

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'OBSERVATOIRE DE PARIS**

Spécialité

Dynamique des Systèmes Gravitationnels

École Doctorale Astronomie et Astrophysique d'Île-De-France

Présentée par

Jérôme DAQUIN

**ESSAIS SUR LE MOUVEMENT RÉSONANT À LONG TERME
DES DÉBRIS SPATIAUX**

soutenue le 10 décembre 2015 devant le jury composé de :

Pr. Jérôme PÉREZ	Directeur de thèse
Dr. Florent DELEFLIE	Directeur de thèse
Pr. Anne LEMAÎTRE	Rapporteur
Pr. Jesús PELÁEZ	Rapporteur
Pr. Massimiliano GUZZO	Examineur
Dr. Radu STOICA	Examineur
Dr. Alessandro ROSSI	Examineur
Pr. Bruno SICARDY	Président du jury

Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides

Résumé

ESSAIS SUR LE MOUVEMENT RÉSONANT À LONG TERME DES DÉBRIS SPATIAUX

par Jérôme DAQUIN

La problématique des débris spatiaux, reliquats non-contrôlés et hasardeux liés à l'activité spatiale, et leur prolifération éventuelle selon le syndrome de KESSLER, a stimulé ces dernières années la communauté astrodynamique à appréhender le mouvement en temps long, bien au-delà des analyses mission utilitaires classiques. Ces études, rendues certes possibles par la sophistication et la puissance croissante des outils informatiques, et aussi par la maturité de théories adaptées à ce besoin, ont aussi trouvé leur nécessité dans la réalisation incontestable du rôle prépondérant joué par les *résonances* et le *chaos* en astrodynamique. C'est à la lumière de ces deux notions, *études en temps long* et *chaos*, que nos résultats visent à décrire la dynamique de la région moyenne où les perturbations dominantes sont liées au géopotentiel et aux effets extérieurs, d'origine gravitationnelle, des troisièmes corps, la Lune et le Soleil. Des applications aux satellites de la constellation GNSS sont présentées.

ESSAYS ON THE LONG TERM RESONANT MOTIONS OF SPACE DEBRIS

by Jérôme DAQUIN

The problems of space debris, uncontrolled remnants and hazards linked to space activities, and their eventual proliferation according to the KESSLER syndrome, has stimulated the astrodynamics community in recent years to understand their long-term motions, well beyond that in classical satellite mission analysis. These studies, certainly made possible by the increasing sophistication of computers and also by the maturity of the theories adapted to their need, have found their necessity in the undeniable realization of the important role played by *resonances* and *chaos* in astrodynamics. In light of these notions, our results are intended to describe the long-term and chaotic dynamics of the medium-Earth region, where the dominant disturbances are related to geopotential and external third-body effects (the Moon and the Sun) of gravitational origin. Particular applications to the GNSS satellite constellations are presented.

Lui parti, j'ai retrouvé le calme. J'étais épuisé et je me suis jeté sur ma couchette. Je crois que j'ai dormi parce que je me suis réveillé avec des étoiles sur le visage. Des bruits de campagne montaient jusqu'à moi. Des odeurs de nuit, de terre et de sel rafraîchissaient mes tempes. La merveilleuse paix de cet été endormi entraînait en moi comme une marée. À ce moment, et à la limite de la nuit, des sirènes ont hurlé. Elles annonçaient des départs pour un monde qui maintenant m'était à jamais indifférent. Pour la première fois depuis bien longtemps, j'ai pensé à maman. Il m'a semblé que je comprenais pourquoi à la fin d'une vie elle avait pris un « fiancé », pourquoi elle avait joué à recommencer. Là-bas, là-bas aussi, autour de cet asile où des vies s'éteignaient, le soir était comme une trêve mélancolique. Si près de la mort, maman devait s'y sentir libérée et prête à tout revivre. Personne, personne n'avait le droit de pleurer sur elle. Et moi aussi, je me suis senti prêt à tout revivre. Comme si cette grande colère m'avait purgé du mal, vidé d'espoir, devant cette nuit chargée de signes et d'étoiles, je m'ouvrais pour la première fois à la tendre indifférence du monde. De l'éprouver si pareil à moi, si fraternel enfin, j'ai senti que j'avais été heureux, et que je l'étais encore. Pour que tout soit consommé, pour que je me sente moins seul, il me restait à souhaiter qu'il y ait beaucoup de spectateurs le jour de mon exécution et qu'ils m'accueillent avec des cris de haine.

A. CAMUS, *L'Étranger*.

Remerciements

Mes premiers remerciements pour Jérôme et Florent. Je remercie Jérôme d’avoir parlé de BÉLETSKI dans ses cours et de *résonances*. Je n’ai retenu que ça : « BÉLETSKI » et « *résonance* ». Puis cela m’a habité trois ans et je digère encore. Je remercie Florent pour nos interactions franches et sincères depuis le « tout début », quand on ne se connaissait pas (encore). Je le remercie d’avoir fait en sorte que je commence cette thèse, de son soutien et support indéfectibles, de sa confiance pendant mon travail. Qu’il me soit possible de continuer à travailler avec eux.

Je remercie chacun des membres de ce jury : merci d’avoir accepté d’en faire partie et d’avoir examiné ce travail.

Je remercie le CNES et le groupe Thales d’avoir financé ce projet. Je remercie le Dr. Christine MASSAT et le Dr. Éric LASSERRE pour m’avoir accueilli dans les locaux de Thales Services. Je remercie l’intégralité du service dans lequel j’ai travaillé, et en particulier, Pierre MERCIER, pour nos interactions franches et sans détour. Je remercie également mes collègues du CNES, en particulier, Hubert FRAYSSE, Denis HAUTESSEIRES, Juan-Carlos DOLADO-PÉREZ et Vincent MORAND. Un grand merci à Emmanuel BIGNON et Romain PINÈDE pour avoir répondu si rapidement et efficacement à mes sollicitations diverses. Je n’oublie pas les « services informatiques », du CNES ou de Thales Services.

Je remercie également le GRGS de m’avoir permis de continuer mes travaux de fin de thèse.

Je remercie mes collègues du grand Nord, ceux de l’Observatoire de Lille : Alain, Marc, Stéfan. Merci à Madame BALLENGHIEN, mais sincèrement, ça à le goût de trop peu, même si c’est fait qu’avec du bon (*sic*).

Je tiens à remercier avec beaucoup de plaisir le Dr. Aaron Jay ROSENGREN¹ pour nos interactions depuis Williamsburg et nos échanges qui appartiennent maintenant aux méandres de Skype...

Étrangeté de la nature, mes amis étaient tous morts, puis tous vivants. Je les remercie pour leurs sollicitudes² : Majdi & Lorine (Lo et Maj!), ChaChou & Yago, Vanille & Hugo, Rébé, Kéké & Popo³, Kerzou. Cet accueil toulousain a été exceptionnel⁴. Et aussi une pensée spéciale pour Grace Palma Alexandra Moreno. Je n’oublie pas les anciens de (et dans) la grisaille du Nord :

-
1. Aaron, where is Brian?
 2. L’alcool a meilleur goût avec eux.
 3. « Et ouais Kéké!!! Et ouais Popo!!! ».
 4. Hugo, ça a commencé fort à l’Esméralda, hein!?

Hubert, Pilou, Guillaume, Antoine & Malvina. Et Olivier. Avec beaucoup de chaleur et de gratitude, je tiens à remercier Sophie⁵ & Jean-Jacques pour ce qu'ils ont pu faire pour moi. Qu'il me soit possible un jour de redonner ce que j'ai reçu d'eux.

Étrangeté de la nature, il se trouve que j'ai deux pères et deux mères. Je leur dois énormément. À ma famille aussi, surtout mes grands-parents. Qu'il me soit possible un jour de redonner ce que j'ai reçu d'eux (*bis repetita*).

Enfin, et finalement, je pense que nous ne faisons pas les choses, en général, pour leurs utilités. La vie n'a pas de sens, nous lui donnons juste de la valeur. C'est ce que j'ai essayé de faire ces dernières années. C'est pourquoi je n'oublie pas CAMUS, IONESCO, POLLOCK & MONDRIAN, Max-Allan, mes arbres, la lumière de septembre, l'émerveillement, l'odeur de la sève de pin sur mes doigts sales ou mes pulls troués, le théorème de CARATHÉODORY et mon chien.

Étrangeté de la nature, il m'a été permis de le faire à coté de la Beauté elle-même. Même quand peu probable, certaines choses sont possibles et opèrent. J'espère continuellement te rendre ce que tu me donnes.

5. Quel havre de paix blanc ! Le bonheur n'est pas plus loin !

Sommaire

Résumé	iii
Remerciements	vii
Introduction	1
1 La notion de résonance	7
1.1 Stabilité	8
1.2 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients constants	9
1.3 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients périodiques	13
1.4 La résonance dans les systèmes voisins de systèmes intégrables	19
1.5 Quelques résonances en mécanique céleste et spatiale	28
1.6 Conclusion	31
2 Particularités des études en temps long et problème fondamental de la moyennisation	33
2.1 Introduction au problème	34
2.2 Perturbations principales au voisinage de la Terre	39
2.3 Théorie semi-analytique	41
2.4 Formulation du problème fondamental de la moyennisation	43
2.5 Résumé et enjeux	45
3 La résonance tessérale	47
3.1 Position du problème	47
3.2 Hamiltonien de la résonance tessérale (n_1, n_2)	48
3.3 Application à la résonance tessérale $(2, 1)$	54
3.4 Conclusion	70
4 Résonances séculaires des orbites moyennes	71
4.1 Position du problème	72
4.2 Structure dynamique de la région MEO	80
4.3 Chaos et transport	132
4.4 Chaos et stochasticité	150
4.5 Conclusion	157
Conclusions, limitations et perspectives	159

Annexes	165
A Le chaos	165
B Le propogateur numérique JACK	173
C Le propogateur semi-analytique STELA	175
D Partitions adaptatives de l'espace des phases	177
E Contributions scientifiques	178
Index	180
Notation	183
Table des figures	184
Liste des tableaux	185
Table des matières	189
Bibliographie	191

Introduction

Problématique

DEPUIS LE DÉBUT de l'ère spatiale, les *débris spatiaux*, des reliquats non-contrôlés liés à l'activité humaine, se sont accumulés. Les origines de ces restes hasardeux sont diverses : satellites en fin de vie, corps de fusées, équipements spatiaux, capteurs, phénomènes de collision mutuelle générant des fragments. Ce dernier point est au cœur du *syndrome de KESSLER*, un phénomène catastrophique de collision mutuelle, et en cascade, imaginé à la fin des années 1970 pour les anneaux des planètes géantes [KCP78]. Ce scénario dramatique est un scénario auto-fécond pour la genèse de débris spatiaux : puisque le nombre de satellites orbitant la Terre augmente, la probabilité de collision entre ces derniers aussi [KJLM10]. Mentionnons l'événement récent (2009) de la collision entre deux satellites opérationnels, Iridium 33 et Kosmos 2151, ayant généré plusieurs centaines de fragments. Même si cette collision s'est produite en orbite basse (région LEO⁶), précisons le fait que la dissipation (le frottement atmosphérique), n'est pas capable d'éliminer les plus gros fragments à un rythme plus rapide que celui générant les débris à partir de la population actuelle [KJLM10]. Par conséquent, cette région de l'espace qui concentre la plus grande densité des débris est affectée, *a priori*, d'une augmentation (faible mais) continue du nombre de fragments, sauf à réduire considérablement le nombre d'objets peuplant cette région.

La population des débris spatiaux n'est pas répartie de façon uniforme dans l'espace : des pics de densités sont identifiables à certaines altitudes ou certaines inclinaisons [Ros05]. Outre les altitudes de la région LEO, une de ces régions correspond à la région géostationnaire (région GEO⁷), essentiellement utilisée, de part cette propriété dynamique (le satellite est quasi-fixe par rapport à la surface terrestre) à des fins météorologiques ou de télécommunications. Mentionnons que les satellites sont disposés sur l'orbite GEO via des orbites de transferts, les orbites dites GTO⁸. Les objets de la région GEO sont difficiles à détecter quand leur taille est inférieure à 1 m. Dans les années 2000, on s'est aperçu que cette région de l'espace pouvait servir de « réservoir » pour des débris avec un grand rapport surface sur masse, qui ont un moyen mouvement proche d'une révolution par jour et des excentricités allant de 0.05 à 0.8. Cette découverte a stimulé beaucoup d'études en temps long (ordre de grandeur du siècle), avec des études fines quant au rôle singulier joué par la pression de radiation solaire. Nous renvoyons pour plus de détails aux références [Val08, Hub13].

6. *Low Earth Orbit*, classiquement considérée comme telle quand l'altitude n'excède pas 2000 km par rapport à la surface terrestre

7. *Geostationary Earth Orbit* ; cette région comprend les orbites circulaires et faiblement inclinées dont la période orbitale est proche de la période de révolution sidérale de la Terre.

8. *Geostationary Transfer Orbits*.

Un troisième pic de densité est clairement identifiable. Il correspond aux altitudes de la région moyenne, la région MEO⁹ où sont situés beaucoup de satellites de navigation GNSS¹⁰ comme les constellations GPS, Galileo, Beidou ou Glonass, et en particulier dans les régions où ont déjà été placés plusieurs générations de satellites (comme la constellation GPS). Dans cette région de l'espace, les perturbations dissipatives dues au frottement atmosphérique sont négligeables sur la dynamique, et où l'effet de l'aplatissement terrestre, avec les perturbations gravitationnelles dues à la Lune et du Soleil, prévalent. Nous y reviendrons plus tard dans le texte. Les résultats dynamiques que nous allons établir concernent essentiellement cette région.

Le risque inhérent lié à ces débris spatiaux a ainsi stimulé la communauté astrodynamique à appréhender le mouvement de façon plus profonde et sur des échelles de temps de plus en plus longues, en vue de caractériser les véritables propriétés de stabilité dans ces régions. Cette nécessité a ainsi fait un merveilleux écho aux approches *semi-analytiques* et à la *théorie moyenne du mouvement*, initialement développées en géodésie spatiale pour mettre en évidence des perturbations faibles mais cumulatives avec le temps. Les difficultés posées par l'intégration sur des longs arcs (à l'époque des développements de ces méthodes, l'ordre de grandeur est plutôt la dizaine d'années), difficultés essentiellement de nature numérique, ont été contournées par l'émergence de la *théorie moyenne* : l'idée de la méthode consiste en l'élimination (*via* un procédé analytique) des courtes périodes de temps dans la dynamique, pour définir un nouveau système, le *système moyen*, dont la plus courte période de temps est bien plus grande que celle initialement présente dans la dynamique [Mét91]. Ainsi, puisque le pas de temps des intégrateurs numériques est généralement fonction de la plus courte période présente dans la dynamique, par ce procédé, on peut propager numériquement le système moyen bien plus rapidement que le système osculateur, en réduisant d'autant l'ordre de grandeur, sur une période donnée, des erreurs numériques de troncature et d'arrondis.

La volonté d'études en temps longs, certes favorisée par l'avènement informatique, ne saurait se limiter aux raisons utilitaires dictées par le danger des débris spatiaux. En effet, au sein même de notre communauté, la réalisation du rôle prépondérant et fondamental joué par les *résonances* et de la *théorie du chaos* dans des résultats architecturaux du système solaire ne sauraient être ignorés. Cependant, elles sont récentes pour notre communauté : dans l'histoire de l'étude de la dynamique des satellites artificiels, la détection de la présence du chaos au sein de la dynamique est, au meilleur de notre connaissance, due à S. BREITER au voisinage de la région GEO [BWM05] (*i.e* en 2005). Dans ce contexte, et pour éviter les problèmes de surpopulation de débris en orbites basses, une volonté d'étude en temps long de la région moyenne est impulsée. Récemment, l'Agence Spatiale Européenne (ESA) a financé un certain nombre de projets et d'études visant à étudier et à concevoir des scénarios de fin de vie de satellites en région MEO. La compréhension dynamique des ces phénomènes, *résonances* et *chaos*, et de leurs implications physiques, est d'un intérêt capital. Cela concerne en particulier la définition d'orbites extrêmement stables sur de longues échelles de temps (orbites de fin de vie), évitant l'interférence avec d'autres constellations, ou au contraire, l'identification fine de zones potentiellement instables (et la compréhension de leurs manifestations physiques) présentant un risque de collision hasardeux. Ces derniers points constituent le corps principal de ce travail.

9. *Medium Earth Orbit*.

10. Global Navigation System Satellites.

Même si l'étude des effets à long terme des résonances et du chaos sur les débris spatiaux présente un intérêt théorique en soi, notre travail ne saurait s'y limiter. En effet, il peut être lu comme l'établissement des premières caractérisations architecturales et dynamiques nécessaires pour les paradigmes nouveaux de désorbitation passives qui émergent actuellement dans la communauté (et qui consistent, par exemple, à essayer d'exploiter les instabilités gravitationnelles pour définir des trajectoires rentrantes dans l'atmosphère). Nous avons d'ailleurs veillé à appliquer nos résultats dynamiques généraux obtenus en région moyenne pour l'analyse de la disposition des orbites de type Galileo.

Méthodologies, études existantes et contexte

Les méthodologies utilisées dans ce travail sont issues du formalisme et des méthodes classiques de Mécanique Céleste. Sur le plan analytique, elles consistent essentiellement en la construction de modèles séculaires et résonants, sous le formalisme Hamiltonien. Puisqu'on ne saurait ignorer la symbiose existante entre l'exploration analytique et numérique d'un système dynamique, ce travail comporte beaucoup de résultats dynamiques obtenus par examen numérique du problème. Ces résultats, en général, complètent, précisent ou confirment la description fournie par l'analyse analytique des problèmes. Nous les avons appliqués sur deux classes de problèmes résonants : les *résonances tessérales* et les *résonances séculaires*. Présentons maintenant ces problèmes.

Les commensurabilités du type

$$k_1 n_{\text{sat.}} - k_2 \dot{\theta} \sim 0, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$$

traduisent le lien, en rapport entiers, de la période de révolution du satellite et de la période sidérale de la Terre. La résonance la plus étudiée avec cette spécificité est la *résonance géostationnaire*, dont la dynamique est bien cernée [All65, Gar66, All67, DD77, BWM05, VDLC09]. Les autres commensurabilités de ce type n'ont reçu que peu d'intérêt. Concernant la région moyenne, la région ici à l'étude, la plus importante (comme nous le montrerons plus tard) est la résonance $(2, 1)$. Cette *résonance tessérale* (dont l'origine est liée à la non-sphéricité de la Terre, et plus précisément à la non homogénéité de la répartition des masses en longitude) est dynamiquement bien plus riche que la résonance géostationnaire, en un sens qui sera précisé dans ce document. Au meilleur de notre connaissance, l'aspect chaotique de cette dynamique n'a été investigué que par T.ELY, à l'aide de surfaces de POINCARÉ [Ely96].

Une autre classe importante de résonances en région moyenne, qui concernent en particulier les satellites de navigation, sont les résonances d'origine luni-solaires. Ces résonances ont connu un regain d'intérêt depuis la réalisation de leur rôle clef sur l'évolution de l'excentricité et de leur usage pour définir des scénarios de fin de vie de satellites opérationnels [Ros08, SYBC10, DRP⁺11, SYP15]. Les travaux pré-cités ici sont de nature numérique au sens large (purement numérique ou semi-analytique). Les développements analytiques de ce problème sont peu nombreux, mais existent [Ely02, SM15]. Ils consistent essentiellement en la construction de la forme normale résonante, et de sa réduction à des modèles intégrables. Précisons que les développements analytiques de ces travaux n'incorporent pas l'effet conjoint de la Lune *et* du Soleil : seul l'effet de la Lune est pris en compte dans [Ely02], seul l'effet du Soleil est considéré dans [SM15]. Dans l'ensemble de ces travaux, l'aspect chaotique de la dynamique n'a pas été investigué à proprement parler, même si cette nécessité a été soulignée récemment

[RARV15].

Structure du document et contributions

En réponse à la problématique posée et à la littérature existante, nous proposons le chapi-
trage suivant :

- **Chapitre 1**, « **La notion de résonance** ». Ce chapitre général s’articule autour de la notion de résonance dans différents types de systèmes dynamiques. Il présente le vocabulaire et les méthodes classiques utilisées dans l’ensemble de ce document, en proposant une définition pour la notion de résonance à la fois unifiée et adaptée au contexte de la mécanique spatiale.
- **Chapitre 2**, « **Particularités des études en temps long & problème fondamental de la moyennisation** ». Nous présentons les outils et méthodes pour la description en temps long des systèmes faiblement perturbés. Un traitement exhaustif de la *théorie moyenne* n’étant pas le but de cette étude, nous n’en dessinons que le contour pour préciser son contexte d’utilisation. Nous présentons les outils numériques associés. Nous formulons le *problème fondamental de la moyennisation* qui pose la question de l’adéquation du chaos détecté dans le mouvement osculateur et de son homologue mis en moyenne. Cette question sera un filigrane présent tout au long de ce document.
- **Chapitre 3**, « **La résonance tessérale** ». Il est dédié à l’étude des résonances tessérales affectant principalement le demi-grand axe des corps satellisés autour de la Terre. Ces résonances surgissent quand la période de révolution du corps est commensurable, en rapports entiers, avec la période de révolution sidérale de la Terre :

$$k_1 n_{\text{sat.}} - k_2 \dot{\theta} \sim 0, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

La forme normale résonante du hamiltonien, à 2 degrés de liberté, est construite et réduite, sans restriction particulière sur la valeur des coefficients entiers (k_1, k_2) . Une étude spéciale est ensuite réalisée pour la résonance $(2, 1)$, la résonance tessérale la plus importante en région moyenne affectant les satellites de navigation. Nous montrerons en particulier l’adéquation du chaos moyen et osculateur au voisinage de cette surface résonante pour des orbites modérément inclinées et excentriques.

- **Chapitre 4**, « **Résonances séculaires des orbites moyennes** ». Ce chapitre traite de la dynamique des résonances séculaires en région moyenne qui sont du type

$$k_1 \dot{\omega} + k_2 \dot{\Omega} + k_3 \dot{\Omega}_{\text{Lune}} \sim 0, (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3.$$

Ces résonances luni-solaires affectent principalement l’excentricité et l’inclinaison du corps. Bien que les échelles de temps dynamiques associées à ces résonances, et à leurs instabilités, sont plus longues que celles des résonances tessérales, il n’en demeure que ces instabilités sont capitales pour cerner les propriétés évolutives de l’excentricité du corps. Nous nous sommes attachés à la construction d’un modèle analytique, à 2.5 degrés de liberté, visant à décrire l’organisation spatiale de ces résonances ainsi que la stabilité du plan de

phase excentricité-inclinaison pour un demi-grand axe balayant la région moyenne, sous l'effet perturbateur de la Lune *et* du Soleil. Les résultats ont été confrontés à une exploration semi-analytique de la dynamique. L'hyperbolicité, et ses conséquences dynamiques (propriété de transport), ont été quantifiées et caractérisées de façon générale, et un traitement particulier a été opéré dans la région amenée à héberger la constellation Galileo. Au meilleur de notre connaissance, les approches cartographiques de chaos réalisées ici avec des outils variationnels est une première sur cette région de l'espace.

Le document se clôt par une synthèse générale présentant les conclusions de l'étude. Nous dressons un panorama des limitations et de quelques perspectives possibles pour compléter et étendre les résultats atteints.

Publications

Les résultats clefs de ce présent document ont été publiés dans des journaux avec comité de lecture [DDP15, DRA⁺] ou ont fait l'objet d'un chapitre de livre [DRT]. Les autres contributions scientifiques issues de ce travail ou incluant des travaux collaboratifs sont listées en annexe E.

Chapitre 1

La notion de résonance

Sommaire

1.1 Stabilité	8
1.2 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients constants	9
1.2.1 La résonance mécanique	9
1.2.2 La résonance d'un système linéaire à coefficients constants	10
1.3 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients périodiques	13
1.3.1 Équations différentielles linéaires à coefficients non-constants	13
1.3.2 Éléments de la théorie de FLOQUET	14
1.3.3 La résonance paramétrique et application à l'équation de HILL-MATHIEU	18
1.4 La résonance dans les systèmes voisins de systèmes intégrables	19
1.4.1 Principe de moyennisation	21
1.4.2 La résonance comme l'échec à la moyennisation	23
1.4.3 Dynamique au voisinage d'une résonance	24
1.4.4 Application des méthodes asymptotiques à l'équation de HILL-MATHIEU	25
1.5 Quelques résonances en mécanique céleste et spatiale	28
1.5.1 Dynamique résonante dans la ceinture d'astéroïdes	28
1.5.2 Dynamique résonante dans le système solaire	28
1.5.3 Dynamique résonante en mécanique spatiale	29
1.6 Conclusion	31

CE CHAPITRE N' A PAS VOCATION à se substituer à un cours d'équations différentielles ordinaires ou à un cours sur la théorie des perturbations de systèmes voisins de systèmes intégrables. Dans la littérature extrêmement vaste à ce sujet, le lecteur peut se référer aux magnifiques ouvrages [Pon69, Arn74, Arn80]. Cependant, ce chapitre peut être vu comme un (modeste) point complémentaire pouvant appartenir aux champs précédemment cités. Plus précisément, nous engageons une réflexion sur la notion, non-nouvelle, de la *résonance*. Cela peut paraître surprenant mais comme l'écrit G. GIACAGLIA dans [Gia72] :

Although it is a subject of general knowledge, its proper definition depends today very strongly on the particular taste of the author and on his field of research.

Ce présent chapitre a été pensé et construit pour minimiser au maximum ce type d'assertion. S'il n'est pas rare de définir la résonance comme la situation où une fréquence de forçage « tend » vers une fréquence naturelle du système, il n'en demeure pas moins que cette situation ainsi définie est bien trop vague et manque cruellement de cadre formel. C'est ce cadre que

nous allons dresser pour divers types de systèmes dynamiques : d'abord les plus simples, ceux qui sont linéaires et à coefficient constants, puis ceux qui sont encore linéaires mais à coefficients périodiques et finalement pour une classe de problèmes plus large, les systèmes voisins de systèmes intégrables (*i.e* les problèmes faiblement perturbés). Le chapitre se clôt par la présentation de quelques résonances classiques en mécanique céleste, en guise d'illustration, puis de certaines résonances en mécanique spatiale dont les dynamiques associées seront particulièrement à l'étude dans le reste du document.

1.1 Stabilité

Se donnant un système d'équations différentielles de \mathbb{R}^n ,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.1)$$

le problème du comportement des solutions du système avec le temps joue, en pratique et en théorie, un rôle central. En particulier, on peut s'interroger sur le caractère borné de la solution, sur son caractère non borné ou sur l'éventuelle convergence asymptotique de la solution avec le temps. De même, disposant d'un point d'équilibre du système, on peut se demander si une solution émanant d'un voisinage suffisamment proche dudit point d'équilibre le restera. À cet effet, c'est la notion de stabilité (selon LYAPUNOV) qui est utilisée. En désignant par $\phi(t)$ une solution de (1.1) satisfaisant à la condition initiale $\phi(t_0) = \phi_0$, rappelons qu'une solution est *stable* (au sens de LYAPUNOV) lorsque est satisfaite la condition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x - \phi\| < \epsilon, \forall t > t_0, \quad (1.2)$$

pour toute solution x du système (1.1). Quand il n'en est pas ainsi, la solution est dite *instable*. Quand en plus de la condition (1.2) est satisfait la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \phi\| = 0 \quad (1.3)$$

alors la solution ϕ est dite *asymptotiquement stable*. Ajoutons que, quitte à changer de coordonnées, discuter de la stabilité d'une solution $\phi(t)$ de (1.1) est équivalent à discuter de la solution nulle (la solution triviale) $x \equiv 0$ d'un système équivalent à (1.1) du type

$$\dot{x} = F(x, t). \quad (1.4)$$

C'est donc sans perte de généralité que l'on peut parler de la stabilité de la solution nulle d'un système différentiel, de la *stabilité du point de repos*. Il est bon de rappeler que la stabilité n'implique pas le caractère borné de la solution, en général. De même, le caractère borné d'une solution n'implique nullement son caractère stable, en général. Par exemple, (exemple tiré de [KKM81]), le système linéaire et non-autonome de dimension 1

$$\dot{x} = 1 - x + t, \quad (1.5)$$

admet une solution stable pourtant non-bornée. En effet, la solution générale étant

$$x(t) = Ce^{-t} + t,$$

à la condition initiale $x(0) = 0$ satisfait la solution $\phi(t) = t$. Ainsi, $\phi(t)$ est stable (et même asymptotiquement stable) bien que non bornée. Le système

$$\dot{x} = \sin^2 x \quad (1.6)$$

admet des solutions bornées non stables.

Ces rappels de vocabulaire effectués, introduisons maintenant, à la lumière des mécaniciens, le premier exemple de dynamique résonante. Nourri de cet exemple classique, nous généraliserons la notion de résonance à tout type de système linéaire dont les coefficients sont constants.

1.2 La résonance dans les systèmes linéaires à coefficients constants

Les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants constituent une classe importante des équations différentielles ordinaires que l'on sait résoudre intégralement. C'est donc naturellement que l'on commence par cette classe d'équations pour introduire et caractériser l'apparition de la résonance dans ce type de système.

1.2.1 La résonance mécanique

Les mécaniciens introduisent le concept de résonance via l'équation de l'oscillateur harmonique forcé périodiquement [LL64]. Plus précisément, considérons l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f(t) \quad (1.7)$$

avec $f(t)$ périodique, $f(t+T) = f(t)$, $T = \frac{2\pi}{\gamma}$ et $\epsilon \ll 1$. L'introduction de ϵ n'est pas nécessaire à l'apparition de la notion de résonance mais son usage est commode : quand $\epsilon = 0$ l'équation différentielle est homogène (c'est celle de l'oscillateur harmonique), elle est à second membre sinon. Quand l'équation est homogène, une base de l'espace des solutions est fournie par les fonctions $(\cos \omega t, \sin \omega t)$, i.e toutes les solutions s'écrivent comme

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (1.8)$$

ou plus simplement comme

$$x = a \cos(\omega t + \phi), \quad (a, \phi) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.9)$$

Les termes a et ϕ sont communément dits *amplitude* et *phase*. Ces termes se définissent simplement en fonction des quantités constantes c_1 et c_2 . Il est clair à partir de l'expression (1.9) que la solution x est bornée pour tout temps t : $\|x\| \leq a$.

Écrivons la solution quand l'équation n'est plus homogène, i.e prenons $\epsilon \neq 0$. Pour les mécaniciens, les oscillations sont maintenant *forcées*. Fait général de la théorie des équations différentielles avec second membre, nous savons que la solution x du système avec second membre s'écrit comme la somme de la solution du système homogène (sans second membre, $\epsilon = 0$) et d'une solution particulière, une solution vérifiant le système avec second membre :

$$x = x_{\text{hom.}} + x_{\text{part.}} \quad (1.10)$$

L'expression de $x_{\text{hom.}}$ correspond à l'équation (1.9). C'est la *méthode de la variation de la constante* qui permet de déterminer l'expression de $x_{\text{part.}}$. Prenons la forme la plus simple pour la fonction périodique $f : f(t) = \cos \gamma t$. Dans cette détermination, une différence majeure intervient selon que $\omega = \gamma$ ou non. Plus précisément, quand $\omega \neq \gamma$, alors on obtient comme solution du système la fonction

$$x = x_{\text{hom.}} + \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t + \phi) \quad (1.11)$$

qui reste bornée. Cette solution n'est pas applicable au cas où $\omega = \gamma$. Une expression de la solution générale est alors

$$x = x_{\text{hom.}} + c_3 t \sin(\gamma t + \phi). \quad (1.12)$$

Une caractéristique « nouvelle » intervient donc dans la solution générale selon l'égalité ou non des fréquences (la fréquence des oscillations libres et la fréquence de forçage) intervenant dans le système : la solution générale perd son caractère borné puisque l'amplitude, $c_3 t$, augmente indéfiniment avec le temps. Les termes de la forme $t^\alpha \sin(\gamma t + \phi)$ sont dits termes *séculaires*. C'est leur apparition dans la solution générale suite à un forçage périodique qui définit la situation de *résonance*. Ainsi, pour les mécaniciens, nous nous accordons sur la définition suivante de la notion de *résonance* :

Définition 1 (Résonance mécanique) *Nous dirons qu'une situation est résonante (au sens mécanique) quand l'introduction d'un second membre périodique dans un système linéaire à coefficients constants, dont la solution homogène est bornée, fait apparaître une sécularité dans la solution générale quand l'équation est prise avec second membre.*

Partant de cette définition, nous pouvons l'abstraire et la caractériser de façon plus générale, sans restriction particulière sur la dimension du système. Ce que nous faisons maintenant.

1.2.2 La résonance d'un système linéaire à coefficients constants

Partant des considérations précédentes, il n'est pas difficile de généraliser la notion et de caractériser les forçages amenant à une divergence quand le système linéaire devient non-homogène. Ainsi, nous considérons le système différentiel de \mathbb{R}^n suivant :

$$\dot{x} = Ax + \epsilon f(t) \quad (1.13)$$

où A est un opérateur dont les coefficients sont constants. Le problème du pendule forcé correspond bien à cette situation en prenant $x = (x, \dot{x})^\top$, en définissant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(t) = (0, \epsilon f(t))^\top$.

Pour obtenir le caractère borné du cas homogène dans le passé et le futur (borné sur \mathbb{R} tout entier quand $t \rightarrow \pm\infty$), il est nécessaire, en plus de supposer que le spectre de la matrice ne contienne que des valeurs propres dont la partie réelle est nulle, que la multiplicité géométrique¹ et algébrique² de toutes les valeurs propres coïncident³. Nous supposons donc cette

1. La dimension de l'espace propre associé à la valeur propre.

2. La multiplicité de la racine apparaissant dans le polynôme caractéristique.

3. Voilà un énoncé plus précis illustrant la nécessité de notre hypothèse dans le cas le plus simple :

hypothèse satisfaite. Il existe donc un changement de base prescrit par une matrice P tel que l'on puisse écrire

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad (1.14)$$

où $\Delta = \text{diag}(i\omega_1, \dots, i\omega_n)$, $\{\omega_i\}_i \in \mathbb{R}$, puisque la matrice A possède un ensemble de n vecteurs propres linéairement indépendants.

On cherche maintenant à caractériser les forçages $f(t)$, périodiques, amenant à une divergence de la solution quand elle est prise avec second membre. Des calculs simples et explicites permettent de caractériser cette situation. Pour des systèmes comme (1.13), la solution générale admet la forme

$$x = x_{\text{hom.}} + x_{\text{part.}} \quad (1.15)$$

avec

$$x_{\text{hom.}} = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad (1.16)$$

$$x_{\text{part.}} = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds. \quad (1.17)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'origine du temps t_0 coïncide avec l'origine : $t_0 = 0$. Puisque $x_{\text{hom.}}$ est, d'après nos hypothèses, bornée, la divergence ne peut venir que du terme intégral, dont on procède maintenant à l'examen. Chaque composante $f_j(t)$ du forçage $f(t)$ est γ_j -périodique. En développant ces composantes sous forme complexe de série de Fourier, nous écrivons

$$\forall j, f_j(s) = \sum_{k \in \mathcal{D}_j} c_j^k e^{ik\gamma_j s}, \quad \mathcal{D}_j \subset \mathbb{Z} \quad (1.18)$$

en supposant $|\mathcal{D}_j| < +\infty$. On peut alors écrire $f(s)$ sous la forme :

$$f(s) = \sum_{\tilde{c}_j^d} e^{\Delta_{\tilde{c}_j^d} s} \tilde{c}_j^d, \quad (1.19)$$

où pour tous les indices j les vecteurs \tilde{c}_j^d sont définis à partir des coefficients de Fourier c_j^d , $d \in \mathcal{D}_j$, l'ensemble des entiers intervenant dans la décomposition de f_j . On peut écrire alors la matrice $\Delta_{\tilde{c}_j^d}$ comme une matrice diagonale ne dépendant que d'une seule composante⁴. Cette composante est alors de la forme $iz\gamma_j s$ où $z = z(d) \in \mathbb{Z}$ et $\gamma_j \in \{\gamma_l\}_{l=1}^n$, l'ensemble des fréquences relatives aux fonctions f_j . Ainsi, en injectant (1.19) dans (1.17), il vient

$$x_{\text{part.}} = e^{tA} \sum_{\tilde{c}_j^d} \int_0^t e^{-sA} e^{\Delta_{\tilde{c}_j^d} s} \tilde{c}_j^d ds.$$

Théorème 1 (des valeurs propres répétées) *Si une matrice constante A de taille $n \times n$ possède une valeur propre λ de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 1 dont la direction est donnée par le vecteur v , alors le système différentiel $\dot{x} = Ax$ admet pour base de solutions fondamentale l'ensemble $\{ve^{\lambda t}, (vt + w)e^{\lambda t}\}$ où w désigne une solution du système linéaire $(A - \lambda I)w = v$.*

En particulier, une solution homogène du système croît déjà sans borne à l'infini. Ce que nous ne voulons pas ici comme nous allons le voir.

4. Le plus simple est de se convaincre en écrivant cette décomposition dans le cas où la dimension du système vaut $n = 2$.

Puisque l'ensemble formé par les matrices commutantes est exactement l'ensemble contenant les matrices "proportionnelles" à l'identité, et puisque $A = P\Delta P^{-1}$, nous avons :

$$x_{\text{part.}} = P e^{t\Delta} P^{-1} \sum_{\tilde{c}_j^d} P \int_0^t e^{-s(\Delta + \Delta_{c_j^d})} P^{-1} \tilde{c}_j^d ds \quad (1.20)$$

La matrice $\Delta + \Delta_{c_j^d}$ est une matrice diagonale, qui le reste par passage à l'exponentielle matricielle. Ses composantes sont alors de la forme

$$\pm i\omega_l + iz\gamma_j = i(\pm \omega_l + z\gamma_j), \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.21)$$

Raisonnons, sans perte de généralité pour l'étude du caractère borné, sur chaque indice j de la somme (1.20). L'intégration de (1.20) par rapport à la variable s est possible et fait intervenir deux cas. Dans le premier cas, nous conservons le caractère borné de la solution générale pourvu que

$$\pm \omega_l + z\gamma_j \neq 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.22)$$

Dans le cas contraire, *i.e* si

$$\exists(l, j), \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq n \text{ tel que } \pm \omega_l + z\gamma_j = 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

alors l'une des composantes de la matrice diagonale $\Delta + \Delta_{c_j^d}$ vaut 0, qui devient égale à 1 par passage à l'exponentielle matricielle ($1 = e^0$). En intégrant cette composante par rapport à la variable s , l'évaluation en ses bornes, $s|_0^t$, fait sourdre un terme proportionnel au temps, d'où l'apparition de la divergence en l'infini.

Nous pouvons donc résumer ce développement calculatoire par le théorème suivant :

Théorème 2 (Résonance d'un système linéaire à coefficients constants) *Soit le système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax + \epsilon f(t)$ dont la solution sans second membre ($\epsilon = 0$) est bornée sur \mathbb{R} et soit $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ la partie imaginaire du spectre de A . On suppose que le second membre $f(t)$ se compose de fonctions périodiques, de pulsations γ_i , $i = 1, \dots, n$. Alors la solution générale du système, prise avec second membre, reste bornée sur \mathbb{R} si la condition de non-résonance est satisfaite :*

$$\forall 1 \leq l \leq n, \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad \forall z \in \mathcal{D}_j, \quad \omega_l - z\gamma_j \neq 0$$

où $z \in \mathcal{D}_j$ est (indice) entier intervenant dans la décomposition de Fourier de la fonction périodique f_j . Quand la condition de non-résonance n'est pas satisfaite, la solution générale du système diverge si le coefficient de Fourier associé à l'équation de résonance n'est pas nul. Le système est alors dit résonant et la condition de résonance s'écrit :

$$\exists(l, j), \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq n \text{ tel que } \pm \omega_l + z\gamma_j = 0.$$

Nous avons donc épuisé de façon générale la question de la persistance du caractère borné d'une solution suite à une inhomogénéité périodique (et donc bornée) dans les équations linéaires à coefficients constants. En revenant au cas bidimensionnel du pendule forcé (1.7), nous obtenons la matrice A dans (1.13) définie comme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. En prenant le forçage le plus simple $f(t) = \cos \gamma t$ dans (1.7), nous voyons que l'équation (1.23) est satisfaite dès que

$$\pm\omega - z\gamma = 0 \Leftrightarrow \omega = z\gamma. \quad (1.25)$$

Puisque le développement de Fourier de la fonction périodique $\cos(\gamma t) = \frac{1}{2}(e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t})$ ne contient que deux indices non nuls, $z \in \{-1, 1\}$, et que $\gamma > 0$, on retrouve bien la condition de résonance (mécanique) pour $\gamma = \omega$, que nous connaissons déjà depuis la sous-section 1.2.1.

1.3 La résonance dans les systèmes linéaires à coefficients périodiques

Sorti du cadre linéaire à coefficients constants, une classe importante d'équations consiste en les équations, encore supposées linéaires, mais dont les coefficients sont variables. On peut voir ces équations comme extension du forçage précédent : au lieu d'un forçage idéal $f(t)$, on considère un forçage non-idéal $f(t, x)$ qui amène à une variation des coefficients du système. Par exemple, l'équation de Hill-Mathieu, correspondant à un oscillateur forcé de façon non-idéale, est une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques s'inscrivant dans ce cadre :

$$\ddot{x} + \epsilon x = \underbrace{-\epsilon f(t)x}_{f(t,x)} \Leftrightarrow \ddot{x} + \epsilon(1 + f(t))x = 0. \quad (1.26)$$

Nous continuons d'écrire de tels systèmes sous leur forme matricielle associée

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (1.27)$$

Quand la matrice $A(t)$ est périodique, l'équation (1.27) est dite à *coefficients périodiques*. Ajoutons que cette classe d'équations apparaît « naturellement » lorsque l'on veut étudier la stabilité d'une solution périodique au premier ordre (en linéarisant la dynamique).

Nous commençons donc par présenter quelques généralités et outils classiques associés à l'équation (1.27). Quand l'équation (1.27) sera supposée périodique, $A(t+T) = A(t)$, nous présenterons les résultats généraux des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, initiée par la théorie de FLOQUET. Les théorèmes fondamentaux seront alors rappelés. Ces résultats seront alors utilisés dans le contexte de résonance paramétrique et plus particulièrement autour de l'équation de Mathieu.

1.3.1 Équations différentielles linéaires à coefficients non-constants

Avant de se restreindre au cas des systèmes linéaires à coefficients périodiques, introduisons de façon générale la notion de résolvante qui joue un rôle calculatoire important pour cette classe d'équations.

Définition 2 (Résolvante) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice de $M(n, \mathbb{R})$. On appelle *résolvante* du système différentiel associé au système $\dot{x} = A(t)x$, l'application

$$\begin{aligned} R_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow M(n, \mathbb{R}) \\ (t, s) &\mapsto R_A(t, s) \end{aligned} \quad (1.28)$$

où R_A est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, s) = A(t)R_A(t, s) \\ R_A(s, s) = Id. \end{cases} \quad (1.29)$$

Pour toute solution du système $\dot{x} = A(t)x$, observons que nous avons $x(t_1) = R_A(t_1, t_0)x(t_0)$: le flot du système différentiel est donné par la résolvante, comme illustré par la figure 1.1.

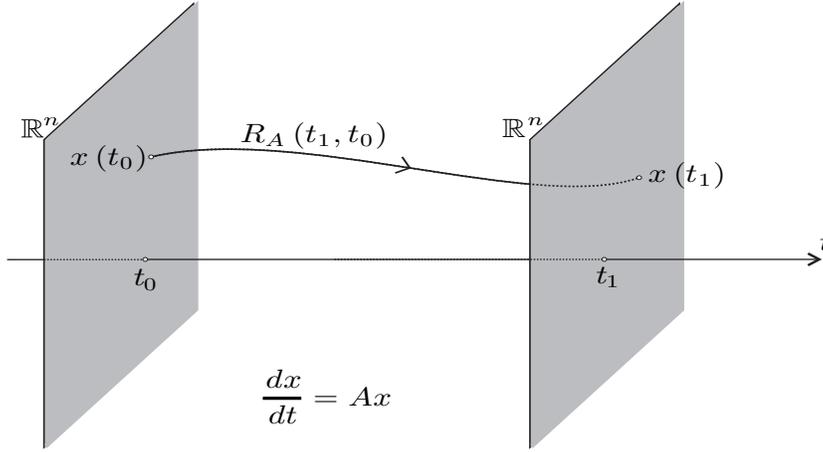


FIGURE 1.1 – Illustration de la notion de résolvante.

La résolvante jouit de propriétés permettant des calculs très utiles. Parmi ces propriétés, citons les résultats des

Proposition 1 Pour tout $(t, s, t_0) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$R_A(t, s)R_A(s, t_0) = R_A(t, t_0). \quad (1.30)$$

d'où nous déduisons la propriété d'inversibilité de la résolvante, plus précisément :

Proposition 2 (Loi de groupe) Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$(R_A(t, s))^{-1} = R_A(s, t). \quad (1.31)$$

Notons que quand $A(t) \equiv A$, la résolvante $R_A(t, s)$ n'est rien d'autre que l'opérateur constant $e^{(t-s)A}$, intervenant dans le cas linéaire à coefficients constants et homogène, *confer* l'équation (1.16).

1.3.2 Éléments de la théorie de FLOQUET

On considère maintenant l'équation $\dot{x} = A(t)x$, avec $A(t+T) = A(t)$: la matrice A est supposée T -périodique. Cette classe d'équations différentielles se traite dans le cadre de la théorie de G. FLOQUET.

Proposition 3 Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned} i) R_A(t+T, s+T) &= R_A(t, s), \\ ii) R_A(t+T, t) &= R_A(t, 0)R_A(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

L'effet de la périodicité sur le flot du système se traduit sur la résolvante de la façon suivante, par le

Théorème 3 (de FLOQUET) Soit le système $\dot{x} = A(t)x$ avec $A(t)$ est T -périodique et soit R_A la résolvante associée. Alors $R_A(t, 0)$ s'écrit sous la forme :

$$R_A(t, 0) = P(t)e^{tB},$$

où P est T -périodique, $P(t+T) = P(t)$, et B est une matrice constante de \mathbb{C}^n . La matrice B peut être une matrice à coefficients réels et dans ce cas P est $2T$ -périodique.

De la proposition 3, nous déduisons qu'il suffit de connaître la résolvante seulement sur l'intervalle $[0, T]$ pour connaître la solution sur tout autre intervalle. En effet, pour $t > T$, nous avons en subdivisant l'intervalle $[0, t]$ via la période fondamentale T :

$$\begin{aligned} x(t) &= R_A(t, 0)x(0) \\ &= R_A(t, kT) \underbrace{R_A(kT, (k-1)T) \cdots R_A(T, 0)}_{=R_A^k(T, 0)} x_0 \\ &= R_A(t, kT)R_A^k(T, 0)x(0), \end{aligned} \quad (1.33)$$

où l'on a décomposé

$$[0, t] = \bigcup_{j=0}^{k-1} [jT, (j+1)T] \cup [kT, t], \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.34)$$

comme le montre la figure 1.2.

Pour cette raison importante, la matrice $R_A(T) \equiv R_A(T, 0)$ porte le nom particulier de *matrice de monodromie*. Ceci étant, mentionnons que le théorème de FLOQUET est un théorème d'existence : en général, on ne sait pas exhiber la matrice $P(t)$. Si tel était le cas, nous pourrions, par simple changement de variables, ramener toute équation différentielle à coefficients périodiques à une équation différentielle à coefficients constants.

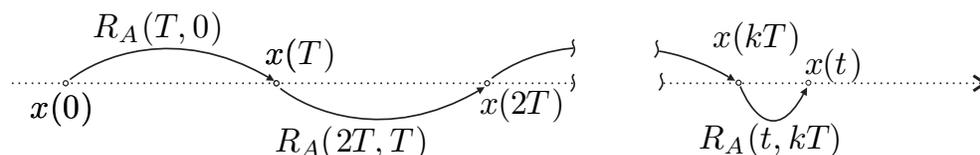


FIGURE 1.2 – Partition et action de la résolvante sur l'intervalle $[0, t]$.

De la relation (1.33), nous voyons que la question d'une borne pour la solution $x(t)$ en $\pm\infty$ est équivalente à la convergence éventuelle de la suite des itérations $\{\|R_A^k(T, 0)x(0)\|\}_k$. En particulier, la solution reste bornée si, et seulement si, la suite de ces normes en fait de même.

De façon générale, même si la stabilité du système $\dot{x} = A(t)x$ se lit sur les propriétés spectrales de $R_A(T)$, il est difficile de caractériser explicitement les critères de stabilité. Néanmoins, les équations différentielles provenant de la physique héritent souvent de structures supplémentaires (hamiltoniennes par exemple). Dans le cas le plus simple, en dimension $n = 2$, un pas supplémentaire peut être franchi en caractérisant explicitement les cas bornés. Les équations sont alors de la forme

$$\ddot{y} + f(t)\dot{y} + g(t)y = 0, \quad (1.35)$$

avec f et g deux fonctions T -périodiques. L'équation (1.35) se ramène par le changement de variables

$$y(t) = q(t)e^{-\frac{1}{2} \int_0^t f(s) ds} \quad (1.36)$$

à l'équation ayant la forme

$$\ddot{q} + p(t)q = 0 \quad (1.37)$$

avec p une fonction aussi T -périodique, définie comme

$$p = g - \frac{1}{4}(f^2 + 2\dot{f}). \quad (1.38)$$

Ces équations s'écrivent sous forme matricielle en prenant $x = (q, \dot{q})^\top$ comme $\dot{x} = A(t)x$ avec la matrice $A(t)$ définie comme

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

qui est de trace nulle. Sans perte de généralité, nous nous donnons donc à partir de maintenant un système différentiel périodique de la forme $\dot{x} = A(t)x$ avec A une matrice périodique de trace nulle.

De l'expression bien connue de la différentielle du déterminant⁵, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det R_A(t, s) &= D(\det R_A(t, s)) \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, s) \\ &= \det R_A(t, s) \text{Tr}(R_A(t, s)^{-1} A(t, s)) \\ &= \det R_A(t, s) \text{Tr} A. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Le déterminant de la résolvante d'un système différentiel linéaire dont la matrice est de trace nulle est donc constant. Étant attendu que $R_A(t, t) = Id$, nous déduisons que $\det R_A(t, s) = 1$. On retrouve le même résultat en appliquant le théorème de Liouville⁶. Ainsi et en vertu de

5. Rappelons la formule classique de calcul différentiel qui fournit la différentielle de l'application voulue : $\frac{d(\det(M+tH) - \det M)}{dt} = \det M \cdot \text{Tr}(M^{-1}H) + \mathcal{O}(t)$.

6. Soit $\dot{x} = v(x)$ un champ de vecteurs différentiable sur \mathbb{R}^n . Soit V un volume de \mathbb{R}^n . Alors on a $\frac{dV}{dt} = \int_V \text{div } v(x) dx$ où $\text{div } v(x)$ dénote la divergence du champ de vecteur $v(x)$: $\text{div } v(x) \equiv \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Ainsi, dans le cas d'un champ de vecteurs à divergence nulle (comme les champs de vecteurs hamiltonien par exemple), la variation de l'élément volume est nulle : l'élément volume est donc en particulier conservé. Dans notre cas particulier, le champ de vecteur est linéaire, $\dot{x} = v(x) = A(t)x$, et nous avons $\text{div } v(x) = \text{Tr}(A(t))$ avec $\text{Tr} A(t) = 0$. D'où la conservation de l'élément volume et l'appartenance de $R_A(0, T)$ à $SL(2, \mathbb{R})$, en prenant en particulier $V(t) = R_A(0, t)x$.

(1.33), l'étude du caractère borné des solutions du problème (1.27) sous l'hypothèse $n = 2$ et avec $\text{Tr}A = 0$ est ramenée à l'étude des itérations de $R_A(T, 0)$ dont le déterminant vaut 1. L'élément $R_A(T, 0)$ est donc un élément du *groupe spécial linéaire* de dimension 2, groupe noté $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Les algébristes connaissent bien la structure de ce groupe et l'ont déjà totalement décomposé. Dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, nous avons les trois sous-groupes suivants :

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, r > 0 \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (1.41)$$

intervenant dans le théorème suivant.

Théorème 4 (Décomposition d'Iwasawa de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$) Soit g un élément de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Alors g admet une décomposition unique de la forme $g = kan$, avec $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$.

En écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, les paramètres intervenant dans la décomposition d'Iwasawa sont les suivants :

$$r\sqrt{a^2 + c^2} > 0, \cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{c}{r}, \quad (1.42)$$

et

$$x = \frac{ab + cd}{a^2 + c^2}. \quad (1.43)$$

On sait même en dire beaucoup plus sur les éléments $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, à conjugaison près. En effet, nous avons le résultat qui va nous permettre d'épuiser notre question :

Théorème 5 (Classes de conjugaison de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$) Soit A un élément de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Alors

- si $(\text{Tr}(A))^2 > 4$, T est conjuguée à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| > 1$.
- si $(\text{Tr}(A))^2 = 4$, T est conjuguée à $\pm I_2$, $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- si $(\text{Tr}(A))^2 < 4$, T est conjuguée à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ n'étant pas $\pm I_2$.

Ainsi, il est très facile d'appliquer le précédent théorème pour déterminer l'existence d'une éventuelle borne de la solution en $\pm\infty$. Si la résolvante est conjuguée à une matrice de rotation, la suite des itérations a une norme invariante. Pour les deux autres cas ($|\text{Tr}(A)| \geq 2$), le calcul successif des matrices montre clairement la divergence de la solution. C'est pourquoi, en dimension 2, l'existence d'une borne de la solution en $\pm\infty$ s'exprime par une condition portant sur la trace de la résolvante du système, qu'il s'agit de positionner par rapport au scalaire 2. Malheureusement, le calcul explicite de cette trace n'est pas une trivialité en général. Sur la base de ce développement, étudions maintenant la phénoménologie de la résonance paramétrique.

1.3.3 La résonance paramétrique et application à l'équation de HILL-MATHIEU

En dimension 2 et quand la trace de $A(t)$ est nulle, nous avons vu que l'étude de la stabilité de la solution nulle d'un système d'équations différentielles linéaire et périodique équivaut à une condition sur la trace de la résolvante, élément de $SL(2, \mathbb{R})$. Fixons maintenant la dimension du système à $n = 2$ et soit $x \in \mathbb{R}^2$. Prenons le champ de vecteurs linéaire et autonome, sans second membre et non perturbé

$$\dot{x} = f(x) = Bx \quad (1.44)$$

que l'on perturbe par un champ de vecteurs périodique et dépendant de l'état du système

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(t, x) = Bx + \epsilon g(t, x). \quad (1.45)$$

En faisant l'hypothèse que

$$g(t, x) = P(t)x = P(t+T)x, \quad (1.46)$$

le système (1.45) s'écrit

$$\dot{x} = \underbrace{(B + \epsilon P(t))}_{A_\epsilon(t)} x, \quad P(t+T) = P(t). \quad (1.47)$$

En supposant que la trace de $A_\epsilon(t)$ soit nulle, nous avons vu que la stabilité de la solution se traite via l'étude de la trace de la résolvante associée au système $\dot{x} = A(t)x$. Une richesse nouvelle a lieu ici due à la forme particulière de la matrice $A_\epsilon(t) = B + \epsilon P(t)$: elle fait intervenir un certain nombre de paramètres contenus dans la matrice constante B , le paramètre de perturbation ϵ et des fréquences contenues dans la matrice périodique $P(t)$. Ainsi, l'expression de la trace de la résolvante R_{A_ϵ} dépend, *a priori*, de l'ensemble de ces paramètres. La description de la stabilité du système admet donc une description qui est paramétrée et, pour une même valeur du paramètre de perturbation ϵ , la stabilité peut dépendre exclusivement des relations faisant intervenir les paramètres contenus dans B et les fréquences de la matrice périodique $P(t)$. C'est à ce niveau qu'intervient la notion de *résonance paramétrique* [Arn74, LL64] :

Définition 3 (Résonance paramétrique) *Le système linéaire à coefficients périodiques $\dot{x} = (B + \epsilon P(t))x$ est en résonance paramétrique si un changement de stabilité de la solution s'opère dès que ϵ est non-nul : pour $\epsilon = 0$, la solution est stable, pour $\epsilon \neq 0$ la solution est instable.*

Nous pouvons donner une vue graphique des lieux de résonance paramétrique en réalisant des cartes de stabilité quand les calculs peuvent se mener explicitement. Illustrons ce propos autour de l'équation de Hill-Mathieu :

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \epsilon f(t))x = 0, \quad (1.48)$$

avec $f(t+T) = f(t)$. On peut facilement vérifier que sous forme matricielle $\dot{y} = A_\epsilon(t)y$, le système correspond à

$$A_\epsilon(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_A + \epsilon \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix}}_{P(t)} \quad (1.49)$$

où l'on a noté $y = (x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2$. En particulierisant $f(t)$ à $f(t) = \cos \gamma t$, on trouve l'équation de Mathieu. Du fait que quand $\epsilon = 0$, la résolvante est explicite ainsi que le calcul de sa trace [Arn74], nous déduisons que les fréquences candidates à une instabilité pour $\epsilon = 0$ sont les

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{k}{2} \equiv \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.50)$$

Ainsi, tracés dans le plan $(\frac{\omega}{\gamma}, \epsilon)$, les domaines d'instabilité ne peuvent émaner que des points $\{\omega_k\}_k$. Les domaines peuvent même être décrits plus précisément, à une précision donnée en fonction de ϵ . En effet, la résolvante R_{A_ϵ} dépend du petit paramètre ϵ et admet en fonction de ce petit paramètre un développement en série (voir à ce propos le théorème de *dépendance différentiable*, par exemple dans [Arn88]) : un développement limité en fonction du petit paramètre. Ce développement s'écrit :

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_A(t, 0) + \epsilon R_1(t, 0) + \epsilon^2 R_2(t, 0) + \epsilon^n R_n(t, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}, t). \quad (1.51)$$

En utilisant cette forme de développement et en injectant dans le système différentiel satisfait par la résolvante, on caractérise explicitement les relations différentielles satisfaites pour les $\{R_i\}_{i=1}^n$ après avoir regroupé et identifié les termes de même puissance en ϵ . La discussion de la stabilité peut alors, dans le cas de calcul explicite, se discuter aux approximations supérieures près. Le terme R_{A_0} correspond à la résolvante, explicite, du cas non perturbé. Le calcul de e^{tA} donne

$$R_A(t, 0) \equiv e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Appliqué à l'ordre 1, il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante pour R_1 :

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = AR_1(t) + P(t)e^{tA} \\ R_1(0) = 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

où les matrices $(A, P(t))$ sont celles intervenant dans l'écriture (1.49).

Ainsi, à l'ordre 1 en ϵ , la condition de stabilité s'exprime par $\text{Tr}(R_A(t, 0) + \epsilon R_1(t)) < 2$. Cette condition détermine des régions du plan $(\frac{\omega}{\gamma}, \epsilon)$ [Arn74]. Les points de résonance paramétrique, les lieux où le changement de stabilité peuvent se manifester, correspondent aux points formés par les courbes fermées : sur ces courbes, chaque point de la courbe contient un voisinage où l'instabilité (dans le système proche du système intégrable) peut se manifester. Le lieu de la résonance paramétrique correspond alors aux frontières séparant les domaines. Pour des paramètres initiaux vivant dans les domaines d'instabilité, la solution de (1.48) croît alors sans borne. Le tracé des régions stables et instables, dans le plan $(\frac{\omega}{\gamma}, \epsilon)$, i.e la réalisation du diagramme de stabilité, porte le nom de diagramme de STRUTT. Nous retrouverons ce diagramme via les méthodes de moyennisation dans la section suivante.

1.4 La résonance dans les systèmes voisins de systèmes intégrables

Sorti du cadre linéaire (à coefficients constant ou périodique), nous nous intéressons ici à des systèmes proches de systèmes intégrables : on considère une petite perturbation d'un problème que l'on sait intégrer sans la perturbation. Les méthodes asymptotiques ont fourni

un outil puissant pour décrire de tels systèmes via notamment le *principe de moyennisation* (ou *méthode de la moyenne*), que nous présentons ci-après. À la lumière des méthodes asymptotiques, les résonances, telles que définies dans ce domaine, sont l'obstacle à la mise en moyenne des équations. Nous discuterons de l'effet de ces résonances sur le mouvement perturbé de façon générale, et présenterons le premier modèle fondamental d'une dynamique résonante. Nous déploierons finalement les outils du principe de moyennisation, dans un cadre Hamiltonien cette fois, pour l'étude de l'équation de Mathieu, déjà étudiée dans le cadre de la théorie de FLOQUET dans la section 1.3.3. Nous retrouverons alors la même description des domaines de résonances.

Beaucoup de problèmes de mécanique céleste peuvent se voir comme une petite perturbation d'un problème plus simple, le *problème non-perturbé*. Les équations du mouvement prennent alors souvent la forme suivante, dite *forme standard* [Arn80, Arn88] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \omega(x) + \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{cases} \quad (1.54)$$

Les variables $x \in \mathbb{R}^n$ sont dites variables lentes, les variables $y \in \mathbb{T}^m$ les variables rapides. Cette dénomination se comprend facilement à cause de la petitesse supposée de ε : $\varepsilon \ll 1$. Les fonctions f et g sont supposées être 2π -périodique par rapport à la variable angulaire y . Précisons immédiatement la forme du système (1.54) n'est pas sans rappeler, quand $n = m$ (n est le degré de liberté, noté DOF), les équations sous-tendues par un Hamiltonien proche d'un Hamiltonien trivialement intégrable. Rappelons que en vertu du théorème de Arnold-Liouville, un Hamiltonien intégrable peut, sans perte de généralité et dans un certain jeu de variables (les variables *actions-angles*), se représenter comme un Hamiltonien ne dépendant que des actions $\mathcal{H}_0(x)$. Ainsi, en introduisant

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}_0(x) + \varepsilon \mathcal{H}_1(x, y), \quad (1.55)$$

les équations du mouvements associées à \mathcal{H} s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \varepsilon \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}_1(x, y)}{\partial y}}_{\equiv f(x, y)} \\ \dot{y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}_0(x)}{\partial x}}_{\equiv \omega(x)} - \varepsilon \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}_1(x, y)}{\partial x}}_{\equiv -g(x, y)}, \end{cases} \quad (1.56)$$

analogues au système (1.54) avec les identifications faites. Que ce soit pour le système (1.54) ou le système (1.56), la géométrie de l'espace des phases dans le cas non perturbé ($\varepsilon = 0$) est très simple à décrire : les variables lentes x sont des constantes du mouvement (des intégrales premières, des quantités conservées), les variables rapides évoluent linéairement avec le temps. Plus précisément, elles s'enroulent sur le tore \mathbb{T}^m à une fréquence constante déterminée par $\omega(x)$. C'est le tore du mouvement non perturbé. Sur ce tore, la trajectoire se ferme (mouvement périodique) ou non (elle densifie alors le tore, le mouvement est dit *quasi-périodique*) selon l'éventuelle commensurabilité des fréquences : si $k_1\omega_1(x) + \dots + k_n\omega_n(x) = 0$, la trajectoire est fermée.

Que le problème soit présenté sous sa forme hamiltonienne (1.56) ou écrit sous la forme standard (1.54), le but des méthodes asymptotiques est de cerner le comportement du problème non perturbé pour des faibles valeurs de ϵ . En particulier, on cherche à décrire la géométrie de l'espace des phases du système perturbé. Le principe de moyennisation, que nous présentons maintenant, est un outil qui permet de cerner le milieu perturbé.

1.4.1 Principe de moyennisation

Introduit par J.L. LAGRANGE puis redécouvert par VAN-DER-POL en mécanique, le principe de moyennisation consiste à substituer au système perturbé (1.54) le système [Arn80, Bél86, Arn88] :

$$\dot{J} = \epsilon F(J) \quad (1.57)$$

avec

$$F(J) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(J, y, 0) dy. \quad (1.58)$$

La perturbation $f(x, y, \epsilon)$ a donc été remplacée par sa moyenne (spatiale) sur le tore. Voyons comment on parvient à justifier ce résultat par des calculs. Le point de départ consiste à chercher la solution de (1.54) sous la forme

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \epsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \epsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \\ y = \bar{y} + \epsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \epsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{cases} \quad (1.59)$$

où (\bar{x}, \bar{y}) sont des nouvelles variables recherchées telles que, dans ces variables, les variables rapides et lentes soient séparées. La recherche de ces variables est au coeur des méthodes asymptotiques perturbatives. Exprimées en ces nouvelles variables, les solutions x et y ont une expression simple et sont ordonnées selon les puissances de ϵ : chaque terme étant supposé correctif devant celui qu'il précède, les fonctions u_i et v_i sont supposées bornées. Par hypothèse de séparation, nous entendons que les nouvelles variables doivent satisfaire au système différentiel ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \epsilon f_1(\bar{x}) + \epsilon^2 f_2(\bar{x}) + \dots \\ \dot{\bar{y}} = \omega(\bar{x}) + \epsilon g_1(\bar{x}) + \epsilon^2 g_2(\bar{x}) + \dots \end{cases} \quad (1.60)$$

Ainsi, en substituant (1.60) et (1.59) dans (1.54), est obtenu un système d'équations aux dérivées partielles dont les seconds membres sont connus et explicitement calculés dans [Bél86, Arn88].

En résolvant ces équations aux dérivées partielles, on parvient à définir les fonctions u_i, v_i recherchées. Pour la première fonction, u_1 , le calcul mène à

$$u_1 = \sum_{k \neq 0} \frac{a_k(\bar{x})}{i\langle k, \omega \rangle} e^{i\langle k, \omega \rangle} + b_0(\bar{x}). \quad (1.61)$$

où les coefficients $\{a_k\}_k$ correspondent aux coefficients apparaissant dans le développement en série de FOURIER de la perturbation $f(x, y, \epsilon)$ supposée périodique sur la variable rapide y . Il

apparaît alors que $f_1(\bar{x})$ est la moyenne sur le tore le long des trajectoires non perturbées de la perturbation :

$$f_1(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{[0, 2\pi]^k} f(\bar{x}, \bar{y}, 0) d\bar{y}. \quad (1.62)$$

Ainsi, en première approximation (à l'ordre 1), les nouvelles coordonnées recherchées se laissent exprimer comme

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

et satisfont au système

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \epsilon f_1(\bar{x}) \\ \dot{\bar{y}} = \omega(\bar{x}). \end{cases}$$

Évidemment, le contrôle de l'erreur commise est crucial pour légitimer cette méthode. De façon générale et sur des intervalles finis de temps de l'ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$, la différence $|x - \bar{x}|$ est de l'ordre de ϵ . Appliquée à des ordres supérieurs, disons n , la méthode de moyennisation donne comme une erreur $|x - \bar{x}|$ de l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon^n)$ sur un intervalle fini de temps de l'ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^n})$ [Bél86, Arn80, Arn88, LM88].

Ajoutons quelques mots sur l'approche hamiltonienne qui viendra compléter la légitimité de cette méthode. Soit donc le hamiltonien :

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}_0(x) + \epsilon \mathcal{H}_1(x, y) + \epsilon^2 \mathcal{H}_2(x, y) + \dots \quad (1.63)$$

Le point de départ du calcul perturbatif hamiltonien est, comme nous l'avons déjà indiqué, de chercher des nouvelles coordonnées (x_*, y_*) , telles que en ces coordonnées, la dépendance en les angles est repoussée au moins en des termes de degré supérieur à 2 en ϵ . Si l'on parvient à trouver de telles coordonnées, l'expression du nouvel hamiltonien est alors

$$\mathcal{H}^*(x_*, y_*) = \mathcal{H}_0^*(x_*) + \epsilon \mathcal{H}_1^*(x_*) + \epsilon^2 \mathcal{H}_2^*(x_*, y_*) + \dots \quad (1.64)$$

signifiant que l'on a pu, grâce à ce jeu de coordonnées adaptées, repousser l'intégrabilité à un ordre supérieur en ϵ . En effet, en assimilant \mathcal{H}^* à

$$\mathcal{H}^*(x_*, y_*) \equiv \mathcal{H}_0^*(x_*) + \epsilon \mathcal{H}_1^*(x_*) \quad (1.65)$$

l'intégration est rendue triviale, ainsi que la description de l'espace des phases à $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ près. En répétant à des degrés supérieurs cette procédure, c'est-à-dire en exhibant des nouvelles coordonnées où la dépendance en les angles intervient à un degré supérieur en ϵ , l'intégration du hamiltonien est effectuée avec un degré de précision arbitraire, ordre par ordre. De façon générale, cette entreprise est vaine à cause des *résonances*, ici des petits diviseurs. Montrons comment. Introduire les outils et notions de façon précise (opérateur de Lie, transformations voisines de l'identité, crochet de Poisson) exigerait une excursion trop importante dans le domaine de la dynamique hamiltonienne. Nous pouvons cependant donner le résultat du calcul

et l'expression du changement de variables quand la précédente entreprise a pour but de chasser la dépendance en les angles jusqu'à l'ordre 1 en ϵ . Les changements de variables hamiltoniens sont souvent pensés de façon indirecte, ou plus précisément, découlent de la donnée d'une fonction, dite génératrice

$$W : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto W(x, y). \quad (1.66)$$

La donnée de W permet de définir des nouvelles variables canoniques (x_*, y_*) .

On en vient alors à définir W comme

$$W(x, y) = i \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{h_k(x)}{\langle k, \omega(x) \rangle} e^{i\langle k, y \rangle}. \quad (1.67)$$

Ici $\omega(x)$ désigne le vecteur fréquence, $\omega(x) = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x}$, et les coefficients h_k désignent les coefficients de la perturbation $\mathcal{H}_1(x, y)$ quand celle-ci est écrite sous la forme de son développement de Fourier :

$$\mathcal{H}_1(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k(x) e^{i\langle k, y \rangle} \quad (1.68)$$

Avec pour transformation canonique la transformation engendrée par W , l'expression de \mathcal{H}^* fait, elle aussi, bien intervenir une moyenne spatiale sur le tore \mathbb{T}^n :

$$\mathcal{H}^*(x, y) = \mathcal{H}_0 + \epsilon \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} H_1(x, y) \, dy}_{\text{indépendant des angles } y} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.69)$$

Dans ces deux développements, une distinction de taille est à opérer : l'éventuel cas où les dénominateurs apparaissant dans (1.61) ou (1.67) s'annulent ou non.

1.4.2 La résonance comme l'échec à la moyennisation

Les précédents calculs n'ont de sens formel que lorsque les diviseurs $\langle k, \omega(x) \rangle$ apparaissant dans (1.61) ou dans (1.67) ne s'annulent pas. Rappelons que les entiers $\{k_i\}_i$ sont les entiers apparaissant dans le développement de Fourier de la perturbation. Quand ces diviseurs s'annulent formellement ou sont lentement variables (la dérivée temporelle est alors proche de zéro), les méthodes asymptotiques parlent de *résonances*. En particulier via (1.59), nous voyons bien que les fonctions qui initialement recherchées bornées⁷ croissent indéfiniment au voisinage de la *surface résonante*, i.e pour l'ensemble des variables lentes \bar{x} , où se produit la relation

$$\langle k, \omega(\bar{x}) \rangle \approx 0. \quad (1.70)$$

Cependant, la moyennisation reste possible en cas de résonance, quitte à redéfinir, dans certaines régions de l'espace des configurations, les nouvelles variables lentes et à opérer, en ces nouvelles variables, la moyennisation comme précédemment décrite. On parle de *moyennisation partielle* du système par rapport aux termes résonants. Intuitivement, la résonance s'interprète comme « une perte de continuité » dans l'espace des phases dans le processus de moyennisation. En général, les nouvelles variables contiennent des variables lentes de plus (celles qui

7. Chaque terme composant la série est un terme correctif devant l'autre.

varient lentement) et des variables rapides de moins, celles pour lesquelles la moyennisation a pu être opérée. Quand la dynamique est écrite sous forme hamiltonienne, les nouvelles variables canoniques que l'on définit en cas de résonance s'introduisent, dans la plupart des cas pratiques, via des transformations unimodulaires⁸ \mathfrak{T} de $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur les angles. En définissant

$$y_\star = \mathfrak{T}y, \text{Det}(\mathfrak{T}) = 1 \quad (1.71)$$

les nouvelles actions à introduire, pour conserver le caractère canonique du système, peuvent être les

$$x_\star = \mathfrak{T}^{-\top}x. \quad (1.72)$$

Le couple des nouvelles variables (x_\star, y_\star) reste alors un couple de variables canoniques [Mor02].

