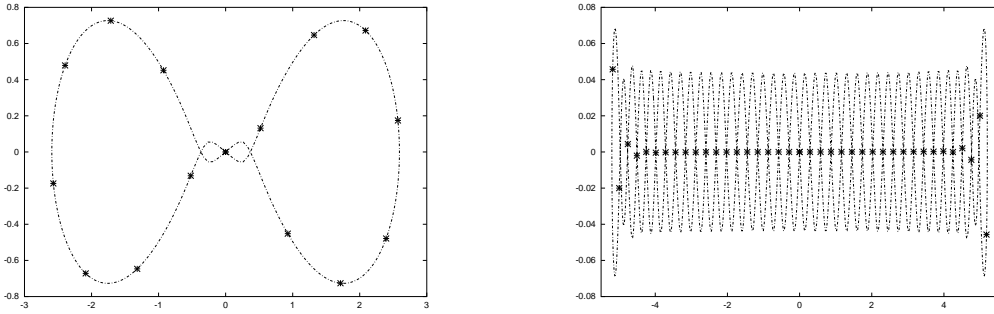


FIG. 3 – Deux chorégraphies de 15 et 39 corps de masses égales (d’après [Si4]).

des propriétés particulières. Ceci découle du fait que le centre d’inertie est remplacé par un vecteur d’inertie, dont la connaissance fournit des informations sur la configuration à translation près. Les propriétés de cet objet sont présentées dans la section 1.

Au lieu de me limiter à l’étude des équilibres absolus à somme des masses nulle, j’ai préféré considérer les configurations centrales associées à des masses de signe quelconque, qui en constituent une généralisation naturelle. J’ai également décrit les mouvements engendrés par ces configurations pour certaines valeurs des vitesses initiales. Ces résultats sont présentés dans la section 2, qui généralise à des masses de signe quelconque des résultats classiques sur les mouvements homographiques à masses positives ([AC]). La section 2 dénombre également les configurations centrales associées à des masses $(x, -x, y, -y)$. Il s’agit, avec le cas à masses égales, du seul cas connu actuellement où l’on peut dénombrer les configurations centrales d’un système de quatre corps.

Les mouvements rigides associés à des masses positives sont décrits dans [AC]. A masses positives, un calcul simple montre qu’un mouvement rigide de dimension inférieure ou égale à trois est plan. Dans la section 3, je caractérise les mouvements rigides associés à des masses de signe quelconque. Je montre en particulier que, si une certaine relation entre les masses et les distances mutuelles est vérifiée (et c’est toujours le cas quand la somme des masses est nulle), il existe des mouvements rigides de dimension 3. La configuration n’est alors plus nécessairement centrale, mais équilibrée au sens de [AC].

A somme des masses nulle, l'existence d'un vecteur d'inertie permet très souvent de se ramener à un problème à $N - 1$ corps. Ceci a donné implicitement la possibilité, dans la section 2, de traiter un problème non actuellement résolu avec des masses de somme non nulle : la détermination des configurations centrales de quatre corps. Un avatar de cette dégénérescence avait été observé en 1892 par Dziobek, à travers la considération de l'équation de Lagrange-Jacobi ([Dz]). La section 4 étudie les aspects dynamiques de cette dégénérescence, et fournit un cas d'intégrabilité du problème colinéaire des trois corps.

Les résultats des sections 2 et 5 portant sur les équilibres à somme des masses nulle et les chorégraphies perverses sont évoqués dans [Ce1]. Les résultats des sections 2 et 4 sur les mouvements homothétiques et homographiques plans et le gain d'intégrabilité à somme des masses nulle font l'objet de [Ce2]. La section 3 sur les mouvements rigides reprend les résultats contenus dans [Ce3].

Abstract

This Ph.D thesis has been prepared in the Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE), in the Observatory of Paris, from September 2001 to April 2005. It was supervised by Prof. Alain Chenciner and Dr. Alain Albouy. The thesis deals with the N -body problem, whose aim is to study the solutions of Newton's equations. These equations describe the motion of a system of N punctual particles which interact through gravitation. More precisely, the aim of the thesis is to study the homographic solutions of the N -body problem when the masses are allowed to be positive or negative.

The starting point of this work is a question about choreographies that A. Chenciner asked me in October 2000. Let us call a choreography a solution of Newton's equations in which the N bodies chase each other on the same curve, with the same phase shift between two bodies ([CGMS]). The first known choreography is Lagrange's solution : three bodies making an equilateral triangle chase each other on a circle. The first non trivial example of a choreography, which is called the "eight", was found by C. Moore in 1993, and its existence was shown by A. Chenciner and R. Montgomery in 1999 ([CM]). All the choreographies that are actually known require equal masses. Indeed, A. Chenciner has proved that in the plane, there was no choreography with distinct masses or "perverse" choreography, with number of body N lower than or equal to 5 ([Ch1], [Ch2]). Thus, the question he asked was about the possible existence of perverse choreographies for $N \geq 6$. Section 5 gives a negative answer when the potential is logarithmic. This enables to prove that there is no perverse choreography for a N -vortex system which satisfies Helmholtz's equations ([He]). Section 5 also proposes a lower bound for the largest ratio between the largest and the smallest mutual distances for a possible perverse choreography with Newtonian potential.

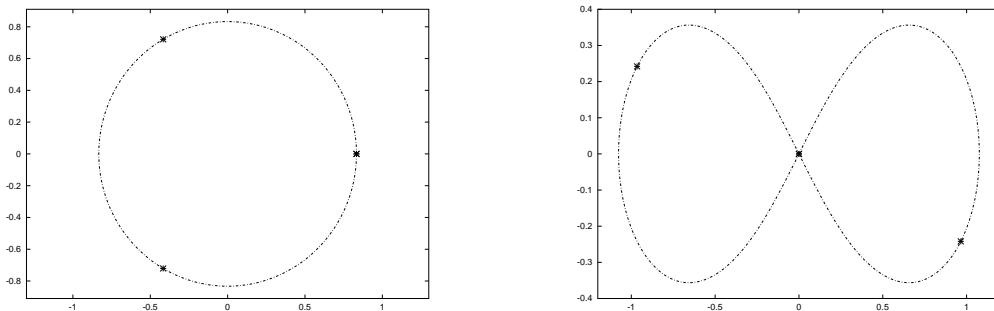


FIG. 4 – Lagrange's circular solution and the "eight" (from [Si4]). Three bodies chase each other on the same curve.

In order to obtain this result, I had to study absolute equilibria with masses whose sum vanishes. In fact, these masses are auxiliary variables which appear when we subtract Newton's equations for two systems of positive masses. There are special properties when the total mass vanishes. This is entailed by the fact that the center of inertia is replaced by a vector of inertia, whose knowledge brings

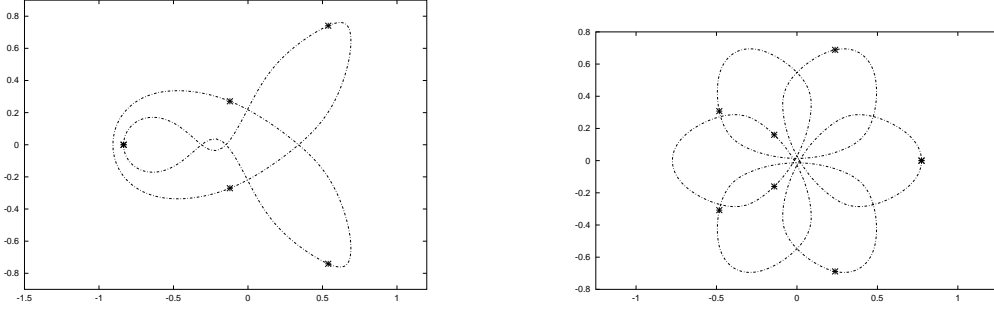


FIG. 5 – Two choreographies with 5 and 7 bodies and equal masses (from [Si4]).

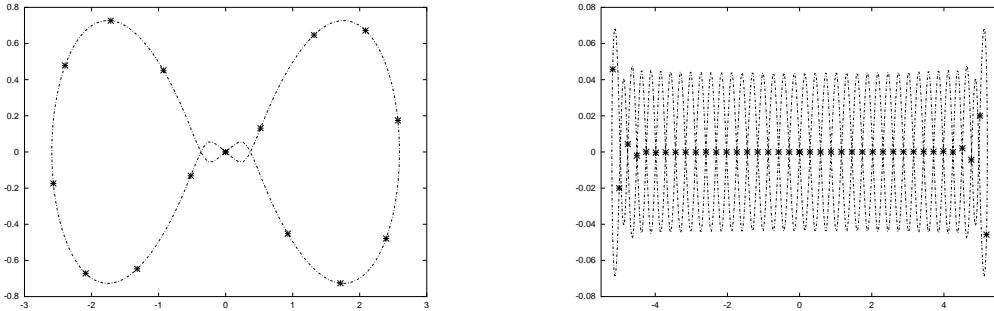


FIG. 6 – Two choreographies with 15 and 39 bodies and equal masses (from [Si4]).

us information on the configuration after reduction by translations. The properties of this object are described in section 1.

Rather than restrict the study to absolute equilibria with vanishing total mass, I have considered central configurations with positive and negative masses, which are a natural generalization. I have also described the motions generated by these configurations for certain initial velocities. These results are described in section 2, which gives a generalization for positive and negative masses of classical results on homographic motions for positive masses ([AC]). Section 2 also lists the central configurations associated with masses $(x, -x, y, -y)$. This case and the case with equal masses are the only known cases where we can enumerate the central configurations of a four-body system.

Rigid motions with positive masses are described in [AC]. For positive masses, a simple computation shows that a rigid motion with dimension lower than or equal to three is planar. In section 3, I give a characterization of rigid motions with positive and negative masses. In particular, I show that if a certain relationship between the masses and the mutual distances is satisfied (this is always the case when the total mass vanishes), there are rigid motions with dimension 3. Then the configuration is no more necessarily central, but balanced in the sense of [AC].

When the total mass vanishes, the existence of a vector of inertia often enables to restrict our study to a $(N - 1)$ -body problem. In an implicit way, in section 2, this enabled to deal with a problem which at present is still unsolved for a

non-vanishing total mass : the enumeration of four-body central configurations. An avatar of this degeneration had been observed by Dziobek in 1892, through the consideration of the Lagrange-Jacobi equation ([Dz]). Section 4 studies the dynamical aspects of this degeneration and provides a case of integrability for the collinear three-body problem.

The results in sections 2 and 5 about equilibria with vanishing total mass and perverse choreographies are presented in [Ce1]. The results in sections 2 and 4 about homothetic and homographic planar motions and the better integrability with vanishing total mass are the subject of [Ce2]. Section 3 about rigid motions resumes the results of [Ce3].

Notations

On s'intéresse, dans cette thèse, à un système de N corps ponctuels de masses m_1, \dots, m_N non nulles, de signe quelconque, de somme M , occupant à la date t les positions $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$, éléments d'un espace vectoriel euclidien E . Le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$. L'espace E est identifié avec son dual de la façon habituelle. Un sous-espace de E de dimension 2 pourra être identifié à \mathbb{C} . Le produit de deux nombres complexes u et v est noté uv ou $u.v$.

Les équations de la dynamique associées à un potentiel U sont définies par :

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)).$$

Les équations de Newton sont les équations de la dynamique associées au potentiel newtonien :

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}.$$

Elles ont donc pour expression :

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)),$$

$$\text{avec } \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}.$$

1 Systèmes de N corps de somme des masses nulle

1.1 Le vecteur d'inertie

On définit, pour un système de N corps de somme des masses non nulle, son *centre d'inertie* :

$$\vec{G}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{a} + \frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{a})$$

(quantité indépendante de \vec{a}). Pour un système de N corps de somme des masses nulle, en revanche, le centre d'inertie n'est pas défini, mais on peut définir le vecteur :

$$\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{a})$$

(quantité indépendante de \vec{a}), que l'on appellera *vecteur d'inertie*. Le vecteur d'inertie est invariant si la configuration subit une translation. Plus généralement, si une configuration subit une transformation affine, son vecteur d'inertie subit la transformation linéaire associée.

Proposition 1 *Pour une solution des équations de Newton à somme des masses nulle, le vecteur d'inertie est une fonction affine du temps.*

Preuve. Il suffit d'écrire :

$$\vec{0} = m_1 \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) + \dots + m_N \vec{\gamma}_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{\lambda}(\ddot{\vec{r}}_1, \dots, \ddot{\vec{r}}_N).$$

On définit les constantes \vec{P} et \vec{R} par : $\vec{\lambda}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \vec{R} + t\vec{P}$.

Remarque 1. L'analogie de cette propriété à somme des masses non nulle est le principe d'inertie : le centre d'inertie effectue un mouvement rectiligne uniforme.

Remarque 2. Le mouvement d'un fluide plan incompressible peut être décrit par un système de N tourbillons de vorticités $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, de signe quelconque, dont les positions $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, qui appartiennent à un même plan, sont solutions des *équations de Helmholtz* ([He], [ON]) :

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = r \left(\sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} \kappa_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2} \right),$$

où r désigne la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$. Pour ces équations, on définit de même, à somme des vorticités nulle, un vecteur de vortacité, qui est une intégrale première du mouvement invariante par translation.

Remarque 3. On note $I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ le *moment d'inertie* par rapport au point \vec{a} . Il possède l'expression :

$$I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{r}_i - \vec{a}\|^2.$$

Ecrivons l'égalité de Leibniz, valable pour des systèmes de masses de somme quelconque et pour toute origine \vec{a} :

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - \left\| \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{a}) \right\|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2.$$

A somme des masses nulle, on a, d'après la proposition 1 et la nullité de la somme des masses :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^2 &= -\|\vec{\lambda}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))\|^2 = -\|t\vec{P} + \vec{R}\|^2 \\ &= -\|\vec{P}\|^2 t^2 - 2(\vec{P}|\vec{R})t - \|\vec{R}\|^2. \end{aligned}$$

La grandeur $\sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^2$ est donc une fonction quadratique du temps. Dziobek avait obtenu ce résultat dans le cas de trois corps comme une conséquence de l'égalité de Lagrange-Jacobi, dégénérée à somme des masses nulle ([Dz]). Il n'avait manifestement pas remarqué que cette équation était le carré scalaire d'une équation vectorielle.

Remarque 4. Si, à somme des masses quelconque, on remplace le potentiel newtonien par un potentiel homogène de degré 2κ , également noté U par commodité, l'égalité de Lagrange-Jacobi a pour expression :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2H + 2(\kappa + 1)U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N),$$

où \vec{a} est une origine qui ne dépend pas du temps et H désigne l'intégrale première de l'énergie. A somme des masses non nulle, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I_{\vec{G}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2H_0 + 2(\kappa + 1)U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N),$$

où H_0 est l'énergie à centre d'inertie fixé.

Si l'on prend pour origine $\vec{G}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, l'égalité de Leibniz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) I_{\vec{G}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2.$$

Ainsi :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2 = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) (4H_0 + 4(\kappa + 1)U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)).$$

Pour $\kappa = -1$ (potentiel dit de Jacobi), nous observons le même phénomène qu'à somme des masses nulle : la grandeur $\sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2$ est une fonction quadratique du temps.

1.2 Le problème des deux corps à somme des masses nulle

Quand $M = m_1 + m_2 \neq 0$, le problème des deux corps associé à des masses de signe quelconque se traite de la même façon que le problème à masses positives, et le vecteur $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ parcourt une conique. Notons que si $M < 0$, l'énergie est positive (car c'est la différence entre l'énergie cinétique, toujours positive, et le potentiel, qui est alors négatif), et cette conique est nécessairement une hyperbole. En revanche, comme conséquence de l'existence d'un vecteur d'inertie, la forme des solutions est totalement différente pour $M = 0$.

Proposition 2 *Les solutions des équations de Newton pour un système de deux corps de masses $m_1 = 1$ et $m_2 = -1$ ont l'expression suivante :*

- Si $\vec{P} = \vec{0}$, \vec{r}_1 et \vec{r}_2 parcourent des paraboles (éventuellement dégénérées) :

$$\vec{r}_i(t) = \frac{1}{2}t^2 \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|^3} + t\dot{\vec{r}}_i(0) + \vec{r}_i(0).$$

- Si $\vec{P} \neq \vec{0}$, $\vec{P} = \alpha\vec{R}$ ($\alpha \neq 0$) :

$$\vec{r}_i(t) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha t - \ln(\alpha t + 1)) \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|^3} + t\dot{\vec{r}}_i(0) + \vec{r}_i(0).$$

- Cas où \vec{P} et \vec{R} ne sont pas colinéaires. On peut supposer : $\det(\vec{P}, \vec{R}) > 0$. Notons \vec{P}' l'élément de $\text{vect}(\vec{P}, \vec{R})$ tel que $\left(\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}, \vec{P}'\right)$ soit orthonormée directe. Définissons $s(t)$ par :

$$\text{sh}(s(t)) = -\frac{(\vec{P}|t\vec{P} + \vec{R})}{\det(\vec{P}, \vec{R})}.$$

On a alors (\vec{a}_i, \vec{b}_i sont des constantes) :

$$\vec{r}_i(t) = \frac{1}{\|\vec{P}\|^2} \left(s(t) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + \text{ch}(s(t)) \vec{P}' \right) + t\vec{a}_i + \vec{b}_i.$$

Dans un même référentiel en translation dont l'origine parcourt une chaînette, les deux corps effectuent des mouvements rectilignes uniformes.

