

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE
D'ILE-DE-FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

présentée par

Maryame El Moutamid

**Étude analytique et numérique
des Résonances de Moyen Mouvement
Application à la dynamique des petits satellites de Saturne**

Thèse dirigée par Bruno SICARDY et Stéfan RENNER

*Soutenue le 19 septembre 2013
devant la commission composée de :*

François MIGNARD (Observatoire de la côte d'Azur)	Président du Jury
Bruno SICARDY (LESIA - Observatoire de Paris)	Directeur de thèse
Stéfan RENNER (Université de Lille 1/ IMCCE)	Directeur de thèse
Anne LEMAÎTRE (Université de Namur)	Rapporteur
Matthew HEDMAN (Cornell University)	Rapporteur
Carl MURRAY (Queen Mary University)	Examineur
Sylvio FERRAZ-MELLO (Universidade de São Paulo)	Examineur
Jacques LE BOURLLOT (LuTH - Observatoire de Paris)	Examineur

Remerciements

Au cours de ces trois dernières années, j'ai eu la chance de travailler avec Bruno Sicardy, un grand chercheur plein de vie, bonne humeur, motivation, enthousiasme, et intérêts pour la science en général. J'ai pu profiter de son savoir et de son expérience pour améliorer mes connaissances et me spécialiser dans le domaine de mécanique céleste surtout, et aussi en observations, il m'a fait rencontrer plusieurs scientifiques en France et à l'étranger, que ce soit dans le domaine de la dynamique ou en occultations stellaires. J'aimerais simplement le remercier chaleureusement d'avoir cru en moi, et de m'avoir fait confiance, j'espère être comme lui dans quelques années ! Ma thèse a été également dirigée par Stéfan Renner, je souhaiterais le remercier de m'avoir bien encadré, sa disponibilité grâce aux réunions régulières que nous avons eu à Lille et à Paris, il m'a beaucoup appris sur les intégrations exactes liées aux orbites des satellites et sur la dynamique des anneaux, c'est une chance à mes yeux de travailler avec quelqu'un d'aussi compétent scientifiquement et sympathique humainement. Je recommande ce duo de directeurs à tous le monde !

Je suis très reconnaissante à l'attention que m'a réservé Valéry Lainey lors de mon arrivée à l'IMCCE, il m'a invité dès le premier mois de ma thèse à faire partie des membres du groupe Encelade, c'était une occasion en or pour moi de m'informer sur les nouveautés scientifiques, et surtout, de rencontrer et discuter de manière régulière avec des personnalités scientifiques comme Carl Murray, Nick Cooper avec lesquels j'ai énormément interagi. Valéry Lainey m'a, en plus, énormément conseillé pendant toute ma thèse, j'espère que ma collaboration avec lui ne fait que commencer.

J'exprime ma profonde gratitude à Anne Lemaitre, François Mignard, Matthew Hedman, Carl Murray, Sylvio Ferraz-Mello et Jacques Le Bourlot pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du Jury de ma soutenance, j'ai été très heureuse d'avoir à un jury d'aussi grande compétence et diversité qui a su apprécier mon travail avec un esprit critique, et de me conseiller sur les projets scientifiques d'avenir.

Tous mes remerciements iront aussi à Philippe Robutel et Nicolas Rambaux, avec lesquels j'ai beaucoup discuté et collaboré, également à Christophe Le Poncin-Lafitte, mon parrain de thèse qui m'a beaucoup conseillé pendant ma thèse.

Je remercie l'IMCCE, en particulier Jean Eudes Arlot et Daniel Hestroffer de m'avoir accueilli, et aussi pour le soutien matériel pour les missions. Merci aussi à François Colas, pour ces discussions sur les projets d'observations qui donnent envie d'explorer un énorme champ du savoir, à Alain Chenciner et Jacques Laskar pour les bons conseils donnés à plusieurs occasions et puis Alain Vienne, Mirel Birlan, Marc Fauchard...

Je remercie également le LESIA, plus particulièrement, Pierre Drossart et Thierry Fouchet, un grand merci à Françoise Roques, une personne scientifiquement douée et humainement énorme. Également je voudrais remercier Sandrine Vinatier et Cédric Leyrat pour les précieux conseils sur les postdocs.

Je ne peux oublier d'exprimer ma reconnaissance à Marie-Christine Angonin et Christophe Sauty de m'avoir permis d'entrer en Master de l'Observatoire et donc dans le monde de la recherche et de l'Astronomie.

Qu'il me soit permis de remercier tous les doctorants et amis tant à Paris qu'à Meudon grâce auxquels j'ai passé d'inoubliables moments en particulier, Yann Brouet, Damya Souami, Quentin Kral, Etienne Morey, Stefano Bertone, Radwan Tajeddine, Pedro Machado, Shan Yao, Françoise Rémus, Sihanne Meroune, Alexandre Pousse, Jessica Massetti, Andy Richard, Fatoumata Kebe, Felipe Braga-Ribas, Julien Frouard, David Bancelin, Farida Baidolda, Lucie Maquet ...

Tous cela ne serait jamais réalisé sans l'aide et l'appui de ma famille... Un énorme calin plein d'amour à maman Habiba et à mon père Ismael, je ne saurais jamais vous remercier assez pour tous ce que vous avez fait pour moi, et aussi d'avoir respecté mes choix! Je suis très chanceuse d'avoir une aussi belle famille, je pense en particulier à mes sœurs Ilham, Leila, Zineb et Zahra et à mon frère Ahmed, à mes beaux frères Housine et Tarik. Je voudrais remercier également ma tante Zineb, mes oncles Najib, Massoud, AbdelAllah et tous ceux qui se sont déplacés, de m'avoir encouragé et assisté à ma soutenance, *Ça fait chaud au coeur!*

Je suis extrêmement reconnaissante à ma sœur aînée Ilham et mon beau frère Housine qui m'ont beaucoup aidé, financièrement et moralement dès mon arrivée en France. À vous deux je dédicace donc cette thèse.

Enfin un grand bravo à mes neveux Issam, Hiba et Imrane, je suis très fière de vous!

À ma sœur Ilham,

Résumé

Le cœur de mon étude est une meilleure compréhension de la dynamique des petits satellites de Saturne en résonance de moyen mouvement avec Mimas (dont la masse est notée μ'_s), qui sont associés à des anneaux et des arcs de matière. La difficulté avec ces résonances de moyen mouvement est que, même dans le cas le plus simple où le petit satellite (μ_s) est sans masse et où les inclinaisons sont nulles (problème à trois corps restreint plan), il y a plusieurs résonances associées à chaque commensurabilité de moyen mouvement. Plus précisément, cette étude porte sur les résonances de premier ordre $m+1:m$ (avec m entier relatif). Dans ce cas, il y a seulement deux résonances, dites de corotation (CER) et de Lindblad (LER). Ayant deux degrés de liberté, le Hamiltonien qui décrit le mouvement de μ_s et μ'_s est en général non intégrable, et mène à des comportements chaotiques dans certaines régions de l'espace des phases. Les objectifs de cette thèse sont :

- 1) Distinguer clairement les effets des deux types de résonances. Je démontre que les LERs excitent principalement les excentricités orbitales (en gardant le demi-grand axe presque constant), tandis que les CERs agissent principalement sur le demi-grand axe (en gardant l'excentricité presque constante).
- 2) Discuter de l'intégrabilité du système à deux degrés de liberté en présence des deux angles critiques correspondant aux deux résonances, ainsi je mets en évidence la présence de constantes du mouvement que j'ai interprété physiquement.
- 3) Traiter le problème restreint ($\mu_s = 0$) sous les hypothèses décrites précédemment. Le modèle que j'ai construit dépend uniquement de deux paramètres sans dimension : la distance D entre les deux résonances et un paramètre ϵ_L qui dépend à la fois de la masse et l'excentricité orbitale de μ'_s , ce qui nous permet d'étudier le problème de manière générique.

Ainsi, le problème est intégrable si $D = 0$. Je mets en évidence numériquement l'apparition de larges régions chaotiques pour des petites valeurs de D . Pour des grandes valeurs de D , le système tend encore une fois à un système intégrable que j'ai résolu en utilisant les arguments d'invariance adiabatique.

Ce travail est applicable à plusieurs problèmes impliquant les anneaux et les satellites. Une partie de mon travail complète et généralise l'approche de [Goldreich et al. \[1986\]](#) et [Porco \[1991\]](#), qui ont proposé un modèle pour expliquer la stabilité des anneaux incomplets (arcs) de Neptune. Plus récemment, [Cooper et al. \[2008\]](#), [Hedman et al. \[2009\]](#) et [Hedman et al. \[2010\]](#) ont étudié astrométriquement le mouvement des petits satellites saturniens Anthée, Aegaeon et Méthone qui sont capturés en résonance de corotation avec Mimas, tout en étant perturbés par la résonance de Lindblad proche correspondante, et associés à des arcs de matière. En effet, Méthone et Anthée sont intégrés dans des arcs, alors qu'Aegaeon orbite à l'intérieur d'un arc de matière près du bord intérieur de l'anneau G de Saturne. La présence de ces trois arcs associés aux satellites est compatible avec leur confinement par des CERs avec Mimas. Notre modèle permet d'étudier les orbites de ces satellites et leurs voisinages chaotiques.

Je présente également deux scénarios possibles de capture en CER avec Mimas de ces trois petites satellites, découlant de l'évolution séculaire de Mimas causée elle-même par les effets de marée de Saturne et/ou des anneaux.

Des estimations des probabilités de capture dans la CER permettent d'estimer le nombre de corps initialement présents dans l'entourage de Mimas, et d'envisager des modèles de formation de ces petits satellites.

Mots-clés : Mécanique céleste, formalisme Hamiltonien, résonance de corotation et de Lindblad, intégrabilité, capture en résonance, problème à trois corps plan elliptique, satellites de Saturne, anneaux planétaires.

Abstract

The aim of my work is to better understand the dynamics of the small Saturnian satellites that are in mean motion resonance with Mimas (whose mass will be noted μ'_s), and are also associated with rings and arcs of matter.

The difficulty with these mean motion resonances is that, even in the simplest case where the small satellites (μ_s) is massless and the inclinations are equal to zero (the Restricted Planar Three Bodies Problem), there are several resonances associated with each mean motion commensurability. More precisely, I studied first order mean motion resonances $m+1:m$ (m is an integer). In this case, there are only two resonances, called Corotation Eccentric Resonances (CERs) and Lindblad Eccentric Resonances (LERs).

Having two degrees of freedom, the Hamiltonian which describes the motion of μ_s and μ'_s is in general non integrable, and leads to chaotic motions in some regions in the phase space.

The aims of this thesis are :

- 1) to clearly distinguish the two types of resonances (CER and LER). I show here that Lindblad resonances mainly excite the orbital eccentricity of the test particle (leaving the semi-major axis relatively unaffected) while the corotation resonances mainly change the semi-major axis (leaving the eccentricity relatively unaffected).
- 2) to discuss the integrability of the two-degree of freedom system in presence of the two critical angles corresponding to the two resonances. Then, I show the presence of constants of motion that I interpret physically.
- 3) to rescale the restricted problem ($\mu = 0$) and obtain a model that depends only upon two dimensionless parameters : the distance D between the two resonances and a parameter ϵ_L which depends on the mass and orbital eccentricity of μ'_s . This approach allows me to study the problem in a generic way.

For $D = 0$, the problem is integrable. I show numerically that large chaotic regions appear for small values of D . For larger values of D , the system tends towards an integrable system again, that I have solved by using adiabatic invariants arguments.

This work is applicable to many problems linked to ring and satellites. It completes the approach of [Goldreich et al. \[1986\]](#) and [Porco \[1991\]](#), who have proposed models to explain the stability of the incomplete ring arcs of Neptune. More recently, [Cooper et al. \[2008\]](#), [Hedman et al. \[2009\]](#) and [Hedman et al. \[2010\]](#) provided astrometric studies for the motion of the small saturnian satellites Anthe, Methone and Aegaeon. All are captured in CER's with Mimas, while being perturbed by the near corresponding LER's. They are furthermore associated with dusty ring arcs. More precisely, Methone and Anthe are embedded into arcs, while Aegaeon orbits inside an arc of matter that lies near to the inner edge of Saturn's G ring. The presence of these three arcs associated with satellites is compatible with their confinement by CER's with Mimas. My model allows to study the satellites orbit are their chaotic neighborhood.

I finally present two possible scenarios of capture in CER with Mimas for these three small satellites, that are linked to a secular evolution of Mimas's orbit due to tidal effects from Saturn and/or its rings.

Estimations of capture probabilities allow me to estimate the number of bodies initially present in the neighborhood of Mimas, and to propose models of formation for this new population of Saturnian satellites.

Key words : Celestial Mechanics, Hamiltonian formalism, Corotation and Lindblad resonances, integrability, capture in resonance, Elliptical Three Bodies Problem, Saturn satellites, planetary rings.

Table des matières

Introduction	6
I Étude analytique des résonances de moyen mouvement	10
1 Présentation générale des résonances dans le système solaire	12
1.1 Introduction	14
1.2 Définition intuitive d'une résonance	14
1.3 Différents types de résonances	14
1.3.1 Résonances spin-orbite	14
1.3.2 Résonances séculaires	14
1.3.3 Résonances Disque-Satellite	16
1.3.4 Résonances de moyen mouvement	16
1.4 Les objectifs de la thèse	19
2 Construction d'un modèle analytique pour l'étude générique des résonances de moyen mouvement dans le problème à trois corps général	20
2.1 Contexte	22
2.2 Introduction au problème	22
2.3 Structure dynamique du problème pour le cas général et présentation du modèle	23
2.3.1 Structure dynamique	23
2.3.2 Formalisme Hamiltonien	24
2.4 Interprétation physique des actions	25
2.4.1 Énergie et moment cinétique :	25
2.4.2 Actions radiales	26
2.4.3 Constante de Jacobi généralisée	26
2.4.4 Équations du mouvement :	27
2.5 Conclusion	31
3 Construction du modèle analytique CoraLin pour l'étude générique des résonances de moyen mouvement dans le problème à trois corps restreint	32
3.1 Introduction	34
3.2 Formalisme Hamiltonien	35
3.3 Résonances de corotation et de Lindblad	36
3.3.1 Résonance de Lindblad	36
3.3.2 Résonance de Corotation	36
3.4 Le modèle CoraLin	37
3.5 Comportements asymptotiques	40
3.5.1 Résonances superposées	40
3.5.2 Résonances bien séparées	40
3.6 Cas intermédiaires	42

3.7	Exploration numérique du chaos	44
3.7.1	Méthode des sections de Poincaré	44
3.7.2	Indications numériques du chaos	45
3.8	Conclusion de la première partie	47
II	Résonances dans le système de Saturne	50
4	Petits satellites de Saturne	52
4.1	Introduction	54
4.2	Présentation des petits satellites de Saturne : Anthée, Méthone et Aegaeon	54
4.2.1	Anthée : S/2007 S 4	54
4.2.2	Méthone : S/2004 S 1	55
4.2.3	Aegaeon : S/2008 S 1	56
4.3	Application de CoraLin	56
4.4	Comparaison CoraLin/Intégrations numériques exactes	57
4.4.1	Éléments orbitaux	57
4.4.2	FLI Mercury/CoraLin	58
4.5	Conclusion	59
5	Scénarios de capture en corotation	62
5.1	Introduction	64
5.2	Équations de mouvement d'une pure corotation	64
5.3	Migration de Mimas	65
5.3.1	Migration due aux anneaux	65
5.3.2	Migration due à Saturne	66
5.4	Introduction de la migration dans le modèle CoraLin	66
5.4.1	Migration constante	67
5.4.2	Migration avec un gradient	68
5.5	Probabilité de capture	69
5.6	Scénarios de capture	71
5.6.1	Scénario 1 : Capture directe dans la CER	72
5.6.2	Probabilité totale	76
5.6.3	Scénario 2 : Capture dans la LER puis dans la CER	79
5.7	Conclusion	82
	Conclusion & Perspectives	84
	Annexes	89
A	Les coefficients de Laplace utilisés dans le modèle CoraLin	90
B	Article 1 : Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn	94
C	Article 2 : Coupling between corotation and Lindblad resonances in the elliptic planar three-body problem	118
	Bibliographie	136

Introduction

Plusieurs satellites des planètes géantes sont en résonance de moyen mouvement. Ce phénomène est très fréquent et joue un rôle important dans la stabilité et l'évolution dynamique de nombreux corps du système solaire. Le système de Saturne, qui présente des anneaux, arcs et une soixantaine de satellites de différentes tailles, formes et propriétés physiques, permet d'étudier plusieurs types de résonances. Toutes ces structures, y compris la planète elle-même, ont été observées pendant des siècles, et récemment, il y a eu d'énormes progrès grâce à l'exploration spatiale ; les sondes Pionner 11 (1979), Voyager 1 (1980), Voyager 2 (1981) et Cassini (2004) ont fourni de nouvelles informations sur le système saturnien.

Récemment, la sonde Cassini, en orbite autour de Saturne depuis 2004, a observé pour la première fois plusieurs petits satellites, dont le diamètre est de l'ordre du kilomètre. Ils sont si petits qu'il est impossible de les observer depuis la Terre. Les petites lunes en question sont : Daphnis, Pallène, Polydeuces, Aegaeon, Anthée, Méthone.

Les trois derniers corps constituent une nouvelle population de satellites, des observations à haute résolution ayant mis en évidence des arcs de matière associés aux orbites de chacune des trois lunes. Des études, basées sur des ajustements aux données Cassini et des simulations numériques, ont prouvé qu'ils sont dynamiquement liés à Mimas via des résonances de moyen mouvement, plus spécifiquement, des résonances de corotation perturbées par des résonances de Lindblad que nous allons étudier dans le cadre de cette thèse de manière détaillée. Notre étude est motivée par une double problématique :

La première problématique est d'intérêt dynamique, basée sur l'explication d'une part de la présence d'un satellite dans une configuration de résonances couplées entre elles, sachant que le corps central est très aplati, et d'autre part, la description de son comportement en fonction de sa configuration dans le système. Le couplage entre les résonances pouvant être important, cette question est dynamiquement très intéressante mais complexe. Elle mérite donc une étude analytique et numérique universelle et générique, puisque ce genre de configurations est fréquente dans notre système solaire.

Le modèle dynamique mis en place est construit de façon à ce qu'il soit suffisamment simple, facilement utilisable, adimensionnel, avec le minimum de paramètres, universel, rapide à implémenter et à intégrer, et enfin riche de manière à ce qu'il contienne l'essentiel de l'information dynamique. Avec un tel modèle, on peut étudier plusieurs possibilités : les cas intégrables ou non intégrables, les cas où les masses des corps impliqués dans ces résonances sont comparables (problème à trois corps général) et enfin les cas où la masse de l'un des deux corps est négligeable par rapport à l'autre (problème à trois corps restreint).

Concernant la deuxième problématique, une fois que le modèle a été développé, nous l'avons appliqué aux trois satellites : Anthée, Méthone et Aegaeon. Notre modèle que nous avons appelé CoraLin (CORotation And LINdblad) est utilisable également lorsque les satellites migrent à cause des effets de marées de la planète et/ou à cause du couples des anneaux. Cela permet d'estimer les probabilités de capture dans les sites de corotation que le satellite rencontre, et ainsi décrire les scénarios de capture les plus probables, toujours d'une façon générique. L'estimation des probabilités de capture, est l'un des éléments d'information pour estimer la population initiale des satellites dans l'environnement de Mimas : une faible probabilité indique qu'initialement, de nombreux objets sont nécessaires afin de reproduire la population observée, et que seulement trois ont été capturés, alors qu'une forte probabilité indique qu'il suffisait de peu de corps initialement pour expliquer la situation actuelle.

Cette thèse est organisée comme suit :

- Nous débutons la thèse avec un **premier chapitre** contenant une brève présentation générale des résonances dans le système solaire et certains travaux réalisés dans ce cadre .
- Le **second chapitre** est dédié à la présentation d'un modèle dynamique permettant l'étude des résonances couplées dans le cadre du problème à trois corps général.
- Dans le **troisième chapitre**, nous présentons en détail la mise en place du modèle CoraLin, en distinguant clairement les effets des deux types de résonances (corotation et Lindblad), nous discuterons également l'intégrabilité d'un système à deux degrés de liberté.
- Le **quatrième chapitre** est consacré essentiellement à la présentation des trois satellites étudiés, à l'application de CoraLin à ces cas bien précis afin de valider ce modèle par comparaison à des intégrations numériques exactes.
- Ensuite le **cinquième chapitre** est dédié à la présentation des résultats de capture en corotation, à la description des scénarios de capture en introduisant une migration dans le modèle CoraLin.
- Enfin, je mets à la disposition des lecteurs trois annexes contenant :
 - 1) Le calcul des coefficients de Laplace utilisés dans le modèle CorALin, pour faciliter aux utilisateurs l'implémentation dans un code numérique.
 - 2) Un article dont les auteurs sont Philippe Robutel, Nicolas Rambaux et moi-même, rédigé pendant la première année de ma thèse, dont le contenu est une étude analytique des résonances Spin-orbite, plus précisément, une étude sur l'influence des résonances orbitales sur la rotation des satellites troyens de Saturne.
 - 3) Un article présentant le modèle CorALin, construit pendant ma thèse, accepté pour une publication à *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*.

Bonne lecture.

Première partie

Étude analytique des résonances de moyen mouvement

Chapitre 1

Présentation générale des résonances dans le système solaire

Sommaire

1.1	Introduction	14
1.2	Définition intuitive d'une résonance	14
1.3	Différents types de résonances	14
1.3.1	Résonances spin-orbite	14
1.3.2	Résonances séculaires	14
1.3.3	Résonances Disque-Satellite	16
1.3.4	Résonances de moyen mouvement	16
1.4	Les objectifs de la thèse	19

1.1 Introduction

Il y a de nombreuses formes de résonances dans notre système solaire, impliquant différentes catégories de corps : planètes, satellites, astéroïdes, comètes... C'est un phénomène qui se présente sous forme de plusieurs configurations, les exemples les plus connus sont les résonances responsables des lacunes de Kirkwood, les résonances orbitales de Laplace entre les orbites d'Io, Europe et Ganymède (les grosses lunes les plus internes à Jupiter), les résonances spin-orbite 1 : 1 de la Lune et 3 : 2 de Mercure, les résonances responsables de la division de Cassini et des ondes spirales qu'on observe dans les anneaux de Saturne... Outre les difficultés mathématiques associées aux résonances, et qui seront discutées plus tard, ces dernières peuvent avoir des effets physiques opposés : accumulation de corps en certaines régions (e. g. les astéroïdes Troyens), ou au contraire, exclusions d'autres régions (e. g. les lacunes de Kirkwood).

1.2 Définition intuitive d'une résonance

Un corps soumis à une fréquence de forçage égale à l'une de ses fréquences propres verra son amplitude d'oscillation augmenter. L'exemple le plus connu, est celui de la balançoire, en effet selon la fréquence avec laquelle on pousse un enfant, il se peut que ce dernier soit éjecté si jamais on atteint une fréquence égale à la fréquence naturelle. La description d'un tel système sera établie selon le type de résonance étudié.

1.3 Différents types de résonances

1.3.1 Résonances spin-orbite

La plupart des gros satellites naturels sont en résonance spin-orbite 1 : 1 à cause des effets de marées exercés par leurs planètes. La Lune par exemple, tourne une fois sur elle-même dans le même temps qu'elle effectue un tour autour de la Terre, c'est une résonance spin-orbite synchrone. Un cas très connu aussi est celui de la planète Mercure, cette dernière présente une résonance 3 : 2 où elle effectue trois rotations pour deux révolutions (Fig. 1.1). Plusieurs études dynamiques ont été proposées dans ce contexte pour mieux comprendre l'origine de ces résonances et le comportement des corps en rotation synchrone ou en résonance spin-orbite 1 : 1, où la vitesse angulaire de rotation du satellite est égale à son moyen mouvement. Les corps présentant cette propriété de résonance spin-orbite synchrone montrent toujours la même face à la planète en moyenne.

J'inclus dans ce manuscrit un article (Robutel et al. [2012]) qui ne fait pas partie du sujet principal de la thèse, mais qui discute le cas particulier de résonances spin-orbite pour des satellites co-orbitaux. Voir l'annexe (B).

1.3.2 Résonances séculaires

Les perturbations séculaires sont des perturbations à longue période liées aux mouvements séculaires des périhélies et des noeuds des corps impliqués. Une résonance séculaire se produit, par exemple, lorsque le taux de précession du périhélie ϖ_a ou celui du noeud ascendant Ω_a de l'orbite de l'astéroïde est égal la fréquence propre du système planétaire (Jupiter) qui est elle-même égale au taux de précession du périhélie ϖ_J ou celui du noeud ascendant Ω_J . Les premiers travaux dans lesquels ont été traitées ces résonances sont Tisserand [1882], Charlier [1900] et Charlier [1902], en remarquant que dans la ceinture des astéroïdes, à 2 UA plus exactement, on trouve très peu de corps. Cette région correspond au site des résonances séculaires dues à Jupiter. Des théories ensuite ont été développées pour tenter de comprendre

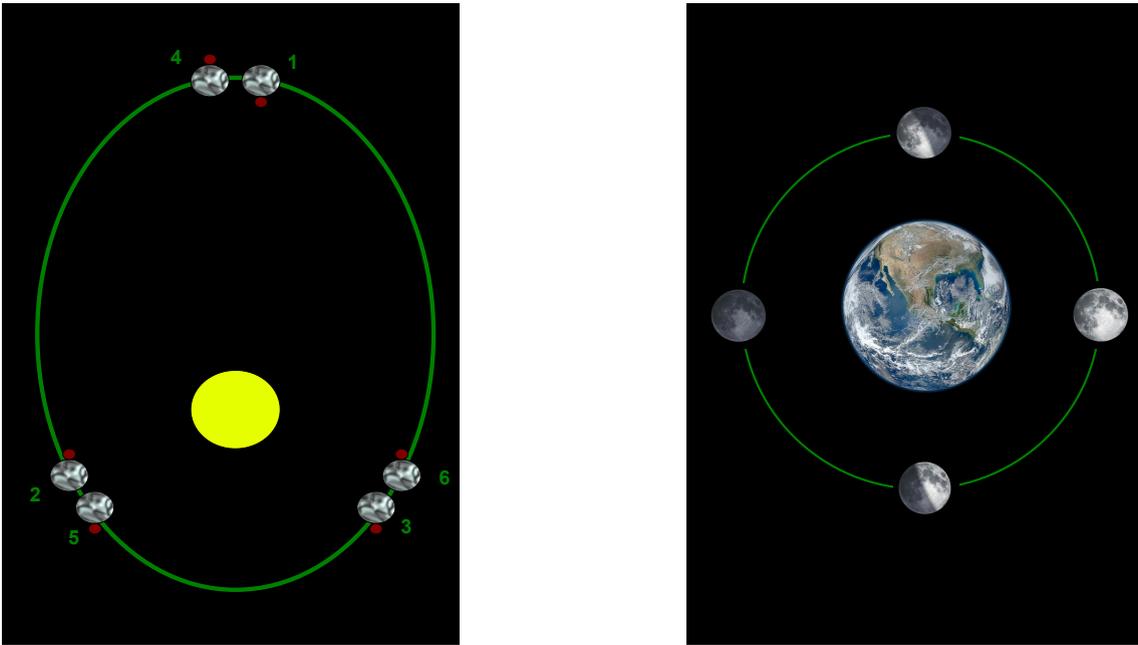


Figure 1.1 – Gauche : La planète Mercure est en résonance 3 :2 ; elle effectue trois rotations au bout de deux révolutions autour du Soleil. Droite : La Lune est en résonance synchrone 1 :1 ; sa période de révolution est égale à sa période de rotation.

l'origine de cette absence des astéroïdes à ces endroits et mettre en évidence les effets de résonances séculaires sur les mouvements d'astéroïdes : La théorie linéaire de [Brouwer and Clemence \[1962\]](#), La théorie semi-analytique de [Williams \[1969\]](#), des travaux basés sur des calculs numériques [Yoshikawa \[1987b\]](#), un modèle simple et analytique [Yoshikawa \[1987a\]](#), et des travaux plus approfondis de [Milani and Knezevic \[1990\]](#), [Milani and Knezevic \[1992\]](#), [Milani and Knezevic \[1994\]](#), de [Morbiddelli et al. \[1994\]](#) et [Morbiddelli and Henrard \[1991\]](#) ont permis d'avancer considérablement dans la compréhension de ces comportements. Ces travaux ont permis également de déterminer les positions des résonances séculaires.

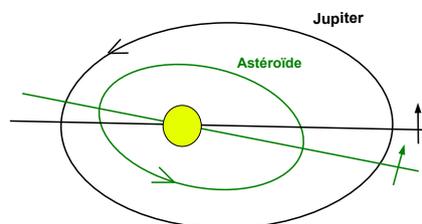


Figure 1.2 – Une résonance séculaire se produit dans ce cas lorsque le taux de précession de l'orbite de l'astéroïde (verte) et celui de l'orbite de Jupiter (noire) sont égaux.

Les résultats principaux qu'on peut retenir de ces travaux est qu'en considérant uniquement les termes séculaires dans la fonction perturbatrice, les orbites en résonance séculaire sont très perturbées et ces perturbations se traduisent par des variations importantes de l'excentricité et de l'inclinaison. Ces orbites particulières peuvent croiser ainsi l'orbite de Mars et de la Terre. Les résonances séculaires seraient à l'origine de certaines météorites et des objets Apollo-Amor.