1.4.3 Dynamique au voisinage d'une résonance

Nous pouvons éclairer la dynamique au voisinage d'une résonance en la rattachant à un modèle fondamental, cette réduction amenant le plus souvent à un modèle intégrable. Le plus classique et utilisé est la réduction à une forme pendulaire. Nous utiliserons très souvent cette réduction dans la suite du document, raison pour laquelle nous présentons la méthode pour y parvenir [Bre03, Mor02].

Soit donc un hamiltonien proche d'un système intégrable que l'on suppose être à $2n$ -DOF,

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}_0(x) + \epsilon \mathcal{H}_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n, \quad (1.73)$$

avec $\mathcal{H}_1(x, y)$ une perturbation 2π -périodique en y . Cette perturbation est ensuite écrite sous forme de son développement de FOURIER dont on ne retient, en vertu du principe de moyennisation, que les termes trigonométriques dont les arguments sont lentement variables. L'introduction de cet argument résonant, typiquement via un changement de variables linéaire sur les angles, permet de créer $(n - 1)$ intégrales premières. Ainsi, en ces nouvelles variables $(I, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, le précédent hamiltonien, encore noté \mathcal{H} , s'écrit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I) + \epsilon \mathcal{H}_1(I, \phi). \quad (1.74)$$

La résonance est localisée, en négligeant les termes d'ordre ϵ , pour une valeur spécifique d'action, l'action résonante :

$$\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I} = 0 \simeq \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = 0 \Leftrightarrow I = I_\star. \quad (1.75)$$

Le développement local d'ordre 2 du précédent hamiltonien au voisinage de l'action résonante I_\star a la forme :

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_0(I_\star)}_{=\text{constant}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I}}_{=0} (I - I_\star) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I^2} (I - I_\star)^2 + \epsilon \mathcal{H}_1(I_\star, \phi) + \dots \quad (1.76)$$

8. Linéaire, à coefficients entiers et de déterminant 1.

En négligeant les termes d'ordre supérieur dans le développement du hamiltonien, nous obtenons

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I^2} (I - I_*)^2 + \epsilon \mathcal{H}_1(I_*, \phi). \quad (1.77)$$

En supposant de plus que $\mathcal{H}_1(I_*, \phi)$ est de la forme $h(I_*) \cos \phi$, le précédent développement correspond au hamiltonien d'un pendule, qui sous forme normalisée (libre de tout paramètre) peut s'écrire dans des nouvelles variables comme

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} J^2 + \cos \Phi. \quad (1.78)$$

Pour passer de (1.77) à (1.78), en plus de n'avoir retenu que le terme principal dans le développement de FOURIER de $\mathcal{H}_1(I_*, \phi)$, nous avons posé $J = \frac{I - I_*}{\sqrt{\epsilon h(I_*)}}$. Rappelons que les constantes ne jouent pas de rôle (dynamique) quand elles sont ajoutées à un hamiltonien⁹, raison pour laquelle nous n'avons plus tenu compte de $\mathcal{H}_0(I_*)$ dans le passage (1.76) à (1.77). Le portrait de phase du pendule, problème intégrable, est bien connu. Le portrait de phase possède un point fixe hyperbolique et un point fixe elliptique. Il est composé d'un régime circulaire et libratoire, lequel est séparé par la *séparatrice*. Ajoutons que écrite dans les variables (J, Φ) , la *largeur de la résonance*, i.e la distance entre le point extrême de la séparatrice et la ligne $J = 0$, vaut

$$\Delta = 2. \quad (1.79)$$

Aussi, quand (1.80) s'écrit

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} J^2 + \nu \cos \Phi, \quad (1.80)$$

alors la largeur de la résonance est de l'ordre de $\sqrt{\nu}$ et vaut

$$\Delta = 2\sqrt{\nu}. \quad (1.81)$$

1.4.4 Application des méthodes asymptotiques à l'équation de HILL-MATHIEU

Nous déployons les outils de moyennisation des systèmes voisins de systèmes intégrables, précédemment décrits, pour dresser via le calcul perturbatif la carte de stabilité de l'équation de Hill-Mathieu, dans un cadre Hamiltonien. Nous retrouvons dans ce contexte les résultats de la section 1.3.3 obtenus *via* la théorie de FLOQUET.

Nous nous intéressons ici à l'équation

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \epsilon \cos \gamma t)x = 0. \quad (1.82)$$

Puisque l'équation est non autonome¹⁰, le Hamiltonien lui correspondant est à 2-DOF dans l'espace des phases étendu : on a noté $\phi_2 = \gamma t$ et on a introduit sa variable canonique I_2 de sorte que $\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \gamma$. On peut alors vérifier que le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = -\frac{\omega}{2} (I_1^2 + \phi_1^2) + \gamma I_2 - \epsilon \omega \frac{\phi_1^2}{2} \cos \phi_2 \quad (1.83)$$

9. Nous voulons dire que les équations de la dynamique sous jacentes à \mathcal{H} ou $\mathcal{H} + c$ sont identiques.

10. Elle dépend explicitement du temps t .

où (I_2, ϕ_2) sont les nouvelles canoniques associées, $\phi_2 = \gamma t$, est équivalent à la donnée de (1.82). Quand elles sont écrites dans ces variables, les équations du mouvement sous-jacentes n'ont pas la forme du système standard (1.54). Cependant, elles le deviennent en introduisant des « coordonnées polaires » (Λ, λ) définies par

$$\begin{cases} I_1 = \sqrt{2\Lambda_1} \cos(\lambda_1) \\ I_2 = \Lambda_2 \\ \phi_1 = \sqrt{2\Lambda_1} \sin(\lambda_1) \\ \phi_2 = \lambda_2 \end{cases}$$

Ces variables étant canoniques¹¹, le Hamiltonien, que l'on continue de noter \mathcal{H} , s'écrit

$$\mathcal{H} = \underbrace{-\omega\Lambda_1 + \gamma\Lambda_2}_{\mathcal{H}_0(\Lambda)} - \epsilon \underbrace{\omega\Lambda_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \lambda_2}_{\mathcal{H}_1(\Lambda, \lambda)} \quad (1.84)$$

Le développement de FOURIER de la fonction $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \sin^2 \lambda_1 \cos \lambda_2$ ne contient que des harmoniques, qui sous forme complexe, sont de la forme $e^{i(\pm 2\lambda_1 \pm \lambda_2)}$ ou $e^{i\lambda_2}$. Puisque $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \Lambda} = (-\omega, \gamma)$, l'équation résonante s'écrit

$$\begin{cases} \langle (-\omega, \gamma), (\pm 2, \pm 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow \pm 2\omega \pm \gamma = 0 \\ \langle (-\omega, \gamma), (0, \pm 1) \rangle = 0 \end{cases}$$

dont les solutions admissibles donnent, à l'ordre 1, les relations suivantes de résonance

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2}. \quad (1.85)$$

Plus l'ordre de la résonance est petit, plus l'effet de la résonance est important [Bél86]. Notons que nous venons de retrouver, et de façon *a priori*, le fait que le domaine d'instabilité de la carte de stabilité de l'équation de Mathieu sera le plus important au voisinage du point $\frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2}$, comme nous l'avions vu précédemment. Étudions maintenant la stabilité du système quand $\frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2}$, *i.e* au voisinage d'une résonance. Des relations trigonométriques simples, nous avons :

$$\sin^2 \lambda_1 \cos \lambda_2 = \frac{1}{2} \cos \lambda_2 - \frac{1}{4} (\cos(2\lambda_1 + \lambda_2) - \cos(2\lambda_1 - \lambda_2)). \quad (1.86)$$

En substituant (1.86) dans (1.84), nous trouvons

$$\mathcal{H} = -\omega\Lambda_1 + \gamma\Lambda_2 - \frac{\epsilon\omega\Lambda_1}{4} (2 \cos \lambda_2 - (\cos(2\lambda_1 + \lambda_2) - \cos(2\lambda_1 - \lambda_2))). \quad (1.87)$$

La dérivée temporelle de l'angle $2\lambda_1 + \lambda_2$ est alors proche de zéro quand $\frac{\omega}{\gamma} \approx \frac{1}{2}$ puisque :

$$2\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \approx -2\omega + \gamma = 0. \quad (1.88)$$

La moyennisation indépendamment selon les angles λ_1 et λ_2 est donc non légitime au voisinage de la résonance. En introduisant la variable résonante $2\lambda_1 + \lambda_2$ via la transformation unimodulaire

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

11. Il suffit de calculer les différents crochets de Poisson $\{I_i, I_j\}, \{\phi_i, \phi_j\}, \{I_i, \phi_j\}$ pour s'en convaincre.

les nouvelles variables canoniques vérifient les relations

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

En utilisant ces variables, nous avons

$$\mathcal{H} = -2\omega J_1 + \gamma \left(\frac{J_2}{2} + J_1 \right) - \frac{\epsilon\omega J_1}{2} (2 \cos 2\rho_2 - (\cos \rho_1 - \cos(\rho_1 - 4\rho_2))) \quad (1.91)$$

et la moyennisation sur l'angle rapide ρ_2 donne pour nouvel hamiltonien \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = -2\omega J_1 + \gamma \left(\frac{J_2}{2} + J_1 \right) + \frac{\epsilon\omega J_1}{2} \cos \rho_1. \quad (1.92)$$

Puisque \mathcal{H} est ρ_2 -cyclique, c'est-à-dire que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, J_2, \rho_1, -)$, la variable J_2 est une constante fixée par les conditions initiales et qui peut être supprimée du Hamiltonien¹². Le Hamiltonien moyenné est donc devenu à 1-DOF en les variables (J_1, ρ_1) :

$$\mathcal{H} = -2\omega J_1 + \gamma J_1 + \frac{\epsilon\omega J_1}{2} \cos \rho_1. \quad (1.93)$$

Ce dernier hamiltonien s'écrit encore¹³

$$\mathcal{K} = aX^2 + bY^2 \quad (1.94)$$

avec

$$\begin{cases} a = -2\omega + \gamma + \frac{\epsilon\omega}{2} \\ b = -2\omega + \gamma - \frac{\epsilon\omega}{2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} X = \sqrt{J_1} \cos \frac{\rho_1}{2} \\ Y = \sqrt{J_1} \sin \frac{\rho_1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, étant donné que les équations sous-jacentes à (1.94) sont linéaires avec pour opérateur constant associé

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.95)$$

l'instabilité se manifeste quand $ab < 0$ (le discriminant valant $\Delta = -16ab$, les valeurs propres ont une partie réelle positive dans le cas $ab < 0$). Nous pouvons donc déterminer les frontières des domaines de stabilité à $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ près en résolvant

$$\begin{cases} -2\omega + \gamma + \frac{\epsilon\omega}{2} = 0 \\ -2\omega + \gamma - \frac{\epsilon\omega}{2} = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne, dans le plan $(\frac{\omega}{\gamma}, \epsilon)$, deux droites émanant du point $\frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2}$, comme montré par la figure 1.3.

12. L'ajout d'une constante à un Hamiltonien n'a aucun impact sur la dynamique.

13. $\cos \rho_1 = \cos 2\frac{\rho_1}{2} = \cos^2 \frac{\rho_1}{2} - \sin^2 \frac{\rho_1}{2}$.

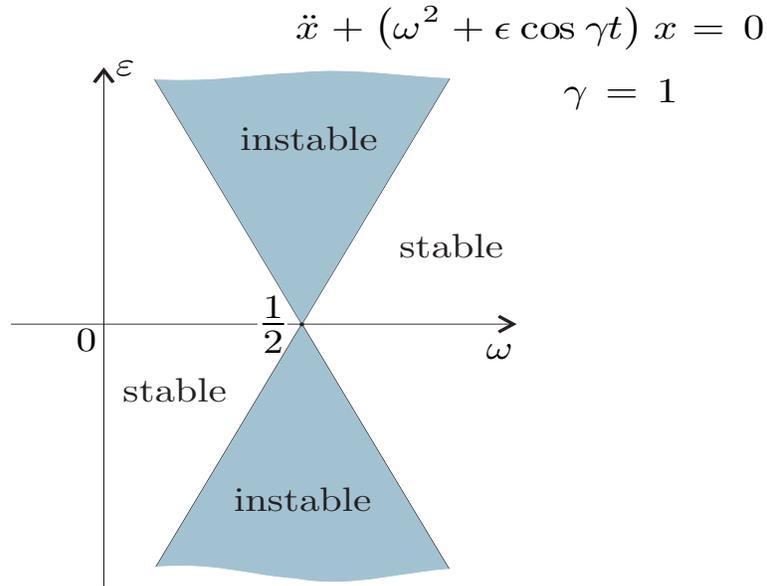


FIGURE 1.3 – Diagramme de stabilité de l'équation $\ddot{x} + \epsilon(1 + \cos \gamma t)x = 0$ dans le plan $(\epsilon, \frac{\omega}{\gamma})$ avec $\gamma = 1$ obtenu à l'aide du principe de moyennisation appliqué à l'ordre 1.

1.5 Quelques résonances en mécanique céleste et spatiale

Nous dressons un petit panorama de configurations résonantes existantes en mécanique spatiale et céleste.

1.5.1 Dynamique résonante dans la ceinture d'astéroïdes

La dynamique et le problème des lacunes de KIRKWOOD est un problème stimulant depuis la découverte de la discontinuité évidente dans l'histogramme du nombre d'astéroïdes tracé en fonction du demi-grand axe. Nous y trouvons clairement des déficits d'astéroïdes pour certaines valeurs spécifiques de demi-grands axe. Ces demi-grands axes possèdent une propriété commune : ils établissent une relation de commensurabilité entre le moyen mouvement de l'astéroïde et le moyen mouvement de Jupiter. C'est à dire, une relation du type :

$$\frac{\dot{M}_{\text{Jupiter}}}{\dot{M}_{\text{Astéroïde}}} \approx \frac{n_1}{n_2} \quad (1.96)$$

Des progrès substantiels de dynamique dans ces régions ont pu être atteints avec les progrès informatiques, si bien que le problème des lacunes de KIRKWOOD a connu un renouveau, comme en atteste la littérature foisonnante à ce sujet. Pour une initiation au problème et à la littérature, on peut se référer à l'article [Moo96].

1.5.2 Dynamique résonante dans le système solaire

Les résonances dans le système solaire sont nombreuses et peuvent être de différents types. Il peut s'agir de résonances de moyen mouvement (par exemple la résonance Titan-Hypérion

4 : 3), de résonances spin-orbite quand la période de rotation d'un corps est commensurable avec le moyen mouvement (par exemple la résonance de Mercure 3 : 2 ; Mercure effectue trois rotations au bout de deux révolutions) ou encore de résonances de corotation qui se produisent lorsque l'orbite du satellite est fermée dans un repère tournant avec la particule [Sic91]. La question de la résonance même du système solaire a déjà même été posée. V.BÉLETSKI dans [Bél86] discute de cette idée à la lumière de l'hypothèse de MOLCHANOV déjà formulée en 1966. MOLCHANOV dans [Mol68] dresse des tables de résonances édifiantes du système solaire¹⁴, de Saturne et de quelques de ses satellites, de Jupiter et de quelques de ses satellites et finalement d'Uranus et de quelques de ses satellites. L'idée de MOLCHANOV n'est pas sans rappeler la tentative d'ordonner le système solaire, exactement comme J.KEPLER a pu le faire [Gin69]. L'ordonnement est ici fait selon le principe des résonances. Ces tables sont présentées dans les figures 1.4 et 1.5. Le papier de MOLCHANOV a alors donné lieu à un échange vif sur le bien fondé de cette nature résonante ou si au contraire ces tables n'étaient pas le simple fruit de corrélation probabiliste : [Bac69, Mol69b, Mol69a]. MOLCHANOV a fait des résonances un principe structurel magnifique : tout système oscillant « mature sur le plan évolutif » est en résonance, *i.e* que l'on peut juger de la maturité d'un système oscillant à sa propriété d'être gouverné par des nombres entiers (!). Nous ne pouvons alors nous empêcher de citer le quatrième essai, « *Le mouvement des mondes* », de [Bél86]. L'auteur, faisant merveilleux écho à l'hypothèse de MOLCHANOV et à son principe structurel des résonances, fait alors apparaître la loi de NEWTON, la loi de la gravitation, comme une résonance...

FREQUENCIES AND RESONANCE VECTORS OF THE SOLAR SYSTEM												
Planet	ω_{obs}	ω_{theor}	$\Delta\omega/\omega$									
Mercury	49.22	49.20	0.0004	1	-1	-2	-1	0	0	0	0	0
Venus	19.29	19.26	0.0015	0	1	0	-3	0	-1	0	0	0
Earth	11.862	11.828	0.0031	0	0	1	-2	1	-1	1	0	0
Mars	6.306	6.287	0.0031	0	0	0	1	-6	0	-2	0	0
Jupiter	1.000	1.000	0.0000	0	0	0	0	2	-5	0	0	0
Saturn	0.4027	0.400	0.0068	0	0	0	0	1	0	-7	0	0
Uranus	0.14119	0.14286	-0.0118	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
Neptune	0.07197	0.07143	0.0075	0	0	0	0	0	0	1	0	-3
Pluto	0.04750	0.04762	-0.0025	0	0	0	0	0	1	0	-5	1

FIGURE 1.4 – Table de résonance du système solaire proposée par MOLCHANOV [Mol68].

1.5.3 Dynamique résonante en mécanique spatiale

La dynamique du satellite artificiel orbitant l'environnement terrestre n'est pas en reste quant aux résonances. En ce qui concerne les résonances de moyen mouvement, les satellites sont généralement trop bas pour que se produise ce type de commensurabilité. Cependant, ils n'échappent pas aux :

1. *résonances tessérales* : elles apparaissent quand une commensurabilité entre le moyen mouvement du satellite et la période de révolution sidérale de la Terre sont en commensura-

14. Pluton était encore considéré comme une planète.

FREQUENCIES AND RESONANCE VECTORS OF SATELLITE SYSTEMS											
Satellite	ω_{obs}	ω_{theor}	$\Delta\omega/\omega$								
<i>Saturn's Satellites</i>											
Mimas	16.918	16.800	0.0070	-1	0	2	0	0	0	0	0
Enceladus	11.639	11.600	0.0035	0	-1	0	2	0	0	0	0
Phoebe	8.448	8.400	0.0057	0	0	-1	0	2	1	0	2
Diana	5.826	5.800	0.0045	0	0	0	-1	2	-1	0	-1
Rhea	3.530	3.500	0.0086	0	0	0	0	-1	2	2	0
Titan	1	1	0.0000	0	0	0	0	0	-3	4	0
Hyperion	0.7494	0.7500	0.0008	0	0	0	0	0	-1	0	5
Japetus	0.2010	0.2000	0.0050	0	0	0	0	0	0	-1	4
<i>Jupiter's Satellites</i>											
Io	4.044	4.000	0.0110	1	-2	0	0				
Europa	2.015	2.000	0.0075	0	1	-2	0				
Ganymede	1.000	1.000	0.0000	0	0	-3	7				
Callisto	0.4288	0.4285	0.0008	0	0	-1	2				
<i>Uranus' Satellites</i>											
Miranda	6.529	6.545	-0.0025	-1	1	1	1	0			
Ariel	3.454	3.454	-0.0000	0	-1	1	2	-1			
Umbriel	2.100	2.091	0.0043	0	0	-2	1	5			
Titania	1.000	1.000	0.0000	0	0	1	-4	3			
Oberon	0.6466	0.6364	0.0160	0	0	1	-2	0			

FIGURE 1.5 – Table de résonance de systèmes de satellites naturels proposée par MOLCHANOV [Mol68].

bilité simple [Ged69, All65, Lan87, Ely96, EH97] :

$$n_1 \dot{M}_{sat} + n_2 \dot{\theta} \approx 0. \quad (1.97)$$

Il en résulte alors des variations à long terme et à grandes amplitudes sur le demi-grand axe. Ce type de résonances sera étudié dans ce document. En particulier, nous modéliserons entre autres l'accès au chaos analytiquement en construisant la forme normale résonante du Hamiltonien, à 2-DOF, et nous étudierons en outre la stabilité de l'espace des phases numériquement.

2. *résonances semi-séculaires* : elles apparaissent quand une commensurabilité se produit entre l'argument du satellite, son nœud ascendant et la longitude moyenne du troisième corps perturbateur *i.e* la Lune ou le Soleil [Coo62, Hug80, Hug81, Bre99, Bre00, Bre01a] :

$$n_1 \dot{\omega} + n_2 \dot{\Omega} + n_3 \dot{\lambda}_p \approx 0. \quad (1.98)$$

Ils apparaissent en général pour des satellites bas, inférieurs à 3 rayons équatoriaux. Ces résonances ne seront que mentionnées dans ce travail.

3. *résonances séculaires* : elles font intervenir les fréquences du nœud et du périégée du satellite ainsi que la fréquence du nœud lunaire [Bre01b, Ely02, RARV15] :

$$n_1 \dot{\omega} + n_2 \dot{\Omega} + n_3 \dot{\Omega}_{Lune} \approx 0. \quad (1.99)$$

Une partie importante de ce travail sera consacrée à l'étude de ces résonances qui jouent un rôle clef sur la dynamique à long terme de la région MEO, région hôte des satellites de navigation GNSS. En particulier, nous verrons que ces résonances sont responsables de l'accès au chaos et à l'origine d'un transport macroscopique (diffusion) dans l'espace des phases, sur des échelles de temps courtes, de l'excentricité.

1.6 Conclusion

En partant d'une notion souvent peu définie, voire même subjective si l'on s'en réfère à certains auteurs [Gia72], nous avons initié une réflexion sur la « nature » de la notion de *résonance*.

Pour les systèmes différentiels les plus simples, ceux qui sont linéaires à coefficients constants, nous avons défini la résonance comme la situation où un changement s'opère sur la solution du système quand l'équation linéaire homogène devient non-homogène (forcée périodiquement) : la solution, initialement bornée sans second membre, croît sans borne en présence du forçage. Le passage du caractère borné à non-borné de la solution, suite à l'ajout de ce forçage, admet une caractérisation explicite que nous avons écrite. Cette caractérisation s'exprime en terme des valeurs propres de l'opérateur linéaire (*i.e* de ses propriétés spectrales) et des fréquences présentes dans le terme de forçage. Cette caractérisation est résumée par le théorème 2. La notion de résonance dans les systèmes linéaires à coefficients constant est ainsi épuisée.

Nous avons ensuite discuté de l'extension de cette idée au cas plus général des systèmes linéaires mais à coefficients non-constants. Dans le cas où la variation des coefficients du système est périodique, nous avons pu en dimension $n = 2$ dérouler les outils de la théorie de Floquet pour voir comment l'étude du caractère borné de la solution équivaut à une condition sur la trace de la résolvante du système quand on s'intéresse à des systèmes qui conservent l'élément volume dans l'espace des phases. La notion de *résonance paramétrique* intervient dans les systèmes mettant en jeu une perturbation périodique, mais cette fois sous la forme $\dot{x} = A_\epsilon(t)x$ avec $A_\epsilon(t) = A + \epsilon P(t)$. La notion de résolvante paramétrique se dégage alors par une condition d'ouverture (au sens topologique) qui cesse d'avoir lieu sous l'effet de la perturbation : le système perturbé peut alors devenir non-borné, partant d'une solution bornée dans le cas non-perturbée, aussi petit soit ϵ . La résonance correspond, là encore, à un changement de régime (de borné à non-borné) quand le système devient perturbé.

Dans le cas le plus général, les systèmes voisins de systèmes trivialement intégrables, la résonance apparaît comme l'échec à la mise en moyenne des équations (1.61). Le but du principe de moyennisation étant, par changement de variables *ad-hoc*, de repousser à des ordres supérieurs en le petit paramètre la dépendance en les angles du système. En cas de résonance, les solutions du système perturbé, que l'on cherche à écrire comme une succession hiérarchisée de « corrections », croissent alors sans borne (1.59). Là encore, la résonance apparaît comme la situation où la solution perturbée croît sans borne suite à l'ajout d'une (petite) perturbation périodique.

Le socle commun de toutes ces situations, caractérisées par un changement de régime (passage du caractère borné au caractère non-borné de la solution perturbée) est alors résumé par le tableau 1.6.

Type de système	Condition d'apparition de la résonance	Section
$\dot{x} = Ax + \epsilon f(t)$	$\langle k, \omega \rangle = 0$	1.2.2
$\dot{x} = (A + \epsilon P(t))x$	$\langle k, \omega \rangle = 0$	1.3.3
$\dot{x} = \epsilon f(x, y), \dot{y} = \omega(x) + \epsilon g(x, y)$	$\langle k, \omega \rangle = 0$	1.4.2
$\mathcal{H}(I, \phi) = \mathcal{H}_0(I) + \epsilon \mathcal{H}_1(I, \phi)$	$\langle k, \omega \rangle = 0$	1.4.2

FIGURE 1.6 – Condition de résonance selon le type de système considéré.

Chapitre 2

Particularités des études en temps long et problème fondamental de la moyennisation

Sommaire

2.1 Introduction au problème	34
2.1.1 Définitions élémentaires	34
2.1.2 Intégrabilité à la LIOUVILLE	35
2.1.3 Les systèmes perturbés et la perte d'intégrabilité	37
2.2 Perturbations principales au voisinage de la Terre	39
2.2.1 Le potentiel interne	39
2.2.2 Le potentiel externe des troisièmes corps	41
2.2.3 Autres perturbations	41
2.3 Théorie semi-analytique	41
2.4 Formulation du problème fondamental de la moyennisation	43
2.5 Résumé et enjeux	45

LA THÉORIE DES PERTURBATIONS et les méthodes de moyennisation sont des techniques standard de dynamique hamiltonienne, historiquement déployées pour le problème planétaire séculaire par LAGRANGE. Cet arsenal d'outils permet de prendre la main sur des équations proches d'équations dont les solutions sont connues, les *systèmes voisins de systèmes intégrables*. Dans ce chapitre, après quelques rappels de dynamique hamiltonienne, nous présentons les petites perturbations à l'œuvre en mécanique spatiale, affectant l'évolution en temps long des corps orbitant le voisinage terrestre. L'application du principe de la *mise en moyenne* des équations issues de la mécanique spatiale est présentée. Nous formulons ensuite le problème fondamental de la moyennisation, qui pose la question de l'adéquation éventuelle entre le mouvement exact et sa description via les théories moyennes, en temps long et sur des dynamiques typiquement chaotiques.

2.1 Introduction au problème

Tous les systèmes dynamiques ne peuvent s'écrire en terme de dynamique hamiltonienne, les contre-exemples classiques étant les systèmes dissipatifs. Le formalisme hamiltonien fournit aux systèmes dynamiques un cadre idéal pour l'application de la théorie des perturbations.

2.1.1 Définitions élémentaires

Partons de l'équation simple de l'oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.1)$$

$x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Ce système différentiel d'ordre 2 peut s'écrire différemment. En posant $q = x$ et $p = m\dot{x}$, $(q, p) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kq, \end{cases} \quad (2.2)$$

que l'on peut voir comme la donnée du système

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2} + \kappa. \quad (2.4)$$

La quantité κ est ici une constante arbitraire. La fonction \mathcal{H} est dit le *hamiltonien*¹ associé au système (2.1) qui est dit d'admettre une formulation hamiltonienne. La quantité $\frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2}$ est l'*énergie* du système (2.1). En mimant cet exemple dans un cas plus général, on comprend alors pourquoi beaucoup d'équations issues de la mécanique céleste admettent une formulation hamiltonienne². En effet, soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ et M une matrice symétrique. Soit f un champ de vecteur \mathbb{R}^n dérivant d'un potentiel U et considérons

$$M\ddot{x} = f(x) = -\nabla U(x). \quad (2.5)$$

Alors en posant $q = x$ et $p = M\dot{x}$ il vient

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}p \\ \dot{p} = M\ddot{x} = -\nabla U(q), \end{cases} \quad (2.6)$$

1. Ce nom a été attribué à tort à HAMILTON par DIRAC en 1927, mais la notation \mathcal{H} a été introduite par LAGRANGE, pour HUYGENS, au début du XIX^e siècle.

2. Le formalisme hamiltonien découle du formalisme lagrangien via les transformations de LEGENDRE. Pour plus de détails, se référer à [AKN07].

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \end{cases} \quad (2.7)$$

en définissant $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}p^\top M^{-1}p + U(q)$.

Donnons-nous maintenant un hamiltonien \mathcal{H} de $\mathbb{R}^{2n} = (q, p)$, dont les équations de HAMILTON sous-jacentes sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ces équations sont liées au gradient de \mathcal{H} . En effet, en posant $X = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, il est immédiat de voir que (2.8) se laisse exprimer comme

$$\dot{X} = J\nabla\mathcal{H}(X), \quad (2.9)$$

où $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ vaut

$$J = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^{n \times n}} & \mathbf{I}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \\ -\mathbf{I}_{\mathbb{R}^{n \times n}} & 0_{\mathbb{R}^{n \times n}} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La quantité n est dite le *nombre de degrés de liberté* du système et les variables (q, p) sont des *variables conjuguées*. En se donnant une solution $(q(t), p(t))$ du système, il n'est pas difficile de voir que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(q(t), p(t)) = 0. \quad (2.11)$$

On dit alors que \mathcal{H} est une *intégrale première*, i.e. une quantité invariante (une quantité conservée) le long d'une trajectoire. Plus généralement, toute quantité invariante le long d'une trajectoire sera dite *intégrale première* du système. La recherche d'intégrales premières joue un rôle prépondérant dans l'éventuelle intégrabilité du système puisque leur existence contraint à rechercher la solution dans un espace de dimension inférieure. C'est cette idée qui définit l'intégrabilité au sens de LIOUVILLE quand il y a « assez » d'intégrales premières qui sont suffisamment « indépendantes » en un sens que nous allons préciser.

2.1.2 Intégrabilité à la LIOUVILLE

Avant de définir plus précisément le résultat d'intégrabilité de LIOUVILLE, introduisons la définition du crochet de POISSON. Cela peut se faire sèchement via la

Définition 4 Soient f, g deux fonctions de \mathbb{R}^{2n} à valeurs dans \mathbb{R} . Le crochet de POISSON entre f et g , noté $\{f, g\}$ est la quantité

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (2.12)$$

ou alors plus naturellement. Pour cela, donnons nous $X(t)$ une solution de (2.9) et $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculons la dérivée $\frac{d}{dt}f(X(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(X(t)) &= Df(X(t))\dot{X}(t) \\ &= Df(X(t))J\nabla\mathcal{H}(X) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \right)}_{\{f,\mathcal{H}\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\{f, g\}$ s'interprète comme la dérivée de f le long d'une trajectoire associée au système hamiltonien dont g est le hamiltonien. Il s'en suit que si $\frac{d}{dt}f(X(t)) = 0$, alors $f(X(t))$ est constante, i.e que f est une intégrale première du système. Il est alors évident, puisque $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$, que \mathcal{H} est une intégrale première du système, comme nous l'avons déjà mentionné. Le crochet de POISSON jouit de propriétés sur lesquelles nous ne nous attardons pas, mais le lecteur pourra les trouver facilement dans [Mor02]. Énonçons maintenant le théorème dit de LIOUVILLE.

Théorème 6 (de LIOUVILLE) *Soit un système hamiltonien à n -degrés de liberté sur \mathbb{R}^{2n} . Soient*

$$F_1, \dots, F_n$$

n -intégrales premières du système, indépendantes, au sens où

$$\text{Rang}(\nabla F_1, \dots, \nabla F_n) = n,$$

et telles que les $\{F_i\}_{i=1}^n$ soient en involution par rapport au crochet de Poisson, i.e telles que

$$\forall i, \forall j, \{F_i, F_j\} = 0. \quad (2.13)$$

Soit $f \in \mathbb{R}^n$ et

$$M_f = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid f_1 = F_1(x), \dots, f_n = F_n(x)\}. \quad (2.14)$$

Alors

1. M_f est invariant par le flot du système,
2. si M_f est compact et connexe, alors il est difféomorphe à un tore de dimension n :

$$M_f \simeq \mathbb{T}^n \equiv (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n.$$

Sur ce tore, il existe un système de coordonnées (ϕ_1, \dots, ϕ_n) tel que dans ces coordonnées

$$\frac{d}{dt}\phi_i = \omega_i(f_1, \dots, f_n) = \kappa_i \quad (2.15)$$

et le système est intégrable par quadrature.

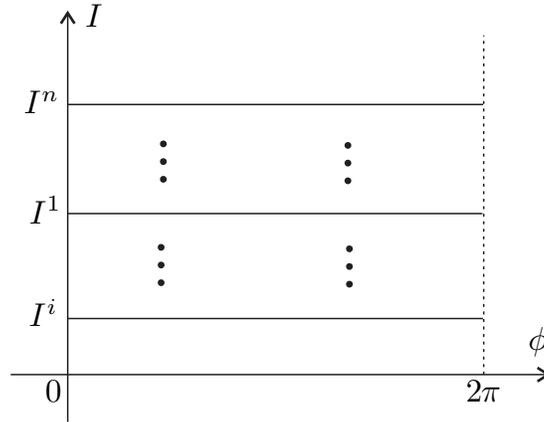


FIGURE 2.1 – Géométrie de l'espace des phases d'un système intégrable.

Le théorème dit de LIOUVILLE-ARNOLD vient compléter ce résultat :

Théorème 7 (de LIOUVILLE-ARNOLD) *Il existe un voisinage de M_I dans lequel on peut définir un système de coordonnées $(\phi, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, dites coordonnées actions-angles, dans lequel le système s'écrit*

$$\begin{cases} \dot{I}_j = 0, j = 1, \dots, n \\ \dot{\phi}_j = \omega_j(I_1, \dots, I_n), j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.16)$$

Ainsi, en les variables actions-angles, les équations du mouvement d'un système intégrable sont remarquablement simples et équivalentes à la donnée d'un hamiltonien qui ne dépend que de ses actions :

$$\mathcal{H} = h(I) = h(I_1, \dots, I_n). \quad (2.17)$$

C'est pourquoi à la lumière de ce théorème, tout problème voisin de système intégrable peut génériquement s'écrire comme la donnée d'un hamiltonien sous la forme

$$\mathcal{H} = h(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad \epsilon \ll 1. \quad (2.18)$$

Il en résulte que la description de l'espace des phases du cas intégrable ($\epsilon = 0$) est simple : les actions sont constantes et les angles évoluent linéairement avec le temps, comme illustré par la figure 2.1. Dans le cas de dimension 2, les trajectoires s'enroulent sur un tore défini par les valeurs des actions initiales. Selon la commensurabilité (à coefficients entiers) éventuelle des fréquences ω_1 et ω_2 , la trajectoire se referme sur ce tore (le mouvement est alors un *mouvement périodique*) ou le densifie dans le cas contraire, et le mouvement est alors dit *mouvement quasi-périodique*.

2.1.3 Les systèmes perturbés et la perte d'intégrabilité

Le problème du devenir des tores (ou le problème de l'évolution des tores) dessinés dans la figure 2.1 sous l'effet de la (petite) perturbation $\epsilon f(I, \phi)$, c'est-à-dire l'étude du mouvement généré par le hamiltonien

$$\mathcal{H} = h(I) + \epsilon f(I, \phi) \quad (2.19)$$

était désigné par H. POINCARÉ comme « *le problème fondamental de la dynamique* » [Poi99a]. Répondre à cette question, c'est pénétrer le domaine de la théorie KAM³ qui analyse leur destin : déformation, éventuelle survie ou destruction des tores initiaux du mouvement non-perturbé. Les percées de cette théorie ont été accomplies par des mathématiciens *chevronnés*⁴, et nous n'avons pas la prétention de rentrer dans les détails, où il a fallu, selon V.ARNOLD lui même, « *[mettre] en œuvre l'effrayant appareil formel de la dynamique* ». La question fondamentale étant de savoir s'il existe un changement de variable canonique $(I, \phi) \rightarrow (J, \Phi)$ tel que en les nouvelles variables (J, Φ) , le nouvel hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}$ ne dépende que de ses actions, *i.e* que l'expression de (2.19) se réduise à

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(J) \quad (2.20)$$

dans les variables (J, Φ) , pourvu que ϵ soit suffisamment petit ($\epsilon \ll 1$). En général, la réponse fournie par POINCARÉ est *non*. L'obstacle majeur à cette intégrabilité est la présence de résonances, *i.e* la présence en mouvement perturbé d'une relation du type

$$\sum_i k_i \omega_i \sim 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Pour pouvoir survivre, un tore doit se situer « suffisamment loin » de toute résonance, et vérifier des inégalités diophantiennes du type

$$\forall m, |\langle m, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{|m|^\beta}. \quad (2.22)$$

Quand les tores disparaissent sous l'effet de la perturbation, l'intégrabilité se rompt et la dynamique est dite *chaotique* : dans cette région de l'espace des phases, l'évolution de la distance séparant deux orbites voisines évolue très rapidement avec le temps, comme

$$d(t) = d(0) \exp^{\sigma t} \quad (2.23)$$

où σ est l'exposant de LYAPUNOV. Dans l'annexe A, nous avons présenté en détail la bifurcation vers un régime chaotique ainsi que ses caractéristiques, à la lumière d'un système intégrable à 2-DOF que l'on perturbe de plus en plus fortement. L'avantage d'une dynamique à 2-DOF étant que les tores KAM sont « visibles » et nous avons donc illustré graphiquement cette bifurcation vers le chaos selon la route de CHIRIKOV où les résonances se superposent. Cette instabilité est générique du chaos hamiltonien, et nous y reviendrons largement dans le reste de ce document, puisqu'elle sera à l'origine de la grande richesse dynamique des orbites que nous considérerons. La survie des tores est d'une importance capitale en pratique, puisque ces derniers sont des barrières aux excursions des actions dans l'espace des phases (transport). En effet, pour des systèmes à $n \leq 2$ -DOF, les tores KAM disconnectent l'espace des phases et les variables d'action varient peu, même sur un temps infini. Lorsque $n > 3$ -DOF, cette situation n'est plus vraie, et le complémentaire des tores KAM est un connexe : rien n'interdit une dérive dans les variables d'actions⁵[Bél86, Mor02, BF95].

Nous avons maintenant opéré aux rappels nécessaires pour la description de l'environnement terrestre où des petites perturbations éloignent le mouvement du mouvement képlérien.

3. Acronyme pour les 3 mathématiciens KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER.

4. Formulation selon V. BÉLETSKI [Bél86].

5. En pratique leur présence dense agit comme des quasi-barrières.

2.2 Perturbations principales au voisinage de la Terre

Dans le suite de ce travail, les (petites) perturbations principales agissant sur un problème intégrable, le problème de KEPLER⁶, seront de nature gravitationnelle. Les perturbations dynamiques peuvent être classées selon le fait qu'elles résultent de force conservatives⁷ ou dissipatives (ces dernières n'étant que mentionnées dans ce travail). La hiérarchisation de ces perturbations dépend évidemment de l'altitude du satellite. Les orbites que nous considérons, des orbites terrestres moyennes (plus précisément avec un demi-grand axe appartenant à l'intervalle $\mathcal{I} = [3r_E, 5.5r_E]$ où r_E est le rayon terrestre moyen), sont principalement et hiérarchiquement perturbées par la non-sphéricité de la Terre, en particulier par l'effet du J_2 lié à l'aplatissement dynamique terrestre et par les perturbations gravitationnelles extérieures dues à la présence d'autres corps (la Lune et le Soleil), qui deviennent du même ordre de grandeur que l'effet du J_2 au voisinage de la région géosynchrone. Présentons ces perturbations maintenant plus en détail.

2.2.1 Le potentiel interne

Le potentiel interne terrestre V admet la décomposition

$$V = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_p, \quad (2.24)$$

où \mathcal{R}_0 correspond au potentiel newtonien (dont l'accélération résultante est $\nabla \mathcal{R}_0$). Le potentiel perturbateur \mathcal{R}_p résulte de la non-sphéricité de la Terre et de l'inhomogénéité de la répartition des masses. Son développement en harmoniques sphériques conduit à l'expression

$$\mathcal{R}_p = \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_E}{r}\right)^n P_{l,m}(\sin \phi) \left(C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\right), \quad (2.25)$$

où r dénote la distance radiale du satellite par rapport au référentiel géocentrique, (λ, ϕ) réfère à la longitude et la latitude du satellite (dans un repère tournant lié à la Terre), et $P_{l,m}$ aux fonctions de LEGENDRE. Les coefficients C_{lm} et S_{lm} traduisent l'inhomogénéité spatiale du champ. Les indices (l, m) dénotent respectivement le degré et l'ordre du développement. Les termes indépendants de la longitude sont définis quand $m = 0$. Dans ce cas, les coefficients $-C_{10} = J_1$ sont appelés les harmoniques zonaux du champ de gravité, et par définition les coefficients S_{10} sont nuls. Quand $m \neq 0$, les coefficients C_{lm} et S_{lm} sont les harmoniques tessérales du champ. Le chapitre 3 traitera en particulier de ces perturbations. La principale contribution à la perturbation \mathcal{R}_p est due à l'effet du J_2 ⁸, qui est responsable d'une dérive séculaire sur les angles (ω, Ω) selon les relations

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{3}{4} \frac{J_2 r_E^2}{a^2 (1 - e^2)^2} n (5 \cos^2 i - 1), \\ \dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 r_E^2}{a^2 (1 - e^2)^2} n \cos i. \end{cases}$$

6. Le problème de KEPLER, ou *du mouvement képlérien*, consiste en le problème du mouvement d'un point matériel dans le champ de force central newtonien. Ces équations sont intégrables et une orbite satisfaisant à ces équations est une *orbite képlérienne*. On peut trouver tous les détails de ce problème dans de nombreux ouvrages [Bél86, LL64, Iro81].

7. Une force est conservative si elle dérive d'un potentiel, elle ne dépend que de la position du corps.

8. $J_2 \simeq 1.082 \times 10^{-3}$, ce qui signifie que l'on s'intéresse, au plus, à une perturbation de l'ordre du millièème par rapport au terme képlérien : on est bien dans un régime de petite perturbation.

avec n le moyen-mouvement du satellite. Des situations particulières requièrent des noms particuliers. C'est pourquoi, sous l'effet de la perturbation dominante du J_2 , une orbite satisfaisant à $\dot{\omega} = 0$ sera telle que son inclinaison satisfait à $\cos i = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$: ce sont les *inclinaisons critiques*. Une orbite *héliosynchrone* est telle que $\dot{\Omega} = 0$. L'objet du développement de KAULA est de substituer aux coordonnées (r, ϕ, λ) les éléments orbitaux képlériens $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$: c'est une tâche fastidieuse, dont nous ne donnons pas les détails ici. En menant cette tâche, l'expression finale du potentiel perturbateur dans un repère quasi-inertiel géocentrique, s'écrit comme :

$$\mathcal{R}_p = -\frac{\mu}{a} \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r_E}{a}\right)^l J_{lm} F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) S_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta), \quad (2.26)$$

avec

$$\begin{cases} J_{lm} = \sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2}, \\ S_{lmpq} = C_{lm} \cos \Psi_{lmpq} + S_{lm} \sin \Psi_{lmpq}, \\ \Psi_{lmpq} = (l - 2p + q)M + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta) + \epsilon_{lm} \frac{\pi}{2} - m\lambda_{lm}. \end{cases}$$

Le terme de phase λ_{lm} est tel que

$$\begin{cases} C_{lm} = -J_{lm} \cos(m\lambda_{lm}), \\ S_{lm} = -J_{lm} \sin(m\lambda_{lm}). \end{cases}$$

Ici θ dénote le temps sidéral (et dépend explicitement du temps t , nous y reviendrons dans le chapitre 3). Puisque les variables képlériennes ne sont pas des variables canoniques, nous utilisons les variables actions-angles de DELAUNAY pour un traitement hamiltonien du problème, définies comme les variables (L, G, H, l, g, h) reliées aux éléments képlériens comme

$$\begin{cases} L = \sqrt{\mu a}, \\ G = L\sqrt{1 - e^2}, \\ H = G \cos i, \end{cases}$$

et $(l, g, h) = (M, \omega, \Omega)$.

Ainsi, les équations du mouvement, en ne considérant que l'effet du géopotential, sont portées par le hamiltonien non-autonome

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep.}}(L) + \mathcal{R}_p(L, G, H, l, g, h, \theta) \quad (2.27)$$

où

$$\mathcal{H}_{\text{kep.}}(L) = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (2.28)$$

et \mathcal{R}_p est donné par 2.26.

2.2.2 Le potentiel externe des troisièmes corps

Dans un repère géocentrique, la fonction perturbatrice de troisième corps (Lune ou Soleil) s'écrit

$$\mathcal{R}_{3c} = -\frac{\mu_{3c}}{\|r - r_{3c}\|} + \mu_{3c} \frac{r_{3c}r}{\|r_{3c}\|} \quad (2.29)$$

où $\mu_{3c} = GM_{3c}$ est la constante gravitationnelle du troisième corps, r_{3c} le vecteur attaché au centre de masse de la Terre pointant le troisième corps et r la distance radiale du satellite par rapport au repère géocentrique.

Le potentiel de troisième corps dépend de la position de la Lune et du Soleil. Pour des théories totalement analytiques, il est nécessaire de connaître la dépendance temporelle de cette position. Les mouvements apparents de la Lune et du Soleil modélisé par un mouvement képlérien sur une ellipse précessante sont synthétisés dans les travaux de G. LION [Lio13]. Pour des calculs plus précis, exclusivement numériques, ces positions sont obtenues à partir d'éphémérides numériques.

2.2.3 Autres perturbations

Nous listons ici les autres perturbations principales affectant entre autres le mouvement du satellite. Pour plus de détails, nous pourrions consulter [Lio13] :

- perturbations conservatives :
 1. effets de marée,
 2. effets relativistes et effets des autres corps planétaires,
- perturbations dissipatives :
 1. freinage atmosphérique,
 2. pression de radiation solaire,
 3. effet d'albédo.

La figure 2.2 synthétise les ordres de grandeur des perturbations principales agissant sur un objet au voisinage de la Terre en fonction de sa distance par rapport à cette dernière.

2.3 La moyennisation au premier ordre en mécanique spatiale : théorie semi-analytique

Les activités spatiales récentes et modernes ont nécessité la possibilité de faire des prédictions rapides et précises quant aux éphémérides en temps long d'objets spatiaux divers orbitant l'environnement terrestre, notamment sous l'impulsion de la problématique nouvelle des débris spatiaux.

L'intégration analytique d'un système obtenu analytiquement souffre, en général, des limitations inhérentes au cadre analytique, souvent idéalisé par nature et besoin. La propagation numérique classique du mouvement, même si précise, est inadaptée pour les besoins du long-terme : elle nécessite, peu ou prou, des centaines de pas par révolution, faisant d'elles des entités lourdes à manipuler sur le plan informatique, sans oublier l'accumulation des erreurs

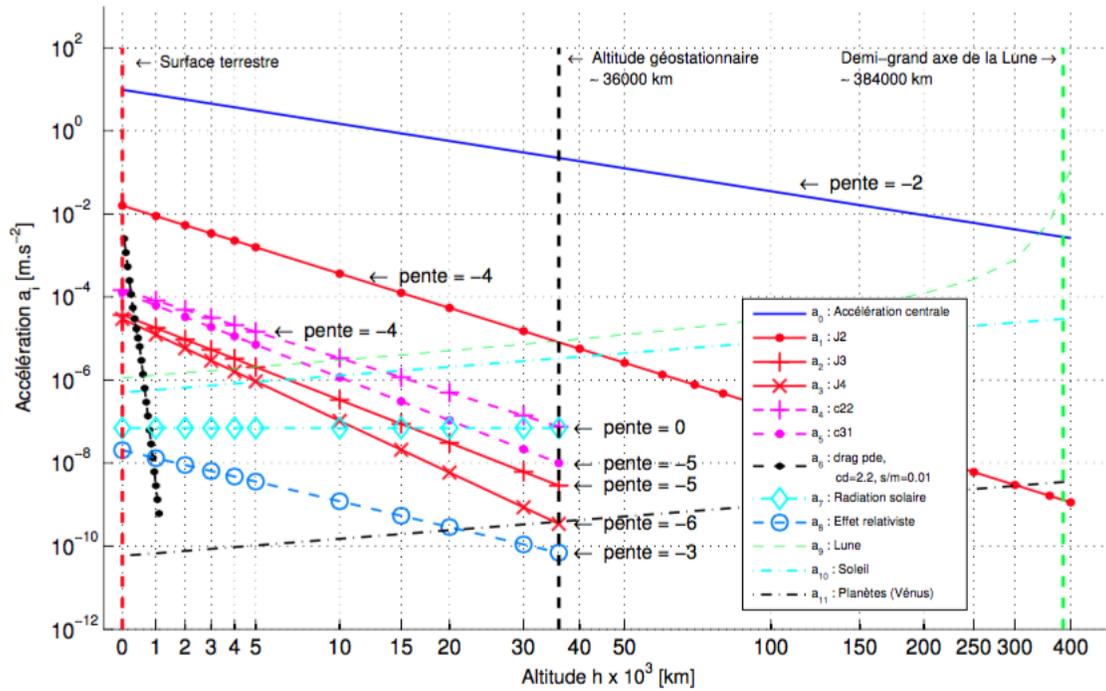


FIGURE 2.2 – Ordres de grandeur des différentes perturbations principales agissant sur un objet spatial au voisinage de la Terre. Tiré de [Lio13].

d'arrondi et de troncatures. La propagation numérique est classiquement basée sur une formulation cartésienne des équations du mouvement, du type

$$\ddot{r} = -\frac{\mu r}{\|r\|^3} + q + \nabla \mathcal{R}, \quad (2.30)$$

où r dénote le vecteur position du corps (centre de masse du corps central-objet), q est l'accélération résultante des forces non-conservatives et \mathcal{R} est une fonction perturbatrice.

La *théorie semi-analytique* du mouvement est née pour répondre à ce besoin, et pour pallier aux inconvénients des deux méthodes pré-citées. En France, elle a été initiée par N. BORDERIES et ensuite développée par G. MÉTRIS [ME95, Mét91]. Cette méthode a pour but d'utiliser exclusivement l'information à longue période contenue dans le mouvement, en renonçant, par définition même, aux informations contenues dans les courtes périodes. Après un pré-traitement de moyennisation analytique, le mouvement est intégré numériquement. Puisque les plus courtes périodes restant dans le mouvement moyen sont bien plus grandes que celles du mouvement réel, il en résulte l'utilisation de pas d'intégration plus longs.

Introduisons la substance de ces méthodes, et mentionnons que nous pouvons faire un merveilleux parallèle avec ce qui avait déjà été présenté en section 1.4. Ceci n'est pas étonnant puisque les théories semi-analytiques ne sont, ni plus ni moins, que la traduction, l'application et l'adaptation du principe de la mise en moyenne (des systèmes perturbés) au cas spécifique des équations du mouvement d'un corps spatial orbitant le voisinage de l'environnement ter-

reste. Introduisons ces méthodes avant de formuler le *problème fondamental de la mise en moyenne* que nous allons, entre autres, investiguer dans la suite du document.

Les théories semi-analytiques (les théories moyennes) décrivent, par un « jeu d'éléments » que l'on note formellement $\bar{x} \in \mathbb{R}^6$, le mouvement du corps considéré. Les variables $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5)$ sont telles qu'elles varient lentement avec le temps, contrairement au sixième élément, \bar{x}_6 , qui est une variable rapidement variable avec le temps (une variable rapide). Elles décomposent les éléments osculateurs x du corps, à un petit reste près, en éléments moyens comme les

$$x_i = \bar{x}_i + \zeta_i(x, t), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.31)$$

où les éléments moyens satisfont à

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5, t), \quad i = 1, \dots, 5 \\ \dot{\bar{x}}_6 = n + f_6(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5, t). \end{cases} \quad (2.32)$$

Ici, n est le mouvement moyen moyen. Notons la ressemblance des systèmes (2.32) et (1.60). Les termes à courtes périodes, uniquement contenus dans les $\zeta_i(x, t)$ de (2.31), s'expriment via la décomposition de FOURIER des fonctions $\zeta_i(x, t)$ comme

$$\zeta_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_i^j(x_1, \dots, x_5, t) \cos jx_6 + s_i^j(x_1, \dots, x_5, t) \sin jx_6 \quad (2.33)$$

C'est ainsi que l'établissement du système (2.32) et la connaissance des fonctions f_i permettent d'intégrer la dynamique originale, maintenant substituée par le système (2.32) avec des pas de temps plus importants que ceux utilisés dans les méthodes numériques classiques. En pratique, ces pas d'intégration sont typiquement de l'ordre du jour. L'obtention et l'expression des quantités $\{f_i, c_i^j, s_i^j\}_{i,j}$ pour les différentes perturbations significatives agissant sur le satellite est donc au cœur du problème de la moyennisation en mécanique spatiale. Pour les perturbations des sections 2.2.1 et 2.2.2, ces quantités ont été calculées et implémentées dans le propagateur moyen STELA (annexe C). C'est le propagateur moyen qui est utilisé dans ce travail.

Il existe des approches alternatives aux théories moyennes pour l'étude du mouvement à long terme. En particulier, les approches symplectiques d'intégration, définies dans le contexte de la mécanique hamiltonienne, ont l'avantage de l'excellente quasi-conservation de l'énergie du système (ou la quasi-conservation du demi-grand axe) tout en considérant des pas de temps plus grands que les pas de temps typiques de l'intégration osculatrice. Un tel schéma d'intégration (prenant en compte le potentiel terrestre, les perturbations luni-solaires et les effets de la pression de radiation solaire) est présenté (et confronté aux approches osculatrices et moyennes) dans les travaux de [HLDC12, Hub13].

2.4 Formulation du problème fondamental de la moyennisation

Si la théorie moyenne est suffisamment mature, au sens où les quantités $\{f_i, c_i^j, s_i^j\}_{i,j}$ ont déjà été obtenues et explicitées pour des modèles dynamiques très raffinés, il n'en demeure pas moins que les deux aspects que nous soulignons maintenant n'ont pas été adressés vis à vis de la mécanique spatiale :

1. De façon générale, l'adéquation entre le mouvement moyen et le mouvement exact (osculateur) n'est pas quantifié. Les résultats quantifiant l'adéquation de la théorie de la moyennisation avec le mouvement original sont, quand ils ont été formulés, des résultats mettant en jeu le petit paramètre physique ϵ . Ces théorèmes, quand ils parviennent à quantifier la petitesse requise ϵ_* du paramètre physique ϵ pour que les résultats énoncés soient vrais, sont parfois non applicables à toute réalité physique : par exemple, appliqué au système solaire, ces paramètres sont si petits qu'ils ne peuvent être comparés à des perturbations réalistes existantes [Fej13]. De plus, le petit paramètre physique ϵ repose sur un choix et ce choix n'a rien de canonique [Guz15]. Plus précisément, se donnant un système voisin d'un système intégrable

$$\mathcal{H}(I, \phi) = h(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad (2.34)$$

il n'est pas exclu qu'un autre choix de variables canoniques (J, ψ) conduise au système

$$\mathcal{H}(J, \psi) = k(J, \epsilon) + \epsilon^N g(J, \psi), \quad (2.35)$$

qui est un système voisin d'un système intégrable de petit paramètre $\mu = \epsilon^N < \epsilon$.

Dans les théories moyennes de mécanique spatiale, ce petit paramètre est souvent choisi comme le J_2 : $\epsilon = J_2$. En réalité, ce petit paramètre ne sert qu'à hiérarchiser les perturbations entre elles, et pas l'ordre. Opérée à l'ordre 1 en ce petit paramètre, cela confère aux théories moyennes une validité temporelle finie de l'ordre de $\mathcal{O}(J_2^{-1})$. De plus, les théories semi-analytiques contiennent des développements en série (infinies ou longues) qui doivent être, par nécessité ou pour des réductions de coûts numériques, tronqués. La légitimité totale de ces troncatures (et donc l'absence de considération de certains termes dans la dynamique) vis à vis des propagations semi-numériques et de leurs analyses de stabilité en temps long est un problème ouvert.

2. Quand les solutions propagées sont chaotiques (voir l'annexe A pour une présentation générale du chaos, de ses méthodes numériques de détection, des routes d'accès au chaos), la fiabilité et l'adéquation du « chaos exact », *i.e* le chaos détecté dans les équations osculatrices du mouvement (via tout indicateur de chaos λ_t calculé numériquement), avec le « chaos moyen », *i.e* le chaos détecté dans les équations moyennes du mouvement (via tout indicateur ρ_t calculé semi-analytiquement) est un problème ouvert. Le problème de l'adéquation du chaos issu des variables lentes avec celui issu des variables osculatrices est résumé par le diagramme 2.3. Dans cette thèse, nous investiguerons ce dernier point.

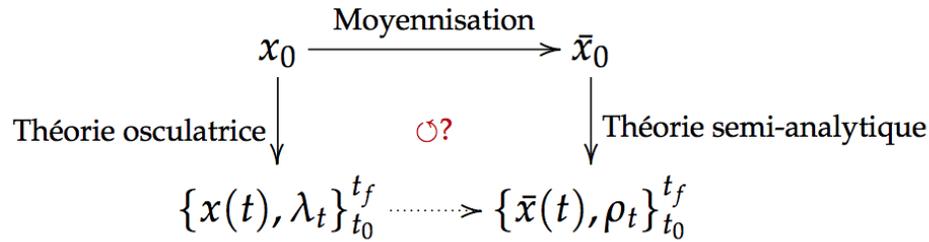


FIGURE 2.3 – Problème fondamental de la moyennisation.

2.5 Résumé et enjeux

Dans ce chapitre, après avoir rappelé quelques résultats usuels de dynamique hamiltonienne, nous avons introduit les perturbations gravitationnelles principales agissant sur un objet spatial orbitant le voisinage de la Terre.

Puisque l'ensemble de ce travail est dédié à l'obtention de résultats dynamiques en temps long, nous avons présenté les outils théoriques destinés à prendre la main sur les équations du mouvement perturbé. À cet effet, c'est la méthode de la moyennisation, d'apparence intuitive, qui a été présentée dans sa généralité avant d'en dessiner la projection aux problèmes de mécanique spatiale : c'est le pan des théories semi-analytiques, réponses aux limitations des méthodes purement numériques pour les études en temps long. Les propagateurs d'orbite qui seront utilisés dans cette thèse ont été introduits.

Enfin, le problème fondamental de la moyennisation, et en particulier à l'égard des théories semi-analytiques, a été formulé. Ce problème pose celui de l'adéquation entre le chaos exact (celui détecté par des propagateurs numériques) et le chaos moyen (celui détecté par le biais de propagateurs semi-analytiques).

Chapitre 3

La résonance tessérale

Sommaire

3.1	Position du problème	47
3.2	Hamiltonien de la résonance tessérale (n_1, n_2)	48
3.2.1	Développement de la perturbation terrestre	49
3.2.2	Construction et réduction de la forme normale résonante tessérale	51
3.3	Application à la résonance tessérale $(2, 1)$	54
3.3.1	Dynamique au voisinage de la surface résonante	54
3.3.2	Test de l'hypothèse de la moyennisation au voisinage de la surface résonante $(2, 1)$	61
3.4	Conclusion	70

NOUS ÉTUDIONS LE MOUVEMENT d'un corps céleste orbitant l'environnement terrestre quand une condition de commensurabilité est réalisée entre la période orbitale et la période de révolution sidérale de la Terre. C'est le problème de la *résonance tessérale*. Nous présentons ainsi, et cela sans restriction particulière sur la condition de commensurabilité réalisée, le hamiltonien résonant ainsi qu'une réduction de ce dernier, plus adaptée à des caractérisations analytiques. Cet hamiltonien prend la forme d'un pendule modulé à 2-DOF. L'étude est ensuite particularisée au cas où la période orbitale est voisine de 12 heures. Nous montrerons que l'instabilité de CHIRIKOV est à l'œuvre et se révèle être la route d'accès au chaos, qui se manifeste sur le demi-grand axe par un phénomène d'intermittence. Nous présentons des résultats de stabilité associés à cette résonance, et en particulier nous confrontons l'analyse de stabilité réalisée avec le modèle moyen avec celle du mouvement osculateur.

3.1 Position du problème

Depuis le début de l'ère spatiale, les débris spatiaux, reliquats de l'activité spatiale humaine, orbitent le voisinage de la Terre. Le nombre de ces débris dont la taille est supérieure à un centimètre est estimé à plus de 10^5 . La compréhension de la dynamique de ces derniers est donc essentielle, ne serait-ce que pour maintenir des scénarios de protection vis-à-vis des satellites opérationnels.

Une grande majorité des débris spatiaux est située sur des orbites basses (région LEO). Une portion non négligeable d’entre eux orbitent le voisinage de la région géostationnaire et de la région moyenne.

La dynamique de la région géostationnaire a reçu beaucoup d’intérêt en raison de son importance pour les missions spatiales : un objet placé dans cette région reste quasiment fixe par rapport à la surface de la Terre, *i.e* une condition de commensurabilité $1 - 1$ entre la période de révolution du satellite et la période de révolution sidérale de la Terre (23h56min4s) est satisfaite. La dynamique en temps long de cette région est bien comprise, comme le reflète la littérature abondante à son sujet [All65, Gar66, All67, DD77, BWM05, VDLC09]. Essentiellement, pour des orbites circulaires et faiblement inclinées, la dynamique sous l’effet du potentiel terrestre est bien approximée par un modèle intégrable à 1-DOF, un modèle pendulaire constitué d’un régime *libratoire* et d’un régime *circulatoire*. Le régime libratoire a typiquement une amplitude voisine de 40 km. À cette altitude, l’effet de la Lune et du Soleil (*confer* figure 2.2) ont pour effet d’altérer très légèrement cette description, qui est donc plutôt robuste. En réalité, la séparatrice du modèle pendulaire devient finement entourée d’une bande de chaos [BWM05]. Pour les orbites concernées par ce chaos (très localisé dans l’espace des phases), il en résulte un phénomène d’intermittence sur le demi-grand axe.

Cette modélisation n’est plus vraie pour la résonance tessérale la plus importante en région moyenne (région MEO), la résonance $(2, 1)$, qui affecte principalement les satellites GPS¹. Cette résonance est localisée pour des demi-grands axes voisins de 26 500 km et un objet placé à ce voisinage possède une période orbitale voisine de 12 heures. Ces orbites sont utilisées intensivement par les soviétiques à des fins utilitaires. Ces derniers ont basé leur système de télécommunication (satellites Molniya) sur cette propriété du mouvement. Contrairement à la région géostationnaire, la dynamique des orbites excentriques et inclinées est bien plus riche, du fait de l’interaction avec des termes dépendant de la longitude de la Terre, les *harmoniques tessérales* [Ely96]. Ces interactions peuvent donner lieu au phénomène de superposition de résonance décrit dans l’annexe A.3.

L’objet de ce chapitre consiste en l’introduction et la réduction de la forme normale résonante associée aux résonances tessérales en général, avec un traitement particulier au voisinage de la résonance $(2, 1)$. En effet, c’est au voisinage de cette surface résonante que nous testerons l’hypothèse de moyennisation décrite dans la section 2.4 et synthétisée par la figure 2.3, *via* des approches cartographiques de stabilité de l’espace des phases.

3.2 Formulation hamiltonienne du problème de la résonance tessérale (n_1, n_2)

Le développement de KAULA du géopotentiel, qui exprime le potentiel en fonction des éléments orbitaux de l’orbite, est bien adapté à la détection et à l’identification des résonances tessérales. Nous l’introduisons maintenant.

1. *Global Positioning System*.

3.2.1 Développement de la perturbation terrestre

Soit (L, G, H, l, g, h) les variables actions-angles usuelles de DELAUNAY² reliées aux éléments képlérien (ou *éléments orbitaux*) notés $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ par :

$$\begin{cases} L = \sqrt{\mu a}, & l = M \\ G = L\sqrt{1 - e^2}, & g = \omega \\ H = G \cos i, & h = \Omega. \end{cases}$$

La quantité μ dénote la constante gravitationnelle de NEWTON multipliée par la masse de la Terre. En plus de la partie centrale képlérienne du potentiel terrestre,

$$\mathcal{H}_{\text{kep}} = -\frac{\mu^2}{2L^2}, \quad (3.1)$$

nous considérons la perturbation \mathcal{P} du champ de gravité induit par la non-sphéricité et non-ponctualité de ce dernier. Cette perturbation s'écrit usuellement en fonction des éléments orbitaux selon le développement de KAULA [Kau66], qui dépend de 4 indices de sommation, comme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \mathcal{P}(a, e, i, \omega, \Omega, M, \theta) \\ &= \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \epsilon_{lmpq}(a, e, i) \cos(\psi_{lmpq} - m\lambda_{lm} + \delta_{lm} \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec λ_{lm} une phase [Kau66] et

$$\begin{aligned} \epsilon_{lmpq}(a, e, i) &= -\frac{\mu a_E^l}{a a^l} F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) J_{lm}, \\ \psi_{lmpq} &= (l - 2p + q)M + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

C'est une perturbation qui est non-autonome puisqu'elle dépend explicitement du temps via l'angle θ , le *temps sidéral*,

$$\dot{\theta} = \dot{\omega}_E = 2\pi/\text{jour sidéral}. \quad (3.4)$$

La quantité δ_{lm} dénote ici (et dans toute la suite du document) le symbole de KRONECKER. Le temps sidéral est une variable rapide, dont la période est du même ordre de grandeur que le moyen mouvement n du satellite. Les fonctions $F_{lmp}(\bullet)$ et $G_{lpq}(\bullet)$ sont respectivement les fonctions d'inclinaison et d'excentricité de KAULA, dont on trouvera une expression dans [Kau66]. Rappelons que les fonctions d'excentricité satisfont à $G_{lpq}(e) = \mathcal{O}(e^{|q|})$. Précisons que nous avons continué d'utiliser les variables (a, e, i) , bien que ce sont les variables (L, G, H) qui sont les variables du problème. Les coefficients J_{lm} s'obtiennent à partir des coefficients $\{C_{lm}, S_{lm}\}_{l,m}$ servant à décrire le champ de gravité, selon la relation

$$J_{lm} = \begin{cases} \sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2} & \text{si } m \neq 0 \\ J_{l0} \equiv J_l = -C_{l0} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5)$$

2. Le fait que les variables et moments choisis sont indéterminés lorsque l'excentricité ou l'inclinaison deviennent petites n'est pas un obstacle (même si la formulation perd en généralité) à l'utilisation du modèle analytique obtenu : les dynamiques que nous allons explorer (analytiquement et numériquement) seront, pour ce type d'instabilité tessérale, excentriques ($e \sim 0.6$) et inclinées ($i \sim 23^\circ$).

Nous sommes ainsi en présence d'un problème qui contient deux variables rapides, l'anomalie moyenne l ainsi que le temps sidéral θ et leurs périodes peuvent être commensurables. Afin de rendre les notations plus compactes, introduisons l'ensemble \mathcal{A} des uplets admissibles

$$\mathcal{A} \equiv \{ \mathbf{n} = (l, m, p, q) \in \mathbb{Z}^4 \mid l \geq 2, 0 \leq m \leq l, 0 \leq p \leq l \} \quad (3.6)$$

et notons plus simplement (3.2) comme

$$\mathcal{P} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \epsilon_{\mathbf{n}}(a, e, i) \cos(\psi_{\mathbf{n}} - m\lambda_{lm} + \delta_{\mathbf{n}} \frac{\pi}{2}). \quad (3.7)$$

En réécrivant (3.2) comme

$$\mathcal{R}_p = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \frac{\epsilon_{\mathbf{n}}(a, e, i)}{2} (e^{i(\psi_{\mathbf{n}} - \lambda_{lm} + \delta_{\mathbf{n}} \frac{\pi}{2})} + e^{-i(\psi_{\mathbf{n}} - \lambda_{lm} + \delta_{\mathbf{n}} \frac{\pi}{2})}), \quad (3.8)$$

$$= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \frac{\epsilon_{\mathbf{n}}(a, e, i)}{2} (e^{i\rho} e^{i((l-2p+q)M - m\theta)} + e^{-i\rho} e^{-i((l-2p+q)M - m\theta)}), \quad (3.9)$$

où ρ est un argument lentement variable, nous voyons que les angles rapides ne peuvent se combiner, *i.e* devenir lentement variables, que pour des commensurabilités du type (n_1, n_2) . Ainsi, la condition de résonance s'énonce comme l'existence d'un uplet d'entiers (n_1, n_2) tels que

$$n_1 \dot{M} - n_2 \dot{\theta} \simeq 0, \quad (3.10)$$

soit encore

$$\frac{\dot{M}}{\dot{\theta}} \simeq \frac{m}{l - 2p + q} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.11)$$

Les indices (l, m, p, q) satisfaisant à une telle relation de commensurabilité sont les *indices résonants* du géopotential. Cette condition de résonance peut toujours être satisfaite formellement, au voisinage de certaines valeurs de demi-grands axes, les *demi-grands axes résonants*. En effet, et pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser la troisième loi de KEPLER, $n^2 a^3 = \mu$, pour voir que la condition (3.11) se laisse exprimer comme

$$\left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}}{\dot{\theta}} \simeq \frac{m}{l - 2p + q} \right) \Leftrightarrow \left(a = a_* \simeq \left(\frac{m}{l - 2p + q} \dot{\theta} \mu^{-\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \right). \quad (3.12)$$

Plus l'ordre de la résonance

$$|k| \equiv \sum_i |k_i| \quad (3.13)$$

est faible, plus la manifestation de la résonance peut être légitimement supposée importante³. Ainsi, la résonance principale, au sens de la minimalité de l'ordre de la résonance, est bien la résonance (1, 1). Elle est localisée selon (3.12) pour un demi-grand axe voisin de 42 164 km. C'est pourquoi la résonance tessérale (1, 1) est dite aussi parfois *résonance géostationnaire*. Le tableau 3.1 exhibe la localisation des demi-grands axes résonants ainsi que le cardinal des indices

3. Coefficients de FOURIER et régularité sont liés.

PREMIÈRES RÉSONANCES TESSÉRALES			
$ n $	(n_1, n_2)	a_* (km)	Cardinal des indices résonants
2	(1, 1)	42 164	63
3	(1, 2)	66 931	33
	(2, 1)	26 561	30
4	(1, 3)	87 704	20
	(3, 1)	20 270	18
5	(1, 4)	106 246	13
	(2, 3)	55 250	20
	(3, 2)	31 177	17
	(4, 1)	16 732	10

TABLE 3.1 – Localisation des premières résonances tessérales (n_1, n_2) et cardinal des indices résonants associés ($|n| \leq 5$ et pour $|q| \leq 2$).

résonants (l, m, p, q) associés aux premiers ordres de résonance (pour $|k| \leq 5$ et pour $|q| \leq 2$). L'examen rapide de ce dernier montre que les résonances tessérales principales de la région moyenne sont les résonances $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(3, 2)$.

Ainsi, aux voisinages des demi-grands axes résonants (3.12), une étude spéciale du mouvement s'impose. Construisons donc la forme normale résonante associée.