Preuve. On a : $\vec{\lambda}(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = t\vec{P} + \vec{R}$. La relation :

$$\ddot{\vec{r}}_1(t) = \ddot{\vec{r}}_2(t) = \frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)}{\|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\|^3} = \frac{t\vec{P} + \vec{R}}{\|t\vec{P} + \vec{R}\|^3}$$

permet de se ramener à deux intégrations d'une fonction.

Remarque. Le cas $\vec{P} = \vec{0}$ est mentionné dans [Dz].

1.3 Configurations de vecteur d'inertie nul

Le volume algébrique du paralléloétope engendré par $p \geq 2$ points $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$, noté $\text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$, est défini par :

$$\text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) = \det(\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p - \vec{a}_1).$$

On pose : $\Delta_i = \text{Vol}(\vec{r}_{i+1}, \dots, \vec{r}_N, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1})$.

Le moment d'inertie de la configuration par rapport au point \vec{a} , noté $I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, est défini par :

$$I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{r}_i - \vec{a}\|^2.$$

Proposition 3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- La configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est de vecteur d'inertie nul. (1)
 - Le moment d'inertie $I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est indépendant de \vec{a} . On l'appellera moment d'inertie de la configuration. (2)
 - Le moment d'inertie $I_{\vec{r}_i}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est indépendant de i . (3)
- Si, de plus, le sous-espace affine engendré par la configuration est de dimension $N - 2$, ces propriétés sont équivalentes à la propriété suivante :
- Le vecteur (m_1, \dots, m_N) est colinéaire à $(-\Delta_1, \Delta_2, \dots, (-1)^{N-1}\Delta_{N-1}, (-1)^N\Delta_N)$ si N est pair, et à $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ si N est impair. (4)

Preuve. Posons : $I(\vec{a}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Supposons $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$. On a alors, pour tout \vec{a} :

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{a}}(\vec{a}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -2\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}.$$

Donc $I_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est indépendant de \vec{a} . La propriété (1) implique donc la propriété (2).

La propriété (2) implique trivialement la propriété (3).

Supposons qu'il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout i :

$$\sum_{j=1}^N m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2 = C \tag{i}$$

La combinaison linéaire $\sum_{i=1}^N m_i(i)$ et l'égalité de Leibniz nous donnent la nullité du vecteur d'inertie. Donc la propriété (3) implique la propriété (1).

Supposons que la propriété (1) soit vraie et que le sous-espace affine engendré par la configuration soit de dimension $N - 2$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_2) = \det(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, (\vec{r}_4 - \vec{r}_3) + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \dots, (\vec{r}_N - \vec{r}_3) + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)) \\ &= \det(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) = -\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3), \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \det(\vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3, \vec{r}_1 - \vec{r}_3) = (-1)^{N-3} \det(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3).$$

Supposons $m_1 + m_2 = 0$. Si N est pair :

$$\begin{aligned} \Delta_2 - \Delta_1 &= -\det(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) + \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) \\ &= \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) = 0. \end{aligned}$$

Si N est impair :

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \det(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) = 0.$$

On suppose maintenant : $m_1 + m_2 \neq 0$. On note \vec{r} le barycentre de $\{(\vec{r}_1, m_1), (\vec{r}_2, m_2)\}$, qui est aussi le barycentre de $\{(\vec{r}_3, m_3), \dots, (\vec{r}_N, m_N)\}$. On a :

$$\Delta_1 = -\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) = -\det(\vec{r}_2 - \vec{r}, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (-1)^{N+1} \det(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) \\ &= (-1)^{N+1} \det(\vec{r}_1 - \vec{r}, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3) \\ &= (-1)^{N+1} \det\left(-\frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_2 - \vec{r}), \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3\right) \\ &= -\frac{m_2}{m_1} (-1)^{N+1} \det(\vec{r}_2 - \vec{r}, \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_3). \end{aligned}$$

D'où : $\Delta_2 = (-1)^{N+1} \Delta_1 m_2 / m_1$. Si N est pair, $m_1 \Delta_2 = -m_2 \Delta_1$. Si N est impair, $m_1 \Delta_2 = m_2 \Delta_1$. En effectuant des permutations sur les corps, on prouve la propriété (4).

Supposons que le sous-espace affine engendré par la configuration soit de dimension $N - 2$ et que la propriété (4) soit vraie. Comme la configuration est contenue dans un sous-espace affine de dimension $N - 2$, il existe m'_1, \dots, m'_N non tous nuls, de somme nulle, tels que l'on ait : $m'_1 \vec{r}_1 + \dots + m'_N \vec{r}_N = \vec{0}$. Supposons qu'il existe i tel que $m'_i = 0$. Alors $\Delta_i = 0$. Comme $(-\Delta_1, \dots, (-1)^N \Delta_N)$ ou $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ est colinéaire à (m_1, \dots, m_N) et $m_1, \dots, m_N \neq 0$, on a : $\Delta_1 = \dots = \Delta_N = 0$. Donc le sous-espace affine engendré par la configuration est de dimension inférieure ou égale à $N - 3$, ce qui est impossible. Donc pour tout i , $m'_i \neq 0$. En appliquant le raisonnement précédent, on montre que (m'_1, \dots, m'_N) est colinéaire à $(-\Delta_1, \Delta_2, \dots, (-1)^{N-1} \Delta_{N-1}, (-1)^N \Delta_N)$ si N est pair, et à $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ si N est impair. Il est donc colinéaire à (m_1, \dots, m_N) . Comme (m'_1, \dots, m'_N) et (m_1, \dots, m_N) ne sont pas nuls, il existe $\alpha \neq 0$ tel que l'on ait : $(m'_1, \dots, m'_N) = \alpha(m_1, \dots, m_N)$, ce qui prouve la propriété (1).

2 Solutions homographiques planes et homothétiques associées à des masses de signe quelconque

A masses positives, les solutions homographiques constituent une généralisation classique des solutions du problème des deux corps. Une classification de ces mouvements à masses positives est donnée dans [AC], où les configurations qui admettent de tels mouvements sont caractérisées par un système d'équations algébriques. Mais l'étude faite dans [AC] repose notamment sur l'existence d'un produit scalaire associé aux masses, qui n'existe plus lorsque les masses sont de signe quelconque. Nous allons nous restreindre dans cette section aux mouvements homothétiques et aux mouvements homographiques dont la configuration à translation près reste dans le même plan.

2.1 Une condition nécessaire et suffisante sur la configuration et les vitesses à la date 0

Une *configuration* est dite *centrale* si, et seulement si, il existe un réel ξ , appelé *multiplicateur*, tel que l'on ait pour tous i, j :

$$\vec{\gamma}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2\xi(\vec{r}_j - \vec{r}_i).$$

Si $\xi \neq 0$, il existe un unique $\vec{\Omega}$, appelé *centre*, tel que l'on ait, pour tout i :
 $\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2\xi(\vec{r}_i - \vec{\Omega})$.

Si tous les $\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ sont nuls, la configuration est appelée *équilibre absolu*.

Etant donnée une configuration plane, identifions \mathbb{C} et le plan vectoriel associé. La *configuration* est dite *centrale complexe* (ou "dizzy", [Al2]) si, et seulement si, il existe un nombre complexe ξ , appelé *multiplicateur*, tel que l'on ait pour tous i, j :

$$\vec{\gamma}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2\xi(\vec{r}_j - \vec{r}_i).$$

Si $\xi \neq 0$, il existe unique $\vec{\Omega}$, appelé *centre*, tel que l'on ait, pour tout i :

$$\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2\xi(\vec{r}_i - \vec{\Omega}).$$

Proposition 4 *A somme des masses non nulle, une configuration centrale de multiplicateur nul est un équilibre absolu.*

Preuve. On a, pour tout i :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= m_1 \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) + \dots + m_N \vec{\gamma}_N(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) \\ &= (m_1 + \dots + m_N) \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) \end{aligned}$$

car les $\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0))$ sont égaux. Donc pour tout i , $\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) = \vec{0}$.

Proposition 5 *Pour une configuration centrale (respectivement centrale complexe) de multiplicateur non nul :*

- A somme des masses non nulle, son centre est le centre d'inertie.
- A somme des masses nulle, son vecteur d'inertie est nul.

Preuve. Il suffit d'écrire :

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N 2\xi m_i (\vec{r}_i - \vec{\Omega}).$$

Proposition 6 *La valeur du potentiel est nulle pour un équilibre absolu.*

A somme des masses nulle, une configuration centrale de multiplicateur nul vérifie, pour tout i :

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -(\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)).$$

A somme des masses quelconque, une configuration centrale (respectivement centrale complexe) de multiplicateur ξ non nul, de centre $\vec{\Omega}$, vérifie :

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -2\xi I_{\vec{\Omega}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

Preuve. Considérons une configuration centrale (respectivement centrale complexe) de multiplicateur ξ . On a, d'après l'homogénéité du potentiel et son invariance par translation :

$$-U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\vec{r}_1 - \vec{\Omega}, \dots, \vec{r}_N - \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{r}_i - \vec{\Omega}).$$

Si $\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$ pour tout i , la valeur du potentiel est nulle.

A somme des masses nulle, si $\xi = 0$, on a, pour tout i :

$$-U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = (\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)).$$

Supposons maintenant $\xi \neq 0$ à somme des masses quelconque. On considère le cas d'une configuration centrale complexe. Le cas d'une configuration centrale est analogue. On a :

$$-U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 2\text{Re}(\xi) I_{\vec{\Omega}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

On a par ailleurs, d'après l'invariance du potentiel par rotation et translation :

$$\begin{aligned} 0 &= dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(i(\vec{r}_1 - \vec{\Omega}), \dots, i(\vec{r}_N - \vec{\Omega})) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | i(\vec{r}_i - \vec{\Omega})) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \text{Re}(2\xi i |\vec{r}_i - \vec{\Omega}|^2). \end{aligned}$$

D'où : $\text{Im}(\xi) I_{\vec{\Omega}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$.

Remarque 1. Le fait que la valeur du potentiel soit nulle pour un équilibre absolu prouve qu'il n'y a pas d'équilibre absolu pour des masses de même signe.

Remarque 2. D'après cette proposition, pour une configuration centrale complexe de multiplicateur imaginaire, le moment d'inertie par rapport à son centre est nul.

Un mouvement de N corps est dit *homothétique* (respectivement *homographique*) si, et seulement si, il existe une homothétie linéaire (respectivement une similitude linéaire) dépendant du temps s telle que, pour tous i, j , on ait :

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Cette définition est indépendante de l'origine des dates choisie. Au cours d'un mouvement homothétique, la configuration est centrale. Si, au cours d'un mouvement homographique, la configuration à translation près reste dans un même plan (identifié avec \mathbb{C}), elle est centrale complexe.

Proposition 7 *Supposons que la configuration soit centrale complexe de multiplicateur ξ à la date 0, et qu'il existe un complexe s_0 tel que l'on ait, pour tous i, j :*

$$\dot{\vec{r}}_j(0) - \dot{\vec{r}}_i(0) = s_0(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Soit s la solution de l'équation différentielle : $\ddot{s} = 2\xi s/|s|^3$ (problème à un centre fixe placé en 0, de masse complexe -2ξ), telle que $s(0) = 1$ et $\dot{s}(0) = s_0$. Le mouvement est homographique, la configuration à translation près reste dans le même plan, et l'on a :

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Si $\xi = 0$, le mouvement de chaque corps est rectiligne uniforme ou analogue à une solution du problème des deux corps à somme des masses nulle. Et, dans un référentiel en translation, tous les corps effectuent un mouvement rectiligne uniforme. Si la configuration à l'instant 0 est un équilibre absolu, tous les corps effectuent un mouvement rectiligne uniforme.

Si $\xi \neq 0$, tout se passe comme si chaque corps subissait l'action d'un seul corps de masse complexe effectuant un mouvement rectiligne uniforme.

Preuve. Posons, pour $i \geq 2$:

$$\tilde{\gamma}_i(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N) = \vec{\gamma}_i(\vec{0}, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N) - \vec{\gamma}_1(\vec{0}, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N), \quad \tilde{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0)).$$

On a :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{r}}_i(t) &= \ddot{s}(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0)) = 2\xi \frac{s(t)}{|s(t)|^3}(\vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0)) \\ &= \frac{s(t)}{|s(t)|^3}(\vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) - \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0))) \\ &= \frac{s(t)}{|s(t)|^3}\tilde{\gamma}_i(\tilde{r}_2(0), \dots, \tilde{r}_N(0)) = \tilde{\gamma}_i(\tilde{r}_2(t), \dots, \tilde{r}_N(t)). \end{aligned}$$

Donc $(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N)$ est solution du système différentiel : $\ddot{\tilde{r}}_i = \tilde{\gamma}_i(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N)$, $i \geq 2$. Comme $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_1)$ est solution du même système différentiel, et $\tilde{r}_i(0) = \vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0)$, $\dot{\tilde{r}}_i(0) = \dot{\vec{r}}_i(0) - \dot{\vec{r}}_1(0)$, on a :

$$(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N - \vec{r}_1).$$

D'où : $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_1(t) + s(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0))$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) &= \vec{r}_1(t) + s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_1(0)) - (\vec{r}_1(t) + s(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{r}_1(0))) \\ \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) &= s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)) \end{aligned} \quad (1)$$

On en déduit :

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \frac{s(t)}{|s(t)|^3} \tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) \quad (2)$$

Si $\xi = 0$, s est une fonction affine du temps. Donc si l'on fixe \vec{r}_1 , d'après (1), chaque corps effectue un mouvement rectiligne uniforme. D'après (2), si l'on a :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) = \vec{0},$$

le mouvement du corps i est rectiligne uniforme. Si l'on a :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) \neq \vec{0},$$

il est analogue à une solution du problème des deux corps à somme des masses nulle. Si la configuration à l'instant 0 est un équilibre absolu, chaque corps effectue donc un mouvement rectiligne uniforme.

Supposons $\xi \neq 0$. Soit $\vec{\Omega}$ le centre de la configuration centrale complexe à la date 0. Soit $\vec{\Omega} = \dot{\vec{r}}_i(0) - s_0(\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega})$ (égalité indépendante de i). Soit $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega} + t\dot{\vec{\Omega}}$. On peut remarquer comme précédemment que le mouvement $(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N)$ défini par :

$$\tilde{r}_i(t) = \vec{\Omega}(t) + s(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega})$$

est solution des équations de Newton. En effet :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{r}}_i(t) &= \ddot{s}(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}) = 2\xi \frac{s(t)}{|s(t)|^3} (\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}) \\ &= \frac{s(t)}{|s(t)|^3} \tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) = \tilde{\gamma}_i(\tilde{r}_1(t), \dots, \tilde{r}_N(t)). \end{aligned}$$

De plus, $(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N)$ vérifie les mêmes conditions initiales que $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Donc $(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Ainsi :

$$\vec{r}_i(t) - \vec{\Omega}(t) = s(t)(\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}) \quad (1')$$

Les relations (2) et (1') nous donnent :

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{s(t)}{|s(t)|^3} \tilde{\gamma}_i(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) = 2\xi \frac{s(t)}{|s(t)|^3} (\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}) = \frac{2\xi}{|s(t)|^3} (\vec{r}_i(t) - \vec{\Omega}(t)).$$

Si $\vec{r}_i(0) = \vec{\Omega}$, le corps i est toujours confondu avec le centre $\vec{\Omega}(t)$. Sinon, on obtient, en prenant le module de l'équation (1') : $|s(t)| = |\vec{r}_i(t) - \vec{\Omega}(t)|/|\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}|$. Ceci nous donne :

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = 2\xi|\vec{r}_i(0) - \vec{\Omega}|^3 \frac{\vec{r}_i(t) - \vec{\Omega}(t)}{|\vec{r}_i(t) - \vec{\Omega}(t)|^3},$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

Proposition 8 *Supposons que la configuration soit centrale de multiplicateur ξ à la date 0, et qu'il existe un réel α_0 tel que l'on ait, pour tous i, j :*

$$\dot{\vec{r}}_j(0) - \dot{\vec{r}}_i(0) = \alpha_0(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Soit α la solution de l'équation différentielle : $\ddot{\alpha} = 2\xi/\alpha^2$ (problème linéaire à un centre fixe placé en 0, de masse -2ξ), telle que $\alpha(0) = 1$ et $\dot{\alpha}(0) = \alpha_0$. Le mouvement est homothétique, et l'on a :

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = \alpha(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Si $\xi = 0$, le mouvement de chaque corps est rectiligne uniforme ou analogue à une solution du problème des deux corps à somme des masses nulle. Et, dans un référentiel en translation, tous les corps effectuent un mouvement rectiligne uniforme. Si la configuration à l'instant 0 est un équilibre absolu, tous les corps effectuent un mouvement rectiligne uniforme.