1.3.3 Résonances Disque-Satellite

On rencontre également ce type très intéressant de résonance qui se produisent entre un disque (un anneau par exemple) et un satellite, ce genre de phénomène aboutit à la formation d'ondes spirales autour des rayons correspondant à des résonances avec un potentiel perturbateur extérieur, par exemple une barre galactique ou des satellites autour des anneaux, ...

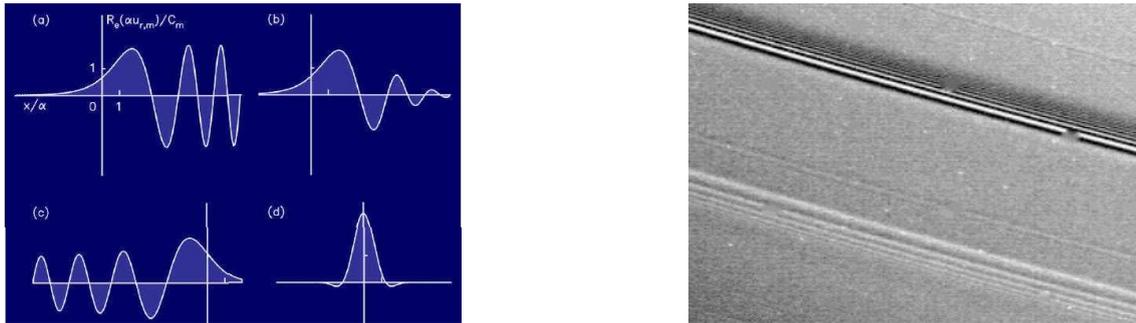


Figure 1.3 – Gauche : Plusieurs réponses d'un disque proche d'une résonance de Lindblad interne (voir [Sicardy \[2006\]](#)). Droite : Image résolue des ondes spirales dans les anneaux de Saturne.

Ces résonances peuvent se manifester dans les anneaux planétaires ([Fig. 1.3](#)), les disques proto-planétaires, les disques d'accrétion circum-stellaires et les disques galactiques. L'exemple le plus connu est la résonance 2 : 1 du bord interne de l'anneau B avec Mimas dans le système Saturnien, celle-ci est responsable de la division de Cassini. On distingue dans ce genre de résonances les "corotations" et les "résonances de Lindblad", voir ci-dessous. Ce sont les couplages entre ces résonances et les effets collectifs induits dans le disque qui expliquent la richesse des comportements observés ([Sicardy \[2006\]](#)). Un effet important de ces résonances est de créer un transfert de moment cinétique (couple) entre le disque et le satellite, voir les travaux initiaux de [Goldreich and Tremaine \[1979a\]](#).

1.3.4 Résonances de moyen mouvement

En ce qui concerne une résonance de moyen mouvement, elle se produit lorsque le rapport de deux périodes orbitales de deux corps tournant autour d'un même corps central, est égale au rapport de deux entiers quelconques. Dans le cadre du problème à trois corps restreint (Chapitre 3), le mouvement d'une particule test se présente sous forme d'un couplage entre plusieurs mouvements élémentaires. Rappelons qu'une résonance se produit lorsque l'une des fréquences naturelles du système (une particule test) est égale à la fréquence due à un forçage extérieur (satellite perturbateur). Le mouvement de la particule se présente ainsi sous forme d'oscillations de grande amplitude (à long terme) en comparaison avec la période propre du système. Ces oscillations sont :

- (i) Une oscillation de fréquence n correspondant au mouvement **orbital** autour du corps central sur l'orbite circulaire de référence.
- (ii) Une oscillation de fréquence κ correspondant au mouvement **épicyclique**, associé à l'excentricité de l'orbite (figure de gauche. 1.4).
- (iii) Une oscillation de fréquence ν correspondant au mouvement **vertical** hors du plan de référence, associé à l'inclinaison de l'orbite. (figure de droite. 1.4).

Dans le cas où l'on tient compte de l'effet de l'aplatissement du corps central, ces fréquences sont différentes et les résonances de corotation et de Lindblad se séparent. Ces deux types de résonances sont illustrées dans leur forme la plus simple dans la figure (1.5).

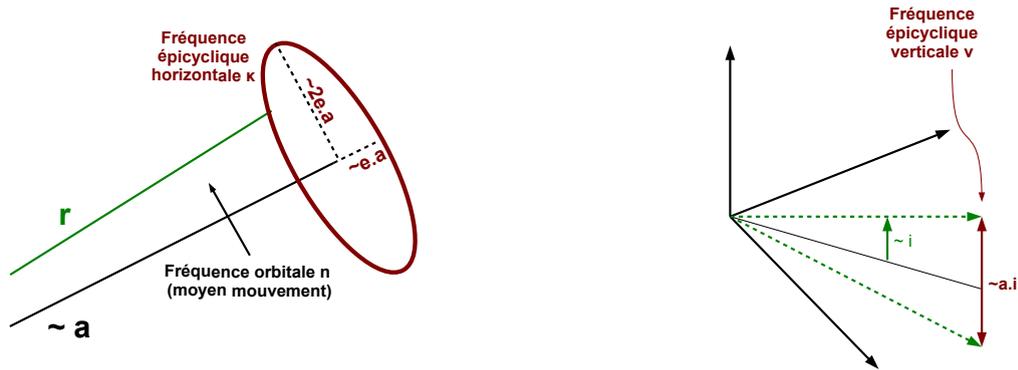
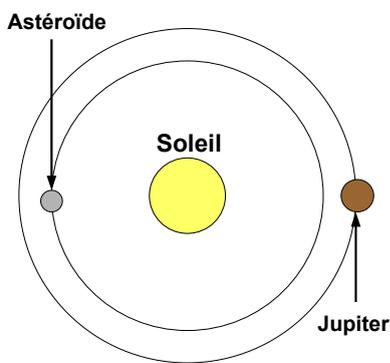


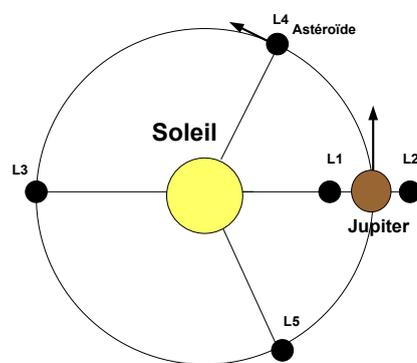
Figure 1.4 – Gauche : Fréquence épicyclique horizontale. Droite : Fréquence épicyclique verticale

L'astéroïde fait 4 tours lorsque Jupiter en fait 3



Exemple de résonance de moyen mouvement de type Lindblad (ici 4:3)

L'astéroïde fait 1 tour quand Jupiter en fait 1



Exemple de résonance de moyen mouvement de type corotation (ici 1:1)

Figure 1.5 – Gauche : Exemple d'une résonance de moyen mouvement de type Lindblad, il s'agit d'une simple commensurabilité entre les périodes orbitales de Jupiter et l'astéroïde; lorsque l'astéroïde fait 4 révolutions autour du Soleil, Jupiter en fait 3. Droite : Exemple d'une résonance de moyen mouvement de type corotation 1 : 1, il s'agit dans ce cas de figure d'un cas particulier, celui des points de Lagrange, lorsque l'astéroïde fait une révolution autour du Soleil, Jupiter en fait une également.

Résonances de Lindblad

Une façon simple de comprendre une résonance de Lindblad est de se placer dans un repère tournant avec une vitesse de rotation égale au moyen mouvement du satellite perturbateur (fig. 1.6). Une telle résonance se produit lorsque l'orbite de la particule P, observée depuis un

repère tournant avec un satellite S, est fermée. Cela revient à dire que l'angle entre le rayon

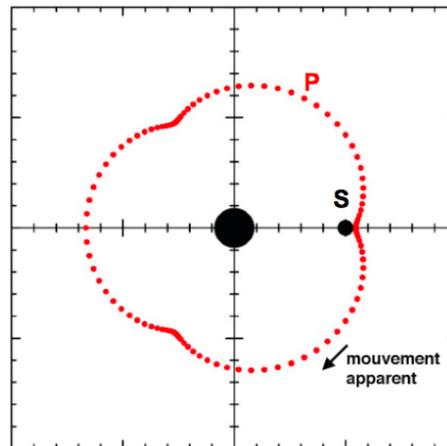


Figure 1.6 – La trajectoire d'une particule P dans un repère tournant avec le moyen mouvement du satellite S. La trajectoire fermée montre que la particule est en résonance avec le satellite. Dans le cas présent, la particule effectue trois révolutions autour du corps central quand le corps perturbateur S en effectue quatre.

vecteur du satellite et le périapse de l'orbite de la particule est stationnaire (Chapitre 3), ou varie très lentement. L'exemple indiqué dans la figure (1.6) correspond à une résonance de Lindblad externe 3 : 4.

Résonances de Corotation

On se place maintenant dans un repère tournant avec la particule. Une résonance de corotation se produit lorsque l'orbite du satellite S, dans ce repère est fermée (fig. 1.7). Dans

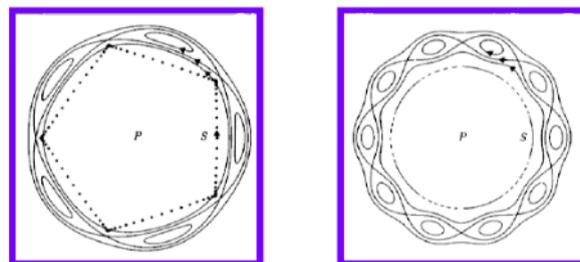


Figure 1.7 – Les trajectoires des particules test (lignes continues) sont représentées dans un repère tournant avec les particules. Une résonance de corotation se produit lorsque l'orbite du satellite S, dans ce repère est fermée. À **gauche** : le satellite a une orbite excentrique, et à **droite**, il a une orbite inclinée (ligne continue : le satellite est au dessus du plan équatorial, ligne pointillée, il est au-dessous). Ainsi nous pouvons voir ; (ici pour une résonance 5 : 6), respectivement, les résonances de corotation horizontales et verticales [Sicardy \[1991\]](#).

le cas de ce type de résonances, la modulation du potentiel par le satellite est suffisamment forte pour enfermer des particules dans des intervalles (sites de corotation) limités en longitude. Ces résonances sont une explication probable de la stabilité des arcs de Neptune ([Sicardy \[1991\]](#), [Foyta and Sicardy \[1996\]](#) et la figure 1.8).

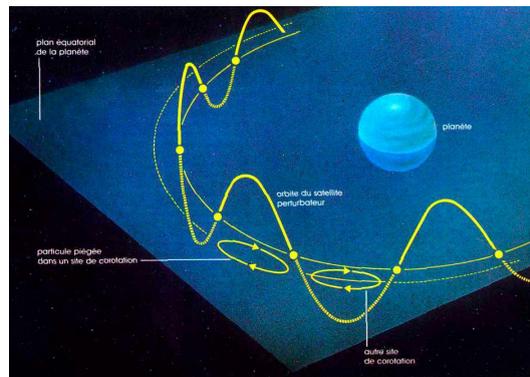


Figure 1.8 – Crédit : Bruno Sicardy, la Recherche, janvier 1994. Exemple d'une résonance de moyen mouvement de type corotation inclinée 43 :42 entre le satellite Galatée et l'arc Adams dans le système de Neptune

1.4 Les objectifs de la thèse

De manière générale, ma thèse porte sur une étude analytique et numérique des résonances de moyen mouvement, avec un grand champ d'applications : la dynamique des satellites de Saturne, la capture en résonance de moyen mouvement ... Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la mission Cassini, en orbite autour de Saturne depuis juillet 2004. L'une des motivations principales de mon étude est la construction d'un modèle dynamique et générique, dont le but est l'étude des corps en résonance de moyen mouvement dans le cadre du problème à trois corps, utilisable pour plusieurs applications. Un exemple choisi parmi de nombreuses applications, est celui de certains satellites récemment découverts par le sonde Cassini, il s'agit d'Anthé, Méthone et Aegaeon. Les orbites de ces trois petits (tailles kilométriques) lunes sont associées à des arcs de matière et sont capturés en résonance de moyen mouvement avec Mimas (un des satellites de Saturne). Un deuxième champ d'applications est la capture de ces satellites en résonance de corotation, en introduisant au modèle construit des effets induisant la migration des satellites, plus spécifiquement, les effets de marées et le couple des anneaux. Enfin, l'une des raisons qui motivent cette étude, c'est la grande présence des configurations étudiées dans le système solaire ; les arcs de Neptune, les satellites de Pluton, Jupiter et Saturne. Également, à l'extérieur du système solaire, les corps en résonance de moyen mouvement dans les système binaires de type P et type S (Dvorak [1986]), ce-ci entre dans un projet en collaboration avec Siegfried Eggl (Un chercheur post-doctorant à l'IMCCE).

Chapitre 2

Construction d'un modèle analytique pour l'étude générique des résonances de moyen mouvement dans le problème à trois corps général

Sommaire

2.1	Contexte	22
2.2	Introduction au problème	22
2.3	Structure dynamique du problème pour le cas général et présentation du modèle	23
2.3.1	Structure dynamique	23
2.3.2	Formalisme Hamiltonien	24
2.4	Interprétation physique des actions	25
2.4.1	Énergie et moment cinétique :	25
2.4.2	Actions radiales	26
2.4.3	Constante de Jacobi généralisée	26
2.4.4	Équations du mouvement :	27
2.5	Conclusion	31

2.1 Contexte

Dans ce chapitre, je vais décrire le comportement de deux corps de masses non nulles, en résonance de moyen mouvement du premier ordre, sur des orbites coplanaires autour d'un corps massif central. Cela peut concerner deux satellites autour d'une planète, ou deux planètes autour d'une étoile. L'intérêt principal de cette étude est de raisonner de manière générique. En effet, nous avons créé un modèle analytique simple qui permet de décrire ce genre de comportements. Il s'agit du problème à 3 corps plan, dont l'étude est réduite à un système dynamique à deux degrés de liberté, qui n'est, en général, pas intégrable. Lorsque l'on tient compte de l'aplatissement du corps central, les orbites des corps précèdent. Ceci lève la dégénérescence entre les résonances et fait apparaître deux résonances légèrement séparées, dont chacune est associée au taux de précession de l'une des deux orbites. Dans le cas képlérien (dégénéré), ces deux résonances sont parfaitement superposées, et on peut se ramener à un système intégrable après avoir mis en évidence l'existence d'une deuxième intégrale de mouvement, en plus de l'Hamiltonien principal. Nous montrons que cette deuxième constante n'est rien d'autre qu'une version modifiée de la constante de Jacobi classique. Nous interprétons géométriquement cette constante, tout en décrivant les cas dans lesquels elle est détruite. Dans certains cas intermédiaires, où les deux résonances sont très proches l'une de l'autre, un couplage plus au moins fort (selon la distance entre les deux centres des deux résonances) détruit la deuxième intégrale de mouvement et conduit à des comportements chaotiques. En revanche, dans le cas où les deux résonances sont très éloignées l'une de l'autre, on se ramène à des comportements plus réguliers.

Ce travail est applicable dans le cas général à plusieurs problèmes impliquant les anneaux, les satellites et les planètes extra-solaires. Cette étude s'étend par exemple à l'approche de [Goldreich et al. \[1986\]](#) et [Porco \[1991\]](#), qui ont proposé un modèle pour expliquer la stabilité des anneaux incomplets (arcs) de Neptune en étudiant les effets combinés des résonances de Lindblad et de corotation¹. Plus récemment, [Cooper et al. \[2008\]](#), [Hedman et al. \[2009\]](#) et [Hedman et al. \[2010\]](#) ont étudié le mouvement des petits satellites saturniens Anthée, Aegaeon et Méthone qui sont capturés en résonance de corotation avec Mimas, tout en étant perturbés par la résonance de Lindblad.

2.2 Introduction au problème

Nous considérons le problème de deux petits corps de masses μ_s et μ'_s orbitant dans un plan commun autour d'un corps massif central de masse M_p ($\mu_s, \mu'_s \ll M_p$). Dans le cadre de cette étude, le corps central sera appelé planète, et les deux corps en orbite seront appelés des satellites². Nous considérons l'hypothèse où l'on est proche d'une résonance de moyen mouvement de premier ordre $m + 1 : m$:

$$(m + 1)n' \approx mn,$$

où m est un entier (positif ou négatif, selon que μ_s orbite à l'intérieur ou à l'extérieur de μ'_s), et n et n' sont les moyens mouvements de μ_s et μ'_s , respectivement. Près d'une résonance $m + 1 : m$, la dynamique moyenne des satellites est décrite, par un système à deux degrés de liberté associés aux deux angles critiques de résonance ϕ et ϕ' :

$$\begin{aligned} \phi &= (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi \\ \phi' &= (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi' \end{aligned} \tag{2.1}$$

1. Nous définissons plus loin les résonances de corotation et de Lindblad

2. Pour raison de simplification, les masses M_p , μ_s et μ'_s représentent en même temps les corps et leurs masses.

où λ et ϖ et leurs homologues primés sont les notations classiques pour la longitude moyenne et la longitude du périastre des deux satellites, respectivement. Ayant deux degrés de liberté, le Hamiltonien qui décrit le mouvement de μ_s et μ'_s est en général non intégrable, et conduit à des comportements chaotiques dans certaines régions de l'espace des phases, comme on le décrira plus tard. Cette étude a pour objectif de :

- 1) Mettre en place un modèle dynamique simple qui contient l'essentiel de l'information sur la dynamique des corps (planètes extra-solaires et satellites du système solaire) qui se trouvent dans cette configuration (en résonance de moyen mouvement de premier ordre).
- 2) Discuter de l'intégrabilité d'un système à deux degrés de liberté en présence de deux angles critiques de résonances ϕ et ϕ' , et fournir des interprétations géométriques relatives aux orbites des deux corps dans le cas intégrable.

2.3 Structure dynamique du problème pour le cas général et présentation du modèle

2.3.1 Structure dynamique

Nous utilisons ici les notations standards a , e , n , λ et ϖ qui représentent respectivement le demi-grand axe, l'excentricité orbitale, le moyen mouvement, la longitude moyenne et la longitude du périastre de μ_s , avec les mêmes quantités primées pour μ'_s . Pour une planète aplatie, ces éléments représentent les éléments géométriques (et non pas les éléments osculateurs), voir [Borderies-Rappaport and Longaretti \[1994\]](#) et [Renner and Sicardy \[2006\]](#) pour plus de détails. Dans ce cas, les quantités $\dot{\varpi}_s$ et $\dot{\varpi}'_s$ représentent les variations temporelles séculaires de ϖ_s et ϖ'_s (taux de précession) causées par l'aplatissement de la planète, autrement dit, les variations qui ne sont pas dues aux résonances elles-mêmes. Nous supposons ensuite que les demi-grands axes de μ_s et de μ'_s restent proches des valeurs de référence a_0 et a'_0 , respectivement, où les moyens mouvement associés sont n_0 et n'_0 . Ces valeurs de référence sont choisies de manière univoque, de telle manière que, $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = 0$, et que l'énergie orbitale totale de μ_s et μ'_s soit $-\mathcal{G}M_p\mu_s/2a_0 - \mathcal{G}M_p\mu'_s/2a'_0$. Ainsi $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = \dot{\varpi}'_s - \dot{\varpi}_s$, définit la distance (en terme de fréquence) entre les deux résonances. Ce choix des valeurs de référence a_0 et a'_0 est arbitraire. Il est motivé par le fait que nous étudierons plus tard (Chapitre 3) le comportement d'une particule test proche d'une résonance de corotation, où $(m+1)n' - mn - \dot{\varpi}'_s = 0$. Nous définissons :

$$\xi = \frac{a - a_0}{a_0}, \quad \xi' = \frac{a' - a'_0}{a'_0},$$

comme les différences relatives du demi-grand axe par rapport au rayon de référence. Nous supposons finalement que μ_s et μ'_s sont assez loin l'un de l'autre, dans le sens que leurs excentricités orbitales et les variations des deux demi-grands axes sont petites comparées à leur séparation orbitale relative : $\xi, \xi', e, e' \ll |a - a'|/a' \sim 1/m$.

Le développement de la fonction perturbatrice agissant sur μ_s et μ'_s au premier ordre en excentricité fait apparaître deux termes qui varient lentement avec le temps : $\mathcal{G}\mu_s\mu'_s e A \cdot \cos(\phi)$ et $\mathcal{G}\mu_s\mu'_s e' A' \cdot \cos(\phi')$, où ϕ et ϕ' sont donnés par l'équation (2.1). Ces termes incluent les parties directe et indirecte provenant de la fonction perturbatrice. Les quantités A et A' sont des combinaisons des coefficients de Laplace $b_{1/2}^{(m)}$, voir [Ellis and Murray \[2000\]](#) pour plus de

détails. Nous notons au passage que les quantités A et A' sont de signes opposés, et que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2a'} [2(m+1) + \alpha\mathcal{D}] b_{1/2}^{(m+1)}(\alpha) \approx +\frac{0.802m}{a'} \\ A' &= -\frac{1}{2a'} [(2m+1) + \alpha\mathcal{D}] b_{1/2}^{(m)}(\alpha) \approx -\frac{0.802m}{a'}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $\alpha = a/a'$, $\mathcal{D} = d/d\alpha$, et où les approximations sont valables pour des grandes valeurs de m . Des détails sur les calculs de A et A' , ainsi que leurs relations avec les quantités utilisées par d'autres auteurs sont fournis dans l'annexe A.

2.3.2 Formalisme Hamiltonien

Le calcul de l'Hamiltonien du système est un calcul classique qui a été décrit dans plusieurs travaux, voir par exemple [Laskar and Robutel \[1995\]](#) pour une approche générale. En moyennant à zéro les termes qui varient rapidement, et en gardant uniquement les termes contenant ϕ et ϕ' , nous obtenons cet Hamiltonien moyenné :

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu^3(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'^3(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu\mu' A \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Lambda}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu\mu' A' \sqrt{\frac{2\Gamma'}{\Lambda'}} \cdot \cos(\phi') - \dot{\omega}_s \Gamma - \dot{\omega}'_s \Gamma'. \quad (2.3)$$

Si μ'_s orbite à l'intérieur de μ_s , alors, $M = M_p(M_p + \mu_s + \mu'_s)/(M_p + \mu'_s)$, $M' = M_p^3/(M_p + \mu'_s)^2$, $\mu = \mu_s(\mu'_s + M_p)/(\mu_s + \mu'_s + M_p)$ et $\mu' = \mu'_s(\mu'_s + M_p)/M_p$, voir [Sessin and Ferraz-Mello \[1984\]](#). Des expressions équivalentes peuvent être calculées si μ_s orbite à l'intérieur de μ'_s . Dans tous les cas, les éléments orbitaux se réfèrent au centre de masse de la planète et des deux satellites. Nous notons également que pour $\mu_s, \mu'_s \ll M_p$, nous avons en fait $M \approx M' \approx M_p$, $\mu \approx \mu_s$ et $\mu' \approx \mu'_s$.

De plus, notons que les dépendances des éléments position-vitesse de μ_s et μ'_s vis-à-vis des éléments géométriques sont les mêmes que pour le cas Képlérien au premier ordre en excentricité. Ainsi à cet ordre, les valeurs de A et de A' peuvent être directement calculées à partir de la formule (2.2), pourvu que les éléments géométriques soient utilisés au lieu des éléments osculateurs.

Les actions Λ , Γ , Λ' et Γ' sont les variables de Poincaré, qui sont respectivement les conjuguées des variables angles λ , $-\varpi$, λ' et $-\varpi'$ comme indiqué au-dessous :

$$\begin{aligned} \lambda &\longleftrightarrow \Lambda = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma} \\ -\varpi &\longleftrightarrow \Gamma = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx \mu e^2 \sqrt{\mathcal{G}Ma}/2 \\ \lambda' &\longleftrightarrow \Lambda' = \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'} \\ -\varpi' &\longleftrightarrow \Gamma' = \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'}(1 - \sqrt{1 - e'^2}) \approx \mu' e'^2 \sqrt{\mathcal{G}M'a'}/2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Puisque \mathcal{H}_1 dépend uniquement de ϕ et ϕ' , il est plus pertinent d'utiliser les nouvelles paires de variables conjuguées suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &\longleftrightarrow J = \Lambda + m(\Gamma + \Gamma') \\ \lambda' &\longleftrightarrow J' = \Lambda' - (m+1)(\Gamma + \Gamma') \\ \phi &\longleftrightarrow \Theta = \Gamma \\ \phi' &\longleftrightarrow \Theta' = \Gamma', \end{aligned} \quad (2.5)$$

et d'introduire de nouvelles actions J , J' , Θ et Θ' dans \mathcal{H}_1 pour arriver à la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_2 = & -\frac{\mu^3(\mathcal{G}M)^2}{2J^2} - \frac{\mu'^3(\mathcal{G}M')^2}{2J'^2} \\
 & + \mathcal{G}\mu\mu' A \sqrt{\frac{2\Theta}{J - m(\Theta + \Theta')}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu\mu' A' \sqrt{\frac{2\Theta'}{J' + (m+1)(\Theta + \Theta')}} \cdot \cos(\phi') \\
 & - \dot{\omega}_s \Theta - \dot{\omega}'_s \Theta'.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.4 Interprétation physique des actions

Dans la mesure où l'objectif de cette étude est de comprendre globalement les mouvements de μ_s et μ'_s , il est instructif de considérer les diverses actions impliquées dans le système. Puisque \mathcal{H}_1 ne dépend pas de λ et λ' , alors J et J' sont des constantes de mouvement. Par conséquent, le système initial à 4 degrés de liberté (mouvement de deux satellites dans un plan commun) se réduit à un système à deux degrés de liberté. Ce système est généralement non intégrable (voir par exemple les figures (3.6 et 4.4)), à moins que $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s = 0$, comme il sera expliqué plus tard.

2.4.1 Énergie et moment cinétique :

Reprenant J et J' , nous avons :

$$\begin{cases} J + J' = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma(1-e^2)} + \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'(1-e'^2)} = \text{constante} \\ \frac{J}{m} + \frac{J'}{m+1} \approx \frac{2}{mn_0} \cdot \left[-\frac{\mathcal{G}M\mu}{2a} - \frac{\mathcal{G}M'\mu'}{2a'} \right] = \text{constante.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Par conséquent, les conservations de J et J' expriment la conservation du moment angulaire et de l'énergie totaux du système. Plus précisément, le Hamiltonien \mathcal{H}_1 décrit le mouvement de deux satellites qui tournent autour d'une planète centrale, massive et fixe. Ainsi, l'échange de l'énergie et du moment angulaire se produit uniquement entre les satellites, et non pas entre les satellites et la planète. En terme de ξ , e , ξ' et e' , les deux équations (2.7) se lisent :

$$\begin{cases} \frac{\mu(\xi - e^2)}{a_0^2 n_0} + \frac{\mu'(\xi' - e'^2)}{a_0'^2 n_0'} = \text{constante} \\ \frac{\mu\xi}{a_0} + \frac{\mu'\xi'}{a_0'} = \text{constante} \end{cases} \tag{2.8}$$

Nous définissons maintenant $J_c = \Lambda + m\Gamma = J - m\Theta'$ et $J'_c = \Lambda' - (m+1)\Gamma' = J' + (m+1)\Theta$, qui sont les versions moyennées de la quantité de Jacobi, ou paramètre de Tisserand, voir par exemple [Murray and Dermott \[1999\]](#). On peut montrer qu'à des constantes additives près³, les quantités de Jacobi associées à chacun des corps sont :

$$\begin{cases} J_c = \frac{\mu a_0^2 n_0}{2} [\xi + me^2] \\ J'_c = \frac{\mu' a_0'^2 n_0'}{2} [\xi' - (m+1)e'^2]. \end{cases} \tag{2.9}$$

3. La notation J_c sera utilisée plus tard comme étant la version locale de la constante de Jacobi, voir la table (3.1) : C'est la même quantité qui est utilisée ici, à l'exception de constantes multiplicatives.

Les conservations de J et J' imposent $\dot{J}_c = m\partial\mathcal{H}_1/\partial\phi'$ et $\dot{J}'_c = -(m+1)\partial\mathcal{H}_1/\partial\phi$, où :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\xi + me^2) = -\frac{2m\mathcal{G}\mu'}{a_0^2 n_0} A'e' \cdot \sin(\phi') \\ \frac{d}{dt}[\xi' - (m+1)e'^2] = \frac{2(m+1)\mathcal{G}\mu}{a_0'^2 n_0'} Ae \cdot \sin(\phi'). \end{cases} \quad (2.10)$$

Ainsi, comme on peut s'y attendre, la quantité de Jacobi J_c (resp. J'_c) est constante dans le cas circulaire, c'est-à-dire, si $e' = 0$ (resp. $e = 0$).

2.4.2 Actions radiales

Nous avons $\dot{\Gamma} = \partial\mathcal{H}_1/\partial\varpi$ et $\dot{\Gamma}' = \partial\mathcal{H}_1/\partial\varpi'$, donc :

$$\begin{cases} \frac{d(e^2\sqrt{\mathcal{G}Ma})}{dt} = 2\mathcal{G}\mu'Ae \cdot \sin(\phi) \\ \frac{d(e'^2\sqrt{\mathcal{G}M'a'})}{dt} = 2\mathcal{G}\mu A'e' \cdot \sin(\phi'), \end{cases} \quad (2.11)$$

La quantité $e^2\sqrt{\mathcal{G}Ma}$ (resp. $e'^2\sqrt{\mathcal{G}M'a'}$) est l'action associée au mouvement radial rapide de μ (resp. μ'). En effet, le mouvement radial de la particule a une amplitude $\Delta r \approx ae$, tandis que son impulsion radiale a une amplitude $\Delta p_r \approx aen \propto a^{-1/2}e$, en utilisant la troisième loi de Kepler, ainsi, $\oint p_r dr \propto e^2 a^{1/2}$.