3.2.2 Construction et réduction de la forme normale résonante tessérale

Soit donc le hamiltonien formé par

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{R}_p, \quad (3.14)$$

qu'il convient de séparer en sa partie séculaire (vide d'arguments) et non-séculaire

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{H}_{\text{sec}} + (\mathcal{R}_p - \mathcal{H}_{\text{sec}}). \quad (3.15)$$

Cet hamiltonien est à 3-DOF et non autonome. En examinant la relation (3.2), la partie séculaire correspond aux indices satisfaisant à

$$\begin{cases} l - 2p + q = 0 \\ l - 2p = 0 \\ m = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Ainsi, la partie séculaire est composée des harmoniques zonaux ($m = 0$) avec l pair, en plus des effets d'ordre en 0 en excentricité (*i.e* $q = 0$). Afin de simplifier les notations, introduisons donc l'ensemble de ces indices comme

$$\mathcal{S} \equiv \{(l, m, p, q) \in \mathcal{A} \mid m = 0, l = 2p, q = 0\} \quad (3.17)$$

et notons, avec la même convention d'écriture que pour (3.7)

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}} \epsilon_{\mathbf{n}}. \quad (3.18)$$

En suivant la tradition [Ged69, Lan87], il convient d'introduire la *variable stroboscopique*, λ , définie comme

$$\lambda = \frac{1}{s_0}(M + \omega) - (\theta - \Omega). \quad (3.19)$$

La quantité s_0 est ici définie comme l'entier le plus proche du moyen mouvement du corps céleste ($s_0 = \frac{m}{l-2p+q} = \frac{n_1}{n_2}$). L'angle de KAULA se laisse exprimer en fonction de λ comme

$$\psi_{lm pq} = \left(l - 2p + q - \frac{m}{s_0}\right)(M + \omega) + m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega. \quad (3.20)$$

Afin d'introduire λ comme variable indépendante du système, nous définissons la transformation unimodulaire \mathfrak{T} suivante

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & s_0 & -s_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s_0} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

En notant les angles du système par la variable $\phi = (M, \omega, \Omega, \theta) \in \mathbb{T}^4$, il est clair que

$$(\mathfrak{T} \cdot \phi^\top)_2 = s_0 \lambda.$$

Le système reste canonique en définissant les nouvelles actions, notées Λ , comme les

$$\Lambda = \mathfrak{T}^{-\top} \cdot I^\top, \quad (3.22)$$

où $I = (L, G, H, \Gamma) \in \mathbb{R}^4$ ⁴. Les nouvelles variables (Λ, σ) canoniques sont alors explicitement les

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= L - \frac{1}{s_0}H, & \sigma_1 &= M, \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{s_0}H, & \sigma_2 &= s_0\lambda, \\ \Lambda_3 &= G - \frac{1}{s_0}H, & \sigma_3 &= g, \\ \Lambda_4 &= -s_0H - s_0\Gamma, & \sigma_4 &= -\frac{1}{s_0}\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Notons que ce changement de variable canonique s'est accompagné d'une réduction du nombre de degrés de liberté, puisque σ_4 est maintenant une variable cyclique. Le hamiltonien est donc maintenant à 3-DOF. À ce stade et pour réduire d'une unité supplémentaire le nombre de DOF du hamiltonien, on remplace ce dernier par sa version moyennisée selon la variable rapide [Arn88], l'anomalie moyenne. Ainsi, en continuant de noter \mathcal{H} ce nouvel hamiltonien, il convient de calculer

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{H}_{\text{sec}} + \left\langle (\mathcal{P} - \mathcal{H}_{\text{sec}}) \right\rangle_M, \quad (3.24)$$

$$= \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{H}_{\text{sec}} + \underbrace{\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} (\mathcal{P} - \mathcal{H}_{\text{sec}}) dM}_{\mathcal{H}_{\text{res}}}. \quad (3.25)$$

4. Nous avons étendu le hamiltonien (3.14) qui est à 3-DOF et non-autonome (soit 3.5-DOF) en un hamiltonien autonome à 4-DOF en introduisant explicitement la variable Γ conjuguée au temps $t = \tau$ (en bref, l'espace des phases a été étendu).

L'examen de la quantité $\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} (\mathcal{P} - \mathcal{H}_{\text{sec}}) dM$ montre que cette intégration par rapport à l'anomalie moyenne est équivalente à ne retenir dans \mathcal{P} que les indices (l, m, p, q) satisfaisant à la condition de longue période, *i.e* à ne retenir que les uplets (l, m, p, q) appartenant à l'ensemble \mathcal{R} défini comme un sous-ensemble des quadruplets admissibles,

$$\mathcal{R} \equiv \left\{ (l, m, p, q) \in \mathcal{A} \mid l - 2p + q - \frac{m}{s_0} = 0 \right\}, \quad (3.26)$$

précisément formé par les *indices résonants*. Nous avons

$$\mathcal{H}_{\text{res}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{R}} \epsilon_{\mathbf{n}}(a, e, i) \cos \left(m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega + \delta_{lm} \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.27)$$

Le hamiltonien moyenné \mathcal{H} est donc réduit finalement à un hamiltonien à 2-DOF (et autonome) en les variables conjuguées $I = (I_1 = \Lambda_2, I_2 = \Lambda_3)$, $\Phi = (\lambda, \omega)$ et prend la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{H}_{\text{sec}} + \mathcal{H}_{\text{res}}. \quad (3.28)$$

Puisque M est maintenant une variable cyclique, il s'en suit que son action conjuguée $L - \frac{1}{s_0}H$ est constante et vaut κ , une constante fixée par les conditions initiales du problème. Ainsi, la variable conjuguée de λ , $\frac{1}{s_0}H$, se laisse exprimer comme

$$\Lambda_2 = \frac{1}{s_0}H = L - \kappa. \quad (3.29)$$

C'est pourquoi nous dirons que λ est directement conjuguée au demi-grand axe (plus précisément, $(L - \kappa \leftrightarrow a, \lambda)$ sont conjuguées), une variable qu'il est plus facile d'interpréter physiquement. La présence de ces variables ne tient qu'au fait de la résonance, et des contributions que nous avons retenues dans \mathcal{P} . Telle est dans sa généralité la forme normale résonante associée à la résonance tessérale (n_1, n_2) ⁵.

Il nous reste maintenant à éclairer la dynamique de cet hamiltonien pour cerner l'évolution du demi-grand axe, puisqu'il évolue.

Pour cela, opérons de façon classique à un développement de TAYLOR de \mathcal{H} au voisinage de l'action résonante $I_{1,\star}$ [Bre03] :

$$\mathcal{H}(I_1) = \mathcal{H}(I_{1,\star}) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_1} (I_1 - I_{1,\star}) + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_1^2} (I_1 - I_{1,\star})^2 + \mathcal{O}((I_1 - I_{1,\star})^2). \quad (3.30)$$

Du terme $\mathcal{H}(I_{1,\star})$, on ne retient que les termes non constants (les autres ne jouant aucun rôle dynamique). À la résonance exacte, le deuxième terme de (3.30) est nul. En négligeant le terme en $\mathcal{O}((I_1 - I_{1,\star})^2)$ et quitte à normaliser le hamiltonien, (3.30), s'écrit :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}J_1^2 + \nu \mathcal{H}_{\text{res}}, \quad (3.31)$$

5. À ce stade, notons le parallèle avec les propos elliptiques de V. BÉLETSKI, qui écrit dans [Bél86] :

On conçoit que l'étude du système d'évolution devient très compliquée du fait de la résonance. S'il y a résonance, le théorème de LAPLACE tombe en défaut : le demi-grand axe évolue.

avec $J_1 = I_1 - I_{1,*}$ et $\nu = (2|\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_1^2}|)^{-1}$.

Ainsi, au voisinage de la résonance (n_1, n_2) , la forme normale résonante réduite (selon le procédé de réduction standard) contient plusieurs angles, les $\sigma_n = m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega$, dont les dérivées temporelles $\dot{\sigma}_n$ s'annulent pour différentes valeurs (mais qui restent voisines) de demi-grand axes, sauf dans le cas particulier où $\dot{\omega} = 0$. La résonance (n_1, n_2) est donc en réalité un *multiplet de résonances*, distantes de seulement quelques kilomètres. À la limite où un seul uplet (l, m, p, q) domine le hamiltonien, nous retrouvons l'analogie bien connue des astronomes entre un problème résonant et la libration/circulation d'un angle : (3.30) n'est rien d'autre que le hamiltonien d'un pendule, dont la largeur du domaine de libration est donnée par

$$\Delta_n = 2\sqrt{\nu}. \quad (3.32)$$

Ce cas de figure, *i.e* le fait qu'un uplet en particulier domine les autres, est celui de la résonance géostationnaire, la première résonance d'ordre 2, qui a déjà reçu beaucoup d'attention dans la littérature [Gar66, BWM05, VDLC09].

Le hamiltonien réduit de la résonance tessérale (n_1, n_2) est donc, par sa forme, susceptible de donner lieu à une dynamique chaotique. Cette route au chaos, la *route du chaos tesséral*, est la même phénoménologiquement parlant, que celle présentée exhaustivement en annexe A.3, où les résonances ont la possibilité de se superposer et d'interagir selon le principe général de CHIRIKOV. Cette route du chaos, universelle, est la cause du chaos dans de nombreux autres exemples de mécanique céleste, comme l'écrit MURRAY [MH97] :

[...] chaos in any Hamiltonian system is caused by the interaction of two or more resonances, involving two or more degrees of freedom.

Examinons donc le cas où ce scénario se produit, celui de la résonance $(2, 1)$, qui est une résonance d'ordre 3, la plus importante donc après la résonance géostationnaire d'ordre 2. La résonance $(2, 1)$ est située au voisinage d'un demi-grand axe valant 26 560 km (selon l'équation (3.12) et le tableau 3.1) où sont situés les satellites de type GPS.

3.3 Application à la résonance tessérale $(2, 1)$

On se restreint maintenant exclusivement à la dynamique au voisinage de la résonance tessérale $(2, 1)$.

3.3.1 Dynamique au voisinage de la surface résonante

Les premiers indices résonants satisfaisant à

$$\frac{l - 2p + q}{m} = s_0 = \frac{1}{2}, \quad (3.33)$$

pour les premiers ordres de développement du géopotential ($l \leq 3$) obtenus en fixant la condition du développement en excentricité à $q_{\max} = 2$ (*i.e* $|q| \leq 2$), sont listés dans le tableau 3.2. Une hypothèse de quasi-circularité des orbites simplifie grandement le problème pour cerner la dynamique puisque le hamiltonien devient à 1-DOF : en effet, il est alors légitime de ne retenir que les contributions résonantes avec $q = 0$ ⁶ et ne subsiste alors que le uplet résonant

6. Rappelons que $G_{l pq}(e) = \mathcal{O}(e^{|q|})$.

PREMIERS INDICES RÉSONANTS (2, 1)			
l	m	p	q
3	2	1	0
2	2	0	-1
2	2	1	1
3	2	0	-2
3	2	2	2

TABLE 3.2 – Premiers indices résonants associés à la résonance tessérale (2, 1).

(3, 2, 1, 0). Le problème devenant ainsi à 1-DOF, il est intégrable (comme tout problème à 1-DOF) et son plan de phase est analogue à celui d'un pendule : un régime de libration est séparé d'un régime de circulation *via* deux variétés stables qui sont en l'occurrence confondues (ces variétés forment précisément *la séparatrice*). Quand cette hypothèse simplificatrice ne saurait être satisfaite, *i.e* quand l'orbite n'est pas quasi-circulaire, alors le hamiltonien local au voisinage de la résonance (2, 1) prend la forme d'un pendule modulé

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}I_1^2 + I_2 + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{R}} \epsilon_{\mathbf{n}} \cos(m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega - \delta_{lm} \frac{\pi}{2}) \quad (3.34)$$

où les seuls angles intervenant maintenant dans la forme normale résonante sont du type

$$\sigma_{\mathbf{n}} = m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega - \delta_{lm} \frac{\pi}{2} \quad (3.35)$$

où \mathbf{n} est un multiplet d'indices résonants. D'un point de vue physique, la distorsion avec le modèle pendulaire se traduit par des phénomènes d'intermittence sur le demi-grand axe, qui peut ainsi varier de plusieurs dizaines de kilomètres, comme typiquement illustré par la figure 3.1 au fur et à mesure que l'on se rapproche de la résonance (*i.e* au fur et à mesure que le demi-grand axe tend vers le demi-grand axe résonant). Cette intermittence du demi-grand axe est en correspondance 1 – 1 avec le régime libratoire ou circulatoire de la variable stroboscopique, comme très clairement illustré via la figure 3.2. Ce phénomène avait déjà été pointé du doigt au voisinage de la résonance géostationnaire, dont la dynamique est plus simple à étudier en raison des paramètres physiques choisis (des orbites quasi-circulaires) pour étudier cette constellation [BWM05, VDLC09]. Puisque $\dot{\omega} \neq 0$ dans (3.35) en général, il en résulte que les actions menant à la condition de résonance,

$$\dot{\sigma}_{\mathbf{n}} = 0, \quad (3.36)$$

diffèrent. Dans la figure 3.4, nous avons calculé explicitement les actions résonantes, traduites en termes de demi-grand axe (une variable qu'il est plus facile d'interpréter physiquement), menant à

$$\dot{\sigma}_{\mathbf{n}} = 0, \quad (3.37)$$

pour les trois multiplets principaux de la résonance (2, 1), à savoir selon la table 3.2

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = (2, 2, 1, 1), \\ \mathbf{n}_2 = (3, 2, 1, 0), \\ \mathbf{n}_3 = (2, 2, 0, -1). \end{cases}$$

Les calculs ont été effectués sous l'hypothèse raisonnable (*confer* la figure 2.2) d'une dérive de l'argument du périégée dominée par l'effet du J_2 , *i.e* que nous avons considéré une dérive séculaire de l'argument du périégée

$$\dot{\omega} \sim \dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{a_E}{a} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) (1 - e^2)^{-2} \quad (3.38)$$

dans les calculs numériques. Ces estimations d'actions résonantes ont été effectuées pour différentes valeurs d'excentricité et d'inclinaison, pour un demi-grand axe initial proche des valeurs caractéristiques des satellites GPS, en l'occurrence pour un demi-grand axe initial a_0 fixé à 26 560 km. À la limite où $\dot{\omega} = 0$, *i.e* au voisinage de l'inclinaison critique, les actions résonantes (ou les demi-grand axes résonants) coïncident tous et partagent la même localisation dans l'espace des phases. L'examen de la figure 3.4 montre aussi que la distance séparant les demi-grands axes résonants est faible : de l'ordre de quelques kilomètres en général. L'interaction de ces multiplets, à la CHIRIKOV, est la route vers le chaos tesséral, exactement comme décrit dans la section A.3. En effet, le calcul des amplitudes de chaque résonance considérée comme isolée, montre alors qu'une superposition des résonances a lieu. Sur la figure 3.5, nous avons tracé les actions résonantes accompagnées de leurs demi-hauteurs de domaine résonant quand elles sont calculées de façon isolée, selon la formule (3.32). Le code couleur est associé à un multiplet en particulier : bleu pour \mathbf{n}_1 , rouge pour \mathbf{n}_2 et orange pour \mathbf{n}_3 . Au meilleur de notre connaissance, c'est T.ELY qui a été le premier à cerner réellement ce mécanisme d'instabilité pour un problème de mécanique spatiale à la fin des années 90 [Ely96], en y appliquant un principe structurel général de dynamique, celui de CHIRIKOV [Chi79]. En général, la distance séparant les résonances (deux à deux) est du même ordre que leurs amplitudes, comme illustré par les figures 3.6 et 3.7. Sur le plan analytique, et pour le type d'instabilité du chaos tesséral (pendule modulé), nous pouvons faire un pas supplémentaire en calculant le coefficient de stochasticité \mathcal{K} , qui mesure l'interaction des résonances [MG96, MH97, Var04]. Défini comme le rapport entre la moyenne des amplitudes $\Delta_{\mathbf{n}_i}$ sur la distance séparant deux résonances $\{r_i, r_j\}_{i \neq j}$ deux à deux,

$$\mathcal{K}(r_i, r_j) = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{n}_i} + \Delta_{\mathbf{n}_j}}{|r_i - r_j|}, \quad (3.39)$$

trois « arrangements » de superposition de résonances sont possibles selon la valeur de \mathcal{K} :

1. soit $\mathcal{K} \ll 1$, dans ce cas les résonances sont clairement séparées,
2. soit $\mathcal{K} \sim 1$ et les résonances se superposent,
3. soit $\mathcal{K} \gg 1$ et alors les résonances se superposent complètement, au point de partager l'analogie d'un pendule dont la séparatrice est pulsante.

Cela se laisse très clairement résumer graphiquement, comme le montre la figure 3.3 tirée des travaux de MORBIDELLI et GUZZO [MG96]. Transposons les notations des auteurs à notre développement pour en faire le parallèle. Les résonances isolées schématisées ici (*i.e* des pendules) sont ϵ -proches (*i.e* la quantité $|r_i - r_j|$ est de l'ordre de ϵ) et les résonances ont une amplitude qui s'écrit $\sqrt{\epsilon\beta}$ (*i.e* le coefficient (3.32) est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon\beta}$). Quand il en est ainsi, et sous ces conditions, le coefficient \mathcal{K} de (3.39) vaut

$$\mathcal{K} = \frac{\sqrt{\epsilon\beta}}{\epsilon} \quad (3.40)$$

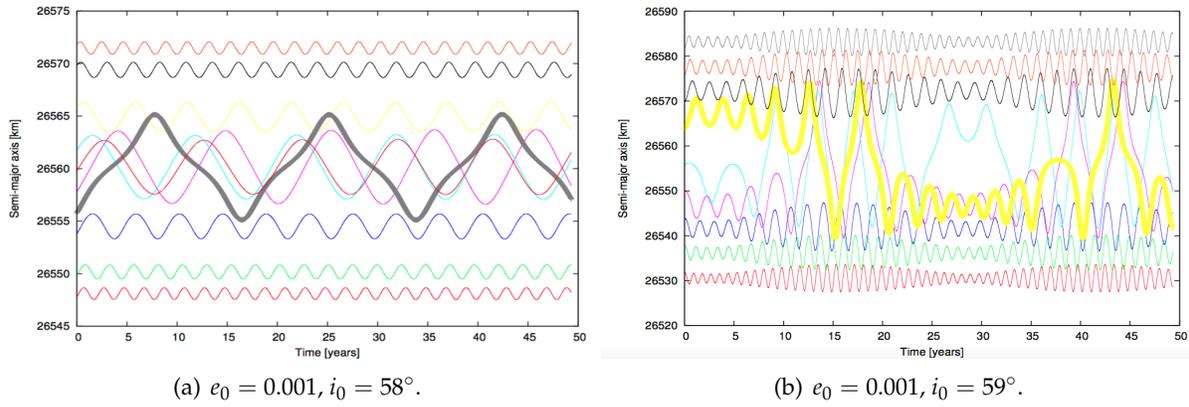


FIGURE 3.1 – Variation temporelle typique du demi-grand axe au voisinage de la résonance tessérale (2, 1).

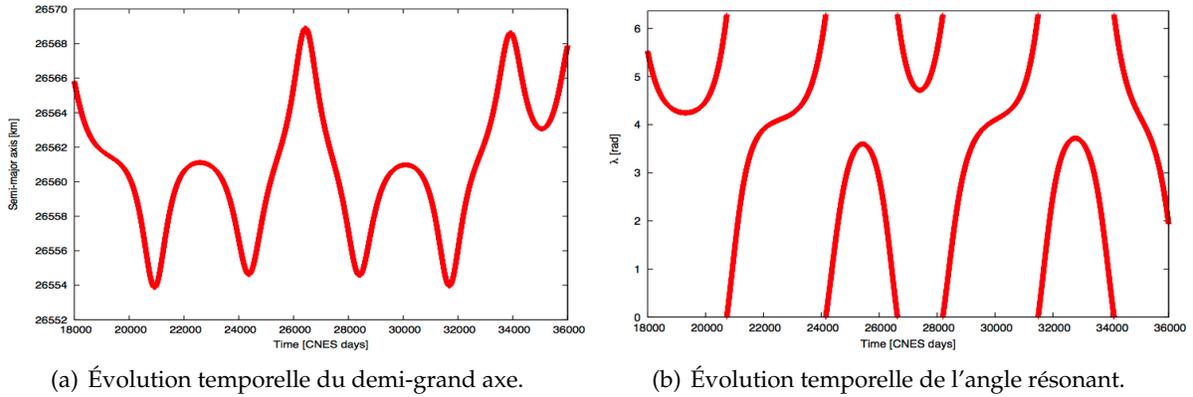


FIGURE 3.2 – Manifestation physique typique de l'intermittence pour une orbite en région stochastique de la résonance tessérale (2, 1).

et les conditions $\mathcal{K} \ll 1$, $\mathcal{K} \sim 1$ et $\mathcal{K} \gg 1$ sont bien équivalentes respectivement aux distinctions $\beta \ll \epsilon$, $\beta \sim \epsilon$, $\beta \sim 1$ de la figure 3.3.

Nous avons estimé ces coefficients de stochasticité pour de nombreuses valeurs initiales $\{e, i\}$ et nos résultats supportent totalement qu'ils sont de l'ordre de 1 au voisinage de la surface résonante (2, 1), comme indiqué par les figures 3.8 et 3.9 : cela laisse donc la possibilité au demi-grand axe d'explorer une bande de chaos, dont la largeur peut être du même ordre que la somme des amplitudes de chaque résonance $\sum_n \Delta_n$.

C'est à ce stade que s'arrête le traitement analytique de nos résonances tessérales. Afin de cerner plus finement le chaos qui en émerge, une étude numérique de l'espace des phases s'impose. C'est pourquoi nous présentons maintenant de nombreuses cartes de stabilité du voisinage de la surface résonante (2, 1).

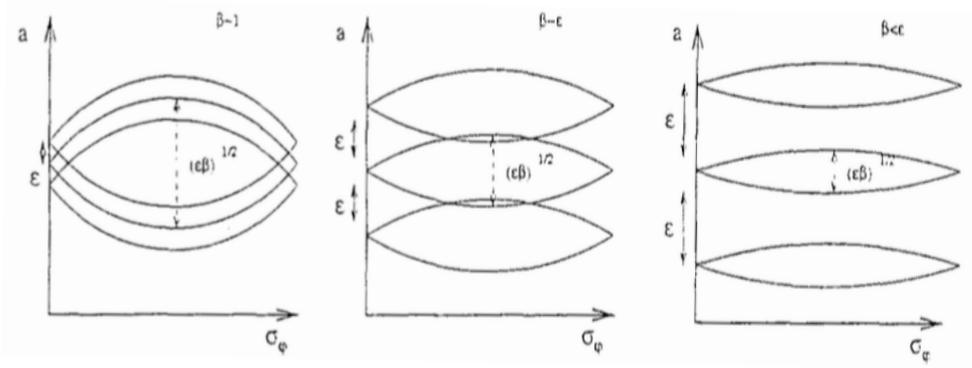


FIGURE 3.3 – Arrangement des résonances ϵ -proches selon la valeur du coefficient de stochasticité \mathcal{K} (extrait de [MG96]).

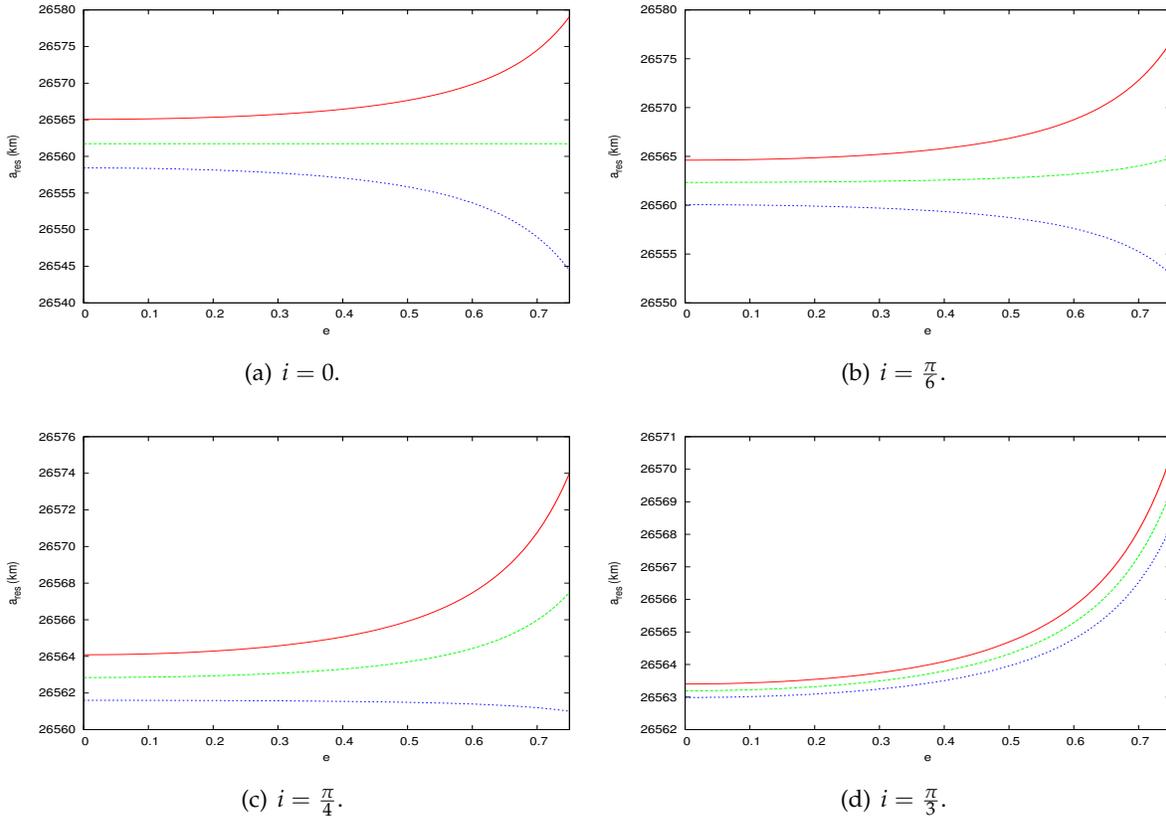


FIGURE 3.4 – Localisation des demi-grands axes résonants principaux de la résonance tessérale $(2,1)$ pour différentes valeurs du paramètre i exprimé ici en radian. Ces demi-grands axes correspondent aux valeurs des actions (traduites en termes de demi-grand axe, une variable physiquement plus interprétable) annulant la dérivée temporelle de l'angle $\sigma_n \equiv m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega$. Le demi-grand axe initial a_0 a été fixé à 25 560 km.

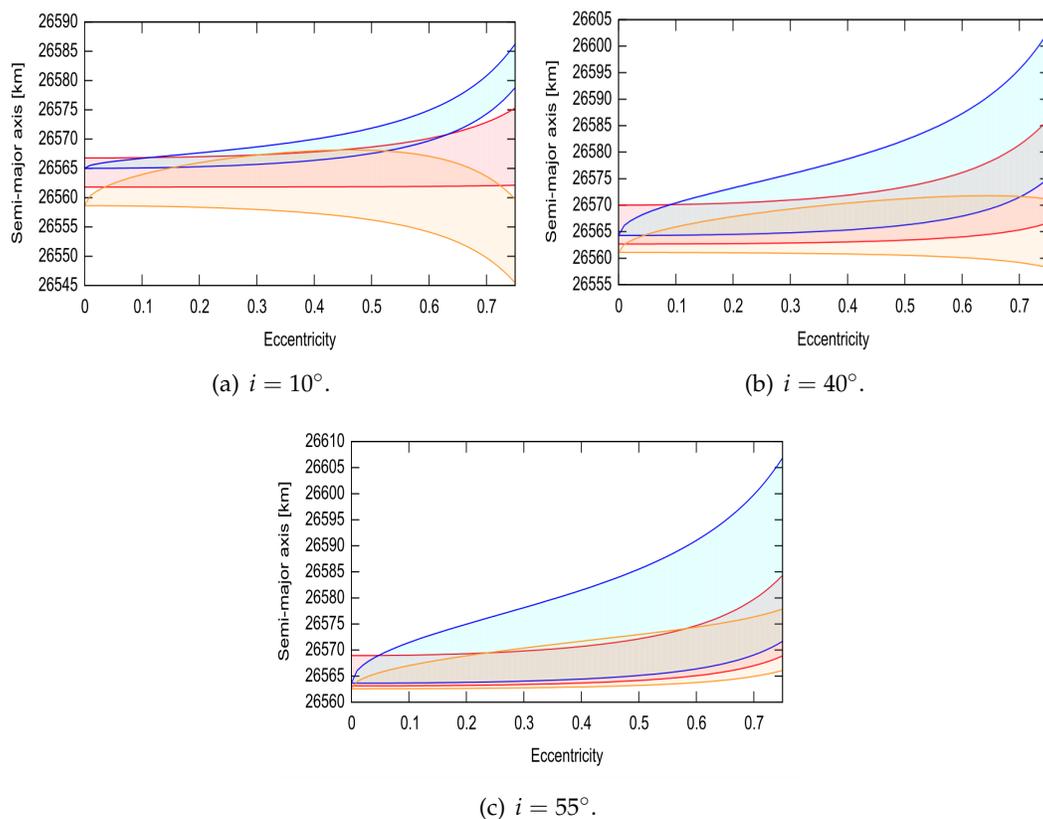


FIGURE 3.5 – Superposition des résonances pour les multiplets principaux de la résonance tessérale (2, 1).

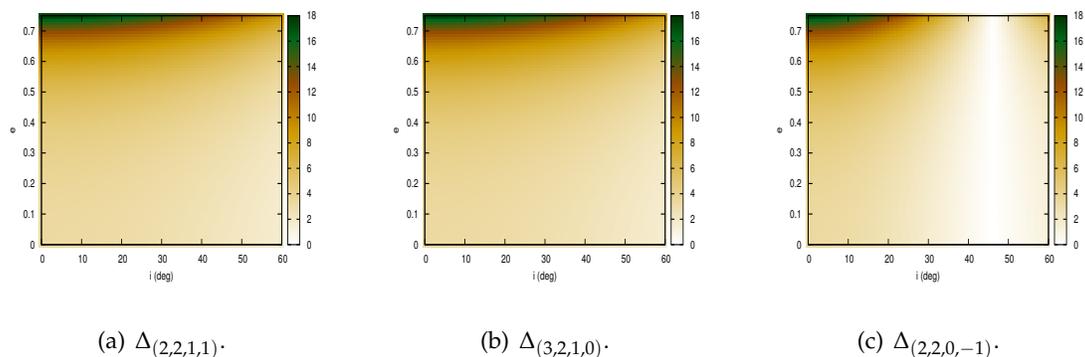


FIGURE 3.6 – Amplitude Δ_n associée aux différents multiplets principaux de la résonance tessérale (2, 1).

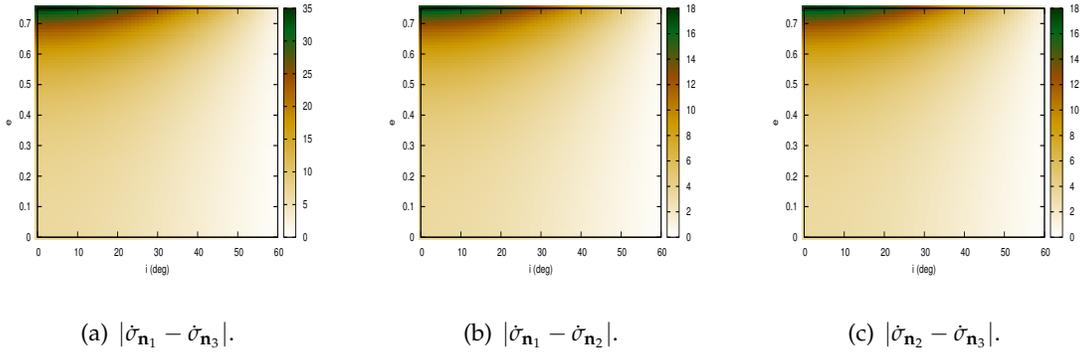


FIGURE 3.7 – Séparation $|\dot{\sigma}_{\mathbf{n}_i} - \dot{\sigma}_{\mathbf{n}_j}|$ des résonances associées aux différents multiplets principaux de la résonance tessérale (2, 1).

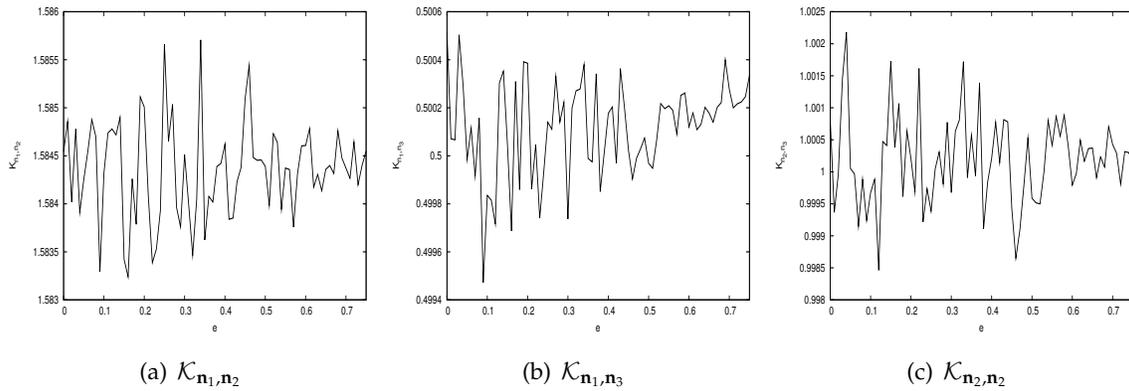


FIGURE 3.8 – Coefficient de stochasticité \mathcal{K} pour les multiplets principaux de la résonance tessérale (2, 1), $i = 40^\circ$.

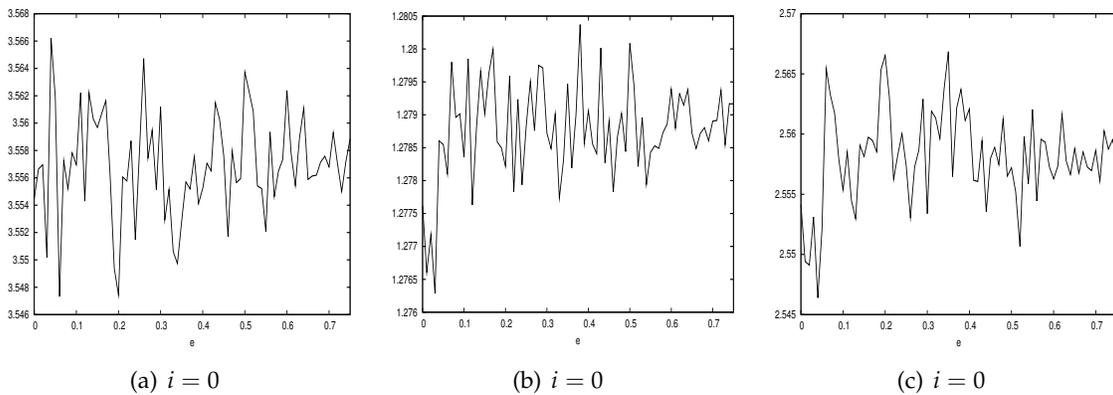


FIGURE 3.9 – Coefficient de stochasticité \mathcal{K} pour les multiplets principaux de la résonance tessérale (2, 1), $i = 55^\circ$.

3.3.2 Test de l'hypothèse de la moyennisation au voisinage de la surface résonante (2, 1)

Nous investiguons ici la stabilité de l'espace des phases au voisinage de la résonance (2, 1) via des outils variationnels du premier ordre. Rappelons que le fait même d'être un problème à 2-DOF borne l'instabilité : la dimension de l'espace valant $2n$ avec $n = 2$, l'existence de l'intégrale première (le Hamiltonien) contraint le mouvement à vivre sur une variété de dimension 3. Les tores KAM étant de dimension 2, nous voyons que la codimension entre deux tores KAM vaut 1 : les tores sont une barrière et bornent le chaos. Ainsi, les excursions chaotiques du demi-grand axe sont ici bornées par la fusion des domaines résonants $\sum_{n \in \mathcal{R}} \Delta_n$. Pour $n > 2$, ce raisonnement n'est plus vrai en général et les excursions ne sont plus *a priori* bornées.

Nous avons ici un double but :

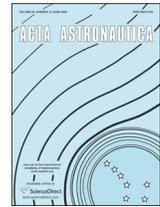
1. révéler la stabilité de l'espace des phases et les conséquences de la superposition à la CHIRIKOV,
2. confronter cette analyse de stabilité, quand elle est réalisée par des outils variationnels moyen ou exact, *i.e* nous examinons le problème fondamental de la moyennisation présenté en section 2.4 pour le chaos tesséral.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Acta Astronautica

journal homepage: www.elsevier.com/locate/actaastro

Comparison of mean and osculating stability in the vicinity of the (2:1) tesseral resonant surface



Jérôme Daquin^{a,*}, Florent Deleflie^b, Jérôme Pérez^c

^a Thales Services, 3 avenue de l'Europe, 31400 Toulouse, France

^b Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE), 77 Avenue Denfert Rochereau, 75014 Paris, France

^c ENSTA Paristech, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, 828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 7 August 2014

Received in revised form

8 January 2015

Accepted 12 February 2015

Available online 26 February 2015

Keywords:

Resonance

Averaging method

Fast Lyapunov Indicator

ABSTRACT

We confront stability results over long time scales, considering alternately the averaged and the non-averaged theory to propagate the equations of motion of a celestial body orbiting the vicinity of the (2:1) tesseral resonant surface. This confrontation is performed using Fast Lyapunov Indicator stability maps. The benefit of such maps is threefold: (i) to reveal the whole phase space architecture and the consequences of the resonance overlap when several combinations of tesseral resonant parameters are accounted for, (ii) to perform a stability analysis on a whole phase space region, and (iii) to have a clear view of the possible impacts of the short-periodic effects removed during the averaging procedure. Our detailed numerical investigations conclude that the tesseral chaos is robust to the averaging procedure and the numerical methods used to propagate the equations of motion over such long time scales.

© 2015 IAA. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The *averaging principle* or *averaging method* has seen a lot of improvements, mathematical justifications and rigorous developments [1] since its heuristic introduction by Lagrange in celestial mechanics and Van der Pol's works in mechanics. This perturbative method treats differential systems containing a small parameter which calibrates the perturbation's size of the original and non-perturbed system which is supposed to be integrable. Given a perturbed differential system, often written in the *standard perturbative form* [2] as

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon X(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} = \omega(x) + \epsilon Y(x, y, \epsilon), \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ stands for the *slow variables* and $y \in \mathbb{T}^k$ the *fast variables*, $\epsilon \ll 1$, X and Y are 2π -periodic functions in y and

are supposed to be analytic, the aim of the averaging method is to find new coordinates (\bar{x}, \bar{y}) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$ such that the slow and the fast variables are separated. The solution reads as a power series of the small parameter ϵ :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \epsilon A_1(\bar{x}) + \epsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots \\ \dot{\bar{y}} = \omega(\bar{x}) + \epsilon B_1(\bar{x}) + \epsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots \end{cases}$$

When the previous calculus are performed at order 1 in ϵ , the term A_1 is the spatial average over the torus of the function X [2]. This method has been applied with success in spatial dynamics to define variables (\bar{x}, \bar{y}) free of short-periodic terms¹ but containing all the original long-periodic information. Due to the elimination of the short-periodic terms, the averaged equations of motion can be propagated numerically with a large step size (to the order of one day), several orders larger than those typically used when

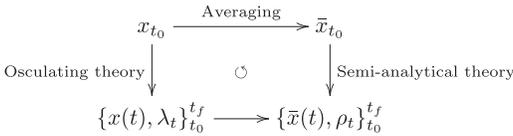
* Corresponding author.

E-mail address: jerome.daquin@imcce.fr (J. Daquin).

¹ Effects with a period on the order of the orbital period.

propagating the osculating motion, which is in practice very useful for long-term-analysis or long-term ephemeris.

If the first order averaged semi-analytical theory has already shown its capability in terms of orbit propagation accuracy when compared to the results of an osculating propagation [3], the compatibility problem between a stability analysis performed with the averaged or non-averaged equations has, to the best of our knowledge, never been addressed and is still an open problem, especially in the vicinity of resonant surfaces. This question is, from a dynamical and theoretical point of view, crucial and states the general problem of the short-periodic effects removed during the averaging procedure on long-term analysis. Consequently, we state here the question of the existence of the following, ideally commutative, diagram:



By x_{t_0} and \bar{x}_{t_0} we denote the osculating and the corresponding mean initial state vectors at initial time t_0 . These state vectors are propagated, following a numerical or semi-analytical approach, up to a final time t_f . By λ_t and ρ_t we refer to a numerical stability indicator associated with the proposed orbit. The main object of this paper is to study to what extent, or not, there is a compatibility and eventual link between the results of the stability analysis between $\{x, \lambda\}_t$ and $\{\bar{x}, \rho\}_t$.

In this paper we examine the general problem applied to the (2:1) tesseral resonant motion, where GPS satellites are positioned. At this location, the orbital period is approximately equal to 12 h, half the rotational period of the Earth, leading to a resonant configuration.

The paper is organized as follows: In Section 2 we summarize the Hamiltonian part modeling the problem, and present the averaged Hamiltonian used for long-term motion study. The Hamiltonian is a 2 degree of freedom (hereafter noted DOF) Hamiltonian from which emerges chaos. The route to chaos is described by Chirikov's resonance overlap. In Section 3, we present the main results of the current work: the Fast Lyapunov Indicator (hereafter noted FLI) stability analysis obtained when propagating the averaged or non-averaged equations of motion. Several relevant stability maps are discussed.

2. Hamiltonian formulation of the problem

We recall in this section the general form of the Hamiltonian only when taking into account only the disturbing effect of the non-sphericity of the Earth. Since we are interested in the orbital evolution over long time spans, the Hamiltonian is averaged over fast variables. The averaged Hamiltonian is a 2-DOF Hamiltonian where Chirikov's resonance overlap occurs.

2.1. General formulation

We are dealing with the Hamiltonian representing the motion of a space object considering only the geopotential

effect. Using the Delaunay's variables (L, G, H, l, g, h) related to the conventional Keplerian elements noted ($a, e, i, \Omega, \omega, M$), the Hamiltonian takes the form of the Keplerian Hamiltonian perturbed by the non-sphericity of the Earth:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep.}} + \mathcal{H}_{\text{Pert.}} \quad (2)$$

$$= -\frac{\mu}{2L^2} + \mathcal{H}_{\text{Pert.}}(L, G, H, l, g, h, \theta) \quad (3)$$

where the perturbing's part is given from Kaula's Earth development [4]

$$\mathcal{H}_{\text{Pert.}}(L, G, H, l, g, h, \theta) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \Delta_{lmpq} \cos(\psi_{lmpq}) \quad (4)$$

where

$$\Delta_{lmpq} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{r_E}{a} \right)^l F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) J_{lm}, \quad (5)$$

$$\psi_{lmpq} = \left(l - 2p + q - \frac{m}{s_0} \right) (M + \omega) + m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega, \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{1}{s_0} (M + \omega) - (\theta - \Omega). \quad (7)$$

The $F_{lmp}(i)$ -inclination and $G_{lpq}(e)$ -eccentricity functions can be found in [4], r_E denotes the Earth's radius, μ the gravitational parameter and $J_{lm} = \sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2}$ depends on the coefficients C_{lm} and S_{lm} describing the Earth's gravitational field. Indexes l and m are, respectively, the degree and order of the geopotential's development. Following the tradition [5,6], λ denotes the stroboscopic mean mode where s_0 is the closest integer of the ratio of the mean motion over Earth's rotational rate. The Hamiltonian given by Eq. (2) is non-autonomous due to the sidereal time θ . Finally, the quantity λ_{lm} is a phase variable depending only on the coefficient C_{lm} and S_{lm} whose definition can be found in [4].

Because the interest in this paper lies in the long-term analysis concerning the vicinity of the (2:1) tesseral resonant surface, the previous Hamiltonian, with various time scales, is now averaged over the fast variable M .

2.2. Averaging the Hamiltonian for the long-term motion

The perturbative part $\mathcal{H}_{\text{Pert.}}$ is split into the secular part $\mathcal{H}_{\text{sec.}}$ (terms independent of angles, those with $m=0$ and $l-2p+q=0$) and the resonant part $\mathcal{H}_{\text{res.}}$, containing terms dependent on θ . Averaging the Hamiltonian over the fast variable M is equivalent to retain in the resonant part only indexes (l, m, p, q) satisfying the $(\alpha:\beta)$ resonant condition with $(\alpha:\beta) = (2:1)$ in this work:

$$\frac{l-2p+q}{m} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

The averaged Hamiltonian, that we continue to note \mathcal{H} , takes the form:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep.}} + \mathcal{H}_{\text{sec.}} + \mathcal{H}_{\text{res.}}, \quad (9)$$

and depends only of the angles λ and ω , a 2-DOF problem. When considered as isolated, i.e when only one resonant combination (l, m, p, q) is taken into account in Eq. (9), the dynamics may be reduced to a 1-DOF Hamiltonian by

introducing, if necessary, new canonical variables. The problem is fully integrable. A local development of the Hamiltonian highlights the dynamics with a reduction to the fundamental classical Hamiltonian of the pendulum, a typical approach when dealing with resonant dynamics [7–12]. The phase-space contains two regimes, *circulation* and *libration*, distinguished by the separatrix. However, the isolated resonance hypothesis is no longer true in the vicinity of the (2:1) tesseral resonant surface due to the comparable magnitude of the coefficients Δ_{lmpq} for several resonant indexes. Following the same reduction strategy as the one used to obtain the fundamental classical Hamiltonian of the pendulum, we obtain, when several resonant combinations are taken into account, a Hamiltonian taking the form of a modulated pendulum [7]. Because the separation between the resonant multiplets is too small, resonance overlap occurs for most $e_0 - i_0$ parameters, leading to the Chirikov's instability [11,13]. Such is the route to chaos.

Unfortunately, the intuitive Chirikov criterion is only a heuristic argument and no complete theory yet exists. This criterion often underestimates the threshold of transition to global chaos. Even if it can be assumed that the effect of short periodic terms may change the global picture just slightly, the precise long-term effect, and global consequences, are not clear. It is therefore deemed necessary to perform a whole phase space stability analysis using alternatively the non-averaged and the averaged theory to, numerically or semi-analytically, propagate the equations of motion.

Although the averaged tesseral resonant problem is a 2-DOF problem, the use of Poincaré's section to study the stability of the whole phase space is not necessarily appropriate. In fact, the time required between two consecutive plane crossings is relative to the variation of the argument of perigee ω , a slow angle. Ely and Howell [11,12] used consequently a symplectic mapping [14] to efficiently propagate the equations of motion. More recently, additional stability results of this problem received attention in Sampaio's work [8]. The author computes some maximal Characteristic Lyapunov Exponents, requiring, due to a poor convergence, a large propagation time, which appears to be shorter in this paper. His work was performed for only a few orbits with moderate eccentricity. In particular, the consequences of Chirikov's overlap consequences on the whole phase space, were not revealed. It should be mentioned that in our study, the (3,2,1,0) tesseral resonant harmonics, important for moderate eccentric orbits, is incorporated. Furthermore, are considered eccentric orbits in the simulations ($0.5 \leq e \leq 0.7$). In both previous stability analysis, the effect of the averaging procedure on the stability results were not investigated. This is the object of the next section.

3. Numerical investigations of the stability near the (2:1) resonant surface

We describe in this section the two numerical tools used for the long-term study of a massless body orbiting the vicinity of the (2:1) tesseral resonant surface. These tools allow the propagation of the variational system from which several chaos indicators are derived. For our analysis, we choose the FLI whose definition is provided below. The description and structures of the whole phase spaces are

revealed using stability maps which highlight the co-existence between stable or chaotic orbits. The very nice agreement between the maps obtained with the averaged or non-averaged equations is a strong testimony of the averaging procedure.

3.1. Orbit propagators and variational system

We use the STELA² software, jointly developed by IMCCE and CNES, to propagate the averaged equation of motion where the short-periodic terms have been removed following an analytical approach. This enables the use of large step size, very useful for long-term analysis, reducing significantly the total time of computation. All the equations have been formulated through equinoctial elements that are suitable to describe orbits with high eccentricities and whatever inclination (except 180°). The included force model can be considered as the simplest model that can be used. The mean geopotential is computed analytically from the expression of the osculating potential. It includes zonal terms up to J_7 , several combinations of the resonant part of the geopotential for these tesseral resonances: (2 : 1), (3 : 1) and (3 : 2). The implementation of tesseral harmonics perturbations are presented in [15]. The coefficients of the gravity field are those of GRIM5-S1. Solar and Lunar potentials are developed up to degree 3 and 4, respectively. The effects of non conservative perturbations on mean elements are computed through a Simpson quadrature method. In this work, a fixed step size (1 day) Runge–Kutta 4-th order integration algorithm was used to propagate the initial state vector. The second orbit propagator, JACK,³ is a purely numerical orbits propagator able to interpolate a position-velocity ephemeris at a given time. JACK's orbit propagator takes into account a configurable dynamical model, including the geopotential (no restriction concerning the degree and order), the potential of the Moon and the Sun, atmospheric drag and direct solar radiation pressure. The gravity field model for the geopotential corresponds to the EGM-GOC-2 model. For this work, a Dormand–Prince 8-th order integration method was used. In both softwares, we have recently implemented the variational equations to derive numerical stability tools. For a n -dimensional differential system written in first order autonomous form, $\dot{x} = f(x)$, where $x \in \mathbb{R}^n$ and $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ represents the vector field, by variational system we refer to the following $2n$ -dimensional differential system:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) w, \end{cases} \quad (10)$$

where $w \in \mathbb{R}^n$ stands for the deviation or tangent vector. Many chaos indicators used nowadays in spatial or celestial mechanics are derived from the propagation of this system. For our analysis we choose the FLI introduced by Froeschlé et al. [16–18]. The FLI at time t , defined by

$$\text{FLI}(t) = \sup_{0 < \tau \leq t} \log \|w(\tau)\|, \quad (11)$$

is expected to grow linearly with time in case of a chaotic

² Semi-analytical tool for end of life analysis.

³ Java Aerospace Capitalized Kit.

orbit, in a logarithm way otherwise. Monitoring this evolution during a sufficient propagation time enables to discriminate the stability of the orbit. For simplicity, we have noted in Eq. (11) $FLI(t)$ instead of $FLI(t, x_0, w_0)$ where (x_0, w_0) is the necessary point to initialize the $2n$ -differential system (10). The choice of the initial tangent vector w_0 is a recurrent question when dealing with first order variational methods [10,19]. There is no general rule for this choice even though some authors have recommended, in some cases, the use the normalized gradient of the Hamiltonian [19]. In this paper, we have chosen a fixed normalized vector. Several tests that we performed have indicated the robustness of the results with respect to the choice of w_0 . Let us now explain a little more the stability maps methodology.

3.2. The structure of the phase space by stability maps analysis

In order to study the stability and the structure of the whole phase space, we use a stability map approach. To this end we compute, as a function of a 2-dimensional regular plane of initial conditions, the value of the FLI at time t_f . This value is represented using a color code in this plane. The propagation time used to present the results equals to 40 years. This time was, after a calibration process, a good trade-off between a reasonable computation time and a sufficient

time to indubitably separate two nearby orbits (if ever). The results are presented in the $a-\xi$ variables, the semi-major axis and the equinoctial anomaly ($\xi = \Omega + \omega + M$). The typical resolution of a map is 100×180 points. To investigate the eventual effect of the averaging procedure on the chaotic dynamics, we use the two previously presented numerical tools to propagate the equations of motion for several dynamical models. The same representation space is of course used to fairly compare the results of the propagations: the mean phase space, i.e the phase space defined by the mean theory. This is the reason why the maps presented below, obtained from the propagation of the non-averaged propagation seem to be slightly distorted, even if they have been calculated using a regular grid of initial conditions. This is only due to the embedding from the osculating to the mean phase space.

3.3. Results

We have produced FLI maps for several $e_0 - i_0$ parameters in the vicinity of the (2 : 1) tesseral resonant surface propagating Eq. (2) or its averaged counterpart for several degree and order of Earth geopotential development. We choose for all our numerical simulations "square" truncated development of the Earth (degree equals to the order). Our interest was mainly on eccentric and moderate inclined

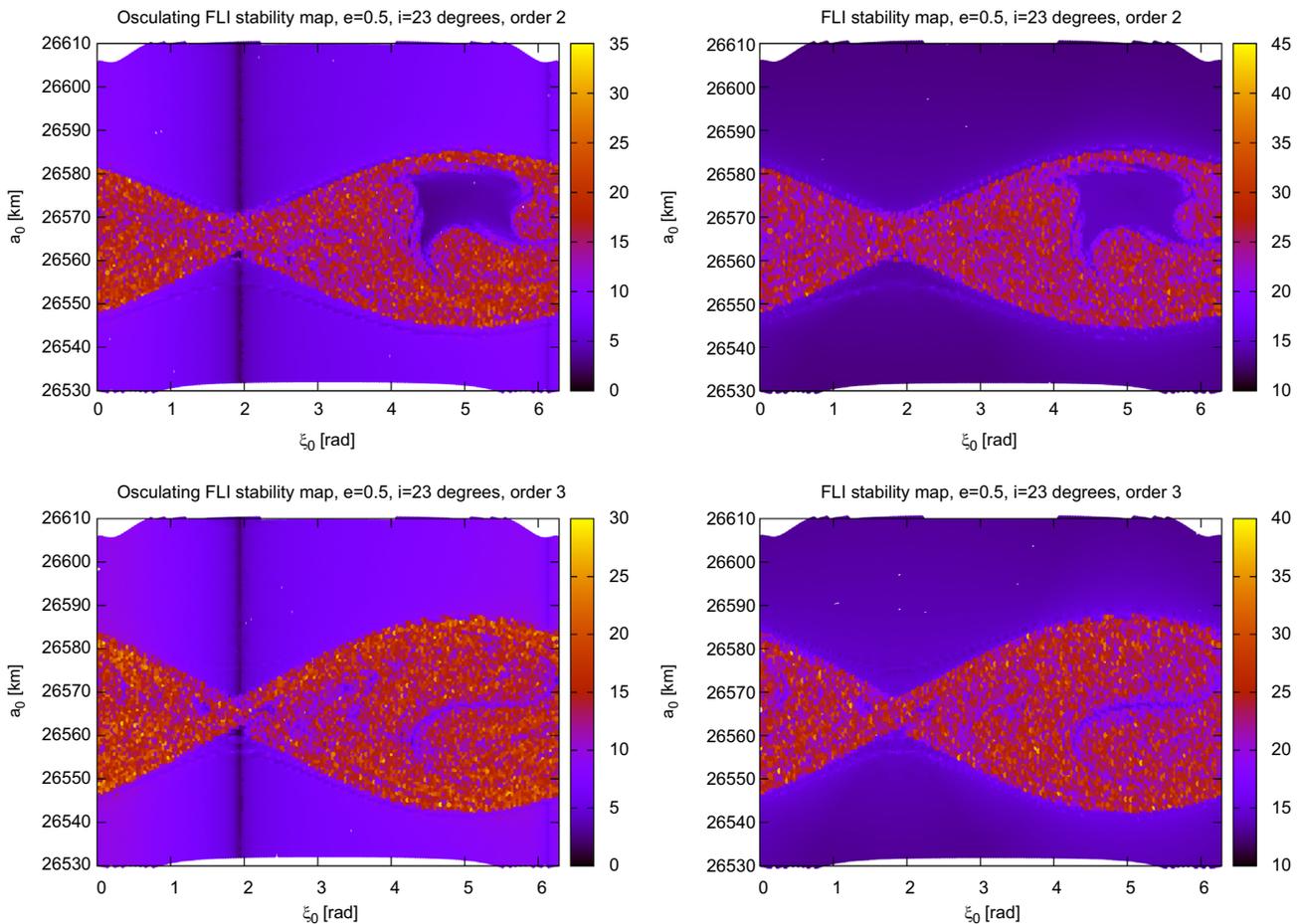


Fig. 1. FLI stability maps after a propagation time equals to 7.2×10^5 satellite revolutions for several dynamical models using the non-averaged equations of motion (left column) and the averaged equations of motion (right column). Parameters of the problem are $e_0 = 0.5$ and $i_0 = 23^\circ$.

orbits. To avoid overloading the present paper with graphics, we present only some of the results of our numerical campaign. With the color-scale palette, darker FLIs indicates regular dynamics while lighter FLIs colors will indicate chaotic dynamics. Let recall that only the contrast in the maps is important when using FLIs, in particular the final value of a single FLI experiment can not be used to compare or determine the stability of the orbit.

With parameters set to $e_0 = 0.5$ and $i_0 = 23^\circ$, the dynamics illustrated by Fig. 1 appears to be much more complex than the simple pendulum toy-model for the isolated

resonance hypothesis. Even when the geopotential is developed at order 2, the phase space is not at all symmetric and chaotic orbits exist not only in the vicinity of the separatrix. A large stable structure can be detected inside the "libration" regime. The dark vertical lines appearing in the maps from the non-averaged motion ($\xi_0 = 2$) is a numerical artifact due to the choice of the initial tangent vector w_0 , already expressed by Breiter et al. [20]. Higher order terms change the appearance of the previous phase space which contains now almost exclusively chaotic orbits inside the "libration" regime. The existence of thin stable structures are well reflected using both

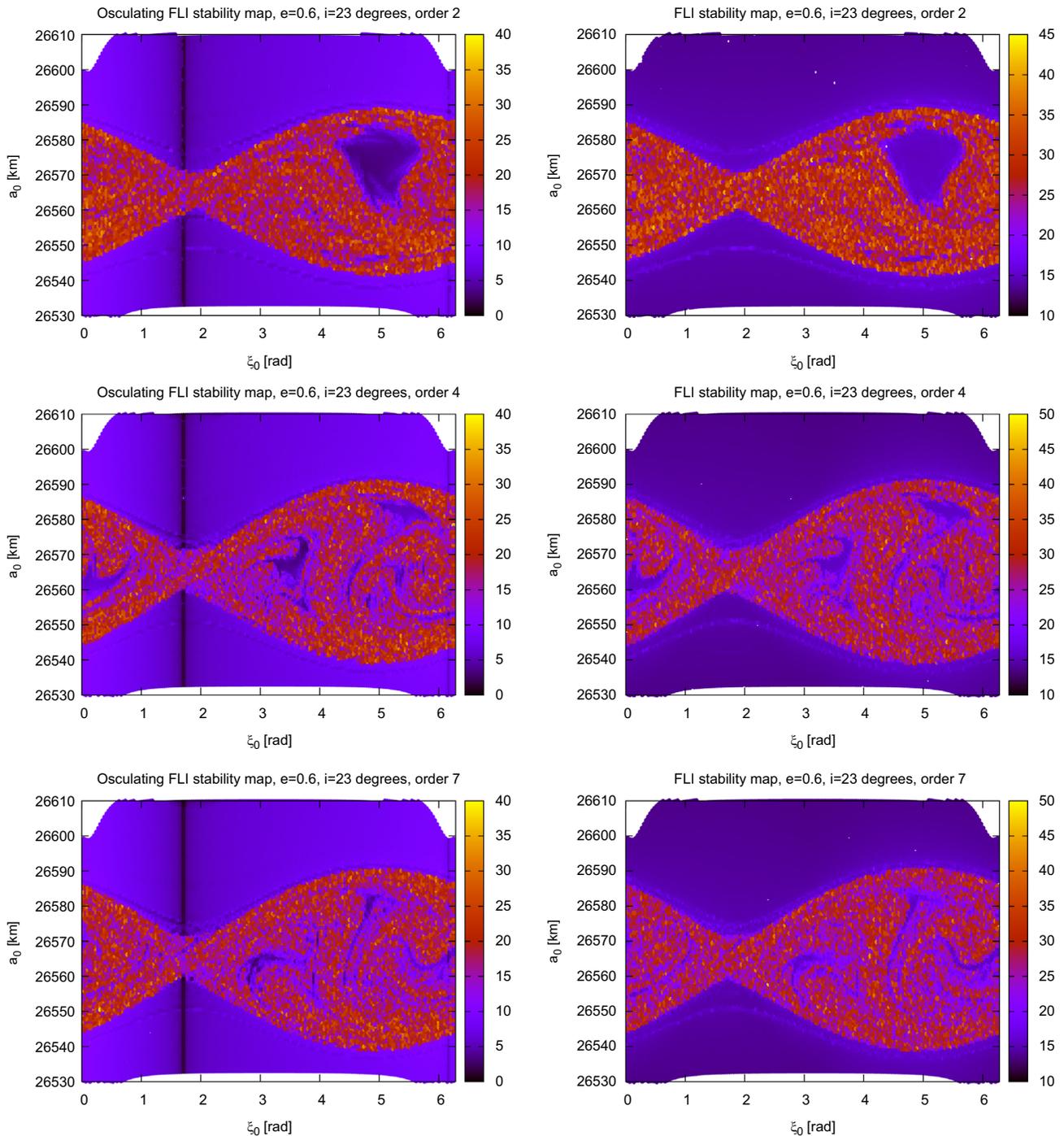


Fig. 2. FLI stability maps after a propagation time equals to 7.2×10^5 satellite revolutions for several dynamical models using the non-averaged equations of motion (left column) and the averaged equations of motion (right column). Parameters of the problem are $e_0 = 0.6$ and $i_0 = 23^\circ$.

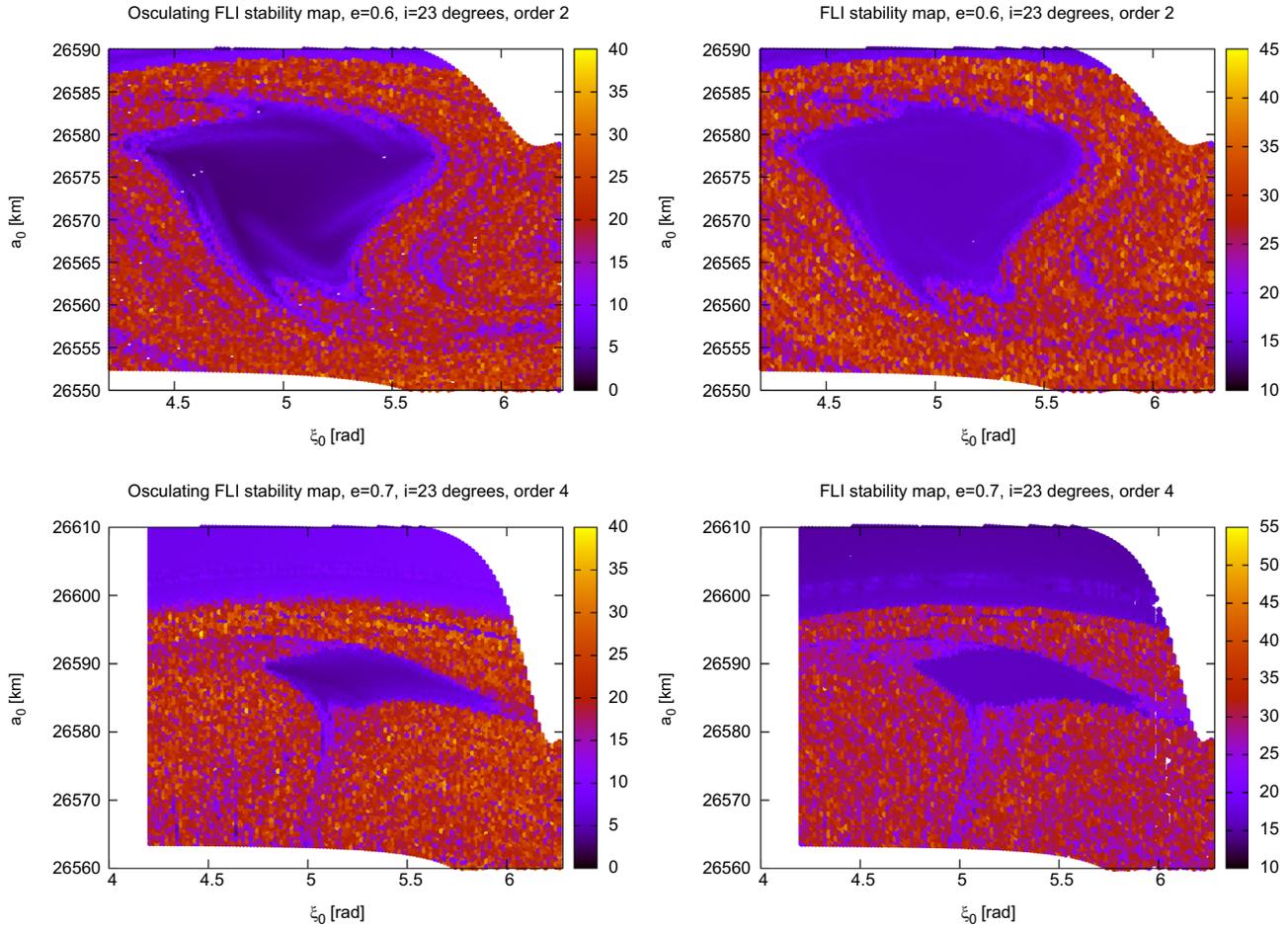


Fig. 3. FLI stability maps after a propagation time equals to 7.2×10^5 satellite revolutions for several dynamical models using the non-averaged equations of motion (left column) and the averaged equations of motion (right column). The parameters of the problem are $e_0 = 0.6$ and $i_0 = 23^\circ$ (top) and $e_0 = 0.7$ and $i_0 = 23^\circ$ (bottom).

theories. Increasing now the initial eccentricity to 0.6 but keeping fixed the initial inclination to 23° has for consequences, even at order 2, to affect the primary stable island as shown by Fig. 2. Increasing the geopotential development of the Earth to 4 and 7 affects the existence of the large stability island which splits into several complex and thinner structures in the phase space. Despite the multiple various stable structures, the mean and the osculating propagations reflect one with the other with a great fidelity. Fig. 3 shows that the previous agreement between the macroscopic stability analysis is still valid focusing on a smaller phase space region (but keeping fixed the resolution of the grid) and more elliptic orbits. For this figure, the initial eccentricity was set to $e_0 = 0.7$. Even at this scale, the structures and thinner details in the maps match perfectly. To complete the previous comparison, we perform a last test furnished by Fig. 4. Instead of presenting a whole map, we present the final value of the FLIs only as function of the initial semi-major axis decreasing, for each snapshots, the amplitude of the variation of the semi-major axis. The dynamical parameters are those of Fig. 1 with ξ_0 fixed to 5 radians. The initial semi-major axis is near 26,568 km, i.e near a transition from chaotic to regular dynamics. Thus, this procedure investigates seriously the agreement between the stability for a smaller resolution, up to 50 times less than the usual semi-major axis resolution used for the whole map.

Fig. 4. demonstrates that, at each scale, the profile of the FLIs curves are highly comparable, hence concluding to a global agreement between the stability analysis. All these results, confirmed by many other examples that we perform in various dynamical configurations, support the conclusion that the tesseral resonant problem is robust to the averaging procedure. By *robust*, we mean that there is no loss of stability information in the averaged dynamics when compared to the non-averaged dynamics. This result is a strong and powerful testimony of the averaging principle.

The extension of the adequation between the stability analysis performed using the averaged and non-averaged theory still remains a challenging problem of theoretical and practical interest. The eventual extension of such agreement in Medium Earth Orbit (MEO) region, where Luni-Solar resonances are dominant [21–23] (increasing the DOF of the problem) is the object of a forthcoming paper.

4. Conclusions

We have formulated the *Extended Problem of Averaging* which focus on the reliability between a stability analysis performed using the averaged equations of motion or the non-averaged equations of motion. This problem was particularized and investigated in the vicinity of the (2:1) tesseral

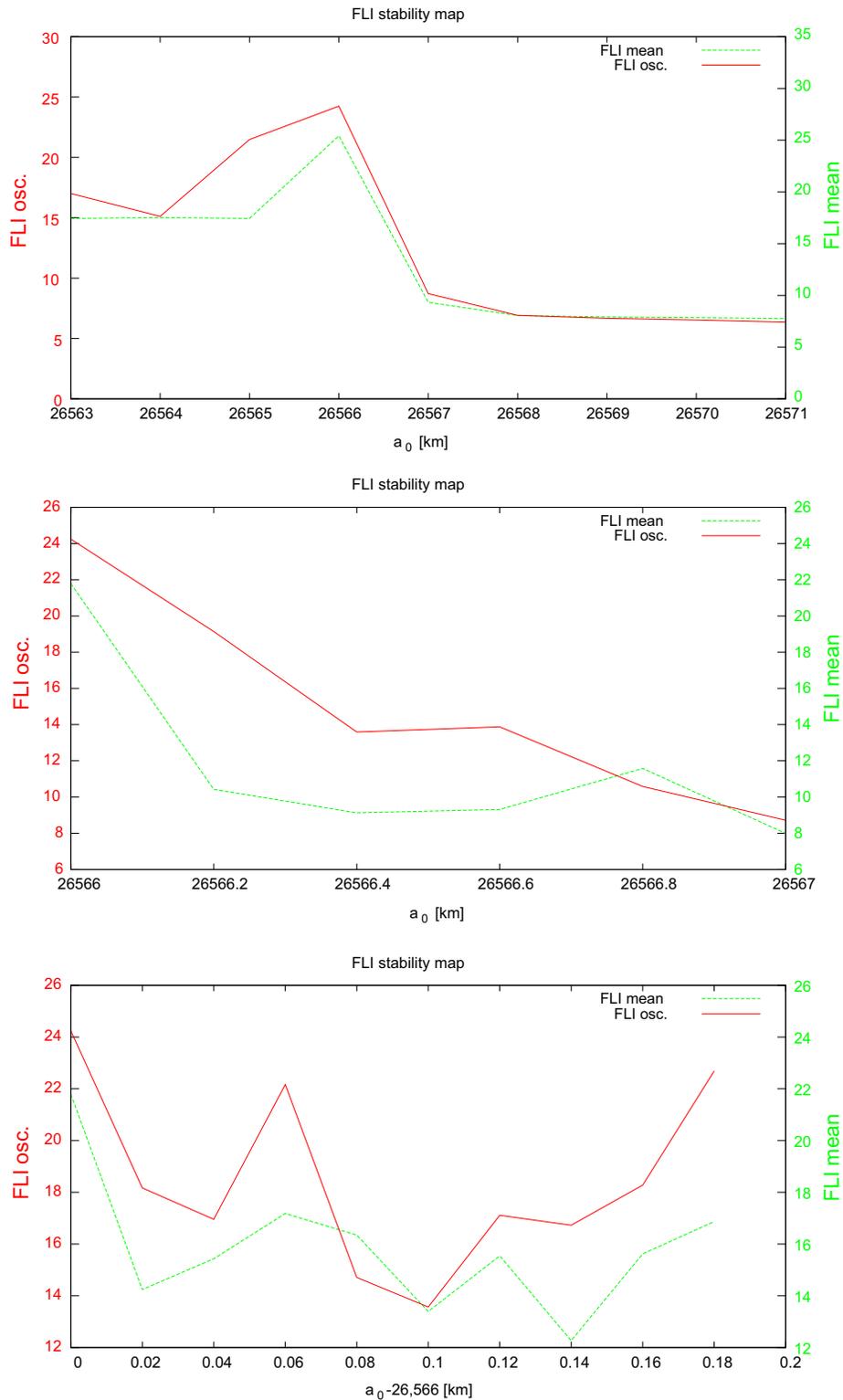


Fig. 4. FLI stability maps. The parameters of the problem are $e_0 = 0.5$, $i_0 = 23^\circ$ and $\xi_0 = 5$ radians.

resonant surface, whose Hamiltonian averaged over the fast variable is a 2-DOF problem, using Fast Lyapunov Indicator stability maps. The giant numerical campaign that we performed for many parameters and dynamical models supports totally the agreement between the averaged stability analysis when compared to the non-averaged stability analysis. This

illustrates strongly the power on a variational way of the averaging procedure. Moreover, the use of two orbit propagators fully independent one from the other, reveals that the tesseral chaos is not sensitively dependent on the numerical methods or physics that is used. From our investigations, we conclude that the tesseral chaos is robust to the averaging

procedure, the numerical methods and the small difference in the physics.

The present work will be extended to more complete physical models, especially in the MEO region where Luni-Solar resonances plays an important role [21] and seem to be responsible for the diffusion of the eccentricity [12]. Current investigations and attention are still on the reliability between the stability analysis between the averaged and the non-averaged motion.

References

- [1] I.A. Mitropolsky, Averaging method in non-linear mechanics, *Int. J. Non-Linear Mech.* 2 (1) (1967) 69–96.
- [2] V.I. Arnold, *Dynamical Systems III*, Springer-Verlag, 1985.
- [3] H. Fraysse, V. Morand, C. le Fevre, F. Deleflie, S. Wailliez, A. Lamy, T. Martin, E. Perot, Long term orbit propagation techniques developed in the frame of the French Space Act, *J. Aerosp. Eng.* 4 (4) (2012) 2.
- [4] W.M. Kaula, *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy* William M. Kaula, Courier Dover Publications, 2000.
- [5] G. Gedeon, Tesseral resonance effects on satellite orbits, *Celest. Mech.* 1 (2) (1969) 167–189.
- [6] M.T. Lane, An analytical treatment of resonance effects on satellite orbits, *Celest. Mech.* 42 (1–4) (1987) 3–38.
- [7] A. Morbidelli, *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*, vol. 1, 2002.
- [8] J. Sampaio, A. Neto, S. Fernandes, R. Vilhena de Moraes, M. Terra, Artificial satellites orbits in 2:1 resonance: GPS constellation, *Acta Astronaut.* 81 (2) (2012) 623–634.
- [9] A. Lemaitre, N. Delsate, S. Valk, A web of secondary resonances for large A/M geostationary debris, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 104 (4) (2009) 383–402.
- [10] S. Valk, *Global Dynamics of Geosynchronous Space Debris with High Area-to-Mass Ratios* (Ph.D. Thesis), University of Namur, Belgium, 2008.
- [11] T.A. Ely, K.C. Howell, Long-term evolution of artificial satellite orbits due to resonant tesseral harmonics, *J. Astronaut. Sci.* 44 (2) (1996) 167–190.
- [12] T.A. Ely, Eccentricity impact on east-west stationkeeping for global positioning system class orbits, *J. Guid. Control Dyn.* 25 (2) (2002) 352–357.
- [13] B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.* 52 (5) (1979) 263–379.
- [14] J. Wisdom, M. Holman, Symplectic maps for the n-body problem, *Astron. J.* 102 (1991) 1528–1538.
- [15] V. Morand, Semi-analytical implementation of tesseral harmonics perturbations for high eccentricity orbits, in: *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, August 2013.
- [16] C. Froeschlé, E. Lega, R. Gonczi, Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 67 (1) (1997) 41–62.
- [17] C. Froeschlé, R. Gonczi, E. Lega, The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt, *Planet. Space Sci.* 45 (7) (1997) 881–886.
- [18] C. Froeschlé, E. Lega, On the structure of symplectic mappings. The fast lyapunov indicator: a very sensitive tool, *New Developments in the Dynamics of Planetary Systems*, Springer, 2001, 167–195.
- [19] R. Barrio, W. Borczyk, S. Breiter, Spurious structures in chaos indicators maps, *Chaos, Solitons Fractals* 40 (4) (2009) 1697–1714.
- [20] S. Breiter, I. Wytrzyszczak, B. Melendo, Long-term predictability of orbits around the geosynchronous altitude, *Adv. Space Res.* 35 (7) (2005) 1313–1317.
- [21] A. Rossi, Resonant dynamics of medium earth orbits: space debris issues, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 100 (4) (2008) 267–286.
- [22] G. Cook, Luni-solar perturbations of the orbit of an earth satellite, *Geophys. J. Int.* 6 (3) (1962) 271–291.
- [23] S. Breiter, Lunisolar resonances revisited, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 81 (1–2) (2001) 81–91.