Si $\xi \neq 0$, tout se passe comme si chaque corps subissait l'action d'un seul corps effectuant un mouvement rectiligne uniforme.

Preuve. Il suffit de reprendre les arguments de la preuve précédente. Cette fois, les \vec{r}_i appartiennent à un espace affine de dimension quelconque, et s est réel.

Remarque. Dans le problème des N tourbillons, et avec la même définition d'une configuration centrale et d'une configuration centrale complexe (les $\vec{\gamma}_j - \vec{\gamma}_i$ sont proportionnels aux $\vec{r}_j - \vec{r}_i$), il existe des analogues des propositions 7 et 8. Comme les équations de Helmholtz sont du premier ordre, la condition sur les vitesses initiales :

$$\dot{\vec{r}}_j(0) - \dot{\vec{r}}_i(0) = s_0(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0))$$

disparaît. Supposons ainsi qu'une configuration de N tourbillons soit centrale complexe de multiplicateur ξ à la date 0. Soit s la solution de l'équation différentielle : $\dot{s} = 2\xi s/|s|^2$ telle que $s(0) = 1$ (par rapport aux énoncés précédents, l'ordre de l'équation et l'exposant de $|s|$ ont été modifiés). Le mouvement est alors homographique, et l'on a :

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

2.2 Configurations centrales complexes de trois corps

Configurations colinéaires.

Proposition 9 *Etant donnés trois corps de masses m_1, m_2, m_3 , il existe au plus trois configurations centrales colinéaires de ces trois corps de la forme $(r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 > 1)$ (on identifie chaque vecteur avec sa mesure algébrique). Si les masses sont positives, il en existe exactement une. Pour certains systèmes de masses, il existe trois configurations centrales colinéaires de la forme $(0, 1, r_3 > 1)$.*

Preuve. On pourra se reporter à [Al4]. Pour prouver qu'il existe au plus trois configurations centrales colinéaires, il faut appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie. Et l'on peut facilement trouver des cas où un système de masses de la forme (m_1, m_2, m_2) admet trois configurations centrales colinéaires.

Proposition 10 *Dans cet énoncé, et seulement dans cet énoncé, on autorise des masses nulles. Etant donnée une configuration colinéaire de trois corps et deux réels ξ et M , il existe un unique système de masses (dont certaines peuvent être nulles) (m_1, m_2, m_3) de somme M pour lequel la configuration est centrale de multiplicateur ξ .*

Preuve. On peut supposer : $r_1 < r_2 < r_3$. La configuration est centrale de multiplicateur ξ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2\xi(r_2 - r_1) = \gamma_2(r_1, r_2, r_3) - \gamma_1(r_1, r_2, r_3) \\ 2\xi(r_3 - r_1) = \gamma_3(r_1, r_2, r_3) - \gamma_1(r_1, r_2, r_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\xi(r_2 - r_1) = -(m_1 + m_2) \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} + m_3 \frac{r_3 - r_2}{|r_3 - r_2|^3} + m_3 \frac{r_1 - r_3}{|r_1 - r_3|^3} \\ 2\xi(r_3 - r_1) = -(m_1 + m_3) \frac{r_3 - r_1}{|r_3 - r_1|^3} + m_2 \frac{r_2 - r_3}{|r_2 - r_3|^3} + m_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\xi(r_2 - r_1) = m_3 \left(\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{(r_3 - r_2)^2} - \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} \right) - \frac{M}{(r_2 - r_1)^2} \\ 2\xi(r_3 - r_1) = -m_2 \left(\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{(r_3 - r_2)^2} - \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} \right) - \frac{M}{(r_3 - r_1)^2} \end{cases}$$

Comme $r_3 - r_2 < r_3 - r_1$, on a :

$$\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{(r_3 - r_2)^2} - \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} > \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} > 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{(r_3 - r_2)^2} - \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} \neq 0.$$

Le système précédent admet donc exactement une solution (m_2, m_3) .

Proposition 11 *A somme des masses nulle, les configurations centrales colinéaires de trois corps sont les configurations sans collision (si $i \neq j$, $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$) de trois corps de vecteur d'inertie nul. Leur multiplicateur n'est pas nul.*

Preuve. D'après les équations ci-dessus, le multiplicateur d'une configuration centrale colinéaire de trois corps de somme des masses nulle n'est pas nul. D'après la proposition 5, c'est donc que le vecteur d'inertie est nul.

Réciproquement, une configuration de trois corps sans collision de somme des masses nulle et de vecteur d'inertie nul est colinéaire. Posons :

$$2\xi = \frac{\gamma_2(r_1, r_2, r_3) - \gamma_1(r_1, r_2, r_3)}{r_2 - r_1}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \gamma_3(r_1, r_2, r_3) - \gamma_1(r_1, r_2, r_3) &= -\frac{m_2}{m_3}(\gamma_2(r_1, r_2, r_3) - \gamma_1(r_1, r_2, r_3)) \\ &= -2\xi \frac{m_2}{m_3}(r_2 - r_1) = 2\xi(r_3 - r_1). \end{aligned}$$

La configuration est donc centrale.

Configurations non colinéaires.

Proposition 12 *Une configuration non colinéaire de trois corps est centrale si, et seulement si, c'est un triangle équilatéral. Dans ce cas, elle est centrale pour tout système de masses. Son multiplicateur est nul si, et seulement si, la somme des masses est nulle.*

Donnons-nous une configuration non colinéaire et non isocèle de trois corps et identifions le plan de la configuration avec \mathbb{C} . Il existe un système de masses (m_1, m_2, m_3) , unique à homothétie près, pour lequel la configuration est centrale complexe de multiplicateur imaginaire (i. e. complexe non réel). Une configuration non colinéaire, isocèle et non équilatérale de trois corps n'est centrale complexe pour aucun système de masses.

Preuve. La configuration est centrale complexe de multiplicateur ξ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2\xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{\gamma}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) - \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \\ 2\xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \vec{\gamma}_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) - \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \end{cases}$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} 2\xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ 2\xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = -(m_1 + m_3) \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = m_3 \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{m_1 + m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + \frac{m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = -\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{m_1 + m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + \frac{m_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = m_2 \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \right) \end{cases}$$

Permutons les deux premières lignes et exprimons la nullité de la somme des masses dans la troisième ligne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{m_1+m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} + \frac{m_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = m_3\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_1, \xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = m_2\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} \right) \\ 2\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \xi(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)) = 2\det((\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \xi((\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))) \\ = m_1\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \right) \end{array} \right.$$

Ce système équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\operatorname{Re}\xi)\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) + 2(\operatorname{Im}\xi)\det(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, i(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) \\ = \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{m_1+m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} + \frac{m_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} \right) \\ 2(\operatorname{Im}\xi)|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = m_3\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} \right) \\ 2(\operatorname{Im}\xi)|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2 = m_2\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} \right) \\ 2(\operatorname{Im}\xi)|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2 = m_1\det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \left(\frac{1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \right) \end{array} \right.$$

Si la configuration est centrale non colinéaire, le premier membre de la quatrième égalité s'annule, ce qui implique : $|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. De même : $|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|$. Donc la configuration est équilatérale. On vérifie dans ce cas que si $M = 0$, la configuration est centrale de multiplicateur nul, et que si $M \neq 0$, la configuration est centrale de multiplicateur non nul.

Si la configuration est centrale complexe de multiplicateur imaginaire et n'est ni isocèle, ni colinéaire, les trois dernières égalités définissent un unique (m_1, m_2, m_3) à homothétie près. Et la configuration est bien centrale pour ce triplet (m_1, m_2, m_3) : la partie imaginaire de ξ est définie par les trois dernières égalités, la partie réelle se déduit de la première égalité.

Si la configuration est isocèle, d'après l'une des trois dernières égalités, on a : $\operatorname{Im}\xi = 0$. Donc la configuration est centrale. D'après ce que l'on a démontré plus haut, si elle n'est pas colinéaire, elle est équilatérale.

Proposition 13 *A somme des masses nulle, la seule configuration centrale complexe non colinéaire de trois corps est le triangle équilatéral. Elle est centrale de multiplicateur nul. Ce n'est pas un équilibre absolu.*

Preuve. Si le multiplicateur n'était pas nul, d'après la proposition 5, le vecteur d'inertie serait nul, donc la configuration serait colinéaire. D'après la proposition 12, la seule configuration centrale non colinéaire de multiplicateur nul à somme des masses nulle est le triangle équilatéral. On vérifie immédiatement que ce n'est pas un équilibre absolu.

2.3 Configurations centrales de quatre corps à somme des masses nulle

La détermination des configurations centrales est un problème difficile dès quatre corps. Leur finitude à similitude près quand les masses sont positives fait l'objet du sixième problème de Smale pour le 21ème siècle ([Sm]). Elle n'a été démontrée que récemment dans le cas de quatre corps, et sa preuve actuelle nécessite l'usage d'un ordinateur ([HM]). Il existe d'ailleurs un continuum de configurations centrales de cinq corps si l'on autorise une masse négative ([Ro]). Un continuum de configurations centrales de quatre corps a également été mis en évidence pour des particules chargées (la charge pouvant être positive ou négative) en interaction électrostatique, et non gravitationnelle ([AP]).

S'il est possible d'étudier numériquement les configurations centrales de quatre corps de masses positives ([Si1]), le seul cas où l'on sache les dénombrer est celui où les quatre masses sont égales ([Al1]).

On se propose, dans cette section, d'énoncer quelques propriétés des configurations centrales de quatre corps dans le cas où la somme des masses M est nulle, ainsi que le vecteur d'inertie $\vec{\lambda}$. Cette dernière hypothèse implique, puisque $N = 4$, que la configuration est contenue dans un plan. D'après la propriété 5, ces configurations englobent les configurations centrales de quatre corps dans le cas : $M = 0$, $\xi \neq 0$. On montre en particulier que, pour des masses $(x, -x, y, -y)$, il existe exactement deux configurations centrales non colinéaires telles que $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Ces configurations ont la forme d'un trapèze.

Ce calcul est rendu possible par le fait qu'à somme des masses nulle, l'existence du vecteur d'inertie nous ramène à un problème à $N - 1 = 3$ corps (proposition 14).

Dans toute cette section, on suppose : $M = 0$.

On pose :

$$\tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} + |m_N| m_N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_i}{\|\sum_{j=1}^{N-1} m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)\|}.$$

C'est le potentiel newtonien engendré par les corps 1, ..., $N - 1$ et un corps de masse $-(m_1 + \dots + m_{N-1})$ placé au centre d'inertie des corps 1, ..., $N - 1$. Ce potentiel est invariant par translation et rotation et homogène.

Proposition 14 *On suppose que $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- La configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est centrale pour le potentiel newtonien. (1)
- La configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$ est centrale pour le potentiel \tilde{U} . (2)
- Il existe I tel que la configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ soit un point critique de U restreinte aux configurations vérifiant : $I_{\vec{r}_1} = \dots = I_{\vec{r}_N} = I$. (3)

- Il existe I tel que la configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$ soit un point critique de \tilde{U} restreinte aux configurations de moment d'inertie I par rapport à leur centre d'inertie.
(4)

Preuve. Notons V la restriction de U aux configurations de vecteur d'inertie nul. On a : $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$. La propriété (1) est vraie si, et seulement si, il existe un réel ξ tel que pour tous $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N$ vérifiant : $\vec{\lambda}(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) = \vec{0}$, on ait l'égalité suivante, qui est indépendante de l'origine \vec{a} choisie :

$$\begin{aligned} & 2\xi((m_1(\vec{r}_1 - \vec{a})|\delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N(\vec{r}_N - \vec{a})|\delta\vec{r}_N)) \\ &= (m_1\vec{\gamma}_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)|\delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N\vec{\gamma}_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)|\delta\vec{r}_N) \\ &= dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) = dV(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N). \end{aligned}$$

Montrons que les propriétés (1) et (2) sont équivalentes. Si, dans l'égalité précédente, on prend $\delta\vec{r}_1 = \dots = \delta\vec{r}_N = \vec{u}$, on obtient : $\xi\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$, conséquence de l'hypothèse : $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Comme les sous-espaces $\{(\vec{u}, \dots, \vec{u}), \vec{u} \in E\}$ et $\{(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}, \vec{0}), \delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1} \in E\}$ sont supplémentaires dans E^N , la propriété (1) est vraie si, et seulement si, pour tous $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}$ tels que :

$$\vec{\lambda}(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}, \vec{0}) = \vec{0},$$

on a :

$$\begin{aligned} 2\xi((m_1(\vec{r}_1 - \vec{a})|\delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N(\vec{r}_N - \vec{a})|\delta\vec{r}_{N-1})) &= dV(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}, \vec{0}) \\ &= d\tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}). \end{aligned}$$

Ceci équivaut à la propriété (2).

La propriété (1) est vraie si, et seulement si, il existe un réel ξ tel que pour tous $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N$ vérifiant : $\vec{\lambda}(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) = \vec{0}$, on ait :

$$\begin{aligned} dV(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) &= 2\xi((m_1(\vec{r}_1 - \vec{a})|\delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N(\vec{r}_N - \vec{a})|\delta\vec{r}_N)) \\ &= \xi dI_{\vec{a}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N). \end{aligned}$$

Ceci revient à dire que $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est un point critique de la restriction de U aux configurations de vecteur d'inertie nul ayant une valeur de $I_{\vec{a}}$ fixée. D'après la proposition 3, ceci équivaut à dire que la configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est un point critique de la restriction de U aux configurations de vecteur d'inertie nul ayant une valeur de $I_{\vec{r}_N}$ fixée.

Comme, d'après la proposition 3, les configurations de vecteur d'inertie nul sont celles qui vérifient : $I_{\vec{r}_1} = \dots = I_{\vec{r}_N}$, les propriétés (1) et (3) sont équivalentes.

Pour une configuration $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ de vecteur d'inertie nul :

$$I_{\vec{r}_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = I_{\vec{r}_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}),$$

et \vec{r}_N est le centre d'inertie de $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}$. Ainsi, d'après le paragraphe précédent, les propriétés (1) et (4) sont équivalentes.

Proposition 15 *Etant donnée une configuration de vecteur d'inertie nul, il est équivalent d'écrire que tous les Δ_i (définis dans la section 1) sont nuls ou que l'un au moins des Δ_i est nul.*

Soit \mathcal{M} l'ensemble des configurations à isométrie près de N corps de vecteur d'inertie nul telles que l'un des Δ_i ne soit pas nul (i. e. telles que tous les Δ_i soient non nuls). Soit \mathcal{N} l'ensemble des $(s_{ij})_{1 \leq i < j \leq N}$ tels que $m_1 s_{i1} + \dots + m_N s_{iN}$ soit indépendant de i (en posant $s_{ii} = 0$ et $s_{ij} = s_{ji}$ si $j < i$). Les carrés des distances mutuelles définissent un difféomorphisme de \mathcal{M} dans un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{N} .

Preuve. La première assertion découle de la proposition 3.

Reprenant les notations de [AC], posons :

$$\mathcal{D}^* = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \xi_1 + \dots + \xi_N = 0\}.$$

L'espace \mathcal{D}^* est le dual de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N / (1, \dots, 1)$. On peut alors identifier \mathcal{N} à l'espace des applications linéaires $\beta : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}$ symétriques (${}^t\beta = \beta$) telles que $\beta(m_1, \dots, m_N) = 0$ (poser : $\langle \beta(\xi_1, \dots, \xi_N), (\xi'_1, \dots, \xi'_N) \rangle = -\sum_{1 \leq i < j \leq N} \xi_i \xi'_j s_{ij}$). Soit \mathcal{U} l'ouvert constitué des applications linéaires β positives (pour tout ξ , $\langle \beta(\xi), \xi \rangle \geq 0$) de noyau $\text{vect}(m_1, \dots, m_N)$. On montre, en reprenant les arguments de la preuve de la proposition 1.8 de [AC], que les carrés des distances mutuelles définissent une bijection de \mathcal{M} dans \mathcal{U} . On montre également, en reprenant les arguments de la preuve de la proposition 1.12 de [AC], qu'elles définissent un difféomorphisme local.

Proposition 16 *Une configuration plane non colinéaire de quatre corps est centrale de vecteur d'inertie nul pour un certain système de masses non nulles, de somme nulle si, et seulement si :*

- *Trois corps quelconques ne sont jamais alignés.*
- *Les distances mutuelles vérifient l'égalité :*

$$\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} = C.$$

Dans ce cas, les vecteurs (m_1, m_2, m_3, m_4) et $(-\Delta_1, \Delta_2, -\Delta_3, \Delta_4)$ sont colinéaires.