Dans le cas d'un potentiel central Képlérien $-\mathcal{G}M_p/r$, nous avons $\dot{\varpi}_s = \dot{\varpi}'_s = 0$. Comme nous le montrons ci-dessous, le système à deux degrés de liberté décrit par \mathcal{H}_1 admet alors une deuxième intégrale de mouvement (en plus de l'Hamiltonien), et il est ainsi intégrable. Cette seconde intégrale de mouvement a été trouvée par [Sessin and Ferraz-Mello \[1984\]](#) pour le cas général $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$ et a été calculée dans le cas restreint par [Wisdom \[1986\]](#). Elle a été analysée plus tard par [Henrard and Lemaître \[1986\]](#). L'existence de cette constante peut être démontrée en utilisant des transformations canoniques dans lesquelles la somme $\mu\mu'Ae \cdot \cos(\phi) + \mu\mu'A'e' \cdot \cos(\phi')$ dans l'équation (2.3) est remplacée par un terme unique $\sqrt{2\Phi} \cdot \cos(\varphi)$, et en montrant que le nouvel Hamiltonien dépend uniquement des variables conjuguées Φ, φ ; réduisant ainsi le système à un système à un seul degré de liberté : un problème intégrable.

2.4.3 Constante de Jacobi généralisée

Une démonstration géométrique de l'existence de cette seconde constante de mouvement pour \mathcal{H}_1 est donnée ici en posant $\sigma = (m+1)\lambda' - m\lambda$ et en définissant les vecteurs $\mathbf{u} = [\cos(\sigma), \sin(\sigma)]$ et $\mathbf{v} = [-\sin(\sigma), \cos(\sigma)]$. Notons que $\partial\mathbf{u}/\partial\sigma = -\mathbf{v}$. Nous définissons aussi les vecteurs excentricités de μ_s et μ'_s comme

$$\begin{cases} \mathbf{e} = (p, q) = [e \cos(\varpi), e \sin(\varpi)] \\ \mathbf{e}' = (p', q') = [e' \cos(\varpi'), e' \sin(\varpi')]. \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour le cas Képlérien, $\dot{\varpi}_s = \dot{\varpi}'_s = 0$, le Hamiltonien \mathcal{H}_1 s'écrit maintenant :

$$\mathcal{H}_{1K} = -\frac{\mu^3(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'^3(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu\mu'A(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) + \mathcal{G}\mu\mu'A'(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{u}). \quad (2.13)$$

En utilisant l'approximation $e \ll 1$ et $\Lambda \approx \Lambda_0 = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma_0}$, on obtient $\dot{p} = (\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial q)/\Lambda_0$ et $\dot{q} = -(\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial p)/\Lambda_0$, alors que $\dot{\mathbf{e}} = -(\mathcal{G}\mu\mu' A/\Lambda_0)\mathbf{v}$. De même, $\dot{\mathbf{e}}' = -(\mathcal{G}\mu\mu' A'/\Lambda'_0)\mathbf{v}$. En utilisant la troisième loi de Kepler et en notant que A et A' sont de signes opposés, les deux dernières équations donnent la constante de mouvement vectorielle suivante :

$$\frac{\Lambda_0}{A}\mathbf{e} - \frac{\Lambda'_0}{A'}\mathbf{e}' \propto \frac{\mu}{a_0|A|n_0}\mathbf{e} + \frac{\mu'}{a'_0|A'|n'_0}\mathbf{e}' = \mathbf{e}_{\text{tot}} = \text{constant}, \quad (2.14)$$

où le vecteur \mathbf{e}_{tot} définit ici "l'excentricité totale" du système. La seconde intégrale de mouvement peut donc s'exprimer par le fait que l'excentricité totale du système est conservée au cours du mouvement. Notons que ceci n'est valide qu'au premier ordre en excentricité. De plus, $\dot{\Lambda} = -\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial\lambda = m\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial\sigma = -m(\Lambda_0\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} + \Lambda'_0\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}')$. En utilisant la conservation de \mathbf{e}_{tot} , et en réalisant le même calcul pour $\dot{\Lambda}'$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{A^2\dot{\Lambda}}{m\Lambda_0} &= -[\mathbf{Ae} + A'\mathbf{e}'] \cdot A\dot{\mathbf{e}} \\ \frac{A'^2\dot{\Lambda}'}{(m+1)\Lambda'_0} &= +[\mathbf{Ae} + A'\mathbf{e}'] \cdot A'\dot{\mathbf{e}}'. \end{aligned}$$

En substituant ces deux équations et en notant : $\dot{\Lambda}/\Lambda_0 \approx \dot{\xi}/2$ et $\dot{\Lambda}'/\Lambda'_0 \approx \dot{\xi}'/2$, nous arrivons finalement à :

$$\boxed{J_{c,\text{relat}} = \frac{A^2\xi}{m} - \frac{A'^2\xi'}{m+1} + (|A|\mathbf{e} - |A'|\mathbf{e}')^2 = \text{constant}.} \quad (2.15)$$

La comparaison avec les équations (2.9) montre que la deuxième constante peut être interprétée comme étant "la constante de Jacobi relative" des deux particules, qui étend la notion de la constante de Jacobi au problème à trois corps non circulaire. L'équation (2.15) montre que l'échange d'énergie entre les satellites ne dépend que de l'excentricité relative des deux corps définie comme :

$$\mathbf{e}_{\text{relat}} = |A|\mathbf{e} - |A'|\mathbf{e}' \quad (2.16)$$

De plus, la deuxième équation (2.8) nous indique comment est distribuée l'énergie entre μ_s et μ'_s . Finalement, l'équation Eq. (2.14) montre que l'interaction entre μ_s et μ'_s conserve l'excentricité totale du système, \mathbf{e}_{tot} . Notons que pour de grandes valeurs de m , $|a_0An_0| \approx |a'_0A'n'_0|$, et l'excentricité totale du système est proportionnelle à $\mu\mathbf{e} + \mu'\mathbf{e}'$.

Dans le cas limite de l'approximation de Hill, ce résultat avait été obtenu par [Henon and Petit \[1986\]](#).

On peut comprendre intuitivement pourquoi la conservation de \mathbf{e}_{tot} est détruite lorsque $\dot{\omega}$ et $\dot{\omega}'$ sont nuls et différents : chaque orbite précède alors à un taux différent, forcé par l'aplatissement de la planète, voir la figure (2.1).

2.4.4 Équations du mouvement :

Avant d'écrire les équations du mouvement associées à l'Hamiltonien \mathcal{H}_2 , rappelons que le système de coordonnées canoniques qu'on utilise est le suivant :

Après développement autour des rayons de référence a_0 et a'_0 (ou leurs moyens mouvements de référence n_0 et n'_0), nous obtenons :

$$\begin{cases} J = J_0 + \Delta J \\ J' = J'_0 + \Delta J' \end{cases} \quad (2.17)$$

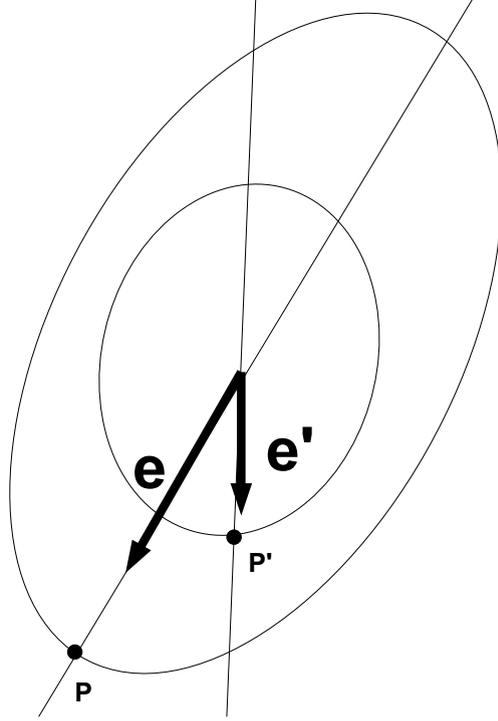


Figure 2.1 – Figure représentant une interprétation géométrique de la constante de Jacobi généralisée. \mathbf{e} et \mathbf{e}' sont les vecteurs excentricités des orbites de μ_s et μ'_s respectivement. La quantité conservée est $\mathbf{e}_{\text{tot}} = \frac{\mu}{a_0|A|n_0}\mathbf{e} + \frac{\mu'}{a'_0|A'|n'_0}\mathbf{e}'$.

fournissant les paires de variables canoniques suivantes :

$$\begin{cases} \lambda \leftrightarrow \Delta J \\ \lambda' \leftrightarrow \Delta J' \\ \phi \leftrightarrow \Theta = \frac{h^2+k^2}{2} \\ \phi' \leftrightarrow \Theta' = \frac{h'^2+k'^2}{2} \end{cases} \quad (2.18)$$

et

$$\begin{cases} (h, k) = [\sqrt{2\Theta} \cos(\phi), \sqrt{2\Theta} \sin(\phi)] \\ (h', k') = [\sqrt{2\Theta'} \cos(\phi'), \sqrt{2\Theta'} \sin(\phi')]. \end{cases} \quad (2.19)$$

De même, en développant $\Lambda = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$ près de sa valeur à a_0 , avec des expressions similaires pour les quantités correspondantes à μ' , nous obtenons :

$$\begin{cases} \Delta J = \Delta\Lambda + m(\Theta + \Theta') \\ \Delta J' = \Delta\Lambda - (m+1)(\Theta + \Theta') \end{cases} \quad (2.20)$$

pour les deux constantes du mouvement. Notons qu'à l'ordre le plus bas en ξ , ξ' , e et e' :

$$\begin{cases} \Delta\Lambda = \mu a_0^2 n_0 \xi / 2, & \Theta = \mu a_0^2 n_0 e^2 / 2 \\ \Delta\Lambda' = \mu' a_0'^2 n_0' \xi' / 2, & \Theta' = \mu' a_0'^2 n_0' e'^2 / 2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Le développement du Hamiltonien \mathcal{H}_2 (Eq. (2.3)) au deuxième ordre en $\Delta\Lambda$ et $\Delta\Lambda'$ donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = & n_0\Delta J + n'_0\Delta J' + [(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\omega}'_s]\Theta + [(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\omega}'_s]\Theta' \\ & - \frac{3[\Delta J - m(\Theta + \Theta')]^2}{2\mu a_0} - \frac{3[\Delta J' + (m+1)(\Theta + \Theta')]^2}{2\mu' a'_0} \\ & + \mathcal{G}\mu\mu' A \sqrt{\frac{2\Theta}{\Lambda_0}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu\mu' A' \sqrt{\frac{2\Theta'}{\Lambda'_0}} \cdot \cos(\phi'). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sans perte de généralité, nous pouvons définir les rayons de référence a_0 et a'_0 , et leurs moyens mouvements de référence correspondants n_0 et n'_0 . Ainsi nous aurons $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\omega}'_s = 0$, et $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\omega}'_s = \dot{\omega}'_s - \dot{\omega}_s$. Nous notons $\dot{\omega}'_s - \dot{\omega}_s = Dn_0$, où :

$$D = \frac{\dot{\omega}'_s - \dot{\omega}_s}{n_0}, \quad (2.23)$$

D est la distance (en terme de fréquence) sans dimension entre les deux résonances.

Ce choix des valeurs de référence en n_0 et n'_0 est arbitraire, et il est motivé par le fait que nous voulons étudier plus tard le comportement d'une particule test près de la résonance de corotation correspondant à $\mu = 0$ et $\phi' \sim 0$.

Puisque ΔJ et $\Delta J'$ sont constants, le Hamiltonien \mathcal{H}_3 peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 = & Dn_0 \cdot \Theta \\ & - \frac{3[\Delta J - m(\Theta + \Theta')]^2}{2\mu a_0} - \frac{3[\Delta J' + (m+1)(\Theta + \Theta')]^2}{2\mu' a'_0} \\ & + \mathcal{G}\mu\mu' A \sqrt{\frac{2\Theta}{\Lambda_0}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu\mu' A' \sqrt{\frac{2\Theta'}{\Lambda'_0}} \cdot \cos(\phi'). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cet Hamiltonien est paramétrisé par D et par deux constantes ΔJ et $\Delta J'$, qui sont fixées par des conditions initiales données. Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}_4}{\partial \phi}, & \dot{\phi} = +\frac{\partial \mathcal{H}_4}{\partial \Theta} \\ \dot{\Theta}' = -\frac{\partial \mathcal{H}_4}{\partial \phi'}, & \dot{\phi}' = +\frac{\partial \mathcal{H}_4}{\partial \Theta'} \end{cases} \quad (2.25)$$

De manière alternative, nous pouvons choisir les variables conjuguées : $[\tilde{h} = \sqrt{2\Theta} \cdot \cos(\phi), \tilde{k} = \sqrt{2\Theta} \cdot \sin(\phi)]$ et $[\tilde{h}' = \sqrt{2\Theta'} \cdot \cos(\phi'), \tilde{k}' = \sqrt{2\Theta'} \cdot \sin(\phi')]$. Les équations du mouvement sont alors : $\dot{\tilde{h}} = -\partial \mathcal{H}_4 / \partial \tilde{k}, \dot{\tilde{k}} = +\partial \mathcal{H}_4 / \partial \tilde{h}$, avec des expressions similaires pour les quantités primées (correspondant à μ').

Puisque nous sommes principalement intéressés par les excentricités orbitales de μ et μ' , il est plus judicieux d'utiliser des variables alternatives en définissant les vecteurs excentricités (h, k) et (h', k') par :

$$\begin{cases} h = \frac{\tilde{h}}{\Lambda_0} = e \cdot \cos(\phi), & h' = \frac{\tilde{h}'}{\Lambda'_0} = e' \cdot \cos(\phi') \\ k = \frac{\tilde{k}}{\Lambda_0} = e \cdot \sin(\phi), & k' = \frac{\tilde{k}'}{\Lambda'_0} = e' \cdot \sin(\phi'). \end{cases} \quad (2.26)$$

Une forme plus compacte des équations du mouvement est finalement obtenue en écrivant les vecteurs excentricités sous leurs formes complexes,

$$z = h + ik = e \cdot \exp(i\phi) \text{ et } z' = h' + ik' = e' \cdot \exp(i\phi') \text{ où } i = \sqrt{-1}, \text{ ainsi :}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{z} = i(\Delta n + D \cdot n_0) \cdot z + i\epsilon' \\ \dot{z}' = i\Delta n \cdot z' + i\epsilon \end{cases}} \quad (2.27)$$

où :

$$\begin{cases} \Delta n = \frac{3m}{\mu a_0^2} \cdot [\Delta J - m(\Theta + \Theta')] - \frac{3(m+1)}{\mu' a_0'^2} \cdot [\Delta J' + (m+1)(\Theta + \Theta')] \\ \epsilon = A' a_0' n_0' \cdot \frac{\mu}{M} \\ \epsilon' = A a_0 n_0 \cdot \frac{\mu'}{M} \end{cases} \quad (2.28)$$

Il est plus simple de remarquer que Δn est la distance (en terme de fréquence) du système à la résonance exacte correspondant à $\dot{\phi}' = 0$, i.e. $\Delta n = (m+1)\delta n' - m\delta n$, où δn et $\delta n'$ sont les distances de μ et μ' à la valeur de référence n_0 et n_0' , respectivement. De manière similaire, $\Delta n + Dn_0$ est la distance du système à la résonance exacte $\dot{\phi} = 0$. De plus, à des facteurs multiplicatifs près, les paramètres ϵ et ϵ' sont les masses des satellites relatifs à la masse de la planète centrale.

Puisque $\Theta = \mu a_0^2 n_0 |z|^2 / 2$ et $\Theta' = \mu' a_0'^2 n_0' |z'|^2 / 2$, la variable Δn dépend uniquement de $|z|^2$, $|z'|^2$ et de facteurs constants. Par conséquent, les équations (2.27) représentent un système fermé qui décrit le comportement d'un système à deux degrés de liberté entièrement décrit par z et z' . Les conditions initiales fixent les valeurs de ΔJ et $\Delta J'$ via les équations (2.20). Par conséquent, la connaissance de $z = e \cdot \exp(i\phi)$ et $z' = e' \cdot \exp(i\phi')$ à n'importe quel moment (via les intégrations numériques des équations (2.27)) donnent e, ϕ, e', ϕ' . De plus, les équations (2.20) donnent ainsi $\Delta \Lambda$ et $\Delta \Lambda'$, et finalement $\xi = (a - a_0)/a_0$ et $\xi' = (a' - a_0')/a_0'$ via les équations (2.21).

Le système d'équations (2.27) est non-linéaire, car Δn dépend de $|z|^2$ et $|z'|^2$, et il est non intégrable.

Dans le cas où $Dn_0 = 0$ (i.e. quand les deux résonances $\dot{\phi} = 0$ et $\dot{\phi}' = 0$ se produisent à la même position. e.g. si $\dot{\omega}_s = \dot{\omega}'_s = 0$), et en posant $z_0 = -\epsilon z + \epsilon' z'$, nous obtenons :

$$\dot{z}_0 = i\Delta n \cdot z_0. \quad (2.29)$$

Ainsi :

$$|z_0|^2 = \epsilon^2(h^2 + k^2) + \epsilon'^2(h'^2 + k'^2) - 2\epsilon\epsilon'(hh' + kk') = \text{constant}. \quad (2.30)$$

Cette équation est équivalente à l'équation (2.15), qui représente la constante de Jacobi généralisée discutée dans la section (2.4.3). Par conséquent, nous retrouvons que le système à deux degrés de liberté (2.27) a une constante de mouvement en plus de l'Hamiltonien \mathcal{H}_4 (Eq. (2.22)), et il est donc intégrable.

2.5 Conclusion

J'ai mis en place un système simple (2.27) permettant de décrire le comportement des corps en résonance de premier ordre de moyen mouvement $m + 1 : m$. Il s'agit d'un système générique écrit en variables sans dimension. J'ai démontré que dans le cas où la perturbation due à l'aplatissement du corps central n'est pas prise en compte, nous pouvons nous ramener à un système intégrable. L'existence de la deuxième constante qui permet de vérifier ce résultat est donnée par l'équation (2.15). Cette nouvelle version généralisée de la constante de Jacobi permet en effet de décrire l'échange d'énergie entre les deux satellites. Le système (2.27) peut facilement être implémenté dans un intégrateur numérique, la fermeture de ce système étant assurée par la première équation du système (2.28). Il est paramétré par les quantités ϵ , ϵ' et D (2.28). Je ne vais explorer, dans le cadre de cette thèse, ce système, mais plutôt considérer le cas où $\epsilon = 0$ (cas restreint) qui va être utile pour l'étude des petits satellites de Saturne en résonance avec Mimas (voir les chapitres 4 et 5).

Chapitre 3

Construction du modèle analytique CoraLin pour l'étude générique des résonances de moyen mouvement dans le problème à trois corps restreint

Sommaire

3.1	Introduction	34
3.2	Formalisme Hamiltonien	35
3.3	Résonances de corotation et de Lindblad	36
3.3.1	Résonance de Lindblad	36
3.3.2	Résonance de Corotation	36
3.4	Le modèle CoraLin	37
3.5	Comportements asymptotiques	40
3.5.1	Résonances superposées	40
3.5.2	Résonances bien séparées	40
3.6	Cas intermédiaires	42
3.7	Exploration numérique du chaos	44
3.7.1	Méthode des sections de Poincaré	44
3.7.2	Indications numériques du chaos	45
3.8	Conclusion de la première partie	47

3.1 Introduction

Comme je l'ai mentionné dans le chapitre précédent, plusieurs satellites dans le système solaire sont en résonance de moyen mouvement. Le cas le plus simple est celui de deux satellites, dont l'un est de masse négligeable (particule test), orbitant dans le même plan, et proche d'une résonance de premier ordre de type $m + 1 : m$. Dans cette situation, deux angles critiques de résonances apparaissent, appelés respectivement : la Résonance de Corotation Excentrique (CER) et la Résonance de Lindblad Excentrique (LER). Comme je le préciserai plus loin, chacune de ces deux résonances a des effets physiques différents sur la particule test. Dans le cadre de ce chapitre, je présente une étude dynamique générique de ce couplage, que j'appelle le modèle 'CoraLin'. On y utilise des quantités sans dimension, pour décrire toutes les configurations possibles entre les satellites proches d'une résonance de premier ordre horizontale. Des explorations via la méthode des surfaces de section de Poincaré montrent comment la structure dynamique (régularité et irrégularité) change en fonction des configurations possibles. Cette étude a pour objectif de :

1) Distinguer clairement les effets des deux types de résonances associées à ϕ et ϕ' (voir l'équation 3.1). Quand $\mu_s \neq 0$ et $\mu'_s \neq 0$, les deux résonances ont, en effet, des comportements et des résultats symétriques sur les deux corps. Mais la symétrie est brisée lorsque $\mu_s = 0$, c'est le problème restreint à trois corps (RTBP). Ainsi, l'angle ϕ décrit la Résonance de Lindblad Excentrique (LER), et l'angle ϕ' décrit la Résonance de Corotation Excentrique (CER). Cette terminologie est d'origine galactique (Lindblad [1962]; Lin and Shu [1964]; Goldreich and Tremaine [1979a]). Comme je vais l'expliquer plus tard, les LERs excitent principalement les excentricités orbitales (en gardant le demi-grand axe largement constant), tandis que les CERs agissent principalement sur le demi-grand axe (en gardant les excentricités constantes).

2) Discuter de l'intégrabilité d'un système à deux degrés de liberté en présence de deux angles critiques de résonances ϕ et ϕ' . De nombreux travaux ont été réalisés dans le cas où $\mu_s = 0$ et $e' = 0$ (le problème restreint à trois corps circulaire et plan), dans lequel apparaît uniquement l'angle ϕ , ce qui réduit le problème à un système intégrable à un seul degré de liberté décrit par le Hamiltonien d'Andoyer classique donné par l'équation (3.11), (Henrard and Lamaitre [1983]; Ferraz-Mello [1985]; Ferraz-Mello [2007]). Le problème dans lequel les deux angles ϕ et ϕ' sont présents a été traité par Sessin and Ferraz-Mello [1984] dans le cas Képlérien, c'est-à-dire, avec un potentiel central $\propto -GM_p/r$, où G est la constante de gravitation et r est la distance du satellite de M_p , ainsi que dans le cas où $\mu_s \neq 0$ et $\mu'_s \neq 0$. Ces auteurs montrent que le système à deux degrés de liberté est intégrable. Plus précisément, ils montrent que le problème peut être réduit à un système à un seul degré de liberté décrit encore une fois par le Hamiltonien d'Andoyer.

3) Traiter le problème restreint ($\mu_s = 0$) sous les hypothèses décrites précédemment, le modèle que j'ai construit dépend uniquement de deux paramètres sans dimension : la distance D entre les deux résonances et le paramètre ϵ_L qui dépend à la fois de la masse et l'excentricité orbitale de μ'_s , ce qui me permet d'étudier le problème de manière générique. Ainsi, la problème est intégrable si $D = 0$. Je mets en évidence numériquement l'apparition de larges régions chaotiques pour des petites valeurs de D . Pour des grandes valeurs de D , le système tend encore une fois à un système intégrable que j'ai résolu en utilisant les arguments d'invariants adiabatiques.

Ce travail est applicable dans le cas général à plusieurs problèmes impliquant les an-

neaux, les satellites et les planètes extra-solaires. Cette étude complète et généralise des travaux entrepris dans des contextes spécifiques, par exemple par [Goldreich et al. \[1986\]](#) et [Porco \[1991\]](#), ont proposé un modèle pour expliquer la stabilité des anneaux incomplets (arcs) de Neptune en étudiant les effets combinés des résonances de Lindblad et de corotation. Plus récemment, [Cooper et al. \[2008\]](#), [Hedman et al. \[2009\]](#) et [Hedman et al. \[2010\]](#) ont fait une étude astrométrique du mouvement des petits satellites saturniens Anthée, Aegaeon et Méthone qui sont capturés en résonance de corotation avec Mimas, tout en étant fortement perturbés par la résonance de Lindblad.

3.2 Formalisme Hamiltonien

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, près d'une résonance, la dynamique des satellites est décrite par un système à deux degrés de liberté avec deux angles critiques de résonance ϕ et ϕ' :

$$\begin{aligned}\phi &= (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi \\ \phi' &= (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'\end{aligned}\quad (3.1)$$

Dans le cas où $\mu_s = 0$, les actions qui décrivent le mouvement de μ_s sont exprimées en terme d'unité de masse. Ainsi, le Hamiltonien \mathcal{H}_1 (2.3) doit être divisé par μ_s . Le nouvel Hamiltonien n'est plus autonome, puisque λ' et ϖ' dépendent du temps de manière linéaire : $\lambda' = n't$ et $\varpi' = \dot{\omega}'_s t$. De ceci résulte le Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}_5 = -\frac{(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu' A \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Lambda}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu' A' e' \cdot \cos(\phi') - \dot{\omega}_s \Gamma + n' \Lambda' - \dot{\omega}'_s \Gamma', \quad (3.2)$$

où les variables action-angle sont maintenant :

$$\begin{aligned}\lambda &\longleftrightarrow \Lambda = \sqrt{\mathcal{G}Ma} \\ -\varpi &\longleftrightarrow \Gamma = \sqrt{\mathcal{G}Ma}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx e^2 \sqrt{\mathcal{G}Ma}/2 \\ \lambda' = n't &\longleftrightarrow \Lambda' = \sqrt{\mathcal{G}M'a'} \\ -\varpi' = -\dot{\omega}'_s t &\longleftrightarrow \Gamma' = \sqrt{\mathcal{G}M'a'}(1 - \sqrt{1 - e'^2}) \approx e'^2 \sqrt{\mathcal{G}M'a'}/2\end{aligned}\quad (3.3)$$

Ainsi, le traitement de \mathcal{H}_5 se fait de la même manière que pour le cas général précédemment décrit, c'est-à-dire, en définissant les mêmes transformations que dans les équations (2.5). Une fois encore, le Hamiltonien est réduit à celui d'un système à deux degrés de liberté qui est en général non intégrable, sauf pour le cas particulier du potentiel képlérien central $-\mathcal{G}M_p/r$. Dans le cas où ξ' et \mathbf{e}' sont constants, alors l'équation Eq. (2.15) peut être réécrite :

$$\boxed{J_{c,\text{relat}} = \xi + m \left(\mathbf{e} - \frac{A'}{A} \mathbf{e}' \right)^2 = \text{constant},} \quad (3.4)$$

ce qui généralise l'expression de la constante de Jacobi $\xi + me^2$ associée à μ_s , où le vecteur excentricité \mathbf{e} a été remplacé par le vecteur excentricité relative :

$$\mathbf{e}_{\text{relat}} = \mathbf{e} - \frac{A'}{A} \mathbf{e}'. \quad (3.5)$$

Physiquement, cela signifie que, avec l'approximation au premier ordre utilisée ici, l'échange de l'énergie entre le satellite et la particule (décrit par ξ) dépend uniquement du vecteur excentricité relative \mathbf{e}_{rel} .

Finalement, les deux équations (2.15) et (3.4) montrent comment la constante de Jacobi est détruite quand le potentiel central est différent du potentiel képlérien $-\mathcal{G}M_p/r$. En fait, le

potentiel général induit un taux de précession séculaire différentiel $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s$ entre les vecteurs \mathbf{e} et \mathbf{e}' , ces taux de précession causent un décalage de l'angle entre \mathbf{e} et \mathbf{e}' , qui est imposé de l'extérieur, c'est-à-dire, indépendamment des interactions entre μ_s et μ'_s .

Je suppose que tant que $\dot{\omega}_s \neq \dot{\omega}'_s$, les Hamiltoniens \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_5 (Eqs. (2.3) et (3.2)) sont non-intégrables, comme je l'ai montré dans la figure (3.6). La confirmation de ces résultats est faite numériquement.

3.3 Résonances de corotation et de Lindblad

3.3.1 Résonance de Lindblad

Les équations (2.10) et (2.11) montrent que le terme $A' \sin(\phi')$ modifie la quantité de Jacobi de μ_s et l'action radiale Γ' de μ'_s . Au contraire, le terme $A \sin(\phi)$ modifie la quantité de Jacobi de μ'_s et l'action radiale Γ de μ_s . En prenant $\mu_s = 0$, la résonance associée à ϕ est appelée la Résonance de Lindblad Excentrique (LER), et celle associée à ϕ' est appelée la Résonance de Corotation Excentrique (CER)¹. Si je considère la LER isolée (i.e. en prenant $A' = 0$), alors $\xi + me^2$ est constant. En utilisant $\xi = (a - a_0)/a_0$, cela mène à

$$\frac{\delta a}{a} = -2me^2 \cdot \frac{\delta e}{e}. \quad (3.6)$$

Cette équation montre que la LER excite principalement l'excentricité orbitale de μ_s , et beaucoup moins son demi-grand axe. On peut comprendre cela physiquement en notant que la LER correspond à $(m+1)n' - mn - \dot{\omega}_s = 0$, i.e. $\kappa = (m+1)(n - n')$, où $\kappa = n - \dot{\omega}_s$ est la fréquence d'oscillation épicyclique de la particule. La quantité $n - n'$ est la fréquence synodique, i.e. la fréquence à laquelle le satellite et la particule sont en conjonction. Ainsi, $n - n'$ est la fréquence à laquelle μ'_s perturbe μ_s par impulsions périodiques dans la direction *radiale*. Pour $\kappa = (m+1)(n - n')$, ces impulsions excitent de manière résonante l'action radiale de μ_s (Eq. (2.11)). D'autre part, à cause du fait qu'elles sont essentiellement radiales, ces impulsions conservent l'énergie de la particule, et ainsi, leurs demi-grands axes, comme montré dans l'équation (3.6).