3.4 Conclusion

Nous avons de façon générale construit la forme normale résonante associée à un corps orbitant le voisinage terrestre quand une condition de commensurabilité (n_1, n_2) existe entre le mouvement moyen du corps et la période de révolution sidérale de la Terre. Cette construction générale, présentée sous un formalisme Hamiltonien, a été particularisée au voisinage de la surface résonante $(2, 1)$ où la période orbitale du corps est proche de 12 heures. Nous avons délibérément fait ce choix de particularisation pour au moins deux raisons. D’abord, (i) c’est la résonance la plus importante en terme d’amplitude après la résonance géostationnaire $(1, 1)$, déjà bien étudiée et aussi car (ii) elle contient l’ensemble des ingrédients dynamiques faisant de ces résonances tessérales (n_1, n_2) des dynamiques riches.

Nous avons dans un premier temps confirmé les travaux de T.ELY de façon indépendante. Ces travaux ont ensuite été complétés et prolongés par plusieurs points. Nous avons estimé les coefficients de stochasticté \mathcal{K} qui sont de l’ordre de 1 pour les résonances les plus importantes au voisinage de la surface résonante $(2, 1)$, ouvrant la possibilité à la variable d’action d’évoluer de façon chaotique. Une analyse de stabilité du plan de phase a été effectuée. Nous avons aussi et surtout testé la robustesse du principe de moyennisation pour cette dynamique chaotique à 2-DOF en confrontant les résultats de stabilité du plan de phase obtenus numériquement et semi-numériquement pour de nombreux paramètres physiques. Via cette confrontation, nous avons conclu que (i) la moyennisation opérée dans `Stela`, en plus des troncatures en excentricité opérées, ne pervertit pas l’image du chaos de la « vraie » dynamique obtenue en simulant le système complet, (ii) de plus, de l’indépendance totale des outils utilisés pour propager les équations du mouvement, nous avons conclu que le chaos tesséral est robuste à l’égard des écarts de physique et des méthodes numériques employées. Ces derniers points ont fait l’objet d’une publication avec comité de lecture [DDP15].

À ce stade de l’étude, nous étions alors satisfaits de la littérature existante quant aux problèmes des résonances tessérales, le « premier⁷ » chaos qui pouvait apparaître via la superposition des résonances, et qui se devait donc d’être étudié avant tout autre chose. Ceci étant fait, nous partageons le même état d’esprit que S. BREITER écrivant [Bre01a] :

In contrast to a widespread *cliché*, the satellite problems still require the research on the level more fundamental than just tracing the microscopic influence of yet another tesseral harmonic.

Crescendo dans l’augmentation du nombre de degrés de liberté, nous avons alors en tête d’étendre nos résultats à un chaos à 2.5-DOF⁷, sous l’effet des potentiels luni-solaires extérieurs et des résonances luni-solaires intimement associées. Mais avant cela, il nous fallait déjà cerner ces résonances séculaires, dont la littérature était très décousue, sans unification. C’est l’objet du prochain chapitre.

7. Premier au sens de minimalité du nombre de degrés de liberté pour que le chaos puisse apparaître : 1.5 ou 2-DOF et non dépendant du temps.

Chapitre 4

Résonances séculaires des orbites moyennes

Sommaire

4.1 Position du problème	72
4.1.1 Tableau de la littérature des résonances luni-solaires	72
4.1.2 Vers une description de l'espace des phases $i - e$ en région MEO	77
4.2 Structure dynamique de la région MEO	80
4.2.1 Stabilité en temps long, chaos et transport	80
4.2.2 Temps de collision et chaos : application à Galileo	114
4.3 Chaos et transport	132
4.3.1 Transport diffusif	132
4.3.2 Transport à travers les résonances	134
4.3.3 Diffusion normale : application à Galileo	137
4.3.4 Diffusion anormale (possible) des satellites de navigation	149
4.4 Chaos et stochasticité	150
4.5 Conclusion	157

NOUS PRÉSENTONS UNE ÉTUDE DYNAMIQUE des orbites moyennes, et plus particulièrement pour un demi-grand axe variant entre 3 et 5 rayons terrestres. Dans cette région, les perturbations principales sont l'effet du J_2 et les potentiels extérieurs de troisième corps. Cette étude est à la fois analytique, semi-analytique et numérique. La région sondée couvre en particulier la région hôte des satellites de navigation, où l'extraordinaire richesse dynamique provient des résonances séculaires luni-solaires dont on procède maintenant à l'examen. Notre approche, basée sur des principes généraux de dynamique, nous semble une contribution nouvelle majeure pour expliquer les hausses d'excentricité constatées sur des courtes échelles de temps (de l'ordre du siècle typiquement). Sans la problématique récente des dangers inhérents aux débris spatiaux, le problème de la stabilité des orbites moyennes, et au delà, l'étude profonde du plan de phase $i - e$, serait sans aucun doute resté abandonné.

4.1 Position du problème

S. BREITER résume très bien la situation quant aux résonances luni-solaires [Bre01a] :

Forty years ago the artificial satellite theory boosted the progress of celestial mechanics. The main types of resonances which may occur in this problem were immediately recognized in that pioneering era: the critical inclination in the main problem, tesseral/sectorial resonances, and lunisolar resonances. The first two categories have attracted a lot of attention and each of them possess a vast bibliography. The more surprising is the fact that the problem of lunisolar resonances has remained seriously underrated. Quite possibly it was due to the lack of interest in the effects whose typical time scale may exceed decades or even centuries, but this situation have changed once we realized the dangers imposed by space debris.

Au moment où nous avons commencé l'étude des résonances luni-solaires, les résonances dites de *troisième corps* impliquant les corps perturbateurs de la Lune et du Soleil, la situation n'avait guère changé. De notre point de vue, les dernières idées fécondes pour ce problème étaient dues à T.ELY (idées qui, selon nous, n'ont pas eu l'écho mérité), dans les années 95 et dataient donc de près de 20 ans. La théorie était pourtant prête, et suffisamment mature, pour prolonger ces idées, mais étrangement elles sont restées sans vie. Cela est certainement imputable à l'échelle de temps longue associée à ces résonances. Sur le plan purement dynamique, nous pouvions noter l'absence d'un traitement unifié et global. La modélisation analytique de ce problème étant restée inachevée, les effets de ces résonances, qui concernent les « actions » inclinaison i et excentricité e , étaient peu cernés. C'est essentiellement ces manques qui ont motivé le début de nos investigations. Mais avant de les présenter, commençons par situer la littérature.

4.1.1 Tableau de la littérature des résonances luni-solaires

Les premiers travaux investiguant les effets gravitationnels de la Lune et du Soleil sur les éléments orbitaux datent très certainement de COOK [Coo62], dans le cadre des équations planétaires de LAGRANGE. Les deux papiers de S. HUGHES [Hug80, Hug81] ont procédé à une classification des résonances ψ , où l'argument ψ apparaissant dans la fonction perturbatrice est de la forme

$$\psi_{\mathbf{n}} = n_1\omega + n_2\Omega + n_3M + \mathcal{L}(\omega_{3c}, \Omega_{3c}, M_{3c}) \quad (4.1)$$

avec \mathcal{L} une fonction linéaire en les arguments des troisièmes corps. Certaines de ces résonances ne dépendent que de l'inclinaison. C'est le cas de la famille résonante

$$n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} = 0, \quad (4.2)$$

qui, sous l'hypothèse d'une variation angulaire dominée par l'effet du J_2 , se laisse exprimer comme

$$(n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} = 0) \Leftrightarrow (P_{\mathbf{n}}(i) = 0), \quad (4.3)$$

avec $P_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^2[i]$, polynôme de degré 2 [SM15]. L'expression exacte de P est

$$P_{\mathbf{n}}(i) = 5n_1 \cos^2(i) - 2n_2 \cos i - n_1. \quad (4.4)$$

INCLINAISONS RÉSONANTES i_*		
(n_1, n_2)	i_* (deg)	
(1, 1)	46.4	106.9
(2, 1)	56.1	111.0
(-1, 1)	73.2	133.6
(-2, 1)	69.0	123.9

TABLE 4.1 – Localisation des premières inclinaisons résonantes et indices résonants associés.

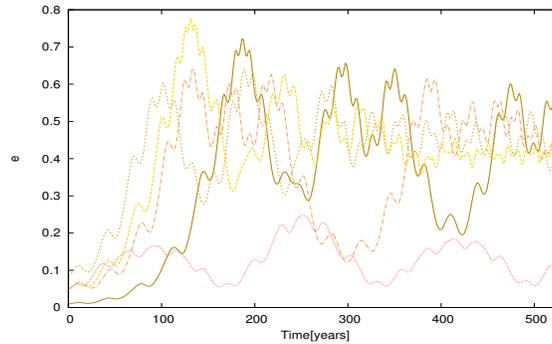


FIGURE 4.1 – Hausse de l'excentricité caractéristique de la région MEO.

Les racines de ce polynôme, *i.e* les inclinaisons résonantes i_* (pour $|n_1| \leq 2$ et $0 \leq n_2 \leq 2$) sont présentées dans le tableau 4.1. En particulier, notons que la résonance $(2, 1)$, *i.e* la résonance

$$2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0, \quad (4.5)$$

correspond précisément au voisinage de l'inclinaison nominale de certains satellites de navigation, à savoir la constellation européenne Galileo, soit 56° . Certains de nos développements seront dédiés à ce voisinage (*confer* les paragraphes 4.2.2 et 4.3.3). S. BREITER a discuté du rattachement de certaines résonances luni-solaires à certains modèles fondamentaux, mais ces développements ne concernent que les orbites basses [Bre99, Bre01a].

Concernant la dynamique de la région moyenne, certains travaux (essentiellement de nature numérique ou semi-numérique) ont souligné l'augmentation importante de l'excentricité sur des courtes échelles de temps (typiquement le siècle) et notamment le rôle principal joué par les perturbations résonantes de troisième corps [Ros08, DRP⁺11]. La figure 4.1 illustre de façon typique les évolutions temporelles de l'excentricité que l'on peut rencontrer en région MEO. Ces excentricités ont ici été obtenues pour une famille d'orbites dont l'excentricité initiale ne dépasse pas 0.1, l'une d'elles étant même quasi-circulaire. En particulier, notons que sur une échelle de temps courte (~ 130 ans), l'excentricité peut atteindre des valeurs proches de 0.8. Les orbites ont été propagées avec le modèle moyen de STELA et sous un modèle de force dynamique très simplifié : seuls les effets du J_2 et des troisièmes corps, développés tous deux à leur quadrupole (*i.e* à l'ordre 2), ont été pris en compte.

Dans [SYBC10, SYP15], les auteurs partagent un intérêt d'intersection non-vide avec les travaux et développements de F. DELEFLIE [DAR⁺]. Essentiellement, cela consiste en la recherche

et la définition de conditions initiales (ω, Ω) minimisant la hausse de l'excentricité (en ayant en mire la minimisation du risque de collision) pour des systèmes type GNSS, GPS et Galileo. La méthodologie numérique adoptée dans leurs travaux consiste en la production de cartes présentant la valeur maximale de l'excentricité en fonction des valeurs initiales des angles ω et Ω . Ces investigations, de nature numérique, ont été réalisées sur des horizons dynamiques voisins de 250 ans, un temps trop court pour cerner la véritable nature de la dynamique, comme nous le montrerons dans la section 4.2.2. Le but ultime de ces approches étant de définir des conditions initiales assurant ou excluant une hausse de l'excentricité sur l'échelle de temps sondée. Ces développements n'incluent pas (i) un traitement analytique de la résonance, en bonne et due forme, (ii) et sur le plan numérique/semi-numérique, ont totalement exclu l'aspect chaotique de la dynamique.

Les travaux de T. ELY [Ely96, EH97, Ely02] datant de la fin des années 90 sont à notre sens les plus féconds et ceux dont nous devons nous inspirer pour tout développement dynamique futur. Se basant sur une formulation moyennée des perturbations, T.ELY a localisé les centres de résonances et construit la forme normale résonante du système pour caractériser les amplitudes Δe et Δi dues aux résonances sous des hypothèses d'isolation. Notons que T.ELY n'a pas veillé à inclure la perturbation solaire et il s'est borné dans ses prémisses d'analyse de stabilité à des modèles à 2-DOF pour pouvoir y parvenir via des sections de POINCARÉ. Ayant localisé le squelette résonant, T.ELY a fortement suggéré numériquement la tendance de la dynamique à évoluer le long de ce réseau résonant, puisque « l'attraction d'une partie des trajectoires par les mouvements résonants est un phénomène générique pour les systèmes à plusieurs fréquences ¹ ».

Plus récemment, les travaux de S. STEFANELLI [SM15] se sont attardés en particulier sur la construction d'un modèle analytique hamiltonien pour les résonances du type

$$n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} \sim 0 \quad (4.6)$$

avec un intérêt particulier pour le couple $(n_1, n_2) = (2, 1)$. Même si l'auteur propose un modèle intégrable à 1-DOF ² permettant de larges excursions de l'excentricité (e peut varier jusqu'à 0.8 avec le modèle obtenu), il est entaché de plusieurs limitations. D'abord, (i) il est restreint par construction aux résonances du type $n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega}$, ce qui le limite par nature, ensuite (ii) les effets de la Lune ne sont pas considérés, cela fausse la hiérarchie fournie par la figure 2.2, et finalement (iii) un tel modèle intégrable ne pourra jamais expliquer les comportements chaotiques qui ont été, par nos outils variationnels du premier ordre, rapidement confirmés comme en atteste la figure 4.2.

Cette figure trace selon le même code couleur les FLI des orbites dont l'histoire de l'excentricité est montrée en figure 4.1. C'est donc visiblement à une approche plus générale, d'au moins 1.5-DOF, qu'il faut recourir. C'est à partir de ce moment, et sous cet argument de poids, que nous avons voulu rompre avec la tradition : nous voulions penser et tenter d'expliquer

1. V. ARNOLD, [Arn80], chapitre 4.

2. Rappelons le fait merveilleux que pour les systèmes conservatifs à 1-DOF, les courbes de niveau sont précisément les orbites du système. Ce fait fournit un « outil » pour l'étude de système à 1-DOF qui peuvent être riches s'ils dépendent de paramètres. Il est en effet très simple de *peindre* l'espace des phases de tels systèmes pour se faire une idée de leurs architectures : points d'équilibres, nature de l'équilibre, séparatrices, etc ; et cela sans même intégrer les équations du mouvement. On consultera [HD91] pour la présentation générale de cette méthode et [CDD94] pour une application de cette dernière à un cas de mécanique spatiale.

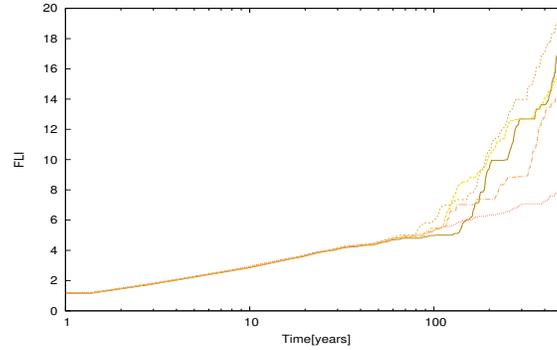


FIGURE 4.2 – Évolutions temporelles des indicateurs FLI attestant du chaos en région moyenne.

cette hausse de l'excentricité, non plus en termes de modèles intégrables, mais bien en termes de modèles non-intégrables et de propriétés géométriques (qu'il nous fallait alors trouver) de l'espace des phases.

Les travaux et développements récents de A. ROSENGREN [RARV15] sont bel et bien ceux qui n'ont pas ignoré³ les percées de T. ELY et ceux affichant la volonté de considérations chaotiques pour la dynamique en MEO. Même si le cadre analytique n'est pas abouti (une étude analytique des résonances n'est pas à proprement effectuée, l'effet perturbateur du Soleil n'est pas considéré, aucune forme normale résonante n'est construite), une moyennisation du potentiel lunaire est présentée faisant sourdre les résonances séculaires dues à la Lune. L'argument du périhélie n'apparaissant pas explicitement dans ce développement, il n'était donc pas nécessaire de formuler l'hypothèse simplificatrice de circularité de l'orbite lunaire, comme dans certains travaux passés [DM93, EH97]. L'auteur a ensuite confirmé le squelette résonant tracé par T. ELY dans le plan $i - e$, ainsi que son importance structurelle sur le plan évolutif. Pour cela, A. ROSENGREN a essentiellement utilisé des techniques de vue stroboscopique dans le plan de phase, sur des horizons dynamiques voisins de 500 ans. Ainsi, même si cela n'avait pas été formulé explicitement dans cet article, nous pouvions suspecter l'existence d'un mode de transport rapide affectant très fortement l'excentricité. Ce transport sera révélé plus en détails dans les paragraphes 4.2.1 et 4.3.3.

Introduisons maintenant le formalisme nécessaire pour des considérations analytiques plus précises.

La perturbation lunaire développée sous forme de série de FOURIER, dont les arguments dépendent du satellite et de la Lune [Hug80] est, pour des satellites n'excédant pas 1/10 de la distance Terre-Lune, bien approximée par son quadrupole [DM93]. Afin d'étudier les variations séculaires, les termes à courtes périodes du potentiel lunaire (ceux dépendant de l'anomalie du satellite et de la Lune) sont moyennisés. Les premiers termes séculaires de la perturbation lunaire admettent alors comme expression

$$\mathcal{R}_L = \sum_{m=0}^2 \sum_{s=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m,\pm s}^L \cos \psi_{2-2p,m,\pm s}^L \quad (4.7)$$

3. Ce sont les seuls travaux récents à citer T.ELY.

avec pour *angle critique*

$$\psi_{2-2p,m,\pm s}^L = (2-2p)\omega + m\Omega \pm s(\Omega_L - \pi/2) - y_s\pi, \quad (4.8)$$

et son *harmonique associée*

$$h_{2-2p,m,\pm s}^L = \frac{\mu_L a^2}{a_L^3 (1-e_L^2)^{3/2}} (-1)^{\lfloor m/2 \rfloor} \epsilon_m \frac{(2-s)!}{(2+m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,s,1}(i_L) H_{2,p,2p-2}(e) (-1)^{m+s} U_2^{m,\mp s}(\epsilon), \quad (4.9)$$

où m, s , and p sont des entiers, $\lfloor \bullet \rfloor$ est l'opérateur partie entière, et les quantités ϵ_m et y_s sont telles que

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 2 & \text{si } m \neq 0, \end{cases}$$

$$y_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ est pair,} \\ 1/2 & \text{si } s \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les éléments képlériens du satellite sont relatifs à l'équateur terrestre et nous notons par L les paramètres relatifs à la Lune (i_L et Ω_L sont mesurés par rapport au plan de l'écliptique), μ_L le produit de la masse de la Lune et de la constante newtonienne, et ϵ désigne l'obliquité de l'écliptique. Les quantités $F_{2,m,p}(i)$ and $F_{2,s,1}(i_L)$ sont les fonctions d'inclinaisons de KAULA [Kau66], $H_{2,p,2p-2}(e)$ le coefficient d'ordre 0 de HANSEN [Hug80], et $U_2^{m,\pm s}$ les fonctions de GIACAGLIA, nécessaires à cause des transformations utiles de changement de repères [Gia74] :

$$U_2^{m,\pm s} = \frac{(-1)^{m\mp s}}{(2\pm s)!} (\cos \epsilon/2)^{m\pm s} (\sin \epsilon/2)^{\pm s - m} \frac{d^{2\pm s}}{dZ^{2\pm s}} \{ Z^{2-m} (Z-1)^{2+m} \}, \quad (4.10)$$

où $Z = \cos^2 \epsilon/2$. La forme de la perturbation solaire est considérablement plus simple et elle s'écrit

$$\mathcal{R}_S = \sum_{m=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m}^S \cos \psi_{2-2p,m}^S \quad (4.11)$$

avec, pour angle critique,

$$\psi_{2-2p,m}^S = (2-2p)\omega + m(\Omega - \Omega_S), \quad (4.12)$$

et pour coefficient associé

$$h_{2-2p,m}^S = \frac{\mu_S a^2}{a_S^3 (1-e_S^2)^{3/2}} \epsilon_m \frac{(2-m)!}{(2+m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,m,1}(i_S) H_{2,p,2p-2}(e). \quad (4.13)$$

L'annulation temporelle des angles critiques conduit aux relations de résonance exacte. Pour la Lune, il vient

$$\dot{\psi}_n^L = (2-2p)\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} + n_3\dot{\Omega}_L = 0, \quad (4.14)$$

avec $n_1 = 2-2p$, $n_2 = m$ et $n_3 = \pm s$. Le taux de précession Ω_L est approximé par une valeur constante égale à -0.053 deg/jour. Puisque $\dot{\Omega}_S \equiv 0$, il s'en suit qu'une résonance séculaire due au Soleil s'écrit :

$$\dot{\psi}_m^S = m_1\dot{\omega} + m_2\dot{\Omega} = 0, \quad (4.15)$$

avec encore $m_1 = 2 - 2p$ et $m_2 = m$. Les conditions de résonances (4.14) et (4.15) se laissent plus facilement exprimer par l'existence d'un vecteur \mathbf{k} à coefficients entiers dans \mathbb{Z}^3 tel que

$$\langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0 \quad (4.16)$$

où $\theta = (\omega, \Omega, \Omega_L)$. Pour les résonances impliquant seulement le Soleil, k_3 est toujours nul.

Les centres des résonances se caractérisent explicitement en fonction de l'excentricité et de l'inclinaison quand les dérivés des angles $\dot{\omega}$ et $\dot{\Omega}$ sont approximés par les dérivés dues à l'effet du J_2 , hypothèse raisonnable que nous effectuons maintenant (confer la figure 2.2). Quand il en est ainsi, la condition dans (4.16) se réexprime comme

$$\left(\dot{\psi}_{\mathbf{k}} \equiv \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0 \right) \Leftrightarrow (f_{\mathbf{k}}(a, e, i) = 0). \quad (4.17)$$

La fonction $f_{\mathbf{k}}(a, e, i)$ est une fonction paramétrée par le vecteur à coefficients entiers \mathbf{k} identifiant la résonance luni-solaire considérée. Elle est aussi paramétrée par le demi-grand axe a , qui est une intégrale première puisque l'anomalie M , ou toute autre variable canoniquement conjuguée, est absente pour le moment des perturbations. Pour pointer ces deux paramètres explicitement, nous écrivons $f_{\mathbf{k}}(a, e, i)$ comme $f_{\mathbf{k}, a_*}(e, i)$. Les centres des résonances $\mathcal{C}_{\mathbf{k}, a_*}$ sont alors définis comme les courbes

$$\mathcal{C}_{\mathbf{k}, a_*} = \left\{ (e, i) \mid \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle \equiv k_1 \dot{\omega} + k_2 \dot{\Omega} + k_3 \dot{\Omega}_L = 0 \right\}, \quad (4.18)$$

où $f_{\mathbf{k}, a_*}$ est explicitement donnée par

$$f_{\mathbf{k}, a_*} = k_1 \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{r}{a_*} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) (1 - e^2)^{-2} - k_2 \frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{r}{a_*} \right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2} + k_3 \dot{\Omega}_L. \quad (4.19)$$

Sur la figure 4.3, nous avons tracé ces fonctions $f_{\mathbf{k}, a_*}$ pour des ordres peu élevés de résonances ($|k_i| \leq 2$) et 4 valeurs de demi-grand axes couvrant l'intervalle $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$ de la région moyenne. Ce genre de squelette résonant avait déjà été livré sous cette forme, pour la première fois, dans [EH97] bien que le formalisme n'avait pas été présenté ainsi (et certaines courbes résonantes étaient manquantes). L'organisation spatiale des centres de résonances, au fur et à mesure que a_* croît dans \mathcal{I} , suggère fortement une superposition des résonances à la CHIRIKOV, particulièrement dense dans l'intervalle compris entre les résonances ne dépendant que de l'inclinaison. Ce squelette résonant a été traduit en termes des actions canoniques de DELAUNAY, $G - H$, dans la figure 4.4. Les résonances du tableau 4.1 ne dépendant que de l'inclinaison y sont consignées par un trait gras. Bien que dynamiquement plus pertinentes, nous privilégierons dans la suite du document une lecture selon le plan $i - e$, des variables plus facilement « interprétables ».

4.1.2 Vers une description de l'espace des phases $i - e$ en région MEO

L'originalité de notre démarche (et de nos résultats) repose sur une volonté de rompre avec l'esprit des modèles précédents : nous voulons penser l'augmentation de l'excentricité via des modèles non-intégrables et en termes de propriétés géométriques de l'espace des phases, synonyme de contraintes éventuelles sur des propriétés de transport, que nous voulons révéler. Outre l'originalité, cette approche a l'avantage de cerner dynamiquement le problème sans formuler de loi de variation de l'excentricité qui, en plus de devenir généralement singulière au

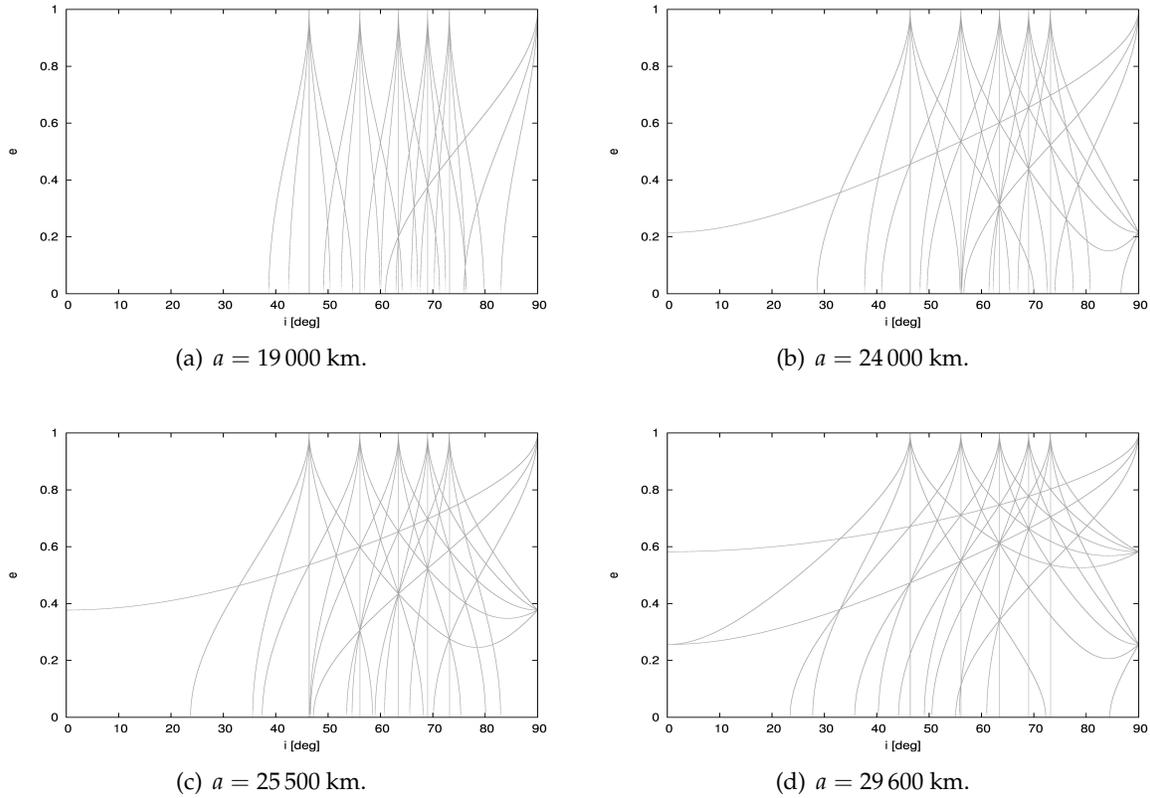


FIGURE 4.3 – Localisation dans le plan $i - e$ des résonances séculaires luni-solaires quand le paramètre $a = a_*$ croît dans $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$. Ces courbes correspondent aux valeurs des couples $i - e$ pour lesquelles $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0$, avec $\theta = (\omega, \Omega, \Omega_M)$ et $|k_i| \leq 2$. Ces courbes forment le squelette résonant en région moyenne.

voisinage des résonances, est obtenue par méthodes perturbatives : une telle formulation est donc d'emblée limitée temporellement parlant, ce qui est frustrant puisque nous souhaitons cerner les propriétés évolutives du mouvement en temps long.

Ce sont encore les idées de T.ELY qui nous ont inspiré. C'est pourquoi nous voulons encore une fois signaler l'importance de ces travaux pour l'avancée de notre travail. Notre point de départ a été extrêmement simple et naturel. Il se résume en une phrase sur le plan analytique : quitte à construire la forme normale résonante, en palliant aux limites de T.ELY, et à la réduire classiquement sous la forme d'un modèle fondamental, nous pouvons calculer l'amplitude des résonances lunisolaires sous des hypothèses d'isolement pour les résonances de la figure 4.3. Cela revient à découpler la dynamique dans chaque plan de coordonnées conjuguées. De la superposition à la CHIRIKOV suspectée (que nous infirmerons ou prouverons donc) en raison de la proximité des centres de résonances, nous pourrions alors espérer fournir un scénario quant à la disparition de courbes invariantes, s'accompagnant ainsi vraisemblablement d'un transport, alors rendu possible, dans l'espace des phases. C'est cette idée et cette méthodologie que nous avons suivies sur le plan analytique, en veillant à incorporer les effets de la Lune *et* du Soleil

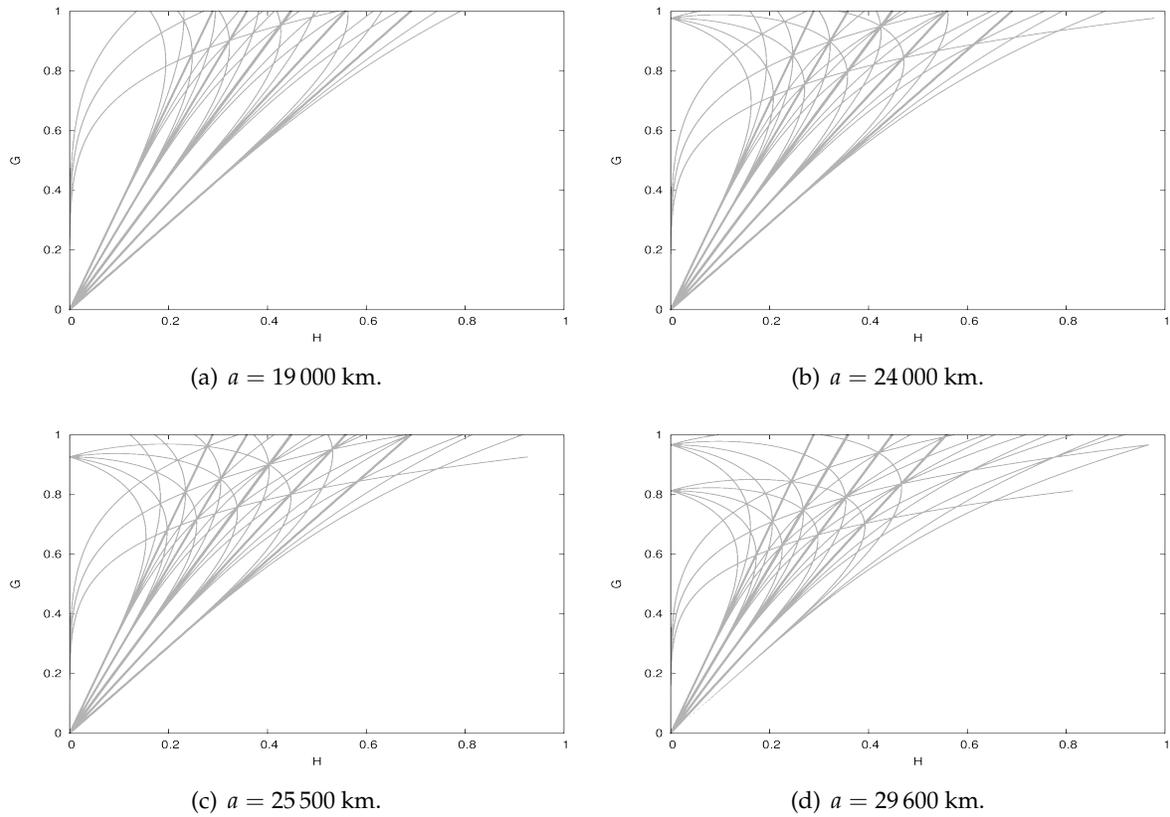


FIGURE 4.4 – Localisation dans le plan $G - H$ des résonances séculaires luni-solaires quand le paramètre $a = a_*$ croît dans $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$. Ces courbes correspondent aux valeurs des couples $G - H$ pour lesquelles $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0$, avec $\theta = (\omega, \Omega, \Omega_M)$ et $|k_i| \leq 2$. Ces courbes forment le squelette résonant en région moyenne.

dans la construction de la forme normale résonante⁴. La mise en œuvre du principe de CHIRIKOV pour ce problème présente un intérêt au moins double : (i) d’abord, il est nouveau pour ce problème et présente donc un intérêt en soi, en plus de quantifier l’étendue des domaines résonants fournissant des informations structurales de l’espace des phases $i - e$ et (ii) ensuite, et au meilleur de notre connaissance, ce principe n’a jamais été appliqué à un problème réel (physique) à plus de 2 degrés de liberté, comme l’écrit A. MORBIDELLI dans [MG96] :

As a matter of fact, all applications of CHIRIKOV criterion of resonance overlapping have been carried on with success only on two degrees of freedom systems, where good results can be achieved at low to moderate order. To our knowledge CHIRIKOV criterion has never been applied with realistic results on systems with larger number of degrees of freedom.

D’un point de vue méthodologique, le test de ce critère reste l’une des premières choses à faire lorsque l’on traite de problèmes résonants sur le plan de la stabilité structurale. La pertinence (le caractère réaliste) de ce critère vis à vis de ce problème est donc d’un intérêt capital pour « gagner en intuition physique » sur ce problème. Nous avons donc, en vue d’explorer

4. T. ELY ne considère que la Lune dans [EH97], L. STEFANELLI ne considère que le Soleil dans [SM15].

la structure de l'espace des phases $i - e$, suivi cette méthodologie. Les résultats prescrits par cette analyse analytique ont été soigneusement confrontés à une analyse semi-analytique de la stabilité du plan de phase, en réalisant un atlas de stabilité de la région moyenne. Nous avons pour la première fois pu révéler, grâce à la puissance de la théorie semi-analytique, l'extraordinaire richesse de cet espace des phases, en révélant l'étendue et l'organisation topologique de ce chaos. La mise en pratique et la présentation détaillée des résultats de ce programme visant à décrire le plan $i - e$, et en mire d'expliquer les hausses d'excentricité souvent pointées dans la littérature, sont l'objet de la prochaine section.

4.2 Structure dynamique de la région MEO

Nous présentons dans un premier temps les résultats analytiques et semi-analytiques visant à décrire le plan de phase $i - e$ de la région des orbites moyennes. Nous avons montré en particulier comment la connaissance de l'organisation spatiale des résonances et du chaos pouvait aider à cerner les propriétés évolutives de l'excentricité, en révélant des routes préférentielles de transport dans l'espace des phases. Ces résultats, décrivant la structure dynamique de la région MEO, sont ensuite complétés sur plusieurs points :

1. l'analyse de stabilité semi-analytique est complétée par une étude davantage ciblée sur les satellites de type Galileo⁵, *i.e* au voisinage de $a \sim 29\,600$ km
2. la réponse chaotique de la dynamique aux différentes phases initiales du système est investiguée, en présentant des cartes de stabilité dans différents plans de phase,
3. les temps de collision T_c , correspondant au temps nécessaire après la date initiale pour une rentrée atmosphérique, sont quantifiés.

4.2.1 Stabilité en temps long, chaos et transport

5. Le volume de l'espace des phases sondé est restreint au voisinage des paramètres nominaux des satellite type Galileo.

The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport

Jérôme Daquin^{1,3} · Aaron J. Rosengren² · Elisa Maria Alessi² · Florent Deleffie³ · Giovanni B. Valsecchi^{2,4} · Alessandro Rossi²

Received: 22 July 2015 / Revised: 11 September 2015 / Accepted: 21 November 2015
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2016

Abstract It has long been suspected that the Global Navigation Satellite Systems exist in a background of complex resonances and chaotic motion; yet, the precise dynamical character of these phenomena remains elusive. Recent studies have shown that the occurrence and nature of the resonances driving these dynamics depend chiefly on the frequencies of nodal and apsidal precession and the rate of regression of the Moon's nodes. Woven throughout the inclination and eccentricity phase space is an exceedingly complicated web-like structure of lunisolar secular resonances, which become particularly dense near the inclinations of the navigation satellite orbits. A clear picture of the physical significance of these resonances is of considerable practical interest for the design of disposal strategies for the four constellations. Here we present analytical and semi-analytical models that accurately reflect the true nature of the resonant interactions, and trace the topological organization of the manifolds on which the chaotic motions take place. We present an atlas of FLI stability maps, showing the extent of the chaotic regions of the phase space, computed through a hierarchy of more realistic, and more complicated, models, and compare the chaotic zones in these charts with the analytical estimation of the width of the chaotic layers from the heuristic Chirikov resonance-overlap criterion. As the semi-major axis of the satellite is receding, we observe a transition from stable Nekhoroshev-like structures at three Earth radii, where regular orbits dominate, to a Chirikov regime where resonances overlap at five Earth radii. From a numerical estimation of the Lyapunov times, we find that many of the inclined, nearly circular orbits of the navigation satellites are strongly chaotic and that their dynamics are unpredictable on decadal timescales.

Keywords Medium-Earth orbits · Secular dynamics · Orbital resonances · Chaos · Fast Lyapunov indicators (FLI) · Stability maps · Lunisolar resonances · GNSS

✉ Jérôme Daquin
jerome.daquin@imcce.fr

¹ Thales Services, 3 Impasse de l'Europe, 31400 Toulouse, France

² IFAC-CNR, Via Madonna del Piano 10, 50019 Sesto Fiorentino, FI, Italy

³ IMCCE/Observatoire de Paris, Université Lille1, 1 Impasse de l'Observatoire, 59000 Lille, France

⁴ IAPS-INAF, Via Fosso del Cavaliere 100, 00133 Rome, Italy

In contrast to a widespread cliché, the satellite problems still require the research on the level more fundamental than just tracing the microscopic influence of yet another tesseral harmonic. (Breiter, op. cit., p. 90)

(Sławomir Breiter, 2001)

1 Introduction

Among the earliest problems in Astrodynamics were, quite naturally, those concerned with the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the oblate Earth; and indeed their solutions in the hands of Brouwer, Garfinkel, Kozai, and others were intimately bound with the rigorous development of artificial satellite theory (Jupp 1988). These considerations placed emphasis on the construction of increasingly more accurate analytical theories, in the style of our forebears, valid in idealized situations or on short mission timescales. Such an approach was of course justified by the need of astrodynamical practice, but in recent years Astrodynamics has had to face new problems concerning the long-term motion of space debris which forced it to abandon the somewhat utilitarian investigations mentioned above. This renaissance has been spurred on not only by the sobering implications of space debris, but also by the ability to perform computer simulations of ever-greater sophistication and by the realization that chaos has played a fundamental role in the dynamical evolution of the Solar System (Morbidegli 2002).

The proliferation of space debris orbiting Earth has stimulated a deeper understanding of the dynamical environments occupied by artificial satellites (Breiter 2001), and the smaller disturbing forces arising from lunisolar gravity have become particularly interesting now (Breiter 1999). For near-Earth satellites, the perturbing effects of the Sun and Moon, often assumed negligible in comparison to that of the Earth's oblateness, may have small consequences early but profound consequences late. The subtle effects that accumulate over long periods of time are known as resonances and while their basic theory was developed during the early Sputnik era (Upton et al. 1959), a detailed and systematic investigation of their dynamical effects is hitherto missing. The problem is particularly timely since, in the past decade, a number of numerical studies have shown that the medium-Earth orbits (MEOs) and graveyard regions of the navigation satellites are unstable (q.v. Deleflie et al. 2011, and references therein). This instability manifests itself as an apparent chaotic growth of the eccentricity on decadal to centennial timescales.

To identify the underlying dynamical mechanism responsible for the noted instability in the MEO region, Rosengren et al. (2015) investigated the main resonances that organize and control the long-term dynamics of navigation satellites. They confirmed the complex resonant structure identified nearly twenty years ago by Ely and Howell (1997), which has been unjustifiably overlooked by the space debris community, and showed that these lunisolar resonant harmonics together with those studied by Delhaise and Morbidelli (1993) interact to produce a dense stochastic web in inclination and eccentricity phase space. The close spacing of the resonant harmonics suggested the potential for significant chaos in the orbital eccentricities and inclinations. This was partially demonstrated numerically through stroboscopic Poincaré maps, showing these resonances to be the preferential routes for transport in phase space, by which orbits can explore large regions jumping from one resonance domain to another (Rosengren et al. 2015). The nature of the chaotic layer, however, was not explored.

The present investigation is a first attempt towards understanding the chaotic structure of the phase space near lunisolar secular resonances. This is studied analytically by examining the width of the chaotic layer from the overlap of neighboring resonances (Chirikov 1979;

Mardling 2008) and numerically using the fast Lyapunov indicator (FLI) (Froeschlé et al. 1997). To cast light on the speculations made in Rosengren et al. (2015) and to gain insight into the structure, extent, and evolution of the chaotic regions, we compute FLI stability maps using a hierarchy of more realistic dynamical models. We make a detailed comparison between the analytical and numerical results, and test the predictions of the heuristic Chirikov criterion in systems of more than two degrees of freedom.

2 The Chirikov resonance-overlap criterion

The long-term evolution of resonant orbits can be quite complex, and what has become clear over the past few decades is that the phenomenon of chaos is tied fundamentally to the dynamics of resonances (Chirikov 1979; Haller 1999; Morbidelli 2002). As an instance we can mention the problem of motion of asteroids in the main belt between Mars and Jupiter on which so much of our astronomical knowledge is based; and here the light thrown by purely dynamical considerations upon, for example, the problem of Kirkwood's gaps in the distribution of the asteroidal semi-major axes reveals the sorts of resonant interactions that have helped to shape the Solar System. The physical basis of chaos and instability in nearly integrable, multidimensional Hamiltonian systems, of which the Sun-Jupiter-Saturn-Asteroid four-body problem is one example, is the overlapping of nonlinear resonances (Chirikov 1979).

The overlapping of resonances as the mechanism of onset and evolution of chaos has been known since the late 1960s. This important result from nonlinear dynamics can be made intelligible without entering into the lengthy and subtle mathematical discussion demanded by an exhaustive treatment of the subject (Mardling 2008). Astronomers long ago noted the connection between the dynamics of a single (isolated) resonance and the libration of a mathematical pendulum. An expansion of the Hamiltonian around the resonant location and a canonical transformation reduces the Hamiltonian to a pendulum-like system. The resonance angle librates when the frequencies are nearly commensurate; the domain or width of the resonance being the distance from exact resonance to the separatrix (a homoclinic curve separating the domain of circulation and libration). Whereas a single resonance exhibits a well-behaved, pendulum-like motion, when the system is moving within a region of the phase space where two or more resonances are present, the single resonance theory breaks down and any attempt to describe the interaction rigorously is bound to fail. The nature of this breakdown manifests itself in numerical solutions as zones of chaotic motion near the boundary of each interacting resonance. The Chirikov resonance-overlap criterion simply states that chaos will ensue if two dynamically relevant harmonic angles, when neglecting the interaction between them, are both analytically calculated to be librating in the same region of phase space (Chirikov 1979).

2.1 Location of lunisolar resonance centers

Our aim here, following Ely and Howell (1997) and Rosengren et al. (2015), is to identify the significant resonances so that we can apply the resonance-overlap criterion and analytically determine stability boundaries. We focus on the MEO region between roughly three and five Earth radii and, as a result, are permitted to make certain approximations and assumptions. There are two principal classes of resonances which affect the motion of satellites in these orbital altitudes: tesseral resonances, where the orbital periods (or mean motions) of the satellites are commensurable to the Earth's rotation rate (Lane 1988; Celletti and Galeš 2014),

and lunisolar secular resonances, which involve commensurabilities amongst the slow frequencies of orbital precession of a satellite and the perturbing body (Ely and Howell 1997). The dynamical system with tesseral, zonal, and lunisolar perturbations is, however, characterized by two different timescales and two independent modes. Consequently, we focus here only on the resonant effects of secular origin, which dominate the eccentricity and inclination evolution on long timescales (Lithwick and Wu 2011; Batygin et al. 2015).

The analytical methodology for computing the lunisolar resonant effects is based on a theoretical series development of the lunar and solar disturbing functions (the negative potential functions of the perturbing accelerations). These harmonic series expansions are expressed most simply, in their dependence on the orbital elements, when the latter are defined with respect to the ecliptic plane for the Moon and with respect to the equatorial plane for the satellite and the Sun (Hughes 1980). For our purposes, we can truncate these series to second order in the ratio of semi-major axes, so that the lunar and solar potentials are approximated by quadrupole fields. In the secular approximation, short-periodic terms which depend on the fast orbital phases (i.e., the mean anomalies of both the satellite and the perturbing bodies) can be readily averaged over and dropped from the disturbing functions (Arnold et al. 2006).

The secular and quadrupole order of approximation for the lunar disturbing function expansion follows from Lane (1989) and has the form¹

$$\mathcal{R}_M = \sum_{m=0}^2 \sum_{s=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m,\pm s}^M \cos \Phi_{2-2p,m,\pm s}^M, \tag{1}$$

with *harmonic angle*

$$\Phi_{2-2p,m,\pm s}^M = (2 - 2p)\omega + m\Omega \pm s(\Omega_M - \pi/2) - y_s\pi, \tag{2}$$

and associated *harmonic coefficient*

$$h_{2-2p,m,\pm s}^M = \frac{\mu_M a^2}{a_M^3 (1 - e_M^2)^{3/2}} (-1)^{\lfloor m/2 \rfloor} \times \varepsilon_m \frac{(2 - s)!}{(2 + m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,s,1}(i_M) H_{2,p,2p-2}(e) (-1)^{m+s} U_2^{m,\mp s}(\epsilon), \tag{3}$$

where m , s , and p are integers, $\lfloor \cdot \rfloor$ is the floor operator, and the quantities ε_m and y_s are such that

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0, \\ 2 & \text{if } m \neq 0, \end{cases}$$

$$y_s = \begin{cases} 0 & \text{if } s \text{ is even,} \\ 1/2 & \text{if } s \text{ is odd.} \end{cases}$$

The semi-major axis a , eccentricity e , inclination i , argument of perigee ω , and longitude of ascending node Ω are the satellite's orbital elements relative to the Earth's equator. The subscript M refers to the Moon's orbital parameters (i_M and Ω_M are measured relative to the ecliptic plane), μ_M is the Newtonian gravitational constant times the Moon's mass, and ϵ is the obliquity of the ecliptic. The quantities $F_{2,m,p}(i)$ and $F_{2,s,1}(i_M)$ are the Kaula inclination functions (Kaula 1966), $H_{2,p,2p-2}(e)$ is the zero-order Hansen coefficient $X_0^{2,2-2p}(e)$

¹ Celletti et al. (2015) presents a detailed proof of Lane's mixed-reference-frame expansion of the lunar disturbing function (Lane 1989), correcting a subtle error that appears therein. Note that here, the disturbing function is cast in a particularly compact and transparent form, so that the additional quantity ε_s (analogous to ε_m) and the factor 1/2, appearing in Lane (1989), disappear from the expression for the harmonic coefficient.

(Hughes 1980), and $U_2^{m,\pm s}$ is the Giacaglia function, required for the mixed-reference-frame formalism (Giacaglia 1974):

$$U_2^{m,\pm s} = \frac{(-1)^{m\mp s}}{(2 \pm s)!} (\cos \epsilon/2)^{m\pm s} (\sin \epsilon/2)^{\pm s - m} \frac{d^{2\pm s}}{dZ^{2\pm s}} \{Z^{2-m}(Z-1)^{2+m}\}, \quad (4)$$

where $Z = \cos^2 \epsilon/2$. Note that the expansion (1) is valid for arbitrary inclination and for any eccentricity $e < 1$, and, moreover, this formulation allows us to consider the lunar inclination as a constant and the longitude of the ascending node of the Moon's orbit as a linear function of time (qq.v. Lane 1989; Hughes 1980).

The form of the solar disturbing function is considerably simpler, with the secular and quadrupole order of approximation following from Kaula's classical spherical harmonic expansion:

$$\mathcal{R}_S = \sum_{m=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m}^S \cos \Phi_{2-2p,m}^S, \quad (5)$$

with harmonic angle

$$\Phi_{2-2p,m}^S = (2 - 2p)\omega + m(\Omega - \Omega_S), \quad (6)$$

and associated harmonic coefficient

$$h_{2-2p,m}^S = \frac{\mu_S a^2}{a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} \varepsilon_m \frac{(2 - m)!}{(2 + m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,m,1}(i_S) H_{2,p,2p-2}(e). \quad (7)$$

Here equatorial elements are used for both the satellite and the Sun. The apparent orbit of the Sun can be considered, for all practical purposes, as Keplerian.

A lunar secular resonance occurs when a specific linear combination of the averaged precession frequencies of the angles appearing Eq. (1) is zero. That is,

$$\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s} = (2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} \pm s\dot{\Omega}_M \approx 0. \quad (8)$$

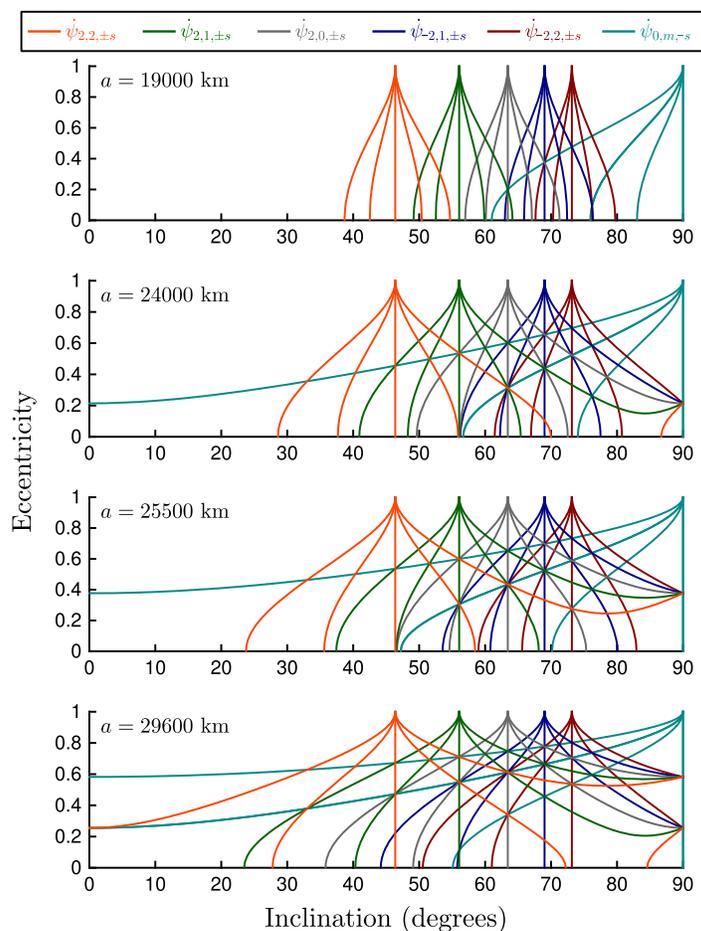
For the Moon, the rate of change of Ω_M , due to the perturbations of the Sun, is approximately -0.053 degrees/day. Since $\dot{\Omega}_S \equiv 0$, it follows that secular resonances of the solar origin are characterized by the simpler relation

$$(2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} \approx 0. \quad (9)$$

Under these approximations, the occurrence and nature of the secular resonances driving the dynamics depend only on the frequencies of nodal and apsidal precession and the rate of regression of the Moon's nodes. The Moon's argument of perigee does not explicitly appear in the expansion: this important result does not require the additional assumption made by previous researchers (Delhaise and Morbidelli 1993; Ely and Howell 1997) that the Moon's orbit be circular.

For the medium-Earth orbits considered here (i.e., semi-major axes between three and five Earth radii), the oblateness effect is at least an order of magnitude larger than that of lunisolar gravity (Ely and Howell 1997). We are therefore permitted in the first approximation to neglect the changes in ω and Ω from lunisolar perturbations in order to make a more efficient mathematical treatment of the problem possible without at the same time deviating too drastically from the actual conditions prevailing in the system. The secular rates of change of

Fig. 1 The location of resonance centers of the form $\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s} = (2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} \pm s\dot{\Omega}_M = 0$, where only the effects of the J_2 perturbation on ω and Ω have been considered (adapted from Rosengren et al. 2015). These resonances form the dynamical backbone of the phase space, organizing and controlling the long-term orbital motion of MEO satellites



a satellite’s argument of perigee and longitude of ascending node caused by the J_2 harmonic are such that (Cook 1962)

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2}, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

where R is the mean equatorial radius of the Earth and n is the satellite’s mean motion. As the semi-major axis is constant after averaging, Eqs. (8)–(10) define analytical curves of lunisolar secular resonances in the inclination and eccentricity phase space (Fig. 1). It is particularly noteworthy that the solar resonances and the lunar resonance with $s = 0$, both occurring at 46.4° , 56.1° , 63.4° , 69.0° , 73.2° and 90° , are independent of the orbit eccentricity (Cook 1962; Hughes 1980); these inclination-dependent-only resonances are intimately related to the critical inclination problem (q.v. Jupp 1988). Each of the critical inclinations split into a multiplet-like structure of lunar resonance curves corresponding to $s \in \{1, 2\}$, emanating from unity eccentricity. As the semi-major axis of the satellite is receding from three to five Earth radii, the resonance curves began to intersect indicating locations of multiple resonances, where two or more critical arguments have vanishing frequencies. The complex web of intersecting lines suggests the potential for chaos and large excursions in the eccentricity, on account of the resonance-overlap criterion.

2.2 A measure of the resonant islands

Each of the resonances in Fig. 1 determines its own domain in the phase space—the resonance width (Garfinkel 1966; Lane 1988; Breiter 2003). Based on the isolated resonance hypothesis, we derive here a measure of the libration islands, expressed in terms of the Delaunay and Keplerian variables. The former set of canonical variables are the most frequently employed in astronomical perturbation methods, and allow us to appeal to the Hamiltonian formalism. The conjugate coordinates are the Keplerian angles M , ω , and Ω , and the conjugate momenta are functions of the orbital elements a , e , and i , as follows:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & l &= M, \\ G &= L\sqrt{1 - e^2}, & g &= \omega, \\ H &= G \cos i, & h &= \Omega, \end{aligned} \tag{11}$$

in which μ denotes the Earth's gravitational parameter.

We take the averaged Hamiltonian \mathcal{H} to include the second zonal harmonic of the Earth's gravitational potential and the lowest-order term, i.e., the second harmonic, in the expansion of each of the solar and lunar disturbing functions:

$$\mathcal{H}(G, H, g, h, t; L) = \mathcal{H}_{\text{kep}} + \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_M + \mathcal{H}_S, \tag{12}$$

where $\mathcal{H}_{\text{kep}} = -\mu^2/2L^2$ is the Kepler Hamiltonian, which depends only on the mean semi-major axis, treated as a parameter (M is a cyclic variable and consequently a is constant), \mathcal{H}_{J_2} is the classical Hamiltonian for the averaged oblateness perturbation (Breiter 2001)

$$\mathcal{H}_{J_2}(G, H; L) = \frac{J_2 R^2 \mu^4}{4L^3} \frac{G^2 - 3H^2}{G^5}, \tag{13}$$

$\mathcal{H}_M(G, H, g, h, t; L) = -\mathcal{R}_M$, and $\mathcal{H}_S(G, H, g, h, t; L) = -\mathcal{R}_S$, given by Eqs. 1 and 5, respectively. Equation 12 is a non-autonomous Hamiltonian of two degrees of freedom, depending periodically on time through the Moon's nodal motion. In order to render the Hamiltonian autonomous, we extend the phase space to three degrees of freedom by introducing the canonical variables (Γ, τ) , such that $\dot{\tau} \equiv \partial\mathcal{H}/\partial\Gamma = \dot{\Omega}_M$, where the new Hamiltonian (without the Keplerian part) takes the form

$$\mathcal{H}(G, H, \Gamma, g, h, \tau; L) = \mathcal{H}^{\text{sec}}(G, H; L) + \mathcal{H}^{\text{lp}}(G, H, g, h, \tau; L) + \dot{\Omega}_M \Gamma, \tag{14}$$

in which

$$\mathcal{H}^{\text{sec}}(G, H; L) = \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_M^{\text{sec}} + \mathcal{H}_S^{\text{sec}}, \tag{15}$$

$$\mathcal{H}^{\text{lp}}(G, H, g, h, \tau; L) = \mathcal{H}_M^{\text{lp}} + \mathcal{H}_S^{\text{lp}}. \tag{16}$$

Secular perturbations due to the Moon and the Sun are related to terms with $2 - 2p = 0$, $m = 0$, and $s = 0$; that is, $\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s} = 0$. Long-periodic lunisolar perturbations are connected with $\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s} \neq 0$.

Introducing the frequency vector $\dot{\Theta} = (\dot{g}, \dot{h}, \dot{\tau})$, the lunisolar resonances, Eqs. 8 and 9, may be summarized by the existence of a vector $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_\star^3$ such that

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\Theta} = n_1 \dot{g} + n_2 \dot{h} + n_3 \dot{\tau} \approx 0. \tag{17}$$

In order to study each resonance, we treat them in isolation and introduce new action-angle variables, appropriate to the resonance involved, by means of the canonical unimodular transformation (linear transformation belonging to $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$). The non-null vector \mathbf{n} has at

most two zero components, and depending on the case where $n_1 = 0$ or $n_2 = 0$, we can introduce the resonance angle $\sigma \equiv n_1g + n_2h + n_3\tau$ through the following unimodular transformations:

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ 0 & n_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ 0 & 0 & n_2^{-1} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

The action of \mathfrak{T}_i on Θ gives $(\mathfrak{T}_i \cdot \Theta^\top)_i = \sigma, i \in \{1, 2\}$, where $(\mathfrak{T}_i \cdot \Theta^\top)_i$ denotes the i -th components of the vector $\mathfrak{T}_i \cdot \Theta^\top \in \mathbb{R}^3$. To keep the system canonical, new actions $\Lambda \in \mathbb{R}^3$ are introduced as

$$\Lambda = \mathfrak{T}_i^{-\top} \cdot (G, H, \Gamma)^\top, \quad (19)$$

where $\mathfrak{T}_i^{-\top}$ denotes the inverse transpose of \mathfrak{T}_i . These two transformations lead to the new set (Λ, σ) of action-angle variables. Using \mathfrak{T}_1 , we have

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= n_1^{-1}G, & \sigma_1 &\equiv \sigma = n_1g + n_2h + n_3\tau, \\ \Lambda_2 &= -n_2G + n_1H, & \sigma_2 &= n_1^{-1}h, \\ \Lambda_3 &= -n_1^{-1}n_3G + \Gamma, & \sigma_3 &= \tau, \end{aligned} \quad (20)$$

and using \mathfrak{T}_2 gives

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= G - n_1n_2^{-1}H, & \sigma_1 &= g, \\ \Lambda_2 &= n_2^{-1}H, & \sigma_2 &\equiv \sigma = n_1g + n_2h + n_3\tau, \\ \Lambda_3 &= -n_3H + n_2\Gamma, & \sigma_3 &= n_2^{-1}\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

In either case, under the isolated resonance hypothesis, the Hamiltonian, Eq. (14), expressed in terms of the new variables (20 or 21) and neglecting the constant terms, reduces to a single degree of freedom with the resonant angle σ and its conjugated action. Denoting these by $(X, x \equiv \sigma)$, the new Hamiltonian has the simple form

$$\mathcal{H} = f_0(X) + f_1(X) \cos(x + \rho), \quad (22)$$

with

$$\begin{cases} f_0(X) = \mathcal{H}^{\text{sec}}(X) \\ f_1(X) = -h_n(X), \end{cases} \quad (23)$$

where ρ is a constant phase, \mathcal{H}^{sec} is given by Eq. (15), and h_n is the harmonic coefficient in the lunar and solar disturbing function expansions, associated with the harmonic angle which is in resonance. For the secular resonances with $n_3 \neq 0$, $h_n \equiv h_{2-2p,m,\pm s}^M$, as given by Eq. (3). For the lunisolar resonances where $n_3 \equiv 0$,²

$$(h_n)^2 = (h_{2-2p,m,0}^M)^2 + (h_{2-2p,m}^S)^2 + 2(h_{2-2p,m,0}^M)(h_{2-2p,m}^S) \cos(m\Omega_S). \quad (24)$$

Equation 22 is the familiar form for the Hamiltonian when only one critical term is present (Garfinkel 1966; Lane 1988; Breiter 2003). An expansion of the Hamiltonian around the resonant location X_\star further reduces it to a pendulum-like system, which provides the

² Note that this refinement was not taken into account in Ely and Howell (1997) and is more suitable for the calculation of the widths for the inclination-dependent-only resonances, where solar perturbations play a non-negligible role (see Appendix 2).

calculation of the amplitude of the libration region around the resonance.³ Expanding \mathcal{H} in a Taylor series about X_* , neglecting terms of $\mathcal{O}((X - X_*)^3)$, and dividing through by $-\partial^2\mathcal{H}^{\text{sec}}/\partial X^2|_{X=X_*}$, gives

$$\mathcal{H}(I, x) = -\frac{1}{2}I^2 + \nu \cos(x + \tilde{\rho}), \tag{25}$$

where $I = X - X_*$ and

$$\nu = \left| \frac{h_n(X_*)}{\partial^2\mathcal{H}^{\text{sec}}/\partial X^2|_{X=X_*}} \right|. \tag{26}$$

It should be noted that this last division changes the physical timescale. In this form, the maximum excursion in the action, ΔI , measured from the line $I = 0$ to the extreme point of the separatrix (the resonance half-width), is given by

$$\Delta I = 2\sqrt{\nu}. \tag{27}$$

The width can be expressed in terms of the Delaunay variables using the appropriate transformation, \mathfrak{T}_1 or \mathfrak{T}_2 . It turns out that both transformations, while formally needed, actually lead to the same formulas, and thus, in the following, we detail only one of them. Note that the Hamiltonian \mathcal{H} is σ_2 and σ_3 cyclic, so that Λ_2 and Λ_3 are constants of motion. From Eqs. 27 and 20, we find

$$\Delta G = |2n_1\sqrt{\nu}|. \tag{28}$$

Since $\Lambda_2 = \Lambda_{2,*}$, we have $H = n_1^{-1}n_2G + n_1^{-1}\Lambda_{2,*}$. Taking the first variation gives

$$\Delta H = \left| n_1^{-1}n_2\Delta G \right| = |2n_2\sqrt{\nu}|. \tag{29}$$

The Keplerian elements are related to the Delaunay variables through Eq. (11), where we note in particular that

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2}, \quad \cos i = \frac{H}{G}.$$

From the first variations, we have

$$\Delta e = \left| \frac{2n_1\sqrt{1 - e_*^2}\sqrt{\nu}}{L_*e_*} \right|, \tag{30}$$

$$\Delta i = \left| \frac{2(n_2 - n_1 \cos i_*)\sqrt{\nu}}{L_* \sin i_* \sqrt{1 - e_*^2}} \right| = \left| \frac{e_*\Delta e}{1 - e_*^2} \left(\frac{n_2}{n_1 \sin i_*} - \cot i_* \right) \right|, \tag{31}$$

in agreement with the generating-function approach used by Ely and Howell (1997), for which we recall here that $n_1 = 2 - 2p$ and $n_2 = m$.

A few words are in order regarding the calculation of ν appearing in the above expressions. To be consistent with our computation of the resonant centers in Sect. 2.1, we neglect the secular contributions from the lunisolar perturbations, so that

³ Recall that we need the resonance width in order to determine when neighboring resonances overlap and hence when a system is unstable, à la Chirikov.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{sec}}(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \mathcal{H}_{J_2}(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ &= \frac{J_2 R^2 \mu^4}{4L^3 n_1^3} \left[\left(1 - 3n_1^{-2} n_2^2\right) \Lambda_1^{-3} - 6n_1^{-3} n_2 \Lambda_2 \Lambda_1^{-4} - 3n_1^{-4} \Lambda_2^2 \Lambda_1^{-5} \right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Since $X \equiv \Lambda_1$, we find⁴

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}}{\partial X^2} = \frac{3J_2 R^2 \mu^4}{2L^3 G^5} \left[n_1^2 \left(2 - 15 \frac{H^2}{G^2}\right) + 10n_1 n_2 \frac{H}{G} - n_2^2 \right] \tag{33}$$

$$= \frac{3J_2 R^2}{2a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left[n_1^2 (2 - 15 \cos^2 i) + 10n_1 n_2 \cos i - n_2^2 \right]. \tag{34}$$

From the adjacent locations of several resonance centers in the i - e plane (Fig. 1), it is natural to suspect that Chirikov’s resonance overlapping—a universal route to chaos (Chirikov 1979)—occurs in the mesh of the web. Stricto sensu, this was never rigorously demonstrated for the MEO problem, though Ely and Howell (1997) had derived all of the formulas necessary to do so. Appendix 1 gives the explicit formula for the lunisolar harmonic coefficients of the 29 resonant curves appearing in Fig. 1. Recall that each center of the resonances (cf. Fig. 1) are defined, in the i - e phase space, by the curves

$$C_n = \left\{ (i, e) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] : \mathbf{n} \cdot \dot{\Theta} \equiv n_1 \dot{g} + n_2 \dot{h} + n_3 \dot{\tau} = 0 \right\}.$$

The curves delimiting the maximal widths of each resonance are defined by

$$\mathcal{W}_n^\pm = \left\{ (i, e) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] : \mathbf{n} \cdot \dot{\Theta} \equiv n_1 \dot{g} + n_2 \dot{h} + n_3 \dot{\tau} = \pm 2\sqrt{v} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}}{\partial X^2} \Big|_{X=X_\star} \right) \right\}. \tag{35}$$

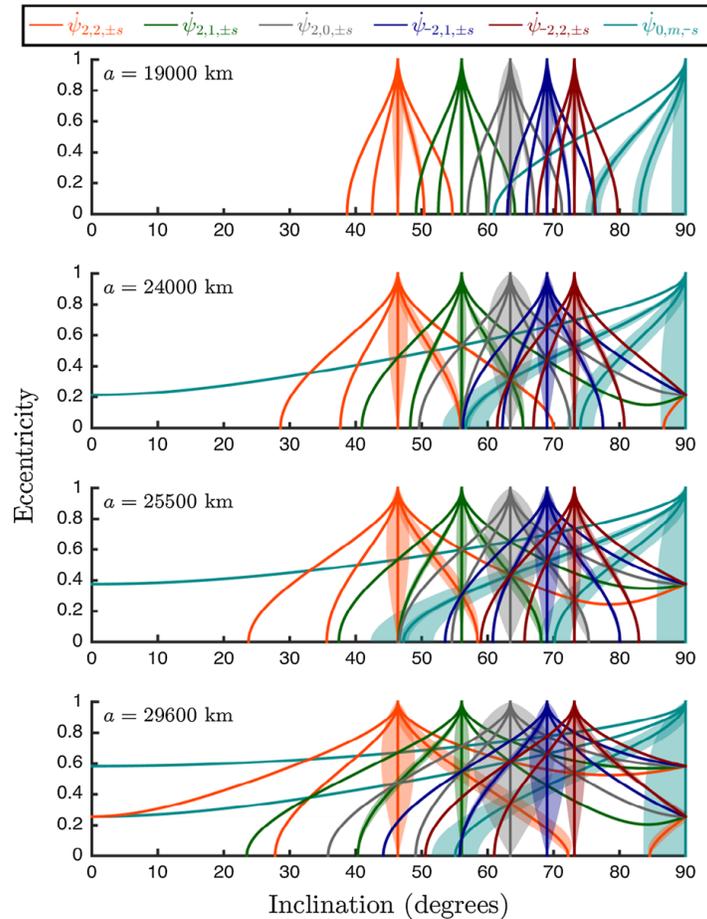
Note that the multiplication by $\partial^2 \mathcal{H}^{\text{sec}} / \partial X^2 \Big|_{X=X_\star}$ in Eq. (35) is due to the timescale operated in Eq. (25).

For each resonance, we compute the half-width excursion in the inclination and eccentricity phase space, according to Eq. (35). Figure 2 shows the centers and widths of the resonances in the region of semi-major axes between roughly 3 and 5 Earth radii, the range of validity of the present theory. At $a = 19,000$ km, the resonances are thin and the regions of overlap are quite narrow, indicating that regular orbits should dominate the phase space. As the ratio of the semi-major axis of the orbits of the satellite and the perturbing bodies (the perturbation parameter, $\varepsilon = \varepsilon(a/a_M)$) is increased, the resonance centers for $s \neq 0$ spread out and the libration regions become wider. We can observe a transition from the stability regime at $a = 19,000$ km to a Chirikov one where resonances overlap significantly at $a = 29,600$ km.

It is well known that mean-motion resonances become wider at larger eccentricity (q.v. Morbidelli 2002): the width of the lunisolar secular resonances exhibit a much more complicated dependence on the eccentricity, as well as the inclination. It is important to note, however, that, under the approximations made, the geometry of the lunisolar secular resonances are independent of the initial phase angles, unlike the case for the mean-motion resonances in the main asteroid belt (Hadjidemetriou 1999; Robutel and Laskar 2001; Gales 2012). Neglect of the lunisolar perturbations on the frequencies of nodal and apsidal precession in Eqs. (8) and (9) and on the secular contribution to the Hamiltonian in Eq. (32) sets an

⁴ The form of Eq. (34) contained in Ely and Howell (1997) is missing a factor of 2 in the second term in the brackets.

Fig. 2 Lunisolar resonance centers (solid lines) and widths (transparent shapes) for increasing values of the satellite's semi-major axis. This plot shows the regions of overlap between distinct resonant harmonics



upper limit to the radius of the orbit for which the theory is valid. At geosynchronous altitude, for instance, the lunisolar perturbations are of the same order as the secular oblateness term (Ely and Howell 1997), and their inclusion would cause in the resonant topology a perigee angle dependence. This is beyond the scope of our current analysis.

The Chirikov resonance-overlap criterion forms the extent of our theoretical analysis. This empirical criterion gives significant qualitative and quantitative predictions about the regions in action space for which chaotic orbits can be found; yet, it contains several limitations. It lacks a rigorous theoretical grounding and, as noted by Morbidelli and Guzzo (1996), it is not well tested on dynamical systems with many degrees of freedom. Chirikov's geometrical argument neglects the coupling of the resonances—to say nothing about the deformation of their separatrices—and the role played by secondary resonances, and, as a result, the criterion often underestimates the threshold of transition from order to chaos. For a more complete and detailed analysis of the phase-space stability, we must turn to numerical explorations. As such, we use the fast Lyapunov indicator in the following section. As a systematic study of the entire parameter space represents a formidable task with significant computational requirements, we chose to focus on a reduced portion of the phase space that is of considerable practical interest for the navigation satellite constellations (see Fig. 3).