Preuve. Considérons une configuration plane, non colinéaire de quatre corps, de vecteur d'inertie nul pour des masses non nulles, de somme nulle. Il existe un i tel que $\Delta_i \neq 0$. Donc, d'après la proposition 15, pour tout $i : \Delta_i \neq 0$. Donc trois des corps ne sont jamais alignés.

Considérons une configuration plane de quatre corps telle que, pour tout i , $\Delta_i \neq 0$. D'après les propositions 3 et 14, elle est centrale de vecteur d'inertie nul (pour un certain système de masses non nulles, de somme nulle) si, et seulement si, c'est un point critique de U à $I_{\vec{r}_1} = I_{\vec{r}_2} = I_{\vec{r}_3} = I_{\vec{r}_4}$ fixé (pour ce système de masses).

D'après la proposition 15, ceci équivaut à dire qu'il existe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ tels que $((s_{ij} = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2)_{1 \leq i < j \leq 4}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq 4})$ soit un point critique de la fonction :

$$((s_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq 4}) \rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j s_{ij}^{-1/2} + \sum_{i=1}^4 m_i \xi_i \sum_{j=1}^4 m_j s_{ij}$$

(les multiplicateurs de Lagrange sont les $m_i \xi_i$). On vérifie que ceci équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|^3} &= s_{12}^{-3/2} + s_{34}^{-3/2} = 2(\xi_1 + \xi_2) + 2(\xi_3 + \xi_4) \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3}. \end{aligned}$$

Cette relation ne fait pas intervenir les masses.

Remarque. On aurait pu obtenir ces équations en remplaçant, dans les équations de Laura-Andoyer ([Al3]), chaque terme Δ_i par $(-1)^i m_i$.

Théorème 1 *Il n'existe pas de configuration centrale cocyclique de quatre corps de somme des masses nulle et de vecteur d'inertie nul. Il n'existe pas de configuration centrale non colinéaire de quatre corps de somme des masses nulle et de vecteur d'inertie et moment d'inertie nuls.*

Preuve. Considérons une éventuelle configuration centrale cocyclique de quatre corps de vecteur d'inertie nul. On peut supposer que les corps sont dans l'ordre : 1, 2, 3, 4 sur le cercle. On note θ_{ijk} la mesure de l'arc de cercle non orienté joignant \vec{r}_i et \vec{r}_k et passant par \vec{r}_j . C'est un élément de $]0, 2\pi[$. Comme $\theta_{123} + \theta_{143} = 2\pi$, on peut supposer $\theta_{123} \leq \pi$, quitte à permuter les corps 2 et 4. Comme $\theta_{412} + \theta_{432} = 2\pi$, on peut supposer $\theta_{432} \leq \pi$, quitte à permuter les corps 1 et 3. Comme $\theta_{123} \leq \pi$, on a : $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| < \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|$. Comme $\theta_{432} \leq \pi$, on a : $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\| < \|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|$. Or la proposition 16 nous donne :

$$\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3},$$

ce qui est impossible.

Considérons une éventuelle configuration centrale non colinéaire de quatre corps de vecteur d'inertie et moment d'inertie nuls. Le point \vec{r}_4 est le centre d'inertie de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ pour les masses m_1, m_2, m_3 . Donc d'après la formule de Leibniz, on a, pour tout \vec{r} :

$$\begin{aligned} m_1 \|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^2 + m_2 \|\vec{r}_2 - \vec{r}\|^2 + m_3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}\|^2 - (m_1 + m_2 + m_3) \|\vec{r}_4 - \vec{r}\|^2 \\ = m_1 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_4\|^2 + m_2 \|\vec{r}_2 - \vec{r}_4\|^2 + m_3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_4\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Si l'on choisit pour \vec{r} le centre du cercle circonscrit à $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, cette égalité implique que \vec{r}_4 est sur ce cercle circonscrit. Or nous venons de voir que c'est impossible.

Remarque. L'étude des configurations centrales cocycliques de quatre corps à somme des masses non nulle est difficile. On sait que si le centre d'inertie est le centre du cercle, les masses sont nécessairement égales, et la configuration est un carré ([Ha]). Il en est de même lorsque le centre du cercle est l'intersection des diagonales ([Sa]).

Proposition 17 *Le multiplicateur d'une configuration centrale non colinéaire de quatre corps de vecteur d'inertie nul a pour expression :*

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)}{I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)} = -\frac{1}{2} \left(m_4 C + \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_2 + m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_1 + m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right),$$

où I est le moment d'inertie par rapport au centre d'inertie ($I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \neq 0$ d'après le théorème 1) et C est la constante définie dans la proposition 16. Cette expression reste valable après permutation des indices des corps.

Preuve. D'après le calcul effectué dans la preuve de la proposition 14, la configuration $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ est centrale pour le potentiel \tilde{U} , de multiplicateur ξ . On voit facilement que la proposition 6 est aussi valable pour le potentiel \tilde{U} , homogène de degré -1 et invariant par translation. Que l'on ait : $\xi = 0$ (dans ce cas, comme $m_1 + m_2 + m_3 = -m_4 \neq 0$, la configuration $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ est un équilibre absolu pour le potentiel \tilde{U}) ou $\xi \neq 0$, cette proposition nous donne la relation : $\xi = -\tilde{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)/(2I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3))$.

On a :

$$\begin{aligned} 2\xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= \vec{\gamma}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) - \vec{\gamma}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) \\ &= m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} \\ &\quad - m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} - m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\left(2\xi + \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} \right) \vec{r}_1 \\ &+ \left(-2\xi - \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} \right) \vec{r}_2 \\ &+ m_3 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) \vec{r}_3 + m_4 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} \right) \vec{r}_4 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Comme la configuration est plane non colinéaire, il existe un unique $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ à homothétie près tel que : $\xi_1 \vec{r}_1 + \xi_2 \vec{r}_2 + \xi_3 \vec{r}_3 + \xi_4 \vec{r}_4 = \vec{0}$. Or $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4 = \vec{0}$. Donc

$$\begin{aligned} &\left(2\xi + \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3}, \right. \\ &\left. -2\xi - \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(2\xi + \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{m_4}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + m_4 C, \right. \\ \left. -2\xi - \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_4}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} - m_4 C \right)$$

est colinéaire à (m_1, m_2) . D'où :

$$0 = 2(m_1 + m_2)\xi + \frac{(m_1 + m_2)^2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_2 m_3 - m_1 m_4}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_1 m_3 - m_2 m_4}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + (m_1 + m_2)m_4 C \\ = 2(m_1 + m_2)\xi + \frac{(m_1 + m_2)^2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \\ + \frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + (m_1 + m_2)m_4 C.$$

D'où la proposition.

Dans le plan, on appellera bande d'un segment $[\vec{a}, \vec{b}]$ l'ensemble des $\vec{r} + \vec{u}$, où $\vec{r} \in [\vec{a}, \vec{b}]$ et $\vec{u} \perp \vec{b} - \vec{a}$. Etant donné un trapèze, on appellera bandes de ce trapèze les bandes associées aux bases. Notons-les \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ ou $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on dira que le trapèze est équilibré. Si $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$, on dira que le trapèze est déséquilibré. Sinon, on dira que le trapèze est semi-équilibré.

Théorème 2 Soient $x, y \neq 0$. Une configuration centrale non colinéaire de vecteur d'inertie nul pour les masses $(x, -x, y, -y)$ est un trapèze semi-équilibré, et l'on a : $\xi \neq 0$.

Preuve. Comme $x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = y(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$, la configuration est un trapèze. Quitte à permuter les indices des corps 1 et 2 ou 3 et 4, nous pourrions supposer : $x, y > 0$.

Supposons que le trapèze soit équilibré. Supposons, par exemple, $y \leq x$. On a alors : $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\| < \|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|$, $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| < \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|$. Ceci est incompatible avec la relation :

$$\frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3},$$

conséquence de la proposition 16. Donc le trapèze n'est pas équilibré.

Supposons que le trapèze soit déséquilibré. Supposons, par exemple, $y \leq x$. On a : $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| < \|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|$, $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\| < \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|$. Ceci est incompatible avec la relation :

$$\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3}.$$

Donc le trapèze n'est pas déséquilibré.

Supposons que l'on ait : $\xi = 0$. Supposons, par exemple, que $[\vec{r}_2, \vec{r}_4]$ soit la plus grande diagonale. On a, d'après la proposition 17 :

$$0 = m_3 C + \frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_1 + m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_2 + m_4}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3}$$

$$= y \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} \right) + \frac{x-y}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{-x-y}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3}.$$

$$\frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^3} = \frac{x}{x+y} \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{y}{x+y} \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3}.$$

Or cette relation ne peut être vérifiée, car nous avons, puisque $[\vec{r}_2, \vec{r}_4]$ est la plus grande diagonale : $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|, \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| < \|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|$. Donc $\xi \neq 0$.

Théorème 3 *Etant donnés deux réels non nuls x et y , il existe exactement deux configurations centrales (à similitude près) non colinéaires et de vecteur d'inertie nul pour les masses $(x, -x, y, -y)$. Ces configurations sont des trapèzes, symétriques l'un de l'autre par rapport à une droite orthogonale aux bases. Si $x = y$ ou $x = -y$, les deux configurations centrales sont des losanges.*

Preuve. On peut supposer x et y strictement positifs, quitte à permuter les indices des corps 1 et 2 et des corps 3 et 4.

Comme on recherche des configurations à similitude près, on peut supposer $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\| = x$. Une configuration de vecteur d'inertie nul pour les masses $x, -x, y, -y$ est un trapèze. Notons \vec{a} l'intersection des diagonales $[\vec{r}_1, \vec{r}_3]$ et $[\vec{r}_2, \vec{r}_4]$ du trapèze. La donnée du trapèze à isométrie près est équivalente à celle de $\|\vec{r}_3 - \vec{a}\|$ et $\|\vec{r}_4 - \vec{a}\|$ telles que $(\|\vec{r}_3 - \vec{a}\|, \|\vec{r}_4 - \vec{a}\|, x)$ vérifient les inégalités triangulaires. Posons : $u = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^2$, $v = \|\vec{r}_4 - \vec{r}_2\|^2$. Nous avons : $\frac{\sqrt{v}}{\|\vec{r}_4 - \vec{a}\|} = \frac{\sqrt{u}}{\|\vec{r}_3 - \vec{a}\|} = \frac{x+y}{x}$. La donnée du trapèze à isométrie près est équivalente à celle de (u, v) tel que $(\sqrt{u}, \sqrt{v}, x+y)$ soient les longueurs des côtés d'un triangle.

D'après la proposition 3 :

$$\begin{cases} I_{\vec{r}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = I_{\vec{r}_1}(\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) \\ I_{\vec{r}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = I_{\vec{r}_3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4) \end{cases}$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2 + \|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^2 = u + v - 2xy \\ (x+y)\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2 = xu + yv - xy(x+y) \end{cases}$$

Posons :

$$\varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y} & \frac{y}{x+y} \\ \frac{y}{x+y} & \frac{x}{x+y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - xy \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\varphi = \mathcal{T} \circ \mathcal{A}$, où \mathcal{A} est l'affinité orthogonale par rapport à la première bissectrice et de rapport $\frac{x-y}{x+y}$ (qui est une projection orthogonale quand $x = y$), de valeur absolue strictement inférieure à 1, et \mathcal{T} est la translation de vecteur $-xy(1, 1)$.

Le système précédent est équivalent à : $(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2, \|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^2) = \varphi(u, v)$.

Si la configuration est centrale non colinéaire, on a, d'après la proposition 16 :

$$\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Posons : $f(u, v) = \frac{1}{u^{3/2}} + \frac{1}{v^{3/2}}$. La relation précédente équivaut à :

$$f(u, v) = f(\varphi(u, v)) = f(x^2, y^2) \quad (1)$$

Soit Γ la ligne de niveau de f associée à la valeur $f(x^2, y^2)$. Le couple (u, v) vérifie l'équation (1) si, et seulement si, $(u, v) \in \Gamma \cap f^{-1}(\Gamma)$. Pour tous $x, y > 0$, il existe exactement deux solutions de (1) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, de la forme (u, v) et (v, u) . Ces solutions sont les deux intersections de Γ et $f^{-1}(\Gamma)$, et dépendent continûment de x et y .

Réciproquement, considérons l'une des deux solutions (u, v) de (1). On a vu que le couple (u, v) définissait un trapèze à isométrie près si, et seulement si, les nombres $(\sqrt{u}, \sqrt{v}, x + y)$ étaient les longueurs des côtés d'un triangle. Donc d'après la proposition 16, le couple (u, v) définit une configuration centrale non colinéaire de vecteur d'inertie nul si, et seulement si, les nombres $(\sqrt{u}, \sqrt{v}, x + y)$ sont les longueurs des côtés d'un triangle non aplati. Si $x = y$, on obtient :

$$(u, v) \approx (3, 332979836; 0, 6670201635) \text{ ou } (0, 6670201635; 3, 332979836).$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\sqrt{u}, \sqrt{v}, x + y) &\approx (1, 825645047; 0, 8167130240; 2)x \\ &\text{ou } (0, 8167130240; 1, 825645047; 2)x. \end{aligned}$$

Ce sont bien les côtés d'un triangle non aplati. Supposons maintenant $x \neq y$. Notons $(u(t), v(t))$ un couple solution associé à $x(t) = x$ et $y(t) = x + t(y - x)$. Pour $t = 0$, on a $x(t) = y(t)$ et le triplet $(\sqrt{u(t)}, \sqrt{v(t)}, x(t) + y(t))$ définit bien un triangle non aplati. Supposons qu'à un certain instant $t \leq 1$, le triangle soit aplati. Les quatre corps forment alors un trapèze aplati. Comme le trapèze est semi-équilibré, les corps sont alignés dans l'ordre : 1, 4, 2, 3. D'où : $\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\| < \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ et $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| < \|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|$. Ainsi :

$$\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|} < \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|} + \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|},$$

ce qui est impossible. Donc $(\sqrt{u}, \sqrt{v}, x + y) = (\sqrt{u(1)}, \sqrt{v(1)}, x(1) + y(1))$ définit bien un triangle non aplati.

On passe d'une configuration centrale à l'autre en permutant les variables u et v . Ceci revient à permuter les corps 1 et 2 et à permuter les corps 3 et 4. Ceci revient encore à considérer l'image de la configuration par une symétrie d'axe orthogonal aux bases du trapèze. Dans l'une des deux solutions, la grande diagonale du trapèze a pour extrémités les corps de masse positive. Dans l'autre solution, elle a pour extrémités les corps de masse négative.

Quand $x = y$, chacune des configurations centrales est un parallélogramme d'après la nullité de $\vec{\lambda}$. En fait, dans ce cas, le vecteur $\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ est colinéaire à $(1, 1)$ pour tout (\tilde{u}, \tilde{v}) , donc le vecteur $(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2, \|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^2) = \varphi(u, v)$ est colinéaire à $(1, 1)$. D'où :

$$\frac{2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_1\|^3} = \frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{1}{\|\vec{r}_4 - \vec{r}_3\|^3} = \frac{2}{x^3}.$$

La configuration est un losange.

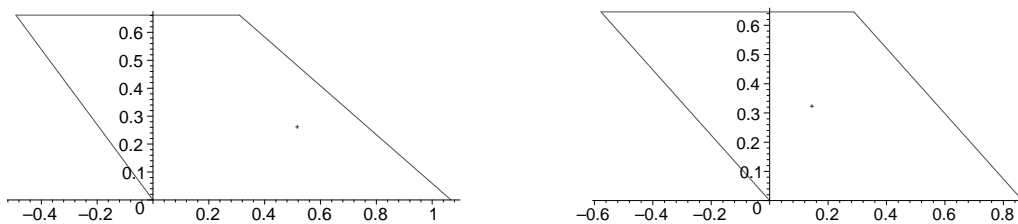


FIG. 7 – Deux configurations centrales de vecteur d’inertie nul, pour les masses $(1, -1, r, -r)$ (on a indexé les corps en suivant l’ordre des aiguilles d’une montre, le corps 1 est en haut à gauche), où $r = 0,75$ et $r = 1$. Le point mis en évidence à l’intérieur du trapèze est le centre de la configuration centrale.

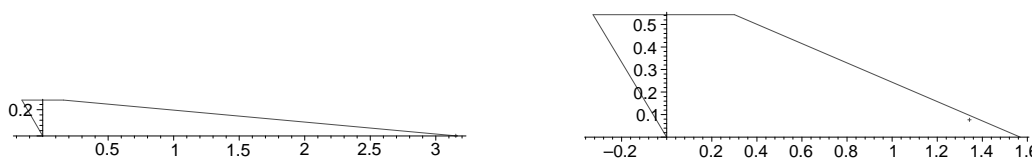


FIG. 8 – Deux configurations centrales de vecteur d’inertie nul, pour les masses $(1, -1, r, -r)$, où $r = 0,1$ et $r = 0,4$.