3.3.2 Résonance de Corotation

Inversement, si je considère la CER uniquement en posant $A = 0$, l'action radiale $\Gamma \propto e^2 a^{1/2}$ est constante. Cela impose

$$\frac{\delta e}{e} = -\frac{\delta a}{4a}. \quad (3.7)$$

La comparaison des équations (3.6) et (3.7) montrent que la résonance de corotation affecte moins l'excentricité orbitale de la particule contrairement à la résonance de Lindblad. On peut comprendre cela physiquement en notant que la CER correspond à $(m+1)n' - mn - \dot{\omega}'_s = 0$, i.e. $n = n' + \kappa'/m$, où $\kappa' = n' - \dot{\omega}'_s$ est l'oscillation épicyclique du satellite μ' .

Ainsi, le moyen mouvement de μ_s concorde avec le "pattern speed" $n_{\text{pattern}} = n' + \kappa'/m$ de l'une des harmoniques du potentiel perturbateur de μ'_s , d'où le nom "corotation". Ces équations sont en effet identiques à celles des résonances de corotation co-orbitales classiques 1 : 1, mais celles-ci se produisent à un rayon différent de a' .

Notons en particulier, que la CER module lentement le potentiel *azimutal* agissant sur la particule car : $\mathcal{G}\mu\mu'e'A' \cdot \cos(\phi') \approx \mathcal{G}\mu\mu'e'A' \cdot \cos[m(\theta - n_{\text{pattern}}t)]$, où θ est la longitude vraie de μ_s . Ce potentiel périodique crée une petite et lente variation azimutale sur la particule qui

1. Des résonances de Lindblad et de corotation associées aux inclinaisons orbitales sont aussi possibles, c'est pour cette raison qu'on utilise ici le terme "Excentrique".

modifie légèrement son demi-grand axe. Comme a varie légèrement, l'action radiale de μ_s , $\Gamma \propto e^2 a^{1/2}$ est conservée comme on peut le voir dans l'équation (3.7). Plus précisément, la conservation est actuellement une conservation adiabatique de l'action Γ associée au mouvement rapide et radial de la particule $e^2 a^{1/2}$, lorsque l'action azimutale $\sqrt{\mathcal{G}M_p a}$ varie lentement. On peut trouver plus de discussion sur la conservation adiabatique de $e^2 a^{1/2}$ dans des contextes différents dans [Fleming and Hamilton \[2000\]](#) et [Sicardy and Dubois \[2003\]](#).

Si les effets séparés de la LER et de la CER sont facilement décrits en terme d'un système à un seul degré de liberté, le problème devient en revanche plus complexe quand ces deux résonances sont couplées. La section suivante décrit les équations du mouvement qui permettent d'explorer cette complexité.

3.4 Le modèle CoraLin

Le cas restreint $\mu_s = 0$ peut être étudié via le Hamiltonien \mathcal{H}_5 (Eq. (3.2)), en utilisant les mêmes développements que le chapitre précédent (2.18) et (2.20). La mise en place des équations du mouvement provenant de \mathcal{H}_5 est standard, voir [Murray and Dermott \[1999\]](#). Près de a_0 , les actions Λ et J peuvent être écrites telles que : $\Lambda = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$ et $J = J_0 + \Delta J$, respectivement, où $\Delta J = \Delta\Lambda + m(\Theta + \Theta')$ est la constante du mouvement. Le Hamiltonien \mathcal{H}_2 est ainsi développé au deuxième ordre en $\Delta\Lambda$, où l'approximation est valide près de a_0 .

À ce stade, il est plus pratique de considérer la constante de Jacobi $J_c = \Delta\Lambda + m\Gamma$ qui apparaît dans la première ligne dans le système (2.5), à partir de laquelle nous obtenons $J_c = \Delta J - m\Theta'$. Par conséquent, $\dot{J}_c = -m\dot{\Theta}' = m\partial\mathcal{H}_5/\partial\phi'$ et $\dot{\phi}' = -m\partial\mathcal{H}_5/\partial J_c$. Ce sont presque des équations Hamiltoniennes canoniques, mais pas tout à fait, à cause de l'apparition du facteur $-m$. Cela suggère de prendre ϕ' et J_c comme variables conjuguées, après avoir défini l'action J_c et l'Hamiltonien \mathcal{H}_5 à des facteurs multiplicatifs et additifs près. Le choix de ces facteurs est arbitraire, je les ai choisis de manière à simplifier le plus possible l'expression de \mathcal{H}_5 , pour obtenir le Hamiltonien \mathcal{H} (3.9). De plus, comme la particule reste près du rayon de la résonance de corotation a_0 , il est plus judicieux d'utiliser une nouvelle échelle de temps $\tau = n_c t$, où n_c est la fréquence de libration de ϕ_c près du point fixe de la corotation, en l'absence de la résonance de Lindblad.

Comme discuté dans la section (3.3), les résonances associées à ϕ et ϕ' peuvent être séparées en LER et CER, respectivement. Pour marquer cette distinction, je vais utiliser à partir de maintenant les variables conjuguées $(\phi_c, \phi_L, J_c, J_L)$ au lieu de $(\phi', \phi, \Theta', \Theta)$. Les actions J_c (proportionnelle à $\Delta\Lambda + m\Gamma$) et J_L (proportionnelle à Θ) sont définies dans la table 3.1. De plus, les angles ϕ_c et ϕ_L sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \phi_c = +\phi' + \pi & = +(m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' + \pi & \text{if } m > 0 \text{ } (\mu \text{ à l'intérieur de } \mu') \\ \phi_c = +\phi' & = +(m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' & \text{if } m < 0 \text{ } (\mu \text{ à l'extérieur de } \mu') \\ \phi_L = -\phi & = -(m+1)\lambda' + m\lambda + \varpi \end{cases} \quad (3.8)$$

Le choix particulier pour ϕ_c est motivé par le fait qu'il permet une forme unique de \mathcal{H} . Il évite en particulier un facteur ± 1 près devant le terme $\cos(\phi_c)$ dans l'équation (3.9). Avec cette convention, le point stable de la corotation stable est toujours à $\phi_c = 0$. De plus, le signe moins utilisé ici pour définir ϕ_L à partir de ϕ provient du fait que je veux retrouver les équations canoniques : $\dot{h} = -\partial\mathcal{H}/\partial k$ et $\dot{k} = +\partial\mathcal{H}/\partial h$ avec les bons signes dans le système (3.10), avec $h = \sqrt{2J_L} \cos(\phi_L)$ et $k = \sqrt{2J_L} \sin(\phi_L)$.

En utilisant les équations $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = 0$ et $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}_s = \dot{\varpi}'_s - \dot{\varpi}_s$ (voir la section (2.3.2)), et les quantités D , ϵ_L , J_c et J_L dans la table 3.1, j'obtiens finalement

n_c	$\left(3m^2 a_0 A e' \frac{\mu'}{M}\right)^{1/2} \cdot n_0$
D	$\frac{\tilde{\omega}'_s - \tilde{\omega}_s}{n_c}$
ϵ_L	$\left(\frac{a_0 \mu'}{3m^2 M}\right)^{1/4} \cdot \frac{A}{(A' e')^{3/4}}$
J_c	$\text{sgn}(m) \left(\frac{3}{4a_0 A' } \frac{M}{\mu' e'}\right)^{1/2} \cdot (\xi + me^2)$
$\sqrt{2J_L}$	$\left(\frac{3m^2}{a_0 A' } \frac{M}{\mu' e'}\right)^{1/4} \cdot e$

Table 3.1 – Valeurs de D , ϵ_L et H dans le modèle CoraLin (Eqs. (3.10)). Ces paramètres dépendent des éléments orbitaux des particules et la masse du satellite perturbateur. Notons que pour les particules internes (resp. externes) D est positif (resp. négatif) et ϵ_L est négatif (positif).

le Hamiltonien suivant avec deux paires de variables conjuguées (ϕ_c, J_c) et (ϕ_L, J_L) :

$$\mathcal{H} = \frac{(J_c - J_L)^2}{2} - DJ_L - \cos(\phi_c) - \epsilon_L h. \quad (3.9)$$

Les équations du mouvement associées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ_c}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_c} = -\sin(\phi_c) \\ \frac{d\phi_c}{d\tau} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_c} = J_c - [J_L] \\ \frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = +([J_c] - J_L + D)k \\ \frac{dk}{d\tau} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = -([J_c] - J_L + D)h - \epsilon_L, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où $\tau = n_c t$ et $J_L = (h^2 + k^2)/2$. Notons qu'à partir des équations (2.2) et de la table (3.1) que $\text{sgn}(\epsilon_L) = \text{sgn}(m)$.

J'appelle ce système d'équations : le modèle "CoraLin", puisqu'il décrit le mouvement d'une particule près des résonances de corotation et de Lindblad. Ce modèle est complètement adimensionnel et peut être utilisé de manière générique pour analyser le couplage entre les deux résonances. De ce fait, le système est paramétré par deux quantités : D , qui mesure la distance entre les deux résonances, et ϵ_L qui mesure le forçage de l'excentricité orbitale de la particule par le satellite. Le paramètre ϵ_L contient l'excentricité orbitale du satellite. Finalement, l'échelle de temps τ est paramétrée par la quantité n_c , voir la table (3.1).

Le couplage entre les deux résonances est représenté par les termes entre crochets dans le système d'équations (3.10). À savoir, (i) Le terme J_L dans la seconde équation, nous renseigne sur la manière dont l'excentricité orbitale de la particule (principalement forcée par la résonance de Lindblad) perturbe le mouvement d'un pendule simple et (ii) Le terme J_c dans les troisième et quatrième équations, nous informe sur la manière dont la résonance de corotation affecte le mouvement de (h, k) .

Si l'on supprime le terme $\cos(\phi_c)$ dans \mathcal{H} dans le but de garder uniquement la LER, alors le Hamiltonien prend cette forme :

$$\mathcal{H}_{\text{And}} = J_L^2/2 - (J_c + D)J_L - \epsilon_L h, \quad (3.11)$$

où J_c est maintenant un paramètre constant. C'est le Hamiltonien classique d'Andoyer qui a été largement étudié lors des deux dernières décennies, voir par exemple [Henrard and Lemaître](#)

[1983], Ferraz-Mello [1985] et Ferraz-Mello [2007]. D'autre part, si on prend $\epsilon_L = 0$, alors J_L est constant, \mathcal{H} est réduit au Hamiltonien d'un pendule simple :

$$\mathcal{H}_{\text{pen}} = \chi^2/2 - \cos(\phi_c), \quad (3.12)$$

où on définit $\chi = J_c - J_L$. Ainsi, nous obtenons $\ddot{\phi}_c = -\sin(\phi_c)$, qui décrit le mouvement oscillatoire stable de la particule autour du point fixe de la corotation à $\phi_c = 0$. Notons que dans ce cas, J_L est constant, cela signifie que l'excentricité orbitale de la particule est conservée, comme montré dans l'équation (3.7), où $\delta a \ll a$

Une forme alternative du système (3.10), sans utilisation des variables conjuguées est :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -\sin(\phi_c) - J_L \\ \dot{\phi}_c = \chi \\ \dot{h} = -(\chi + D)k \\ \dot{k} = -(\chi + D)h - \epsilon_L. \end{cases} \quad (3.13)$$

où les points désignent la dérivée par rapport au temps $\tau = n_c t$.

Si le mouvement de corotation de la particule n'est pas perturbé par la LER, alors la zone de libration de ϕ_c a une largeur de $\Delta\chi = \pm 2$, voir Fig. (3.1). La LER exacte se produit à $\chi = -D$. Par conséquent, les deux résonances se réduisent en une seule pour $D = 0$, et sont bien séparées lorsque $|D|$ est largement supérieur à 2. J'explore maintenant la dynamique d'un système pour des valeurs intermédiaires de D , montrant que d'importantes zones chaotiques apparaissent dans l'espace des phases pour ces cas intermédiaires.

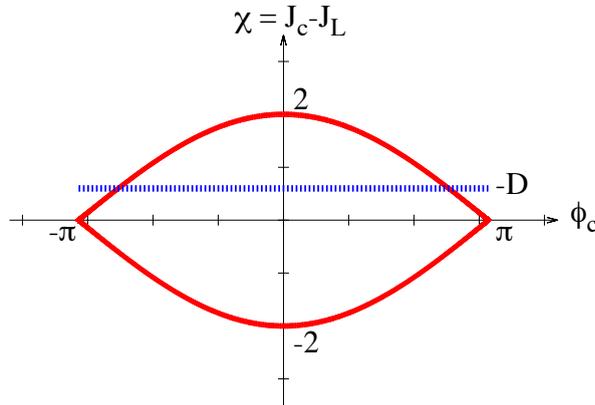


Figure 3.1 – Schéma du modèle CoraLin. En l'absence de la résonance de Lindblad (LER), le mouvement pendulaire forcé par la résonance de corotation (CER) est enfermé dans la courbe séparatrice rouge, dont la largeur est donnée par $\Delta\chi = \pm 2$. En l'absence de la CER, le rayon de la LER est à $\chi = -D$ (ligne bleue en pointillés). Le couplage entre les deux résonances dépend fortement de D , voir Fig. (3.6).

3.5 Comportements asymptotiques

3.5.1 Résonances superposées

Si $D = 0$, la CER et la LER sont superposées, et le problème est intégrable (Section 2.4.3). Les surfaces de Poincaré représentées pour $k = 0$ sont alors régulières, et peuvent être obtenues analytiquement en notant que la deuxième constante du mouvement dans (3.4) peut être réécrite :

$$S = J_c + \frac{\sqrt{2J_L}}{\epsilon_L} \cos(\phi_c - \phi_L) \quad (3.14)$$

En utilisant les équations (3.9) et (3.14), et en prenant $k = 0$, nous obtenons :

$$\chi^4 - 4H\chi^2 + 8\epsilon_L^2\chi - 4\cos^2(\phi_c) + 4H^2 = 8\epsilon_L^2S, \quad (3.15)$$

où H est la valeur du Hamiltonien \mathcal{H} . Pour H fixe, les surfaces de section sont les contours de niveau définis par Eq. (3.15) pour différentes valeurs de S . Notons que ces contours sont π -périodiques, et non pas 2π -périodiques. Les points fixes sont donnés par les points singuliers de cette surface :

$$\begin{cases} \chi^3 - 2H\chi + 2\epsilon_L^2 = 0 \\ \phi_c = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le nombre de solutions en χ dépend du signe du discriminant $\Delta = 32H^3 - 108\epsilon_L^4$. Il existe donc des valeurs critiques $H_0 = (27\epsilon_L^4/8)^{1/3}$: pour $H < H_0$, le système a une seule solution en χ :

$$\chi_0 = \left(\frac{2\epsilon_L^2 + \sqrt{-\Delta/27}}{2} \right)^{1/3} + \left(\frac{2\epsilon_L^2 - \sqrt{-\Delta/27}}{2} \right)^{1/3}$$

Pour $H > H_0$, une bifurcation de type "pitchfork" se produit et donne naissance à trois solutions :

$$\chi_p = 2\sqrt{\frac{-2H}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\epsilon_L^2 \sqrt{27/8H^3} \right) + \frac{2p\pi}{3} \right]$$

avec $p \in \{0, 1, 2\}$.

Des exemples de surfaces de sections pour $H < H_0$ et $H > H_0$ sont donnés dans la figure (3.2). Notons que les orbites proches des points elliptiques fixes *ne correspondent pas* aux librations de ϕ_c (i.e. aux particules capturées dans la CER). Pour l'instant, le point fixe proche de $(\phi_c = 0, \chi = 0)$ dans la figure à gauche correspond à la trajectoire représentée en bleu, pour laquelle ϕ_c est en circulation.

3.5.2 Résonances bien séparées

Nous considérons la situation dans laquelle les CERs et LERs sont bien séparées, $|D| \gg 2$. Deux cas sont discutés :

(a) La particule est capturée dans la région de corotation. Dans ce cas, les variations de (h, k) dans les systèmes (3.10) et (3.13) sont plus rapides que les variations de (J_c, ϕ_c) . Par conséquent, l'action $\oint hdk$ est adiabatiquement conservée. Si le vecteur (h, k) décrit essentiellement des cercles centrés sur la valeur forcée $(-\epsilon_L/(\chi + D), 0)$, cela signifie que (h, k) varie rapidement sur un cercle de rayon constant, dont le centre se déplace lentement le long de l'axe Oh , voir (Fig. 3.3). En particulier, si (h, k) commence à la valeur forcée $(-\epsilon_L/(\chi + D), 0)$, alors, il va y rester tant que χ varie lentement. En d'autres termes, l'excentricité orbitale de la particule va s'ajuster de manière permanente pour que $e = |\epsilon_L/(\chi + D)|$ avec la variation de χ .

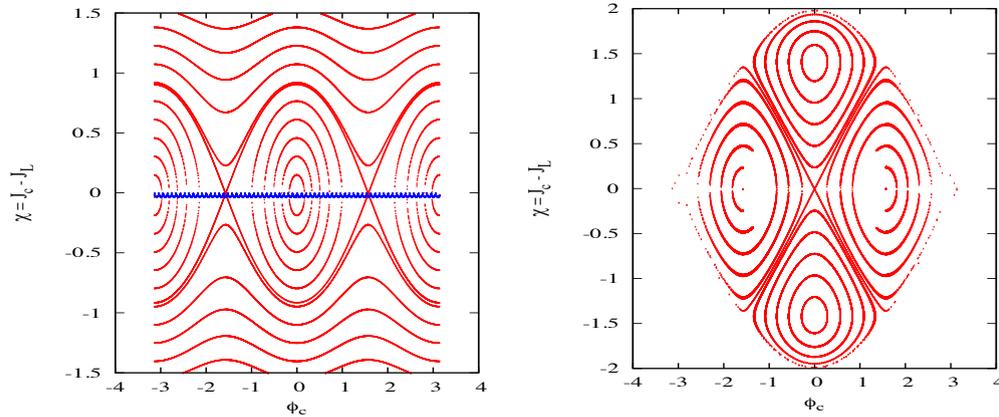


Figure 3.2 – Portraits de phase du système (3.10) quand les résonances de corotation et de Lindblad (CER et LER respectivement) sont superposées, i.e. $D = 0$. Nous montrons ici les surfaces de Poincaré correspondantes à $k = 0$, avec des valeurs prescrites du Hamiltonien \mathcal{H} , et des valeurs différentes de la deuxième constante du mouvement S (Eq. (3.14)). Pour les deux figures, $\epsilon_L = -0.123$, ce qui donne une valeur critique de $H_0 = (27\epsilon_L^4/8)^{1/3} = 0.091$. Figure à gauche : $H = -1 < H_0$, il y a une solution unique en χ pour les points fixes (la trajectoire bleue correspond à ce point fixe de la surface de section). Figure à droite : $H = 1 > H_0$, il y a trois solutions en χ pour les points fixes.

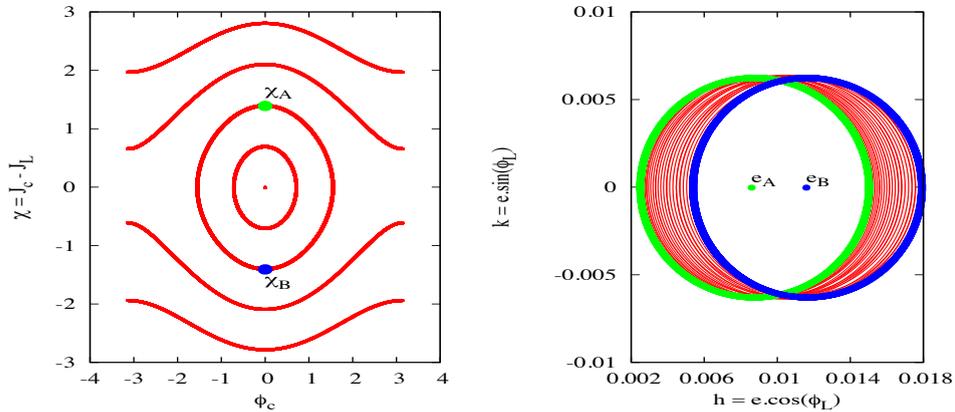


Figure 3.3 – Gauche : Surfaces de Poincaré $k = 0$ du système (3.10) avec $D = 10$ (la résonance de Lindblad est à $\chi = -D = -10$, loin du rayon de la corotation) et $\epsilon_L = -0.1$. Le portrait de phase de la CER est très proche de celui d'un simple pendule. Droite : le vecteur (h, k) décrit rapidement un cercle centré sur la valeur forcée ($h = e_f = |\epsilon_L/(\chi + D)|, k = 0$) qui se déplace lentement avec la variation de χ (cercles rouges). Quand $\chi = 1.4$ (points verts à gauche), alors $e_f = e_A = (0.008, 0)$, correspond à l'orbite verte à droite. Quand $\chi = -1.4$ (points bleus à gauche), alors $e_f = e_B = (0.016, 0)$, correspond à l'orbite bleue à droite.

(b) La particule est capturée dans la résonance de Lindblad. La situation est maintenant inversée : (h, k) varie lentement avec l'oscillation rapide de J_c et ϕ_c . Ainsi l'action $\int J_c d\phi_c$

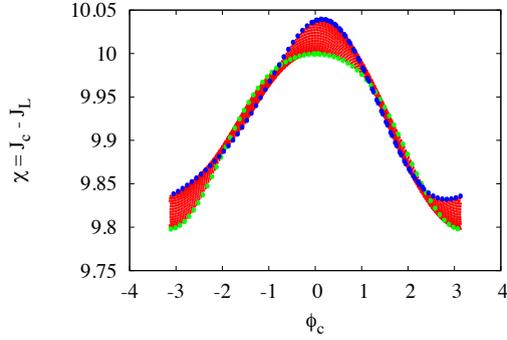


Figure 3.4 – Surfaces de Poincaré quand $k = 0$ du système (3.10) avec $D = 10$ et $\epsilon_L = -0.1$. La particule est maintenant proche de la résonance de Lindblad, ϕ_c et χ varient rapidement par comparaison à h et k , en gardant l'action $\int J_c d\phi_c$ adiabatiquement constante.

est conservée adiabatiquement, de ce fait le système :

$$\begin{cases} \dot{J}_c = -\sin(\phi_c) \\ \dot{\phi}_c = J_c - J_L \end{cases} \quad (3.16)$$

correspond à un pendule simple avec une variation lente du paramètre J_L . Ainsi, la particule va librer autour de point ($J_c = J_L, \phi_c = 0$) variant lentement, tout en conservant adiabatiquement $\int J_c d\phi_c$, voir la figure (3.4).

3.6 Cas intermédiaires

Afin de mieux préciser la problématique, j'ai réécrit le Hamiltonien (3.9) dans le nouveau système de variables canoniques :

$$\begin{cases} \theta = \phi_c, & \Theta = J_c - J_L \\ \phi = \phi_c - \phi_L, & \Phi = J_L \end{cases} \quad (3.17)$$

J'obtiens ainsi :

$$\mathcal{H} = \frac{\Theta^2}{2} - D\Phi - \cos(\theta) - \epsilon_L \sqrt{2\Theta} \cos(\theta - \phi). \quad (3.18)$$

Un nouveau changement de variables :

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{\epsilon_L} + \sqrt{2\Phi} \cos(\phi) = \sqrt{2A} \cos(\alpha), \\ \eta = \sqrt{2\Phi} \sin(\phi) = \sqrt{2A} \sin(\alpha), \end{cases} \quad (3.19)$$

permet d'écrire l'action Φ sous cette forme : $\Phi = A - \frac{\sqrt{2\Phi}}{\epsilon_L} \cos \phi$

Finalement, si l'on pose :

$$\begin{cases} \theta' = \theta, & \Theta' = \Theta + A \\ \alpha' = \alpha - \theta, & A' = A \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous obtenons :

$$\mathcal{H}_D = \underbrace{\frac{1}{2}(\Theta' - A')^2 - \epsilon_L \sqrt{2\Phi} \cos \alpha'}_{H_A = H_A(A', \alpha') : \text{Hamiltonien d'Andoyer}} + D \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2A'}}{\epsilon_L} \cos(\alpha' + \theta') - A' \right)}_{\text{Partie perturbatrice}}. \quad (3.21)$$

Il est évident qu'il s'agit du même Hamiltonien que celui de l'équation (3.9), et contenant toute l'information dynamique de ce dernier. Mais cette écriture nous permet de bien remarquer que ce Hamiltonien peut être écrit sous forme de la somme d'un Hamiltonien intégrable et d'une partie perturbatrice proportionnelle à D . En effet, si $D = 0$, je retrouve un Hamiltonien (le Hamiltonien d'Andoyer) à un seul degré de liberté paramétré par la constante de Jacobi modifiée. Voir la figure (3.5), notons dans cette figure que $S = \Theta'$ et $h = \sqrt{2\Phi} \cos \alpha'$ et rappelons que $\Theta' = J$, il s'agit de la constante de Jacobi modifiée obtenue par l'équation (3.14).

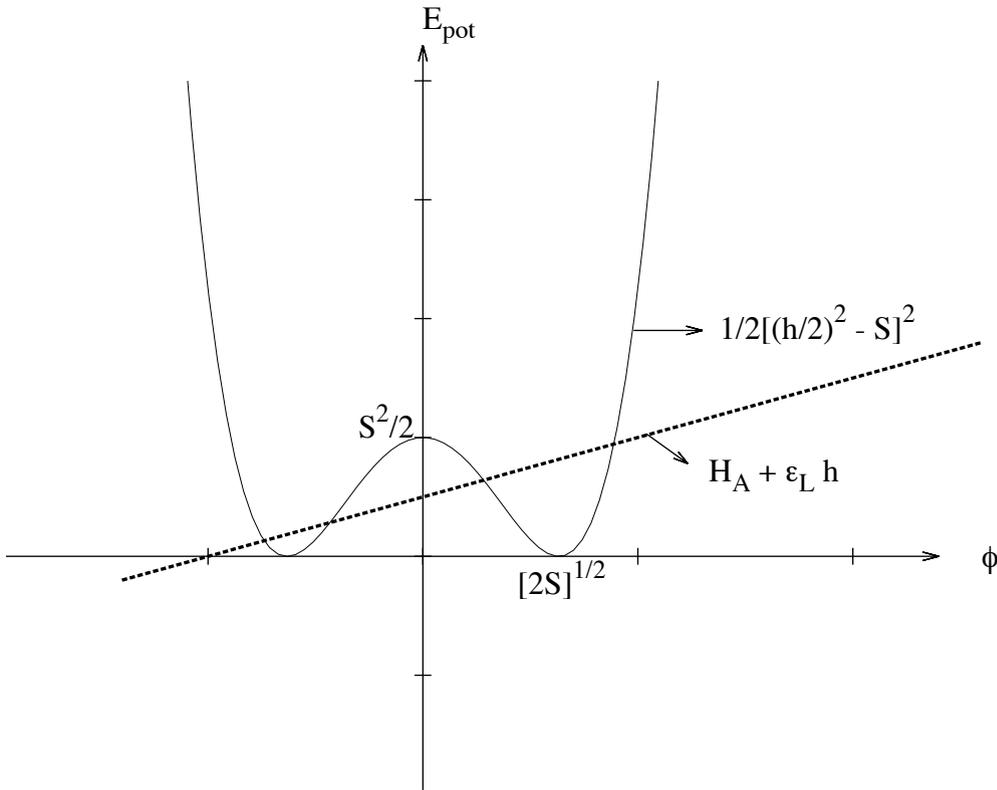


Figure 3.5 – Système intégrable correspondant au Hamiltonien d'Andoyer.

En revanche, si $D \neq 0$, la partie intégrable est perturbée par le deuxième terme de droite, et c'est uniquement dans ce cas de figure, qu'on peut commencer à parler de la non-intégrabilité.

Une explication possible de l'apparition du chaos est que pour des valeurs de D petites, la partie perturbatrice (le terme en $\cos(\alpha' + \theta')$), varie très lentement par rapport à la partie intégrable, ce qui fait apparaître le chaos via des variations importantes de Θ' . En revanche, pour de grandes valeurs de D , ces mêmes termes en $\cos(\varphi + \phi_c)$ varient très rapidement, ce qui influe très peu le système non perturbé. Dans ce sens, de futurs travaux analytiques seront réalisés pour vérifier cette explication et prévoir analytiquement l'apparition du chaos.