3 Numerical exploration of the phase-space stability

This section contains a numerical survey of the dynamical structures appearing in the MEO region by presenting an atlas of stability maps. Following a parametric approach, our main

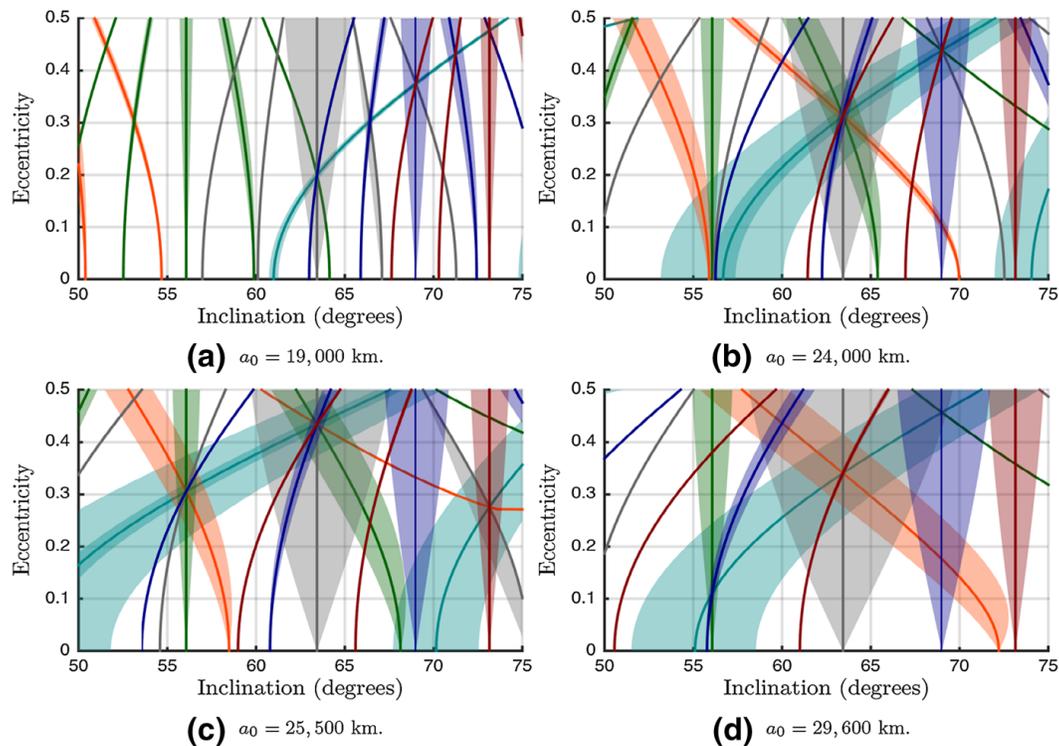


Fig. 3 Zoomed-in portion of Fig. 2, showing where we concentrate our numerical calculations

goals are (1) to give the geometry and extent of the stable, resonant, and chaotic domains, and (2) to obtain a global picture of the resonant interactions on the emergence of chaos. In addition to quantifying the degree of hyperbolicity of generic orbits, we estimate the barriers of predictability by computing Lyapunov times. Furthermore, we demonstrate numerically that resonances and chaos are associated with transport in the i – e phase space.

3.1 The numerical detection of the resonance overlapping regime

In the past few decades, numerical investigations have played a wonderfully key role in studies on the long-term stability of dynamical systems. “The symbiosis between mathematical results and numerical computations,” writes [Morbidelli and Guzzo \(1996\)](#), “is very promising for the future developments of applied dynamical system science and, in particular, for Celestial Mechanics.” The fundamental work of Morbidelli, Guzzo, Froeschlé, and others, have brought to light the existence of specific structures in the phase space when Nekhoroshev’s theorem is satisfied, which in turn imply this celebrated long-time stability result ([Morbidelli and Giorgilli 1995](#); [Morbidelli and Guzzo 1996](#); [Morbidelli and Froeschlé 1996](#); [Morbidelli 2002](#)). Leaving aside mathematical intricacies, they essentially showed that even if chaos exists in the phase space (which is not precluded by the Nekhoroshev theorem), there always exists in a mesh of the resonant web a no-resonant domain, which is filled by many invariant tori. Conversely, if the system is not in Nekhoroshev form, such no-resonant domains cannot be defined: resonances overlap and invariant tori become rare ([Morbidelli and Giorgilli 1995](#)).

The divergent behavior of trajectories can be easily investigated numerically using the broad family of Lyapunov and affiliated indicators. The problem of the eventual overlapping of resonances is thus reduced to the numerical computation of indicators that distinguish between stable, resonant, and chaotic orbits. For such investigations, we chose from the chaos toolbox the fast Lyapunov indicator (FLI) (q.v. [Froeschlé et al. 1997](#)). Writing the

n -dimensional dynamical system in first-order autonomous form, $\dot{x} = f(x)$, where $x \in \mathbb{R}^n$ and $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ represents the vector field, the variational system in \mathbb{R}^{2n} can be stated as

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) w, \end{cases} \quad (36)$$

where $w \in \mathbb{R}^n$ stands for the deviation (or tangent) vector. Many first order stability indicators are based on the propagation of the variational system and on the monitoring of the stretching of w with time (see Skokos 2010, and references therein for a nice survey). The FLI, introduced in Froeschlé et al. (1997), follows from the variational system and enables the discrimination between ordered and chaotic motions (Froeschlé and Lega 2000; Guzzo et al. 2002). The indicator at time t is defined by

$$\text{FLI}(t) \equiv \sup_{\tau \leq t} \log \|w(\tau)\|, \quad (37)$$

where $\|\bullet\|$ denotes the L_2 -norm. More rigorously, we should note $\text{FLI}(t, x_0, w_0)$ instead of $\text{FLI}(t)$ since the FLI computation requires the initialization of the variational system (Eq. 36). The choice of the initial tangent vector is a recurrent question when dealing with first order variational indicators, as discussed by Barrio et al. (2009). The FLI atlas—a collection of FLI maps—presented here depend on two parameters: (1) the initial semi-major axis, ranging from roughly 3 to 5 Earth radii (the prominent MEO region) and (2) a hierarchy of physical models, in order to illustrate the different dynamical mechanisms and how resonances and chaos appear (Todorović and Novaković 2015). The physical models considered are schematically summarized by Table 1 and discussed in more detail in Appendix 3, along with a description of the numerical setup.

3.2 FLI stability atlas: hyperbolicity and predictability

Figures 4, 5, 6 and 7 show the results of the FLI analysis corresponding to the zoomed-in portion of the action space presented in Fig. 3 for the four dynamical models of Table 1. For each of the pictures, the initial conditions i_0, e_0 are associated to the corresponding FLI value using a black-blue-red-yellow color scale. The FLIs of all regular orbits have approximately the same value and appear with the same dark blue color. Light blue corresponds to invariant tori, red and yellow to chaotic regions, and white to collision orbits. The striking feature of Figs. 4, 5, 6 and 7 is the transition from ordered to chaotic motion as the perturbation parameter increases. For $a_0 = 19,000$ km, ordered motions dominate in the phase space. Resonant structures are mostly isolated or emanate in a “V” shape at the birth of inclination-dependently-only resonances at zero eccentricity. Chaotic orbits are mostly confined along the principal V shape of the critical inclination resonance (63.4°) and to small pockets of instability at higher eccentricities. As the semi-major axis increases to 24,000 km, the geometrical organization and coexistence of regular and chaotic orbits becomes more complex. At 25,500 km, more and more of the resonant tori are rendered unstable, and the width of the stochastic layers and their degree of overlap are increased. A common characteristic between these maps and the 24,000 km case is the location of re-entry orbits along the 56.1° resonance. Finally, at $a_0 = 29,600$ km (the nominal semi-major axis of the Galileo constellation), roughly speaking, all orbits belonging to the domain delimited by $(i_0, e_0) \in [52^\circ, 71^\circ] \times [0, 0.5]$ are resonant or chaotic. Re-entry orbits display a very complicated geometry and may now concern quasi-circular orbits near $i_0 = 55^\circ$; that is, strong instabilities exist that can potentially affect Galileo-like orbits.

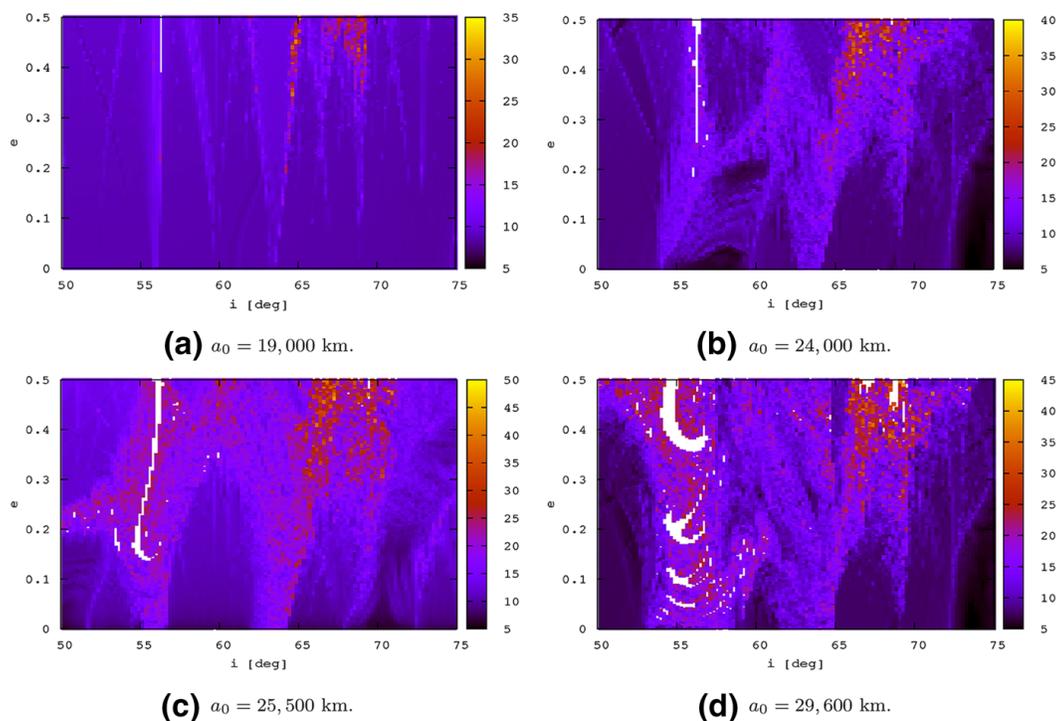


Fig. 4 FLI stability maps for dynamical model 1

Table 1 Perturbations added to the central part of the geopotential for the numerical stability analysis

Dynamical models	Zonal terms	Tesseral terms	Lunar perturbation	Solar perturbation
Model 1	J_2	Not considered	Up to degree 2	Not considered
Model 2	J_2	Not considered	Up to degree 2	Up to degree 2
Model 3	$J_2, J_2^2, J_3, \dots, J_5$	Not considered	Up to degree 4	Up to degree 3
Model 4	$J_2, J_2^2, J_3, \dots, J_5$	Up to degree and order 5	Up to degree 2	Up to degree 2

We refer to Appendix 3 for more details

A fundamental conclusion reached via this parametric approach, using a hierarchy of dynamical models, is that model 2 can be legitimately declared as the basic force model; i.e., the simplest physical model that can capture nearly all of the qualitative and quantitative features (dynamical structures in the maps, degree of hyperbolicity, domains of collision orbits, etc.) of more complicated and realistic force models. In particular, there are no significant changes in the FLI maps of Figs. 6 and 7, when compared to that of Fig. 5. Force model 2 differs from model 1 only by the presence of the solar third-body perturbation, developed at the quadrupole order. Comparing Figs. 4 and 5, it is clear that solar perturbations play a non-negligible role on the long-term dynamics. We note, specifically, the manifest widening of the resonant regions and the increase of chaotic orbits near the inclination-dependent-only resonances, principally near $i = 56.1^\circ$ and 63.4° for all eccentricity values. Moreover, the volume of collision (re-entry) orbits is larger when solar perturbations are taken into account, as is well illustrated in panels (b), (c), and (d) for highly eccentricity orbits along $i = 69^\circ$. This numerical finding confirms, a posteriori, the analytical refinement given by Eq. 24. The robustness of the physical model 2 was further tested at a smaller phase-space scale, as

The dynamical structure of the MEO region

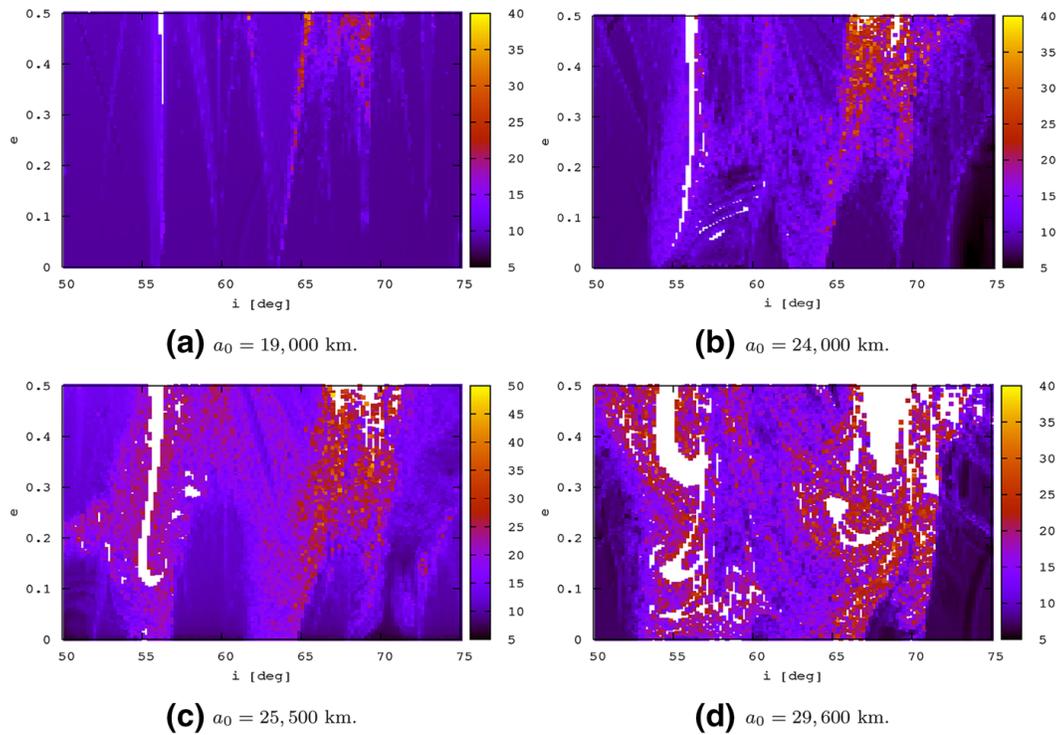


Fig. 5 FLI stability maps for dynamical model 2

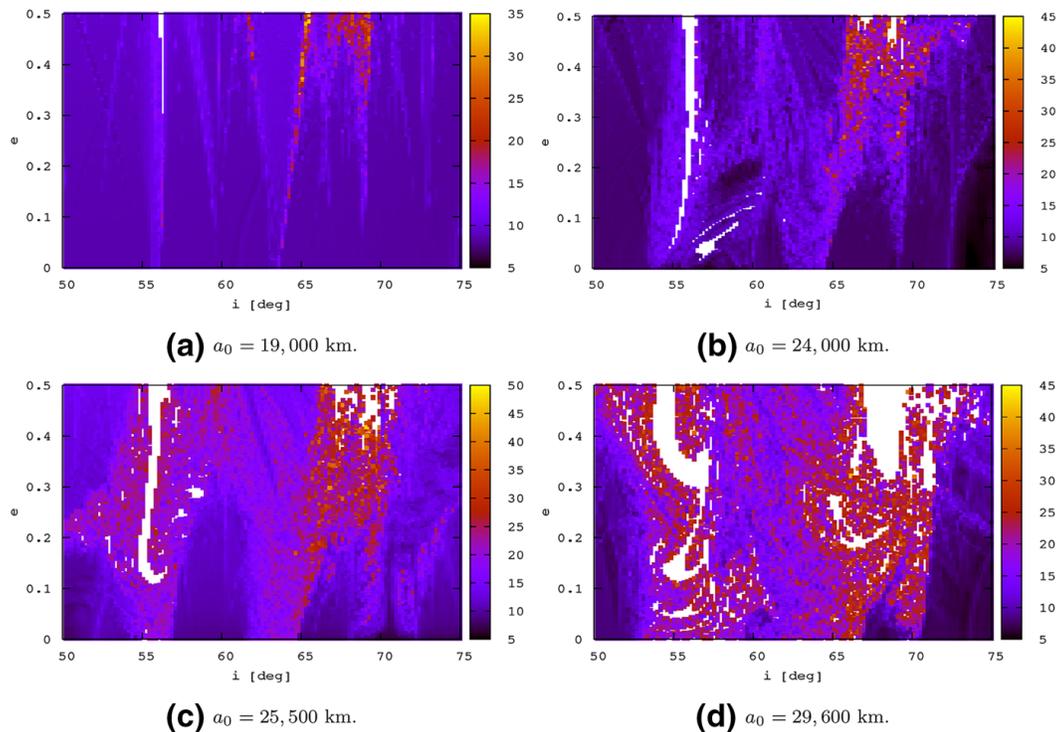


Fig. 6 FLI stability maps for dynamical model 3

shown in Fig. 8, giving a magnification of a zone containing many secondary and transverse structures for $a_0 = 24,000$ km. To show finer details and sharper contrast, the resolution and propagation time were enhanced for an objective comparison between the various force

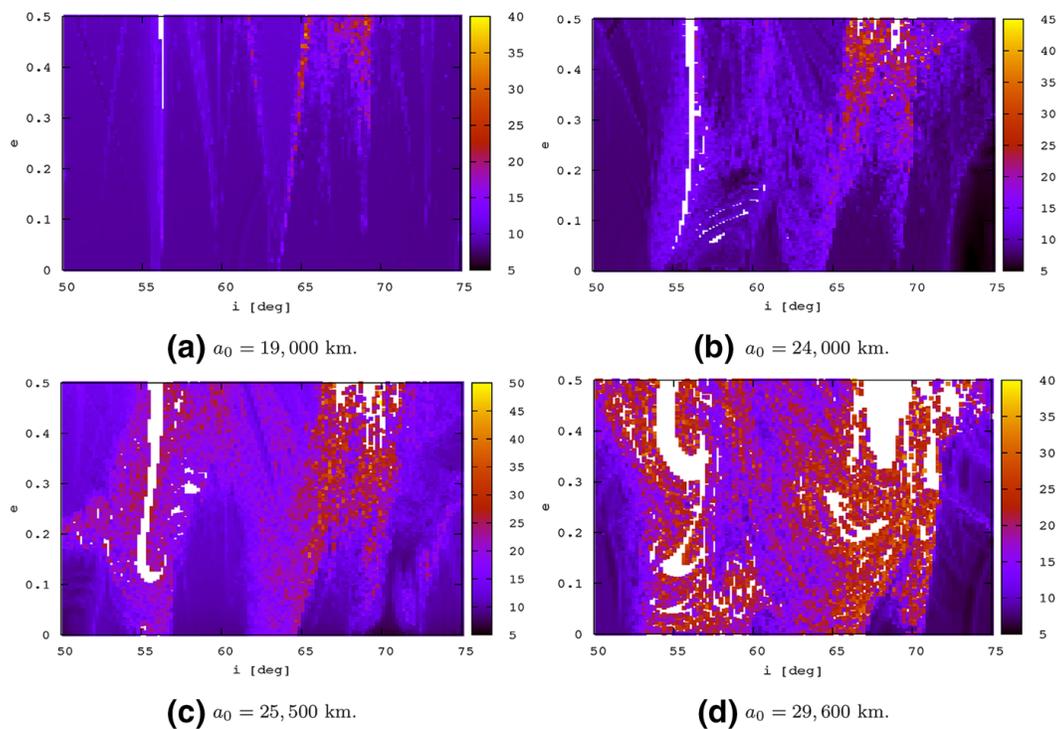


Fig. 7 FLI stability maps for dynamical model 4

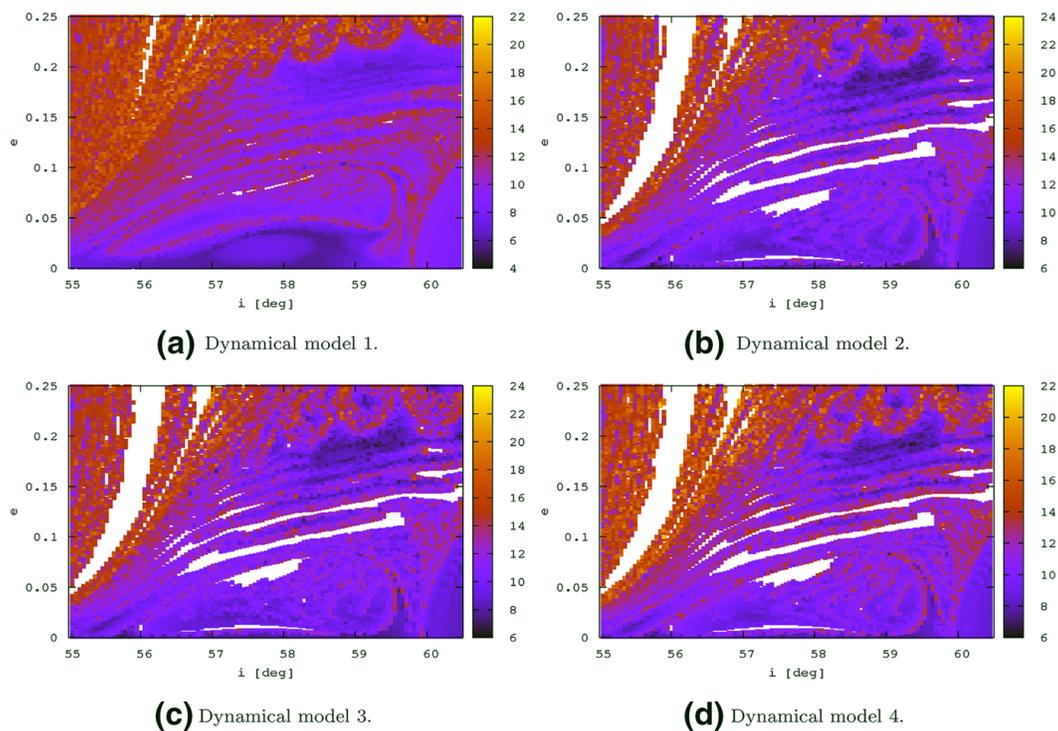


Fig. 8 Zoomed-in portion for $a_0 = 24,000$ km near the $2\dot{\omega} + \dot{\Omega}$ inclination-dependent-only resonance under the various dynamical models. Initial conditions have been propagated from the initial epoch 2 March 1969 until the final date set to 15 November 2598. The precise detection of the stable manifolds allows to predict the set of re-entry orbits. These maps also further corroborate model 2 as the basic physical model

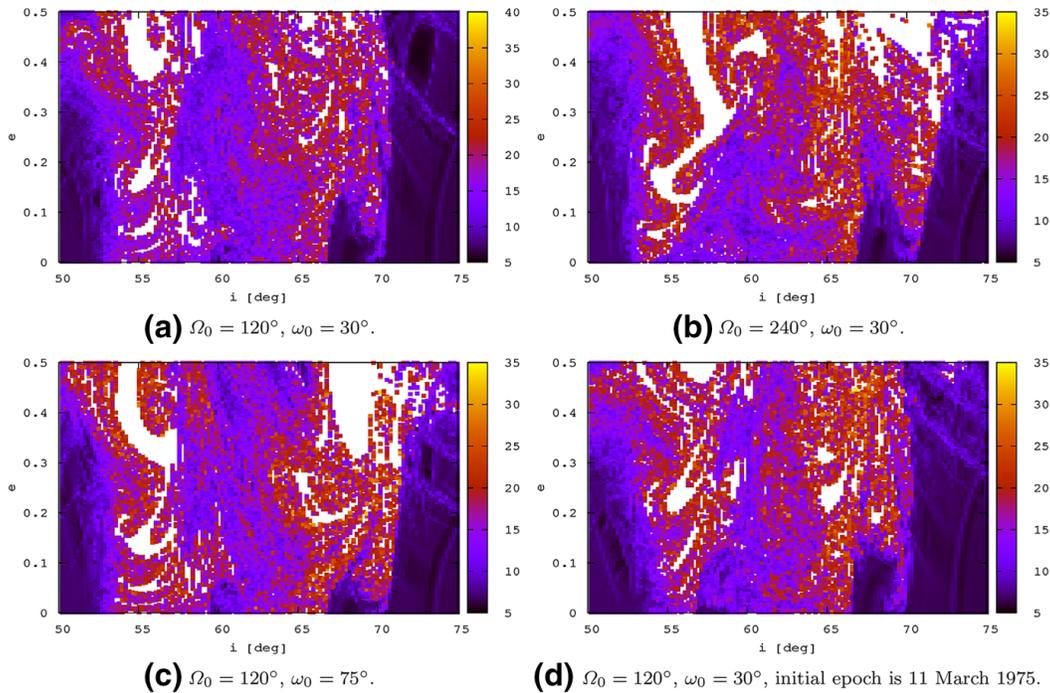


Fig. 9 FLI stability maps for a_0 set to 29,600 km under force model 2. Unless otherwise stated, the initial epoch of the simulations, which determines the initial dynamical configuration of the Earth–Moon–Sun system, is 02 March 1969

models. We can see that, even at this scale, force model 2 can unquestionably be considered the basic physical model: changes in the dynamical structures, and the like, with models 3 and 4 are nearly undetectable. These maps (Fig. 8) also reveal the extraordinary richness of the phase space and the apparition of transverse and thin hyperbolic manifolds (structures with high FLI values). It is worth nothing that re-entry orbits, appearing when the solar contribution is included, are located precisely along those thin manifolds, already present with force model 1. Furthermore, the main collision region in the vicinity of the 56° inclination-dependent-only resonance widens significantly with model 2. The identification of the relevant dynamical model is undoubtedly the first question to be addressed when dealing with real (physical) problems. Strangely enough, the isolation of the basic force model for the MEO problem, was largely missing from the literature, though was speculated on in [Rosengren et al. \(2015\)](#). Thus, all future work in this area can be performed under this basic model of oblateness and lunisolar perturbations, and, without loss of generality, the obtained results may be considered representative of the other more refined, and complicated, models.

It should be emphasized that all of these charts have been obtained by varying only the initial inclination and eccentricity, with no regard for the initial phases, themselves being fixed for all computed FLI. Figures 9 and 10 illustrate the inherent difficulty to capture the dynamics of a six-dimensional phase space in a plane of dimension two (recall that the Hamiltonian, Eq. 14, is three DOF) ([Richter et al. 2014](#); [Todorović and Novaković 2015](#)). These figures present the FLI maps for $a_0 = 29,600$ km under model 2, at two different phase-space scales, in which the results of the latter may be considered representative of Galileo-like orbits. We can observe how the dynamical structures (stable, resonant, chaotic, or collision orbits) evolve by changing the initial angles ω , Ω , or even the initial configuration of the Earth–Moon system (equivalent to changing the initial epoch of the simulation). Despite this dependence on the initial phases, however, the dynamical regime of the global phase space

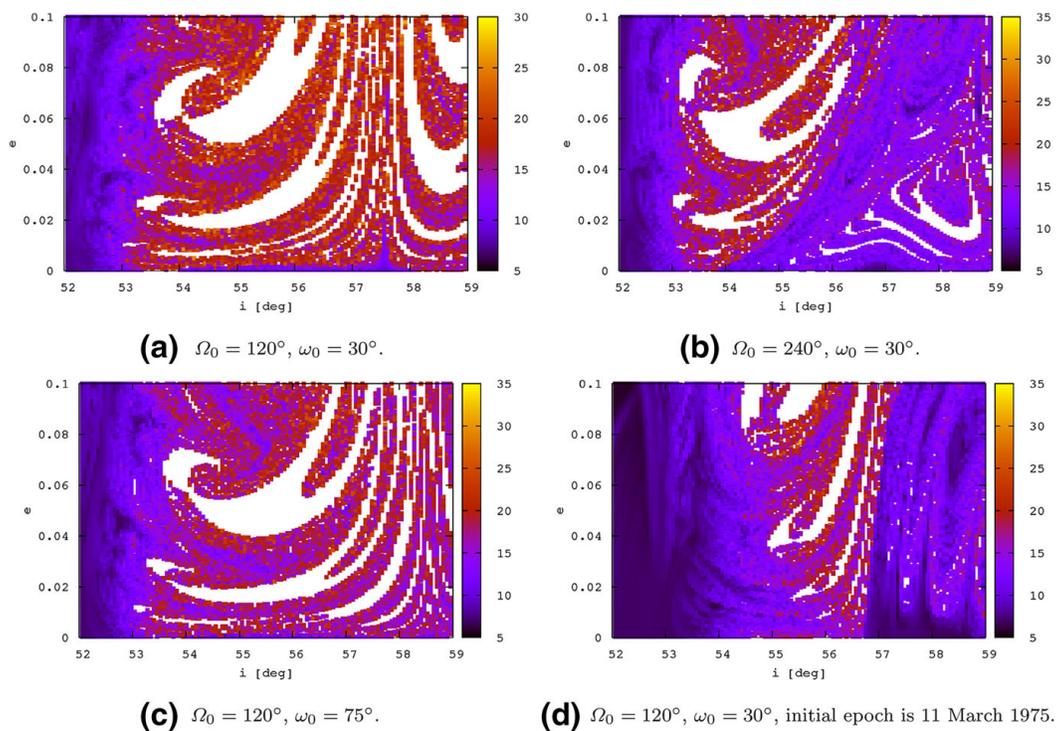


Fig. 10 Zoomed-in portion of Fig. 9, representative of Galileo-like orbits

still persists: the region is dominated by chaotic orbits.⁵ This does not appear to be the case for the zoomed-in portion of the phase space, where it is clear from Fig. 10a, d how the initial epoch may strongly influence the stability analysis. Certainly, the dependence of the dynamical structures on the initial phases (ω , Ω , Ω_M) is a subject that requires further studies, and the associated difficulties are, in essence, due to the representation of the dynamics in a reduced dimensional phase space (Richter et al. 2014).

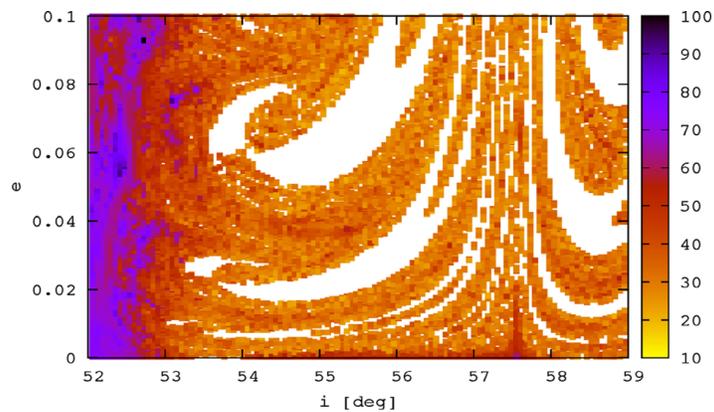
Besides the quantification of the local hyperbolicity, the limit of predictability is another important aspect of dynamical interest that we would like to discuss here. The Lyapunov time $T_{\mathcal{L}}$, defined as the inverse of the maximal Lyapunov characteristic exponent (mLCE), represents physically the barrier of predictability in the dynamical system. Recall that this time, defined by

$$T_{\mathcal{L}} \equiv \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log ||w(\tau)||}{t} \right)^{-1}, \tag{38}$$

goes to infinity for regular orbits (because the mLCE decreases to zero), and, as a result, the dynamical system is predictable for all future time t . However, for chaotic systems, the mLCE converges to a positive value and $T_{\mathcal{L}}$ converges to a finite value. We have estimated Eq. 38 numerically for the charts of Fig. 10 and we have found that many of the orbits have Lyapunov times on the order of decades, as shown by Fig. 11 for a specific case. For the propagation time chosen, slightly larger than 530 years, the most stable orbits in the maps exhibit, roughly speaking, a Lyapunov time of between 100 and 120 years. Thus, in Fig. 11, the orbits with a Lyapunov time bigger than 100 years have been assigned to an orbit with a

⁵ This is essentially the same conclusion reached by Todorović and Novaković (2015), who treat the mean-motion resonances in a particular region of the main asteroid belt (i.e., the location of the Pallas asteroid family): “. . . the FLI maps depend on the choice of initial angles. . . . However, we underline that this does not change the global dynamical picture of the region . . .”

Fig. 11 Map of Lyapunov-time expressed in years. The Lyapunov time represents the average barrier of predictability of the dynamical system. Far beyond this time, the system loses the memory of its initial conditions and statistical properties are more suitable to characterize the evolutionary properties of the motion. Initial conditions are those of Fig. 10a



Lyapunov time equal to 100 years. This does not alter the stability results, but only provides more visual contrast in the maps. This order of predictability, found to be very small indeed for Galileo-like orbits, is a nice invitation to the general reflection of the practical meaning of long-time simulations, so often performed in Astrodynamics. In fact, the problem should be considered as probabilistic in nature and the evolutions of orbits, far beyond the Lyapunov time, have to be considered as only a possible future. In this sense, the long time tracking of individual orbits appears to be inappropriate. The problem requires more fundamental statistical studies that describe the properties of an ensemble of trajectories (Murray and Holman 1997): this approach is far from common in our community.

3.3 Transport in phase space

The local hyperbolicity and predictability in the MEO region, both first-order variational quantities, have been quantified via FLIs and numerical estimation of Lyapunov times, respectively. Another important feature associated with chaos, which has yet to be addressed, is the transport properties (Todorović et al. 2008); that is, the possibility for the dynamical system to explore its phase-space domain. As typified by the asteroid Helga (Milani and Nobili 1992), stable chaos may occur in actual (physical) Solar System dynamics, for which orbits with short Lyapunov times display no significant changes on very long timescales (even several orders of magnitude larger than $T_{\mathcal{L}}$). For the MEO problem, stable chaos is evidently not at the heart of the instabilities and, on the contrary, the apparent growth of the eccentricity on short timescales was how chaos was initially suspected (Rosengren et al. 2015). The most rewarding suggestions of the transport properties concerning MEO dynamics are due to Ely (2002), who showed the tendency for typical GPS orbits to follow the resonant skeleton given by Fig. 1. This explains how quasi-circular orbits may become nearly hyperbolic on millennia timescales. Similar results were obtained more recently by Rosengren et al. (2015), using stroboscopic techniques, who demonstrated this phenomenon on much short timescales for the various navigation constellations. Here, we use our FLI analysis, which more clearly reveals the extent and geometry of the chaotic sea in the phase space, to further enliven this idea, by showing numerically how the dynamical structures in the FLI maps affect the long-term evolutionary properties of the motion.

Figure 12 shows the long-term evolution (plotted stroboscopically once per lunar nodal period) of orbits with initial inclinations and eccentricities in particular regions of the phase space superimposed on the background dynamical structures obtained from the FLI computations. For orbits initially located far from the resonances, nothing dynamically interesting happens in terms of transport: the motion is quasi-periodic and the excursions in the action

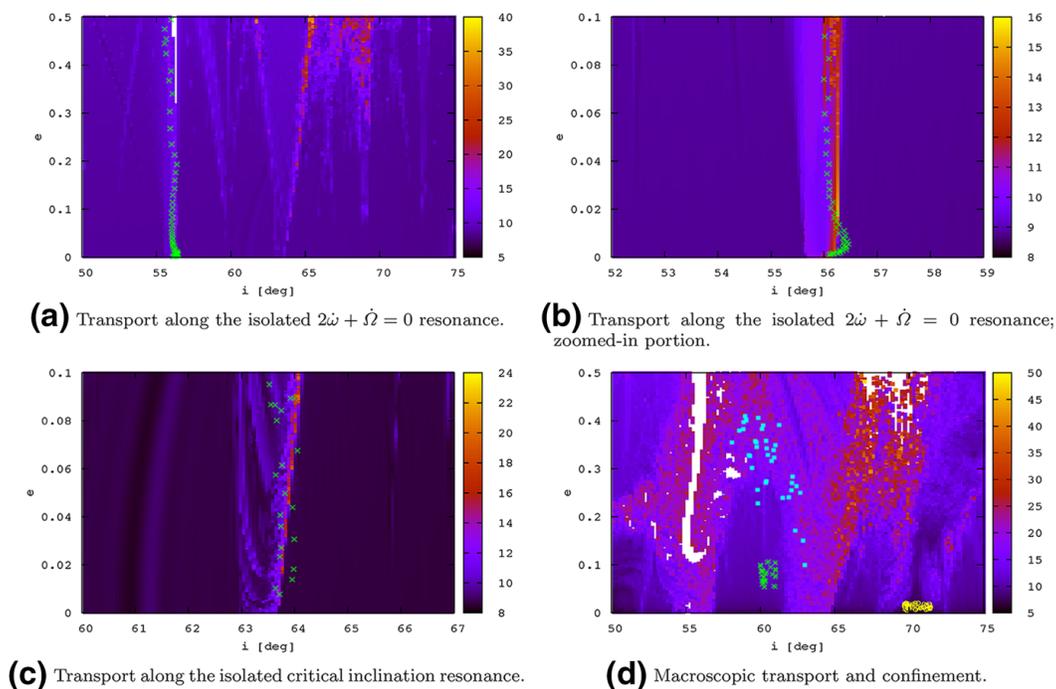


Fig. 12 Illustration of the transport properties for orbits with initial condition near isolated resonances or for orbits with initial condition in the resonance overlapping regime or far from them. All orbits are semi-analytically propagated using the basic force model 2 and are stroboscopically overlaid onto the FLI maps, obtained with the same force model. The nature of the resonances compels the transport in the phase space. The structures in the FLI maps, in addition to quantifying the hyperbolicity, also reveal the preferential and possible routes for transport in the phase space: **a** transport along the isolated $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$ resonance, **b** transport along the isolated $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$ resonance; zoomed-in portion, **c** transport along the isolated critical inclination resonance, **d** macroscopic transport and confinement

space are modest, bounded, and confined by the invariant tori. Figure 12a–c show that in the vicinity of isolated resonances (where no adjacent resonances exist), the orbits can have the tendency to explore a larger portion of their phase space, evolving along this resonance. The evolutionary properties of the eccentricity and inclination are mainly determined by the shape of the resonance, as revealed by the FLI analysis. Because of the geometry of the dominate isolated resonances (the V shapes clearly distinguishable for $a_0 = 19,000$ km), we see how some orbits can have a very stable inclination despite significant growth in eccentricity (evolving along the resonant line). For orbits with initial conditions in the resonance overlapping regime, where invariant tori are destroyed, we find that excursions of the eccentricity and inclination are fast and macroscopic (Fig. 12d). The exploration of a large phase-space volume is permitted, and, despite the erratic appearance of the motion, when sampled stroboscopically we see a tendency for the orbits to jump from one resonance domain to another, being confined to the chaotic sea. Figure 12d also shows the evolution of orbits in the stable domains (marked green and yellow), where the variations are quasi-periodic. Such results were further confirmed by a large amount of simulations, and thus we can conclude that the FLI maps clearly reveal how transport is mediated in the phase space.

4 Testing the Chirikov criterion

The dynamical structure of the phase space of the MEO region was enlightened using two different, but complementary, approaches: the heuristic Chirikov criterion and a CPU-expansive

The dynamical structure of the MEO region

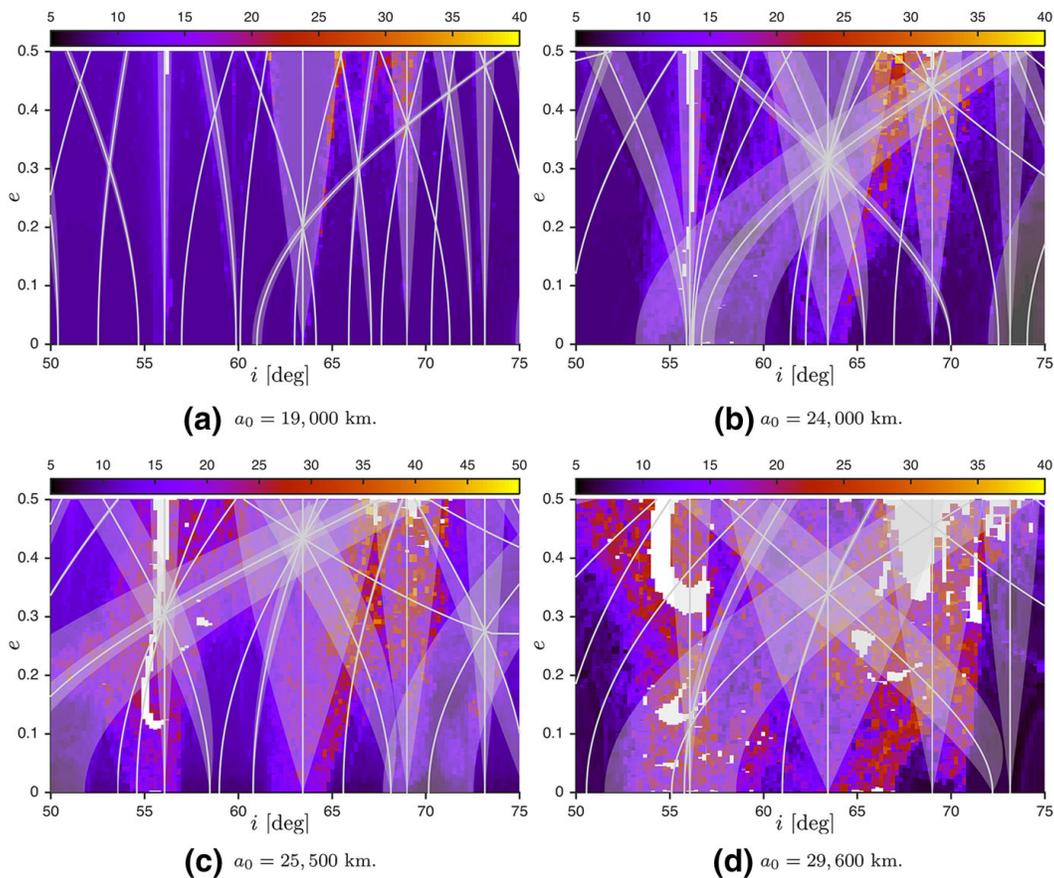


Fig. 13 FLI stability maps versus Chirikov's resonance overlap for force model 2

numerical stability survey. We would like to stress at the outset that, to the best of our knowledge, the Chirikov principle has never been applied to a real (physical) system of more than 2 degrees of freedom; recall that in our study the autonomous version of the Hamiltonian is 3 DOF, leading to a 6 dimensional phase space, whereby the resonance widths involve two actions. The realistic nature of Chirikov's analytical results is then of primary importance, and so a synthesis of the theoretical and numerical aspects of this work is presented here.

Figure 13 presents the lunisolar secular resonance centers and widths of Fig. 3, now appearing as light gray, superimposed on the corresponding FLI stability maps of Fig. 5, both obtained under the same basic force model of oblateness and lunisolar perturbations.⁶ For $a_0 = 19,000$ km, where the resonances are mostly isolated (the fundamental assumption made in our analytical treatment), the agreement is both qualitatively and quantitatively very satisfactory. The FLI numerically detected V shapes, emanating from 56.1° , 60° , and 63.4° at zero eccentricity, are well captured analytically. As the semi-major axis increases, however, the discrepancy with the isolated resonance hypothesis becomes manifest, as was noted from the FLI analysis. Accordingly, the comparison between the two approaches becomes more and more difficult to quantify, though we note that the most important qualitative feature—the fact that the systems tends towards the overlapping chaotic regime—can be

⁶ We note that since the FLI maps have an angle dependency, it would have been more appropriate here to compare the resonance geometries, computed analytically, with FLI maps obtained using random initial phase angles (Todorović and Novaković 2015). While this procedure would have yielded a better estimate of the real width of the chaotic zones associated to each resonance, it would have compromised the sharpness of the pictures.

seen from both. The analytical development captures indubitably the tendency of global overlap, even if a 1–1 correspondence between the overlaps and the numerical detection of chaos is hard to formulate. Nevertheless, we note that some numerical structures are nicely captured analytically, such as the widths of the resonances for moderately eccentric orbits near the inclinations of 54° – 60° and 62° – 64° for $a_0 = 24,000$ km, or near the critical inclination for $a_0 = 25,500$ km. Also apparent for all semi-major axes is the large number of chaotic or escaping orbits along the 69° resonance at high eccentricities at the intersection of multiple resonant curves.

Reasons for any discrepancies surely arise from the fact that the Chirikov criterion is imperfect by nature: resonances are treated solely in isolation. Certainly, more sophisticated and rigorous analytical methods that treat resonance interactions, such as those detailed in [Haller \(1999\)](#), should be pursued in the future. But despite the approximations of the Chirikov criterion, it has permitted us to gain a formidable intuition into the nature of this physical problem. The application of this analytical criterion is a strong testimony that despite the great power and scope of modern computers, there is still a place in Celestial Mechanics for pen-and-paper calculations in the style of our forebears.

5 Discussion and future work

We present below several interesting aspects of the MEO problem that have not been adequately addressed here; points on which to concentrate in future works.

1. We have pointed out the critical role of the initial phases (ω , Ω , Ω_M) on the dynamical structures in the FLI maps, leading to different chaotic pictures in the phase space. Yet, we gave no information about which angles will ensure or avoid chaos for a given initial inclination and eccentricity. This question is clearly of significant practical interest and needs further investigation.
2. Even if we demonstrated a 1–1 correspondence between chaos and large-volume exploration of phase space, the precise nature of the transport has not been specified. In particular, no distribution of the increments Δe with time was given. Such analytical modeling of $f(\Delta e, t)$ is currently being studied, based on considerations in [Murray and Holman \(1997\)](#) and [Varvoglis \(2004\)](#).
3. The general link between local hyperbolicity (chaos) and stochasticity ([Chirikov 1979](#)) needs to be studied, a question which has hitherto remained seriously underrated in Celestial Mechanics. Statistical descriptions of the action evolution, generally through adequate averaged quantities, are at the foundations of statistical mechanics and ergodic theory—the theory of the long-term statistical behavior of dynamical systems. The injection of the concepts and tools of these fields to the applied (physical) MEO problem must still be performed. This need, moreover, is deeply stimulated by the estimated short Lyapunov times, implying that predictions must be statistical in nature.
4. In the Chirikov overlapping regime ($a_0 = 29,600$ km), re-entry orbits represented a significant portion of the phase space. The exact period of time after which an orbit collides, however, is not illustrated in the FLI maps, so that there might exist orbits that collide after 100 years or after 500 years, both represented in the maps by the white color. We preferred here to keep our study succinct and focused only on dynamical principles, but such considerations are obviously relevant for the analysis of disposal strategies for the four constellations located in this precarious region of space.
5. Though averaging methods have proven their use in Celestial Mechanics, given the criticism of Arnold to the so-called “averaging principle” that was in vogue 50 years ago,

we are currently testing the simulation of the whole system (the non-averaged system) to test the validity of the averaging procedure with respect to chaotic dynamics ([Arnold et al. 2006](#); [Daquin et al. 2015](#))

6 Conclusions

We have presented a 2.5-DOF secular Hamiltonian governing the long-term dynamics of the MEO region under oblateness and lunisolar perturbations. Using this analytically tractable Hamiltonian, written in terms of the Delaunay elements and reduced to a 1-DOF pendulum system near specified resonances, we have estimated the widths of the dense network of secular lunisolar resonances permeating the i - e phase space. As the semi-major axis recedes from Earth, scanning the MEO region (from 3 to 5 Earth radii), we found a transition from a globally stable regime, where resonances are thin and well separated, to a globally unstable one, where resonances widen and overlap. Surprisingly, the application of the well-known analytical Chirikov criterion, frequently used for architectural Celestial Mechanical studies, was never fully applied to the MEO problem, because the fundamental work of [Ely and Howell \(1997\)](#) was overlooked by the community for nearly twenty years. This analytical methodology was completed here, and tested against predictions from a semi-numerical stability analysis, which focused on the region of MEO populated by the navigation constellations. In essence, both approaches agree and confirm the transition to chaos; yet it is well known that the approximation of treating the resonances in isolation breaks down in the overlapping regime, implying that the quantitative extent and geometry of the chaotic domains can only be obtained numerically. Our parametric and extensive numerical simulations, moreover, have permitted the isolation of the basic physical model governing the dynamics in this region. Specifically, we have shown that the grandiloquent force models, often employed in such studies, are not required to capture the stable or chaotic features of the phase space. Future analytical or numerical effects can be made with the basic 2.5-DOF averaged model of oblateness and lunisolar perturbations, developed to quadrupole order. The semi-analytical investigations have also illustrated the extraordinary richness of the dynamical structures in the i - e phase space, whose full understanding is far from complete. The predictability of typical navigation satellites has also been quantified through the estimation of Lyapunov times, finding a barrier of predictability of only decades. It is hoped that such results will stimulate and guide the community towards systematic and fundamental statistical approaches, more suitable for describing the distribution of the actions. We have also investigated the transport characteristics in the phase space, and how resonances and chaos influence the evolutionary behavior of the inclination and eccentricity. The nature of this transport will be discussed in a forthcoming paper, as with some general stochastic properties of the motion induced by the hyperbolic (chaotic) nature of the dynamical system. The effective application of these results towards the management of the navigation satellite systems is a challenging task, the goal of which is to exploit the instabilities to identify suitable collision orbits or to use the associate transport routes to reach stable regions in phase space (parking orbits). In this regard, we stress that analytical and numerical techniques cannot be separated, and a complete, logically ordered picture can be obtained only by the application of both methods jointly.

Acknowledgments The present form of the manuscript owes much to the critical comments and helpful suggestions of many colleagues and friends. The authors are grateful to the two anonymous referees for their rapid, yet careful and incisive reviews. J.D. would like to thank M. Fouchard for discussions on the FLI computations, E. Bignon, P. Mercier, and R. Pinède for support with the Stela software, as well as the “Calcul Intensif”

team from CNES, where numerical simulations were hosted. A.J.R. owes a special thanks to K. Tsiganis for hosting him at the Aristotle University of Thessaloniki in March, and for the numerous insightful conversations that ensued. A.J.R. would also like to thank N. Todorović, of the Belgrade Astronomical Observatory, and F. Gachet and I. Gkolias, of the University of Rome II, for discussions on the phase-angle dependencies of the FLI maps. Discussions with A. Bäcker, A. Celletti, R. de la Llave, G. Haller, and J.D. Meiss at the Global Dynamics in Hamiltonian Systems conference in Santuari de Núria, Girona, 28 June – 4 July 2015, have been instrumental in shaping the analytical component of this work. This research is partially funded by the European Commissions Framework Programme 7, through the Stardust Marie Curie Initial Training Network, FP7-PEOPLE-2012-ITN, Grant Agreement 317185. Part of this work was performed in the framework of the ESA Contract No. 4000107201/12/F/MOS “Disposal Strategies Analysis for MEO Orbits”.

Appendix 1: Special functions in the lunisolar disturbing potential expansions

Recall that the lunar disturbing function can be written in the compact form

$$\mathcal{R}_M = \sum_{m=0}^2 \sum_{s=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m,\pm s}^M \cos \Phi_{2-2p,m,\pm s}^M,$$

with harmonic angle and associated harmonic coefficient

$$\begin{aligned} \Phi_{2-2p,m,\pm s}^M &= (2 - 2p)\omega + m\Omega \pm s(\Omega_M - \pi/2) - y_s\pi, \\ h_{2-2p,m,\pm s}^M &= \frac{\mu_M a^2}{a_M^3 (1 - e_M^2)^{3/2}} (-1)^{\lfloor m/2 \rfloor} \\ &\times \varepsilon_m \frac{(2 - s)!}{(2 + m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,s,1}(i_M) H_{2,p,2p-2}(e) (-1)^{m+s} U_2^{m,\mp s}(\varepsilon), \end{aligned}$$

so that a lunar resonance occurs when

$$\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s} = (2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} \pm s\dot{\Omega}_M \approx 0.$$

The solar disturbing function can be written in the compact form

$$\mathcal{R}_S = \sum_{m=0}^2 \sum_{p=0}^2 h_{2-2p,m}^S \cos \Phi_{2-2p,m}^S,$$

with harmonic angle and coefficient

$$\begin{aligned} \Phi_{2-2p,m}^S &= (2 - 2p)\omega + m(\Omega - \Omega_S), \\ h_{2-2p,m}^S &= \frac{\mu_S a^2}{a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} \varepsilon_m \frac{(2 - m)!}{(2 + m)!} F_{2,m,p}(i) F_{2,m,1}(i_S) H_{2,p,2p-2}(e). \end{aligned}$$

A solar commensurability occurs when $(2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} \approx 0$, or equivalently when $\dot{\psi}_{2-2p,m,0} \approx 0$. We give here the the explicit formula needed to calculate the widths of the 29 distinct curves of secular resonances, six of which are locations of lunisolar resonance (i.e., the inclination-dependent-only cases), appearing in Fig. 1.

The general Hansen coefficient $X_k^{l,m}(e)$, which permits the full disturbing function (prior to averaging) to be developed in terms of the mean anomalies, is a function of the orbit eccentricity and is given by the integral (Hughes 1980)

$$X_k^{l,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l \cos(mf - kM) dM. \tag{39}$$

The dynamical structure of the MEO region

Table 2 Kaula's inclination functions $F_{2,m,p}(i)$ from Kaula (1966)

m	p	$F_{2,m,p}(i)$
0	0	$-3 \sin^2 i / 8$
0	1	$3 \sin^2 i / 4 - 1/2$
0	2	$-3 \sin^2 i / 8$
1	0	$3 \sin i (1 + \cos i) / 4$
1	1	$-3 \sin i \cos i / 2$
1	2	$-3 \sin i (1 - \cos i) / 4$
2	0	$3(1 + \cos i)^2 / 4$
2	1	$3 \sin^2 i / 2$
2	2	$3(1 - \cos i)^2 / 4$

For $k = 0$, exact analytical expressions exist for the zero-order Hansen coefficients $X_0^{l,m}$ for all values of l and m . The integral for $X_0^{l,m}$ can be written as

$$X_0^{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l \cos mf \, dM. \tag{40}$$

Note that since cosine is an even function, it is only necessary to obtain expressions for $m > 0$ as $X_0^{l,m} = X_0^{l,-m}$. For $l \geq 1$ and $0 \leq m \leq l$, the integrals can be evaluated as

$$X_0^{l,m} = \left(-\frac{e}{2}\right)^m \binom{l+m+1}{m} F\left(\frac{m-l-1}{2}, \frac{m-l}{2}, m+1; e^2\right), \tag{41}$$

where $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ is a hypergeometric function in e^2 . Several formulae of recurrence have been derived that greatly facilitate the calculation of these coefficients, however, for our purposes, $H_{2,p,2p-2}(e) = X_0^{2,2-2p}(e)$, for $p = 0, 1, 2$, can be easily evaluated as

$$X_0^{2,\pm 2} = \frac{5}{2}e^2, \quad X_0^{2,0} = 1 + \frac{3}{2}e^2. \tag{42}$$

The Kaula inclination functions $F_{2,m,p}(i)$ and $F_{2,s,1}(i_M)$ are given by (Kaula 1966)

$$F_{2,m,p}(i) = \sum_t \frac{(4-2t)!}{t!(2-t)!(2-m-2t)!2^{4-2t}} \sin^{2-m-2t} i \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{2-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \tag{43}$$

where k is the integer part of $(2-m)/2$, t is summed from 0 to the lesser of p or k , and c is summed over all values making the binomial coefficients nonzero. Expressions for $F_{2,m,p}(i)$ up to $m = 2$, $p = 2$, are given in Table 2.

The expression for the Giacaglia functions, computed from Eq. 4, are listed in Table 3.

The commensurability condition, harmonic angle, and associated harmonic coefficient for all resonance center curves are given in Tables 4 and 5, color coded to match that of Fig. 1. Note that when the angular arguments are the same (excepting a constant phase), as in each of the five resonance curves stemming from the critical inclination (63.4°) at $e = 1$ or the lunisolar inclination-dependent-only resonances, the associated harmonic coefficients must be combined into one single term for the calculation of the resonant width, as detailed in Sect. 2.2.

Table 3 Giacaglia's tesseral harmonics rotation functions $U_2^{m,\mp s}$ for the Moon, where $C = \cos(\epsilon/2)$ and $S = \sin(\epsilon/2)$

$m \ \mp s$	0	-1	1	-2	2
0	$1 - 6C^2 + 6C^4$	$-2CS^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)$	$-2CS(1 - 2C^2)$	$C^2S^{-2}(C^2 - 1)^2$	C^2S^2
1	$-3CS^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)$	$S^{-2}(4C^6 - 9C^4 + 6C^2 - 1)$	$C^2(4C^2 - 3)$	$-CS^{-3}(C^2 - 1)^3$	$-C^3S$
2	$6C^2S^{-2}(C^2 - 1)^2$	$-4CS^{-3}(C^2 - 1)^3$	$-4C^3S^{-1}(C^2 - 1)$	$S^{-4}(C^2 - 1)^4$	C^4

Appendix 2: Inclination-dependent-only lunisolar resonances

Figure 14 shows the lunisolar inclination-dependent-only resonance centers (solid lines) and widths (transparent lobes) for increasing values of the satellites's semi-major axis, computed with the solar contribution and without (shaded gray and without an edge color). The solar harmonics, neglected in previous works (Ely and Howell 1997), play an increasingly important role as the semi-major axis is increased, either by widening or shrinking the resonance domain. The lobe shape of the lunisolar apsidal resonances (q.v. Breiter 2001) and the rocket shape of the nodal resonance are easily explained by the dependence of the widths on the orbit eccentricity. The widths depend on e through their associated harmonic coefficients (Appendix 1), which comes in through the zero-order Hansen coefficients, and through Eq. 33. From Eqs. 3, 7, 26, and 42, $v \rightarrow 0$ as $e \rightarrow 0$ for $p = 0$ or $p = 2$, but not for $p = 1$.

To extend the result to the case where $e \rightarrow 1$, let us note that the equation

$$n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} = \pm 2\sqrt{v.\partial^2\mathcal{H}^{\text{sec}}/\partial X^2}|_{X=X_*} \tag{44}$$

is equivalent to

$$\kappa P_{\mathbf{n}}(i) = \pm 2u(e)\sqrt{v.\partial^2\mathcal{H}^{\text{sec}}/\partial X^2}|_{X=X_*} \tag{45}$$

where κ a constant (independent of e and i), $u(e) = (1 - e^2)^2$ and $P_{\mathbf{n}}(i) = n_1(5 \cos^2 i - 1)/2 - n_2 \cos i$. When $e \rightarrow 1$, the right-hand side of Eq. (45) goes to zero, and, as a result, i must be a root of $P_{\mathbf{n}}$ in the limit $e \rightarrow 1$.

Appendix 3: Numerical setups

The dynamical model we used in the propagation of the orbits accounts for the perturbations stemming from the Earth, the Moon, and the Sun. To simplify the mathematical problem, all of these gravitational perturbations have been analytically averaged over the mean anomaly M of the satellite (the fast variable), and propagated using numerical integrations, which is much faster thanks to the absence of short-periodic variations. This is a well known and efficient semi-analytical approach to study the qualitative evolution of orbits over very long timespans. The averaging procedure has been done for the Earth's geopotential up to J_5 (including the J_2^2 term). For tesseral resonances (located for certain semi-major axes), where there exists a commensurability between the frequency of the satellite's mean motion and the sidereal time, a partial averaging method was applied to retain only the long-periodic perturbations. This is equivalent to retaining in the Earth's geopotential only the slowly varying

Table 4 Lunar resonance conditions, harmonic angles, and associated coefficients needed for the resonant width computations of §2.2. Here we use the abbreviations $s = \sin$, $c = \cos$, $C = \cos(\epsilon/2)$, and $S = \sin(\epsilon/2)$

LUNAR COMMENSURABILITIES		
$\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s}$	$\Phi_{2-2p,m,\pm s}^M$	$h_{2-2p,m,\pm s}^M$
$\dot{\psi}_{2,2,0}$	$2\omega + 2\Omega$	$-\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)C^2 S^{-2}(C^2 - 1)^2}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,2,1}$	$2\omega + 2\Omega + \Omega_M - \pi$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C S^{-3}(C^2 - 1)^3}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,2,-1}$	$2\omega + 2\Omega - \Omega_M$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C^3 S^{-1}(C^2 - 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,2,2}$	$2\omega + 2\Omega + 2\Omega_M - \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M S^{-4}(C^2 - 1)^4}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,2,-2}$	$2\omega + 2\Omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M C^4}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,1,0}$	$2\omega + \Omega$	$\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)C S^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,1,1}$	$2\omega + \Omega + \Omega_M - \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M S^{-2}(4C^6 - 9C^4 + 6C^2 - 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,1,-1}$	$2\omega + \Omega - \Omega_M$	$-\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C^2(4C^2 - 3)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,1,2}$	$2\omega + \Omega + 2\Omega_M - \pi$	$\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M C S^{-3}(C^2 - 1)^3}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,1,-2}$	$2\omega + \Omega - 2\Omega_M + \pi$	$\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M C^3 S}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,0,0}$	2ω	$-\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)(1 - 6C^2 + 6C^4)}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{2,0,1}$	$2\omega + \Omega_M - \pi$	$\frac{45\mu_M a^2 s i_M c i_M C S^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{2,0,-1}$	$2\omega - \Omega_M$	$\frac{45\mu_M a^2 s i_M c i_M C S(1 - 2C^2)}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{2,0,2}$	$2\omega + 2\Omega_M - \pi$	$-\frac{45\mu_M a^2 s^2 i_M C^2 S^{-2}(C^2 - 1)^2}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{2,0,-2}$	$2\omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{45\mu_M a^2 s^2 i_M C^2 S^2}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0,0}$	-2ω	$-\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)(1 - 6C^2 + 6C^4)}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0,1}$	$-2\omega + \Omega_M - \pi$	$\frac{45\mu_M a^2 s i_M c i_M C S^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0,-1}$	$-2\omega - \Omega_M$	$\frac{45\mu_M a^2 s i_M c i_M C S(1 - 2C^2)}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0,2}$	$-2\omega + 2\Omega_M - \pi$	$-\frac{45\mu_M a^2 s^2 i_M C^2 S^{-2}(C^2 - 1)^2}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0,-2}$	$-2\omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{45\mu_M a^2 s^2 i_M C^2 S^2}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$

Table 4 continued

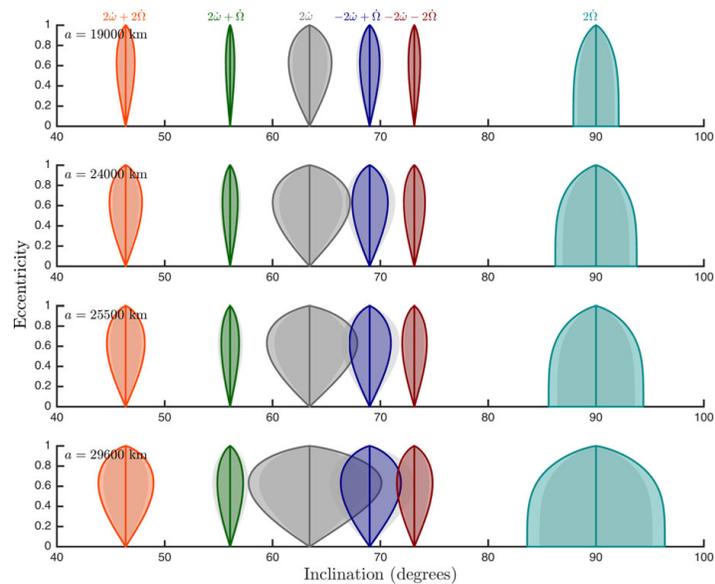
$\dot{\psi}_{2-2p,m,\pm s}$	$\Phi_{2-2p,m,\pm s}^M$	$h_{2-2p,m,\pm s}^M$
$\dot{\psi}_{-2,1,0}$	$-2\omega + \Omega$	$-\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)CS^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,1,1}$	$-2\omega + \Omega + \Omega_M - \pi$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M S^{-2}(4C^6 - 9C^4 + 6C^2 - 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,1,1}$	$-2\omega + \Omega - \Omega_M$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C^2(4C^2 - 3)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,1,2}$	$-2\omega + \Omega + 2\Omega_M - \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M CS^{-3}(C^2 - 1)^3}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,1,2}$	$-2\omega + \Omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M C^3 S}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,2,0}$	$-2\omega + 2\Omega$	$-\frac{15\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)C^2 S^{-2}(C^2 - 1)^2}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{-2,2,1}$	$-2\omega + 2\Omega + \Omega_M - \pi$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C S^{-3}(C^2 - 1)^3}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{-2,2,1}$	$-2\omega + 2\Omega - \Omega_M$	$\frac{15\mu_M a^2 s i_M c i_M C^3 S^{-1}(C^2 - 1)}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{-2,2,2}$	$-2\omega + 2\Omega + 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M S^{-4}(C^2 - 1)^4}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{-2,2,2}$	$-2\omega + 2\Omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{15\mu_M a^2 s^2 i_M C^4}{64a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} e^2(1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{0,1,0}$	Ω	$-\frac{3\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)CS^{-1}(2C^4 - 3C^2 + 1)}{8a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s i c i$
$\dot{\psi}_{0,1,1}$	$\Omega - \Omega_M$	$\frac{3\mu_M a^2 s i_M c i_M C^2(4C^2 - 3)}{8a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s i c i$
$\dot{\psi}_{0,1,2}$	$\Omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{3\mu_M a^2 s^2 i_M C^3 S}{8a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s i c i$
$\dot{\psi}_{0,2,0}$	2Ω	$-\frac{3\mu_M a^2(3s^2 i_M - 2)C^2 S^{-2}(C^2 - 1)^2}{16a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s^2 i$
$\dot{\psi}_{0,2,1}$	$2\Omega - \Omega_M$	$\frac{3\mu_M a^2 s i_M c i_M C^3 S^{-1}(C^2 - 1)}{8a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s^2 i$
$\dot{\psi}_{0,2,2}$	$2\Omega - 2\Omega_M + \pi$	$-\frac{3\mu_M a^2 s^2 i_M C^4}{32a_M^3(1 - e_M^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s^2 i$

quantities associated with the critical resonant angle, as it is technically detailed in [Morand \(2013\)](#). Tesseral resonances are analytically well modeled by a 1.5-DOF Hamiltonian and they primary affect the semi-major axis of the satellite, leading to a thin chaotic response of the system (the 1.5-DOF bounded chaos is physically equivalent to an intermittency phenomenon on the semi-major axis). Despite the fact that chaotic response of the system is very confined in phase-space (on the order of kilometers), we have included these perturbations in the full system to check if such effects may couple with the lunisolar effects on longer

Table 5 Solar secular resonance conditions, harmonic angles, and associated harmonic coefficients needed for the resonant width computations of §2.2. Here we use the abbreviations $s = \sin$ and $c = \cos$

SOLAR COMMENSURABILITIES		
$\dot{\psi}_{2-2p,m}$	$\Phi_{2-2p,m}^S$	$h_{2-2p,m}^S$
$\dot{\psi}_{2,2}$	$2\omega + 2(\Omega - \Omega_S)$	$\frac{15\mu_S a^2 s^2 i_S}{64a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 (1 + ci)^2$
$\dot{\psi}_{2,1}$	$2\omega + \Omega - \Omega_S$	$-\frac{15\mu_S a^2 s i_S c i_S}{16a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 si(1 + ci)$
$\dot{\psi}_{2,0}$	2ω	$-\frac{15\mu_S a^2 (3s^2 i_S - 2)}{64a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,0}$	-2ω	$-\frac{15\mu_S a^2 (3s^2 i_S - 2)}{64a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 s^2 i$
$\dot{\psi}_{-2,1}$	$-2\omega + \Omega - \Omega_S$	$\frac{15\mu_S a^2 s i_S c i_S}{16a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 si(1 - ci)$
$\dot{\psi}_{-2,2}$	$-2\omega + 2(\Omega - \Omega_S)$	$\frac{15\mu_S a^2 s^2 i_S}{64a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} e^2 (1 - ci)^2$
$\dot{\psi}_{0,1}$	$\Omega - \Omega_S$	$\frac{3\mu_S a^2 s i_S c i_S}{8a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s i c i$
$\dot{\psi}_{0,2}$	$2(\Omega - \Omega_S)$	$\frac{3\mu_S a^2 s^2 i_S}{32a_S^3 (1 - e_S^2)^{3/2}} (2 + 3e^2) s^2 i$

Fig. 14 Resonance centers and widths for the special class of inclination-dependent-only lunisolar resonances (q.v. Hughes 1980), plotted both with and without the solar contribution



timescales (Ely 2002). The coefficients of the Earth's gravity field come from the GRIM5-S1 model. Our semi-analytical propagator is configurable and the third-body perturbations from the Moon and the Sun have been developed up to degree 4 and 3, respectively. The positions of the Moon and the Sun were computed from accurate analytical ephemerides (Simon et al. 1994). All of the equations of motion have been formulated through the equinoctial elements, related to the Keplerian elements by

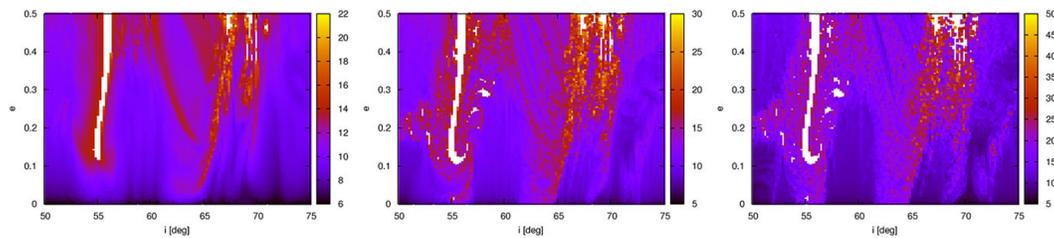


Fig. 15 Time-calibration for the FLI maps. Here we show the typical results obtained after 100, 200, and 530 years, respectively, for $a_0 = 25, 500$ km, under force model 2

$$\begin{aligned}
 & a, \\
 & e_y = e \sin(\omega + \Omega), \\
 & e_x = e \cos(\omega + \Omega), \\
 & i_y = \sin(i/2) \sin(\Omega), \\
 & i_x = \sin(i/2) \cos(\Omega), \\
 & \xi = M + \omega + \Omega,
 \end{aligned} \tag{46}$$

which are suitable for all considered dynamical configurations. The variational system (i.e., the equations of motion for the state and tangent vector) are then propagated using a fixed step size (set to 1 day) Runge-Kutta, 6th-order integration algorithm.

To produce the different maps of the atlas, only the initial eccentricity and inclination were varied, distributed in a regular grid of 320×115 initial conditions for the four semi-major axes of Fig. 3. The computation of the FLIs on a grid of initial conditions allows a clear distinction, in short CPU time, of invariant tori and resonances (Lega et al. 2010; Guzzo et al. 2002). The number of initial conditions chosen was a good balance between CPU time and the final pictures offered by the resolution. Concerning the simulations, after a calibration procedure, we decided to present the results of the FLI analysis after 530 years of propagation. By increasing the iteration time, the basic features of the FLI maps are not changed, but small higher-order resonances can be detected in a proper resolution (Todorović and Novaković 2015). Our chosen timescale may seem prohibitive and might also not be the best trade-off between clear distinction of the separation of nearby orbits (if ever) and CPU time. However, as showed by Fig. 15, a 250 years propagation may leads to partially erroneous conclusions concerning the stability in MEO. Moreover, for weakly hyperbolic orbits (usually for moderately eccentric orbits), the time necessary to detect the divergence is longer. Consequently, there is no risk about the conclusions by presenting the results after this propagation time, at the cost of somewhat more CPU time (Todorović et al. 2008). For the zoomed-in portion, the resolution and propagation duration have been increased to get finer details, structures, and more contrast in the maps. Unless explicitly stated, all others parameters (initial phases, initial epoch, initial tangent vector) have been fixed for each map. Concerning the initial tangent vector, we used the same for the whole map, a fixed normed vector orthogonal to the flow, f , in Eq. 36. The robustness of our results with respect to the choice of w_0 was tested by computing the maximal Lyapunov exponent. The Lyapunov exponent, which is first of all a time average, is a property of the orbit, independent of the initial point of that orbit. By drawing the mLCE maps, we observe a nice agreement with the FLI maps in terms of the detected structures (chaotic or stable). The only (obvious) disagreement was the contrast in the maps, easily explained: Lyapunov exponents are slow to converge. This argument is strong enough to attest the relaxation that we can have with respect of w_0 . Finally, the final values of the FLIs are coded, and projected into the plane

of i - e initial conditions, using a color palette ranging from black to yellow. Darker points correspond to stable orbits, while lighter colors correspond to chaotic orbits. The FLIs of orbits whose propagation stop before reaching the final time, t_f , have not been considered in the maps: they appear as a white to avoid the introduction of spurious structures.⁷ This is the reason why some maps seems to be perforated. Re-entry orbits were in practice declared if there exist a time $t < t_f$ such that $a(1 - e) < 120$ km.