2.4 Equilibres de N corps à somme des masses nulle

Dans cette partie, on considère un potentiel homogène généralisant le potentiel newtonien, de la forme :

$$U_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\alpha \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0,$$

$$U_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \ln(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) \text{ si } \alpha = 0,$$

α étant un réel, appelé exposant du potentiel. Les équations de Newton associées à ce potentiel ont l’expression :

$$\ddot{\vec{r}}_i = \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^{\alpha+2}}.$$

La proposition suivante reformule, pour des potentiels d’exposant quelconque, la proposition 6 dans le cas où la somme des masses et le multiplicateur sont nuls.

Proposition 18 Une configuration centrale de multiplicateur nul (les $\vec{\gamma}_i$ sont égaux) pour des masses de somme nulle vérifie, pour tout k , la relation :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} = -(\vec{\gamma}_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)).$$

Preuve. Pour tout $\vec{a} \in E$, pour tout entier k :

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma}_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)) &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \middle| \vec{r}_i - \vec{a} \right) \\ &= dU_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\vec{r}_1 - \vec{a}, \dots, \vec{r}_N - \vec{a}) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha}. \end{aligned}$$

Notons que ce dernier terme est constant si $\alpha = 0$. Ceci suggère d'étudier en premier lieu le cas $\alpha = 0$. Dans ce cas, les équations de Newton ont une expression analogue à celles de Helmholtz : le second membre possède le même exposant. En revanche, les équations de Newton sont du second ordre et celles de Helmholtz sont du premier ordre, mais cela n'intervient pas dans l'étude des configurations centrales.

La proposition suivante énonce, dans le langage du problème des N corps, un résultat connu concernant les systèmes de tourbillons, solutions des équations de Helmholtz.

Proposition 19 *Pour le potentiel logarithmique, il n'existe pas d'équilibre d'un système de N corps de masses de somme nulle.*

Preuve. Pour un tel équilibre, les masses vérifieraient en effet :

$$\sum_{i=1}^N m_i^2 = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j = 0$$

d'après la proposition 18.

Remarque. L'argument de cette démonstration permet également de prouver qu'un équilibre à somme des masses nulle n'est pas équilatéral (deux distances mutuelles au moins sont distinctes).

Pour $N \geq 2$, on note S^{N-1} la sphère unité de \mathbb{R}^N , munie de la norme euclidienne standard. Soit $\mathcal{S}^{N-2} = \{(x_1, \dots, x_N) \in S^{N-1}, \sum_{i=1}^N x_i = 0\}$.

Proposition 20 *Pour tout $N \geq 2$, le maximum $C(N)$ de $\sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i| |x_j|$ sur \mathcal{S}^{N-2} vaut : $\frac{1}{2}(N-1-\frac{1}{N})$ si N est impair, $\frac{1}{2}(N-1)$ si N est pair.*

Preuve. Pour tout $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{S}^{N-2}$:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i| |x_j| = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i| \right)^2 - \sum_{i=1}^N x_i^2 \right).$$

Il est facile de vérifier que la plus grande valeur critique de $\sum_{i=1}^N |x_i|$ sur $\mathcal{S}^{N-2} \cap \mathbb{R}^{*N}$ vaut : $\sqrt{N(1-1/N^2)}$ si N est impair, et \sqrt{N} si N est pair. Il suffit alors de vérifier que cette valeur est supérieure au maximum de $\sum_{i=1}^N |x_i|$ sur le bord de $\mathcal{S}^{N-2} \cap \mathbb{R}^{*N}$. Sur cet ensemble, l'un des x_i s'annule, et l'on est en fait ramené à un problème sur \mathcal{S}^{N-3} , qui se traite de façon analogue.

Proposition 21 *Pour tout $N \geq 2$, toute configuration d'équilibre pour le potentiel d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$, associée à des masses de somme nulle, vérifie la relation :*

$$\sup_{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{S}^{N-2}} \inf_{s \in \mathbb{R}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i| |x_j| \left| 1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Preuve. On peut supposer, par commodité : $\sum_{i=1}^N m_i^2 = 1$. Pour tout k , $\vec{\gamma}_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$. Donc d'après la proposition 18 :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} = 0.$$

D'où :

$$1 = \sum_{i=1}^N m_i^2 = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j = -2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \left(1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right).$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} |m_i| |m_j| \left| 1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right|.$$

Il suffit alors de considérer le nombre réel s qui minimise le membre de droite, et le N -uplet (m_1, \dots, m_N) qui maximise la borne obtenue.

Etant donnée une configuration, on note l_{min} la plus petite distance entre deux corps, et l_{max} la plus grande distance entre deux corps.

Théorème 4 *Une configuration d'équilibre associée à des masses de somme nulle, vérifie :*

$$\left(\frac{l_{min}}{l_{max}} \right)^{|\alpha|} \leq \frac{2C(N) - 1}{2C(N) + 1},$$

$C(N)$ étant défini dans l'énoncé de la proposition 20.

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \left(\inf_{s \in \mathbb{R}} \sup_{1 \leq i < j \leq N} \left| 1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right| \right) \left(\sup_{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{S}^{N-2}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i| |x_j| \right) \\ &= C(N) \inf_{s \in \mathbb{R}} \sup_{1 \leq i < j \leq N} \left| 1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right|. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \sup_{1 \leq i < j \leq N} \left| 1 - \frac{s}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^\alpha} \right| = \inf_{s \in \mathbb{R}} \sup \left(\left| 1 - \frac{s}{l_{min}^\alpha} \right|, \left| 1 - \frac{s}{l_{max}^\alpha} \right| \right) = \frac{|l_{max}^\alpha - l_{min}^\alpha|}{l_{max}^\alpha + l_{min}^\alpha}.$$

Remarque. La proposition 19 et l'absence d'équilibre équilatéral à somme des masses nulle peuvent être vus comme des conséquences immédiates de ce résultat.

3 Solutions rigides associées à des masses de signe quelconque

On étudie ici les mouvements rigides d'un système de N corps quand les masses sont de signe quelconque. On montre qu'au cours de tels mouvements, la configuration est équilibrée au sens de [AC], ce qui était connu à masses positives. Ceci nécessite une preuve différente de celle donnée dans [AC], car il n'existe plus de produit scalaire associé aux masses. Une conséquence de ce résultat est la constance de la rotation au cours d'un mouvement rigide, fait bien connu pour des masses positives.

L'espace vectoriel engendré par les accélérations est toujours inclus dans l'espace vectoriel engendré par les positions. Mais, quand les masses ne sont pas toutes de même signe, cette inclusion peut être stricte. Ceci permet de mettre en évidence des mouvements rigides de dimension 3. Cette construction fait à nouveau jouer un rôle particulier aux systèmes de masses de somme nulle.

3.1 Notations

On utilise, dans cette section, les notations de l'article [AC], qui étaient déjà intervenues brièvement dans la preuve de la proposition 15. On pose toujours :

$$\mathcal{D}^* = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \xi_1 + \dots + \xi_N = 0\}.$$

La configuration absolue ou configuration à translation près s'identifie à l'application linéaire $x : \mathcal{D}^* \rightarrow E$, définie par :

$$x(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \vec{r}_1 + \dots + \xi_N \vec{r}_N.$$

La configuration à l'instant t est notée x_t . De même, l'état absolu (positions et vitesses à translation près) s'identifie à une application linéaire $z : \mathcal{D}^{*2} \rightarrow E$. On notera parfois : $z = (x, y)$. La configuration relative ou configuration à isométrie près s'identifie à la forme bilinéaire symétrique positive $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$ sur \mathcal{D}^* , où $\epsilon : E \rightarrow E^*$ désigne le produit scalaire de E . De même, l'état relatif \mathcal{E} est défini par : $\mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z$.

On définit $\gamma : \mathcal{D}^* \rightarrow E$ par :

$$\gamma(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \vec{\gamma}_1 + \dots + \xi_N \vec{\gamma}_N.$$

Soit $\nu : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}$ l'application linéaire définie par :

$$\langle \nu(\xi_1, \dots, \xi_N), (\xi'_1, \dots, \xi'_N) \rangle = \frac{\xi_1 \xi'_1}{m_1} + \dots + \frac{\xi_N \xi'_N}{m_N}.$$

Le mouvement des corps à translation près est solution du système différentiel : $\epsilon \circ \ddot{x} = dU(x) \circ \nu$.

Si $M = m_1 + \dots + m_N = 0$, $\text{Ker}\nu = \text{vect}(m_1, \dots, m_N)$. Si $M \neq 0$, ν est une bijection, et l'on peut poser : $\nu = \mu^{-1}$. Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire sous la forme : $\epsilon \circ \ddot{x} \circ \mu = dU(x)$. C'est la forme sous laquelle elles sont présentées dans [AC], qui suppose que les masses sont strictement positives. La définition de μ que nous venons de donner correspond à la caractérisation (1) de la proposition 1.15 de [AC]. C'est la seule caractérisation qui possède encore un sens quand $M = 0$. En posant : $U(x) = \hat{U}(\beta)$, on obtient la factorisation : $dU = 2\epsilon \circ x \circ d\hat{U}$, ce qui permet d'écrire : $\gamma = 2x \circ d\hat{U} \circ \nu = 2x \circ A$ en définissant l'endomorphisme de Wintner-Conley A par : $A = d\hat{U} \circ \nu$.

On appelle espace du mouvement l'espace vectoriel $\text{vect}\{x_t(\xi), t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{D}^*\}$. C'est l'espace vectoriel engendré par le mouvement à translation près.

Proposition 22 *L'espace $\text{Im}z_t$ est indépendant de t . C'est l'espace du mouvement.*

Preuve. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , l'espace vectoriel des états dont l'image est contenue dans F est invariant par le champ de vecteurs associé aux équations de Newton. Donc pour tout sous-espace F de E , si, à l'instant t_0 , $\text{Im}z_{t_0} \subset F$, alors à tout instant t , $\text{Im}z_t \subset F$. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. En prenant $F = \text{Im}z_{t_1}$, on obtient : $\text{Im}z_{t_2} \subset \text{Im}z_{t_1}$. De même : $\text{Im}z_{t_1} \subset \text{Im}z_{t_2}$. Donc $\text{Im}z_{t_1} = \text{Im}z_{t_2}$. Ainsi, $\text{Im}z_t$ est indépendant de t . Notons-le $\text{Im}z$.

Pour tous t , $\xi : x_t(\xi) \in \text{Im}x_t \subset \text{Im}z_t = \text{Im}z$. Donc l'espace du mouvement est contenu dans $\text{Im}z$.

Pour tous t_0 , $\xi_0 : y_{t_0}(\xi_0) \in \text{vect}\{x_t(\xi_0), t \in \mathbb{R}\} \subset \text{vect}\{x_t(\xi), t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{D}^*\}$. Donc $\text{Im}y_{t_0}$ est inclus dans l'espace du mouvement. Donc $\text{Im}z = \text{Im}x_{t_0} + \text{Im}y_{t_0}$ est inclus dans l'espace du mouvement.

3.2 Un résultat d'algèbre linéaire

Si F est un \mathbb{R} -espace vectoriel, f un endomorphisme de F et b une application linéaire : $F \rightarrow F^*$, on pose, comme dans [AC] : $[f, b] = {}^t f \circ b - b \circ f$.

Théorème 5 *Soient f un endomorphisme de F , \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et b une application linéaire : $F \rightarrow F^*$ symétrique ($b = b$) positive (pour tout u , $\langle b(u), u \rangle \geq 0$). Il est équivalent d'écrire : $[f, b] = 0$ et $[f, [f, b]] = 0$.*

Preuve. L'implication directe est évidente. L'implication réciproque est évidente dans le cas où f est diagonalisable. Supposons $[f, [f, b]] = 0$ et f non diagonalisable. Il existe un polynôme réel P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et un entier $d \geq 1$ tels que l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker}P^d(f)$ ne soit pas diagonalisable.

- Supposons que P soit de la forme $X - \alpha$. Comme l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker}P^d(f)$ n'est pas diagonalisable, $d \geq 2$. Soit $u \in \text{Ker}P^d(f)$ tel que $P(f)(u) \neq 0$. Soit p le plus grand entier tel que $P^p(f)(u) \neq 0$. Posons :

$$\xi' = P^{p-1}(f)(u), \quad \xi = P(f)(\xi') \neq 0.$$

On a : $(f - \alpha Id)(\xi) = 0$. Par ailleurs :

$$0 = \langle [f, [f, b)](\xi'), \xi' \rangle = \langle [f - \alpha Id, [f - \alpha Id, b)](\xi'), \xi' \rangle$$

$$= \langle ({}^t(f - \alpha Id)^2 \circ b + b \circ (f - \alpha Id)^2 - 2{}^t(f - \alpha Id) \circ b \circ (f - \alpha Id))(\xi'), \xi' \rangle = -2\langle b(\xi), \xi \rangle.$$

D'où, puisque b est positive : $b(\xi) = 0$. Soit \tilde{F} un hyperplan de F ne contenant pas ξ . Dans $\{\xi, \tilde{F}\}$, f possède une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} * & * \\ (0) & \tilde{f} \end{pmatrix}$, b possède une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & \tilde{b} \end{pmatrix}$, où \tilde{b} est symétrique positive, $[f, b)$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & [\tilde{f}, \tilde{b}) \end{pmatrix}$, et $[f, [f, b))$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & [\tilde{f}, [\tilde{f}, \tilde{b})) \end{pmatrix}$. On conclut par récurrence.

- Supposons que P soit de la forme $(X - \alpha)^2 + C$, où $C > 0$. Soit $u \neq 0$ tel que $P^d(f)(u) = 0$. Soit p le plus grand entier tel que $P^p(f)(u) \neq 0$. Posons $\xi' = P^p(f)(u)$. On a : $P(f)(\xi') = 0$. Soit $\xi = (f - \alpha Id)(\xi')$. On a :

$$0 = \langle [f, [f, b)](\xi'), \xi' \rangle = \langle [f - \alpha Id, [f - \alpha Id, b)](\xi'), \xi' \rangle$$

$$= \langle ({}^t(f - \alpha Id)^2 \circ b + b \circ (f - \alpha Id)^2 - 2{}^t(f - \alpha Id) \circ b \circ (f - \alpha Id))(\xi'), \xi' \rangle$$

$$= -2C\langle b(\xi'), \xi' \rangle - 2\langle b(\xi), \xi \rangle.$$

D'où : $\langle b(\xi), \xi \rangle = \langle b(\xi'), \xi' \rangle = 0$. D'où, puisque b est positive : $b(\xi) = b(\xi') = 0$. Soit $F' = \text{vect}(\xi', \xi)$. Le sous-espace F' est stable par f . Si $F' = F$, il est évident que $[f, b) = 0$. Sinon, soit \tilde{F} un supplémentaire de F' dans F . Dans $\{F', \tilde{F}\}$, les matrices de f , b , $[f, b)$ et $[f, [f, b))$ sont de la même forme que précédemment. On conclut par récurrence.

D'après ce théorème, il est équivalent d'écrire : $[A, \beta) = 0$ et $[A, [A, \beta)) = 0$. Nous dirons dans ce cas que la *configuration* est *équilibrée*. Les configurations équilibrées constituent une généralisation des configurations centrales. A masses positives, ce résultat, qui constitue la proposition 2.6 de [AC], s'obtient facilement, car A est symétrique pour le produit scalaire μ , donc diagonalisable.

Nous dirons qu'une *configuration équilibrée* est *attractive* si, et seulement si, la forme bilinéaire symétrique $\beta \circ A$ est négative. Quand les masses sont positives, cette définition est équivalente à celle de [AC], d'après un argument de la preuve de la proposition 2.8 de [AC]. Notons que d'après [Al3] et [AC], à masses positives, toutes les configurations équilibrées sont attractives (pour le potentiel newtonien). Donc pour des masses toutes négatives, il n'y a pas de configuration équilibrée attractive.

3.3 Configurations équilibrées et mouvements rigides

Nous reprenons la définition de [AC] d'un *mouvement rigide* et d'un *équilibre relatif*. Un mouvement est rigide si, et seulement si, les distances mutuelles $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2$

ne varient pas au cours du mouvement. Un équilibre relatif est un état d'équilibre des équations de Newton à isométrie près.

L'énoncé suivant décrit les mouvements rigides les plus simples.

Proposition 23 *Supposons que pour $t = 0$, on ait : $\gamma = 0$. Alors le mouvement est rigide si, et seulement si, à $t = 0$: $\dot{x} = 0$. Dans ce cas, x est constant.*

Preuve. Supposons que l'on ait, à $t = 0$: $\gamma = 0$. Si le mouvement est rigide, on a : $\ddot{x} = \gamma = 0$ à tout instant. Donc pour tous i, j , il existe $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que l'on ait : $\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = t\vec{u} + \vec{v}$. Puisque le mouvement est rigide, $\vec{u} = \vec{0}$, donc x est constant, $\dot{x} = 0$. Réciproquement, si $\gamma = 0$ à $t = 0$, le mouvement pour lequel x est constant est la solution des équations de Newton telle que $\dot{x} = 0$ à $t = 0$.