3.7 Exploration numérique du chaos

3.7.1 Méthode des sections de Poincaré

Cette méthode consiste à reporter les points de la trajectoire à chaque fois que l'une des variables $x=(x_1, x_2, x_3, x_4) = (J_c, \phi_c, h, k)$ est telle que $x_i = 0$ et $\dot{x}_i > 0$. Dans ce cas d'étude, je choisis $k = 0$, et le Hamiltonien s'écrit comme suit :

$$\mathcal{H}_{k_0} = \frac{1}{2}[J_c - \frac{h^2}{2}] - D\frac{h^2}{2} - \cos(\phi_c) - \epsilon_L h \quad (3.22)$$

La procédure consiste à choisir ϕ_c et h et à calculer ensuite J_c par :

$$J_c = \frac{h^2}{2} \pm \sqrt{2H + Dh^2 + 2\cos(\phi_c) + 2\epsilon_L h} \quad (3.23)$$

On peut également dès le départ imposer : $\chi = J_c - \frac{h^2}{2}$, et résoudre l'équation de deuxième degré en h :

$$Dh^2 + 2\epsilon_L h + 2H + 2\cos(\phi_c) - \chi^2 = 0, \quad (3.24)$$

La résolution de cette équation impose l'existence de zones interdites données par :

$$\begin{cases} \chi^2 > 2H + 2\cos(\phi_c) - \frac{\epsilon_L^2}{D}, & D > 0 \\ \chi^2 < 2H + 2\cos(\phi_c) - \frac{\epsilon_L^2}{D}, & D < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour cette étude, j'ai exploré numériquement la transition du cas intégrable $D = 0$ au régime chaotique pour $D \sim \mathcal{O}(1)$. Je considère le cas illustratif où $\epsilon_L = -0.1$ et $H = -0.5$. Ce choix est motivé par le fait que ce sont les valeurs typiques pour les petits satellites saturniens Anthée, Méthone et Aegaeon, voir la table (4.1).

La figure (3.6) montre que le portrait de phase du système (3.10) est rapidement envahi par une région chaotique pour des valeurs de D aussi petites que ~ 0.01 . Avec l'augmentation de D , la région régulière centrale augmente, ce qui correspond à la capture de la particule dans le site de la corotation, i.e. à une libration de l'angle critique ϕ_c . C'est uniquement pour des valeurs de $|D|$ significativement grandes par rapport à 2, que le système retrouve sa régularité, ainsi les orbites peuvent être décrites en utilisant les arguments d'invariance adiabatique, voir la section (3.5). En effet, la figure (3.6) montre que pour $0 < |D| < 2$ le mouvement de la particule près d'une CER est dominé par du chaos. Cela est vrai pour les satellites saturniens que nous allons examiner dans les chapitres suivants.

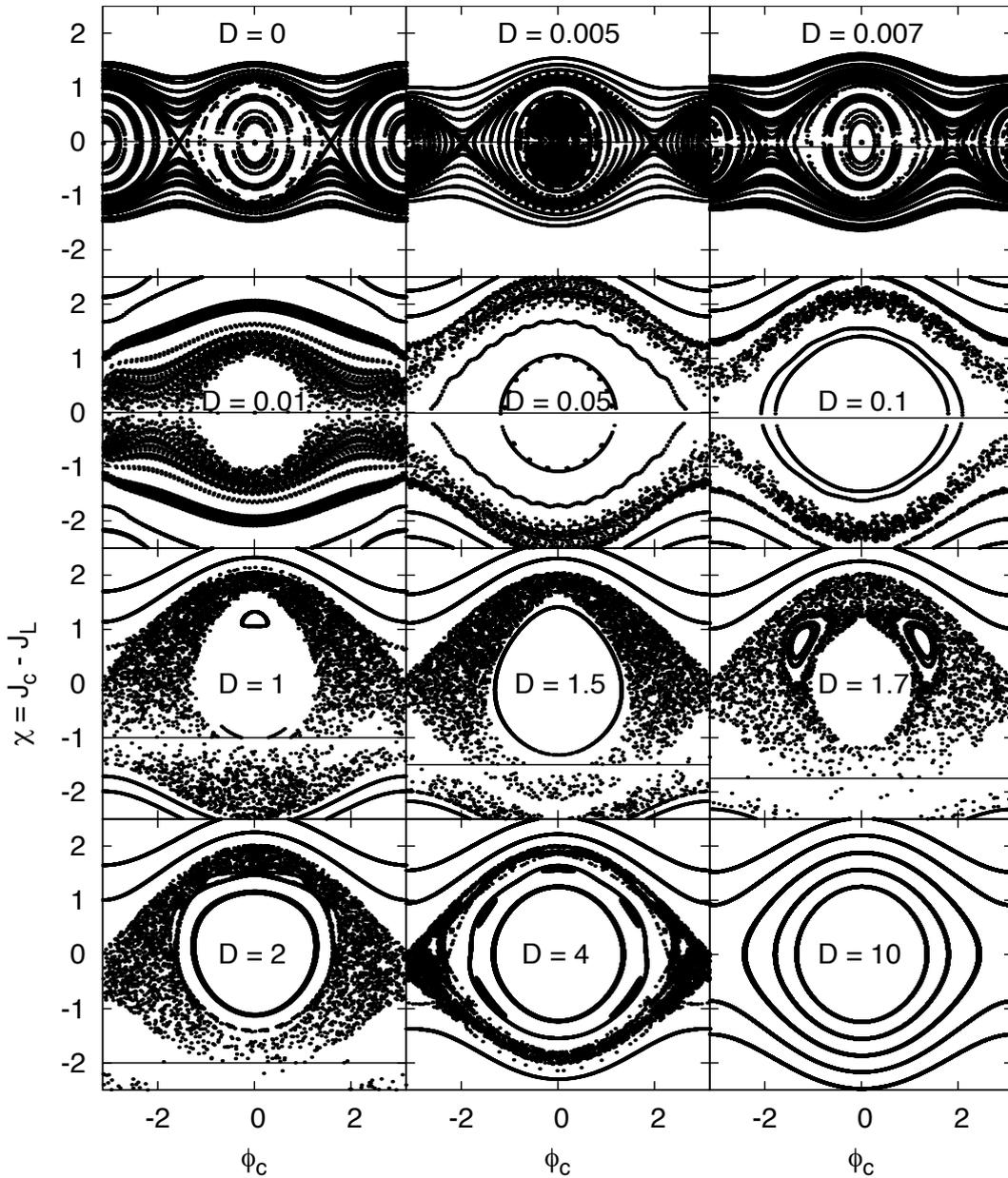


Figure 3.6 – Sections de Poincaré ($k = 0$) du système (3.10) avec $\epsilon_L = -0.1$ et $H = -0.5$ pour douze valeurs différentes de D . Chaque portrait de phase est obtenu quand $k = 0$ pour seize trajectoires différentes avec la même valeur pour H . Quand $D = 0$ et $D = 10$, les trajectoires sont régulières. Pour des cas intermédiaires, le chaos est très répandu.

3.7.2 Indications numériques du chaos

Il existe plusieurs manières de détecter le chaos, nous avons choisi d'utiliser la méthode des indicateurs rapides de Lyapunov (FLI : Fast Lyapunov Indicator) détaillée par exemple dans [Froeschlé et al. \[1997\]](#), [Fouchard et al. \[2002\]](#) et [Morbiddelli \[2002\]](#). Cette méthode est basée sur l'idée que deux orbites régulières s'éloignent l'une de l'autre de manière linéaire avec le temps, alors que la divergence entre deux orbites irrégulières est exponentielle (Figure 3.7). Le calcul du FLI repose sur le fait qu'on s'intéresse à l'évolution de la norme du vecteur tangent

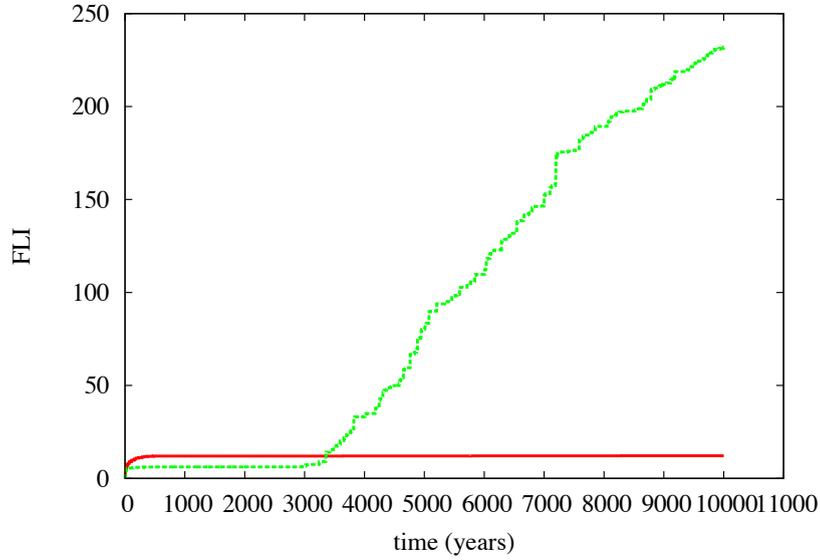


Figure 3.7 – Courbe rouge : FLI à $t = 1400$ ans d’une trajectoire régulière dont les paramètres utilisés sont $\epsilon_L = -0.1$ et $D = 0$. Courbe verte : FLI à $t = 1400$ ans d’une trajectoire chaotique dont les paramètres utilisés sont $\epsilon_L = -0.1$ et $D = 0.1$. Pour des orbites régulières la valeur du FLI à un temps suffisamment important est très petite (FLI = 12) par rapport à celle obtenue pour une orbite plus chaotique (FLI = 231).

δx de l’application F correspondant au modèle CoraLin (3.10) :

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4 \\ \dot{\mathbf{x}} = F(x) \text{ avec } x = (J_c, \phi_c, h, k) \end{cases} \quad (3.26)$$

La définition du FLI est donnée par :

$$FLI(t) = \log \|\delta x(t)\| \quad (3.27)$$

Les détails du calcul des FLI et leur implémentation numérique est détaillée dans [Fouchard et al. \[2002\]](#) et dans la thèse de Julien Frouard (IMCCE - 2010). Les valeurs des FLI représentent le degré de l’irrégularité de chacune des orbites. Je représente dans les figures (3.8) des cartes de FLI pour plusieurs valeurs de D et de ϵ_L . En fait l’utilisation des intégrations individuelles (à court ou à long terme) des satellites donnent des informations sur leurs orbites, mais pas sur le comportement au voisinage de ces orbites. Puisque l’on s’intéresse à la structure dynamique globale de ces satellites, nous avons intégré numériquement un nombre assez important d’orbites fictives (30000 orbites) pendant 2000 ans, dont les conditions initiales sont données par : $\chi = 0$, $\phi_c = \pi$ (rad) et $h = k = 0$, pour 100 valeurs de ϵ_L entre $[-0.3, 0]$ et 300 valeurs de D entre sur trois intervalles : $[0, 0.1]$, $[0, 1]$ et $[0, 10]$ (figure 3.8). Nous remarquons que, pour des valeurs petites de D , les zones chaotiques (représentées par des couleurs plus claires) s’installent progressivement. Au delà de $D = 6$, on commence à retrouver des orbites plus régulières (couleurs sombres), ce qui est en accord avec notre discussion dans ce chapitre. Les structures des traits en noir qu’on observe surtout dans les régions les plus claires correspondent à des résonances secondaires (commensurabilités entre ϕ_c et ϕ_L), et qui sont difficilement observables sur des surfaces de Poincaré. Pour résumer, cette méthode a pour intérêt de visualiser

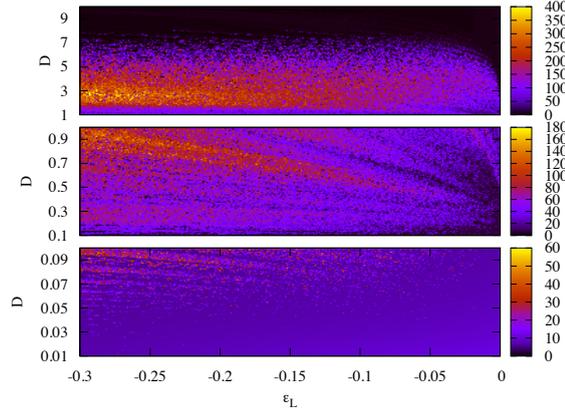


Figure 3.8 – Cartes des FLI, pour 90000 trajectoires, les conditions initiales utilisées sont : $\chi = 0$, $\phi_c = \pi$ et $h = k = 0$. J’ai intégré plusieurs orbites numériquement (90000 orbites) durant 2000 ans, pour 100 valeurs de ϵ_L entre $[-0.3, 0]$ et 900 valeurs de D entre $[0, 7.5]$. Un FLI de 400 correspond à 5 ans en terme de divergence entre deux orbites proches, les petites valeurs des FLI correspondent à des temps de divergence longs, l’échelle est de 5 années/FLI.

de manière assez remarquable et facilement lisible les régions où la dynamique est régulière ou chaotique. De plus cette méthode permet de visualiser les régions dans lesquelles on peut rencontrer des résonances secondaires.

3.8 Conclusion de la première partie

J’ai étudié le comportement de deux satellites de masses μ_s et μ'_s , orbitant dans le même plan, autour d’une planète de masse $M_p \gg \mu_s, \mu'_s$. J’ai moyenné les équations du mouvement près d’une commensurabilité de moyen mouvement de premier ordre $m+1 : m$, en gardant uniquement les termes au premier ordre en excentricité et en considérant les taux de précession séculaires $\dot{\omega}_s$ et $\dot{\omega}'_s$ des satellites. Cela permet d’écrire le Hamiltonien classique du système, avec deux arguments critiques résonants $\phi = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi$ et $\phi' = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'$. En utilisant les constantes de mouvement (l’énergie du système et le moment angulaire totaux), le système initial à quatre degrés de liberté est réduit à un problème à deux degrés de liberté qui n’est pas intégrable en général.

Pour $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s = 0$ (comme c’est le cas pour le problème Képlérien), le Hamiltonien est intégrable, (voir [Sessin and Ferraz-Mello \[1984\]](#)). L’intégrabilité du système provient de l’existence d’une deuxième constante du mouvement, en plus de l’Hamiltonien. Je montre qu’il s’agit de la généralisation de la constante de Jacobi dans le problème à trois corps restreint et elliptique. Les termes séculaires forcent la précession différentielle entre les deux orbites (i.e. $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s \neq 0$), et détruisent cette constante de Jacobi généralisée. Dans le cas général ($\mu_s \neq 0, \mu'_s \neq 0$), les deux satellites jouent les mêmes rôles. Cependant, cette symétrie est brisée, dans le problème restreint (e.g. $\mu_s = 0$). Les deux angles critiques résonants ϕ et ϕ' , ou leurs homologues ϕ_L et ϕ_c , sont alors associés à deux résonances de types différents (Lindblad et corotation, ou LER et CER, respectivement) qui vont avoir alors des effets différents. En effet, la LER excite principalement l’excentricité de la particule test, en gardant son demi-grand

axe relativement constant. Tandis que la CER change principalement le demi-grand axe tout en gardant l'excentricité presque constante (Eq. (3.7)). Les deux résonances peuvent être décrites simultanément par un Hamiltonien réduit (Eq. (3.9)), cela dépend de deux paramètres sans dimension qui contrôlent la dynamique du système : (i) la distance $D \propto \dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s$ entre la CER et la LER, et (ii) le paramètre de forçage ϵ_L qui inclue la masse et l'excentricité orbitale du satellite perturbateur, voir la table (3.1).

Les équations qui résultent de ce calcul sont résumées par un système d'équations différentielles qui constitue le "modèle CoraLin" (voir le système (3.10)). Ce système décrit le couplage entre le mouvement d'un pendule simple (Eq. (3.12)) dans la largeur de la séparatrice est ± 2 , et un oscillateur de type Andoyer (Eq. (3.11)) centré à $\chi = -D$, voir la figure (3.1). Cela a l'avantage de permettre une exploration générique de la dynamique du système via de simples intégrations numériques, sections de Poincaré, etc ... De plus, on y utilise des paramètres sans dimension qui englobent tous les paramètres des systèmes (masse et excentricité orbitale du perturbateur, précessions séculaires des orbites, etc...). Ainsi, le système est intégrable pour $D = 0$, le chaos apparaît rapidement pour de très petites valeurs de D aux alentours de 0.01, voir la figure (3.6). Pour seulement de très grandes valeurs de $D \gg 2$ que le système est presque intégrable, avec un comportement qui peut être qualitativement décrit en utilisant des arguments d'invariance adiabatique.

Deuxième partie

Résonances dans le système de
Saturne

Chapitre 4

Petits satellites de Saturne

Sommaire

4.1	Introduction	54
4.2	Présentation des petits satellites de Saturne : Anthée, Méthone et Aegaeon	54
4.2.1	Anthée : S/2007 S 4	54
4.2.2	Méthone : S/2004 S 1	55
4.2.3	Aegaeon : S/2008 S 1	56
4.3	Application de CoraLin	56
4.4	Comparaison CoraLin/Intégrations numériques exactes	57
4.4.1	Éléments orbitaux	57
4.4.2	FLI Mercury/CoraLin	58
4.5	Conclusion	59

4.1 Introduction

Depuis que la sonde Cassini est arrivée autour de Saturne en 2004, plusieurs petites lunes ont été découvertes (Daphnis, Anthe, Methone, Pallene, Polydeuces et Aegaeon), et plusieurs nouveaux arcs, (Porco et al. [2007], Charnoz et al. [2007] et Murray et al. [2008]). Le fait que les orbites de ces satellites soient associées à des arcs de matière est un sujet traité pour d'autres structures par (Burns et al. [1999] et Burns et al. [2004]). Et des exemples d'anneaux fins interagissant avec des petits satellites similaires à ces satellites de Saturne récemment découverts ont déjà été trouvés autour des planètes géantes : Jupiter (Burns et al. [1999] et Burns et al. [2004], Showalter et al. [2007]), Saturne (Porco et al. [2007] et Murray et al. [2008]), Uranus (Showalter and Lissauer [2006]) et Neptune (Sicardy [1991] et de Pater et al. [2005]).

Tous ces arcs/anneaux sont probablement générés par des débris provenant de ces petits satellites. En fonction de leurs propriétés de surface et de leurs positions radiales, des petits satellites (5 km à 50 km) peuvent être des sources idéales pour fournir des débris pour un anneau tant qu'ils présentent une surface raisonnable pour être impactés par des micro-météorites, tout en ayant une trop faible gravité à la surface pour pouvoir retenir les éjectas d'impact (Burns et al. [1999]). En effet, des particules peuvent être confinées en arc de matière à cause de la présence d'un satellite, assez massif, dont l'orbite est suffisamment excentrique ou inclinée, et situé à une certaine distance de l'arc (voir le chapitre suivant), comme l'anneau G de Saturne (Hedman et al. [2007]), ou l'arc Adams de Neptune (Porco [1991] et Sicardy and Lissauer [1992]). Si un satellite est lui même près ou est capturé dans une résonance avec un satellite voisin, des débris peuvent être éjectés sur des orbites circumplanétaires qui sont capturés dans la même résonance. Méthone, Anthée et Pallène orbitent tous entre Mimas et Encelade, ils occupent des environnements dynamiques bien distincts. Des intégrations numériques indiquent que Méthone (Spitale et al. [2006]) et Anthée (Cooper et al. [2008]) sont capturés dans une résonance de premier ordre avec Mimas. Par contre Pallène n'est pas loin d'une résonance de troisième ordre avec Encelade (Spitale et al. [2006]). Enfin, Aegaeon est situé à l'intérieur de l'orbite de Mimas, et il est associé à un arc de matière près du bord intérieur de l'anneau G (Hedman et al. [2010]). Cela suggère que des résonances proches avec Mimas peuvent confiner du matériau d'Anthée, Méthone et Aegaeon en longitude pour produire des arcs discrets, alors que le matériel provenant de Pallène est libre de s'étaler en longitude pour former un anneau complet. De plus, il est évident qu'il y a une connexion entre ces résonances proches et la morphologie de ces anneaux faibles, cela peut être montré en analysant les arguments résonants de chacune des commensurabilités.

4.2 Présentation des petits satellites de Saturne : Anthée, Méthone et Aegaeon

4.2.1 Anthée : S/2007 S 4

Cette lune a été découverte grâce à l'imageur de la sonde Cassini en 2007. Il s'agit d'un satellite très petit ($R_{An} \simeq 0.9$ km), situé à 197660 km de Saturne, juste à l'extérieur de l'orbite de Mimas (figure 4.1) dont le demi-grand axe est de $a_M \simeq 185540$ km. Des travaux récents (Cooper et al. [2008]) ont montré via des intégrations numériques ajustées à des observations, qu'Anthée est piégé dans une résonance de moyen mouvement de type Corotation de premier ordre en excentricité 10 : 11 avec Mimas. De plus, ce satellite est proche d'une résonance 75 : 77 avec un autre petit satellite nommé Méthone (section : 4.2.2). Cela signifie que des perturbations additionnelles à celles causées par la résonance 10 : 11 avec Mimas devraient affecter l'orbite d'Anthée, mais des études de l'évolution dynamique à court-terme menées par



Figure 4.1 – Image obtenue par la sonde Cassini du satellite Anthée et son arc de matière.

Nick Cooper montrent que l'orbite de cette petite lune est dominée uniquement par la résonance avec Mimas. À partir de ces intégrations, les résultats de [Cooper et al. \[2008\]](#) montrent que les effets résonants causent une variation du demi-grand axe d'Anthée de ± 26 km autour d'une valeur moyenne de 197655 km sur une période d'environ 913 jours, et une variation de l'excentricité de ± 0.0008 autour d'une valeur moyenne de 0.0012 sur une période de 1826 jours. Ces solutions numériques des équations complètes du mouvement incluent Saturne, Anthée, les perturbations provenant des huit satellites au voisinage d'Anthée (Mimas, Encelade, Thetys, Dioné, Rhea, Titan, Hypérion et Iapetus), et les effets de l'aplatissement de la planète. De plus, Anthée partage son orbite avec un arc (anneau incomplet) de matière (figure 4.1), cet arc qui s'étend jusqu'à 20° est confiné par la résonance de moyen mouvement avec Mimas. Cette résonance de moyen mouvement dont l'argument critique ϕ_c est donné par :

$$\phi_c = 11\lambda_{Anthée} - 10\lambda_{Mimas} - \varpi_{Mimas} \quad (4.1)$$

est capable de confiner l'arc en longitude, surtout si la profondeur optique du matériel est suffisamment faible pour que les collisions inter-particules puissent être négligées ([Goldreich et al. \[1986\]](#), [Porco \[1991\]](#), [Namouni and Porco \[2002\]](#) et [Hedman et al. \[2007\]](#)). Cette résonance fournit une explication naturelle de l'existence d'un arc d'Anthée. Une telle résonance 11 : 10 crée 11 sites de corotation dans lesquelles des particules peuvent être capturées, ce matériel libre autour de ces points stables, cela va donc former un arc dont la surface maximale est de $360^\circ / 11 = 32^\circ$, et l'arc associé à Anthée s'étend sur une longitude de 20° , c'est-à-dire, bien au dessous de cette limite.

4.2.2 Méthone : S/2004 S 1

Méthone quant à lui, ressemble beaucoup à un œuf d'après la figure (4.2), cette image a été obtenue grâce à un survol de la sonde Cassini de cette petite lune. Son orbite est également associée à un arc de matière dont la source provient probablement des impacts micrométéoroïdes sur cette lune. Méthone a été officiellement découvert en 2004 grâce aux données de la sonde Cassini. Son diamètre est de 1.6 ± 0.6 km ([JPL Horizon](#)), il est situé à 194402 km du centre de Saturne ([JPL Horizon](#)). Les travaux de ([Spitale et al. \[2006\]](#)) ont mis en évidence l'existence de deux angles résonants dont les arguments critiques sont donnés par :

$$\phi_c = 15\lambda_{Méthone} - 14\lambda_{Mimas} - \varpi_{Mimas} \quad (4.2)$$

$$\phi_L = 15\lambda_{Méthone} - 14\lambda_{Mimas} - \varpi_{Méthone} \quad (4.3)$$

Il s'agit de la CER et la LER 15 : 14 respectivement. Bien que Méthone subisse les effets des deux résonances qui sont séparées de 4 km, ce qui rendrait la dynamique plus compliquée,

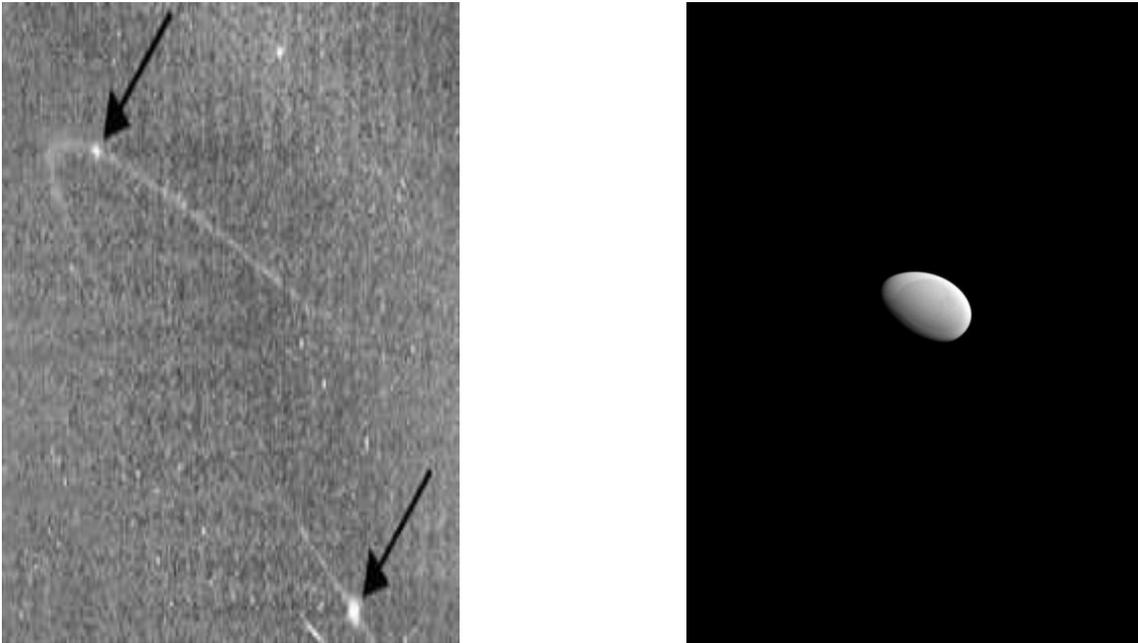


Figure 4.2 – Gauche : Les flèches indiquent les positions des lunes Anthée, en haut à gauche, et Méthone, en bas à droite. Les impacts de micrométéoroïdes sur les lunes sont probablement la source du matériel d’arc. Droite : Une image résolue de Méthone. Crédit : NASA/JPL/Space Science Institute.

l’hypothèse que son arc soit confiné par la CER reste très probable vu qu’il s’étend longitudinalement sur 10° , alors que la taille des sites créés par cette corotation est de $360^\circ / 15 = 24^\circ$.

4.2.3 Aegaeon : S/2008 S 1

Aegaeon a été découvert par la sonde Cassini en 2008, il a un diamètre de 500 m , il s’agit d’un satellite très petit, situé à 167425 km (JPL Horizon) du centre de Saturne. Son orbite est très peu excentrique ($e = 0.0002$), et elle est associée à un arc de matière près du bord intérieur de l’anneau G de Saturne (4.3). Les travaux de Hedman et al. [2010] suggèrent que le satellite est capturé lui aussi en CER 7 : 6 avec Mimas, avec un angle critique de résonance donné par (4.4).

$$\phi_c = 7\lambda_{Mimas} - 6\lambda_{Aegaeon} - \varpi_{Mimas} \quad (4.4)$$

Anthée, Méthone et Aegaeon sont donc trois petits satellites dynamiquement liés à Mimas via des résonances de moyen mouvement d’ordre un, de type corotation et Lindblad, et ils sont tous associés à des arcs de matière Cooper et al. [2008], Hedman et al. [2009, 2010]. La présence de ces structures est en accord avec leur confinement par des résonances de corotation avec Mimas. On peut considérer ces lunes comme des particules test, vu leurs dimensions par comparaison à Mimas, dont le rayon moyen est de 198.2 km (JPL Horizon).

Je propose dans le cadre de cette étude, une application du modèle CoraLin afin de mieux comprendre la dynamique de ces petits satellites.

4.3 Application de CoraLin

J’applique le modèle CoraLin aux trois petits satellites décrits précédemment. Rappelons que : Aegaeon est capturé en résonance interne 7 : 6 avec Mimas, alors qu’Anthée et Méthone

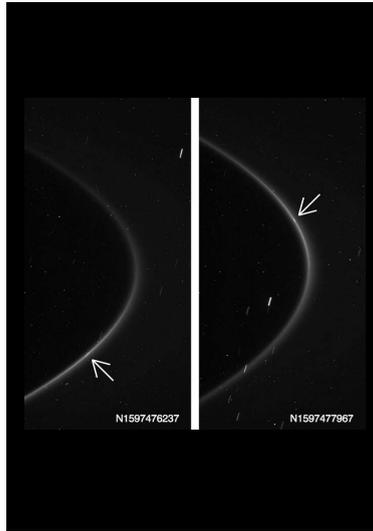


Figure 4.3 – De deux images prises le 15 Août 2008, dans lesquelles Aegaeon a été d’abord remarqué. Les flèches indiquent la position de cet objet. (Hedman et al. [2010]).

sont capturés avec Mimas en résonance externe 10 : 11 et 14 : 15 respectivement. Tous ces satellites sont fortement perturbés par la LER associée. On s’attendait à ce résultat vu les valeurs de D et de ϵ_L (table 4.1) de chacun de ces satellites listés dans la table 4.1, confirmé par les portraits de phases représentés dans la figure 4.4.

	m	D	ϵ_L	H	ϕ_c (CER)	ϕ_L (LER)
Aegaeon	+6	-1.155	0.132	-0.27	$+7\lambda' - 6\lambda - \varpi' + \pi$	$-7\lambda' + 6\lambda + \varpi$
Methone	-15	0.129	-0.115	-0.62	$-14\lambda' + 15\lambda - \varpi'$	$+14\lambda' - 15\lambda + \varpi$
Anthe	-11	0.286	-0.123	1.03	$-10\lambda' + 11\lambda - \varpi'$	$+10\lambda' - 11\lambda + \varpi$

Table 4.1 – Valeurs de D , ϵ_L et H pour Aegaeon, Méthone et Anthée utilisés dans le modèle CoraLin (Eqs. (3.10)). Ces paramètres dépendent des éléments orbitaux des satellites et de la masse de Mimas (N. J. Cooper, communication privée). Les angles critiques de résonance sont aussi indiqués. Notons que pour les satellites internes (resp. externes) D est positif (resp. négatif) et ϵ_L est négatif (resp. positif).