References

- Arnold, V.I., Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I.: *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd edn. Springer-Verlag, Berlin (2006)
- Barrio, R., Borczyk, W., Breiter, S.: Spurious structures in chaos indicators maps. *Chaos Solitons Fractals* **40**, 1697–1714 (2009)
- Batygin, K., Morbidelli, A., Holman, M.J.: Chaotic disintegration of the inner solar system. *Astrophys. J.* **799**, 120–135 (2015)
- Breiter, S.: Lunisolar apsidal resonances at low satellite orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **74**, 253–274 (1999)
- Breiter, S.: Lunisolar resonances revisited. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **81**, 81–91 (2001)
- Breiter, S.: Fundamental models of resonance. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza* **22**, 83–92 (2003)
- Celletti, A., Galeş, C.: On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances. *J. Nonlinear Sci.* **24**, 1231–1262 (2014)
- Celletti, A., Galeş, C., Pucacco, G., Rosengren, A.J.: On the analytical development of the lunar and solar disturbing functions. [arXiv:1511.03567](https://arxiv.org/abs/1511.03567) (2015)
- Chirikov, B.V.: A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.* **52**, 263–379 (1979)
- Cook, G.E.: Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite. *Geophys. J.* **6**, 271–291 (1962)
- Daquin, J., Deleflie, F., Pérez, J.: Comparison of mean and osculating stability in the vicinity of the (2: 1) tesseral resonant surface. *Acta Astronaut.* **111**, 170–177 (2015)
- Deleflie, F., Rossi, A., Portmann, C., Métris, G., Barlier, F.: Semi-analytical investigations of the long term evolution of the eccentricity of Galileo and GPS-like orbits. *Adv. Space Res.* **47**, 811–821 (2011)
- Delhaise, F., Morbidelli, A.: Luni-solar effects of geosynchronous orbits at the critical inclination. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **57**, 155–173 (1993)
- Ely, T.A.: Eccentricity impact on east-west stationkeeping for global position system class orbits. *J. Guid. Control Dyn.* **25**, 352–357 (2002)
- Ely, T.A., Howell, K.C.: Dynamics of artificial satellite orbits with tesseral resonances including the effects of luni-solar perturbations. *Int. J. Dyn. Stab. Syst.* **12**, 243–269 (1997)
- Froeschlé, C., Gonczi, R., Lega, E.: The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt. *Planet. Space Sci.* **45**, 881–886 (1997)
- Froeschlé, C., Lega, E.: On the structure of symplectic mappings. The fast Lyapunov indicator: a very sensitive tool. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **78**, 167–195 (2000)
- Galeş, C.: A cartographic study of the phase space of the elliptic restricted three body problem. Application to the Sun–Jupiter–Asteroid system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17**, 4721–4730 (2012)
- Garfinkel, B.: Formal solution in the problem of small divisors. *Astron. J.* **71**, 657–669 (1966)
- Giacaglia, G.E.O.: Lunar perturbations of artificial satellites of the Earth. *Celest. Mech.* **9**, 239–267 (1974)
- Guzzo, M., Lega, E., Froeschlé, C.: On the numerical detection of the effective stability of chaotic motions in quasi-integrable systems. *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **163**, 1–25 (2002)
- Hadjidemetriou, J.D.: A symplectic mapping model as a tool to understand the dynamics of 2/1 resonant asteroid motion. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **73**, 65–76 (1999)
- Haller, G.: *Chaos Near Resonance*. Springer-Verlag, New York (1999)
- Hughes, S.: Earth satellite orbits with resonant lunisolar perturbations. I. Resonances dependent only on inclination. *Proc. R. Soc. Lond. A* **372**, 243–264 (1980)
- Jupp, A.H.: The critical inclination problem: 30 years of progress. *Celest. Mech.* **43**, 127–138 (1988)
- Kaula, W.M.: *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell, Waltham (1966)
- Lane, M.T.: An analytical treatment of resonance effects on satellite orbits. *Celest. Mech.* **42**, 3–38 (1988)

⁷ Just before the integration stops, the FLI value of a re-entry orbit is still small but the slope of the FLI curve increases exponentially all of the sudden. Thus, there is a risk to consider a chaotic orbit as stable.

- Lane, M.T.: An analytical modeling of lunar perturbations of artificial satellites of the Earth. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **46**, 287–305 (1989)
- Lega, E., Guzzo, M., Froeschlé, C.: A numerical study of the hyperbolic manifolds in a priori unstable systems. A comparison with Melnikov approximations. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **107**, 115–127 (2010)
- Lithwick, Y., Wu, Y.: Theory of secular chaos and Mercury's orbit. *Astrophys. J.* **739**, 31–47 (2011)
- Mardling, R.A.: Resonances, chaos and stability: the three-body problem in astrophysics. *Lect. Notes Phys.* **760**, 59–96 (2008)
- Morand, V.: Semi analytical implementation of tesseral harmonics perturbations for high eccentricity orbits. In: Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Hilton Head, South Carolina, Paper AAS pp. 13–749 (2013)
- Milani, A., Nobili, A.M.: An example of stable chaos in the solar system. *Nature* **6379**, 569–571 (1992)
- Morbidelli, A.: *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. Taylor & Francis, London (2002)
- Morbidelli, A., Froeschlé, C.: On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **63**, 227–239 (1996)
- Morbidelli, A., Giorgilli, A.: On a connection between KAM and Nekhoroshev's theorems. *Phys. D* **86**, 514–516 (1995)
- Morbidelli, A., Guzzo, M.: The Nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 107–136 (1996)
- Murray, N., Holman, M.: Diffusive chaos in the outer asteroid belt. *Astron. J.* **114**, 1246–1259 (1997)
- Richter, M., Lange, S., Bäcker, A., Ketzmerick, R.: Visualization and comparison of classical structures and quantum states of four-dimensional maps. *Phys. Rev. E* **89**, 022902 (2014)
- Rosengren, A.J., Alessi, E.M., Rossi, A., Valsecchi, G.B.: Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the Moon. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **449**, 3522–3526 (2015)
- Robutel, P., Laskar, J.: Frequency map and global dynamics in the solar system I: short period dynamics of massless particles. *Icarus* **152**, 4–28 (2001)
- Simon, J., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J.: Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets. *Astron. Astrophys.* **282**, 663–683 (1994)
- Skokos, Ch.: The Lyapunov characteristic exponents and their computation. *Lect. Notes Phys.* **790**, 63–135 (2010)
- Todorović, N., Novaković, B.: Testing the FLI in the region of the Pallas asteroid family. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **451**, 1637–1648 (2015)
- Todorović, N., Lega, E., Froeschlé, C.: Local and global diffusion in the Arnold web of a priori unstable systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **102**, 13–27 (2008)
- Upton, E., Bailie, A., Musen, P.: Lunar and solar perturbations on satellite orbits. *Science* **130**, 1710–1711 (1959)
- Varvoglis, H.: Diffusion in the asteroid belt. *Proc. Int. Astron. Union IAUC197*, 157–170 (2004)

Résumé des contributions nouvelles

La forme normale résonante du hamiltonien à 2.5-DOF

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep.}} + \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_S \quad (4.20)$$

a été construite et réduite sous des hypothèses d'isolement des résonances, pour lesquelles nous avons donné les transformations unimodulaires complétées de façon symplectique. Insistons sur le fait qu'elle prend en compte les perturbations dues à la Lune *et* au Soleil. Cette réduction tient aussi compte du fait que des arguments résonants de la Lune et du Soleil peuvent coïncider, et nous avons alors fourni l'amplitude de l'harmonique correspondante. En substance, il s'agit de pouvoir écrire explicitement une expression du type

$$a_L \cos(\sigma - \rho_L) + a_S \cos(\sigma - \rho_S), \quad (4.21)$$

comme

$$a \cos(\sigma + \nu). \quad (4.22)$$

Il est très simple d'expliciter la valeur du coefficient a en utilisant le fait que les fonctions $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de $L^2[0, 1]$. Le calcul direct donne alors

$$a = \sqrt{a_L^2 + a_S^2 + 2a_L a_S \cos(\rho_L - \rho_S)}. \quad (4.23)$$

La réduction de la forme normale résonante nous a permis de caractériser l'amplitude $\Delta_{\mathbf{k}}$ des résonances, traduites aussi en les variables képlériennes Δe , Δi . Nous avons alors pu compléter la figure 4.3 qui présentait les centres de résonances

$$\mathcal{C}_{\mathbf{k}} = \left\{ (i, e) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 1[\mid \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0 \right\}, \quad (4.24)$$

en y précisant l'amplitude des résonances dans ce plan, les amplitudes étant délimitées par les courbes

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \left\{ (i, e) \in [0, 2\pi] \times [0, 1[\mid \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = \pm \Delta_{\mathbf{k}} \right\}. \quad (4.25)$$

Nous avons alors observé, au fur et à mesure que a croît dans $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$, une transition d'un régime dominé par des résonances isolées vers un régime de CHIRIKOV où les résonances se superposent densément autour des inclinaisons résonantes. L'application de ce principe structural général nous a permis de gagner en intuition sur ce système physique. La transition vers l'instabilité à la CHIRIKOV que nous avons déduite analytiquement a été confrontée à une analyse de stabilité semi-numérique du plan de phase $i - e$, analyse paramétrée par le choix du modèle physique. Les deux approches sont en adéquation, et complémentaires, si bien que l'on peut affirmer que le système est du type CHIRIKOV pour les satellites de navigation. Le modèle de force le plus simple ne pervertissant pas les caractéristiques chaotiques de l'espace de phases a été isolé semi-numériquement, et nous a permis de valider les simplifications faites dans notre théorie analytique : il contient le J_2 , la Lune et le Soleil développé au degré 2. Finalement, nous avons montré que, en plus d'avoir quantifié l'hyperbolicité du système, c'était aussi et par la même les routes de transport qui avaient été révélées dans l'espace des phases. L'augmentation de l'excentricité est alors rendue possible de part cette superposition de résonances et correspond aux excursions dans la mer chaotique, dont l'étendue et la géométrie ont été révélées pour plusieurs paramètres du problème (demi-grand axe initial, configuration initiale du système Terre-Lune, phases initiales du problème).

4.2.2 Temps de collision et chaos : application à Galileo

La précédente section est restée volontairement très générale dans sa forme : nous avons appliqué des principes généraux de dynamique pour l'étude des orbites MEO. Nous avons alors proposé plusieurs points d'ancrages pour compléter cette étude, notamment des résultats plus fins quant à la stabilité des satellites Galileo ainsi que l'estimation des temps de collision, par exemple, d'intérêts majeurs en pratique. Dans le précédent atlas FLI, nous n'avons pas consigné les valeurs finales des FLI des orbites rentrantes. Rappelons que s'il en avait été autrement, nous aurions introduit de fausses structures dans les cartes : des orbites chaotiques auraient été déclarées stables.

En 2012, dans le cadre d'un contrat ESA/ESOC, une étude du choix des conditions initiales pour les satellites GNSS a été initiée (les investigations semi-numériques ayant été faites avec STELA) [DAR⁺]⁶, dans le but d'identifier des régions de l'espace stables (pour définir des orbites parking), ou au contraire des régions instables, afin de définir des scénarios pour minimiser les risques hasardeux de collision. En particulier, les auteurs se sont intéressés aux satellites du type

1. Galileo, avec $a \sim 29\,600$ km, $e \sim 0.001$ et $i \sim 56^\circ$,
2. Glonass, avec $a \sim 25\,600$ km, $e \sim 0.001$ et $i \sim 65^\circ$,
3. GPS, avec $a \sim 26\,500$ km, $e \sim 0.001$ et $i \sim 55^\circ$,
4. Beidou, avec $a \sim 28\,000$ km, $e \sim 0.001$ et $i \sim 55^\circ$.

Sur le plan méthodologique, les auteurs ont en particulier présenté et analysé des cartes de variation maximale d'excentricité dans le plan (ω, Ω) et (Ω, t) ⁷, réalisées en propageant les équations moyennes du mouvement sur des horizons dynamiques de 200 ans. Des approches très similaires ont été effectuées en propageant les équations exactes du mouvement sur des horizons de 250 ans [SYBC10, SYP15].

Nous présentons ici des résultats complémentaires⁸ et confirmant certains aspects de ces travaux, à la lumière des indicateurs de chaos variationnels⁹ et de l'architecture de la région MEO que nous avons présentée dans la section 4.2.1. Dans le but d'obtenir des résultats plus fins, signalons que nous avons délibérément propagé les équations du mouvement sur un horizon dynamique plus grand, égal à 500 ans. Contrairement à la section 4.2.1, nous nous sommes restreints ici uniquement à l'étude de la dynamique au voisinage des Galileo, *i.e* que nous avons dorénavant fixé le paramètre de perturbation $\epsilon = \epsilon(a)$ avec $a \sim 29\,600$ km. Nous présentons des cartes de stabilité dans différents plans, nous estimons les temps de LYAPUNOV ainsi que les temps associés aux orbites pouvant devenir rentrantes.

6. Au moment de la rédaction de ce manuscrit, la valorisation de ces résultats dans un journal avec comité de lecture est soumis : E. M. Alessi, F. Deleflie, A. J. Rosengren, A. Rossi, G. B. Valsecchi, J. Daquin, K. Merz, *A Numerical Investigation on the Eccentricity Growth of GNSS Disposal Strategies*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2016).

7. La configuration initiale du système Terre-Lune-Soleil dépend de l'époque initiale.

8. Les résultats dans un journal avec comité de lecture ont été soumis : A. J. Rosengren, J. Daquin, E. M. Alessi, F. Deleflie, A. Rossi and G. B. Valsecchi, *Galileo disposal strategy : stability, chaos and predictability*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2016).

9. Au sens strict du terme, l'indicateur d'excentricité maximale n'est pas un indicateur de chaos, même s'il est communément utilisé, y compris dans d'autres communautés [RCOB15].

GALILEO DISPOSAL ORBIT STRATEGY: RESONANCES, CHAOS, AND STABILITY

Aaron J. Rosengren⁽¹⁾, Jérôme Daquin⁽²⁾, Elisa Maria Alessi⁽³⁾, Giovanni B. Valsecchi⁽⁴⁾,
Alessandro Rossi⁽⁵⁾, and Florent Deleflie⁽⁶⁾

⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾IFAC-CNR, Via Madonna del Piano 10, 50019 Sesto Fiorentino (FI), Italy,
+39 055 5226315, a.rosengren@ifac.cnr.it

⁽²⁾Thales Services, 3 Impasse de l'Europe, 31400 Toulouse, France,
+33 5 62 88 85 06, jerome.daquin@imcce.fr

⁽⁴⁾IAPS-INAF, Via Fosso del Cavaliere 100, 00133 Roma, Italy,
+39 06 4993 4446, giovanni@iaps.inaf.it

⁽²⁾⁽⁶⁾IMCCE/Observatoire de Paris - Université Lille1, 1 Impasse de l'Observatoire, 59000 Lille,
France, +33 1 40 51 22 74, florent.deleflie@imcce.fr

Abstract:

Recent studies have shown that the Global Navigation Satellite Systems exist in a background of complex resonant phenomena and chaotic motion. Woven throughout the inclination and eccentricity phase space is an exceedingly complicated web-like structure of lunisolar secular resonances, which become particularly dense near the inclinations of the navigation satellite orbits. As in all cases in the Solar System, chaos emerges from the interaction and overlapping of neighboring resonances. The precarious state of the four navigation constellations, perched on the threshold of instability, makes it understandable why all past efforts to define stable graveyard orbits, especially in the case of Galileo, were bound to fail; the region is far too complex to allow of an adoption of the simple geosynchronous disposal strategy. We retrace one such recent attempt, funded by ESA's General Studies Programme in the frame of the GreenOPS initiative, that uses a systematic parametric approach and the straightforward maximum-eccentricity method to identify long-term stable regions, suitable for robust graveyards, as well as large-scale excursions in eccentricity, which can be used for post-mission deorbiting of constellation satellites. We then apply our new results on the stunningly rich dynamical structure of the MEO region toward the analysis of these disposal strategies for Galileo, and discuss the practical implications for chaos in this regime.

Keywords: *Medium-Earth Orbits, Chaos, Resonances, Fast Lyapunov Indicator, Stability Maps.*

1. Introduction

The application of the mathematical tools and techniques of nonlinear dynamics has provided astronomers with a deeper understanding of the dynamical processes that have helped to shape the Solar System [1]. Resonant phenomena connected with the commensurability of frequencies of interacting motions abound in celestial mechanics and have both dynamical and theoretical importance. A succession of remarkable features in the asteroid belt, known as the Kirkwood gaps, vividly illustrates the physical significance of resonances and chaos in real systems. Considerable impetus was imparted over the past three decades to the study and understanding of this type of chaotic unpredictability and its manifestation in other astronomical problems.

With chaotic motions being a natural consequence of even the most simplest of systems, it may no longer be sensible to investigate the “exact” trajectory of a celestial body (natural or artificial)

in a given time interval [2]. Far beyond the Lyapunov time, the characteristic time over which an orbit is said to remain predictable, it is not possible to reproduce the same time evolution if the system is chaotic, due to the exponential growth of uncertainties (in the initial state, mis-modeling effects, numerical errors, etc.). The irregular and haphazard character of the chaotic path of a celestial body reflects a similar irregularity in the trajectories of stochastic systems, as if the former were influenced by a random perturbation even though, in fact, the motion is governed by purely deterministic dynamical equations. There is, however, an essential difference: “classical (that is, non-quantum mechanical) chaotic systems are not in any sense intrinsically random or unpredictable,” as John Barrow puts it, “they merely possess extreme sensitivity to ignorance [3].” Despite the unpredictability of the path of a particular orbit, chaotic systems can exhibit statistical regularities, and have stable, predictable, long-term, average behaviors [4]. The lesson is that the time evolution of a chaotic system can only be described in statistical terms; one must study the statistical properties of ensembles of stochastic orbits [2, 5].

Our knowledge about the stability of the orbits of artificial satellites is still incomplete. Despite over fifty years of space activities, we know amazingly little about the dynamical environment occupied by artificial satellites and space debris. Strange as it may seem, we understand the structure and evolution of the, mostly invisible, trans-Neptunian belts of small bodies [1] far better than we understand that of the artificial bodies that orbit our terrestrial abode. Before these remnants of Solar-System formation diverted the interests and energies of space-age astronomers, such astrodynamical problems stood in the foremost rank of astronomical research work [6]. The kind of Newtonian determinism brought to bear during the 1960s has continued merrily along in astrodynamics, unheeding the fundamental discoveries of nonlinear dynamics. Today we take for granted the great power and scope of modern computers, treating them as the supreme intelligence imagined by Laplace, and the construction of increasingly more ‘accurate’ and grandiloquent dynamical models and simulation capabilities has become the central task of the field.

As long as our thought processes are limited along the inflexibilities of determinism, we will remain forever ignorant of the possible range and vagaries of chaos in Earth satellite orbits. An understanding of these chaotic phenomena is of fundamental importance for all efforts to assess debris mitigation measures — efforts which may shed much light on the design and definition of optimal disposal strategies throughout all space regions (LEO, MEO, GEO, HEO, LPO), taking into account orbital interaction and environmental evolution. In this context, there has been considerable recent interest in designing novel de-orbiting or re-orbiting solutions for the MEO navigation satellites [7, 8, 9], since the operational constellations and recommended graveyard orbits have been found to be unstable [10].

The intent of this paper is to provide a case study on the European Galileo system that can be used as a reference for the other constellations, and to serve as a springboard for investigating new dynamical situations that may arise. We begin with a parametric numerical study on two end-of-life disposal strategies, based on the Laplacian paradigm, which investigates the role of the initial parameters of the disposal orbits (the semi-major axis, eccentricity, inclination, orientation phase angles, and epoch) on their long-term stability over centennial and longer timescales. We summarize our findings from this extensive numerical experiment and show, based on our recent studies of the dynamical structure of MEO [11], why such general recommendations and guidelines

should be taken with a grain of salt. We then tailor our results on the resonant and chaotic structures of the phase space near lunisolar secular resonances [11, 12] towards the analysis of the disposal options for Galileo. We omit on this occasion any mathematical discussion and simply present the main results at which we have arrived.

2. Parametric Study on Two Disposal Strategies

2.1. Introduction and Experimental Setup

Considerable attention is now being devoted to the problem of determining the long-term stability of medium-Earth orbits. The problem has been especially timely ever since the advent and launch of the European Galileo and the Chinese Beidou constellations. The main physical mechanisms that can lead to substantial variations in eccentricity, thereby affecting the perigee radius, are resonance phenomena associated with the orbital motion of artificial satellites. While the dynamics of MEOs, governed mainly by the inhomogeneous, non-spherical gravitational field of the Earth, is usually only weakly disturbed by lunar and solar gravitational perturbations, for certain initial conditions, appreciable effects can build up through accumulation over long periods of time. Such lunisolar resonances, which can drastically alter the satellite's orbital lifetime, generally occur when the second harmonic of the Earth's gravitational potential (J_2) causes nodal and apsidal motions which preserve a favorable relative orientation between the orbit and the direction of the disturbing force [12]. There is also another class of resonances that occurs when the satellite's mean motion is commensurable with the Earth's rotation rate, thereby enhancing the perturbing effects of specific tesseral harmonics in the geopotential. These tesseral resonances pervade the MEOs of the navigation satellites [7] and their net effects are to produce small, localized instabilities in the semi-major axis.

A proper understanding of the stability characteristics of the two main types of resonances in MEO is vital for the analysis and design of disposal strategies for the four constellations. This concerns particularly the question as to whether suitable stable orbits exist such that satellites in these graveyards will not interfere with the constellations, or whether strong instabilities exist, whose destabilizing effects manifest themselves on decadal to centennial timescales, that can be exploited to permanently clear this region of space from any future collision hazard. The process of dynamical clearing of resonant orbits is a new paradigm in post-mission disposal, but has not been hitherto rigorously studied.

Accordingly, in the framework of the ESA/GSP Contract No. 4000107201/12/F/MOS, we investigate the structure of the web of commensurabilities in the MEO region, using a dynamical model accounting for the Earth's gravity field, lunisolar perturbations, and solar radiation pressure (Tab. 1). We study particularly to what extent the change in initial parameters of storage orbits can affect the long-term stability of these orbits over long intervals of time. This study is based on the numerical integration of the averaged equations of motion, using a semi-analytic model suitable for all dynamical configurations, which has been approved as the reference model for the French Space Operations Act (through the software, STELA, and its fortran prototype¹).

¹STELA (Semi-analytic Tool for End of Life Analysis) can be downloaded from the CNES website:

Table 1. Gravitational perturbations added to the central part of the geopotential for the numerical stability analysis. Model 4 (which also includes SRP perturbations with Earth shadow effects) is used for the MEM maps of the ESA study and model 1 for the FLI and Lyapunov time stability maps of Section 4.

	ZONAL	TESSERAL	LUNAR	SOLAR
model 1	J_2	not considered	up to degree 2	up to degree 2
model 2	$J_2, J_2^2, J_3 \cdots, J_5$	not considered	up to degree 4	up to degree 3
model 3	$J_2, J_2^2, J_3 \cdots, J_5$	up to degree & order 5	up to degree 4	up to degree 3
model 4	$J_2, J_2^2, J_3 \cdots, J_7$	up to degree & order 5	up to degree 3	up to degree 3
model 5	$J_2, J_2^2, J_3 \cdots, J_7$	up to degree & order 5	up to degree 4	up to degree 3

An analysis of the historical practices of the GNSS constellations was performed in order to properly define the reference simulation scenario [7]. The nominal initial conditions and values of area-to-mass ratio considered for each disposal strategy are displayed in Tab. 2. For the *graveyard orbit scenario*, it is important to ensure that the storage orbits have only small-amplitude orbital deformations over long periods of time, so that the inactive satellites cannot cross the orbital region of active GNSS components (and possibly collide). This in turn implies that we must minimize the long-term eccentricity growth in order to delay or prevent the penetration of the GNSS altitude shells. Alternatively, for the *eccentricity growth scenario*², we explore the possibility of de-orbiting satellites by pushing them into unstable phase-space regions that would slowly decrease their perigee distances, leading to a long-term reduction in the combined constellation and intra-graveyard collision risks.

The numerical investigation consisted in propagating the initial conditions of Tab. 2 for 200 years, under the dynamical model 4 in Tab. 1, for a large variety of initial orientation phase parameters and analyzing the maximum eccentricity attained in each case. This maximum-eccentricity method (MEM) provides a straightforward indication of ‘stability’ and has been used in a number of astronomical contexts [13, 14, 15]. Instinctively and historically, we expect that the orbits become more unstable as their eccentricities grow; yet, we note that this method is not necessarily an estimator of chaos and stability (since large amplitude variations of eccentricity could be due to regular motion, e.g., secular perturbations; and small oscillations could be the result of slow manifestations of chaotic behaviors, e.g., orbits with large Lyapunov times). We characterize each initial point of the parameter plane by their maximum eccentricity value (or a closely related quantity) under the following conditions:

1. 36 equally spaced values of $\omega \in [0^\circ : 360^\circ]$ in increments of 10° ;
2. 36 equally spaced values of $\Omega \in [0^\circ : 360^\circ]$ in increments of 10° ;
3. 38 equally spaced initial epochs t_0 .

<http://logiciels.cnes.fr/STELA/en/logiciel.htm>

²Note that for this disposal strategy, a maneuver ($\Delta v \sim 100$ m/s) is applied at the nominal orbit of the Galileo constellation; i.e., at the same initial orbital elements as in the graveyard case, except for the semi-major axis which is lowered by $\Delta a = 550$ km, resulting in the semi-major axis and eccentricity displayed in the second row of Tab. 2.

The same analysis has also been performed by increasing and decreasing, respectively, the initial inclination by 1° with respect to the nominal value. The aim is not only to see if the known resonant harmonic $2\omega + \Omega$ is actually the most significant, as suggested, justly or unjustly, by many others [10, 9], but also to gain insight on the role of the initial inclination and of the Earth-Moon-Sun dynamical configuration on the evolution of the orbits.

Table 2. Initial mean orbital elements considered for the disposal orbits of the Galileo constellations, and the corresponding values of area and mass. The difference in semi-major axis Δa with respect to the nominal constellation is also shown.

Disposal Strategy	a (km)	Δa (km)	e	i (deg)	A (m ²)	m (kg)
Graveyard Orbit	30,150	550	0.001	56	9.3	665
Eccentricity Growth	28,086	-1514	0.0539	56	9.3	665

The Saros Cycle and Earth’s Orbital Environment : Any account of motion in the Earth-Moon-Sun system has to start with a description of the dynamical configuration of this three-body problem. The motion of the Moon manifests an abundance of irregularities, many of them large enough to have been discovered by ancient astronomers. While the Moon’s actual motion is very complex, Perozzi and colleagues [16] have shown through the use of eclipse records and the refined lunar ephemeris computed at JPL, which accounts for all Solar System perturbations, that the relative dynamical geometry of the Earth-Moon-Sun system at any time is very nearly repeated after a period of time equal in length to the classical cycle known as the Saros³. Saros means repetition and indicates a period of 6 585.321 347 days, after which the Sun has returned to the same place it occupied with respect to the nodes of the Moon’s orbit when the cycle began. As a consequence, the geocentric lunar orbit is nearly periodic with such period.

Armed with the above knowledge, we have made our numerical integrations also with the purpose of investigating whether after every Saros a specific configuration of (Ω, ω) leads to the same eccentricity growth. To this end, the simulations were performed every $\Delta t = \text{Saros}/19 \approx 346.59586$ days, starting from $t_0 = 26$ February 1998 (a solar eclipse epoch) to $t_f = 2$ Saros. We have chosen this time step because it corresponds to an eclipse year, the period of time after which the Moon passes through the same node and the Earth, Moon, and Sun are aligned.

2.2. Simulation Results and Discussion

We present here only a subset of our results as the full scope of this study will be given in a later paper and its relation to the other navigation constellations will be formulated there more completely. No space will be devoted therefore to any comparison between the similar, albeit less systematic, efforts to tackle this problem by other groups of researchers [8, 9].

³The Saros has been the basis for which predicting eclipses rests since the very dawn of Chaldean history; after the lapse of the Saros period of roughly 6585 days, solar and lunar eclipses recur under almost identical circumstances except that they are displaced about 120° westward on the Earth. The near repetition of eclipses is a consequence of the set of near commensurabilities existing between the various types of lunar months; namely, 223 synodic months is nearly 239 anomalistic months and 242 draconic months.

Figure 1 shows a sample of results from this experiment, and Fig. 2 outlines an ω -targeting strategy to achieve the desired outcome. Similar MEM maps were made for each eclipse year, and the variations in inclination and semi-major axis were tracked in addition to the eccentricity⁴, from which we can make the following general observations. The semi-major axis does not change significantly in 200 years (at most 70 km in absolute value) in any of the cases explored. Consequently, to avoid interferences with the operational constellation, the eccentricity should not exceed 0.02. The minimum eccentricity required to re-enter the atmosphere, assumed to occur whenever the altitude reaches at least 120 km, is about 0.77. The near invariability of the semi-major axis leads us to conclude that the tesseral harmonics cannot be responsible for the noted eccentricity instabilities.

For the *graveyard orbit* scenario, we noticed that the eccentricity can grow up to about 0.4, for any of the considered initial inclinations. Moreover, we note the vertical bands of stability (negligible eccentricity growth) in (Ω, ω) , Fig. 1, which shift as a function of t_0 (not shown here). In general, we found that it was nearly always possible to target an argument of perigee ensuring ‘stability’ (Fig. 2); that is, for any given (t_0, Ω) there exists at least one initial ω corresponding to a safe disposal. The situation seems more favorable if the initial inclination is increased by 1° , in the sense that the stable vertical bands are wider.

Concerning the *eccentricity growth* scenario, we found that the eccentricity can increase by up to 0.8, for the three initial values of inclination considered. In the nominal Galileo case, the eccentricity growth is remarkable in the entire (t_0, Ω, ω) phase space; specifically, for any given epoch and ascending node, there exists always one (but generally more) initial ω leading to a re-entry (Fig. 2). In the -1° case, re-entry values for e can be achieved if $\Omega \in [50^\circ, 300^\circ]$, while in the $+1^\circ$ case, the Ω range depends on t_0 . If the satellite’s node does not match these such values, then the eccentricity tends to stay below 0.1. Atmospheric re-entries were found for the three cases to occur only after at least 100 years.

Finally, we observed a very interesting characteristic of this multi-frequency and highly-perturbed dynamical system. We have performed further analysis with respect to the behavior in time of the maps, by simulating the eccentricity evolution starting from initial epochs displaced by 5 Saros periods from the first 19 considered eclipse year epochs. This revealed that the MEM maps are not periodic over the Saros cycle (~ 18.03 years), but in fact over 1 nodal regression period of the Moon (~ 18.61 years). At first sight, this seems rather surprising, but when duly considered, manifests itself as a natural consequence of the lunar perturbing force, which we now speculate as the main driver of the long-term dynamics. First noted by Musen [17], when doubly averaged, the long-period lunar effect “depends only upon the position of the orbital plane of the Moon and is not influenced by the position of the lunar perigee.” Thus, we should not expect the general behavior to be periodic over the Saros period, which intrinsically accounts for both the nodal regression and apsidal precession.

⁴The inclination behavior will not be discussed here.

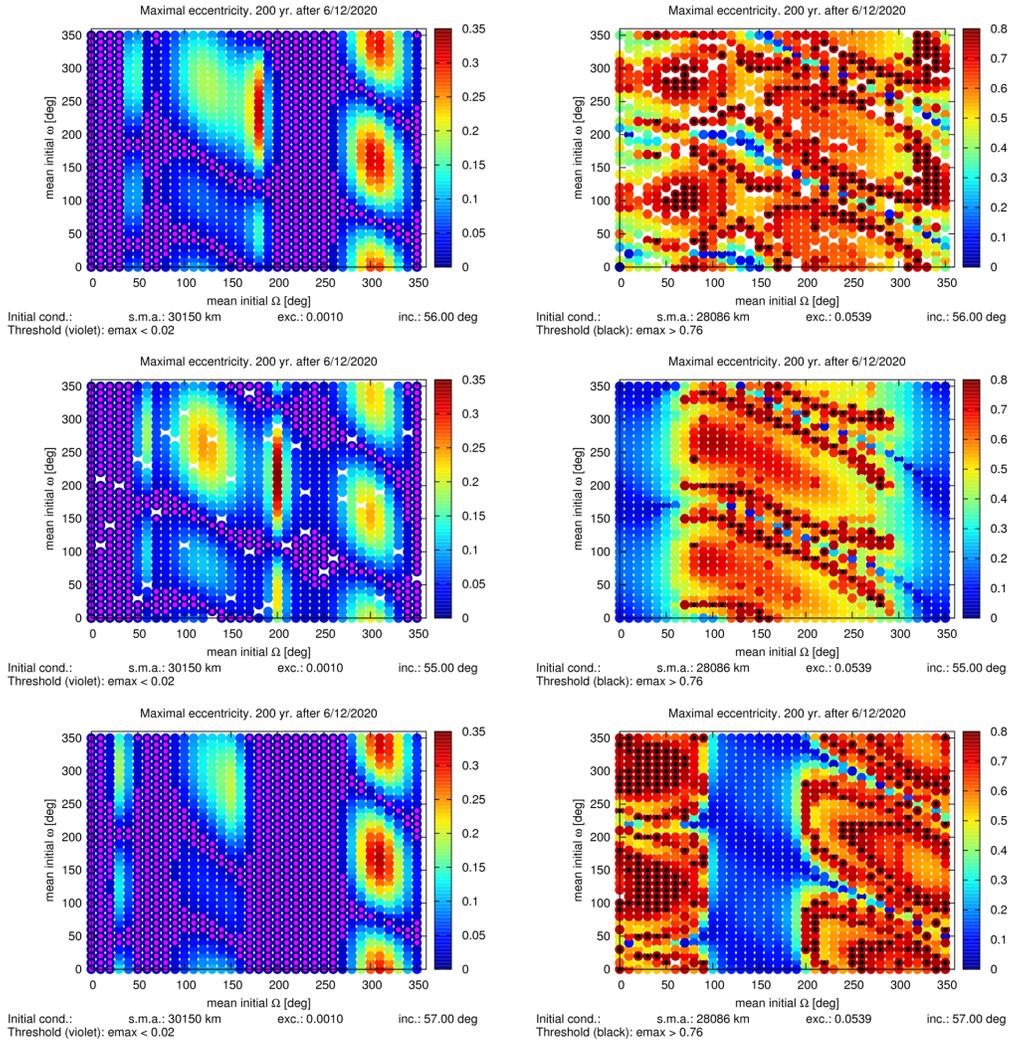


Figure 1. The maximum eccentricity attained in 200 years (colorbar), as a function of the initial longitude of ascending node and argument of perigee, at a given epoch, for the graveyard orbit (left) and eccentricity growth (right) scenarios. Points that meet the various thresholds are indicated by violet ($e_{\max} < 0.02$) and black ($e_{\max} > 0.76$), and the empty white spaces are locations where data is missing due to numerical issues.

Practical Implications of Chaos : Any initial uncertainty in our knowledge of a chaotic system will have small consequences early but profound consequences late, often being rapidly amplified in time. While it is true that the verification of some criteria of stability to define the initial parameters of storage orbits requires long-term orbit propagation up to more than 100 years, most international guidelines and recommendations seem fixated on 200-year forecasts. The 200-year timespan for future projections is not only arbitrary, but completely nonsensical from a dynamical perspective. Every distinct problem in orbital dynamics conditions its own particular scheme of computation, and the question of an appropriate timescale upon which to investigate cannot therefore be answered in a general manner; the answer depends largely on the problem in question and on the degree of knowledge aimed at. An improper assessment can lead to erroneous conclusions regarding stability

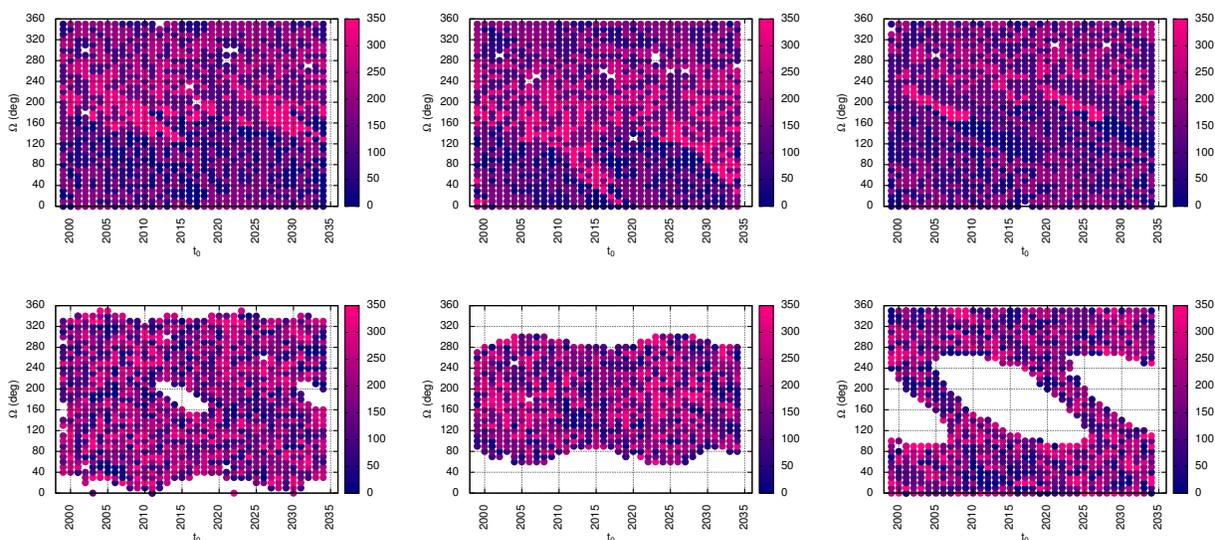


Figure 2. The ω -targeting strategy: the value of argument of perigee (colorbar) which ensures that the eccentricity will not exceed 0.02 in 200 years (top) or which ensures a re-entry (bottom), as a function of the initial epoch and longitude of ascending node. Left: nominal initial inclination; middle: initial inclination decreased by 1° ; right: initial inclination increased by 1° .

and chaos. Consider, for example, one of the declared safe graveyard orbits of Fig. 1, as shown in Fig. 3. This orbit does not manifest any significant eccentricity growth for 200 years, and yet is revealed by our stability analysis to be chaotic with a Lyapunov time of 55 years. Alternatively, chaotic orbits which initially appear to re-enter may follow evolutionary paths that lead to long-lasting eccentric orbits (Fig. 3(b)).

3. Resonance Overlap and the Origin of Chaos

3.1. Background

Resonances are regions in the phase space of a dynamical system in which the frequencies of some angular variables become nearly commensurate. Such regions have a profound effect on the long-term dynamics of the system, giving rise to a rich spectrum of highly complicated behaviors [4]. It is of great practical importance to understand the mechanisms behind these irregular features, both qualitatively and quantitatively. Recently, it has been realized that lunisolar secular resonances (i.e., caused by the Moon and the Sun on long timescales) are of particular importance in the medium-Earth orbit regime [12, 11]. We review in this section our investigations on the detection of regular structures and chaotic behaviors in the phase space near the navigation satellites. Studying the long-term effects of lunisolar secular resonances is crucial, not only because we need to understand their stability properties, but also because we would like to know whether they could be used (and how) for eventually deorbiting satellites, by forcing them to slowly drift towards high eccentricities and different inclinations.

Despite the variety and complexity of the nature of the dynamics near resonances, we can build an

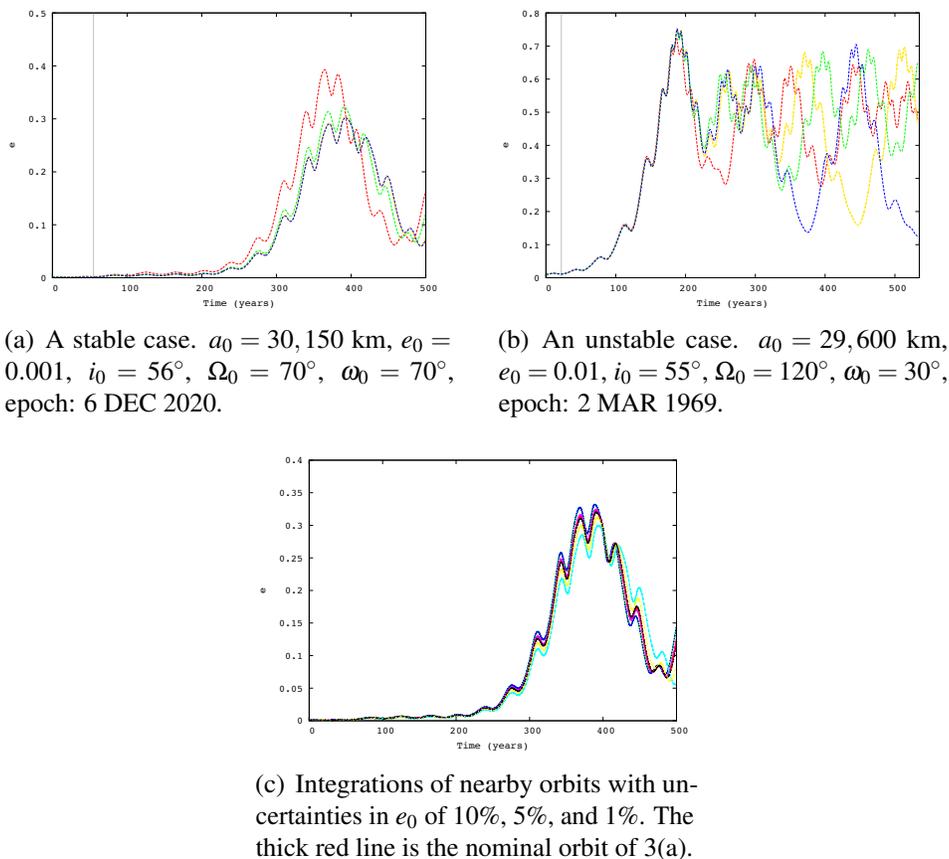


Figure 3. Numerical ensemble integrations according to the various dynamical models (top) in Tab. 1 and of nearby orbits (bottom) for apparently safe disposal and re-entry orbits. The vertical lines indicate the Lyapunov times, corresponding to an average limit of predictability of each orbit.

intuitive understanding using the mechanics of a pendulum. Pendulum-like behavior is fundamental to the mathematics of resonance: phase-space structure, separatrices of a periodic motion, and stability. The principal effect of the interaction of two resonances is to produce qualitative changes in the separatrix of the perturbed resonance, producing a stochastic layer in its vicinity. The onset of deterministic chaos and the loss of stability is predicted to occur when the separation between the resonances is of the order of their resonance widths [4]. Nearly all chaos in the Solar System and beyond has been attributed to the overlapping of resonances [1]⁵.

3.2. Lunisolar Resonant Skeleton

Focusing on the MEO region located between three and five Earth radii, namely in a region for which the variation of the argument of perigee ω and longitude of ascending node Ω may be estimated by considering only the effect of J_2 (the second zonal harmonic coefficient of the geopotential) and for which the lunar and solar potentials may be approximated with sufficient accuracy by quadrupole fields, the center of each lunisolar secular resonances (for prograde orbits) may be defined in the

⁵Note that while this is the main physical mechanism for the generation of chaos, two overlapping resonances may lead to regular motion sometimes; see, e.g., [18].

inclination–eccentricity (i – e) phase space by the curves [12, 11]

$$\mathcal{C}_n = \left\{ (i, e) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1] : \dot{\psi}_n = n_1 \dot{\omega} + n_2 \dot{\Omega} + n_3 \dot{\Omega}_M = 0 \right\} \quad (1)$$

for $n_1 = \{-2, 0, 2\}$, $n_2 = \{0, 1, 2\}$, $n_3 \in [-2, 2]$, where

$$\dot{\omega}(i, e) = \frac{3 J_2 R^2 \sqrt{\mu} 5 \cos^2 i - 1}{4 a^{7/2} (1 - e^2)^2}, \quad \dot{\Omega}(i, e) = -\frac{3 J_2 R^2 \sqrt{\mu} \cos i}{2 a^{7/2} (1 - e^2)^2}, \quad \dot{\Omega}_M = -0.053^\circ/\text{day}. \quad (2)$$

Here the semi-major axis a is a parameter⁶, R is the mean equatorial radius of the Earth and μ its gravitational parameter. Using the full machinery for pendulums, it can be shown that the curves delimiting the maximum separatrix width of each resonance (i.e., the maximum amplitude inside the libration zone) are defined by [11]

$$\mathcal{W}_n^\pm \equiv \left\{ (i, e) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1] : \dot{\psi}_n = \pm \Delta_n \right\}, \quad (3)$$

in which

$$\Delta_n = 2 \sqrt{\frac{3 J_2 R^2}{2 a^4} \left| \frac{n_1^2 (2 - 15 \cos^2 i_*) + 10 n_1 n_2 \cos i_* - n_2^2 h_n(i_*, e_*)}{(1 - e_*^2)^{5/2}} \right|}, \quad (4)$$

where h_n is the harmonic coefficient in the lunar and solar disturbing function expansions, associated with the harmonic angle which is in resonance⁷, and (i_*, e_*) are the ‘actions’ at exact resonance; namely, the inclinations and eccentricities that satisfy (1).

Figure 4 shows that resonances fill the phase-space near the Galileo constellation. These resonances form in some sense the skeleton or dynamical backbone, organizing and governing the long-term orbital motion. The resulting dynamics can be quite complex, and it has been shown that chaos ensues where resonances overlap [12]. It is particularly noteworthy that the nominal inclination of Galileo lies right at the cusp of three distinct and dynamically significant resonant harmonics. Such naivety in the placement of these important assists reflects the need of a real dynamical assessment in constellation design. What is more to the point is that the conclusions drawn from the computationally expensive parametric study of Section 2. are easily corroborated here. In the graveyard orbit scenario, increasing the inclination by 1° moves the storage orbits outside of the overlapping regime, and thus we would naturally expect this to be the more dynamically stable case. For the eccentricity growth scenario, the nominal Galileo case is the more unstable situation because the orbits lie at the primary $\psi_{2,1,0}$ resonance, while the instabilities in the other inclination cases are likely due to the generation of secondary resonances (commensurabilities of the libration and circulation frequencies of primary resonances) that expand the size of the chaotic zones about the $\psi_{2,1,0}$ resonance. Rather ironically, the targeting of a lower semi-major axis for this disposal strategy appears inappropriate, as keeping the constellation at the Galileo semi-major axis would have resulted in greater instabilities with the interaction of the three distinct primary resonances.

⁶The lunar and solar perturbation parameters are proportional to a as $\varepsilon_M = \varepsilon_M(a/a_M)$ and $\varepsilon_S = \varepsilon_S(a/a_S)$.

⁷Explicit expressions for h_n for each of the 29 distinct curves of secular resonances are given in [11].

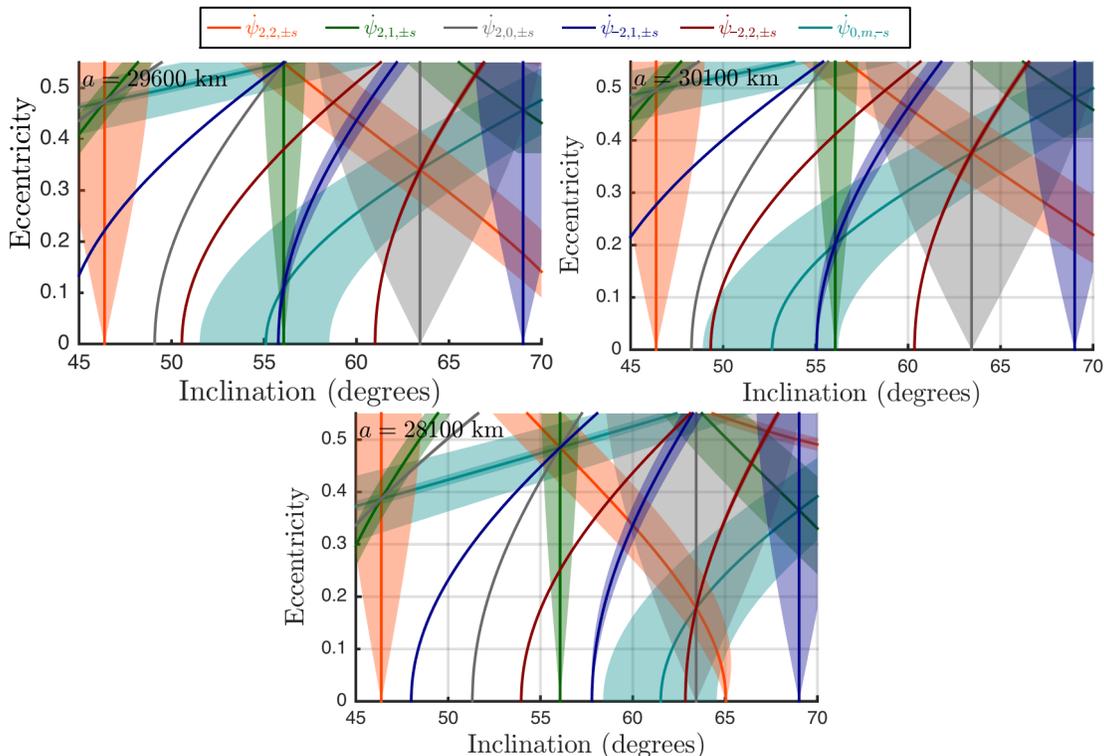


Figure 4. Lunisolar resonance centers \mathcal{C}_n (solid lines) and widths \mathcal{W}_n^\pm (transparent shapes) for various values of the satellite’s semi-major axis near Galileo. This plot shows the regions of overlap between distinct resonant harmonics.

This basic understanding reached, using pen-and-paper calculations in the manner of Lagrange and Laplace, is a strong testimony to the enduring power of analytical theories in celestial mechanics.

Figure 4 gives the basic regions in the 2D inclination–eccentricity phase space for which chaotic orbits can be found, but gives no information about which initial angles (ω , Ω , and Ω_M) will lead to chaos. For this, we turn to the numerical detection of chaotic and regular motion through FLI stability and Lyapunov time maps, which furthermore provide a global visualization of the curious symbiosis of these two fundamental types of behaviors.

4. FLI Stability Analysis

It was shown in [11] that model 1 in Tab. 1 captures, qualitatively and quantitatively, all of the dynamical structures revealed by the more realistic and more complicated models. We cannot show here how abundant and fruitful the consequences of this realization have proved. The application of this basic physical model leads to simple and convincing explanations of many facts previously incoherent and misunderstood. Here we tailor the recent results of [11], to which we refer for omitted details, to the evaluation of the proposed disposal strategies.

Figures 5 and 6 present several dynamical quantities of interests, in a series of maps⁸, for semi-major

⁸To produce the various stability maps, the initial conditions were distributed in a regular grid of 200×200 resolution,

axes and parameters near the disposal orbits of Section 2.: the FLIs [19, 20], characterizing the degree of hyperbolicity; the Lyapunov time, an estimate of the prediction horizon; and collision time. The FLIs of all regular orbits appear with the same dark blue color, while light blue corresponds to invariant tori, yellow and red to chaotic regions, and white to collision orbits. We find that the volume of collision orbits is roughly the same for the stable and unstable semi-major axes, but that the volume of chaotic orbits is indeed larger for the eccentricity growth scenario (where we also find highly unstable and re-entry orbits even for quasi circular orbits). Inside the collision orbit structures, the re-entry time is nearly constant, and the shortest dynamical lifetime was almost identical in both cases (~ 120 years). For each scenario, the values of the estimated Lyapunov times imply a very short timescale for reliable predictability, with many orbits having values on the order of a few decades.

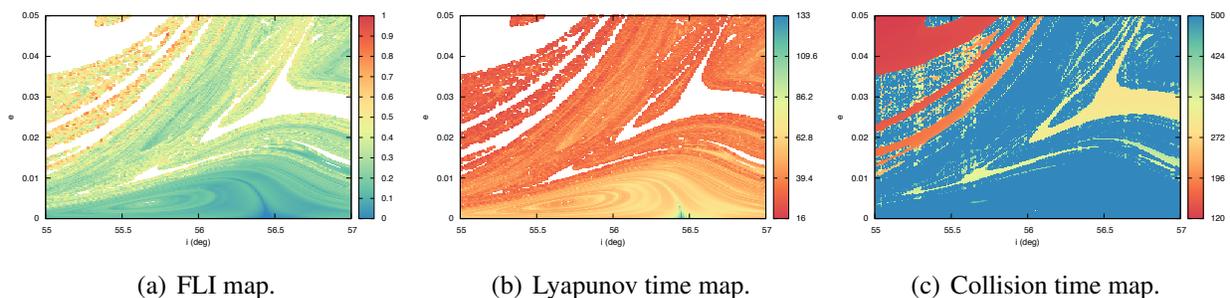


Figure 5. Stability maps characterizing the local hyperbolicity and the barrier of predictability in the vicinity of a proposed graveyard orbit case ($a_0 = 30, 100$ km, $\Omega_0 = \omega_0 = 70^\circ$, epoch: 6 DEC 2020). The collision time map is provided to illustrate the period of time after which atmospheric re-entry occurs, and completes the variational maps.

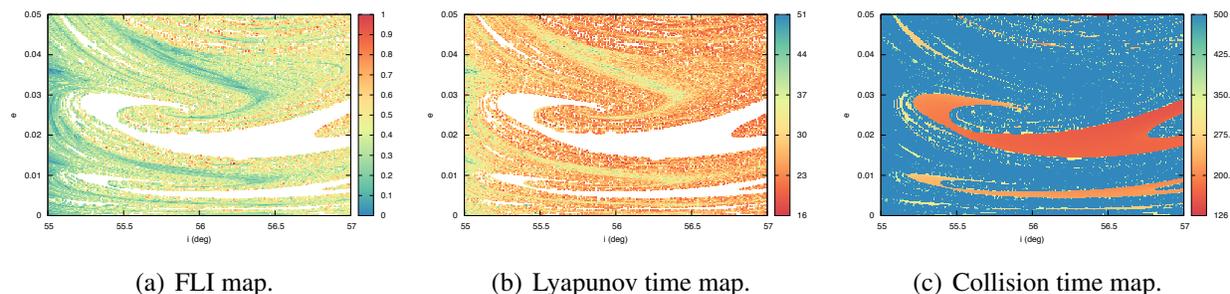


Figure 6. Same as Fig. 5, but for a proposed eccentricity growth case ($a_0 = 28, 100$ km, $\Omega_0 = 60^\circ$, $\omega_0 = 100^\circ$, epoch: 6 DEC 2020).

We must stress here that all of these charts, Figs. 5 and 6, have been obtained by varying only the initial inclination and eccentricity, with the initial phases (t_0, Ω, ω) being fixed for all computed FLI. Given the inherent difficulty to capture the dynamics of the whole six-dimensional phase space in a plane of dimension two, we must settle for only a partial insight into the dynamical structure [20, 21]. We now fix the action-like quantities to their approximate nominal values, along with the epoch date, and investigate the geometrical organization and coexistence of chaotic and regular motion in the Ω – ω phase space (Fig. 7). Note the similarity between the MEM maps of Fig. 1 (top), and the model was propagated for 500 years.

computed over a 200 year timespan; yet, the FLI and Lyapunov time maps, besides providing much finer detail for the proper detection of invariant structures and chaotic regions, give actual physical information on these unpredictable orbits, whereas the MEM maps provide only one trajectory realization. In the stable case, we point out again how the structures seem to be aligned along vertical bands, and can observe a highly stable region near $\Omega = 210^\circ$ (notice how the misleadingly wide bands of stable orbits in Fig. 1 disappear in a proper resolution and computational time). The volume of escaping orbits is larger for the unstable case, and it becomes much more difficult to identify stable regimes.

Figure 8 presents the evolution of the FLI maps in the node–perigee phase space, exploring the sensitivity to the initial semi-major axis near the nominal Galileo value. It is particularly noteworthy that the volume of stable orbits is found to increase with increasing semi-major axis, as with the width of the vertical band of stability, occurring near $\Omega = 180^\circ$. The location of this strip of stability is related to the resonant geography of the observed area (Fig. 4), and an analytical description of these structures will be pursued in a future work. On the contrary, decreasing the initial semi-major axis from the Galileo constellation (where the precise identification of stability pockets already presents a difficult task), the Ω – ω phase-space is nearly globally populated by unstable orbits that surround collision orbits, the latter organized in pendulum-like structures.

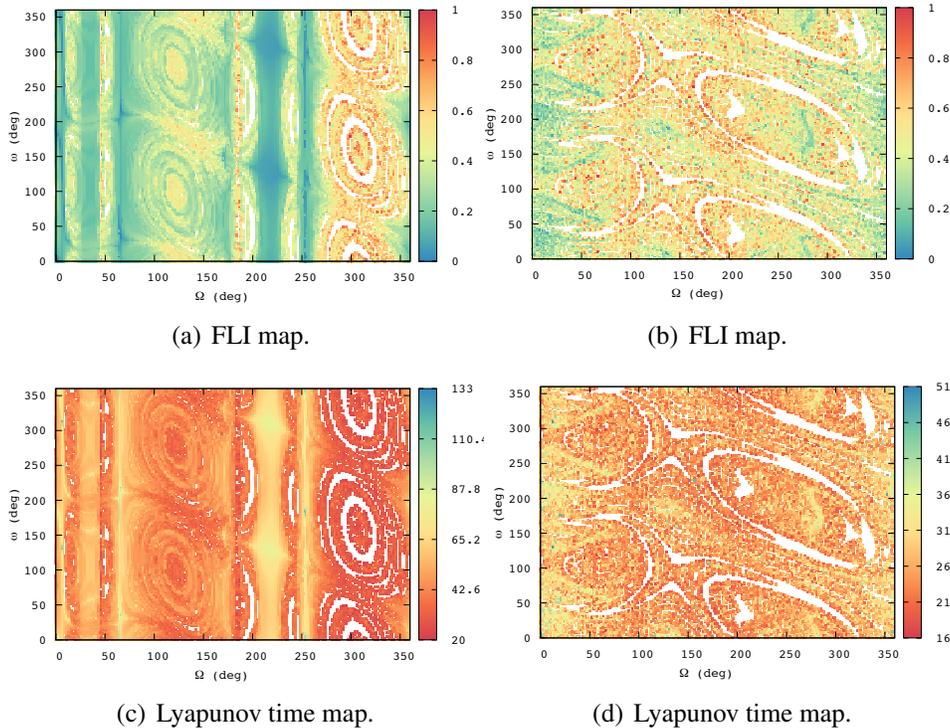


Figure 7. Dynamical structures of the stable (left: $a_0 = 30,100$ km, $e_0 = 0.001$, $i_0 = 56^\circ$) and unstable (right: $a_0 = 28,100$ km, $e_0 = 0.05$, $i_0 = 56^\circ$) cases in the node–perigee phase space.

Figure 9 shows how the dynamical structures (stable, resonant, chaotic, or collision orbits) evolve by changing the initial phases Ω and ω or even the initial dynamical configuration of the Earth–Moon–Sun system (equivalent to changing the initial epoch). Of course, the FLI maps depend on the choice of initial angles because, as Todorović and Novaković write, “... planes fixed at their different

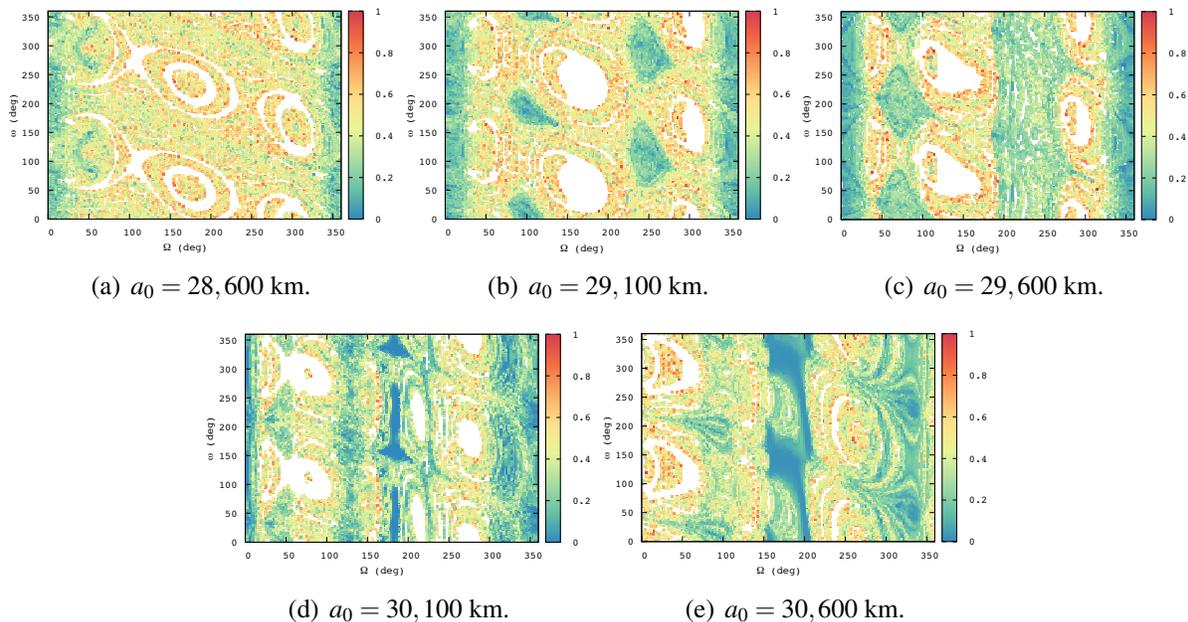


Figure 8. Influence of the strength of the perturbation on the dynamical structures near Galileo's semi-major axis ($e_0 = 0.02$, $i_0 = 56.1^\circ$, epoch: 2 MAR 1969).

values cross the resonant islands at different positions, and in some special cases the crossing may not even occur. After all, the orbital space is 6D, while our plots are 2D, which certainly gives only a partial insight into the phase-space structure. However, we underline that this does not change the global dynamical pictures of the region, which is essential the same . . . [20]". To understand how such features evolve is clearly of remarkable practical application, and will require further study.

5. Conclusion

It is no longer possible to investigate the motion of celestial bodies without being fully conscious of the possibilities of chaos, a fact well known to dynamical astronomers but seemingly oblivious to space engineers. Resonant and chaotic phenomena are ubiquitous in multi-frequency systems, and the knowledge of their long-period effects is essential for determining the stability of orbits and the lifetime of satellites. The complexity of the dynamical environment occupied by the Earth's navigation satellites is now becoming clearer [12, 11]. Resonant phenomena are widespread within the medium-Earth orbit (MEO) region as a whole, but particularly so amongst the highly inclined orbits of the navigation satellite systems, and a clear picture of the dynamics near these resonances is of considerable practical interest. We can now identify the sources of orbital instability or their absence in the MEO region and their nature and consequences in the context of long-term dynamical evolution. We examined them in terms of the detection of stability and unstable zones, with a particular view on the choice of the Galileo constellation disposal orbits. This paper links theoretical aspects of resonant and chaotic dynamics with practical applications, and lays an essential logical foundation for future developments.

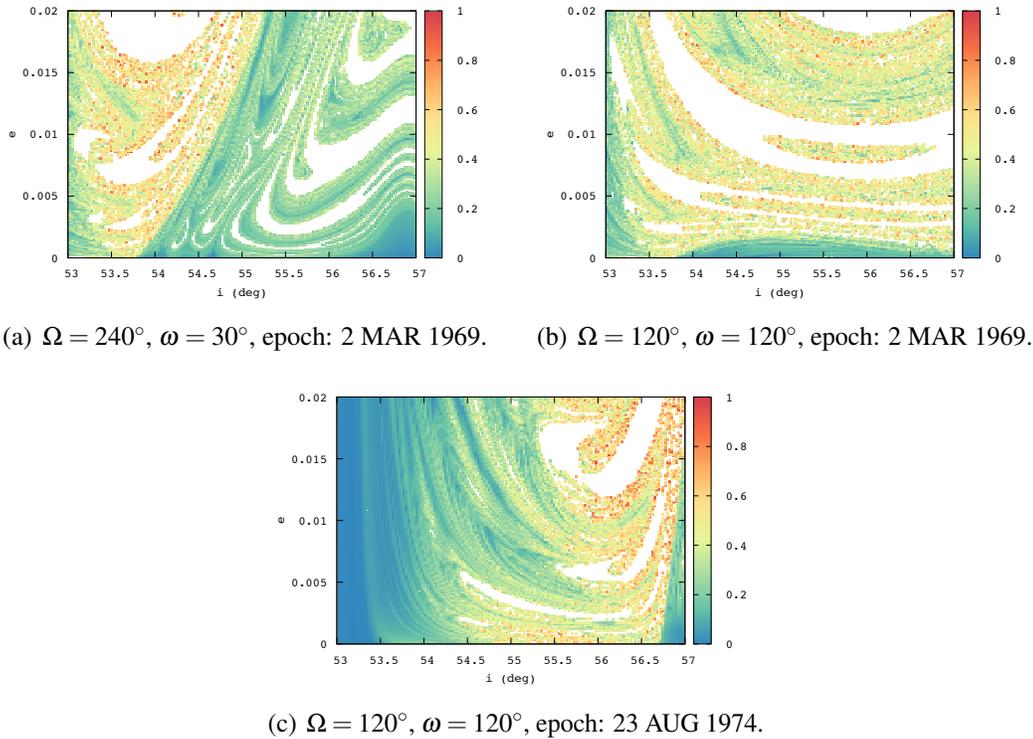


Figure 9. Influence of the initial phases and the initial configuration of the Earth-Moon-Sun system in the representation of a dynamical system in a lower dimensional phase space.

6. Acknowledgements

We thank Fabien Gachet and Ioannis Gkolias, of the University of Rome Tor Vergata, for their technical contributions to this paper and for motivating conversations. This work is partially funded by the European Commissions Framework Programme 7, through the Stardust Marie Curie Initial Training Network, FP7-PEOPLE-2012-ITN, Grant Agreement 317185. Part of this work was performed in the framework of the ESA Contract No. 4000107201/12/F/MOS “Disposal Strategies Analysis for MEO Orbits”.

7. References

- [1] Morbidelli, A. *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. Taylor & Francis, London, 2002.
- [2] Zeebe, R. E. “Highly stable evolution of Earth’s future orbit despite chaotic behavior of the Solar System.” *Astrophys. J.*, Vol. 811, 2015. Art. ID 9.
- [3] Barrow, J. D. “Simple really: from simplicity to complexity – and back again.” B. Bryson, editor, “*Seeing Further: The Story of Science, Discovery, and the Genius of the Royal Society*,” pp. 360–383. Harper Press, London, 2010.
- [4] Lichtenberg, A. J. and Leiberman, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 2 edn., 1992.

- [5] Laskar, J. and Gastineau, M. “Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth.” *Nature*, Vol. 495, pp. 817–819, 2009.
- [6] Brouwer, D. “Solution of the problem of artificial satellite theory without drag.” *Astron. J.*, Vol. 64, pp. 378–397, 1959.
- [7] Alessi, E. M., Rossi, A., Valsecchi, G. B., Anselmo, L., Pardini, C., Colombo, C., Lewis, H. G., Daquin, J., Deleflie, F., Vasile, M., Zuiani, F., and Merz, K. “Effectiveness of GNSS disposal strategies.” *Acta Astronaut.*, Vol. 99, pp. 292–302, 2014.
- [8] Radtke, J., Sven, K., Sanchez-Ortiz, N., Dominguez-Gonzalez, R., and Merz, K. “Impact of eccentricity build-up and graveyard disposal strategies on MEO Navigation Constellations.” “Proc. 40th COSPAR Scientific Assembly (COSMOS, Moscow, Russia, August 2014),” Paper PEDAS.1-23-14. 2014.
- [9] Sanchez, D. M., Yokoyama, T., and Prado, A. F. B. A. “Study of some strategies for disposal of the GNSS satellites.” *Math. Probl. Eng.*, Vol. 2015, 2015. Art. ID 382340.
- [10] Chao, C. C. “MEO disposal orbit stability and direct reentry strategy.” *Adv. Astronaut. Sci.*, Vol. 105, pp. 817–838, 2000.
- [11] Daquin, J., Rosengren, A. J., Alessi, E. M., Deleflie, F., Valsecchi, G. B., and Rossi, A. “The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport.”, 2015. ArXiv:1507.06170.
- [12] Rosengren, A. J., Alessi, E. M., Rossi, A., and Valsecchi, G. B. “Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the Moon.” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol. 449, pp. 3522–3526, 2015.
- [13] Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Funk, B., and Freistette, F. “Planets in habitable zones: A study of the binary Gamma Cephei.” *Astron. Astrophys.*, Vol. 398, pp. L1–L4, 2003.
- [14] Nagy, I., Süli, Á., and Érdi, B. “A stability study of Pluto’s moon system.” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol. 370, pp. L19–L23, 2006.
- [15] Ramos, X. S., Correa-Otto, J. A., and Beaugé, C. “The resonance overlap and Hill stability criteria revisited.” *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2015. doi:10.1007/s10569-015-9646-z.
- [16] Perozzi, E., Roy, A. E., Steves, B. A., and Valsecchi, G. B. “Significant high number of commensurabilities in the main lunar problem. I: The Saros as a near-periodicity of the Moon’s orbit.” *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, Vol. 52, pp. 241–261, 1991.
- [17] Musen, P. “On the long-period lunar and solar effects on the motion of an artificial satellite, 2.” *J. Geophys. Res.*, Vol. 66, pp. 2797–2805, 1961.
- [18] Wisdom, J. “Canonical solution of the two critical argument problem.” *Celest. Mech.*, Vol. 38, pp. 175–180, 1986.
- [19] Froeschlé, C., Guzzo, M., and Lega, E. “Graphical evolution of the Arnold web: From order to chaos.” *Science*, Vol. 289, pp. 2108–2110, 2000.

- [20] Todorović, N. and Novaković, B. “Testing the FLI in the region of the Pallas asteroid family.” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol. 451, pp. 1637–1648, 2015.
- [21] Richter, M., Lange, S., Bäcker, A., and Ketzmerick, R. “Visualization and comparison of classical structures and quantum states of four-dimensional maps.” *Phys. Rev. E*, Vol. 89, 2014. Art. ID 022902.

4.3 Chaos et transport

Dans la section 4.2.1, les propriétés évolutives de transport en milieu chaotique n'ont pas été décrites : elles n'ont été que révélées. Même si nous avons montré numériquement que le milieu chaotique est synonyme de transport à large échelle dans l'espace des phases, comme rappelé dans la figure 4.5, ni la nature précise du transport, ni un modèle de transport n'ont été proposés. C'est l'objet de cette section, qui présente les premiers blocs de la construction analytique de transport selon un modèle de marche aléatoire. Nous montrerons que le transport en région MEO est diffusif.

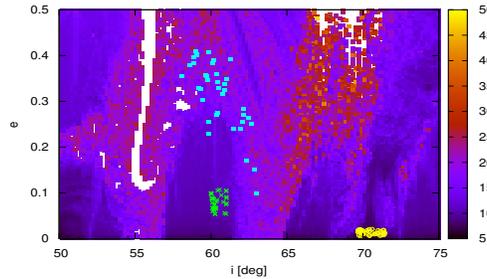


FIGURE 4.5 – Illustration du transport macroscopique dans la mer chaotique et du confinement dans l'espace des phases, $a_0 = 25\,500$ km.

4.3.1 Transport diffusif

La *diffusion* est un mode de transport général et fondamental concernant beaucoup de phénomènes issus de la physique et d'autres branches (chimie, biologie). La diffusion formule l'idée de la migration de particules dont le moment d'ordre deux des accroissements varie linéairement avec le temps. L'exemple instructif de transport diffusif est le mouvement brownien, formulé historiquement par Robert BROWN, traduisant le mouvement d'une particule (du pollen) supposée être régie par une marche aléatoire. En notant par x_i la position d'une particule au temps i sur la droite réelle, qui peut se déplacer selon des sauts d'amplitude fixée Δx vers la gauche ou la droite avec probabilité $\frac{1}{2}$ et quitte à supposer qu'en moyenne cette particule reste autour de 0, $\langle \Delta x \rangle = 0$, on montre alors qu'en moyenne (spatiale), et pour un temps grand ($i \gg 1$), le mouvement d'ordre 2 satisfait à

$$\langle x_i^2 \rangle = 2i, \quad (4.26)$$

i.e obéit à une loi de diffusion. En généralisant cette idée à des temps continus, les processus sont dits diffusifs quand se produit une relation du type

$$\langle (I(\tau) - I(0))^2 \rangle \propto \tau, \quad (4.27)$$

c'est-à-dire quand nous avons

$$\langle (I(\tau) - I(0))^2 \rangle = 2\mathcal{D}\tau. \quad (4.28)$$

Le coefficient de diffusion \mathcal{D} se définit alors comme ¹⁰

$$2\mathcal{D} = \frac{\sigma^2(\tau)}{\tau}. \quad (4.29)$$

Plus précisément, nous parlerons de *diffusion normale* quand se produit la relation (4.29).