Les configurations de trois corps pour lesquelles $\gamma = 0$ sont les configurations centrales de multiplicateur nul de trois corps étudiées plus haut. La seule configuration centrale non colinéaire de trois corps est le triangle équilatéral. Elle est centrale pour tout système de masses. Son multiplicateur est nul si, et seulement si, $M = 0$. Etant donnée une configuration colinéaire de trois corps et un réel M , on montre qu'il existe un seul système de masses (dont certaines peuvent être nulles) de somme M pour lequel la configuration soit centrale de multiplicateur nul.

Théorème 6 *Au cours d'un mouvement rigide, l'état est un équilibre relatif à tout instant. Si, au cours d'un mouvement, à une certaine date, l'état est un équilibre relatif, le mouvement est rigide et la rotation est uniforme : il existe une application linéaire $\Omega : E \rightarrow E^*$ antisymétrique ($\Omega = -\Omega$) constante telle que l'on ait, à tout instant : $\dot{x} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$.*

Preuve. La preuve du fait qu'au cours d'un mouvement rigide, l'état soit un équilibre relatif est la même que celle de la proposition 2.5 de [AC], mais il faut remplacer la proposition 2.6 de [AC] par le théorème 5, qui permet de traiter le cas où les masses sont de signe quelconque. La preuve du fait qu'un état d'équilibre relatif engendre un mouvement rigide à rotation uniforme est contenue dans celle de la proposition 2.9 de [AC].

Proposition 24 *Une configuration est équilibrée si, et seulement si, il existe une application linéaire symétrique $S : \text{Im}x \rightarrow (\text{Im}x)^*$ telle que $\gamma = 2x \circ A = \epsilon^{-1} \circ S \circ x$ (par abus de langage, x et γ désignent ici des applications à valeurs dans $\text{Im}x$, et ϵ une application linéaire : $\text{Im}x \rightarrow (\text{Im}x)^*$). Dans ce cas, S est unique. Une configuration équilibrée est attractive si, et seulement si, S est négative.*

Un état est un équilibre relatif si, et seulement si, il existe une application linéaire antisymétrique $\Omega : E \rightarrow E^$ telle que $y = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, $\gamma = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x$. Dans ce cas, S est la restriction de $\Omega \circ \epsilon^{-1} \circ \Omega$ à $\text{Im}x$.*

Preuve. Supposons qu'il existe S symétrique telle que : $\gamma = \epsilon^{-1} \circ S \circ x$. On a alors :

$$2^t A \circ \beta = {}^t \gamma \circ \epsilon \circ x = {}^t x \circ S \circ x = {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma = 2\beta \circ A.$$

La configuration est donc équilibrée.

Réciproquement, supposons la configuration équilibrée. Soient \tilde{x} et $\tilde{\gamma}$ les restrictions de x et γ à un supplémentaire de $\text{Ker}x$. On a : $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma} \circ \tilde{x}^{-1}) \circ \tilde{x}$. Or, puisque $\gamma = 2x \circ A$:

$${}^t\gamma \circ \epsilon \circ x = 2{}^tA \circ \beta = 2\beta \circ A = {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma.$$

Donc ${}^t\gamma \circ \epsilon \circ \tilde{x} = {}^t\tilde{x} \circ \epsilon \circ \tilde{\gamma}$, et $\epsilon \circ \tilde{\gamma} \circ \tilde{x}^{-1}$ est symétrique. Il existe donc $S = \epsilon \circ \tilde{\gamma} \circ \tilde{x}^{-1}$ symétrique telle que l'on ait : $\tilde{\gamma} = \epsilon^{-1} \circ S \circ \tilde{x}$. Puisque ${}^t\gamma \circ \epsilon \circ x = {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma$, pour tout ξ tel que $x(\xi) = \vec{0}$, $\gamma(\xi)$ est dans l'orthogonal de $\text{Im}x$, donc $\gamma(\xi) = \vec{0}$. Donc $\text{Ker}x \subset \text{Ker}\gamma$. Donc pour $\xi \in \text{Ker}x$, on a encore : $\gamma(\xi) = (\epsilon^{-1} \circ S \circ x)(\xi)$. Finalement : $\gamma = \epsilon^{-1} \circ S \circ x$.

Supposons qu'il existe S_1, S_2 telles que l'on ait : $\gamma = \epsilon^{-1} \circ S_1 \circ x = \epsilon^{-1} \circ S_2 \circ x$. On a : $(S_2 - S_1) \circ x = 0$. Donc $S_1 = S_2$, il y a unicité de S .

On a : ${}^t\gamma \circ \epsilon \circ x = {}^t x \circ S \circ x$. Donc la configuration est attractive si, et seulement si, S est négative.

Notons X le champ de vecteurs sur l'espace des états absolus qui définit les équations de Newton, et p l'application qui à un état associe l'état relatif correspondant. Un état z est un équilibre relatif si, et seulement si : $dp(X(z)) = 0$. Ceci équivaut à dire qu'il existe une application linéaire $\Omega : E \rightarrow E^*$ anti-symétrique telle que : $X(z) = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$. Cette égalité équivaut à : $y = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, $\gamma = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ y = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x$.

On a montré en particulier, grâce au théorème 6, que la configuration au cours d'un mouvement rigide était équilibrée. Si le mouvement est, de plus, plan, la configuration est centrale, i. e. $\epsilon^{-1} \circ S$ est une homothétie. En effet, il existe un nombre complexe de module 1 dépendant du temps $z(t)$ tel que l'on ait : $\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = z(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0))$. En dérivant deux fois à la date 0, on obtient : $\vec{\gamma}_j(0) - \vec{\gamma}_i(0) = z''(0)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0))$. Comme la configuration est équilibrée, d'après la proposition 24, le produit à gauche par $z''(0)$ est une application symétrique. Donc $z''(0) \in \mathbb{R}$, et la configuration est centrale.

Proposition 25 *Etant donné un état d'équilibre relatif, la configuration associée est équilibrée attractive. On note r le rang d'une configuration équilibrée attractive et s le nombre de valeurs propres de $\epsilon^{-1} \circ S$ non nulles et de multiplicité impaire. Etant donnée une configuration équilibrée attractive et un espace E de dimension $r + s$, il existe des vitesses dans E telles que l'état associé soit un équilibre relatif.*

Les configurations centrales planes relèvent du cas : $r = 2, s = 0$. Dans le cas où toutes les valeurs propres de S sont non nulles et distinctes, on a $s = r$, et cette proposition est une conséquence de la proposition 2.8 de [AC] : il y a équilibre relatif pour certaines vitesses dans un espace de dimension $2r$.

Preuve. La première assertion découle de la proposition 24. Donnons-nous une configuration équilibrée attractive et supposons $\dim E = r + s$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée (pour ϵ) de $\text{Im}x$ constituée de vecteurs propres de $\epsilon^{-1} \circ S$. Soit $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ une partition de \mathcal{B} telle que \mathcal{B}_1 soit l'ensemble des éléments de \mathcal{B} qui annulent S et \mathcal{B}_3 soit un ensemble de vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de multiplicité impaire, comportant s éléments. Ainsi, les éléments de \mathcal{B}_2 peuvent être regroupés par paires telles que les deux vecteurs de chaque paire aient la même valeur propre associée. Notons $-\xi_1^2, \dots, -\xi_s^2$ les valeurs propres associées aux éléments de \mathcal{B}_3 . Notons $U_1, \dots, U_{s'}$ la diagonale de la matrice dans \mathcal{B}_2 de l'endomorphisme induit par $\epsilon^{-1} \circ S$ sur $\text{vect}(\mathcal{B}_2)$, où l'on pose : $U_i = \begin{pmatrix} -\eta_i^2 & 0 \\ 0 & -\eta_i^2 \end{pmatrix}$. Soit $\{f_1, \dots, f_s\}$ une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de $\text{Im}x$ dans E . Notons e_1, \dots, e_s les éléments de \mathcal{B}_3 . Soit Ω l'application linéaire : $E \rightarrow E^*$ telle que la matrice de $\epsilon^{-1} \circ \Omega$ dans $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \{e_1, f_1\} \cup \dots \cup \{e_s, f_s\}$ soit diagonale par blocs, de diagonale : $0, \dots, 0, V_1, \dots, V_{s'}, W_1, \dots, W_s$, où l'on pose : $V_i = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_i \\ \eta_i & 0 \end{pmatrix}$, $W_i = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_i \\ \xi_i & 0 \end{pmatrix}$. L'application linéaire Ω est antisymétrique, et l'endomorphisme induit par $(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2$ sur $\text{Im}x$ est $\epsilon^{-1} \circ S$. On a donc : $\gamma = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x$. Ainsi, en posant : $y = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, on obtient un état d'équilibre relatif d'après la proposition 24.

Proposition 26 *Etant donnée une configuration équilibrée attractive, s'il existe des vitesses telles que l'état associé soit un équilibre relatif de rang impair, alors S n'est pas inversible.*

Preuve. On suppose, par commodité : $\text{Im}z = E$. On a : $\text{Im}\gamma \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$, $\text{Im}y \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$. Donc $\text{Im}\gamma + \text{Im}y \subset \text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega)$. Comme $\text{rg}z$ est impair, l'application linéaire antisymétrique Ω n'est pas inversible. Donc $\text{Im}(\epsilon^{-1} \circ \Omega) \subsetneq \text{Im}z = \text{Im}x + \text{Im}y$. D'où : $\text{Im}\gamma + \text{Im}y \subsetneq \text{Im}x + \text{Im}y$. D'où : $\text{Im}\gamma \subsetneq \text{Im}x$. Donc S n'est pas inversible.

D'après [Al3], à masses positives, pour toute configuration équilibrée, l'endomorphisme A est inversible. Donc $\text{Im}\gamma = \text{Im}x$. D'où S est inversible. Ainsi, à masses positives, le rang d'un état d'équilibre relatif est pair, ce qui fait l'objet de la proposition 2.9 de [AC].

3.4 Mouvements rigides de dimension 3

Nous allons maintenant construire des mouvements rigides pour lesquels l'espace du mouvement est de dimension 3. Nous dirons par abus de langage que la dimension du mouvement est 3. Quand E est orienté et de dimension 3 et $\Omega \neq 0$, on note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation. On a, pour tout $\vec{u} \in E$, $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = (\epsilon^{-1} \circ \Omega)(\vec{u})$.

Si les masses sont positives, il n'existe pas de mouvement homographique de dimension 3 pour le potentiel newtonien d'après [AC] (de tels mouvements existent néanmoins pour le potentiel d'exposant $\alpha = 2$, se reporter à [Ba], [Wi]). S'il existait un mouvement rigide de dimension 3, on aurait, d'après la proposition 22 :

$rgz = 3$. Or, d'après la remarque précédente, rgz doit être pair. De même, de tels mouvements n'existent pas si $rgx = 1$. On aurait alors : $rgy \leq 1$. Donc $rgz \leq 2$, et le mouvement serait contenu dans un plan d'après la proposition 22.

On a vu que quand la somme des masses M s'annulait, le triangle équilatéral était une configuration centrale de multiplicateur nul. On peut en fait vérifier que toutes les configurations équilatérales sont centrales de multiplicateur nul, ce qui revient à dire que $\gamma = 0$. Ainsi, quatre corps formant un tétraèdre régulier vérifient les hypothèses de la proposition 23. Ils peuvent donc subir un mouvement rigide de dimension 3. La proposition suivante décrit les mouvements rigides de dimension 3 dont la configuration est de rang 2.

Proposition 27 *On suppose $\dim E = 3$. On se donne une configuration équilibrée attractive de rang 2. Il existe des vitesses initiales telles que le mouvement associé soit rigide de dimension 3 si, et seulement si : $rg\gamma = 1$. Dans ce cas, $\Omega \neq 0$ et la direction du vecteur rotation $\vec{\omega}$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}\gamma$ dans $\text{Im}x$. Si $M = 0$, le vecteur $\vec{\omega}$ est colinéaire à $x(m_1, \dots, m_N)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe des vitesses initiales telles que le mouvement soit rigide de dimension 3. D'après la proposition 22, $rgz = 3$ est impair. Donc, d'après la proposition 26, l'application linéaire S n'est pas inversible. Donc $\text{Im}\gamma \subsetneq \text{Im}x$. D'où $rg\gamma \leq 1$. Supposons que l'on ait : $\gamma = 0$. D'après la proposition 23, la configuration est constante, donc l'espace du mouvement est un plan, ce qui est impossible. D'où $rg\gamma = 1$.

Supposons que l'on ait : $rg\gamma = 1$. Alors $\epsilon^{-1} \circ S$ possède une unique valeur propre nulle. On a donc : $\dim E = 3 = r + s$. D'après la proposition 25, il existe des vitesses telles que l'état associé soit un équilibre relatif. On vérifie de plus que l'application linéaire Ω construite dans la preuve de la proposition 25 vérifie : $\text{Ker}\Omega \subset \text{Im}x$. Comme $\gamma \neq 0$, $\Omega \neq 0$ et $\vec{\omega} \in \text{Im}x$. Donc $rgz = 3$. D'après la proposition 22, le mouvement est de dimension 3.

Pour tout ξ :

$$(\vec{\omega}|\gamma(\xi)) = (\vec{\omega}|(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2(x(\xi))) = -((\epsilon^{-1} \circ \Omega)(\vec{\omega})|(\epsilon^{-1} \circ \Omega)(x(\xi))) = 0.$$

Donc $\vec{\omega}$ appartient à l'orthogonal de $\text{Im}\gamma$.

D'après la relation : $\gamma = \epsilon^{-1} \circ S \circ x$, on a : $\text{Ker}x \subset \text{Ker}\gamma$. Comme $rg\gamma < rgx$, on a : $\text{Ker}x \subsetneq \text{Ker}\gamma$. Soit $\xi \in \text{Ker}\gamma \setminus \text{Ker}x$. On a : $(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2(x(\xi)) = \gamma(\xi) = 0$. D'où : $((\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2(x(\xi))|x(\xi)) = 0$. Ainsi : $\Omega(x(\xi)) = 0$. Le vecteur $\vec{\omega}$ est donc colinéaire à $x(\xi)$, vecteur non nul de $\text{Im}x$.

Si $M = 0$, on a : $(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2(x(m_1, \dots, m_N)) = \gamma(m_1, \dots, m_N) = \vec{0}$. D'où :

$$((\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2(x(m_1, \dots, m_N))|x(m_1, \dots, m_N)) = \vec{0}.$$

Ainsi : $\Omega(x(m_1, \dots, m_N)) = 0$. Le vecteur $\vec{\omega}$ est donc colinéaire à $x(m_1, \dots, m_N)$.

Nous allons donc étudier, dans le cas $N = 3$, les configurations équilibrées attractives de rang 2 telles que $\text{rg}\gamma = 1$. Si $M = 0$, on pose :

$$\xi_0 = (m_1, m_2, m_3), \vec{u} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3}.$$

Soit $M' = m_1\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 + m_2\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3$. Si $M' = 0$, on pose :

$$\xi'_0 = (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3, \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3, \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3),$$

$$\vec{u}' = m_1\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3\vec{r}_1 + m_2\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3\vec{r}_2 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3\vec{r}_3.$$

Proposition 28 *Une configuration non colinéaire de trois corps vérifie : $\text{rg}\gamma = 1$ si, et seulement si, la configuration n'est pas équilatérale et l'une des deux relations suivantes est vérifiée :*

- $M = 0$. Dans ce cas : $\text{Ker}\gamma = \text{vect}(\xi_0)$, $\text{Im}\gamma = \text{vect}(\vec{u})$.

- $M' = 0$. Dans ce cas : $\text{Ker}\gamma = \text{vect}(\xi'_0)$, $\text{Im}\gamma = \text{vect}(\vec{u}')$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1 &= \left(m_3 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \right) - \frac{M}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + m_3 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \\ \vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_1 &= m_2 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + \left(m_2 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \right) - \frac{M}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_3 - \vec{r}_1). \end{aligned}$$

D'où :

$$\det(\vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_1) = \frac{MM'}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1).$$

Donc $\text{rg}\gamma \leq 1$ si, et seulement si : $M = 0$ ou $M' = 0$. Lorsque c'est le cas, on a : $\text{rg}\gamma = 1$ si, et seulement si : $\gamma \neq 0$. D'après la proposition 12, une configuration non colinéaire de trois corps vérifie : $\gamma = 0$ si, et seulement si : $M = 0$ et la configuration est équilatérale. Or si $\text{rg}\gamma \leq 1$ et la configuration est équilatérale, on a $M = 0$. Ainsi, sous l'hypothèse : $\text{rg}\gamma \leq 1$, on a : $\text{rg}\gamma = 1$ si, et seulement si, la configuration n'est pas équilatérale.