Les trajectoires des trois satellites sont proches des régions dominées par le chaos, en particulier pour Anthée. Ce dernier a une variation de demi-grand axe de ± 26 km (Cooper et al. [2008]), alors que la largeur complète de la résonance de corotation non-perturbée est 50.7 km. De même Méthone subit une variation du demi-grand axe de ± 20 km, avec une largeur de corotation de 55.4 km. Le cas d’Aegaeon (à l’intérieur de l’orbite de Mimas) est différent, il apparaît situé plus à l’intérieur de la résonance corotation. La variation du demi-grand axe est de ± 4 uniquement (Hedman et al. [2009, 2010]), pour une largeur complète de corotation de 31.6 km. Cela est compatible avec l’amplitude de libration faible observée pour ce satellite.

4.4 Comparaison CoraLin/Intégrations numériques exactes

4.4.1 Éléments orbitaux

Dans le but de vérifier que le modèle CoraLin contient l’essentiel de l’information sur la dynamique de ces corps, je propose dans cette section une comparaison entre le modèle et les

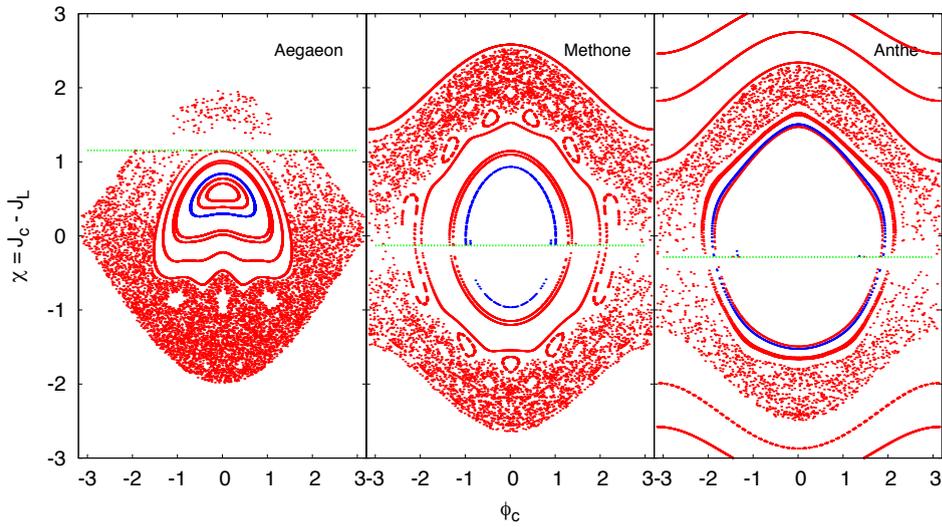


Figure 4.4 – Portrait de phase de Aegaeon, Méthone et Anthée obtenus pour $k = 0$ et $\dot{k} > 0$ dans le système d'équations (3.10). Les courbes bleues sont les trajectoires des satellites, en utilisant les paramètres de la table (4.1). Les conditions initiales pour chacun des satellites sont données par N.J. Cooper ([communication privée 2011](#)), sous forme d'éléments orbitaux géométriques à un temps donné (le 01/01/2004). Les courbes vertes marquent la position de la LER, à $\chi = -D$. Les courbes rouges représentent les surfaces de sections des trajectoires en prenant la même valeur pour H (la valeur correspondant à chacun des trois satellites). La correspondance entre χ et la valeur de Δa en km est donnée par : $\chi = \frac{4\Delta a}{W_c}$, où W_c est la largeur de la corotation.

intégrations numériques exactes ([Cooper et al. \[2008\]](#)).

Je représente dans les figures (4.5) et (4.6) respectivement, les variations du demi-grand axe et celles de l'excentricité d'Anthée, Méthone et Aegaeon entre 2004 et 2014.

D'après ces figures, nous remarquons que CoraLin donne les mêmes fréquences et les mêmes amplitudes du demi-grand axe et de l'excentricité pour chacun des trois satellites. Les conditions initiales et les paramètres utilisés pour reproduire ces courbes dans les figures (4.5) et (4.6) sont :

	χ	ϕ_c (rad)	h	k
Anthée	0.215	164.308	-0.347	0.124
Méthone	-0.652	167.156	0.139	0.311
Aegaeon	-0.225	178.265	-0.211	0.240

Table 4.2 – Valeurs des conditions initiales des trois satellites étudiés.

4.4.2 FLI Mercury/CoraLin

D'autre part, des comparaisons des FLI (3.27) obtenues par l'intégrateur Mercury ([Chambers \[1999\]](#), intégrations à N corps complètes) et CoraLin sont réalisées dans cette étude. Les figures (4.7) et (4.8) représentent les FLI en fonction du temps des trajectoires chaotiques et régulières correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \chi = 0 \\ \phi_c = \pi \\ h = 0 \\ k = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

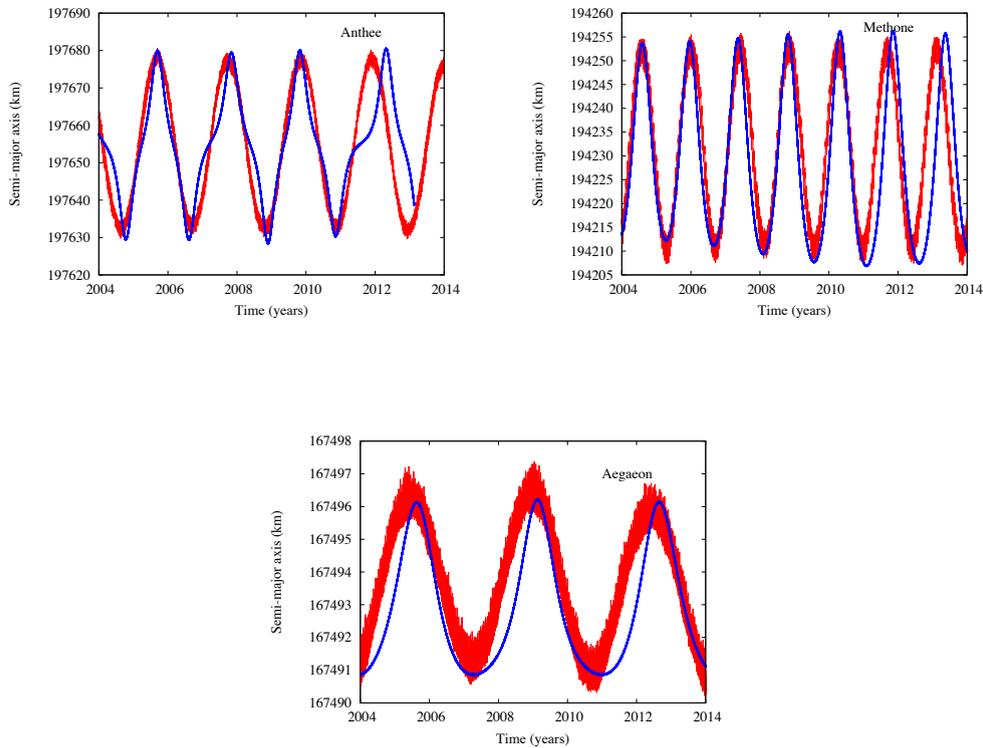


Figure 4.5 – Variation du demi-grand axe d’Anthée, Méthone et Aegaeon par CoraLin (en bleu) et par Nick Cooper (rouge).

On peut remarquer que, dans le cas des trois satellites, le FLI calculé par CoraLin renseigne aussi bien que Mercury sur la stabilité et l’irrégularité d’une trajectoire donnée.

4.5 Conclusion

En conclusion, les comparaisons effectuées entre des intégrations à N corps complètes et CoraLin montrent que CoraLin, modèle simple et adimensionnel, contient l’essentiel de l’information dynamique des corps en résonance de moyen mouvement de premier ordre, et ce dans le problème à trois corps restreint, plan et elliptique. D’autre part, j’ai examiné des portraits de phase des petits satellites saturniens capturés dans des CER avec Mimas : Aegaeon, Méthone et Anthée. Des intégrations plus spécifiques (Fig. 4.4) montrent qu’Aegaeon, Méthone et spécialement Anthée sont proches de régions dominées par le chaos. J’examinerai plus loin comment ces satellites ont pu être capturés à l’intérieur des sites de corotation respectifs. L’implémentation numérique des migrations orbitales de Mimas et/ou des petits satellites dans le système CoraLin est en effet très simple, et je vais utiliser ce modèle pour explorer différents scénarios de la capture en résonance.

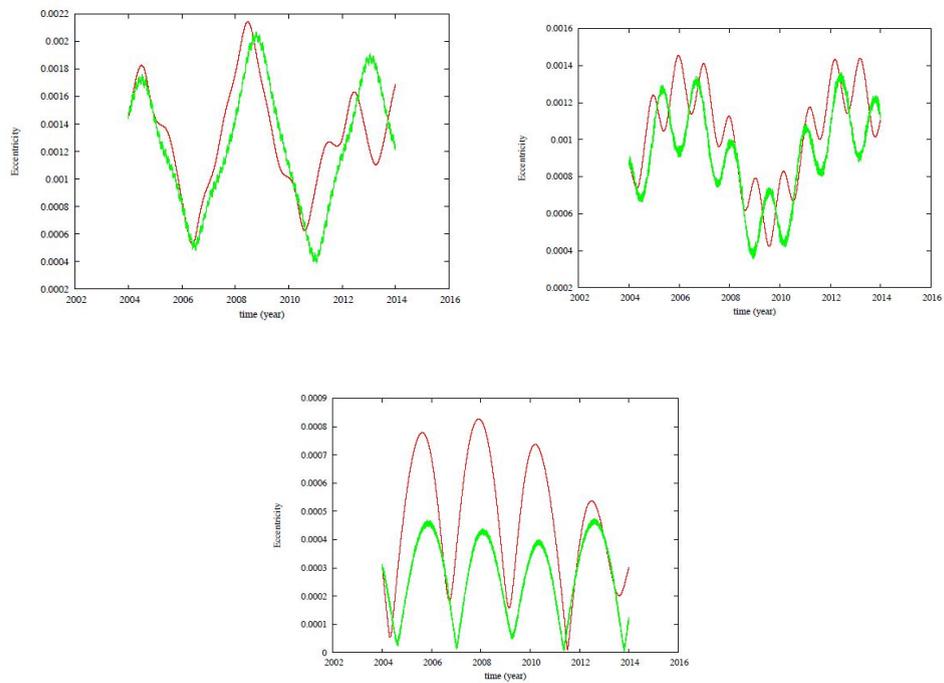


Figure 4.6 – Variation de l'excentricité d'Anthée, Méthone et Aegaeon par CoraLin (en rouge) et par Nick Cooper (vert).

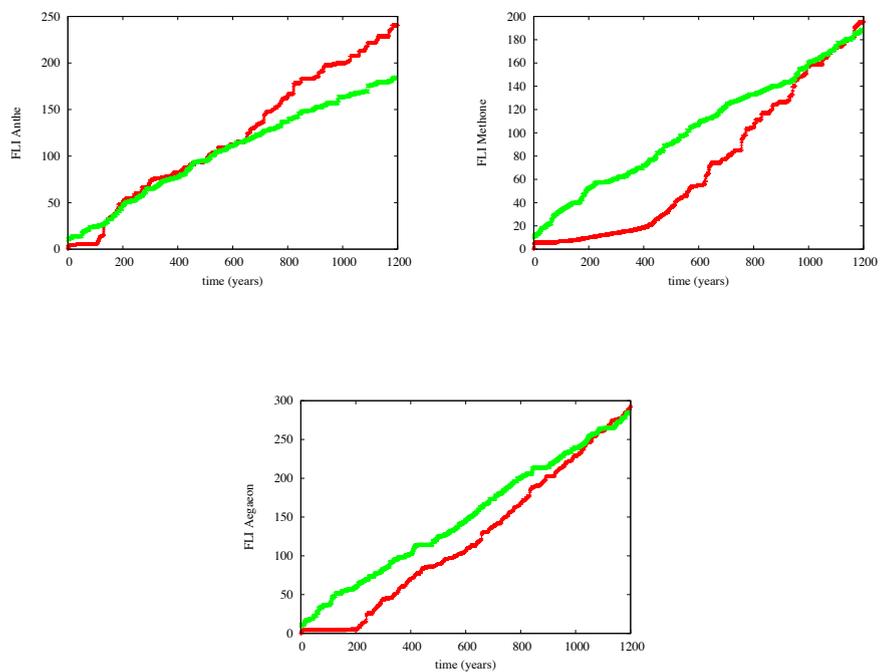


Figure 4.7 – Les LE des orbites chaotiques proches de chacun des satellites, obtenus par CoraLin (Rouge) et par Mercury (Vert).

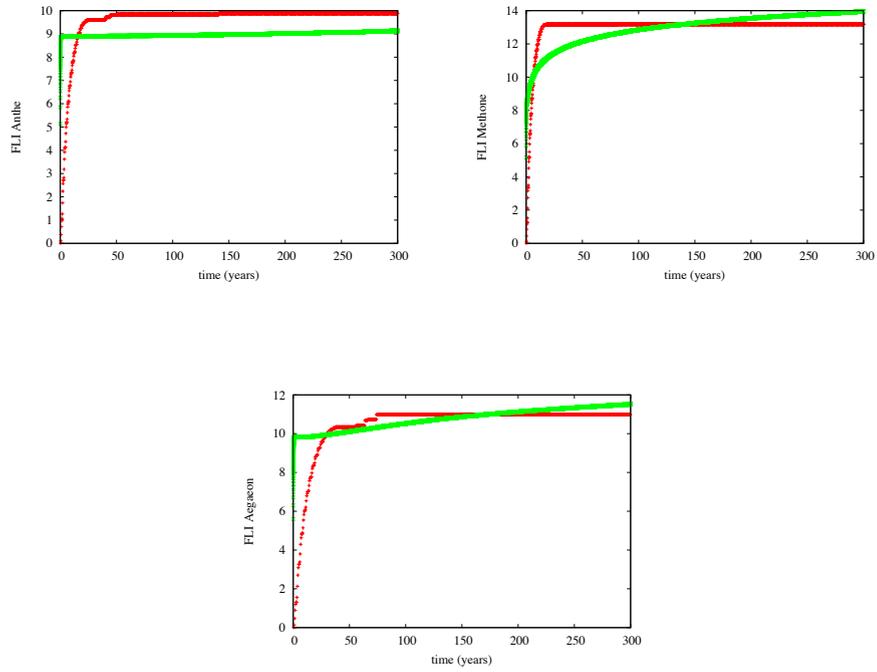


Figure 4.8 – Les FLI des orbites régulières proches de chacun des satellites, obtenus par CoraLin (**Rouge**) et par Mercury (**Vert**).

Chapitre 5

Scénarios de capture en corotation

Sommaire

5.1	Introduction	64
5.2	Équations de mouvement d'une pure corotation	64
5.3	Migration de Mimas	65
5.3.1	Migration due aux anneaux	65
5.3.2	Migration due à Saturne	66
5.4	Introduction de la migration dans le modèle CoraLin	66
5.4.1	Migration constante	67
5.4.2	Migration avec un gradient	68
5.5	Probabilité de capture	69
5.6	Scénarios de capture	71
5.6.1	Scénario 1 : Capture directe dans la CER	72
5.6.2	Probabilité totale	76
5.6.3	Scénario 2 : Capture dans la LER puis dans la CER	79
5.7	Conclusion	82

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, je décris de manière analytique et numérique la possibilité de capture résonante des satellites présentés dans le chapitre précédent. À partir des équations du mouvement moyennées, je détaille les processus de capture et je développe les techniques de calcul de leur probabilité. Je décrirai ensuite deux scénarios possibles pour ces captures, et plus précisément, l'entrée dans les sites de corotation avec Mimas. Une description analytique et géométrique de la probabilité de capture est présentée dans une suite de résonances de corotation isolées que le satellite pourrait traverser avant d'arriver à proximité de Mimas, en tenant compte des effets dissipatifs dus aux marées planétaires et aux couples des anneaux. J'estimerai enfin numériquement les probabilités de capture dans les sites de corotation dans lesquelles nos satellites sont en libration, en présence et en absence de la perturbation des résonances de Lindblad.

5.2 Équations de mouvement d'une pure corotation

À partir de la description analytique détaillée dans le chapitre 3, le système d'équations décrivant l'évolution orbitale dans le cas conservatif d'une particule proche ou dans une résonance de corotation isolée (et sans résonance de Lindblad) avec un gros satellite dont l'orbite est excentrique, est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -\epsilon_c \sin(\phi_c) \\ \dot{\phi}_c = \chi \end{cases} \quad (5.1)$$

avec

$$\epsilon_c = 3m^2 \frac{\mu'_s}{M_p} a_0 A' e' \quad (5.2)$$

L'échelle du temps utilisée ici est telle que $\tau = nt$. Les différents paramètres intervenant dans l'expression de ϵ_c sont précédemment décrits dans le chapitre 3 (Table 3.1).

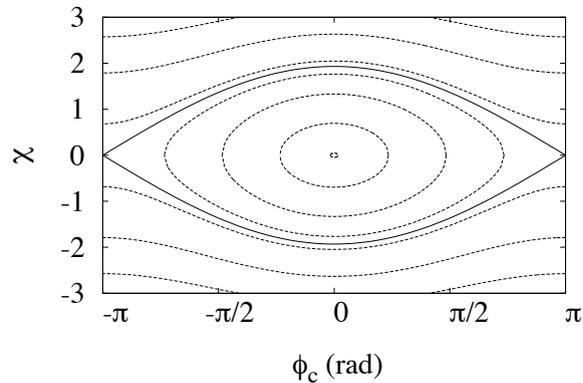


Figure 5.1 – Portrait de phase d'un pendule simple correspondant à une corotation isolée, dans l'espace (χ, ϕ_c) . Les paramètres utilisés pour cette figure sont $D = 0$ et $\epsilon_L = 0$.

Il s'agit ici d'une pure corotation, c'est un système qui décrit également dans d'autres contextes la libration d'un satellite en résonance spin-orbite, ou le confinement d'arcs ([Goldreich et al.](#)

[1986]). Dans le système (5.1), j'ai exclu le couple de marées dû à la planète centrale et/ou à la présence des anneaux. À partir de ce système qui correspond à l'équation d'un pendule simple, j'ai décrit le comportement d'une particule test en fonction de sa configuration avec le satellite perturbateur. En l'absence des termes dissipatifs; la particule test présente des librations stables. Si ϵ_c est positif, les librations se produisent autour de $\phi_c = 0$, en revanche, si ϵ_c est négatif, ces librations se produisent autour de $\phi_c = \pi$ sans perte de généralité. En présence des termes de marées, le couple de migration moyenné $\langle A \rangle$ (sur une période orbitale), doit être ajouté au système résonant de Mimas.

5.3 Migration de Mimas

Le satellite Mimas est l'une des lunes les plus connues dans le système solaire, sa dynamique est très complexe à étudier vu sa position dans le système de Saturne. Mimas, dont l'orbite a une excentricité assez élevée, se situe aux alentours de $3R_{saturne}$, il est à peine à 40.000 km environ du bord extérieur des anneaux principaux de la planète, sans oublier que cette dernière est la planète la plus aplatie du système solaire, ce qui implique des précessions importantes de chacune des orbites de ses satellites. Ainsi, la dynamique orbitale de Mimas doit être très affectée par la planète et par sa proximité des anneaux. De plus, Mimas est sujet à l'interaction avec plusieurs satellites et anneaux de Saturne via des résonances de moyen mouvement, comme la résonance 4 : 2 avec Thétys dont le résultat est une forte excitation de l'excentricité orbitale de Mimas qui est de 0.0196 (Noyelles et al. [2012]), ou encore la résonance 2 : 1 avec le bord extérieur de l'anneau B dont la conséquence principale est le maintien du bord interne de la division Cassini. Mimas est en effet responsable de plusieurs ondes spirales résonantes observées dans les anneaux principaux.

5.3.1 Migration due aux anneaux

Les travaux de Meyer-Vernet and Sicardy [1987] donnent la formule générale du couple Γ_m associé à une résonance $m + 1 : m$

Pour les résonances internes, on a :

$$\Gamma_m = \frac{4\pi^2}{3} \left(\frac{m}{m+1} \right) \left[E^{(m)} \right]^2 GM_p \left(\frac{M_s}{M_p} \right) \sigma a_s \quad (5.3)$$

où M_s : masse satellite, M_p : masse planète, σ : masse surfacique de l'anneau, a_s : rayon orbital du satellite, $E^{(m)}$: combinaison de coefficients de Laplace, et $E^{(m)} = a_s \cdot A$, où A est le coefficient donné par l'équation (2.2).

Le moment cinétique du satellite est $H_s = M_s \sqrt{GM_p a_s}$, de $\dot{H}_s = \Gamma_m$, on déduit :

$$\frac{\dot{a}_s}{a_s} = \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{m}{m+1} \right) \left[E^{(m)} \right]^2 \left(\frac{\sigma a_s^2}{M_p} \right) \left(\frac{M_s}{M_p} \right) \cdot n_s \quad (5.4)$$

Pour Mimas, la seule résonance importante, en ce qui concerne le couple, est la 2 : 1 (bord externe anneau B), donc $m = 1$. De plus, pour cette valeur de m , $E^{(m-1)} \sim 1$. La densité de l'anneau B est $\sim 1000 \text{ kg m}^{-2}$, donc finalement :

$$\frac{\dot{a}_s}{a_s} \sim 4 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1},$$

environ 3 fois plus faible que la migration due à la marée ($1.3 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$).

En conclusion, le couple de l'anneau sur Mimas est plus faible, mais du même ordre de grandeur que le couple de marée. Ceci dit, il n'est pas clair que la valeur et le signe du couple

exercé par le bord externe de l'anneau B soit bien estimés, ni bien compris (Lainey et al. [2012]), Le couple de marée ne peut être quant à lui estimé qu'en ordre de grandeur. Les calculs qui suivent restent donc indicatifs.

5.3.2 Migration due à Saturne

L'interaction du bulbe de marées agissant sur une planète par un satellite à l'extérieur de l'orbite synchrone résulte d'un gain du moment angulaire par le satellite, cela cause une expansion de l'orbite du satellite, le taux de variation du demi-grand axe a d'un satellite de masse μ'_s est donnée par :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_t = 3 \frac{k_{2p}}{Q_p} \sqrt{GM_p} \frac{\mu'_s}{M_p} \frac{R_p^5}{a^{13/2}} \quad (5.5)$$

où M_p , R_p , Q_p et k_{2p} sont la masse, le rayon, le facteur de dissipation et le nombre de Love de la planète (Burns [1977]). Le paramètre k_{2p} est le nombre de Love et qui est relié à l'aplatissement dynamique de la planète. L'évolution orbitale à long terme des satellites n'est en général pas précisément connue, en partie à cause de la mauvaise connaissance du facteur de dissipation Q_p .

Les valeurs des taux de migration (\dot{a}/a) dus d'une part à la planète et d'autre part aux anneaux sont respectivement $1.3 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$ et $4 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, à partir des équations (5.4) et (5.5), l'effet des marées planétaires reste plus important que celui qui est dû aux anneaux. Notons que l'échelle de temps associée à la migration due à la planète est de ($1.3 \times 10^{-17} \text{ secondes}$), soit le milliard d'années.

Les paramètres physiques de Saturne et de Mimas impliqués dans le calcul du (\dot{a}/a) de Mimas sont données dans la table (5.1)

Paramètres	Valeurs
GM_p	$37931208 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (JPL Horizon)
$G\mu'_s$	$2.509 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (JPL Horizon)
a_{Mimas}	$185539. \text{ km}$ (JPL Horizon)
R_p	$60268. \text{ km}$ (JPL Horizon)
k_{2p}/Q_p	2.3×10^{-4} (Lainey et al. [2012])

Table 5.1 – Paramètres intervenant dans le calcul de (\dot{a}/a) pour Mimas.

5.4 Introduction de la migration dans le modèle CoraLin

Dans la mesure où je cherche à estimer la probabilité de capture des petits satellites en résonance de corotation excentrique (CER) perturbée par une résonance excentrique de Lindblad (LER), il est plus pertinent de vérifier d'abord que j'obtiens les mêmes estimations de probabilité numériquement et analytiquement. Une telle étude nous permettra également de voir l'effet de la présence de la LER sur cette probabilité.

Des estimations de probabilité de capture sont possibles lorsque le système évolue lentement, par exemple, via les effets de marées (Goldreich and Peale [1966]), et/ou via un couple en présence des anneaux (Poulet and Sicardy [2001], Crida and Charnoz [2012]).

5.4.1 Migration constante

Considérons le mouvement d'une particule test proche ou en résonance de corotation avec un satellite perturbateur, près de cette configuration, je peux écrire l'équation moyennée du mouvement suivante :

$$\ddot{\phi}_c + \epsilon_c \sin(\phi_c) = \langle A \rangle \quad (5.6)$$

où $\langle A \rangle = \langle A_{\text{planète}} \rangle$, dont l'expression sera donnée dans la sous-section suivante. Dans le cadre de mon étude, la quantité $\langle A \rangle$ représente le taux de migration de la particule (ou l'opposé de la migration du satellite). Si $\langle A \rangle$ est constant, c'est-à-dire, qu'elle ne dépend pas de ϕ_c , $\dot{\phi}_c$ et du temps, l'intégrale première de l'équation (5.6) s'écrit :

$$H = \frac{\dot{\phi}_c^2}{2} - \epsilon_c \cos(\phi_c) = -\langle A \rangle \phi_c. \quad (5.7)$$

La particule évolue donc dans un potentiel équivalent à $-\epsilon_c \cos \phi_c - \langle A \rangle \phi_c$. Ce potentiel est illustré dans la figure (5.2). Selon la valeur de H , la particule peut avoir un angle ϕ_c en permanence en libration (capture) ou en permanence en circulation (capture impossible). Les valeurs de $\langle A \rangle$ ¹ et de ϵ_c sont très exagérées dans le but de mieux illustrer le principe.

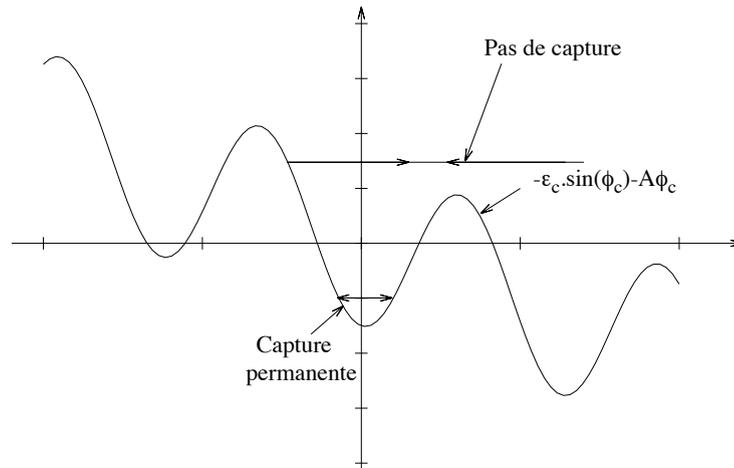


Figure 5.2 – Courbe représentant le potentiel de corotation en présence du terme de marées A est représenté par la courbe dont l'équation est $-\epsilon_c \sin(\phi_c) - A\phi_c$. Dans le cas où la particule arrive dans le site de résonance avec un taux de migration constant, elle repart de la même manière. La capture ne se produit pas.

Dans ce cas de figure, il ne s'agit pas vraiment d'un système dissipatif, bien que la particule perde de l'énergie. Cette perte se fait de manière parfaitement constante, ainsi le comportement de la particule est parfaitement symétrique lorsqu'elle passe par le potentiel de capture, elle se contente de faire de simples allers/retours, cette symétrie empêche la capture en CER. Avec une telle configuration, comme le montre la figure (5.2), les particules qui ont déjà été piégées le resteront, et celles qui ne le sont pas, ne le seront jamais. Pour conclure, si le couple de migration est constant, la particule "esquive" avec succès le site de corotation et ne peut pas être capturée.

1. Dans la suite, nous utiliserons la notation A au lieu de $\langle A \rangle$ pour raison de simplification

5.4.2 Migration avec un gradient

Dans ce cas de figure, j'introduis une migration qui dépend d'un gradient B , et plus précisément, je suppose que le taux de migration \dot{a} dépend de manière linéaire de a . Le calcul de B s'obtient par un développement limité au premier ordre en demi-grand axe de la quantité $\frac{\dot{a}}{a}$. Par exemple, si l'on considère uniquement les effets de marées dus à la planète, nous avons :

$$\frac{\dot{a}}{a} = K a^{-11/2} \quad \text{avec} \quad K = 3 \frac{k_{2p}}{Q_p} \sqrt{GM_p} \frac{\mu'_s}{M_p} R_p^5 \quad (5.8)$$

D'autre part, nous avons $\chi = f \cdot \frac{a-a_0}{a_0} = f \cdot \frac{\Delta a}{a_0}$, où a_0 , rappelons le, est le demi-grand axe de la corotation, et f est le facteur d'échelle qui permet de relier le modèle CoraLin aux dimensions physiques réelles. On peut exprimer facilement f par :

$$f = \frac{4a_0}{W} \quad \text{où } W \text{ est la largeur du site de corotation en unités CoraLin, soit } W = 4. \quad (5.9)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\dot{a} = \frac{K}{a^n} = \frac{K}{a_0^n} \left[1 - n \frac{\Delta a}{a_0} \right] \quad \text{où } n = 11/2, \quad (5.10)$$

soit $\dot{\chi} = f \cdot \frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{K}{a_0^{n+1}} [f - n\chi]$, donc,

$$A = \frac{Kf}{a_0^{n+1}} \quad \& \quad B = \frac{-nK}{a_0^{n+1}} \quad (5.11)$$

On peut facilement vérifier que $B \ll A$ car $n = 11/2 \ll f$.