Il existe des écarts à la diffusion normale, au sens où la croissance avec le temps de la variance est soit plus rapide soit plus lente que le temps :

$$\sigma^2(\tau) \propto \tau^\nu. \quad (4.30)$$

On parle de *diffusion anormale* dès que $\nu \neq 1$. Selon la valeur de ν , le mouvement est sous-diffusif dans le cas $\nu < 1$ ou super-diffusif dans le cas $\nu > 1$, incluant le cas de la diffusion balistique, nom donné à la relation (4.30) quand $\nu = 2$.

Après l'émergence de la théorie du chaos, on a pu constater que la diffusion pouvait être présente dans des systèmes dynamiques non-soumis à des forces extérieures aléatoires. Dans de tels systèmes, la diffusion est présente *en soi*, et découle des propriétés dynamiques (chaotiques) du système lui-même. La diffusion observée dans de tels systèmes est alors dite *diffusion chaotique*. L'exemple classique de diffusion chaotique est prescrit par l'application standard de CHIRIKOV, un mapping d'une action p et d'un angle ϕ donné aux temps discrets n par

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + K \sin \phi_{n-1} \\ \phi_n = \phi_{n-1} + p_n \end{cases}$$

où K est un paramètre du problème. Quand $K \ll 1$, les tores prévalent et le mouvement est quasi-périodique. Pour $K \gg 1$, les tores sont rompus et on peut montrer que la diffusion dans l'espace d'action prend place, et est telle que

$$\langle p^2 \rangle = Dt, \quad (4.31)$$

avec $D = \frac{K^2}{2}$. L'action ayant maintenant la « possibilité d'évoluer » il convient d'en étudier les propriétés. Ce mapping a été d'une importance capitale dans le développement du chaos et de la dynamique non-linéaire ¹¹ : *théorie ergodique*, *mécanique statistique* et *théorie du transport*. Essentiellement, ces disciplines ont pour but d'étudier le comportement statistique, en temps long, d'un ensemble d'orbites d'un système dynamique.

Si dans cet exemple, en corollaire du chaos, on trouve de la diffusion et donc du transport dans l'espace des phases, cela n'a pourtant rien de systématique. Un exemple de *chaos stable* dans le système solaire a été en effet exhibé par MILANI à propos de la dynamique de l'astéroïde 522 Helga [MN92]. Numériquement, les auteurs ont montré que le temps de LYAPUNOV $T_{\mathcal{L}}$ seul n'est pas forcément d'un intérêt majeur : il existe des orbites dont le temps de LYAPUNOV est petit, mais dont les éléments orbitaux sont extrêmement stables et n'affichent que peu

10. Le facteur scalaire deux peut sembler artificiel mais a l'avantage de rendre uniforme l'écriture de la diffusion dans \mathbb{R}^n puisque pour un accroissement centré, on aboutit généralement à l'égalité $\sigma^2 = 2nDt$, où n est bien la dimension de \mathbb{R}^n .

11. En 1985, B.CHIRIKOV est vivement encouragé pour recevoir le prix BOLZMANN. L'examen de l'application standard à laquelle il a abouti, montre en effet que le transport dans l'espace des phases est purement déterministe, issu des lois de NEWTON sans quelconque artifice (insertion de probabilité).

de variations sur des échelles de temps longues, bien au-delà de $T_{\mathcal{L}}$. La détection du chaos n'a ici presque pas d'intérêt en soit pour des problèmes de nature appliquée, ce qui importe véritablement, c'est bien la signature du chaos sur la dynamique, *i.e* la manifestation physique de ce dernier sur le système. Par exemple, d'intérêt fondamental est l'éventuel changement systématique des actions dans le domaine d'instabilité chaotique ainsi que l'estimation des échelles de temps associées, exactement comme dans l'application standard. Nous reviendrons sur ce point plus tard dans le texte.

Sur l'exemple précédent de l'application standard, l'accès au chaos, et donc les conséquences dynamiques de ce dernier (diffusion des actions), est imputable aux résonances qui se sont superposées. Dans le paragraphe 4.2.1, nous avons établi la superposition des résonances en région MEO en fonction de la valeur du paramètre de perturbation $\epsilon = \epsilon(a)$. Avant d'investiguer s'il en résulte une diffusion des actions (le transport a été constaté, mais la nature de ce transport n'a jusque maintenant pas été précisée), présentons un modèle de transport à travers les résonances et appliquons ce dernier aux résonances de la région MEO.

4.3.2 Transport à travers les résonances

Dans la section 3.3.1, nous avons déjà présenté les différents arrangements possibles des résonances dans un modèle à 2-DOF, et comment ces arrangements pouvaient être reflétés par le coefficient de stochasticité \mathcal{K} . Selon les cas $\mathcal{K} \ll 1$, $\mathcal{K} \sim 1$ et $\mathcal{K} \gg 1$, il convenait de distinguer respectivement la quasi-absence d'interactions de résonances, une superposition partielle des résonances (voir par exemple la discussion dans [DFK05]¹²) et enfin une superposition totale des résonances, partageant ainsi l'analogie d'un pendule modulé (dont la séparatrice est « pulsanter ») [MG96].

Le modèle de transport à travers les résonances est une conséquence naturelle du critère de superposition des résonances, et consiste à penser que l'évolution d'une orbite en milieu stochastique est régie par les différentes résonances, l'orbite passant de l'une à l'autre par différents sauts et se propageant ainsi le long de la structure où la superposition s'opère. Dans [Mor02], A. MORBIDELLI écrit à ce propos :

Above the threshold, resonances overlap and KAM tori disappear. The motion can therefore pass from one resonance to the other, and the frequency ratio evolves with time following a sort of random walk: the width of the timescale for one step is approximately given by the resonance amplitudes, and the timescale for one step is of the order of the typical period of libration of the resonant critical angle. [...] we will refer to this phenomenon as *Chirikov diffusion*. By the word *diffusion*, we do not imply that the evolution of the frequency strictly follows a diffusion equation, but simply that it has macroscopic variations, revealing transport in the action space.

Soulignons ici encore une fois que le terme de *diffusion* a le sens général de *transport*, et non nécessairement le sens strict du mot *diffusion* (au sens de FICK) défini par la relation (4.30). On peut se donner une vue très schématique de ce phénomène de transport via la figure 4.6 tirée de [BF95]¹³, qui illustre la notion de transport à travers une chaîne de résonances. Bien sûr, cette figure est entachée d'erreurs : une orbite ne se croise pas elle-même. Cependant, comme tout

12. *Regular and Chaotic Motion in Hamiltonian Systems*, par H. VARVOGLIS

13. *Resonant structure and diffusion in hamiltonian systems*, par A. MORBIDELLI.

schéma elle aide à fixer les idées et la pensée. La modélisation proprement dite du processus de diffusion via des modèles de marches aléatoires et son exploitation effective en mécanique céleste est peu courante. Si l'on souhaite modéliser la diffusion par des propriétés statistiques d'une marche aléatoire, il convient avant toute chose de tenter de déterminer deux quantités [Mor02, BF95, Var04] : i) le pas Δ de la marche et ii) l'échelle de temps associée à chaque pas. Concernant le premier point, il est d'usage de définir le pas de la marche comme l'amplitude des résonances, amplitude que nous avons explicité dans le paragraphe 4.2.1. Notons une difficulté de taille qui surgit ici : ces marches aléatoires doivent avoir un pas variable. Concernant le deuxième point ii), l'échelle de temps est considérée comme du même ordre de grandeur que la fréquence de libration de l'angle résonant $\sigma_{\mathbf{k}}$ associé. Ainsi, en utilisant la réduction de la forme normale résonante présentée dans la section 4.2.1, elle peut être estimée facilement. En effet, en reprenant les mêmes notations que la section 4.2.1 nous avons atteint le premier modèle fondamental au voisinage de chaque résonance

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}I^2 + \nu \cos(x + \rho), \quad (4.32)$$

où $I = X - X_*$, $x = \sigma_{\mathbf{k}}$ dénote l'angle résonant associé à la résonance identifiée par le vecteur \mathbf{k} et

$$\nu = \left| \frac{h_{\mathbf{n}}(X_*)}{\partial_{XX}^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}(X_*)} \right|. \quad (4.33)$$

Ainsi, la fréquence de libration¹⁴ de x vaut $\sqrt{\nu}$ d'où l'on déduit la période fondamentale de libration $T_{\mathbf{k}}$, après avoir veillé à opérer au changement d'échelle de temps (confer section 4.2.1), comme étant

$$T_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\nu \times \partial_{XX}^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}(X_*)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{h_{\mathbf{k}} \times \partial_{XX}^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}(X_*)}}. \quad (4.34)$$

Une analyse des dimensions nous montre bien que

$$[T_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{[\sqrt{h_{\mathbf{k}} \times \partial_{XX}^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}(X_*)}]} = \frac{1}{\text{s}^{-1}} = \text{s}, \quad (4.35)$$

i.e que la période $T_{\mathbf{k}}$ a bien l'unité du temps¹⁵. Une autre façon de choisir l'échelle de temps associée à la marche consiste à la prendre égale aux temps de LYAPUNOV [Mor02, BF95]. Ces temps ont été estimés dans la section 4.2.1, ils sont généralement de l'ordre de la décennie dans la mer chaotique. La marche aléatoire est sujette à des contraintes de bords délicates. Par là, nous entendons le fait que, par exemple, l'excentricité doit rester positive, que la réalisation de la marche à chaque temps doit rester dans le domaine stochastique, dont la région est complexe. Ces difficultés théoriques ont déjà été adressées [MH97]. Ces contraintes géométriques sont modélisées via l'introduction élégante de « barrières » absorbantes ou réfléchissantes, empruntées à des outils d'optique classique.

Pour donner du crédit analytique à ce modèle de transport, à travers les résonances de la région MEO, il faudrait être en mesure de calculer le coefficient de stochasticité \mathcal{K} . Pour qu'un

14. La fréquence de libration du linéarisé de \mathcal{H} au voisinage de son équilibre stable.

15. $[h_{\mathbf{k}}] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, $[\partial_{XX}^2 \mathcal{H}^{\text{sec}}] = \frac{1}{\text{m}^2}$.

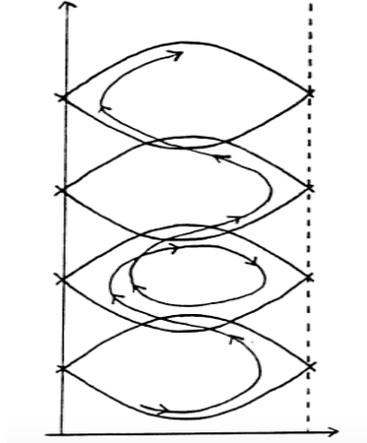


FIGURE 4.6 – Illustration schématique du processus de transport le long d'une chaîne de résonances. Tiré de [BF95].

mode de transport macroscopique global opère, on s'attend à ce qu'il soit de l'ordre de 1 pour plusieurs paires de résonances (en suivant les idées de [MH97]), ou alors, qu'il existe une chaîne de résonance ayant cette propriété.

Or, au meilleur de notre connaissance, ce dernier a toujours été calculé (et par la même défini) sur des *toy-models* à 2-DOF (voir par exemple [Chi79, MH97, Var04, BMH15, DFK05]) ayant la forme

$$\mathcal{H}_{\text{toy}} = -\frac{1}{2}I_1^2 + I_2 + \sum_{k=1}^p \epsilon_k \cos(\sigma_1 + k\sigma_2). \quad (4.36)$$

Puisque la l^{e} résonance r_l ($k = l$ dans (4.36)) a son centre localisé pour l'action constante $I_1 = l$ et une amplitude, quand traitée comme isolée, valant $\Delta_{r_l} = 2\sqrt{|\epsilon_l|}$, nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r_i, r_j) &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_{r_i} + \Delta_{r_j}}{d(c_i, c_j)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(\sqrt{|\epsilon_i|} + \sqrt{|\epsilon_j|})}{|c_i - c_j|} \\ &= \frac{\sqrt{|\epsilon_i|} + \sqrt{|\epsilon_j|}}{|i - j|}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'une particularité de notre problème est que, contrairement à (4.36), nos résonances luni-solaires sont localisées dans un plan de dimension 2 (voir les figures 4.3 et 4.4). Les centres \mathcal{C}_k sont des courbes dans ce plan. Si nous voulons exploiter pleinement ce modèle, nous pouvons mimer et définir un coefficient de stochasticité empirique basé sur le critère (lui-même aussi empirique) de superposition des résonances. Puisque l'amplitude d'une résonance (quand elle est isolée) n'est finalement rien d'autre que la distance séparant deux courbes, à savoir le centre \mathcal{C}_k et la séparatrice \mathcal{W}_k , si l'on souhaite étendre la définition de \mathcal{K} à ce problème à

2.5-DOF, nous pouvons le définir via la métrique de HAUSDORFF comme

$$\forall r_i, r_j, i \neq j, \quad \bar{\mathcal{K}}(r_i, r_j) = \frac{1}{2} \frac{d_H(\mathcal{C}_{k_i}, \mathcal{W}_{k_i}) + d_H(\mathcal{C}_{k_j}, \mathcal{W}_{k_j})}{d_H(\mathcal{C}_{k_i}, \mathcal{C}_{k_j})}, \quad (4.37)$$

où $d_H(\bullet, \bullet)$ dénote la distance de HAUSDORFF. Pour rappel, étant muni d'un espace métrique (M, d) , et de deux ensembles non-vides X et Y , cette distance est définie comme

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}. \quad (4.38)$$

Dans (4.37), les entités $\{\mathcal{C}_{k_i}, \mathcal{W}_{k_i}\}_i$ sont toutes définies à partir des quantités que nous avons défini dans le paragraphe 4.2.1. Les \mathcal{W}_{k_i} sont des éléments de $\{\mathcal{W}_{k_i}^+, \mathcal{W}_{k_i}^-\}$ et tels que

$$d_H(\mathcal{W}_{k_i}, \mathcal{W}_{k_j}) = \min \left\{ d_H(\mathcal{W}_{k_i}^+, \mathcal{W}_{k_j}^+), d_H(\mathcal{W}_{k_i}^+, \mathcal{W}_{k_j}^-), d_H(\mathcal{W}_{k_i}^-, \mathcal{W}_{k_j}^+), d_H(\mathcal{W}_{k_i}^-, \mathcal{W}_{k_j}^-) \right\}, \quad (4.39)$$

$\forall i, \forall j, i \neq j.$

Le coefficient (4.37) forme ainsi une extension naturelle du coefficient \mathcal{K} de (4.36).

En guise de première valorisation de cet indicateur, nous l'avons calculé pour plusieurs couples de résonances luni-solaires, tracées sur la figure 4.7. Les résultats numériques obtenus sont en adéquation avec « l'interprétation intuitive » de l'interaction des résonances apparaissant dans cette même figure. Ils sont consignés dans le tableau 4.2 en respectant le code couleur des résonances représentées tracées. Par intuitive, nous entendons le fait que les résultats numériques sont en adéquation avec la hiérarchisation, *a priori*, de l'interaction des résonances. Par exemple, dans le cas où $a = 25\,500$ km, deux des résonances dans le plan « action-action » se recouvrent partiellement, fait bien capturé par la valeur de $\bar{\mathcal{K}}$ légèrement supérieure à 0.5. Pour ce même cas, pour les deux résonances identifiées par les vecteurs entiers \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_3 , le coefficient $\bar{\mathcal{K}}$ est un ordre de grandeur inférieur au cas où les résonances se recouvrent partiellement. Pour le cas où $a = 29\,600$ km, au voisinage de l'inclinaison nominale des Galileo (cas (d) de la figure 4.7), le coefficient $\bar{\mathcal{K}}$ capture bien le fait que les résonances sont noyées l'une dans l'autre, puisque $\bar{\mathcal{K}}$ est grand devant 1.

Étudions maintenant plus finement les conséquences dynamiques de la superposition des résonances au voisinage de la constellation Galileo.

4.3.3 Diffusion normale : application à Galileo ¹⁶

16. Les résultats de cette section, corollaire de la description dynamique à laquelle nous avons abouti quand le système est fortement perturbé, ont fait l'objet d'un proceedings qui sera publié par World Scientific au printemps 2016, suite à la conférence *Chaos, Complexity and Transport* 2015 qui s'est tenue à Marseille.

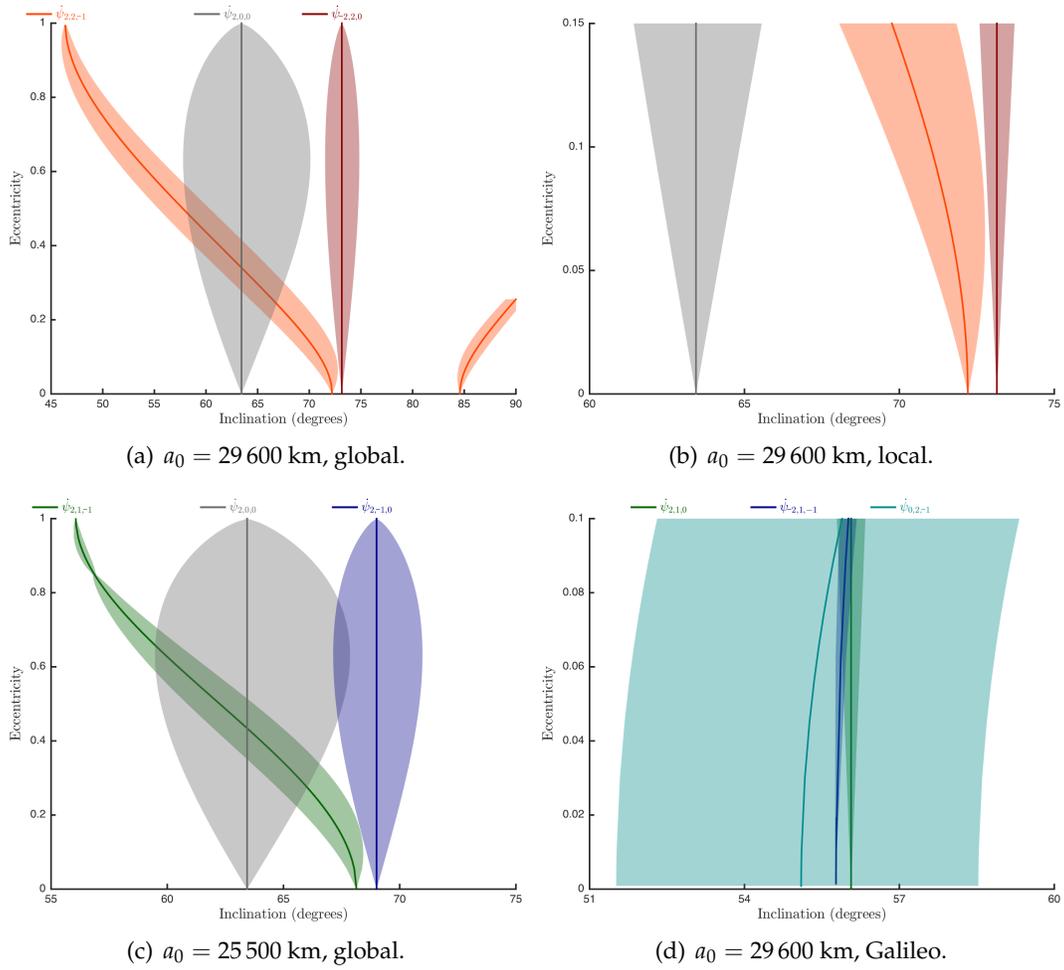


FIGURE 4.7 – Centres ψ et amplitudes de résonances lunisolaires pour différentes valeurs du paramètre perturbatif.

$\epsilon(a), [a] = [\text{km}]$	\mathbf{n}_1	\mathbf{n}_2	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$
$\epsilon(29\,600), \text{global}$	$\mathbf{n}_1 = (2, 2, -1)$	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0.16$
	$\mathbf{n}_1 = (2, 2, -1)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 2, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) = 0.07$
	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 2, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0.42$
$\epsilon(29\,600), \text{local}$	$\mathbf{n}_1 = (2, 2, -1)$	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0.21$
	$\mathbf{n}_1 = (2, 2, -1)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 2, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) = 0.39$
	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 2, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0.13$
$\epsilon(25\,500), \text{local}$	$\mathbf{n}_1 = (2, 1, -1)$	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0.28$
	$\mathbf{n}_1 = (2, 1, -1)$	$\mathbf{n}_3 = (2, -1, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) = 0.08$
	$\mathbf{n}_2 = (2, 0, 0)$	$\mathbf{n}_3 = (2, -1, 0)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0.56$
$\epsilon(29\,600), \text{Galileo}$	$\mathbf{n}_1 = (2, 1, 0)$	$\mathbf{n}_2 = (0, 2, -1)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 1.9$
	$\mathbf{n}_1 = (2, 1, 0)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 1, -1)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) = 0.67$
	$\mathbf{n}_2 = (0, 2, -1)$	$\mathbf{n}_3 = (-2, 1, -1)$	$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 2.64$

TABLE 4.2 – Mesure de l'interaction de quelques résonances lunisolaires *via* $\bar{\mathcal{K}}$.

Diffusive chaos in navigation satellites orbits

J. Daquin^{*1}, A. J. Rosengren², K. Tsiganis³

¹*IMCCE, 77 Avenue Denfert-Rochereau,
Paris, 75014, France*

**E-mail: jerome.daquin@imcce.fr*

²*IFAC-CNR, Via Madonna del Piano 10,
Sesto Fiorentino (FI), 50019, Italy*

³*Department of Physics, Aristotle University of Thessaloniki,
Thessaloniki, 54124, Greece*

The navigation satellite constellations in medium-Earth orbit exist in a background of third-body secular resonances stemming from the perturbing gravitational effects of the Moon and the Sun. The resulting chaotic motions, emanating from the overlapping of neighboring resonant harmonics, induce especially strong perturbations on the orbital eccentricity, which can be transported to large values, thereby increasing the collision risk to the constellations and possibly leading to a proliferation of space debris. We show here that this transport is of a diffusive nature and we present representative diffusion maps that are useful in obtaining a global comprehension of the dynamical structure of the navigation satellite orbits.

Keywords: Orbital resonances; Chaotic diffusion; Secular dynamics; Medium-Earth orbits; Navigation satellites.

1. Introduction

The past several years have seen a renewed interest in the dynamics of medium-Earth orbits (MEOs), the region of the navigation satellites^a, since the community has realized the inherent dangers imposed by space debris, meanwhile stimulating a deeper dynamical understanding of this multifrequency and variously perturbed environment. The effects of the Moon and the Sun on Earth-orbiting satellites, often negligible on short timescales, may have profound consequences on the motion over longer periods; this accumulating effect is a phenomenon known as resonance. The inclined,

^a*i.e.*, semi-major axes between 3 and 5 Earth radii.

2

nearly circular orbits of the navigation satellites are not excluded from this situation.

Several, but mainly numerical, works^{4,5,14} have quickly pointed out the key role played by the lunar and solar third-body resonances, especially on the orbital eccentricity. This instability manifests itself as an apparent chaotic growth of the eccentricity on decadal timescales, as illustrated by Fig. 1. Here, the orbits have been numerically integrated using an in-house, high-precision orbit propagation code, based on classical averaging formulations of the equations of motion—a well-known and efficient technique for treating long-term evolutions in celestial mechanics^b. Using a first-order variational stability indicator, the fast Lyapunov indicator (FLI)^{7,8}, these orbits have been declared *a posteriori* as chaotic and regular non-resonant.

On the analytical point of view, it is regrettable to note that no real effort was hitherto made in the literature to guide the problem towards a global comprehension of the observed instabilities, capturing in the same time the (supposed) dynamical richness of the inclination-eccentricity ($i - e$) phase-space. The complexity of this perturbed dynamical environment, however, is now becoming more clear^{3,13}.

The present work summarize our latest results towards understanding the chaotic structures of the phase-space near the lunisolar resonances. In particular, we show that the transport properties of the eccentricity in the phase-space, due to chaos, are of a diffusive nature, and we present some results on the numerical estimates of the diffusion coefficient relevant to navigation satellite parameters, especially for the European Galileo constellation.

^bMore precisely, the state vector $x \in \mathbb{R}^6$ of the satellite has been decomposed in terms of mean elements, $\bar{x} \in \mathbb{R}^6$, plus a small remainder as $x_i = \bar{x}_i + \xi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, 6$, where the vector \bar{x} obeys the standard form of perturbed systems, separated in slow-fast variables:

$$\begin{cases} \bar{x}_i = \epsilon f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5, t), & i = 1, \dots, 5 \\ \bar{x}_6 = n + \epsilon f_6(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5, t). \end{cases}$$

The quantity n denotes here the (mean) mean-motion. Short-periodic variations are only present in the ξ_i , $i = 1, \dots, 6$, terms. Due to the fact that $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5)$ are slow variables, large step size can be used to propagate numerically the dynamics, useful for long-term ephemeris calculations and predictions.

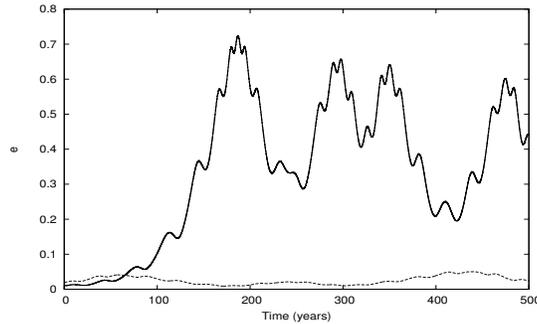


Fig. 1. Typical eccentricity history for orbits in the MEO region: the orbit with a large variation has been declared as chaotic by the FLI analysis while the orbit with modest excursions is a regular non-resonant orbit. Note that the eccentricity can be transported to large values in the chaotic case.

2. The dynamics of MEOs

We review the main features and the recent results that we have obtained for the dynamical description of the MEO region. This section emphasizes ideas, but, for the sake of brevity, not the rigor of all the details involved.

2.1. *Overlap of the lunisolar secular resonances à la Chirikov*

The Hamiltonian system, written in canonical action-angles variables, is a small perturbation of an integrable system,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I) + \epsilon \mathcal{H}_1(I, \Phi), \quad (I, \Phi) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{T}^9, \epsilon \ll 1; \quad (1)$$

namely of the Kepler two-body problem. Considering a mathematically simple, but physically relevant dynamical model, the Hamiltonian governing the dynamics is composed of the Keplerian part of the geopotential, the oblateness effect of the Earth, and the gravitational perturbations of third bodies, *i.e.*, the Moon and the Sun:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kep.}} + \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_M + \mathcal{H}_S. \quad (2)$$

Explicit and detailed formulas for these terms can be found in several works^{3,5,13}. The secular Hamiltonian, a 2.5 degree-of-freedom (DOF) system^c, useful for describing the long-term dynamics, has been derived and

^c*i.e.*, 2-DOF and non-autonomous.

4

reduced, treating the resonances in isolation, from Eq. (2) to the *first fundamental model of resonances*¹ (a pendulum) near each resonance by constructing suitable (canonical) resonant variables³. These lunisolar secular resonances involve a linear combination of 2 angles of the satellite, the argument of perigee ω and the ascending node Ω , combined with the ascending node of the Moon Ω_M , which satisfy the resonant condition

$$\dot{\sigma}_{\mathbf{n}} \equiv n_1\dot{\omega} + n_2\dot{\Omega} + n_3\dot{\Omega}_M \sim 0, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_{\star}^3. \quad (3)$$

The resonance centers $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}$ are located in the action phase-space by the actions satisfying the equality $\dot{\sigma}_{\mathbf{n}} = 0$. Going back to the eccentricity–inclination variables, which are physically and geometrically more interpretable (especially to space engineers), it can be shown that condition (3) is equivalent to the relation $f_{\mathbf{n},a_{\star}}(e, i) = 0$, with

$$f_{\mathbf{n},a_{\star}}(e, i) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (4)$$

a function parametrized by the the initial semi-major axis a_{\star} , a free parameter of the problem^d. The resonance centers $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}$,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}} \equiv \{(e, i) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mid (\dot{\sigma}_{\mathbf{n}} = 0) \Leftrightarrow (f_{\mathbf{n},a_{\star}}(e, i) = 0)\}, \quad (5)$$

form a dense network of curves in the i – e phase-space. When a_{\star} is receding from 3 to 5 Earth radii, sweeping the navigation constellation regime, the resonance curves began to intersect, indicating locations where several critical arguments $\sigma_{\mathbf{n}}$ have vanishing frequencies simultaneously.

Treating each resonances in isolation, and using the fundamental reduction to the pendulum, the amplitudes $\Delta_{\mathbf{n}}$ of each resonance associated to the critical argument $\sigma_{\mathbf{n}}$ have been estimated. The ‘maximal excursion’ curves in the i – e phase-space, delimiting the resonant domains, are then defined as

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}}^{\pm} \equiv \{(e, i) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mid \dot{\sigma}_{\mathbf{n}} = \pm\Delta_{\mathbf{n}}\}. \quad (6)$$

We found a transition from a ‘stability regime’, where resonances are thin and well separated at $a_{\star} = 19,000$ km (~ 3 Earth radii), to a ‘Chirikov one’², where resonances overlap significantly at $a_{\star} = 29,600$ km (~ 4.6 Earth radii), the initial semi-major axis of the European navigation constellation, Galileo, as illustrated in Fig. 2. This important structural and dynamical fact has been obscured for nearly 2 decades, despite the pioneering breakthroughs of T. Ely^{5,6}. The analytical Chirikov resonance-overlap

^dIn the secular version of the Hamiltonian, the canonical angle ‘associated’ to the semi-major axis is a cyclic variable, so that the semi-major axis is a first integral³.

criterion that we applied was tested with respect to a detailed numerical FLI analysis of the phase-space, producing a stability atlas, a collection of FLI maps. The FLI analysis has confirmed the existence of the complex stochastic regime, whose effects on the dynamics is of primary importance³.

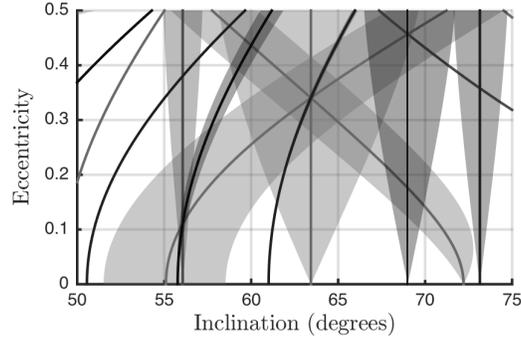


Fig. 2. Lunisolar resonance centers \mathcal{C}_n (solid lines) and widths \mathcal{W}_n^\pm (transparent shapes) for $a_* = 29,600\text{km}$, *i.e.*, Galileo’s nominal semi-major axis. This plot shows the overlap between the first resonant harmonics ($|n_i| \leq 2, i = 1, \dots, 3$). Galileo satellites are located near $i = 56^\circ$.

2.2. Transport in action space

Since the famous example of the asteroid Helga in Milani and Nobili’s work⁹, physical orbits in the Solar System can be much more stable than their characteristic Lyapunov times would suggest, a concept referred to as *stable chaos*. Thus, understanding the physical manifestation (the signature) of chaos on the system is preeminent. Rosengren et al. have recently demonstrated that the transport phenomenon acting in phase-space is intimately related to the resonant skeleton described by the centers \mathcal{C}_n ¹³, confirming Ely’s original results⁶, but on a much shorter timescale. They showed *via* a discretization of the dynamics (stroboscopic approaches) that the transport in the phase-space is mediated by the web-like structures of the secular resonance centers \mathcal{C}_n , allowing nearly circular orbits to become highly elliptic (as already illustrated by Fig. 1). This idea was further enlivened, taking advantages of the geometry and topology of the chaotic structures revealed by our FLI analysis. In fact, we showed that the long-term evolution of chaotic orbits superimposed on the background dynamical structures obtained *via* the FLIs tends to evolve in the chaotic sea, explor-

6

ing consequently a large phase-space volume. This is contrarily to stable orbits whose excursion in eccentricity and inclination are much more modest, being confined by KAM curves. Thus, in addition to quantifying the local hyperbolicity, the FLI maps also reveal how the transport is mediated in the phase-space, revealing the preferential routes of transport³.

3. Diffusive chaos

Because of the analytical description that we achieved, *Chirikov's diffusion*, the diffusion of an orbit along a resonant chain (a consequence of the overlapping criterion¹¹), was natural to suspect. In order to measure the value of the diffusion coefficient, we introduce the mean-squared displacement in eccentricity,

$$\sigma^2(\tau) \equiv \langle (\Delta e(\tau) - \langle \Delta e(\tau) \rangle)^2 \rangle; \quad (7)$$

the diffusion coefficient related to the eccentricity being defined as

$$\mathcal{D}_e(\tau) \equiv \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\langle (\Delta e - \langle \Delta e \rangle)^2 \rangle}{2\tau}, \quad (8)$$

where $\Delta e(\tau) = e_{t_i+\tau} - e_{t_i}$ and $\langle \bullet \rangle$ is an average operator. We have computed the coefficient $\mathcal{D}_e(\tau)$ in a purely numerical way following orbits for long timespans^e using our precision orbit propagator. This type of averaging is called *dynamic averaging*^{f,12}, and the coefficient \mathcal{D}_e is quantitatively defined as

$$\mathcal{D}_e(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((e_{(i+1)\tau} - e_{i\tau}) - \overline{\Delta e})^2. \quad (9)$$

Figure 3 shows the evolution of the mean-squared displacement as a function of the length τ for the 2 orbits of Fig. 1. Firstly, it is legitimate to talk about *diffusion*: diffusive processes are commonly characterized by a power law relationship

$$\sigma^2(\tau) \propto \tau^\nu. \quad (10)$$

Having here that ν is very close to 1, we found a *normal* diffusion behavior for the chaotic orbit. We found also that the diffusion coefficient changes

^eMore than 5 centuries, this timescale represents around 3.5×10^5 revolutions around the Earth.

^fThe *dynamic averaging* differs from the *spatial averaging*, where the average operator is over some appropriate ensemble, but they gave the same results if the ergodic hypothesis holds.

significantly depending on the orbit's nature; the slopes of the linear least-squares fit differ up to 6 orders of magnitude for the chaotic and the regular orbit, which appears here as flat.

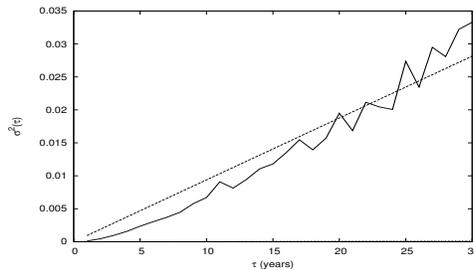


Fig. 3. Time evolution of $\sigma^2(\tau)$ fitted by linear least-squares curves for the 2 orbits of Fig. 1. For the regular orbit the curves are flat and indistinguishable from the x -axis, while for the chaotic case, a linear trend with a non-zero slope is well captured.

We extended the computation of \mathcal{D}_e for a particular domain of the i - e phase-space. Figures 4 shows the results of the computation in the MEO region, for physical parameters relevant to navigation satellites, covering a small domain of the phase-space; namely, the rectangle $[0, 0.02] \times [53^\circ, 57^\circ]$, spaced uniformly by 185×160 initial conditions. The palette scale gives the magnitude of \mathcal{D}_e , indicating in which phase-space region the diffusivity is fastest. For the volume of the phase-space that we have explored up to a large, but finite time t_f , all diffusion coefficients were finite, an indication that the motion does not spread more rapidly than diffusively. This lead to the important fact that typical navigation satellites obey reasonably well to a diffusion law. When KAM curves are approached, we found that the diffusion coefficients goes to zero sufficiently fast. Namely, by comparing the results of the diffusion maps with the FLI maps computed for the same physical parameters, we found a very nice agreement between the dynamical structures revealed either by \mathcal{D}_e or the FLIs, implying in general a 1–1 correspondence between high local hyperbolicity and high diffusivity[§] as shown in Fig. 4. It is important to note that even for moderate eccentricity, $e \leq 0.005$, we may find high diffusivity regions, whose spatial organization in the phase-space is complex. We redo the same computation as that in Fig. 4, but we change the initial phases of the system (all others

[§]A non-trivial result due to the existence of *stable chaos*.

8

parameters are identical), as presented in Fig. 5. We can observe how the structures evolve by changing the initial angles, even if in both cases high diffusive orbits can be found. This observation illustrates in essence the difficult question of determining which initial phases of the initial state leads to a diffusive chaotic response of the system. This is intimately related to the representation of the dynamics in a reduced dimensional phase-space. Moreover, the diffusion coefficient calculated here give no information about which angles will ensure or avoid diffusive chaos for a fixed initial eccentricity and inclination. This point, of particular practical interest, undoubtedly needs further investigation. At the very least, diffusion maps as those presented here should be computed for an ensemble of initial phases^h, but this point represent a difficult and formidable computational task. Let it be recalled that the Hamiltonian of Eq. (2) is 3-DOF and autonomous, the global understanding of such systems being on the cusp of current trends in dynamical systems research.

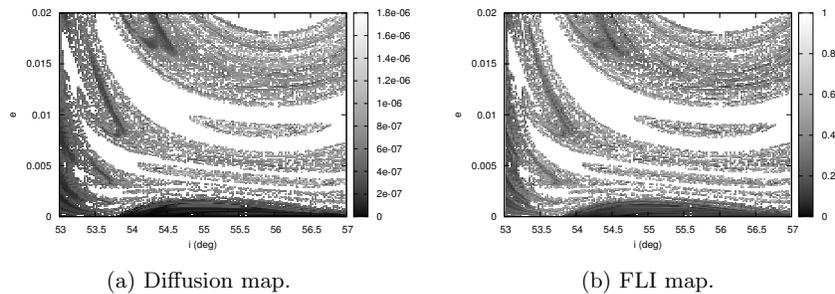


Fig. 4. Stability maps characterizing the diffusivity and the local hyperbolicity (normalized to 1) for physical parameters relevant to the MEO region computed as a function of the initial eccentricity and inclination. Initial phases of the system are $\Omega = 120^\circ$ and $\omega = 120^\circ$.

4. Conclusions

The overlapping of lunisolar secular resonances in MEO gives rise to complex chaotic dynamics affecting mainly the eccentricity. The local hyperbolicity associated to the resulting stochastic layer is synonymous to macro-

^hNote that the ergodic nature of the phase-space has not yet been investigated.

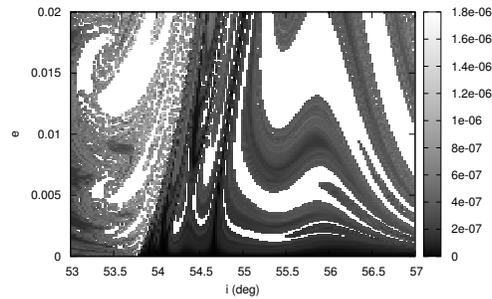


Fig. 5. Diffusion map for physical parameters relevant to the MEO region computed as a function of the initial eccentricity and inclination. Initial phases of the system are $\Omega = 240^\circ$ and $\omega = 120^\circ$.

scopic transport in action space, with typical Lyapunov times on the order of decades. We have shown that these transport properties obey a diffusion law, and we have presented dynamical maps based on the numerical estimation of the diffusion coefficient. Our results show that we may find diffusive orbits even for moderate eccentricity near the operational inclinations of (and for physical parameters relevant to) the navigation satellites. Nonetheless, the number of degrees of freedom renders difficult the global comprehension of the tableau, as attested by the diffusion maps presented herein. The computational challenge emanating from this difficulty is surely a nice invitation to go beyond our communities, and to make considerable efforts to redesign the standard way by which ‘stability maps’ in general are traditionally generated in Celestial Mechanics. Significant improvements will arise certainly using adaptive algorithms and non-structured grids, based on clustering techniques¹⁰.

References

1. S. Breiter, Extended fundamental model of resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **85**, pp. 209–218 (2003).
2. B. V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics reports* **52**, pp. 263–379 (1979).
3. J. Daquin, A.J. Rosengren, F. Deleflie, E.M. Alessi, G.B. Valsecchi, A. Rossi, The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport, *Celestial Mechanics and Dynamical As-*

- tronomy*, doi:10.1007/s10569-015-9665-9 (*arXiv:1507.06170v1 [astro-ph.EP]*) (2015).
4. F. Deleflie et al., Semi-analytical investigations of the long term evolution of the eccentricity of Galileo and GPS-like orbits, *Advances in Space Research* **47**, pp. 811–821 (2011).
 5. T.A. Ely and K.C. Howell, Dynamics of artificial satellite orbits with tesseral resonances including the effects of luni-solar perturbations, *Dynamics and Stability of Systems* **12**, pp. 243–269 (1997).
 6. T.A. Ely, Eccentricity impact on east-west stationkeeping for global positioning system class orbits, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **25**, pp. 352–357 (2002).
 7. C. Froeschlé et al., Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **67**, pp. 41–64 (1997).
 8. C. Froeschlé et al., Graphical evolution of the Arnold web: from order to chaos, *Science* **289**, pp. 2108–2110 (2000).
 9. A. Milani and A.M. Nobili, An example of stable chaos in the Solar System, *Nature* **6379**, pp. 569–571 (1992).
 10. N. Nakhjiri and B. Villac, Automated stable region generation, detection, and representation for applications to mission design, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **123**, pp. 63–83 (2015).
 11. A. Morbidelli, Resonant structure and diffusion in Hamiltonian systems, *Chaos and diffusion in Hamiltonian systems 1* (1995).
 12. A.B. Rechester et al., Statistical description of the Chirikov-Taylor model in the presence of noise, *Long Time Prediction in Dynamics*, pp. 471–488, (1983).
 13. A.J. Rosengren, E.M. Alessi, A. Rossi and G.B. Valsecchi, Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the Moon, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **449**, pp. 3522–3526 (2015).
 14. A. Rossi, Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris issues, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **100**, pp. 267–286 (2008).

Remarque. Dans la section 4.3.3, nous avons parlé de diffusion en calculant la variance de la série statistique des accroissements $\{e_{(i+1)\tau} - e_{i\tau}\}_{i,\tau}$. Deux remarques à ce propos.

1. On peut nous reprocher de ne pas avoir considéré la diffusion d'une action (comme on le fait en diffusion hamiltonienne), à savoir celle de G en l'occurrence. C'est d'abord car nous utilisons la notion au sens large de diffusion, celle des marches aléatoires. Cependant, les résultats sont équivalents en termes de « vraie » action : l'excentricité diffuse si et seulement si l'action de DELAUNAY correspondante G diffuse. La figure 4.8 présente la diffusion, en terme d'action G , de l'orbite diffusive considérée dans la section 4.3.3, où nous percevons bien la tendance linéaire de la variance $\sigma_G^2(\tau)$ avec le temps τ .
2. Pour calculer les coefficients de diffusion, nous avons utilisé une *moyennisation dynamique* (et non pas une moyennisation spatiale). Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 4.5. Cette technique nécessite de suivre l'orbite dont on veut estimer le coefficient de diffusion pendant un temps long, $t \rightarrow \infty$, et de se donner les $N \gg 1$ états du système (N accroissements) *via* des accroissements successifs sélectionnés au sein de l'orbite. Le coefficient de diffusion est alors défini comme

$$\mathcal{D} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((e_{(i+1)\tau} - e_{i\tau}) - \overline{\Delta e})^2. \quad (4.40)$$

Puisqu'en pratique n est fini, τ obéit à deux contraintes : (i) il doit être suffisamment petit pour cerner la dynamique et avoir ainsi suffisamment d'accroissements dont on veut calculer la variance et (ii) il doit être suffisamment grand pour éviter des effets de corrélation locale et, pendant ce temps, les actions ont dû « suffisamment » évoluer.

3. Dans la conclusion, nous avons parlé de l'existence de méthodes adaptatives de partition de l'espace des phases pour la genèse de carte de stabilité. Ces méthodes sont présentées dans l'annexe D et ont montré des résultats prometteurs quant à leur efficacité. *A contrario*, nos méthodes de partition de l'espace des phases n'ont rien de dynamique : notre maillage est structuré (maillage rectangulaire) et non-adaptatif.

Nous avons mentionné dans le paragraphe 4.3.1 l'existence de diffusion anormale dans des cas de réalité physique. Nous avons isolé un tel cas : il existe des satellites en région MEO pouvant diffuser anormalement !

4.3.4 Diffusion anormale (possible) des satellites de navigation

Il serait naïf de penser que le transport de l'excentricité dans l'espace des phases s'apparente constamment à de la diffusion normale, comme celle que l'on a pu établir quand $\epsilon = \epsilon(a)$ avec a voisin de $a \sim 29\,600$ km. En réalité, la diffusion n'est jamais purement normale (au sens où $\nu = 1$ dans (4.30)). Nous reportons ici un exemple concret où le transport de l'excentricité ne s'apparente plus, très clairement, à un processus de diffusion. En l'occurrence le transport est anormal et en particulier bien modélisé par une diffusion balistique (*i.e* que $\nu = 2$ dans (4.30)).

Pour des valeurs de perturbation plus modérées, avec $\epsilon = \epsilon(a)$ avec $a = 24\,000$ km, nous avons trouvé une orbite dont l'excentricité reste confinée pendant un temps long (plus de 300 ans), avant de soudainement exhiber des variations à grandes amplitudes, pouvant atteindre $e \sim 0.7$, comme le montre la figure 4.9 (a) : les variations de l'excentricité sont quasi-périodiques pendant un temps long, avant que cette propriété ne cesse subitement d'être vraie. La stabilité

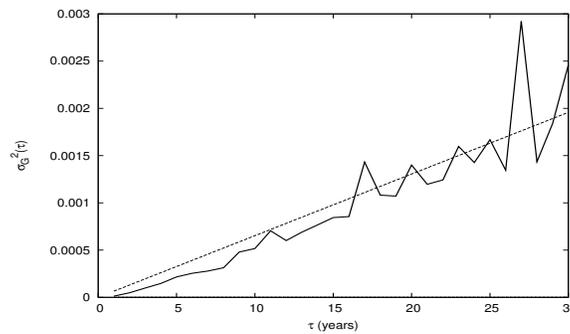


FIGURE 4.8 – Diffusion en terme de l'action $G = \sqrt{1 - e^2}$.

du voisinage de cette condition initiale est présentée par la figure 4.10. Nous pouvons clairement détecter de fines structures hyperboliques transversales dans laquelle la condition initiale est intercalée. Cette orbite n'est pas une orbite diffusive. En effet, le calcul de la variance des accroissements de l'excentricité avec le temps n'est pas à tendance linéaire, mais quadratique, comme montré par la figure 4.9 (b). Le calcul quadratique de la somme des résidus (qualité du fit) a confirmé ce fait : l'erreur quadratique moyenne est plus petite dans le cas d'un fit quadratique plutôt que linéaire. On peut légitimement espérer pouvoir trouver de nombreuses orbites obéissant à cette diffusion balistique dans cette région de l'espace des phases. Plus généralement, comme indiqué par H. VARVOGLIS [VA96], le

[...] transport in perturbed integrable Hamiltonian systems can be modeled as normal diffusion only in regions where most of the KAM tori are destroyed.

Rappelons que nous avons établi dans la section 4.2.1 la bifurcation d'un régime globalement dominé par des résonances fines et isolées vers un régime où les résonances ne sont plus isolées et se superposent au fur et à mesure que le demi-grand axe (dont le paramètre de perturbation ϵ dépend) croît dans \mathcal{I} : il est donc logique et attendu de bénéficier de la richesse des cas intermédiaires.

Le modèle de marche aléatoire idéal (isotropie et indépendance des accroissements) est ici rompu. Si l'on veut modéliser le processus de diffusion de telles orbites (les orbites qui diffusent anormalement, de façon balistique en l'occurrence) via des modèles discrets de marches aléatoires, il convient de différencier la diffusion normale de la diffusion balistique. Dans ce dernier cas, des analogies avec des marches aléatoires de LÉVY ont été établies [SZK93, VHJ02]. On réfère en dynamique hamiltonienne à ce genre de phénomènes, à savoir des « captures » en temps long d'orbites dans certaines portions de l'espace des phases, par les phénomènes de *collage* (*stickiness effect*), dues à l'existence de *cantores*, qui agissent comme des *quasi-barrières* au processus de diffusion du fait de leur présence dense : en pratique, ils confinent le mouvement en temps long. On pourra encore une fois se référer pour plus de détails à M.F. SCHLESINGER [SZK93].

4.4 Chaos et stochasticité

Dans les sections 4.3 et plus particulièrement en 4.3.3, nous avons montré que le processus de transport révélé en région moyenne, pour des paramètres physiques représentatifs de la

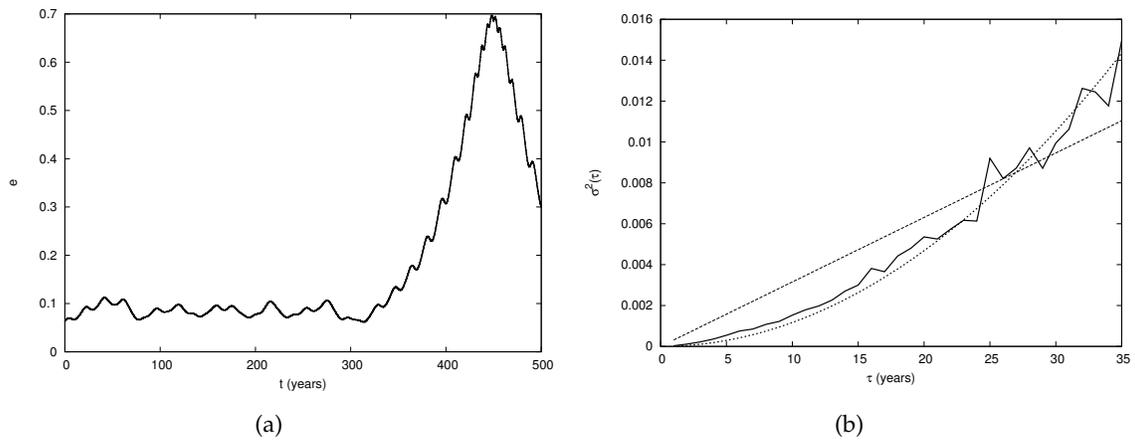


FIGURE 4.9 – Exemple de diffusion balistique en région MEO. (a) Confinement en temps long de l'excentricité. (b) Diffusion balistique de l'orbite.

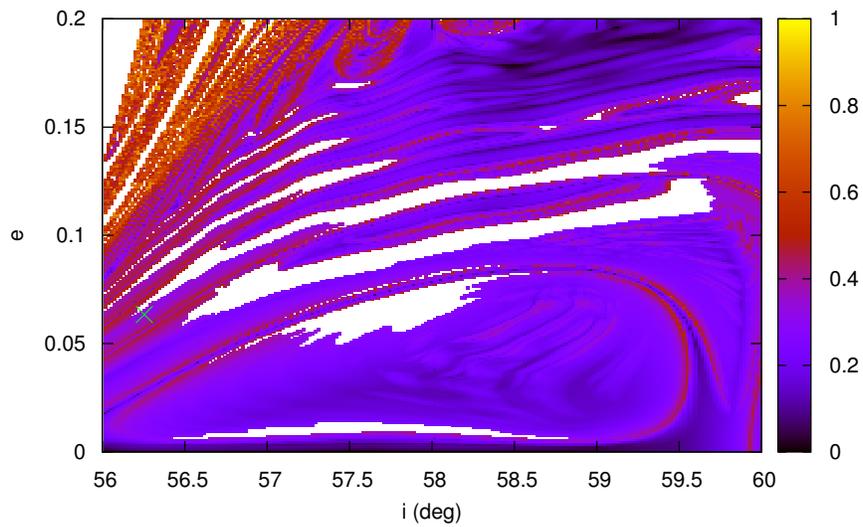


FIGURE 4.10 – Stabilité FLI du voisinage d'une orbite balistique dont les conditions initiales sont $e_0 = 0.0635$ et $i_0 = 56.255^\circ$.

constellation Galileo, s'apparente à de la diffusion déterministe normale, *i.e* que la déviation standard des accroissements de l'excentricité est telle que

$$\sigma^2(\tau) \propto \tau^\nu, \nu \simeq 1. \quad (4.41)$$

En calculant les coefficients de diffusion sur des régions entières de l'espace des phases, nous avons, de droit, en comparant l'analyse de stabilité FLI et les coefficients de diffusion D, établi une relation 1 – 1 entre l'hyperbolicité locale et la diffusion¹⁷, et en particulier nous avons noté que le *chaos stable* semble absent de cette région de l'espace des phases. Nous pénétrons davantage cette idée, en lui donnant plus de poids, en étudiant le comportement en temps long de la corrélation calculée à partir des séries temporelles des éléments képlériens.

Se donnant deux variables aléatoires X, Y définies sur un espace probabilisé, rappelons que la covariance entre ces deux variables est définie comme étant

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad (4.42)$$

Quand les variables aléatoires sont indépendantes, il est clair que leur covariance est nulle. La réciproque est fautive en général. La covariance est précisément la quantité qui intervient quand on cherche à écrire la variance de la somme de deux variables aléatoires en fonction de la somme des variances des variables aléatoires, fait que l'on résume comme

$$\text{Var}(X + Y) \equiv \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{Cov}(X, Y). \quad (4.43)$$

Les variables aléatoires sont alors dites non-corrélées lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$. La corrélation entre deux variables aléatoires est souvent mesurée en statistique *via* le coefficient de corrélation ρ , défini comme

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}. \quad (4.44)$$

Fait de la théorie¹⁸, le coefficient de corrélation est toujours plus petit que 1,

$$|\rho(X, Y)| \leq 1, \quad (4.45)$$

et l'égalité se produit quand il existe une relation linéaire entre les variables aléatoires, *i.e* quand

$$Y = aX + b$$

presque sûrement. En ce sens, nous dirons que le coefficient de corrélation est une mesure de la relation linéaire reliant deux variables aléatoires. Nous avons le joli théorème suivant :

17. Le lien entre forte diffusivité et hyperbolicité locale forte a été établi en comparant le contraste au sein des cartes de stabilité. Cela ne repose sur aucun choix : aux conditions initiales où l'hyperbolicité locale est forte sont associés un coefficient de diffusion à forte magnitude. Cependant, même si nous avons établi ce lien, leur dépendance fonctionnelle n'est pas explicite : nous ne sommes pas en mesure de lier, fonctionnellement, hyperbolicité et diffusivité. Au meilleur de notre connaissance, nous n'avons rien lu allant dans ce sens.

18. On s'en convint par exemple en appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ version probabiliste : $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Théorème 8 Soient X et Y des variables aléatoires, alors

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \mathbb{E} \left((Y - (aX + b))^2 \right) = (1 - \rho(X, Y)^2) \sigma_Y^2, \quad (4.46)$$

et le minimum est atteint pour

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X^2} \text{ et } b = \mathbb{E}(Y - aX). \quad (4.47)$$

La fonction d'auto-corrélation est un cas particulier de la fonction de corrélation, qui mesure la corrélation entre le signal et le signal translaté d'un temps k . Plus précisément, se donnant un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ou la donnée d'une série statistique $\{x_t\}_{t=0}^n$, d'espérance μ et de variance σ^2 , la fonction d'auto-corrélation (normalisée) $R(k)$ est alors définie comme

$$R(k) = \frac{\mathbb{E}((X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu))}{\sigma^2}, \quad (4.48)$$

dont la version discrète (cas d'un nombre fini d'observables) s'écrit

$$\forall k < n, R(k) = \frac{1}{(n-k)\sigma^2} \sum_{t=0}^{n-k} (x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu). \quad (4.49)$$

La fonction d'auto-corrélation permet d'introduire un temps, le *temps d'auto-corrélation* τ_C en introduisant le seuil

$$\epsilon_* = \frac{1}{e} \simeq 0.36. \quad (4.50)$$

Le temps d'auto-corrélation τ_C est alors défini comme

$$\tau_C = \inf \left\{ k_* \mid \forall k \geq k_*, |R(k)| \leq \epsilon_* \equiv \frac{1}{e} \right\}. \quad (4.51)$$

L'introduction de la fonction d'auto-corrélation n'est ici pas artificielle. Rappelons que dans le cas du *chaos stable*, les propriétés évolutives du mouvement étaient stables sur des temps τ bien supérieurs au temps de Lyapunov $T_{\mathcal{L}}$. Des travaux ont en effet montré que les caractéristiques du *chaos stable* sont capturées par la fonction d'auto-corrélation [TVH02], en particulier, le *chaos stable* devient une situation pour laquelle une orbite a un temps d'auto-corrélation grand devant son temps de LYAPUNOV :

$$T_{\mathcal{L}} \ll \tau_C. \quad (4.52)$$

Nous avons calculé ces fonctions d'auto-corrélation pour l'orbite diffusive considérée dans la section 4.3.3, où nous avons rappelé les éléments temporels de l'excentricité dans la figure 4.11. Pour ces deux orbites, nous avons calculé l'évolution en fonction du temps k de $R_{\Delta_e}(k)$ et de $R_{\Delta_i}(k)$. Les résultats apparaissent sur la figure 4.12 où nous avons en plus tracé explicitement les courbes constantes d'équations

$$y = \pm \frac{1}{e} \simeq \pm 0.36, \quad (4.53)$$

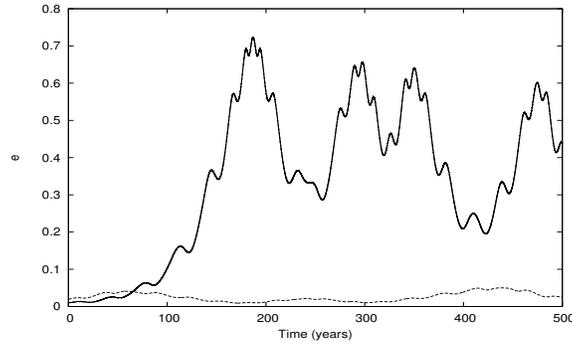


FIGURE 4.11 – Évolution de l'excentricité en fonction du temps pour une orbite chaotique et une orbite stable.

utiles pour estimer le temps de corrélation τ_C . Pour l'orbite régulière, dont les variations de l'excentricité sont quasi-périodiques, la fonction d'auto-corrélation normalisée $R_{\Delta e}$ oscille (plus ou moins) entre les valeurs ± 1 de façon modulée. Le comportement de la fonction $R_{\Delta i}$ est quasi-périodique et très régulier entre les bornes ± 1 . Il en résulte que τ_C est infini (comme attendu, rappelons que le temps de LYAPUNOV d'une orbite stable est infini). Pour l'orbite chaotique, la situation change : les fonctions d'auto-corrélation $R_{\Delta e}$ et $R_{\Delta i}$ sont décroissantes en moyenne, très rapidement, et à la limite nous pouvons supposer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(k) = 0. \quad (4.54)$$

Il s'en suit que τ_C est fini, valant ici quelques années seulement :

$$\tau_C \sim T_{\mathcal{L}}. \quad (4.55)$$

Le comportement de la fonction d'auto-corrélation calculée sur ces exemples a été confirmé par de nombreux autres exemples. Pour les exemples que nous avons traités, nous avons toujours observé la chaîne d'implications suivante : pour les orbites chaotiques, là où l'hyperbolicité locale est forte, l'orbite exhibe un transport à large échelle dans l'espace des phases, et la nature de ce transport est diffusive. Les fonctions d'auto-corrélation décroissent rapidement, avec un profil de décroissance plutôt exponentiel. Le temps d'auto-corrélation τ_C est fini, et du même ordre que le temps de LYAPUNOV associé. À la limite $t \rightarrow \infty$, on peut supposer que la fonction d'auto-corrélation tend vers 0,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0,$$

signifiant qu'un état d'indépendance statistique des accroissements (de l'excentricité ou de l'inclinaison) est atteint. Ces faits sont synthétisés par la figure 4.13.

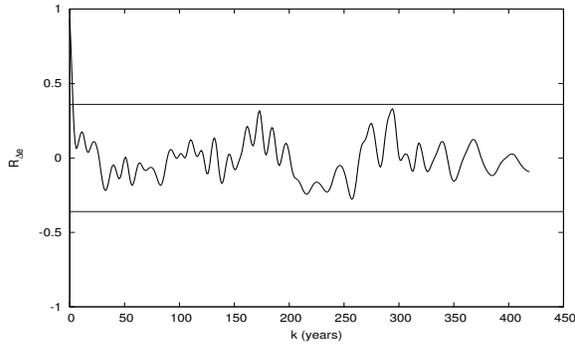
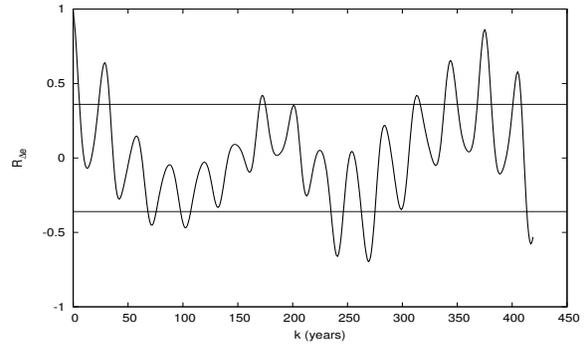
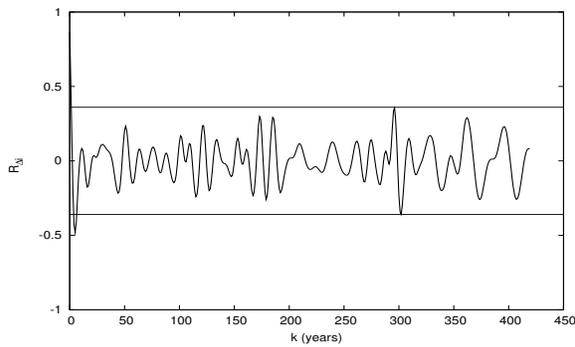
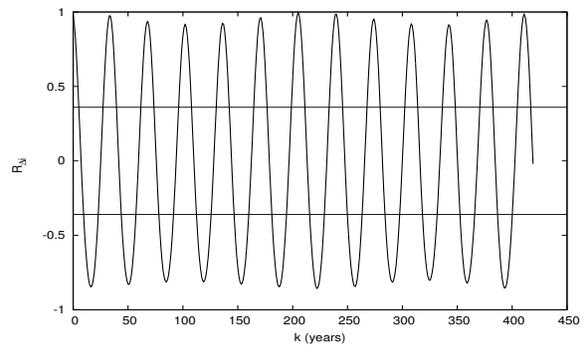
(a) Fonction d'auto-corrélation $R_{\Delta e}$, cas chaotique.(b) fonction d'auto-corrélation $R_{\Delta e}$, cas stable.(c) Fonction d'auto-corrélation $R_{\Delta i}$, cas chaotique.(d) fonction d'auto-corrélation $R_{\Delta i}$, cas stable.

FIGURE 4.12 – Évolution de la fonction d'auto-corrélation pour une orbite chaotique et une orbite stable.

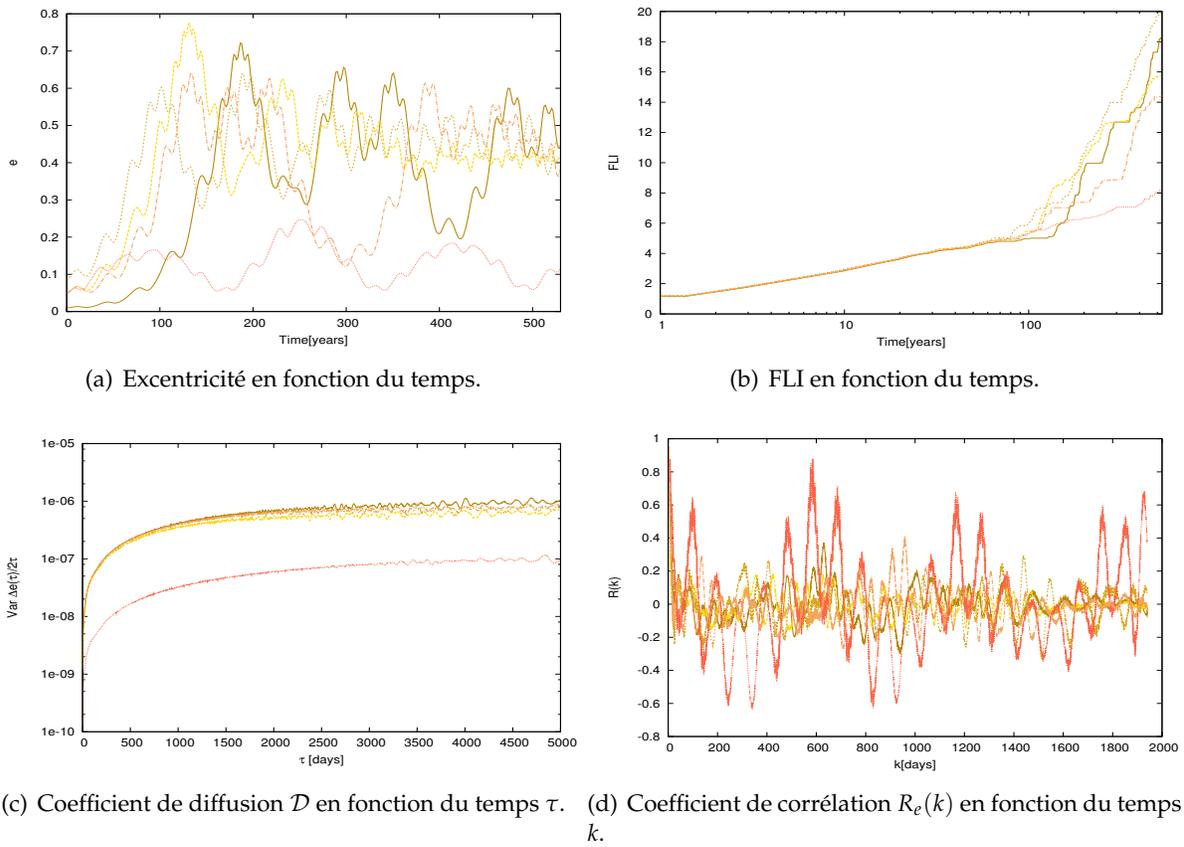


FIGURE 4.13 – Lien entre la hausse de l'excentricité, l'hyperbolicité local (chaos), le transport diffusif et la perte de corrélation pour des orbites typiques Galileo.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la dynamique en temps long des orbites moyennes, dominées principalement par l'effet du J_2 et des quadrupoles luni-solaires, et de leurs résonances séculaires qui sont du type

$$\dot{\psi}_{\mathbf{n}} \equiv n_1 \dot{\omega} + n_2 \dot{\Omega} + n_3 \dot{\Omega}_L \simeq 0. \quad (4.56)$$

Ces résonances ont été décrites (localisation, amplitude, période de libration des angles critiques résonants) analytiquement, via la construction et réduction de la forme normale résonante, pour les premiers ordres de résonance, en introduisant de manière explicite des variables canoniques idoines au voisinage de chaque résonance. Les transformations unimodulaires nécessaires ont été présentées.

Nous avons appliqué le principe général, analytique et structurel de CHIRIKOV pour établir une transition d'un régime globalement dominé par la stabilité, où les résonances sont fines et isolées dans l'espace des phases, vers un régime dominé par le chaos, où les résonances se superposent, lorsque le paramètre de perturbation $\epsilon(a)$ décrit la région MEO. Notre théorie est valide pour des demi-grands axes compris entre 3 et 5.5 rayons terrestres.

Nos considérations analytiques, visant à mieux cerner la structure de l'espace des phases $i - e$, ont été complétées et confrontées à une analyse de la stabilité, de nature semi-analytique, de l'espace des phases. Un atlas général de stabilité de la région MEO, illuminant la topologie du chaos, a été produit par le biais d'indicateurs variationnels du premier ordre, calculés sur des horizons dynamique voisins de 500 ans. Nous avons estimé de nombreux temps de LYAPUNOV : ils sont de l'ordre de quelques décennies en général.

Nous avons fait le lien entre les hausses d'excentricité constatées sur des échelles de temps de l'ordre du siècle, fait caractéristique de la région MEO sous les effets des perturbations luni-solaires, et l'hyperbolicité locale présente au sein de la dynamique [DRA⁺]. Le transport macroscopique que nous avons révélé a été caractérisé : c'est un transport de nature diffusive au sens classique du terme.

Notre description générale a ensuite été plus finement utilisée, à deux reprises, pour la description de la région Galileo : une première fois pour faire le lien avec les travaux de nos confrères [DAR⁺] (définition des conditions initiales assurant ou excluant des régions stables ou chaotiques, estimation des temps de collision T_C , quantification fine de l'hyperbolicité) et une seconde fois pour éclairer les propriétés diffusives de la dynamique en calculant des coefficients de diffusion. Ces derniers, quand comparés à la quantification de l'hyperbolicité, ont révélé l'absence de *chaos stable* dans la dynamique [DRT], faits corroborés en étudiant la décroissance en temps de la corrélation.

Conclusions, limitations et perspectives

Synthèse

CE TRAVAIL A VISÉ la description de la dynamique, en temps long, d'objets spatiaux (satellites artificiels, débris) au voisinage de surfaces résonantes de la région moyenne. Nos approches ont été analytiques, semi-analytiques et numériques.

Intéressés par des résultats dynamiques en temps long, nous avons présenté les méthodes classiques d'appréhension des systèmes voisins de système intégrables ainsi que leurs injections dans la théorie du mouvement du satellite artificiel. La théorie moyenne en résultant, *la théorie semi-analytique* du satellite artificiel, a été présentée. Elle consiste en la propagation d'un système dynamique dont on a opéré une mise en moyenne analytique pour éliminer des termes à courtes périodes présents dans le système. Pour les besoins de ce travail, les propagateurs d'orbites utilisés ont été enrichis des équations variationnelles, nécessaires pour calculer pléthores d'indicateurs de chaos se basant sur l'évolution du vecteur tangent. Un des problèmes posés dans ce travail consiste en l'adéquation éventuelle du chaos émanant de la dynamique exacte et de son homologue moyenné.

Nous avons investigué cette question sur le premier chaos qui pouvait émaner (le premier au sens de la minimalité du nombre de DOF nécessaire à son apparition) : le *chaos tesséral*. C'est pourquoi nous avons construit et réduit la forme normale résonante à 2-DOF du hamiltonien de la *résonance tessérale* dans sa généralité, sans restriction particulière sur la condition de commensurabilité (k_1, k_2) réalisée. Ces résonances

$$\dot{\sigma}_{\mathbf{k}} \equiv k_1 \dot{\lambda} - k_2 \dot{\omega} \simeq 0$$

impactant le demi-grand axe, ont été caractérisées. En général, elles impliquent une évolution chaotique du demi-grand axe, de façon localisée, dans une bande fine de chaos large d'au plus quelques kilomètres. Cette description a ensuite été utilisée et particularisée à des résultats de stabilité au voisinage de la résonance tessérale la plus importante en région moyenne, la résonance tessérale $(2, 1)$, où se situent certains satellites de navigation. Nous avons confronté les résultats de l'analyse de stabilité de l'espace des phases en utilisant un propagateur d'orbite numérique et semi-analytique. *Via* une approche cartographique de l'espace des phases, nous avons conclu à l'adéquation du chaos révélé par ces considérations numériques : sur ce type d'instabilité, la moyennisation des termes à courtes périodes (en plus des troncatures de certains développements infinis, telles que définies dans notre théorie moyenne) ne pervertit pas l'image du chaos. Cela légitime l'usage exclusif des outils moyens pour sonder et cerner la dynamique de ce type d'instabilité.