Si $M = 0$, $\xi_0 \in \text{Ker}\gamma \setminus \{0\}$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1 &= m_3\vec{u} = m_3 \left(\left(\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \right). \end{aligned}$$

Comme la configuration n'est pas équilatérale, ce vecteur n'est pas nul.

Supposons $M' = 0$. On a :

$$\vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1 = m_3 \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \right) - M \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}.$$

Et les vecteurs $\vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_2$ et $\vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_1$ possèdent une expression analogue. D'où :

$$\begin{aligned} & (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3)\vec{\gamma}_1 + (\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3)\vec{\gamma}_2 + (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3)\vec{\gamma}_3 \\ &= \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3(\vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1) + \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3(\vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_2) + \|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3(\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_3) \\ &= M' \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc $\xi'_0 \in \text{Ker}\gamma \setminus \{0\}$. Enfin, comme $\gamma \neq 0$, on peut supposer, par exemple : $\vec{\gamma}_2 \neq \vec{\gamma}_1$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1 &= \left(\frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) \vec{r}_1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \right) \vec{r}_2 \\ &\quad + m_3 \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) \vec{r}_3 \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 ((m_1 + m_2)\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3) \vec{r}_1 \\ &\quad - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 ((m_1 + m_2)\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3) \vec{r}_2 \\ &\quad + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3) \vec{r}_3) \\ &= \frac{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \vec{u}'. \end{aligned}$$

Proposition 29 *On se donne une configuration de trois corps non colinéaire telle que $rg\gamma = 1$. Si $M = 0$ (respectivement $M' = 0$), elle est équilibrée si, et seulement si, les vecteurs $x(\xi_0)$ et \vec{u} (respectivement $x(\xi'_0)$ et \vec{u}') sont orthogonaux.*

Preuve. Supposons $M = 0$. Soit ξ un élément de \mathcal{D}^* non colinéaire à ξ_0 . La configuration est équilibrée si, et seulement si, l'application linéaire antisymétrique $2[A, \beta] = {}^t\gamma \circ \epsilon \circ x - {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma$ est nulle. Ceci équivaut à : $\langle ({}^t\gamma \circ \epsilon \circ x - {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma)(\xi_0), \xi \rangle = 0$. Comme $\xi_0 \in \text{Ker}\gamma$, on a : $\langle ({}^t x \circ \epsilon \circ \gamma)(\xi_0), \xi \rangle = 0$. La configuration est donc équilibrée si, et seulement si : $\langle ({}^t\gamma \circ \epsilon \circ x)(\xi_0), \xi \rangle = 0$. Ceci équivaut à dire que $x(\xi_0)$ est orthogonal à $\gamma(\xi)$. Comme $\gamma(\xi) \neq \vec{0}$ et $\text{Im}\gamma = \text{vect}(\vec{u}) = \text{vect}(\gamma(\xi))$ d'après la proposition 28, cela équivaut à dire que $x(\xi_0)$ et \vec{u} sont orthogonaux. Le même raisonnement s'applique au cas : $M' = 0$.

Les propositions suivantes vont permettre de construire des mouvements rigides tels que ceux décrits dans la proposition 27.

Proposition 30 *On se donne une configuration de trois corps non colinéaire telle que \vec{u} (respectivement $x(\xi'_0)$) ne soit orthogonal à aucun des $\vec{r}_j - \vec{r}_i$. Alors il existe un unique système de masses à homothétie près vérifiant $M = 0$ (respectivement $M' = 0$) et tel que la configuration soit équilibrée. Et il existe un unique système de masses à homothétie de rapport positif près vérifiant $M = 0$ (respectivement $M' = 0$) et tel que la configuration soit équilibrée attractive. Pour ces systèmes de masses, on a : $rg\gamma = 1$.*

Preuve. Supposons qu'il existe des masses telles que $M = 0$ et que la configuration soit équilibrée. Comme \vec{u} n'est orthogonal à aucun $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, la configuration n'est pas équilatérale. D'après la proposition 28, on a : $rg\gamma = 1$. Soit \vec{v} un vecteur non nul orthogonal à \vec{u} . D'après la proposition 29, le vecteur $x(\xi_0) = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$ est orthogonal à $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc colinéaire à \vec{v} , qui ne dépend pas des masses. Donc les masses sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques de \vec{v} dans $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$. Réciproquement, puisque \vec{u} n'est orthogonal à aucun $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, ces coordonnées ne sont pas nulles. Et des masses proportionnelles aux coordonnées barycentriques de \vec{v} vérifient $M = 0$, et la configuration est équilibrée pour ces masses et vérifie : $rg\gamma = 1$. On procède de la même façon dans le cas $M' = 0$. Il s'agit alors d'avoir $m_1\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3\vec{r}_1 + m_2\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3\vec{r}_2 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3\vec{r}_3$ colinéaire à un vecteur orthogonal à $x(\xi'_0)$. Dans les deux cas, la configuration est attractive si, et seulement si : $2\beta \circ A = {}^t x \circ \epsilon \circ \gamma$ est négative. Comme cette application linéaire est une fonction linéaire de (m_1, m_2, m_3) , cela est vrai lorsque (m_1, m_2, m_3) appartient à une certaine demi-droite.

Proposition 31 *On se donne une configuration de trois corps non colinéaire, vérifiant $rg\gamma = 1$, équilibrée. Si $M = 0$, elle est attractive si, et seulement si : $\frac{m_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \leq 0$. Si $M' = 0$, elle est attractive si, et seulement si : $m_1\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^6 + m_2\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^6 + m_3\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^6 \leq 0$.*

Preuve. Supposons $M = 0$. Le vecteur ξ_0 ne peut pas être à la fois colinéaire à $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$. Supposons, par exemple, qu'il ne soit pas colinéaire à $(-1, 1, 0)$. Comme $\gamma(\xi_0) = \vec{0}$, la configuration est attractive si, et seulement si :

$$2\langle(\beta \circ A)(-1, 1, 0), (-1, 1, 0)\rangle = (x(-1, 1, 0)|\gamma(-1, 1, 0)) \leq 0.$$

Comme la configuration est équilibrée, d'après la proposition 29, les vecteurs $x(\xi_0)$ et $\gamma(-1, 1, 0)$ sont orthogonaux. Donc ceci équivaut à dire que $\det(x(\xi_0), \gamma(-1, 1, 0))$ et $\det(x(\xi_0), x(-1, 1, 0))$ sont de signes opposés.

On a :

$$\det(x(\xi_0), x(-1, 1, 0)) = \det(m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -m_3\Delta$$

en posant : $\Delta = \det(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1)$. On a également :

$$\det(x(\xi_0), \gamma(-1, 1, 0)) = \det(m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1),$$

$$m_3 \left(\left(\frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \left(\frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \right) (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \right) \right)$$

$$= -m_3 \Delta \left(\frac{m_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \right).$$

La configuration est donc attractive si, et seulement si :

$$\frac{m_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \leq 0.$$

Supposons $M' = 0$. On montre, par le même raisonnement, que la configuration est attractive si, et seulement si $\det(x(\xi'_0), \gamma(-1, 1, 0))$ et $\det(x(\xi'_0), x(-1, 1, 0))$ sont de signes opposés. Et l'on a :

$$\begin{aligned} & \det(x(\xi'_0), x(-1, 1, 0)) \\ = & \det((\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 - \|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ & = (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3) \Delta. \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} & \det(x(\xi'_0), \gamma(-1, 1, 0)) \\ = & \det((\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 - \|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \\ & \frac{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \vec{u}') \\ = & \frac{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3 - \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} (m_1 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^6 + m_2 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^6 + m_3 \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^6) \Delta. \end{aligned}$$

La configuration est donc attractive si, et seulement si :

$$m_1 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^6 + m_2 \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^6 + m_3 \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^6 \leq 0.$$

Donnons-nous une configuration isocèle, telle que $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| = l_1$ et $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = l_2 < l_1$. D'après les propositions 27 et 28, la preuve de la proposition 30 et la proposition 31, la configuration effectue un mouvement rigide de dimension 3 pour certaines vitesses initiales si, et seulement si, l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

- Le triplet (m_1, m_2, m_3) est de la forme $\alpha(1, -2, 1)$, avec $\alpha > 0$.
- Le triplet (m_1, m_2, m_3) est de la forme $\alpha(-1/l_1^3, 2/l_2^3, -1/l_1^3)$, avec $\alpha > 0$.

Dans les deux cas, le vecteur $\vec{\omega}$ appartient à l'axe de symétrie du triangle isocèle. On obtient les mêmes mouvements si $l_1 < l_2$, mais les masses doivent être multipliées par -1 .

Notons que les résultats de cette section précédant la proposition 28 s'appliquent à un potentiel quelconque dépendant des distances mutuelles. Ils restent donc valables pour un système de N particules chargées. Le potentiel possède alors la même expression, mais les masses doivent être remplacées par des charges, de signe quelconque. Les équations de la dynamique ont l'expression :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i(t) &= \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)), \\ \text{avec } \vec{\gamma}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \frac{q_i}{m_i} \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} q_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}. \end{aligned}$$

4 Sur le gain d'intégrabilité à somme des masses nulle

Cette section présente trois résultats qui ont pour but de montrer qu'à somme des masses nulle, le problème des N corps peut, dans certains cas, se ramener à un problème à $N - 1$ corps. Ceci revient à remplacer dans les équations le corps d'indice N par son expression comme combinaison linéaire des positions des corps 1, ..., $N - 1$ et du vecteur d'inertie $\vec{\lambda}$. Cette technique a déjà permis de dénombrer plus haut les configurations centrales de quatre corps de somme des masses nulle et vecteur d'inertie nul.

Proposition 32 *Un mouvement de trois corps de somme des masses nulle tel que $\vec{\lambda}(\vec{r}_1(0), \vec{r}_2(0), \vec{r}_3(0)) = \vec{\lambda}(\dot{\vec{r}}_1(0), \dot{\vec{r}}_2(0), \dot{\vec{r}}_3(0)) = \vec{0}$ est homographique, et il existe un réel non nul ξ et un complexe dépendant du temps s , solution du système différentiel $\ddot{s} = 2\xi s/|s|^3$, tels que l'on ait, pour tous i, j :*

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

Preuve. D'après la proposition 11, la configuration à l'instant 0 est centrale de multiplicateur non nul. Identifions \mathbb{C} et l'espace engendré par $\vec{r}_2(0) - \vec{r}_1(0)$ et $\dot{\vec{r}}_2(0) - \dot{\vec{r}}_1(0)$. Il existe s_0 tel que : $\dot{\vec{r}}_2(0) - \dot{\vec{r}}_1(0) = s_0(\vec{r}_2(0) - \vec{r}_1(0))$. On a donc :

$$\dot{\vec{r}}_3(0) - \dot{\vec{r}}_2(0) = \frac{m_1}{m_3}(\dot{\vec{r}}_2(0) - \dot{\vec{r}}_1(0)) = \frac{m_1}{m_3}s_0(\vec{r}_2(0) - \vec{r}_1(0)) = s_0(\vec{r}_3(0) - \vec{r}_2(0)).$$

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 7.

Remarque. L'homographie du mouvement est une conséquence immédiate de la relation : $\vec{\lambda} = \vec{0}$. En effet, ceci implique : $|m_1| \times \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = |m_3| \times \|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|$. D'où $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|/\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ est constant.

Proposition 33 *Si, au cours d'un mouvement de trois corps de somme des masses nulle, le vecteur d'inertie est constant (ceci revient à dire que $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ s'annule à une certaine date), le vecteur $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est solution d'un problème à trois centres fixes alignés.*

Choisissons les indices des masses de sorte que m_1 et m_2 soient de même signe, et de signe opposé à celui de m_3 , et renormalisons les masses de sorte que $m_3 \in \{-1, 1\}$. Posons $r = m_2/m_1 > 0$. Les centres ont alors pour positions :

$$\vec{0}, \quad -m_3(r^{-1} + 1)\vec{\lambda} \quad \text{et} \quad m_3(r + 1)\vec{\lambda}.$$

Leurs masses ont les valeurs :

$$-m_3, \quad m_3(r^{-1} + 1)^2 \quad \text{et} \quad m_3(r + 1)^2.$$

Preuve. Il suffit de soustraire les équations de Newton (2) et (1) et de remplacer $\vec{r}_3 - \vec{r}_2$ par $m_3\vec{\lambda} - 1/(1+r)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ et $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ par $m_3\vec{\lambda} + 1/(1+r^{-1})(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Remarque 1. Ce phénomène a déjà été observé pour un système de N tourbillons ([RA]).

Remarque 2. D'après la proposition 11, il n'existe pas de configuration centrale colinéaire de trois corps de somme des masses nulle et de multiplicateur nul. Donc il existe $i \neq j$ tels que $\ddot{\vec{r}}_j - \ddot{\vec{r}}_i \neq \vec{0}$. Comme $\ddot{\vec{\lambda}} \neq \vec{0}$, pour tous i, j , $\ddot{\vec{r}}_j - \ddot{\vec{r}}_i \neq \vec{0}$. Ce problème à trois centres fixes n'admet donc pas d'équilibre.

Remarque 3. Dans le cas où $\vec{\lambda} = \vec{0}$, les trois centres fixes sont confondus. Ainsi, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est la trajectoire d'un corps soumis à un centre fixe situé en $\vec{0}$, de masse :

$$m_3(r^2 + 2r + 1 + 2r^{-1} + r^{-2}).$$

On retrouve une conséquence de la proposition 32.

Remarque 4. Le problème des trois centres fixes en dimension 1 est un problème hamiltonien à un degré de liberté. Il est donc intégrable. Le problème des trois corps à somme des masses nulle et vecteur d'inertie constant est donc intégrable en dimension 1. On peut retrouver ce résultat en énumérant les générateurs des symétries et les intégrales premières dépendant du temps, exprimés dans les coordonnées : $(r_1, r_2, r_3, p_1 = m_1\dot{r}_1, p_2 = m_2\dot{r}_2, p_3 = m_3\dot{r}_3)$:

- Intégrale première de l'énergie (hamiltonien) :

$$H(r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3) = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 + p_3^2/2m_3 - U(r_1, r_2, r_3).$$

- Générateur des translations :

$$X_P(r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

- Quantité de mouvement :

$$P(r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3) = \lambda(p_1/m_1, p_2/m_2, p_3/m_3).$$

C'est l'intégrale première associée au champ X_P .

- Générateur des transformations galiléennes :

$$X_{-R}(r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3) = (t, t, t, m_1, m_2, m_3).$$

- Valeur initiale du vecteur d'inertie :

$$R(r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3) = \lambda(r_1, r_2, r_3) - t\lambda(p_1/m_1, p_2/m_2, p_3/m_3).$$

C'est l'opposée de l'intégrale première dépendant du temps associée au champ X_{-R} .

On a : $\{P, R\} = m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Si, de plus, on suppose que le vecteur d'inertie est constant (i. e. $P = 0$) :

- La fonction R est une intégrale première qui ne dépend pas du temps. On peut donc se restreindre à une hypersurface de niveau de R sans faire apparaître la variable temps.

- L'énergie est invariante par le champ de vecteurs X_{-R} .
On est donc ramené à une équation différentielle à $6 - 5 = 1$ variable, donc intégrable.

Des considérations analogues permettent de montrer que le problème des N tourbillons, qui est intégrable pour $N = 3$, est intégrable pour $N = 4$ lorsque la somme des vorticités est nulle et le vecteur de vortacité est nul ([Ec], [AS]).

Remarque 5. Nous avons vu qu'à somme des masses non nulle, pour un potentiel de Jacobi, l'égalité de Lagrange-Jacobi était de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2 = 4H_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N).$$

Posons :

$$\tilde{I}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2,$$

$$\dot{\tilde{I}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i \left| \frac{\vec{p}_j}{m_j} - \frac{\vec{p}_i}{m_i} \right. \right).$$

Ceci permet de définir une intégrale première supplémentaire ([Ja]) en posant : $F = 8\tilde{I}H_0 - \dot{\tilde{I}}^2$. Le problème des trois corps à somme des masses non nulle associé au potentiel de Jacobi est ainsi intégrable sur la droite.

A somme des masses nulle, pour un potentiel quelconque, nous avons :

$$\ddot{\tilde{I}} = -\frac{d^2}{dt^2} \|\vec{\lambda}\|^2 = -2\|\vec{P}\|^2.$$

Une analogie avec le problème à somme des masses non nulle associé au potentiel de Jacobi nous suggère de considérer l'intégrale première

$$F = -4\tilde{I}\|\vec{P}\|^2 - J^2 = 4(\det(\vec{\lambda}, \vec{P}))^2.$$

Mais cette intégrale première est la fonction nulle en dimension 1. Donc la technique d'intégration utilisée pour le potentiel de Jacobi ne s'applique pas pour le potentiel newtonien à somme des masses nulle.