Dans ce cas, on peut écrire l'équation du mouvement comme suit :

$$\ddot{\phi}_c = -\epsilon_c \sin(\phi_c) + A + B\dot{\phi}_c \quad (5.12)$$

où les expressions de A et B sont donnés dans les équations (5.11). Dans ce cas, la dépendance de $\frac{\dot{\phi}_c^2}{2}$ de ϕ_c n'est pas symétrique (fig. 5.3), la particule peut être capturée en corotation. Notons E l'énergie de la particule :

$$E = \frac{\dot{\phi}_c^2}{2} - \epsilon_c \cos(\phi_c) - A\phi_c. \quad (5.13)$$

ainsi, notre système s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = B\dot{\phi}_c^2 \quad \text{où} \quad \frac{dE}{d\phi_c} = B\dot{\phi}_c. \quad (5.14)$$

Il s'agit, en effet, d'un vrai système dissipatif, et non plus d'un système Hamiltonien. C'est uniquement avec un tel système que l'on peut parler d'une possible capture, cette dernière va dépendre essentiellement de la configuration initiale de la particule par rapport au site de corotation.

Dans la figure (5.3), je représente E , en utilisant l'équation (5.13), les valeurs de A et B sont exagérées par comparaison à la réalité, pour mieux illustrer le principe étudié. En effet, lorsque $A > 0$, pour qu'il y ait une capture, il faut que la particule en question arrive avec $\chi < 0$, c'est un cas pour lequel, on a $\dot{\phi}_c < 0$, il est donc nécessaire que $\frac{dE}{d\phi_c} > 0$, soit $B < 0$, ce qui veut dire que la particule migre plus rapidement dans la région où $\chi \in [-\frac{W}{2}, 0]$ que dans la région $\chi \in [0, \frac{W}{2}]$. Inversement, si $A < 0$, il faut que la particule arrive du côté où $\chi > 0$ pour qu'une possible capture se produise, c'est la situation dans laquelle la particule est plus rapide dans l'intervalle $\chi \in [0, \frac{W}{2}]$ que dans $\chi \in [-\frac{W}{2}, 0]$. Maintenant que nous savons dans quel cas,

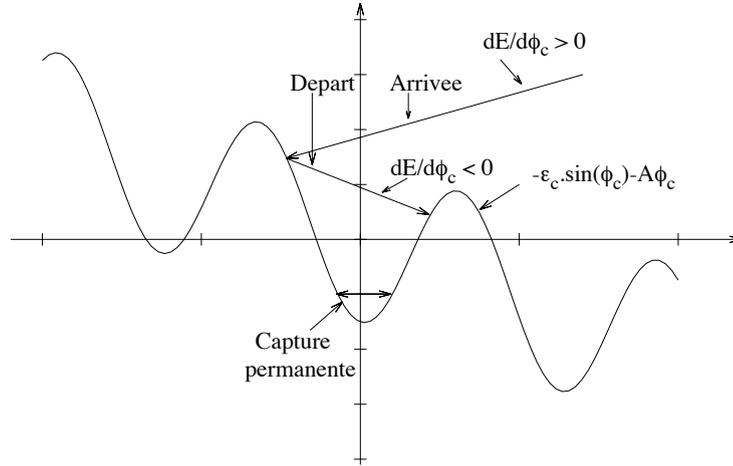


Figure 5.3 – Courbe représentant le potentiel de corotation est représenté par la courbe dont l'équation est $-\epsilon_c \sin(\phi_c) - A\phi_c$, avec A positif et B négatif. Dans le cas où la particule arrive dans le site de résonance avec un taux et un gradient de migration, elle ne repart pas de la même manière. Une possible capture peut se produire.

on peut avoir une capture, je propose dans la sous-section suivante un calcul analytique de la probabilité de capture.

Notons qu'une fois capturée, la particule va converger vers un point fixe correspondant à un minimum de $-\epsilon_c \cos \phi_c$, par exemple le minimum local de la courbe portée sur la figure (5.3), aux environs de $\phi_c = 0$, pour $A > 0$ et $B < 0$. L'équation (5.14) donne

$$\frac{dE}{dt} = B\dot{\phi}_c^2 \quad \text{où} \quad \dot{\phi}_c \sim 2[E + \epsilon_c \cos \phi_c]. \quad (5.15)$$

d'après l'équation (5.13), où le terme $A\phi_c$ est négligé. Autour par exemple de $\phi_c = 0$, on a $\cos(\phi_c) \sim 1$, et donc $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E + \epsilon_c) \sim 2B[E + \epsilon_c]$, ce qui montre que $E + \epsilon_c \propto \exp[2Bt]$, c'est-à-dire que la particule converge vers le point fixe sur une échelle de temps de $\sim \frac{1}{2B}$.

5.5 Probabilité de capture

Lors de la capture, nous avons typiquement $E \sim \epsilon_c$, autrement dit, nous avons $\dot{\phi}_c = \pm \sqrt{2\epsilon_c(1 + \cos \phi_c)}$, je néglige le terme en A , car l'amplitude du potentiel est bien supérieure à la dérive en $-A\phi_c$, ainsi, on peut écrire $\dot{\phi}_c \pm \sqrt{2\epsilon_c}$ après avoir moyenné le terme $(1 + \cos \phi_c)$ à 1. Je rappelle que dans ce cas de figure (fig. 5.4), les pentes S_+ à l'arrivée et au départ S_- de la particule sont opposées à cause de la présence du terme B dans le taux de dissipation, ainsi :

$$S_+ = \frac{dE}{d\phi_c} = -S_- = |B|\sqrt{2\epsilon_c}. \quad (5.16)$$

La probabilité de capture selon la figure (5.4) s'écrit donc ainsi :

$$P = \frac{h}{H} = \frac{2S}{A + S} = \frac{2B\sqrt{2\epsilon_c}}{A + B\sqrt{2\epsilon_c}}. \quad (5.17)$$

Il est évident que si $h/H > 1$, alors $P = 1$. Cette formule est valable uniquement lorsqu'il s'agit d'un pure et unique corotation, or la particule passe par une infinité de sites de corotation

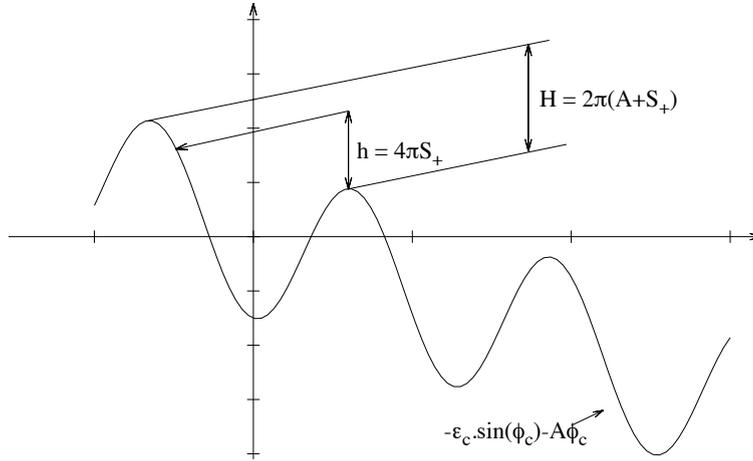


Figure 5.4 – Le potentiel de corotation est représenté par la courbe dont l'équation est $-\epsilon_c \sin(\phi_c) - A\phi_c$, avec A positif et B négatif.

($m + 1 : m$, avec $m \in [1, +\infty]$) depuis sa formation à partir du bord des anneaux principaux (Charnoz et al. [2010]) jusqu'à ce qu'elle atteigne sa position actuelle. Si l'on note $P^{(m)}$ la probabilité de capture en un seul site corotation isolée d'une particule donnée, alors la probabilité totale en tenant compte de toutes les possibilités de capture présentées à la particule, est donnée par :

$$P_{totale} = \sum_{m=1}^{+\infty} P(m, a_0^m). \quad (5.18)$$

Avec

$$P(m, a_0^m) = \frac{2B(a_0^m) \sqrt{2\epsilon_c(m, a_0^m)}}{A(a_0^m) + B(a_0^m) \sqrt{2\epsilon_c(m, a_0^m)}}. \quad (5.19)$$

Notons que les probabilités dépendent du rapport B/A et indépendantes de des paramètres physiques k_{2p} et Q_p .

En effet, le satellite perturbateur crée, via sa masse et son excentricité, une infinité de sites de corotation à l'intérieur et à l'extérieur de son orbite, mais il ne s'agit bien évidemment pas de tenir compte de l'ensemble des sites, je vais me contenter des sites où une corotation n'est pas couplée avec une autre et également, ceux qui sont à une distance raisonnable de la sphère de Hill (Karjalainen [2007] et Crida and Charnoz [2010]) du satellite perturbateur.

1) La première condition est que la résonance soit à une distance raisonnable du rayon de Hill de Mimas, car, si l'on est près ou dans la sphère de Hill, la particule sera immédiatement éjectée, dans une telle région, les résonances ne se produisent pas. Cela impose la contrainte suivante :

$$|a' - a_0| \gg 2r_H = r' \left(\frac{\mu'_s}{3M_p} \right)^{1/3} \sim 520 \text{ km}. \quad (5.20)$$

Un calcul permettant de localiser les centres des résonances de premier ordre $m + 1 : m$ en terme de demi-grand axe à l'intérieur et à l'extérieur de l'orbite de Mimas, nous permet

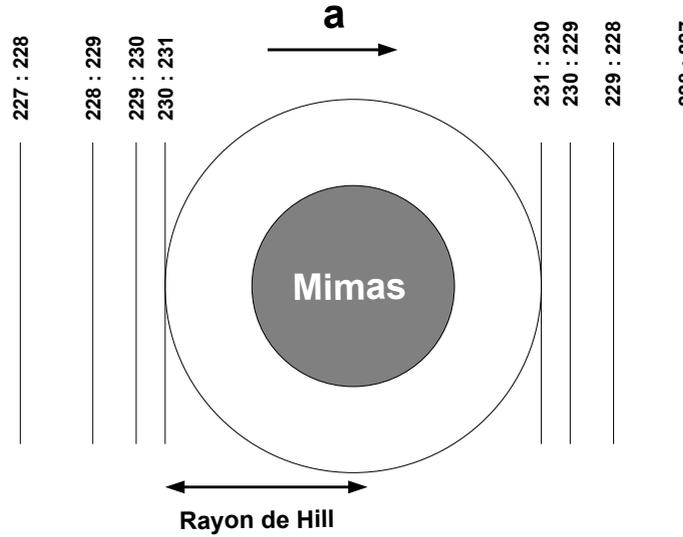


Figure 5.5 – Les résonances prises en compte sous la première contrainte imposée par la sphère de Hill.

d'exclure toutes les résonances dont le m est supérieur à $m_{max} \sim 230$.

2) La deuxième contrainte est que pour ce calcul soit valable, pour des corotations parfaitement isolées, autrement dit, il faut que les sites de corotations ne se chevauchent pas.

Sous ces deux contraintes, nous nous restreignons aux cas où $m \in [1, 36]$. Au delà de cette limite en m , les résonances de corotation commencent à se chevaucher. Cette valeur, dans le cas du potentiel créé par Mimas, représente la limite de l'application du CoraLin dissipatif. Il est clair que, comme on peut le comprendre intuitivement, plus on s'approche du satellite perturbateur, plus la probabilité augmente. Les paramètres utilisés dans le calcul des probabilités sont résumés dans la table (5.2).

	m	a_0 (km)	A	B
Anthée	-11	197657.046	4.0×10^{-6}	-3.4×10^{-10}
Méthone	-15	194235.966	1.0×10^{-5}	-2.2×10^{-10}
Aegaeon	6	167494.302	-7.2×10^{-7}	-1.7×10^{-9}

Table 5.2 – Paramètres entrant (Éq. 5.11) au calcul de la probabilité de capture.

Les valeurs de A et B sont données ici en unités CoraLin. Cela veut dire que la convergence vers le point fixe de la corotation se fait sur une échelle de temps de $1/2B \sim 10^9$ en temps CoraLin. Comme l'unité de temps correspond typiquement à un an, cela implique des temps de convergence de l'ordre du milliard d'années.

5.6 Scénarios de capture

Je présente dans cette section deux scénarios possibles de la capture d'Anthée, Méthone et Aegaeon. Le premier scénario est une capture directe dans la CER et se produit à condition que l'orbite de Mimas soit suffisamment excentrique. Le second scénario est une capture dans

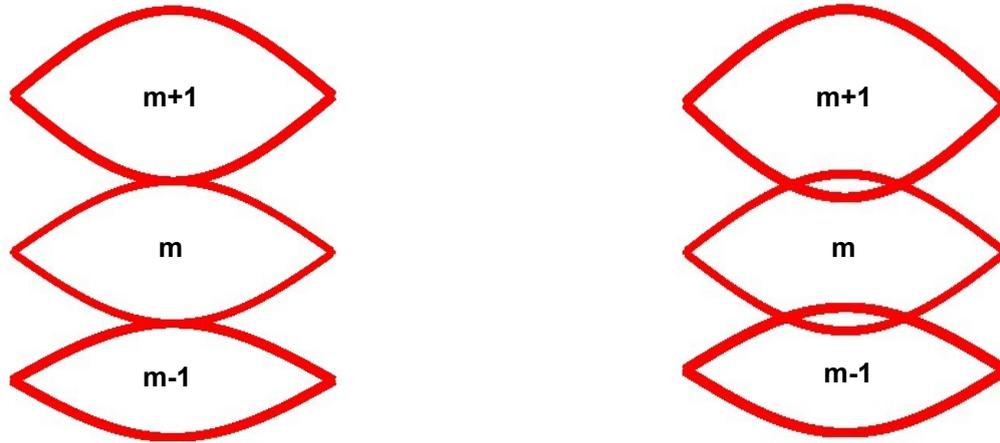


Figure 5.6 – Gauche : Sites de résonances de corotation en contact. Droite : Sites de résonances de corotation qui se chevauchent.

la résonance de Lindblad lorsque l'orbite de Mimas était circulaire, avant d'être excitée par une résonance avec Thétys.

5.6.1 Scénario 1 : Capture directe dans la CER

Dans cette partie de mon étude, je cherche à capturer directement chacun des trois satellites en CER *en présence de la LER*. En respectant les contraintes géométriques et en tenant compte des paramètres utilisés dans le calcul de la migration de Mimas, et ceux correspondant à ces satellites, nous arrivons à capturer chacun des trois avec des probabilités assez faibles. Notons que les valeurs de A et B sont multipliées par 10^4 dans le but de gagner du temps de calcul. Cela n'affecte pas la valeur de la probabilité tant que le rapport A/B est conservé (Éq. 5.19)

Cas d'Anthée : Sur 10000 conditions initiales (nous faisons varier la valeur de ϕ_c entre $(0, 2\pi)$ tout en gardant la même valeur pour χ), nous avons obtenu quatre captures, celle qui est la plus proche de la situation actuelle d'Anthée est celle correspondant aux paramètres et aux conditions initiales résumés dans le tableau (5.3) :

ϵ_L	D	A	B	χ	h_i	k_i	ϕ_c (rad)	Probabilité
-0.123	0.286	8.8644×10^{-7}	-3.4334×10^{-10}	-3	0	0	0	$4 \times 10^{-2}\%$

Table 5.3 – Conditions initiales et paramètres utilisés dans la tentative de capture d'Anthée.

Les figures (5.7) et (5.8) représentent la variation du demi-grand axe, de l'excentricité, de l'angle critique de la CER et le portrait de phase $(\Delta a, \phi_c)$. Ces figures montrent une capture réussie d'Anthée, les amplitudes de variation du demi-grand axe et de l'excentricité sont comparables avec les travaux de [Cooper et al. \[2008\]](#).

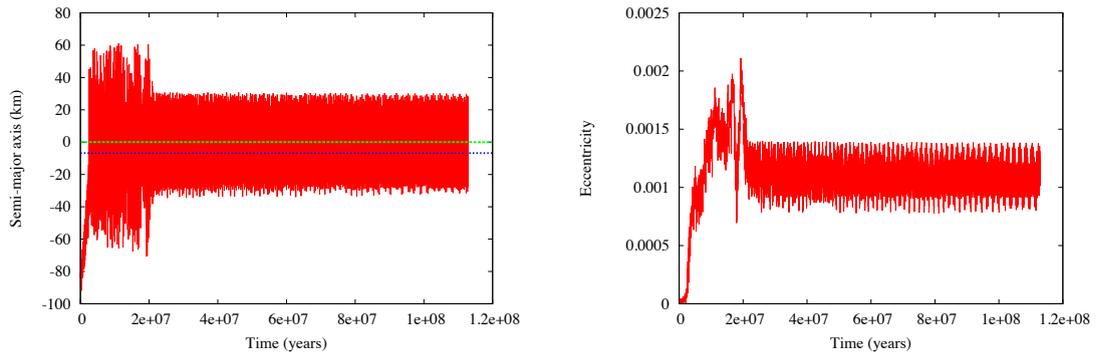


Figure 5.7 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de $\pm 30 \text{ km}$ du demi-grand axe d'Anthée autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de $197656,778 \text{ km}$. **Droite** : Variation en fonction du temps de ± 0.004 de l'excentricité d'Anthée orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.0012 .

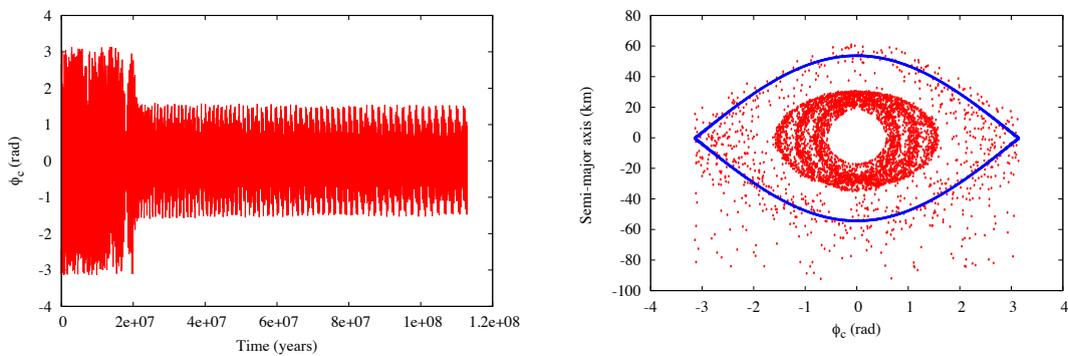


Figure 5.8 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite** : Portrait de phase $(\Delta a, \phi_c)$ représentant clairement la capture d'Anthée à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Cas de Méthone : Sur 10000 conditions initiales, nous avons obtenu 5 captures, celle qui est la plus proche de la situation actuelle de Méthone est celle correspondant aux paramètres et aux conditions initiales résumés dans le tableau (5.4) : Les figures (5.9) et (5.10) représentent

ϵ_L	D	A	B	χ	h_i	k_i	ϕ_c (rad)	Probabilité
-0.115	0.129	5.758×10^{-7}	-2.258×10^{-10}	-3	0	0	0	5×10^{-2}

Table 5.4 – Conditions initiales et paramètres utilisés dans la tentative de capture de Méthone.

la variation du demi-grand axe, de l'excentricité, de l'angles critique de la CER et le portrait de phase ($\Delta a, \phi_c$). Ces figures montrent une capture réussie de Méthone.

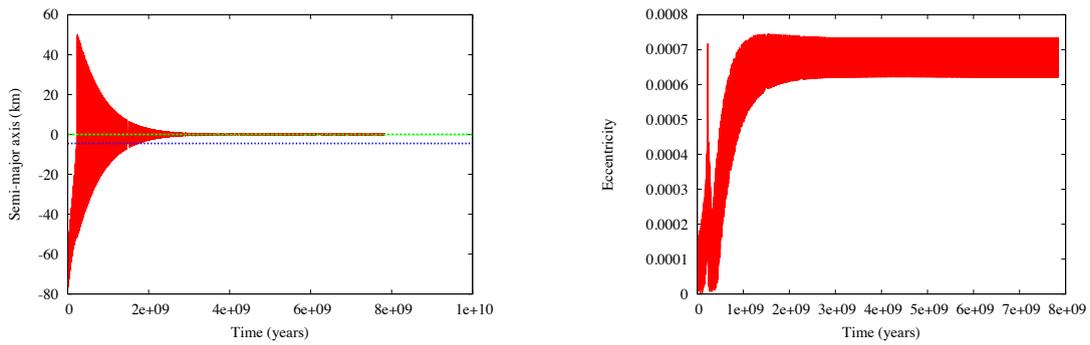


Figure 5.9 – **Gauche** : Variation en fonction du temps du demi-grand axe de Méthone autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de 194234,167 km. **Droite** : Variation en fonction du temps de ± 0.00005 de l'excentricité orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.00067.

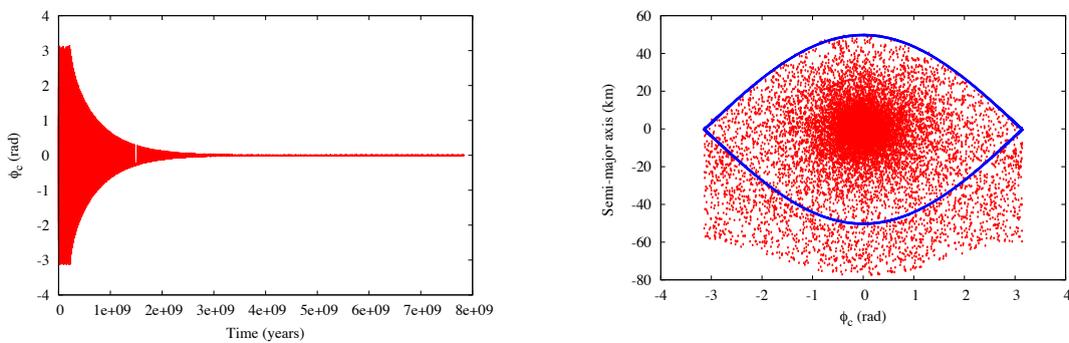


Figure 5.10 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite** : Portrait de phase ($\Delta a, \phi_c$) représentant clairement la capture de Méthone à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Cas d'Aegaeon : Sur 10000 conditions initiales, nous avons obtenu 3 captures, celle qui est la plus proche de la situation actuelle d'Aegaeon est celle correspondant aux paramètres et aux conditions initiales résumés dans le tableau suivant : Les figures (5.11) et (5.12) représentent

ϵ_L	D	A	B	χ	h_i	k_i	ϕ_c (rad)	Probabilité
0.132	-1.155	-6.894×10^{-6}	1.7885×10^{-9}	+3	0	0	0	3×10^{-2}

Table 5.5 – Conditions initiales et paramètres utilisés dans la tentative de capture d'Aegaeon.

la variation du demi-grand axe, de l'excentricité, de l'angle critique de la CER et le portrait de phase ($\Delta a, \phi_c$). Ces figures montrent une capture réussie d'Aegaeon.

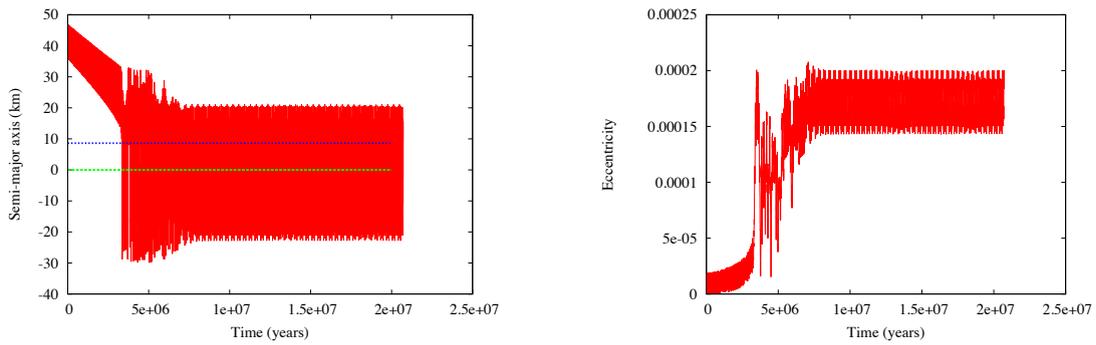


Figure 5.11 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de ± 20 km du demi-grand axe d'Aegaeon autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de 167494,715 km. **Droite** : Variation en fonction du temps de ± 0.000025 de l'excentricité orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.000156.

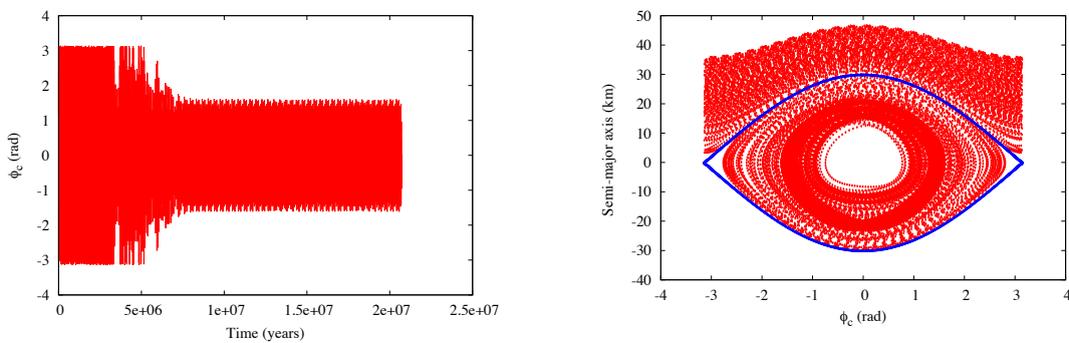


Figure 5.12 –

Gauche : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite** : Portrait de phase ($\Delta a, \phi_c$) représentant clairement la capture d'Aegaeon à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Le tableau (5.6) récapitule les valeurs des probabilités de capture (analytique et numérique) pour les trois satellites, nous retrouvons les mêmes valeurs dans les cas où la LER n'est pas prise en compte que le calcul analytique (corotation pure). En revanche, la prise en compte de la LER diminue les chances d'un facteur 2 de la capture. Notons que la capture se fait dans un cadre chaotique. Des travaux futurs basés sur une étude statistique seront réalisés dans le but de tenter d'expliquer cette diminution en présence du chaos dû à la présence de la LER.

	Probabilité analytique	numérique sans Lindblad	numérique avec Lindblad
Anthée	$9.52 \times 10^{-2} \%$	$8 \times 10^{-2} \%$	$4 \times 10^{-2} \%$
Méthone	$1.11 \times 10^{-1} \%$	$1 \times 10^{-1} \%$	$5 \times 10^{-2} \%$
Aegaeon	$7.33 \times 10^{-2} \%$	$6 \times 10^{-2} \%$	$3 \times 10^{-2} \%$

Table 5.6 – Valeurs des probabilités de capture. Les probabilités analytiques sont obtenues par l'équation 5.19

5.6.2 Probabilité totale

Les tables (5.7 et 5.8) donnent la probabilité de capture analytique calculée selon la formule (5.19) dans les sites où $|m| \in [2, 36]$, ainsi que le probabilité totale qui est de 4 % à l'intérieur et à l'extérieur de l'orbite de Mimas, soit une probabilité totale de 8% pour les petits satellites aléatoirement distribués autour de Mimas.

Résonance interne	a_0 (km)	W (km)	Probabilité analytique
2 :3	141764.752	16.25	4.45×10^{-2} %
3 :4	153289.312	21.01	5.33×10^{-2} %
4 :5	159997.737	24.99	6.07×10^{-2} %
5 :6	164392.001	28.47	6.73×10^{-2} %
6 :7	167494.715	31.59	7.33×10^{-2} %
7 :8	169802.796	34.45	7.88×10^{-2} %
8 :9	171587.052	37.09	8.40×10^{-2} %
9 :10	173007.724	39.57	8.89×10^{-2} %
10 :11	174165.715	41.90	9.35×10^{-2} %
11 :12	175127.738	44.11	9.79×10^{-2} %
12 :13	175939.673	46.22	1.02×10^{-1} %
13 :14	176634.110	48.24	1.06×10^{-1} %
14 :15	177234.839	50.17	1.10×10^{-1} %
15 :16	177759.633	52.04	1.13×10^{-1} %
16 :17	178222.035	53.84	1.17×10^{-1} %
17 :18	178632.550	55.59	1.20×10^{-1} %
18 :19	178999.448	57.28	1.24×10^{-1} %
19 :20	179329.331	58.92	1.27×10^{-1} %
20 :21	179627.532	60.52	1.30×10^{-1} %
21 :22	179898.406	62.08	1.34×10^{-1} %
22 :23	180145.545	63.60	1.37×10^{-1} %
23 :24	180371.939	65.09	1.40×10^{-1} %
24 :25	180580.095	66.54	1.43×10^{-1} %
25 :26	180772.130	67.96	1.46×10^{-1} %
26 :27	180949.849	69.36	1.48×10^{-1} %
27 :28	181114.794	70.72	1.51×10^{-1} %
28 :29	181268.295	72.06	1.54×10^{-1} %
29 :30	181411.504	73.38	1.57×10^{-1} %
30 :31	181545.421	74.67	1.59×10^{-1} %
31 :32	181670.923	75.94	1.62×10^{-1} %
32 :33	181788.779	77.19	1.65×10^{-1} %
33 :34	181899.667	78.42	1.67×10^{-1} %
34 :35	182004.187	79.63	1.70×10^{-1} %
35 :36	182102.872	80.82	1.72×10^{-1} %
36 :37	182196.198	82.00	1.74×10^{-1} %
			P (totale) = 4.28 %

Table 5.7 – Valeurs des probabilités de capture.