Nous nous sommes ensuite intéressés à une autre classe importante de résonances en région moyenne, les *résonances séculaires* du type

$$\psi_{\mathbf{k}} \equiv k_1 \dot{\omega} + k_2 \dot{\Omega} + k_3 \dot{\Omega}_L \simeq 0.$$

La forme normale résonante du hamiltonien à 2.5-DOF a été construite et réduite au voisinage de chaque surface résonante. Notre théorie, valide pour un paramètre perturbatif $\epsilon(a)$ contraint par les bornes $3 \leq a \leq 5.5$ rayons terrestres, s'est attachée à décrire la stabilité du plan de phase $i - e$. Nous avons montré l'existence d'une transition entre un régime dominé par la stabilité, où les résonances sont fines et isolées, vers un régime de type CHIRIKOV, où les résonances se superposent. Les voies d'accès au chaos étant ouvertes, nous avons quantifié de façon semi-analytique, à l'aide d'indicateurs de chaos variationnels, l'hyperbolicité locale du système pour de nombreux paramètres physiques caractérisant diverses constellations de satellites de navigation. Un atlas de stabilité a été produit. Les approches semi-analytiques ont été confrontées aux résultats obtenus analytiquement : en substance, les deux méthodes capturent et confirment la transition vers un régime où les résonances se superposent. Les conséquences dynamiques du chaos, à savoir du transport dans l'espace des phases, ont été révélées et caractérisées : le transport est de nature diffusive. Cette description a permis de mieux cerner les propriétés évolutives caractéristiques de l'excentricité pointées par la communauté. Les résultats architecturaux généraux de la région moyenne ont été particularisés à la constellation européenne Galileo, pour laquelle nous avons montré, entre autres, que la *diffusion normale* prévaut. Dans le but d'obtenir une compréhension dynamique plus globale, nous avons estimé de façon semi-analytique de nombreux coefficients de diffusion. Pour ce paramètre de perturbation, nous avons montré la quasi-correspondance bijective entre l'hyperbolicité locale et la diffusivité. Ce résultat exclut la notion de *chaos stable* au sein de la dynamique, résultat soutenu par l'estimation des temps d'auto-corrélation τ_C (du même ordre de grandeur que $T_{\mathcal{L}}$).

Limitations et perspectives

Il existe en région MEO d'autres résonances tessérales qui n'ont pas été étudiées dans ce présent document. Elles sont d'ordres supérieurs et d'intérêt dynamique moindre. Citons, à titre d'exemple, la résonance (3, 1) ou la résonance (3, 2) (*confer* table page 3.1). Les approches analytiques et cartographiques développées peuvent cependant s'y étendre sans problème. Ces résonances ont reçu cependant récemment de l'attention [CG15a].

Pour les résonances tessérales externes (celles au delà de la région géostationnaire), le mécanisme d'instabilité (et l'accès au chaos) reste le même : même si d'autres effets perturbateurs prennent place (Lune, Soleil, pression de radiation solaire), leurs effets sur la dynamique (sur le demi-grand axe en particulier) ne sont qu'indirects et l'équation d'évolution de la variable de DELAUNAY rattachée au demi-grand axe reste donc inchangée. Seuls les paramètres qu'elle contient, l'excentricité et l'inclinaison, évoluent, mais lentement avec le temps si bien que le tableau global n'en est que peu affecté [CG15b].

Concernant les résonances séculaires de la région moyenne, les développements possibles sont encore nombreux : sur le plan analytique, mais aussi concernant l'exploration numérique de la dynamique. Citons *a minima* :

- **Modèle isolé de résonances.** L'estimation analytique des amplitudes des résonances s'est faite en les supposant isolées (*confer* section 4.2.1). Ce modèle peut être raffiné et amélioré, en veillant à introduire les effets d'ordres supérieurs.
- **Critère de superposition des résonances via $\bar{\mathcal{K}}$.** Dans la section 4.3.2, nous avons proposé une façon pour calculer le coefficient de stochasticité $\bar{\mathcal{K}}$. Nous pourrions étudier la dépendance fonctionnelle de $\bar{\mathcal{K}}$ avec ϵ , *i.e* étudier $\bar{\mathcal{K}}(\epsilon)$ pour

$$\epsilon(a_{\min}) \leq \epsilon \leq \epsilon(a_{\max})$$

en vue d'exploiter pleinement la modélisation basée sur l'estimation des amplitudes (de façon isolée). Cette étude précisera la transition entre le régime de CHIRIKOV et le régime de NEKHOROSHEV. Pour cela, il faut calculer les distances de HAUSDORFF entre chaque paire de résonances caractérisées (centre et amplitude) jusqu'à un ordre maximal des résonances prescrit ($|\mathbf{k}| \leq k_{\max}$). L'idée est de faire apparaître un seuil de perturbation ϵ_* (*i.e* un demi-grand axe a_*) via $\bar{\mathcal{K}}$ en dessous duquel la mesure de la région chaotique est petite et au dessus duquel elle est de l'ordre de l'unité.

- **Ergodicité.** Les coefficients de diffusion, essentiellement dans la section 4.3.3, ont été calculés par moyennisation temporelle, en suivant pendant une longue période de temps l'orbite. Nous aurions pu opérer à un autre choix, en les calculant par moyennisation spatiale :

$$\mathcal{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle (I(t) - \langle I(0) \rangle)^2 \rangle \quad (4.57)$$

avec $\langle \bullet \rangle$ un opérateur de moyennisation spatiale. Les coefficients sont alors dits *coefficients de diffusion locales*. Implicitement, il est supposé que les accroissements $I(t) - I(0)$ sont en réalité fonction d'une variable, disons ψ (typiquement des angles du système), et nous opérons à la moyenne des $I(t, \psi) - I(0, \psi)$ pour tout les ψ d'un ensemble \mathcal{V} approprié qui est à définir ($\langle \bullet \rangle \equiv \langle \bullet \rangle_{\psi \in \mathcal{V}}$) [Kar83]. Contrairement aux coefficients de diffusion obtenus par moyennisation temporelle, les coefficients obtenus par moyennisation spatiale ne reflètent que des propriétés locales de l'espace des phases, ce qui est un avantage. En effet, dans la moyennisation temporelle, qui nécessite de suivre l'orbite pendant un temps long, certaines propriétés (différentes) de l'espace des phases peuvent être à l'œuvre. L'éventuelle égalité des quantités obtenues par moyennisation spatiale ou temporelle est l'objet de la *théorie ergodique*. Plus précisément, donnons-nous une fonction f suffisamment régulière dépendant des coordonnées x . Sa moyenne temporelle est définie comme

$$\langle f(x) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x(s)) ds, \quad (4.58)$$

et pour la même fonction, on définit sa moyenne spatiale sur l'espace des phases Γ comme

$$\langle f(x) \rangle_\Gamma = \int_\Gamma f(x) d\Gamma. \quad (4.59)$$

Un système dynamique est alors dit *ergodique* quand ces quantités coïncident :

$$\langle f(x) \rangle_t = \langle f(x) \rangle_\Gamma. \quad (4.60)$$

Établir l'ergodicité éventuelle de nos dynamiques reste à faire. Ces points ont été discutés dans les deux articles suivants, dont on donne les références pour s'inspirer des méthodes :

- K. TSIGANIS mentionne brièvement cet aspect dans [CFMH13]¹⁹ pour les mêmes raisons qui nous poussent à aborder le problème de l'ergodicité de l'espace des phases des satellites de navigation : les cartes de diffusion obtenues par l'auteur sont dépendantes des phases initiales et il serait, tout comme dans notre cas, plus pertinent d'avoir une représentation plus robuste vis à vis de cette dépendance, *i.e* en tenant compte d'un ensemble de valeurs de phases initiales et en moyennant en chaque action I les résultats sur les phases :

$$\mathcal{D}(I) \leftarrow \langle \mathcal{D}(I, \psi) \rangle_{\psi}. \quad (4.61)$$

La réalisation de cartes de diffusion moyennées sur les angles est cependant très pénible (poids informatique). Sans précaution supplémentaire et modulo la possibilité du calcul, en moyennant les résultats sur les phases, nous obtenons un coefficient de diffusion \mathcal{D} pondéré par la probabilité qu'une orbite soit chaotique en l'action I . À la limite où le système est ergodique, ces derniers sont égaux.

- C. FROESCHLÉ et al. se sont penchés sur des aspects ergodiques dans un contexte d'étude du comportement des trajectoires chaotiques diffusant sur des réseaux d'ARNOLD [FLG06]. En particulier, il s'agissait de revisiter l'idée selon laquelle toutes les orbites d'une zone chaotique ont le même exposant maximal de LYAPUNOV et qu'il peut donc se calculer en utilisant un ensemble d'orbites. Les auteurs ont montré qu'il pouvait en être autrement, en montrant que les structures d'ARNOLD étaient un obstacle à l'ergodicité du système. En augmentant les valeurs du petit paramètre perturbatif ϵ du problème voisin d'un système intégrable, les auteurs ont aussi montré que les moyennes spatiales étaient alors plus proches des moyennes temporelles, malgré l'existence d'un phénomène de collage.

Des propriétés plus fortes que l'ergodicité existent (en particulier le mélange (*mixing*) implique l'ergodicité du système). Les fonctions d'auto-corrélation sont liées au phénomène de mélange : un système est mélangeant si sa fonction d'auto-corrélation tend vers 0 avec le temps [DFK05]²⁰. Nous avons observé ces décroissances en temps pour des paramètres voisins de la région Galileo, ce qui laisse supposer des propriétés éventuelles de mélange, *a fortiori*, d'ergodicité.

– Diffusion, marches aléatoires et propriétés statistiques.

- Nous avons quantifié la diffusion ($\epsilon = \epsilon(a)$ avec $a = 29\,600$ km) seulement en excentricité. Nous pouvons étendre nos investigations à l'inclinaison.
- Les modèles de marches aléatoires, description du processus de diffusion *via* des propriétés statistiques des accroissements, peuvent être développés. Soulignons l'existence d'orbite diffusant ballistiquement (*confer* section 4.3.4), limitation de la modélisation brownienne classique [SZK93].
- Étude du comportement en temps long de la corrélation pour définir un indicateur de mélange (par exemple se basant sur la vitesse de décroissance de la fonction d'auto-

19. K. Tsiganis and H. Varvoglis, *Diffusion of asteroids in mean motion resonances.*, Proceedings of the Third Meeting on Celestial Mechanics—CELMEC III, held in Rome, Italy, 18–22 June, 2001.

20. H. VARVOGLIS, *Regular and Chaotic Motion in Hamiltonian Systems.*

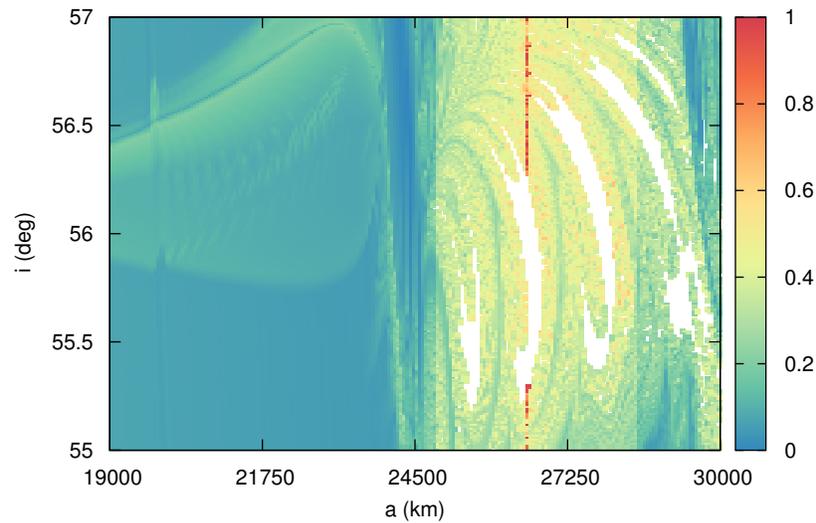


FIGURE 4.14 – Analyse de stabilité au voisinage de 56° ($e = 0.015$) en fonction du petit paramètre $\epsilon = \epsilon(a)$.

corrélation) .

- **De l'ordre au chaos.** L'atlas de la section 4.2.1 peut être complété. Idéalement par des cartes de stabilité en dimension 3 dans l'espace $\epsilon(a) - e - i$. Ces considérations semi-analytiques requièrent cependant une grande puissance de calcul. Dans un premier temps, on peut se restreindre au voisinage de chaque résonance du tableau 4.1 et étudier, par exemple, cette transition finement dans le plan $\epsilon = \epsilon(a) - i$ (en fixant e). Nous avons initié ce travail que nous pensons valoriser prochainement. Les résultats d'une telle approche sont illustrés par la figure 4.14, étude réalisée au voisinage de l'inclinaison nominale des Galileo.
- **Génése des cartes de stabilité & Chaos osculateur.** En suivant les idées de l'annexe D, on peut veiller à mettre en place, de façon effective, ces méthodes au sein de nos propagateurs pour tester leur viabilité sur nos dynamiques. Si ce point impacte significativement le temps de production des cartes de stabilité, on peut les appliquer pour soutenir la production de cartes tridimensionnelles du point mentionné ci-avant, mais surtout (en raison des propagations longues) d'essayer de les valoriser dans nos propagateurs numériques pour tester l'adéquation du chaos osculateur et moyen sur le chaos de cette région moyenne.

Annexes

A Le chaos

On relate la phénoménologie du chaos ainsi que quelques outils numériques classiques utile à sa détection numérique. Ces outils variationnels du premier ordre ont été implémentés dans nos propagateurs d'orbites : JACK, le propagateur osculateur présenté en annexe B et STELA, le propagateur moyen présenté en annexe C.

A.1 Phénoménologie du chaos

Il est souvent fécond de se référer à l'exemple particulier pour cerner des concepts généraux, comme l'écrit P.R HALMOS [Hal13] :

The source of all great mathematics is the special case, the concrete example.

It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case.

C'est pourquoi nous exposons la substance du chaos à partir du modèle simple du pendule faiblement perturbé, dans un contexte perturbatif où les tores KAM vont disparaître sous l'effet de la perturbation. Pour cela, donnons nous d'abord le hamiltonien du pendule

$$\mathcal{H}(I, \phi) = -\frac{I^2}{2} + \cos(\phi). \quad (62)$$

Le portrait de phase de \mathcal{H} se compose d'un point fixe de nature hyperbolique et d'un point fixe elliptique. Deux régimes dynamiques, *circulation* et *libration*, sont séparés par la *séparatrice* [Mor02]. Précisons la « nature » de cette séparatrice. La recherche des points fixes d'un champ de vecteur de \mathbb{R}^n peut se voir comme la première strate d'organisation structurelle de l'espace des phases. Une seconde consiste à établir les « liens » entre eux. Les *variétés stables* \mathcal{W}^s et *instables* \mathcal{W}^u répondent à ce besoin. En désignant par h un point fixe de nature hyperbolique, elles sont définies de façon générale comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^s(h) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi_t(y) - h\| = 0\}, \\ \mathcal{W}^u(h) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi_{-t}(y) - h\| = 0\}, \end{aligned} \quad (63)$$

avec $\phi_t(\bullet)$ le flot du système et $\|\bullet\|$ une norme quelconque²¹. Dans le cas du système du pendule (62), les variétés stables et instables se confondent : elles forment la séparatrice. En raison du théorème de LIOUVILLE (rappelé dans la section 2.1.2), le système (62) est intégrable,

21. Puisque elles sont toutes équivalentes en dimension finie.

comme tout système possédant « assez » d'intégrales premières indépendantes. Ce n'est donc pas avec ce nombre de degrés de liberté que le chaos peut se manifester. En ajoutant un demi degré de liberté (une perturbation qui ne dépend que du temps), ou 1 degré de liberté complet (formulation hamiltonienne autonome), la situation peut changer radicalement. Plus précisément, considérons à la place de (62) le nouvel hamiltonien

$$\mathcal{H} = -\frac{I^2}{2} + I_2 + \cos(\phi) + \mathcal{P}(\phi, \theta) \quad (64)$$

où θ est le temps, I_2 sa variable canonique conjuguée, et \mathcal{P} une petite perturbation.

Même si le point d'équilibre instable persiste dans le cas perturbé, il n'y a pas de raisons de supposer que les variétés associées continuent à se confondre. En général, elles ne le sont plus, et elles s'intersectent de façon transverse : ce sont les *intersections homoclines*²² [Mor02]. C'est H. POINCARÉ qui a été le premier à exhiber, dans le cadre du problème à trois corps, le caractère non confondu entre la variété stable et la variété instable : le phénomène de séparation de la séparatrice. Il écrit [Poi99b] :

Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.

On appelle *région chaotique* la région formée par l'enchevêtrement des variétés s'intersectant. L'évolution de deux conditions initiales dans cette région, initialement arbitrairement proches, devient alors complètement différente dans le futur : la distance entre ces orbites évolue exponentiellement avec le temps.

Même si la phénoménologie d'accès au chaos est la même en plus grande dimension, notons une différence majeure quand le degré de liberté n d'un système hamiltonien est supérieur strictement à 2. En dimension $n = 2$, les tores KAM invariants feuilletent l'espace des phases, l'espace entre ces tores étant d'autant plus petit que ε est faible. Si des tores persistent, les régions chaotiques sont confinées entre ces derniers. En ce sens, nous dirons qu'il s'agit d'un chaos borné. La situation change maintenant pour $n > 2$. L'espace des phases est de dimension $2n$ et le hamiltonien est toujours une intégrale première du mouvement. Le mouvement évolue sur une variété de dimension $2n - 1$. Les tores KAM ont une dimension maximale valant n . Une sous-variété sépare un espace de dimension k seulement si elle est de dimension $k - 1$, l'espace n'est plus séparé sinon. Ainsi, l'espace est connexe dès que $n < (2n - 1) - 1 = 2n - 2$, i.e dès que $n > 2$. L'espace devenant connexe, il est possible que les variables d'action échappent au précédent confinement [Arn88, Bél86].

Au sens strict du terme, le « chaos mathématique » est défini de la façon suivante [Sko10]. Une fonction $f : X \rightarrow X$ est dite chaotique si :

1. f est transitive,

22. *Homoclinic intersection* ou *separatrix splitting*.

2. l'ensemble des orbites périodiques de f est dense dans X ,
3. f est sensible aux conditions initiales.

En pratique, les outils numériques de détection de chaos s'attardent sur le dernier point, *i.e* sur la propriété d'être sensible aux conditions initiales. Par sensibilité aux conditions initiales, nous entendons que la norme de la différence entre deux orbites croît exponentiellement avec le temps. Présentons maintenant quelques outils numériques de détection du chaos.

A.2 Quelques outils numériques de détection du chaos

Il existe pléthore d'indicateurs de chaos, différents, qui ont été employés dans beaucoup de problèmes de mécanique céleste et plus récemment de mécanique spatiale. Nous ne prétendons pas à une présentation et description exhaustive de ces derniers. Parmi ces indicateurs, il est d'usage de distinguer deux grandes familles : ceux se basant sur les équations variationnelles, les autres basées sur des méthodes spectrales. Dans ce travail, nous avons utilisé essentiellement le Fast Lyapunov Indicator (FLI), indicateur sur lequel nous allons mettre l'accent. Mais avant, présentons la méthode géométrique des sections de POINCARÉ.

Sections de Poincaré. La section de POINCARÉ permet de discriminer les orbites régulières des orbites chaotiques, graphiquement dans un plan de dimension 2, quand le nombre de DOF du système vaut 2. La méthode générale est la suivante. Puisque le système est à 2-DOF, l'espace des phases est de dimension 4 mais la conservation de l'énergie (le Hamiltonien) contraint le mouvement à évoluer sur une variété de dimension 3. En choisissant une section transverse à cette variété, la dynamique est appréciée en observant la trace de cette dernière à travers la section, un plan de dimension 2. Quand les orbites appartiennent à des tores KAM, leurs trajectoires décrivent une variété de dimension 1, *i.e* une courbe dans le plan. En observant la trace de la dynamique sur la section pour sur un horizon temporel suffisant, les tores KAM se dessinent comme des lignes solides. Dans le cas contraire, les orbites chaotiques n'appartiennent plus à une courbe sur le plan : la trace sur la section fait apparaître un ensemble de points désordonné.

Le Fast Lyapunov Indicator. Une grande famille d'indicateurs de chaos se base sur les méthodes variationnelles. L'origine de ces indicateurs est commune : apprécier l'évolution avec le temps du vecteur tangent de deux orbites initialement proches. Par système d'équations variationnelles associé au système dynamique $\dot{x} = f(x)$ sur \mathbb{R}^n , où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente le champ de vecteur, nous entendons le système différentiel défini sur \mathbb{R}^{2n}

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) w, \end{cases} \quad (65)$$

avec $w \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tangent (ou encore dit vecteur déviation). Sur la base de la propagation de ce système (en fixant une condition initiale (x_0, w_0)), les méthodes variationnelles définissent divers indicateurs. Présentons en détail le Fast Lyapunov Indicator, l'indicateur qui est utilisé dans ce travail, ainsi que quelques références concernant d'autres indicateurs.

L'exposant rapide de Lyapunov, le FLI introduit par FROESCHLÉ [Fro97] mesure la longueur maximale du vecteur tangent atteinte jusqu'au temps t . Cet indicateur au temps t est

défini comme

$$\text{FLI}(t) \equiv \sup_{\tau \leq t} \ln \|w(\tau)\|. \quad (66)$$

C'est seulement par souci de concision que nous avons noté $\text{FLI}(t)$ au lieu de $\text{FLI}(x_0, w_0; t)$. Le FLI, outre sa simplicité de calcul (il ne requiert que le calcul de la dérivée du champ de vecteur), permet en pratique de discriminer rapidement les orbites stables, résonantes et instables. L'avenir dynamique du FLI, et donc sa valeur finale, est utilisé pour discriminer la stabilité de l'orbite. Cette valeur dépend significativement du type de mouvement considéré. En particulier, le FLI permet de discriminer les courbes invariantes, discriminent les orbites stables non-résonantes des orbites stables résonantes, et enfin les orbites chaotiques. En se basant sur un système voisin d'un système intégrable, $\mathcal{H}(I, \phi) = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1$, écrivons w selon les composantes $w = (w_I, w_\phi)$. On peut alors explicitement calculer le système correspondant à (65) et montrer que [Mas] que :

1. Dans le cas intégrable, $\epsilon = 0$, alors

$$\begin{cases} w_I(t) = w_I(0), \\ w_\phi(t) = w_\phi(0) + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial^2 I}(I(0)) w_I(0) t. \end{cases} \quad (67)$$

On en déduit, dans le cas intégrable, une croissance au plus linéaire de la norme du vecteur tangent avec le temps.

2. Pour une orbite régulière, alors

$$\|w(t)\| = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial^2 I}(I(0)) w_I(0) \right\| t + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha t) + \mathcal{O}(1) \quad (68)$$

pour un $\alpha > 0$.

3. Pour une orbite résonante stable, nous avons l'estimée

$$\|w(t)\| = \|Aw_I(0)\| t + \mathcal{O}(\epsilon^\beta t) + t \mathcal{O}(\rho^2) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon} t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \quad (69)$$

où A est un opérateur, $\beta > 0$ et ρ est une borne traduisant la proximité des conditions initiales où l'estimée s'applique avec un point d'équilibre.

Par conséquent, le FLI peut s'utiliser pour différencier, en utilisant le même w_0 et temps de propagation t , des orbites appartenant à des tores KAM ou résonantes. Pour des orbites chaotiques, la croissance de w avec le temps est plus rapide : elle est exponentielle. L'étude de la stabilité de l'espace des phases peut donc se faire en calculant pour des différentes conditions initiales, avec le même w_0 et temps d'intégration, la valeur finale du FLI. Ajoutons que puisque pour des orbites chaotiques la norme du vecteur tangent croît exponentiellement avec le temps, l'évaluation de $\|w(\tau)\|$ peut en pratique poser des soucis de nature numérique. C'est la raison pour laquelle une technique de renormalisation est classiquement opérée sur vecteur tangent, à chaque période de temps ν que l'on se donne [Sko10].

D'autres indicateurs basés sur les équations variationnelles. L'indicateur historique basé sur les équations variationnelles est l'exposant de LYAPUNOV \mathcal{L} , défini comme

$$\mathcal{L} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|w(t)\|}{\|w(0)\|} \quad (70)$$

Pour la plupart des conditions initiales²³, il a été montré que cet exposant est bien défini, *i.e* qu'il ne dépend pas du choix des conditions initiales, ni des variables dans lequel le calcul est mené (les variables utilisées pour écrire les équations du mouvement). Une orbite stable (confinée sur un tore KAM) à un exposant \mathcal{L} valant zéro. Une orbite est déclarée chaotique dès que $\mathcal{L} > 0$ [Mor02]. *Stricto sensu*, une positivité de l'indicateur indique une hyperbolicité locale dans le voisinage de l'orbite. Par exemple, bien que le pendule soit un problème intégrable (et donc non chaotique), l'exposant de LYAPUNOV associé au point fixe hyperbolique est positif. Cependant, comme indiqué dans la première section, l'hyperbolicité locale s'accompagne des variétés stables et instables qui, en milieu perturbé, n'ont plus lieu de coïncider, donnant naissance à la région chaotique. C'est pour cette raison qu'à partir de la positivité de l'exposant nous concluons sur la dynamique chaotique. Via l'exposant de LYAPUNOV, on associe une échelle temporelle de prédictibilité, le temps de LYAPUNOV $T_{\mathcal{L}}$. Il se définit comme l'inverse de cette quantité :

$$T_{\mathcal{L}} \equiv \frac{1}{\mathcal{L}}. \quad (71)$$

Au delà de ce temps, l'évolution future de l'orbite doit être traitée comme un futur possible. D'un point de vue de la signification physique, le temps de LYAPUNOV représente le temps nécessaire pour diverger de la quantité ϵ dans l'espace des phases. L'exposant de LYAPUNOV souffre en général d'une convergence faible, puisque contrairement au FLI, il opère à une moyennisation temporelle. D'autres indicateurs ont été introduits pour pallier à ce problème. Le lecteur pourra trouver une présentation d'autres indicateurs variationnels du premier ordre (Megno, Mean Megno, Gali, Sali) dans [CGS03, Bar05, VDLC09, BBB09, Sko10] ainsi qu'une refonte du FLI (*orthogonal* FLI) dans [FFF02]. Par exemple, le Megno se base aussi sur la résolution du système variationnel, mais contrairement au FLI, il est nécessaire de résoudre une équation intégrale en plus. Pour des orbites chaotiques, le Megno oscille autour d'une droite asymptote, de coefficient directeur rattaché à l'exposant maximal de Lyapunov. Il oscille autour de la valeur 2 pour des orbites confinées sur des tores invariants. Mentionnons le résultat d'un lien analytique entre le FLI et le Megno présenté dans [MCG11].

Pour l'ensemble de ces indicateurs se basant sur les équations aux variations, notons qu'il est préférable de former intégralement le système d'équations variationnelles, à savoir, de former l'équation différentielle satisfaite par le vecteur tangent avant de l'intégrer et non pas d'intégrer deux orbites initialement proches et de procéder par évaluation de la différence des vecteurs d'états. Des travaux ont montré comment la deuxième méthode pouvait conduire à des conclusions erronées [Mor02]. Quant au choix du w_0 initial pour ces indicateurs, c'est une discussion récurrente dans les méthodes variationnelles et un problème de façon générale. Certains travaux ont discuté de ce choix et ont conclu à la pertinence de choisir un vecteur tangent orthogonal au Hamiltonien dans le cas d'une dynamique hamiltonienne, *i.e* dans la direction

23. Au sens de la théorie de la mesure : la mesure de l'ensemble des conditions initiales menant à différentes valeurs de \mathcal{L} vaut zéro.

de $\nabla\mathcal{H}$ [Bar05, BBB09]. En pratique, il est d'usage de normer (à 1) le vecteur tangent initial. Une autre difficulté consiste en le choix du temps de propagation, *i.e* du choix de t_{final} . Bien entendu, un temps de propagation excessif est inutile. À l'opposé, un temps de calcul trop court peut fausser l'analyse de la stabilité de la dynamique. Il n'y a donc pas de méthode générale et universelle pour ce genre de problème à trouver dans la littérature. Il y a un compromis entre ces deux extrêmes qui est problème dépendant. Dans un contexte de carte de stabilité (l'indicateur est tracé en fonction de certaines conditions initiales), la « bonne méthode » est donc de faire quelques simulations préliminaires sur quelques orbites tests afin de calibrer les outils, et de s'assurer via quelques tests de la pertinence du w_0 choisi, *i.e* que l'analyse ne dépend pas sensiblement de ce choix. Une fois ces paramètres fixés, seules les conditions initiales deviennent des paramètres de l'étude.

Illustrons maintenant à la lumière de l'indicateur FLI présenté précédemment une route d'accès au chaos classique en présence de résonances.

A.3 Une route d'accès au chaos : la superposition selon CHIRIKOV

En mécanique céleste ou spatiale, la route d'accès au chaos se fait très souvent via le *principe des superpositions de résonance*, ou *principe de Chirikov* découvert par B. CHIRIKOV ²⁴ [Chi79], qui va être discuté à la lumière des indicateurs numériques introduits ci-avant. De plus, le modèle générique employé ici, celui de deux pendules se rapprochant dans l'espace des phases, à l'origine du chaos, est un paradigme pour les problèmes résonants et le chaos.

Considérons un hamiltonien à 2-DOF et autonome écrit dans un jeu de variables actions-angles $(I, \Phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$. Le hamiltonien considéré est :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}I_1^2 + I_2 + \varepsilon_1 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \cos (\Phi_1 + \Phi_2), \quad (72)$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ sont deux (petits) paramètres. Cet hamiltonien n'est rien d'autre que la traduction autonome d'un hamiltonien à 1.5-DOF : la variable I_2 est précisément l'action conjuguée au temps. Les actions résonantes correspondant à l'annulation des dérivées temporelles des arguments $\dot{\Phi}_1 = 0$ et $\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_2 = 0$ sont localisées respectivement pour les valeurs des actions

$$I_1 = 0$$

et

$$I_1 = 1.$$

Les actions résonantes sont donc séparées par une distance valant 1 dans le plan (I_1, Φ_1) . Quand le problème résonant est considéré comme isolé, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, 0)$ ou $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, \varepsilon_2)$, le problème dégénère en un problème à 1-DOF intégrable : c'est le hamiltonien du pendule. Dans ce cas, chaque pendule a une ouverture (domaine de libration) proportionnelle à $\sqrt{\varepsilon_i}$. Sans nuire à la généralité de la présentation, on peut prendre $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$. Ce choix à l'avantage que chaque résonance a le même poids (la même largeur), ce qui facilite la lecture des cartes de

24. Boris CHIRIKOV, physicien russe, 1928 – 2008. Il est le premier à cerner le mécanisme de transition vers le chaos par le phénomène de superposition de résonance. Ses travaux ont eu une portée capitale dans le domaine de la thermodynamique, de la mécanique statistique, de la physique des plasmas, de la dynamique non linéaire en général et la théorie du chaos. On lui doit aussi le fameux mapping standard (*Chirikov's Standard Map*).

stabilité que nous allons présenter.

Quand ε croît, chaque domaine de résonance en fait de même, si bien que le problème ne peut plus être considéré comme isolé : les pendules interfèrent. Les séparatrices interférant sont à l'origine des *intersections homoclines*, lieu de divergence exponentielle d'orbites initialement proches. La figure 15 présente le résultat de l'analyse de stabilité du modèle (72) faite via le FLI (normalisé à 1)²⁵. Nous y présentons la valeur finale de l'indicateur, en fonction d'un code couleur (les couleurs froides traduisent la stabilité, les couleurs chaudes le chaos) fonction de conditions initiales équidistribuées dans le plan (I_1, Φ_1) . Ces cartes ont été réalisées pour différentes valeurs du paramètre de perturbation ε , couvrant le cas des dynamiques pendulaires mutuellement non-perturbées, puis leurs interactions (apparition de structures plus fines entre les deux pendules) où les séparatrices s'épaississent et sont le lieu de naissance du chaos, avant de transiter vers une large mer chaotique dans l'espace des phases quand les pendules se recouvrent [Chi79].

Le critère empirique de superposition de résonances, décrit par CHIRIKOV [Chi79], stipule que la dernière courbe invariante entre deux résonances est évincée lorsque la distance (dans l'espace des actions) séparant deux résonances est égale à la somme des demi-amplitudes des résonances. Pour appliquer ce critère, il faut donc être en mesure de pouvoir

1. estimer la distance entre les structures résonantes et
2. la largeur de la résonance en fonction du paramètre de perturbation ε .

Notons en particulier que dans cette estimation, la situation est idéalisée : on ne prend pas en compte la déformation des séparatrices au fur et à mesure que ε croît : la largeur du régime libratoire des pendules est estimée de façon isolée. C'est une des raisons pour laquelle ce critère en général surestime le paramètre de transition ordre-chaos (quand appliqué à l'*application standard*, par exemple). Une raison supplémentaire de ce fait réside dans la non prise en compte des *résonances secondaires*, des termes qui, bien qu'absent du Hamiltonien originel, peuvent apparaître dans les algorithmes d'élimination successive des angles. Ainsi et de ce point de vue, le *critère de superposition de résonances* est davantage un outil qualitatif que quantitatif. Nous référons à [Mor02, DFK05, BF95] pour plus de détails sur ce dernier point.

25. Les équations variationnelles ont été propagées avec un schéma d'intégration type Runge-Kutta d'ordre 4. Pour le pas de temps considéré et la durée de la propagation choisie, l'énergie (le hamiltonien, une intégrale première) s'est conservée à 10^{-10} près en relatif.

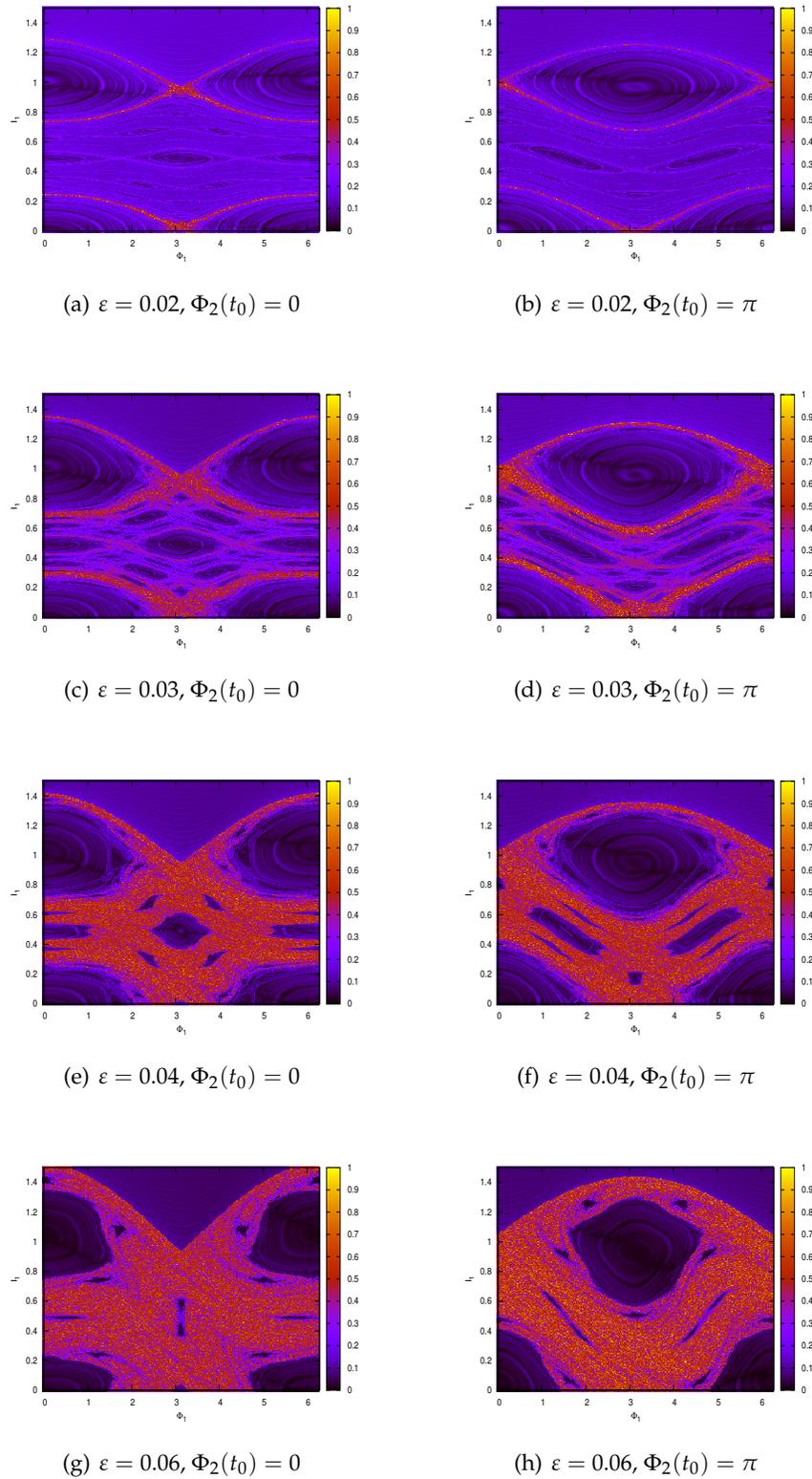


FIGURE 15 – Carte de stabilité du Hamiltonien $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}I_1^2 + I_2 + \varepsilon(\cos \Phi_1 + \cos(\Phi_1 + \Phi_2))$ pour différentes valeurs de la perturbation ε et de la phase $\Phi_2(t_0)$ illustrant le *critère de superposition des résonances* de CHIRIKOV.

B Le propagateur numérique JACK

JACK²⁶ est une librairie de Thales destinée aux applications spatiales. C'est un élément de la suite COSMEUS. Au sein de Thales Services, JACK est utilisé comme outil de propagation d'orbites, de management des débris spatiaux et de restitution d'altitude. Nous présentons ici l'aspect propagation d'orbites.

Outil configurable sur de nombreux points, JACK est capable de propager numériquement les équations du mouvement, écrites sous leurs formulations cartésiennes dans un système de coordonnées inertielles. En notant x le vecteur position du satellite, le système propagé par JACK correspond formellement à une perturbation du système différentiel d'ordre deux du type

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{\|x\|^3}x + q + \nabla\mathcal{R} \quad (73)$$

où q représente l'accélération due aux forces perturbatrices non-conservatives, et \mathcal{R} une fonction perturbatrice.

Le modèle de force que peut propager JACK est configurable, et inclut les perturbations principales affectant un corps spatial orbitant le voisinage de la Terre :

- le potentiel gravitationnel de la Terre,
- le freinage atmosphérique de la Terre,
- le potentiel gravitationnel de la Lune,
- le potentiel gravitationnel du Soleil,
- la pression de radiation solaire.

Le modèle de champ de gravité terrestre provient du modèle GRIM4S4 et le modèle atmosphérique est du type NRLMSISE-00.

La propagation des équations du mouvement, sous forme *position-vitesse*, peut se faire via divers schémas d'intégration numérique à pas fixe (RUNGE-KUTTA d'ordre 4, 6) ou à pas variables (DORTMUND-PRINCE d'ordre 8).

Le champ terrestre est développé classiquement avec les polynômes de LEGENDRE de degré n . Le potentiel U s'écrit alors

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r_E}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \alpha_{lm} (P_l^m(\sin \phi) \cos(m\lambda)) + \bar{S}_{lm} \alpha_{lm} (P_l^m(\sin \phi) \sin(m\lambda))). \quad (74)$$

Les coefficients $\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}$ dénotent ici les coefficients normalisés de STOCKES et les fonctions P_l^m , définies à partir des polynômes de LEGENDRE P_l comme

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (75)$$

$$(76)$$

26. Java Aerospace Capitalized Kit.

L'attraction gravitationnelle de troisième corps due à la Lune et au Soleil est calculée comme la somme de l'attraction gravitationnelle de chaque corps individuellement. L'accélération en résultant s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{3c} &= \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_S \\ &= \mu_L \left(\frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} \right) + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right). \end{aligned}$$

C Le propagateur semi-analytique STELA

Le propagateur d'orbite STELA²⁷ extrapole un *système différentiel moyen*, en l'occurrence un système différentiel du premier ordre, exprimé comme

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (77)$$

par le biais d'un schéma d'intégration classique de type RUNGE-KUTTA d'ordre 6. Le processus de moyennisation analytique appliqué au système osculateur, visant à ne retenir que la contribution à longue période du mouvement, permet la considération de pas de temps nettement plus grand, adapté pour les besoins du long terme. En pratique, ils sont de l'ordre du jour.

Le système différentiel (77) moyen propagé est défini en suivant les techniques classiques développées dans la théorie moyenne du satellite artificiel [Mét91, ME95, DNE94]. Les méthodes de moyennisation pouvant s'appliquer à une grande variété d'ensemble d'éléments orbitaux, ce sont les éléments équinoctiaux, noté ici $x \in \mathbb{R}^6$, qui ont été retenus dans la formulation du modèle dynamique de STELA, non-singuliers en excentricité et en inclinaison. Ces éléments s'expriment par le biais d'un *vecteur excentricité* et un *vecteur inclinaison* qui sont des fonctions simples des éléments képlériens $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$:

$$\begin{aligned} a, \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega), \\ e_x &= e \cos(\omega + \Omega), \\ i_y &= \sin(i/2) \sin(\Omega), \\ i_x &= \sin(i/2) \cos(\Omega), \\ \zeta &= M + \omega + \Omega. \end{aligned} \quad (78)$$

Pour *moyenner* les équations, il faut être capable d'explicitier les dérivées temporelles des éléments en fonction des éléments eux-mêmes. Quand il en est ainsi, les équations obtenues ont la structure

$$\dot{x}_i = n\delta_{i6} + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{r}} q - \sum_{j=1}^6 \{x_i, x_j\} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j}, \quad (79)$$

les *équations de variation des paramètres*, faisant apparaître les contributions conservatives et non-conservatives séparément. En introduisant le petit paramètre perturbatif ϵ , (79) est réécrite comme

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= n\delta_{i6} + \epsilon \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{r}} q - \sum_{j=1}^6 \{x_i, x_j\} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j} \right), \\ &= n\delta_{i6} + \epsilon X_i(x, t). \end{aligned} \quad (80)$$

Notons à ce stade l'analogie entre le système (80) et la forme du *système standard perturbé* (1.54). Ainsi, en suivant les idées des méthodes asymptotiques, c'est l'hypothèse de séparation qui est formulée, *i.e* que le système moyen (en les variables \bar{x}) satisfait aux équations de variation des paramètres ayant la forme :

$$\dot{\bar{x}} = n\delta_{i6} + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j A_i^j(\bar{x}, t).$$

27. Semi-Analytical Tool for End of Life Analysis.

Expliciter les fonctions $\{A_i^j\}_{i,j}$ est l'enjeu des méthodes moyennes.

Le modèle dynamique considéré dans STELA comprend un modèle physique configurable composé :

- des termes zonaux du géopotential : J_2, \dots, J_7, J_2^2 ,
- des termes tesséraux,
- des effets des troisièmes corps, Lune et Soleil,
- du frottement atmosphérique,
- et de la pression de radiation solaire.

Le potentiel (moyen) terrestre est obtenu par moyennisation (selon l'anomalie moyenne M du satellite) de l'expression osculatrice du potentiel terrestre. Il ne comprend pas de développement en excentricité, sauf pour les termes résonants du géopotential. L'implémentation effective des coefficients tesséraux dans STELA est présentée dans [MCD⁺13].

Le potentiel luni-solaire, exprimé en fonction des éléments orbitaux, est moyenné lui aussi selon l'anomalie moyenne M du satellite. Durant cette phase de moyennisation, les coordonnées de ces corps sont supposées être constantes pendant la période de révolution du satellite. Les éphémérides des troisièmes corps sont analytiques [SBC⁺94].

Les effets des forces non-conservatives sur les éléments moyens sont calculés par des méthodes de quadrature (quadrature de SIMPSON).

D Partitions adaptatives de l'espace des phases

Dans ce travail, les cartes de stabilité que nous avons produites ont été établies en faisant appel à une certaine fonction de stabilité (la fonction FLI en général), calculée pour chaque sommet de chaque cellules rectangulaire dont l'union couvre la région de l'espace des phases que nous voulions sonder. Cette grille de cellules est un maillage régulier, fixé une fois pour toute pendant toute la durée de la propagation, en particulier, c'est un maillage qui est non-adaptatif.

Nous voudrions rapporter ici l'existence de méthodes alternatives à cette approche. Il s'agit de méthodes adaptatives de partition de l'espace des phases qui ont été utilisées, dans un contexte de mécanique spatiale, à la détection de région stables [NV15]. Les développements se basent sur des techniques et méthodes de *clustering* qui peuvent, dynamiquement, extraire des caractéristiques dans les cartes de stabilité, et adapter la partition de l'espace des phases selon les informations (de stabilité) apprises pendant ce processus.

Les avantages de ces techniques, quand comparées aux méthodes classiques de partition de l'espace des phases (partition uniforme), sont essentiellement :

- la possibilité d'obtenir une résolution de carte similaire en utilisant un nombre bien inférieur d'appels à la fonction coût (la fonction FLI dans notre cas). Sur les toys-models utilisés par l'auteur, seulement 4 % du nombre de points de la grille uniforme sont nécessaires,
- la détection des régions stables peut être initialisée sans la connaissance, *a priori*, de la localisation de la région stable,
- la résolution de la carte peut-être raffinée sans avoir à régénérer la carte entière.

E Contributions scientifiques

Les résultats clefs et collaborations durant cette thèse ont été valorisés ou sont sur le point de l'être (journal avec comité de lecture, chapitre de livre, proceedings). Nous les indiquons.

Publication dans des journaux à comité de lecture (*publié*).

- Daquin J. et al., *The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *in press*.
- Daquin J. et al., *Comparison of mean and osculating stability near the (2 : 1) tesseral resonant surface*, *Acta Astronautica*, **111**, p. 170 – 177 (2015).
- Alessi E.M. et al., *Effectiveness of GNSS disposal strategies*, *Acta Astronautica*, **99**, p. 292 – 302 (2014).

Chapitre de livre.

- Daquin J. et al., *Diffusive chaos in navigation satellites orbits*, *Chaos, Complexity and Transport*, World Scientific (2016, à paraître).

Proceedings.

- Rosengren A.J. et al., *Galileo disposal orbit strategies: resonances, chaos, and transport*, ISSFD 2015.
- Deleflie F. et al., *Long term evolution of the eccentricity in the MEO region: semi-analytical and analytical approach*, AAS/AIAA 2015.
- Daquin J. et al., *Resonant perturbations with the Earth's gravity field*, AAS/AIAA 2014.
- Deleflie F. et al., *Exploration of the structures of the web of commensurabilities within the MEO and GTO regions*, AAS/AIAA 2013.
- Morand V. et al., *Semi analytical implementation of tesseral harmonics perturbations for high eccentricity orbits*, AAS/AIAA 2013.

Publication dans des journaux à comité de lecture (*en préparation ou soumis*).

- Daquin J. et al., *The dynamical structure of the MEO region: statistical properties*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*.
- Rosengren A.J. et al., *Galileo disposal strategy: stability, chaos and predictability*, soumis à *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Alessi E.M. et al., *A Numerical Investigation on the Eccentricity Growth of GNSS Disposal Strategies*, soumis à *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*.

Index

- Chaos,
 - indicateurs de, 167
 - phénoménologie du, 165
 - stable, 133
- Chirikov,
 - instabilité de, 170
- Coefficient de stochasticité, 56
- Crochet de Poisson, 35
- Diffusion,
 - anormale, 133
 - balistique, 133
 - chaotique, 133
 - normale, 133
 - sous-diffusion, 133
 - super-diffusion, 133
- Degré de liberté, 35
- Élément,
 - moyen, 43
 - osculateur, 43
- Équations variationnelles, 167
- Hamiltonien, 35
- Intégrale première, 35
- Intégration symplectique, 43
- Lyapunov,
 - indicateur de, 169
 - indicateur rapide de, 167
 - stabilité au sens de, 8
- Mouvement,
 - képlérien, 39
 - périodique, 37
 - quasi-périodique, 37
- Orbite,
 - à l’inclinaison critique, 40
- Ordre de la résonance, 50
- Oscillateur, 9
- Pendule,
 - modulé, 55
- Poincaré,
 - section de, 167
- Régime de,
 - circulation, 165
 - libration, 165
- Résolvante, 13
- Résonance,
 - d’un système linéaire à coefficients constants, 12
 - de troisième corps, 72
 - largeur de la, 25
 - mécanique, 10
 - paramétrique, 18
 - séculaire de la région moyenne, 71
 - superposition de, 170
 - tessérale, 29, 47
- Théorie semi-analytique, 42
- Variables,
 - équinoxiales, 175
 - actions-angles, 37
 - conjuguées, 35
 - képlériennes, 175
- Variété,
 - instable, 165
 - stable, 165

Notations

Comme les mécaniciens, nous notons \dot{x} et \ddot{x} la dérivée première et seconde de la fonction x qui dépend du temps t . Les opérateurs sont notés en lettre majuscule $A, F, X \dots$. Les lettres minuscules a, f, x désignent des quantités vectorielles. La composante numéro j du vecteur x sera désignée par x_j . Parfois pour simplifier la compréhension, mais pas toujours, nous noterons en gras les vecteurs. Ainsi, \mathbf{n} est une quantité vectorielle : $\mathbf{n} \equiv (n_1, \dots, n_n)$. Le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n de deux vecteurs u, v se note $\langle u, v \rangle$ et vaut $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$. La norme en découlant est notée classiquement $\|\bullet\|$. Le cardinal d'un ensemble \mathcal{D} sera désigné par $|\mathcal{D}|$. Nous notons i l'imaginaire pur de \mathbb{C} tel que $i^2 = -1$. Le vecteur transposé de x sera noté x^\top . Le symbole \equiv est utilisé pour désigner « est par définition égal à » ou encore « est identiquement égal à ».

Table des figures

1.1	Illustration de la notion de résolvente.	14
1.2	Partition et action de la résolvente sur l'intervalle $[0, t]$	15
1.3	Diagramme de stabilité de l'équation $\ddot{x} + \epsilon(1 + \cos \gamma t)x = 0$ dans le plan $(\epsilon, \frac{\omega}{\gamma})$ avec $\gamma = 1$ obtenu à l'aide du principe de moyennisation appliqué à l'ordre 1.	28
1.4	Table de résonance du système solaire proposée par MOLCHANOV [Mol68].	29
1.5	Table de résonance de systèmes de satellites naturels proposée par MOLCHANOV [Mol68].	30
1.6	Condition de résonance selon le type de système considéré.	32
2.1	Géométrie de l'espace des phases d'un système intégrable.	37
2.2	Ordres de grandeur des différentes perturbations principales agissant sur un objet spatial au voisinage de la Terre. Tiré de [Lio13].	42
2.3	Problème fondamental de la moyennisation.	45
3.1	Variation temporelle typique du demi-grand axe au voisinage de la résonance tessérale $(2, 1)$	57
3.2	Manifestation physique typique de l'intermittence pour une orbite en région stochastique de la résonance tessérale $(2, 1)$	57
3.3	Arrangement des résonances ϵ -proches selon la valeur du coefficient de stochasticité \mathcal{K} (extrait de [MG96]).	58
3.4	Localisation des demi-grands axes résonants principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$ pour différentes valeurs du paramètre i exprimé ici en radian. Ces demi-grands axes correspondent aux valeurs des actions (traduites en termes de demi-grand axe, une variable physiquement plus interprétable) annulant la dérivée temporelle de l'angle $\sigma_{\mathbf{n}} \equiv m(\lambda - \lambda_{lm}) - q\omega$. Le demi-grand axe initial a_0 a été fixé à 25 560 km.	58
3.5	Superposition des résonances pour les multiplets principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$	59
3.6	Amplitude $\Delta_{\mathbf{n}}$ associée aux différents multiplets principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$	59
3.7	Séparation $ \dot{\sigma}_{\mathbf{n}_i} - \dot{\sigma}_{\mathbf{n}_j} $ des résonances associées aux différents multiplets principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$	60
3.8	Coefficient de stochasticité \mathcal{K} pour les multiplets principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$, $i = 40^\circ$	60
3.9	Coefficient de stochasticité \mathcal{K} pour les multiplets principaux de la résonance tessérale $(2, 1)$, $i = 55^\circ$	60

4.1	Hausse de l'excentricité caractéristique de la région MEO.	73
4.2	Évolutions temporelles des indicateurs FLI attestant du chaos en région moyenne.	75
4.3	Localisation dans le plan $i - e$ des résonances séculaires luni-solaires quand le paramètre $a = a_*$ croît dans $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$. Ces courbes correspondent aux valeurs des couples $i - e$ pour lesquelles $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0$, avec $\theta = (\omega, \Omega, \Omega_M)$ et $ k_i \leq 2$. Ces courbes forment le squelette résonant en région moyenne.	78
4.4	Localisation dans le plan $G - H$ des résonances séculaires luni-solaires quand le paramètre $a = a_*$ croît dans $\mathcal{I} = [3r_E, 5r_E]$. Ces courbes correspondent aux valeurs des couples $G - H$ pour lesquelles $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k}, \dot{\theta} \rangle = 0$, avec $\theta = (\omega, \Omega, \Omega_M)$ et $ k_i \leq 2$. Ces courbes forment le squelette résonant en région moyenne.	79
4.5	Illustration du transport macroscopique dans la mer chaotique et du confinement dans l'espace des phases, $a_0 = 25\,500$ km.	132
4.6	Illustration schématique du processus de transport le long d'une chaîne de résonances. Tiré de [BF95].	136
4.7	Centres et amplitudes de résonances lunisolaires pour différentes valeurs du paramètre perturbatif.	138
4.8	Diffusion en terme de l'action $G = \sqrt{1 - e^2}$	150
4.9	Exemple de diffusion balistique en région MEO. (a) Confinement en temps long de l'excentricité. (b) Diffusion balistique de l'orbite.	151
4.10	Stabilité FLI du voisinage d'une orbite balistique dont les conditions initiales sont $e_0 = 0.0635$ et $i_0 = 56.255^\circ$	151
4.11	Évolution de l'excentricité en fonction du temps pour une orbite chaotique et une orbite stable.	154
4.12	Évolution de la fonction d'auto-corrélation pour une orbite chaotique et une orbite stable.	155
4.13	Lien entre la hausse de l'excentricité, l'hyperbolicité local (chaos), le transport diffusif et la perte de corrélation pour des orbites typiques Galileo.	156
4.14	Analyse de stabilité au voisinage de 56° ($e = 0.015$) en fonction du petit paramètre $\epsilon = \epsilon(a)$	163
15	Carte de stabilité du Hamiltonien $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}I_1^2 + I_2 + \epsilon \left(\cos \Phi_1 + \cos (\Phi_1 + \Phi_2) \right)$ pour différentes valeurs de la perturbation ϵ et de la phase $\Phi_2(t_0)$ illustrant le critère de superposition des résonances de CHIRIKOV.	172

Liste des tableaux

3.1	Localisation des premières résonances tessérales (n_1, n_2) et cardinal des indices résonants associés ($ n \leq 5$ et pour $ q \leq 2$).	51
3.2	Premiers indices résonants associés à la résonance tessérale $(2, 1)$	55
4.1	Localisation des premières inclinaisons résonantes et indices résonants associés.	73
4.2	Mesure de l'interaction de quelques résonances lunisolaires <i>via</i> $\tilde{\mathcal{K}}$	138

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	vii
Introduction	1
1 La notion de résonance	7
1.1 Stabilité	8
1.2 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients constants	9
1.2.1 La résonance mécanique	9
1.2.2 La résonance d'un système linéaire à coefficients constants	10
1.3 Résonance dans les systèmes linéaires à coefficients périodiques	13
1.3.1 Équations différentielles linéaires à coefficients non-constants	13
1.3.2 Éléments de la théorie de FLOQUET	14
1.3.3 La résonance paramétrique et application à l'équation de HILL-MATHIEU	18
1.4 La résonance dans les systèmes voisins de systèmes intégrables	19
1.4.1 Principe de moyennisation	21
1.4.2 La résonance comme l'échec à la moyennisation	23
1.4.3 Dynamique au voisinage d'une résonance	24
1.4.4 Application des méthodes asymptotiques à l'équation de HILL-MATHIEU	25
1.5 Quelques résonances en mécanique céleste et spatiale	28
1.5.1 Dynamique résonante dans la ceinture d'astéroïdes	28
1.5.2 Dynamique résonante dans le système solaire	28
1.5.3 Dynamique résonante en mécanique spatiale	29
1.6 Conclusion	31
2 Particularités des études en temps long et problème fondamental de la moyennisation	33
2.1 Introduction au problème	34
2.1.1 Définitions élémentaires	34
2.1.2 Intégrabilité à la LIOUVILLE	35
2.1.3 Les systèmes perturbés et la perte d'intégrabilité	37
2.2 Perturbations principales au voisinage de la Terre	39
2.2.1 Le potentiel interne	39
2.2.2 Le potentiel externe des troisièmes corps	41
2.2.3 Autres perturbations	41
2.3 Théorie semi-analytique	41
2.4 Formulation du problème fondamental de la moyennisation	43

2.5	Résumé et enjeux	45
3	La résonance tessérale	47
3.1	Position du problème	47
3.2	Hamiltonien de la résonance tessérale (n_1, n_2)	48
3.2.1	Développement de la perturbation terrestre	49
3.2.2	Construction et réduction de la forme normale résonante tessérale	51
3.3	Application à la résonance tessérale $(2, 1)$	54
3.3.1	Dynamique au voisinage de la surface résonante	54
3.3.2	Test de l'hypothèse de la moyennisation au voisinage de la surface résonante $(2, 1)$	61
3.4	Conclusion	70
4	Résonances séculaires des orbites moyennes	71
4.1	Position du problème	72
4.1.1	Tableau de la littérature des résonances luni-solaires	72
4.1.2	Vers une description de l'espace des phases $i - e$ en région MEO	77
4.2	Structure dynamique de la région MEO	80
4.2.1	Stabilité en temps long, chaos et transport	80
4.2.2	Temps de collision et chaos : application à Galileo	114
4.3	Chaos et transport	132
4.3.1	Transport diffusif	132
4.3.2	Transport à travers les résonances	134
4.3.3	Diffusion normale : application à Galileo	137
4.3.4	Diffusion anormale (possible) des satellites de navigation	149
4.4	Chaos et stochasticité	150
4.5	Conclusion	157
	Conclusions, limitations et perspectives	159
	Annexes	165
A	Le chaos	165
A.1	Phénoménologie du chaos	165
A.2	Quelques outils numériques de détection du chaos	167
A.3	Une route d'accès au chaos : la superposition selon CHIRIKOV	170
B	Le propagateur numérique JACK	173
C	Le propagateur semi-analytique STELA	175
D	Partitions adaptatives de l'espace des phases	177
E	Contributions scientifiques	178
	Index	180
	Notation	183
	Table des figures	184
	Liste des tableaux	185

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	189
Table des matières	189
Bibliographie	191

Bibliographie

- [AKN07] V.I. Arnold, V.V. Kozlov, and A.I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [All65] R. Allan. On the motion of nearly synchronous satellites. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 288(1412) :60–68, 1965.
- [All67] R.R. Allan. Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary. *Planetary and Space Science*, 15(1) :53–76, 1967.
- [Arn74] V.I. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Editions Mir, 1974.
- [Arn80] V.I. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. 1980.
- [Arn88] V.I. Arnold. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences : Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, 1988.
- [Bac69] G.E. Backus. Critique of “the resonant structure of the solar system” by am molchanov. *Icarus*, 11(1) :88–92, 1969.
- [Bar05] R. Barrio. Sensitivity tools vs. poincaré sections. *Chaos, Solitons & Fractals*, 25(3) :711–726, 2005.
- [BBB09] R. Barrio, W. Borczyk, and S. Breiter. Spurious structures in chaos indicators maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4) :1697–1714, 2009.
- [BF95] D. Benest and C. Froeschlé. *Chaos and diffusion in hamiltonian systems*, volume 1. 1995.
- [BMH15] K. Batygin, A. Morbidelli, and M.J. Holman. Chaotic disintegration of the inner solar system. *The Astrophysical Journal*, 799(2) :120, 2015.
- [Bre99] S. Breiter. Lunisolar apsidal resonances at low satellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 74(4) :253–274, 1999.
- [Bre00] S. Breiter. The prograde c7 resonance for earth and mars satellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 77(3) :201–214, 2000.
- [Bre01a] S. Breiter. Lunisolar resonances revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81(1-2) :81–91, 2001.
- [Bre01b] S. Breiter. Lunisolar resonances revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81(1-2) :81–91, 2001.
- [Bre03] S. Breiter. Fundamental models of resonance. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, (22) :83–92, 2003.

- [BWM05] S. Breiter, I. Wytrzyszczak, and B. Melendo. Long-term predictability of orbits around the geosynchronous altitude. *Advances in Space Research*, 35(7) :1313–1317, 2005.
- [Bél86] V. Béletski. *Essais sur le mouvement des corps cosmiques*. Éditions Mir, 1986.
- [CDD94] S.L. Coffey, A. Deprit, and E. Deprit. Frozen orbits for satellites close to an earth-like planet. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 59(1) :37–72, 1994.
- [CFMH13] A. Celletti, S. Ferraz-Mello, and J. Henrard. *Modern Celestial Mechanics : From Theory to Applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [CG15a] A. Celletti and C. Gales. Dynamical investigation of minor resonances for space debris. *Celestial mechanics and dynamical astronomy*, 123(2) :203–222, 2015.
- [CG15b] A. Celletti and C. Gales. A study of the main resonances outside the geostationary ring. *Advances in Space Research*, 2015.
- [CGS03] P.M. Cincotta, C.M. Giordano, and C. Simó. Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 182(3) :151–178, 2003.
- [Chi79] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, pages 263–379, 1979.
- [Coo62] G.E. Cook. Luni-solar perturbations of the orbit of an earth satellite. *Geophysical Journal International*, 6(3) :271–291, 1962.
- [DAR⁺] F. Deleflie, E.M Alessi, A. Rosengren, J. Daquin, G. Valsecchi, A. Rossi, and A. Vienne. Choice of initial conditions for gnss disposal orbits. *Technical Note*, page ESA/ESOC Contract No. 4000107201/12/F/MOS.
- [DD77] S.S. Dallas and R.E. Diehl. The motion of a satellite in resonance with the second-degree sectorial harmonic. *Celestial mechanics*, 16(1) :97–121, 1977.
- [DDP15] J. Daquin, F. Deleflie, and J. Pérez. Comparison of mean and osculating stability in the vicinity of the (2 : 1) tesseral resonant surface. *Acta Astronautica*, 111 :170–177, 2015.
- [DFK05] R. Dvorak, F. Freistetter, and J. Kurths. *Chaos and stability in planetary systems*, volume 683. Springer Science & Business Media, 2005.
- [DM93] F. Delhaise and A. Morbidelli. Luni-solar effects of geosynchronous orbits at the critical inclination. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57(1-2) :155–173, 1993.
- [DNE94] D.A.A Danielson, B. Neta, and L.W. Early. Semianalytic satellite theory (sst) : mathematical algorithms. 1994.
- [DRA⁺] J. Daquin, J.A. Rosengren, E.M Alessi, F. Deleflie, G.B. Valsecchi, and A. Rossi. The dynamical structure of the meo region : long-term stability, chaos, and transport. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*.
- [DRP⁺11] F. Deleflie, A. Rossi, C. Portmann, Métris G., and F. Barlier. Semi-analytical investigations of the long term evolution of the eccentricity of galileo and gps-like orbits. *Advances in Space Research*, 47(5) :811–821, 2011.
- [DRT] J. Daquin, J.A. Rosengren, and K. Tsiganis. Diffusive chaos in navigation satellites orbits. *Chaos, Complexity and Transport*.

- [EH97] T.A. Ely and K.C. Howell. Dynamics of artificial satellite orbits with tesseral resonances including the effects of luni-solar perturbations. *Dynamics and Stability of Systems*, 12(4) :243–269, 1997.
- [Ely96] T. A. Ely. Dynamics and control of artificial satellite orbits with multiple tesseral resonances. 1996.
- [Ely02] T.A. Ely. Eccentricity impact on east-west station keeping for global positioning system class orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(2) :352–357, 2002.
- [Fej13] J. Fejoz. On "arnold's theorem" on the stability of the solar system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, 33(8) :12–pp, 2013.
- [FFF02] E. Fouchar, M. and Lega, C. Froeschlé, and C. Froeschlé. On the relationship between fast lyapunov indicator and periodic orbits for continuous flows. In *Modern Celestial Mechanics : From Theory to Applications*, pages 205–222. Springer, 2002.
- [FLG06] C. Froeschlé, E. Lega, and M. Guzzo. Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the arnold web. *Celestial mechanics and dynamical astronomy*, 95(1-4) :141–153, 2006.
- [Fro97] C. Froeschlé. Fast lyapunov indicators. application to asteroidal motion. *Celestial Mechanics*, pages 12–51, 1997.
- [Gar66] B. Garfinkel. Formal solution in the problem of small divisors. *The Astronomical Journal*, 71 :657, 1966.
- [Ged69] G.S. Gedeon. Tesseral resonance effects on satellite orbits. *Celestial Mechanics*, 1(2) :167–189, 1969.
- [Gia72] G.E.O. Giacaglia. *Perturbation methods in non-linear systems*. Springer, 1972.
- [Gia74] G.E.O Giacaglia. Lunar perturbations of artificial satellites of the earth. *Celestial mechanics*, 9(2) :239–267, 1974.
- [Gin69] O. Gingerich. Kepler and the resonant structure of the solar system. *Icarus*, 11(1) :111–113, 1969.
- [Guz15] M. Guzzo. The nekhoroshev theorem and long-term stabilities in the solar system. *Serbian Astronomical Journal*, (190) :1–10, 2015.
- [Hal13] P.R. Halmos. *I want to be a mathematician : An automathography*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [HD91] L. Healy and E. Deprit. Paint by number : Uncovering phase flows of an integrable dynamical system. *Computers in Physics*, 5(5) :491–496, 1991.
- [HLDC12] C. Hubaux, A. Lemaître, N. Delsate, and T. Carletti. Symplectic integration of space debris motion considering several earth's shadowing models. *Advances in Space Research*, 49(10) :1472–1486, 2012.
- [Hub13] C. Hubaux. Long term dynamics of space debris orbits including earth's shadows. *Dissertation doctorale en Sciences mathématiques*, 2013.
- [Hug80] S. Hughes. Earth satellite orbits with resonant lunisolar perturbations. i. resonances dependent only on inclination. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 372(1749) :243–264, 1980.

- [Hug81] S. Hughes. Earth satellite orbits with resonant lunisolar perturbations ii. some resonances dependent on the semi-major axis, eccentricity and inclination. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 375(1762) :379–396, 1981.
- [Iro81] I. Irodov. Principes fondamentaux de la mécanique. 1981.
- [Kar83] C.F.F. Karney. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 8(3) :360–380, 1983.
- [Kau66] W.M. Kaula. Theory of satellite geodesy : Applications of satellites to geodesy. Co., Waltham, Mass, 1966.
- [KCP78] D.J. Kessler and B.G. Cour-Palais. Collision frequency of artificial satellites : The creation of a debris belt. *Journal of Geophysical Research : Space Physics (1978–2012)*, 83(A6) :2637–2646, 1978.
- [KJLM10] D.J. Kessler, N.L. Johnson, J.C. Liou, and M. Matney. The kessler syndrome : implications to future space operations. *Advances in the Astronautical Sciences*, 137(8) :2010, 2010.
- [KKM81] M. Krasnov, A. Kissélev, and G. Makarenko. *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, 1981.
- [Lan87] M.T. Lane. An analytical treatment of resonance effects on satellite orbits. *Celestial mechanics*, 42(1-4) :3–38, 1987.
- [Lio13] G. Lion. Dynamique des orbites fortement elliptiques. *Thèse de doctorat, Observatoire de la Côte d’Azur*, 2013.
- [LL64] L. Landau and L. Lifschitz. *Physique théorique, Tome 1 : Mécanique*. Mir, Moscou, 1964.
- [LM88] P. Lochak and C. Meunier. *Multiphase averaging for classical systems*. Springer, 1988.
- [Mas] G. Massimiliano. On the numerical detection of the effective stability of chaotic motions in quasi-integrable systems.
- [MCD⁺13] V. Morand, A. Caubet, F. Deleflie, J. Daquin, and H. Fraysse. Semi analytical implementation of tesseral harmonics perturbations for high eccentricity orbits. 2013.
- [MCG11] M.F. Mestre, P.M. Cincotta, and C.M. Giordano. Analytical relation between two chaos indicators : Fli and megno. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, 414(1) :L100–L103, 2011.
- [ME95] G. Métris and P. Exertier. Semi-analytical theory of the mean orbital motion. *Astronomy and Astrophysics*, 294 :278–286, 1995.
- [MG96] A. Morbidelli and M. Guzzo. The nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65(1-2) :107–136, 1996.
- [MH97] N. Murray and M. Holman. Diffusive chaos in the outer asteroid belt. *The Astronomical Journal*, 114 :1246–1259, 1997.
- [MN92] A. Milani and A.M. Nobili. An example of stable chaos in the solar system. *Nature*, 357(6379) :569–571, 1992.
- [Mol68] A.M. Molchanov. The resonant structure of the solar system. *Icarus* 8, 1968.
- [Mol69a] A.M. Molchanov. The reality of resonances in the solar system. *Icarus*, 11(1) :104–110, 1969.

- [Mol69b] A.M. Molchanov. Resonances in complex systems : A reply to critiques. *Icarus*, 11(1) :95–103, 1969.
- [Moo96] M. Moons. Review of the dynamics in the kirkwood gaps. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65(1-2) :175–204, 1996.
- [Mor02] A. Morbidelli. *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*, volume 1. 2002.
- [Mét91] G. Métris. Théorie du mouvement du satellite artificiel –développement des equations du mouvement moyen – application à l’étude des longues périodes. 1991.
- [NV15] N. Nakhjiri and B. Villac. Automated stable region generation, detection, and representation for applications to mission design. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123(1) :63–83, 2015.
- [Poi99a] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Paris : Gauthier-Villars, 1892, 1893, | c1899, 1, 1899.*
- [Poi99b] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 1, 1899.
- [Pon69] L. Pontriaguine. *Équations différentielles ordinaires*. Editions Mir, 1969.
- [RARV15] A.J. Rosengren, E.M. Alessi, A. Rossi, and G. Valsecchi. Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the moon. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(4) :3522–3526, 2015.
- [RCOB15] X.S. Ramos, J.A. Correa-Otto, and C. Beaugé. The resonance overlap and hill stability criteria revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, pages 1–27, 2015.
- [Ros05] A. Rossi. Population models of space debris. *Proceedings of the International Astronomical Union, 2004(IAUC197)* :427–438, 2005.
- [Ros08] A. Rossi. Resonant dynamics of medium earth orbits : space debris issues. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 100(4) :267–286, 2008.
- [SBC⁺94] J.L. Simon, P. Bretagnon, J. Chapront, M. Chapront-Touzé, G. Francou, and J. Laskar. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the moon and the planets. *Astronomy and Astrophysics*, 282 :663–683, 1994.
- [Sic91] Bruno Sicardy. Numerical exploration of planetary arc dynamics. *Icarus*, 89(2) :197–219, 1991.
- [Sko10] C. Skokos. The lyapunov characteristic exponents and their computation. In *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*, pages 63–135. Springer, 2010.
- [SM15] L. Stefanelli and G. Métris. Solar gravitational perturbations on the dynamics of meo : increase of the eccentricity due to resonances. *Advances in Space Research*, 55(7) :1855–1867, 2015.
- [SYBC10] M.D. Sanchez, T. Yokoyama, P.O. Brasil, and R.R Cordeiro. Some initial conditions for disposed satellites of the systems gps and galileo constellations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, 2010.
- [SYP15] M.D. Merguizo Sanchez, Tadashi Yokoyama, and Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado. Study of some strategies for disposal of the gnss satellites. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.

- [SZK93] M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, and J. Klafter. Strange kinetics. *Nature*, 363(6424) :31–37, 1993.
- [TVH02] K. Tsiganis, H. Varvoglis, and J.D. Hadjidemetriou. Stable chaos in high-order jovian resonances. *Icarus*, 155(2) :454–474, 2002.
- [VA96] H. Varvoglis and A. Anastasiadis. Transport in hamiltonian systems and its relationship to the lyapunov time. *The Astronomical Journal*, 111 :1718, 1996.
- [Val08] S. Valk. Global dynamics of geosynchronous space debris with high are-to-mass ratios. *Dissertation doctorale en Sciences mathématiques*, 2008.
- [Var04] H. Varvoglis. Diffusion in the asteroid belt. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2004(IAUC197) :157–170, 2004.
- [VDLC09] S. Valk, N. Delsate, A. Lemaître, and T. Carletti. Global dynamics of high area-to-mass ratios geo space debris by means of the megnno indicator. *Advances in Space Research*, 43(10) :1509–1526, 2009.
- [VHJ02] K. Varvoglis, H. and Tsiganis, Hadjidemetriou, and D. John. Stable chaos in mean motion resonances. In *Modern Celestial Mechanics : From Theory to Applications*, pages 459–462. Springer, 2002.