Proposition 34 *Si, à tout instant, $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$ (i. e. si $\vec{\lambda}(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)) = \vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N(0)) = \vec{0}$), le mouvement $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ vu à translation près est une solution homographique des équations de Newton à translation près si, et seulement si, le mouvement $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$ vu à translation près est une solution homographique des équations de la dynamique associées aux masses m_1, \dots, m_{N-1} et au potentiel \tilde{U} défini en 2.3.*

Preuve. Supposons $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$ à tout instant et $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$ homographique. Il existe une similitude dépendant du temps $s(t)$ telle que, pour $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) = s(t)(\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)).$$

On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_N(t) - \vec{r}_i(t) &= -\frac{1}{m_N} \sum_{j=1}^{N-1} m_j (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)) \\ &= -\frac{1}{m_N} s(t) \left(\sum_{j=1}^{N-1} m_j (\vec{r}_j(0) - \vec{r}_i(0)) \right) = s(t) (\vec{r}_N(0) - \vec{r}_i(0)). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$, il est équivalent de dire que $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est homographe et que $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$ est homographique.

Notons V la restriction de U aux configurations de vecteur d'inertie nul. On a : $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})$. Le mouvement $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est solution des équations de Newton à translation près si, et seulement si, pour tous $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N$ vérifiant : $\vec{\lambda}(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) = \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned} (m_1 \ddot{\vec{r}}_1 | \delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N \ddot{\vec{r}}_N | \delta\vec{r}_N) &= dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) \\ &= dV(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N) = d\tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}). \end{aligned}$$

Si l'on prend $\delta\vec{r}_1 = \dots = \delta\vec{r}_N = \vec{u}$, cette relation équivaut à : $\vec{\lambda} = \vec{0}$, qui est une conséquence de la nullité de $\vec{\lambda}$ à tout instant. Comme les sous-espaces $\{(\vec{u}, \dots, \vec{u}), \vec{u} \in E\}$ et $\{(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}, \vec{0}), \delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1} \in E\}$ sont supplémentaires dans E^N , le mouvement $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ est solution des équations de Newton à translation près si, et seulement si, pour tous $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}$ vérifiant : $\vec{\lambda}(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}, \vec{0}) = \vec{0}$, on a :

$$(m_1 \ddot{\vec{r}}_1 | \delta\vec{r}_1) + \dots + (m_N \ddot{\vec{r}}_{N-1} | \delta\vec{r}_{N-1}) = d\tilde{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1})(\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_{N-1}).$$

D'où la proposition.

Remarque 1. Si l'on se contente de supposer : $\vec{\lambda}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{0}$, on se ramène également à un problème à $N-1$ corps, mais le potentiel réduit n'est plus invariant par rotation et n'est plus homogène.

Remarque 2. Si une seule masse est négative, les solutions homographe de vecteur d'inertie nul des équations de Newton d'un système de N corps se déduisent des solutions homographiques à $N-1$ corps de masses positives pour un autre potentiel, homogène, invariant par translation et rotation. Ces solutions sont décrites dans [AC] pour tout potentiel homogène et invariant par translation et rotation.

5 Sur les éventuelles chorégraphies perverses

On appelle *chorégraphie* une solution des équations de Newton dans laquelle les N corps se suivent à intervalles de temps égaux ([CGMS]). Des considérations sur les symétries ont récemment permis de trouver de nouvelles orbites périodiques, et notamment des chorégraphies. La première chorégraphie connue est la solution de Lagrange (1772) : trois corps formant un triangle équilatéral se suivent sur un cercle. Mais l'étonnante solution en "huit" du problème plan des trois corps, deuxième chorégraphie à avoir été découverte, a été trouvée numériquement par C. Moore en 1993, et son existence a été prouvée en 1999 par A. Chenciner et R. Montgomery ([CM]). Depuis, de nombreuses chorégraphies ont été découvertes ([Si2], [Si3], [Ve], [FT], [Che]), et l'existence de certaines d'entre elles a été prouvée, en particulier grâce à une astuce due à C. Marchal ([Ma2]).

De nombreux travaux sur les chorégraphies et les orbites définies par des méthodes variationnelles ont été menés ([Ch3], [Ch4]). Ainsi, C. Marchal a mis en évidence une famille à un paramètre de solutions spatiales, contenant le "huit" et la solution de Lagrange ([Ma1]). A. Chenciner, J. Féjóz et R. Montgomery ont retrouvé cette famille en considérant ces deux solutions dans un repère tournant ([CFM]). Des généralisations récentes de ce résultat à des mouvements de rotation de polygones réguliers ont permis de trouver de nouvelles familles de solutions périodiques contenant certaines solutions connues ([CF]).

Les preuves d'existence des chorégraphies nécessitent d'invoquer une certaine symétrie des équations de Newton, qui n'est observée que lorsque les masses sont égales. Aussi, ces preuves ne permettent pas de prouver l'existence d'éventuelles chorégraphies à masses (positives) distinctes, ou *chorégraphies perverses*.

Nous allons montrer dans cette section qu'en toute dimension d'espace, il n'y a pas de chorégraphie perverse si l'on remplace le potentiel newtonien par un potentiel logarithmique. Un raisonnement analogue permet de prouver que les vorticités d'une chorégraphie sont égales pour un système de N tourbillons vérifiant les équations de Helmholtz. Une généralisation de ce résultat à un potentiel quelconque permet de majorer par une constante indépendante des masses le rapport entre la plus petite et la plus grande des distances mutuelles au cours d'une chorégraphie perverse.

Des considérations d'algèbre linéaire permettent en fait d'établir que, pour le potentiel newtonien, il n'existe pas de chorégraphie perverse plane pour $N \leq 5$ ([Ch1]). Mais on ignore actuellement s'il existe, pour le potentiel newtonien et pour $N = 6$, une chorégraphie perverse. Notons que, pour $N \leq 4$, on peut montrer qu'il n'existe aucune *solution plane vraiment perverse* ([Ch2]), i. e. admettant deux systèmes de masses de même somme, et de même centre d'inertie. Pour certains exposants du potentiel, il existe, d'après [BCS], des équilibres relatifs réunions de polygones réguliers qui sont des solutions vraiment perverses. Précisons enfin que les résultats énoncés dans cette section se généralisent sans peine aux solutions

vraiment perverses.

On note m la moyenne arithmétique des masses m_i , et l'on pose $\mu_i = m_i - m$.

Proposition 35 *Une chorégraphie associée aux masses m_1, \dots, m_N est aussi une chorégraphie pour les masses m, \dots, m .*

Preuve. Cette propriété découle d'un calcul élémentaire ([Ch1]).

Proposition 36 *Une chorégraphie possède, à tout instant, une configuration d'équilibre (absolu) pour les masses $\mu_1 = m_1 - m, \dots, \mu_N = m_N - m$.*

Preuve. Cette propriété découle de la proposition 35 et de la linéarité des équations de Newton en les masses.

Proposition 37 *Au cours d'une chorégraphie, les $\vec{r}_i(t)$ vérifient, à tout instant, la relation :*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^2 = 0.$$

Preuve. Il est facile de vérifier qu'au cours du mouvement, le centre d'inertie et l'isobarycentre sont confondus ([Ch1]). Ceci nous donne : $\sum_{i=1}^N \mu_i (\vec{r}_i(t) - \vec{a}) = \vec{0}$, relation indépendante de l'origine \vec{a} choisie. Il suffit alors d'élever cette égalité au carré et d'exploiter le fait que la somme des μ_i soit nulle.

Remarque. Les solutions vraiment perverses sont les solutions vérifiant les propositions 36 et 37. Les éventuelles chorégraphies perverses seraient donc vraiment perverses.

Théorème 7 *Il n'existe pas de chorégraphie perverse pour un potentiel logarithmique. Il n'existe pas de chorégraphie perverse de tourbillons.*

Preuve. D'après la proposition 36, la configuration est, à tout instant, un équilibre pour les masses μ_i . La somme des μ_i étant nulle, on déduit de la proposition 19 que les μ_i sont nuls.

Remarque. Nous venons en fait de montrer plus généralement qu'il n'existait pas de solution vraiment perverse pour un potentiel logarithmique. Si cela était le cas, cela prouverait qu'il existe, pour ce potentiel, des équilibres absolus à somme des masses nulle, ce qui contredirait la proposition 19. A l'inverse, les solutions vraiment perverses mises en évidence dans [BCS] font apparaître des équilibres absolus à somme des masses nulle pour le potentiel newtonien.

Théorème 8 *Pour tout $N \geq 2$, toute chorégraphie perverse $(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$ pour le potentiel d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie, à toute date t :*

$$\left(\frac{l_{\min}(t)}{l_{\max}(t)} \right)^{\inf(2, |\alpha|)} \leq \frac{2C(N) - 1}{2C(N) + 1},$$

où $l_{\min}(t)$ désigne la plus petite distance entre deux corps et $l_{\max}(t)$ la plus grande distance entre deux corps, et $C(N)$ est défini dans l'énoncé de la proposition 20.

Preuve. Il s'agit d'appliquer la proposition 36 et le théorème 4, en remarquant que, d'après la proposition 37 et une coïncidence, l'énoncé du théorème 4 reste vrai si l'on remplace α par -2 .

Remarque. L'absence de chorégraphie de trois corps à masses distinctes lorsque $|\alpha| < 2$ est une conséquence directe de cette proposition. En effet, il est facile de vérifier qu'au cours d'une chorégraphie à masses distinctes, à une certaine date t , il existe des indices i, j, k deux à deux distincts tels que $\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\| = \|\vec{r}_k(t) - \vec{r}_i(t)\|$ soit la plus petite des distances mutuelles. On a alors :

$$l_{max}(t) = \|\vec{r}_k(t) - \vec{r}_j(t)\| \leq \|\vec{r}_k(t) - \vec{r}_i(t)\| + \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\| \leq 2l_{max}(t)/4^{1/|\alpha|},$$

ce qui est impossible si $|\alpha| < 2$. Notons que cet argument exprime que la condition : $l_{max} \geq l_{min}$ définit un domaine constitué de trois composantes connexes dans l'espace des triangles. Comme les trois corps se suivent, les trois composantes connexes sont visitées au cours du mouvement, ce qui est impossible.

Bibliographie

[AC] A. ALBOUY et A. CHENCINER (1998), *Le problème des n corps et les distances mutuelles*. Invent. math. 131, pp. 151-184. Springer-Verlag 1998.

[AP] F. ALFARO et E. PÉREZ-CHAVELA (2002), *Families of continua of central configurations in charged problems*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A : Mathematical Analysis 9 (2002), pp. 463-475.

[A11] A. ALBOUY (1996), *The symmetric central configurations of four equal masses*. Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, Contemp. Math. 198 (1996).

[A12] A. ALBOUY (2004), *Mutual Distances in Celestial Mechanics*. Cours donné à l'Université Nankai de Tianjin. Third Tianjin International Conference on Nonlinear Analysis-Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics. Juin 2004.

[A13] A. ALBOUY (2003), *On a paper of Moeckel on central configurations*. Regular and chaotic dynamics, V. 8, no 2, 2003.

[A14] A. ALBOUY (2004), *Generalized Euler's configurations and Kushnirenko problem*. Preprint.

[AS] H. AREF et M.A. STREMLER (1999), *Four-vortex motion with zero total circulation and impulse*. Physics of Fluids, volume 11, no 12, décembre 1999. pp. 3704-3715.

[Ba] T. BANACHIEWITZ (1906), *Sur un cas particulier du problème des trois corps*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 142 (1906), pp. 510-512.

[BCS] D. BANG, A. CHENCINER, C. SIMÓ, *Truly perverse relative equilibria of the planar n -body problem*. En préparation.

[Ce1] M. CELLI (2003), *Sur les distances mutuelles d'une chorégraphie à masses distinctes*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I 337 (2003), pp. 715-720. Elsevier.

[Ce2] M. CELLI (2004), *Homographic three-body motions with positive and negative masses*. Proceedings of the Symmetry and Perturbation Theory 2004 Conference, Cala Gonone, Italie. World Scientific.

[Ce3] M. CELLI (2005), *Mouvements rigides associés à des masses positives et négatives*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I 340 (2005), pp. 513-518. Elsevier.

[CF] A. CHENCINER et J. FÉJOZ (2005), *L'équation aux variations verticales*

d'un équilibre relatif comme source de nouvelles solutions périodiques du problème des N corps. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I 340 (2005), pp. 593-598. Elsevier.

[CFM] A. CHENCINER, J. FÉJOZ et R. MONTGOMERY (2005), *Rotating Eights I : the three Γ_i families.* Nonlinearity 18, pp. 1407-1424, 2005.

[CGMS] A. CHENCINER, J. GERVER, R. MONTGOMERY et C. SIMÓ (2002), *Simple choreographic motions of n bodies : a preliminary study.* Geometry, Mechanics and Dynamics, Springer. pp. 289-310.

[Che] K. C. CHEN (2001), *Action minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses.* Arch. Ration. Mech. Anal. 158 no 4, pp. 293-318. 2001.

[Ch1] A. CHENCINER (2002), *Are there perverse choreographies ?* Proceedings of the HAMSYS conference (Guanajuato, mars 2001), New advances in Celestial Mechanics and Hamiltonian Mechanics. Kluwer.

[Ch2] A. CHENCINER (2002), *Perverse solutions of the planar n -body problem.* Proceedings of the International Conference dedicated to Jacob Palis for his 60th anniversary (juillet 2000), Astérisque.

[Ch3] A. CHENCINER (2002), *Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem : from homology to symmetry* Proceedings of the ICM (Pékin, août 2002). Higher Education Press of China.

[Ch4] A. CHENCINER (2003), *Symmetries and "simple" solutions of the classical n -body problem.* Proceedings of the ICMP Conference (Lisbonne, juillet 2003). World Scientific.

[CM] A. CHENCINER, R. MONTGOMERY (2000), *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses.* Annals of Mathematics 152, pp. 881-901, 2000.

[Dz] O. DZIOBEK (1892), *Mathematical theories of planetary motions.* Dover publications, inc. New York, 1962. p. 70.

[Ec] B. ECKHARDT (1988), *Integrable four vortex motions.* Physics of Fluids, 31. pp. 2796-2801. 1988.

[FT] D. FERRARIO et S. TERRACINI (2004), *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem.* Invent. Math. 155 (2004), no 2, pp. 305-362.

[Ha] M. HAMPTON (2004), *Co-circular configurations in the four-body pro-*

blem. Actes du colloque Equa Diff 2003. Hasselt, Belgique, 22-26 juillet 2003. World Scientific.

[He] H. HELMHOLTZ (1858), *On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex motion*. Philos. Mag., 33, 485-512.

[HM] M. HAMPTON et R. MOECKEL (2004), *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*, à paraître dans Invent. Math.

[Ja] C. G. J. JACOBI (1843), *Vorlesungen über dynamik*. Gesammelte Werke. Chelsea. 1969.

[Ma1] C. MARCHAL (2000), *The family P_{12} of the three-body problem. The simplest family of periodic orbits with twelve symmetries per period*. Fifth Alexander von Humboldt Colloquium for Celestial Mechanics, Badhofgastein (Autriche), 19-25 mars 2000.

[Ma2] C. MARCHAL (2002), *How the method of minimization of action avoids singularities*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2002.

[ON] K. O'NEIL (1987), *Stationary configurations of point vortices*. Transactions of the American Mathematical Society, volume 302, no 2, août 1987. pp. 383-425.

[RA] N. ROTT (1989), *Three-vortex motion with zero total circulation*. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). Vol. 40, juillet 1989. Note complémentaire de H. AREF. pp. 473-500.

[Ro] G. ROBERTS (1999), *A continuum of relative equilibria in the five-body problem*. Phys. D127 (1999), no 3-4, pp. 141-145.

[Sa] D. SAARI (2005), *Collisions, Rings and other Newtonian N -body Problems*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, no 104, p.124. American Mathematical Society.

[Si1] C. SIMÓ (1978), *Relative equilibria in the four-body problem*. Cel. Mech. 18 (1978), pp. 165-184.

[Si2] C. SIMÓ (2001), *Periodic orbits of the planar N -problem with equal masses and all bodies on the same path*. The Restless Universe : Applications of N -body Gravitational Dynamics to Planetary, Stellar and Galactic Systems. Editeurs : B. Steves, J. Maciejewski. Bristol, IOP Publishing, 2001.

[Si3] C. SIMÓ (2002), *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*. Celestial Mechanics, dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday. Editeurs : A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson et J. Xia. Contem-

porary Mathematics 292, pp. 209-228. 2002.

[Si4] C. SIMÓ. Site : <http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>

[Sm] S. SMALE (1998), *Mathematical Problems for the Next Century*. Math. Intelligencer 20, no 2, pp. 7-15, 1998.

[Ve] A. VENTURELLI (2002), *Application de la minimisation de l'action au Problème des N corps dans le plan et dans l'espace*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

[Wi] A. WINTNER (1941), *The analytical foundations of Celestial Mechanics*. Princeton University Press. 1941.