Résonance externe	a_0 (km)	W (km)	Probabilité analytique
3 :2	242825.847	29.81	4.77×10^{-2} %
4 :3	224572.678	32.39	5.60×10^{-2} %
5 :4	215157.947	34.99	6.32×10^{-2} %
6 :5	209407.297	37.50	6.96×10^{-2} %
7 :6	205528.532	39.89	7.54×10^{-2} %
8 :7	202735.057	42.16	8.08×10^{-2} %
9 :8	200627.050	44.33	8.59×10^{-2} %
10 :9	198979.679	46.41	9.06×10^{-2} %
11 :10	197656.778	48.41	9.52×10^{-2} %
12 :11	196571.051	50.33	9.95×10^{-2} %
13 :12	195663.948	52.18	1.03×10^{-1} %
14 :13	194894.727	53.97	1.07×10^{-1} %
15 :14	194234.167	55.71	1.11×10^{-1} %
16 :15	193660.757	57.39	1.15×10^{-1} %
17 :16	193158.316	59.03	1.18×10^{-2} %
18 :17	192714.434	60.63	1.22×10^{-1} %
19 :18	192319.436	62.18	1.25×10^{-1} %
20 :19	191965.668	63.70	1.28×10^{-1} %
21 :20	191646.993	65.18	1.32×10^{-1} %
22 :21	191358.437	66.63	1.35×10^{-1} %
23 :22	191095.921	68.05	1.38×10^{-1} %
24 :23	190856.073	69.44	1.41×10^{-1} %
25 :24	190636.077	70.80	1.44×10^{-1} %
26 :25	190433.568	72.14	1.47×10^{-1} %
27 :26	190246.539	73.45	1.50×10^{-1} %
28 :27	190073.281	74.74	1.52×10^{-1} %
29 :28	189912.326	76.01	1.55×10^{-1} %
30 :29	189762.410	77.26	1.58×10^{-1} %
31 :30	189622.434	78.48	1.60×10^{-1} %
32 :31	189491.441	79.69	1.63×10^{-1} %
33 :32	189368.594	80.88	1.65×10^{-1} %
34 :33	189253.155	82.06	1.68×10^{-1} %
35 :34	189144.473	83.22	1.70×10^{-1} %
36 :35	189041.974	84.36	1.73×10^{-1} %
37 :36	188945.142	85.48	1.75×10^{-1} %
			P (totale) = 4.33 %

Table 5.8 – Valeurs des probabilités de capture.

5.6.3 Scénario 2 : Capture dans la LER puis dans la CER

Généralement, la capture se produit lorsque deux satellites évoluent en termes de leurs demi-grands axes via les résonances de moyen mouvement. La capture dans une LER dans ce cas dépend du fait que les deux orbites convergent ou divergent. La capture ne se produit pas quand les orbites des deux corps divergent pendant leur migration. Cependant, elle se produit avec une probabilité de 100% dans le cas où les orbites convergent et où l'excentricité de l'orbite de la particule est nulle. Ainsi, il se peut que nos petits satellites (ou autres), ont été capturés lorsque l'orbite de Mimas était circulaire, et que la capture en corotation est arrivée après, c'est-à-dire, une fois que que l'excentricité de l'orbite de Mimas a été excitée par la résonances Mimas-Thétys 4 : 2 (Champenois and Vienne [1999] et Noyelles et al. [2012]). Pour cela, nous proposons dans cette partie du travail, une étude numérique qui vérifie cette hypothèse.

Tout d'abord, considérons l'excentricité de Mimas, la figure 5.13 représente l'évolution du paramètre ϵ_c en fonction du temps, ce paramètre contient l'excentricité de Mimas (Équation 5.2). Nous avons choisi pour ϵ_c une variation en tangente hyperbolique qui a l'avantage d'être

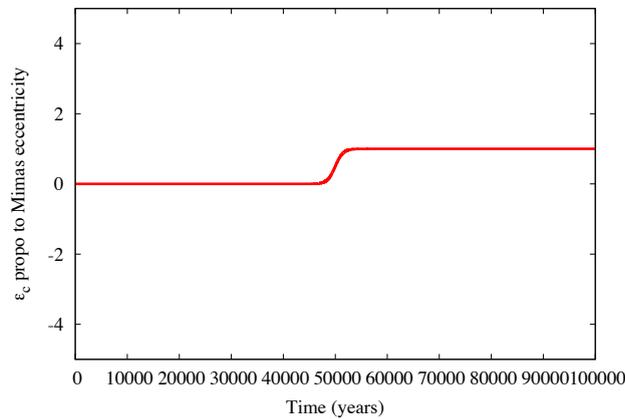


Figure 5.13 – Variation de l'excentricité de Mimas en fonction du temps.

analytiquement simple et physiquement lisse, et que surtout elle représente le saut en excentricité, autrement dit, elle permet de contrôler l'apparition de l'excentricité de Mimas. Cette fonction est introduite dans CoraLin telle que :

$$\epsilon_c = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{t - 5 \times 10^5}{2 \times 10^2} \right) + 1 \right) \quad (5.21)$$

Cas d'Anthée :

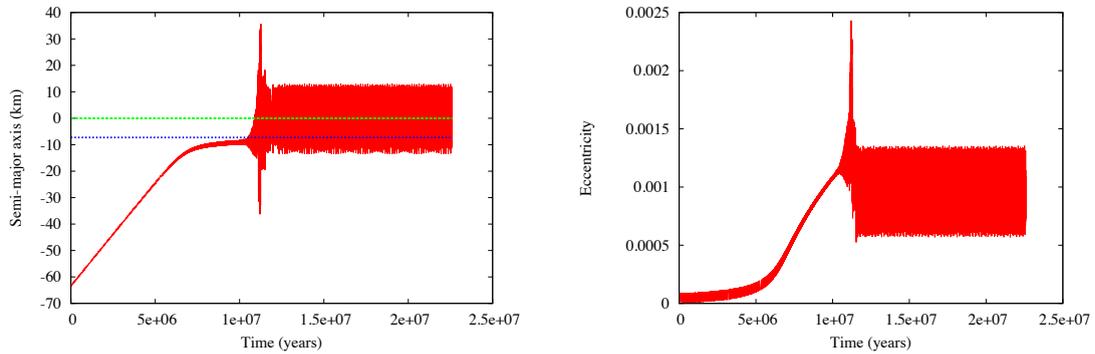


Figure 5.14 – Gauche : Variation en fonction du temps du demi-grand axe autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de $167494,715 \text{ km}$. **Droite :** Variation en fonction du temps de l'excentricité orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.0009 .

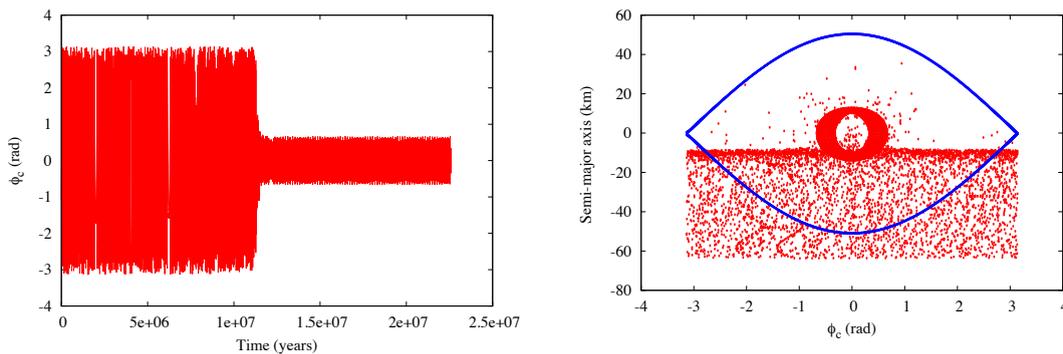


Figure 5.15 – Gauche : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite :** Portrait de phase $(\Delta a, \phi_c)$ représentant clairement la capture initialement dans la LER puis dans la CER à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Cas de Méthone :

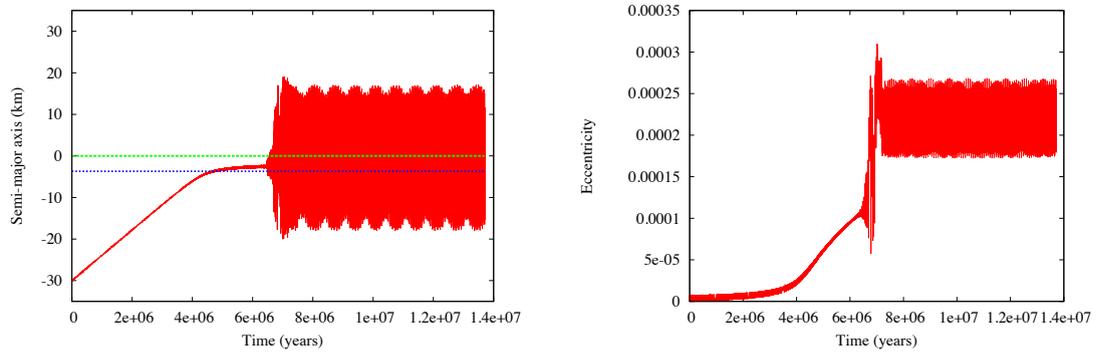


Figure 5.16 – **Gauche** : Variation en fonction du temps du demi-grand axe autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de $167494,715 \text{ km}$. **Droite** : Variation en fonction du temps de l'excentricité orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.000225 .

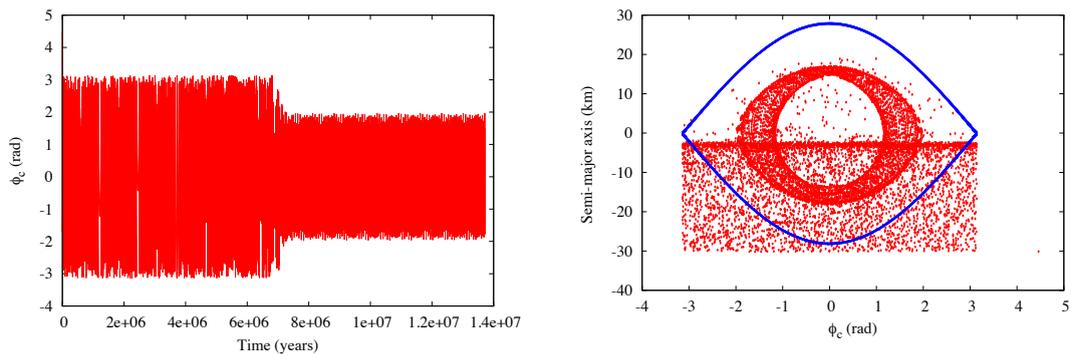


Figure 5.17 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite** : Portrait de phase $(\Delta a, \phi_c)$ représentant clairement la capture initialement dans la LER puis dans la CER à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Cas d'Aegaeon : [!h]

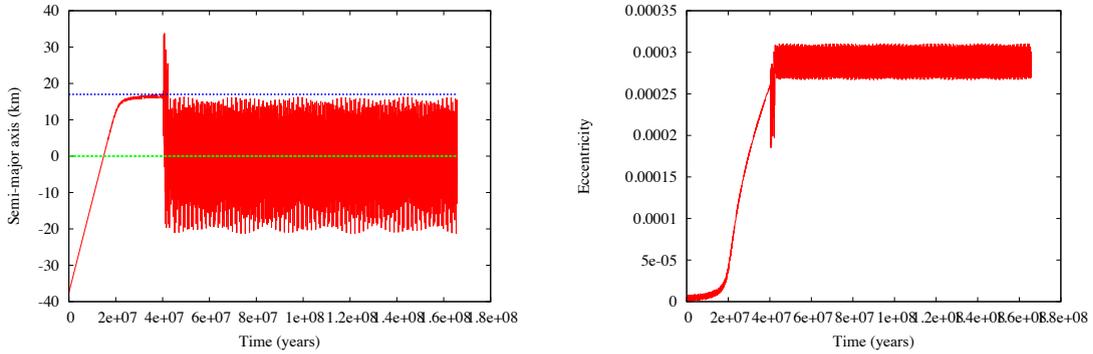


Figure 5.18 – **Gauche** : Variation en fonction du temps du demi-grand axe autour d'une valeur moyenne correspondant au centre de la CER dont le demi-grand axe est de 167494, 715 km. **Droite** : Variation en fonction du temps de l'excentricité orbitale autour d'une valeur moyenne de 0.00013.

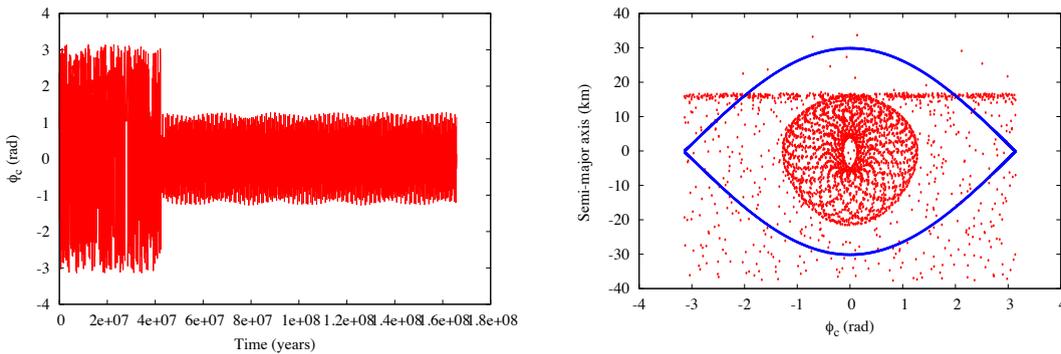


Figure 5.19 – **Gauche** : Variation en fonction du temps de l'angle critique de la résonance de corotation excentrique. **Droite** : Portrait de phase $(\Delta a, \phi_c)$ représentant clairement la capture initialement dans la LER puis dans la CER à l'intérieur de la corotation schématisée par la courbe bleue.

Les résultats des probabilités de capture dans le cadre du second scénario sont résumées dans la table (5.9).

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons estimé la probabilité de capture des trois satellites Anthée, Méthone et Aegaeon, nous avons mis en place, une formule de probabilité de capture dans une pure résonance de corotation. La formule obtenue (5.19) permet de conclure, que cette probabilité dépend du taux et du gradient de migration de la particule ainsi que de la largeur des sites de corotation, et qu'elle ne dépend pas du k_2/Q de la planète.

J'ai ensuite décrit les deux scénarios de capture en corotation et estimé les probabilités de capture pour chacun des deux. Le premier scénario est une capture directe en CER perturbée par la LER associée, nous avons introduit un taux et un gradient de migration de la particule

	Probabilité numérique
Anthée	0.2 %
Méthone	7 %
Aegaeon	4 %

Table 5.9 – Valeurs des probabilités de capture obtenus via le second scénario.

en faisant migrer Mimas avec $\frac{da}{dt}$ positif, j'ai obtenu des valeurs de quelques centièmes de pour-cents pour chacun des sites où se trouvent les satellites. Concernant le deuxième scénario où la capture se fait d'abord dans la LER, nous avons ajouté un taux de migration de la particule. Sachant que la capture en LER nécessite la convergence des orbites, j'ai introduit un $\frac{da}{dt}$ positif pour la capture d'Anthée et Méthone et un $\frac{da}{dt}$ négatif pour la capture d'Aegaeon. Les valeurs obtenues sont plus importantes (entre 0.2 % et 7 %) que celles obtenues avec le premier scénario.

J'ai également, estimé la probabilité totale de capture dans tous les sites que la particule pourrait traverser ou rencontrer, tous en décrivant les limites du modèle CoraLin, ainsi, les sites qui sont pris en compte dans ce calcul. Nous avons trouvé une valeur totale (à l'intérieur et à l'extérieur de l'orbite de Mimas) d'environ 8% sans tenir compte de l'effet de la LER qui diminue cette probabilité, cette diminution est d'un facteur deux pour les trois satellites. En effet, pour expliquer l'existence des trois satellites que la sonde Cassini a observés, on peut supposer qu'initialement, il y avait une centaine de particules (dont le diamètre est de l'ordre du kilomètre) dont seulement trois qui ont été capturées en CER avec Mimas. Cependant, le fait que la probabilité obtenue via le second scénario est plus forte, cela laisse supposer qu'initialement il y avait peu de particules dans l'environnement de Mimas.

Conclusion & Perspectives

Conclusions

Au cours de cette thèse, je me suis intéressée à une étude dynamique et générique des corps en résonance de moyen mouvement de premier ordre.

Cela peut concerner deux satellites autour d'une planète, deux planètes autour d'une étoile ou d'un pulsar, une planète dans un système binaire...

Problème à trois corps général : Dans le cadre du problème à trois corps général elliptique, j'ai mis en place un modèle dynamique simple et sans dimension (2.27) permettant de décrire le comportement de ces corps. J'ai abouti à un système à deux degrés de liberté, simple, fermé et générique est paramétré par trois quantités seulement : ϵ , ϵ' et D , liées respectivement aux masses de chacun des deux corps en résonance et à la distance entre les deux résonances non dégénérées causées par l'aplatissement dû au corps central. Lorsque cet effet n'est pas pris en compte, je mets en évidence l'existence d'une seconde intégrale du mouvement, qui correspond à une nouvelle version généralisée de la constante de Jacobi. Je l'ai interprété géométriquement comme étant une quantité qui permet de décrire l'échange de l'énergie entre deux corps en résonance.

Problème restreint à trois corps : Dans le cadre du problème à trois corps restreint et elliptique, j'ai étudié la dynamique de deux satellites de masses μ_s et μ'_s , orbitant dans le même plan autour d'une planète de masse M_p . Après avoir moyenné les équations du mouvement près d'une résonance de moyen mouvement de premier ordre, tout en signalant que dans le développement réalisé, je n'ai gardé que les termes de premier ordre en excentricité tout en considérant les taux de précession séculaires $\dot{\omega}_s$ et $\dot{\omega}'_s$ des satellites. Le système résultant, en tenant compte des constantes du mouvement (énergie et moment angulaire), est écrit sous forme d'un Hamiltonien avec deux degrés de liberté dont les angles sont $\phi = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi$ et $\phi' = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'$. L'intégrabilité de ce système est discuté.

Dans le cas où $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s = 0$ (problème képlérien), j'ai mis en évidence l'existence, en plus de l'Hamiltonien, d'une deuxième constante du mouvement, ce qui rend l'Hamiltonien intégrable (voir [Sessin and Ferraz-Mello \[1984\]](#)). Comme pour le cas général, cette nouvelle constante est une nouvelle version de la constante de Jacobi que j'ai interprétée géométriquement. En effet, les termes séculaires forcent la précession différentielle entre les deux orbites (i.e. $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s \neq 0$), et détruisent cette constante de Jacobi généralisée. La différence majeure par rapport au cas général ($\mu_s \neq 0, \mu'_s \neq 0$), est que les deux satellites ne jouent pas les mêmes rôles, car cette symétrie est brisée, dans le problème restreint (e.g. $\mu_s = 0$). C'est à partir de ce fait que l'on peut dire que les deux angles critiques résonants ϕ et ϕ' , ou leurs homologues ϕ_L et ϕ_c , sont alors associés à deux résonances de types différents (Lindblad et corotation, ou LER et CER, respectivement) qui vont avoir alors des effets différents. Nous avons décrit l'effet de chacune des résonances : la LER excite principalement l'excentricité de la particule test, en gardant son demi-grand axe relativement constant. Alors que la CER change principalement le demi-grand axe tout en gardant l'excentricité presque constante (Eq. (3.7)).

J'ai décrit le système simultanément par un Hamiltonien réduit (Eq. (3.9)), qui dépend de deux paramètres sans dimension et qui contrôlent la dynamique du système : (i) la distance

$D \propto \dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s$ entre la CER et la LER, et (ii) le paramètre de forçage ϵ_L qui inclut et la masse et l'excentricité orbitale du satellite perturbateur, voir la table (3.1). J'ai écrit les équations du mouvement correspondant à cette configuration, le système obtenu est un système d'équations différentielles qui constitue le "modèle CoraLin" (voir le système (3.10)).

Le modèle CoraLin décrit le comportement de chacune des deux résonances et surtout le couplage entre les deux, autrement dit, le couplage entre le mouvement d'un pendule simple (Eq. (3.12)) dans la largeur de la séparatrice est ± 2 , et un oscillateur de type Andoyer (Eq. (3.11)) centré à $\chi = -D$, voir Fig. 3.1. J'ai utilisé des paramètres sans dimension qui englobent tous les paramètres des systèmes (masse et excentricité orbitale du perturbateur, précessions séculaires des orbites, etc...), ce qui permet d'expliquer de façon générique la dynamique du système via de simples intégrations numériques, sections de Poincaré, etc ... Ainsi, le système est intégrable pour $D = 0$, le chaos apparaît rapidement pour de très petites valeurs de D aux alentours de 0.01, voir la figure (3.6). Par contre pour des valeurs de $D \gg 2$, le système est presque intégrable, avec un comportement qui peut être qualitativement décrit en utilisant des arguments d'invariance adiabatique. Ces résultats sont dynamiquement intéressants, car ils permettent de décrire le comportement d'un corps dans une configuration donnée de manière générique et claire. De plus les modèles créés dans le cadre de cette thèse sont applicables à plusieurs cas dans le système solaire ainsi que dans les systèmes extra-planétaires.

Applications aux petits satellites de Saturne : Nous avons également examiné les portraits de phase des petits satellites saturniens capturés dans des CER avec Mimas : Aegaeon, Méthone et Anthée. Des intégrations numériques (Fig. 4.4) montrent qu'Aegaeon, Méthone et spécialement Anthée sont proches de régions dominées par le chaos. Nous avons aussi, effectué des comparaisons entre des intégrations à N corps complètes et CoraLin. Ces comparaisons montrent que CoraLin, modèle simple et sans dimension contient l'ensemble de l'information dynamique des corps en résonance de moyen mouvement de premier ordre dans le cadre du problème à trois corps restreint et elliptique.

Nous avons ensuite ajouté au modèle coralin un terme de migration orbitale de Mimas et/ou des petits satellites, permettant d'explorer différents scénarios de capture en résonance de corotation.

Nous avons calculé la probabilité de capture des trois satellites Anthée, Méthone et Aegaeon. Nous avons mis en place, une formule de probabilité de capture dans une pure résonance de corotation, la formule obtenue (5.19) permet de conclure, que la probabilité dépend du taux et du gradient de migration de la particule ainsi que la largeur des sites de corotation, et qu'elle ne dépend pas du k_2/Q de la planète.

Nous avons ensuite décrit les scénarios de capture en corotation et estimé les probabilités de capture pour chacun des deux. Le premier scénario est une capture directe en CER perturbée par la LER associée, nous avons introduit un taux et un gradient de migration de la particule en faisant migrer Mimas avec un $\frac{da}{dt}$ positif, nous avons obtenu des valeurs de quelques fois 0.01% pour chacun des sites où se trouvent les satellites. Concernant le deuxième scénario où la capture se fait d'abord dans la LER, nous avons ajouté un taux de migration de la particule. Sachant que la capture en LER nécessite la convergence des orbites, nous avons introduit un $\frac{da}{dt}$ positif pour la capture d'Anthée et Méthone et un $\frac{da}{dt}$ négatif pour la capture d'Aegaeon. Les valeurs obtenues sont plus importantes (entre 0.2 % et 7 %) que celles obtenues avec le premier scénario.

Nous avons également, estimé la probabilité totale de capture dans tous les sites que la particule pourrait traverser ou rencontrer, tous en décrivant les limites du modèle CoraLin, ainsi, les sites qui sont pris en compte dans ce calcul. Nous avons trouvé une valeur totale (à l'intérieur et à l'extérieur de l'orbite de Mimas) d'environ 8% sans tenir compte de l'effet de la LER qui diminue cette probabilité, cette diminution est d'un facteur deux pour les trois

satellites. En effet, pour expliquer l'existence des trois satellites que Cassini a observé, on peut supposer qu'initialement, il y avait une centaine de particules (dont le diamètre est de l'ordre du kilomètre) dont seulement trois qui ont été capturés en CER avec Mimas.

La probabilité obtenue via le second scénario est plus forte (quelques dizaines de pourcents), ce scénario requiert donc peu de petits satellites dans l'environnement de Mimas, afin d'expliquer les trois captures actuellement observées.

Perspectives

En perspective, dans le cadre du modèle CoraLin, je vais mettre en place une étude analytique qui permet de prévoir le chaos dû au couplage des résonances CER et LER. Je vais développer ce modèle pour étudier des résonances d'ordres plus élevés, afin de l'appliquer aux satellites de Pluton qui étaient en résonances avec Charon, et généraliser la nouvelle constante de Jacobi trouvée en dehors des résonances. Concernant, l'étude du problème à trois corps général, je vais utiliser le résultat de la nouvelle constante de Jacobi généralisée pour détailler dans le cadre des planètes extra-solaires l'échange d'énergie qu'il peut y avoir entre deux planètes en résonance de moyen de premier ordre. Une autre étude sera dédiée à une analyse plus détaillée de la probabilité de capture. Les résultats obtenus dans le chapitre 5 seront comparés à des simulations effectuées par des intégrations numériques exactes (comme Mercury). Dans la mesure où les valeurs de la probabilité est un élément d'information sur la population initiales des satellites. Je vais développer un calcul statistique plus élaboré, en tenant compte des perturbations dues au couplage entre la CER et la LER. En effet, avoir une estimation de la population initiale est un ingrédient nécessaire pour tester les modèles de formation des satellites.

Annexes

Annexe A

Les coefficients de Laplace utilisés dans le modèle CoraLin

Définitions :

$$\frac{1}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \cos(\theta)]^\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_\gamma^m \cos(m\theta) \quad (\text{A.1})$$

$$b_\gamma^m(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(m\theta) \cdot d\theta}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \cos(\theta)]^\gamma} \quad (\text{A.2})$$

Donc :

$$b_\gamma^m(\alpha) = b_\gamma^{-m}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^\gamma} b_\gamma^m \left(\frac{1}{\alpha} \right). \quad (\text{A.3})$$

En posant $\beta = 1/\alpha$:

$$\frac{db_\gamma^m(\alpha)}{d\alpha} = -\beta^{2\gamma+1} \left[2\gamma \cdot b_\gamma^m(\beta) + \beta \frac{db_\gamma^m(\beta)}{d\beta} \right] \quad (\text{A.4})$$

Relations de récurrence (voir le chapitre de F. Shu Shu [1984] dans *Planetary Rings*) :

$$b_\gamma^m = \frac{\gamma\alpha}{m} \cdot (b_{\gamma+1}^{m-1} - b_{\gamma+1}^{m+1}) \quad (\text{A.5})$$

$$b_\gamma^m = (1 + \alpha^2) \cdot b_{\gamma+1}^m - \alpha \cdot (b_{\gamma+1}^{m-1} + b_{\gamma+1}^{m+1}) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{db_\gamma^m}{d\alpha} = Db_\gamma^m = \gamma \cdot (b_{\gamma+1}^{m-1} + b_{\gamma+1}^{m+1} - 2\alpha \cdot b_{\gamma+1}^m) \quad (\text{A.7})$$

De là :

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{\gamma+1}^m = b_\gamma^m + \frac{\alpha}{\gamma} Db_\gamma^m \quad (\text{A.8})$$

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{\gamma+1}^{m+1} = \left(\alpha - \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \cdot \frac{m}{\gamma} \right) b_\gamma^m + \frac{1 + \alpha^2}{2\gamma} Db_\gamma^m \quad (\text{A.9})$$

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{\gamma+1}^{m-1} = \left(\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \cdot \frac{m}{\gamma} \right) b_\gamma^m + \frac{1 + \alpha^2}{2\gamma} Db_\gamma^m \quad (\text{A.10})$$

Pour le cas particulier où $\gamma = 1/2$:

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{3/2}^m = b_{1/2}^m + 2\alpha D b_{1/2}^m \quad (\text{A.11})$$

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{3/2}^{m+1} = \left[\alpha - \frac{(1 - \alpha^2)m}{\alpha} \right] b_{1/2}^m + (1 + \alpha^2) D b_{1/2}^m \quad (\text{A.12})$$

$$(1 - \alpha^2) \cdot b_{3/2}^{m-1} = \left[\alpha + \frac{(1 - \alpha^2)m}{\alpha} \right] b_{1/2}^m + (1 + \alpha^2) D b_{1/2}^m \quad (\text{A.13})$$

Le développement de la partie directe du potentiel perturbateur en premier ordre en excentricité (e_p de la particule test et e_s du satellite perturbateur de masse m_s) :

$$-\frac{Gm_s}{\Delta} = -\frac{Gm_s}{\Delta_0} + \frac{Gm_s}{a_s} e_p \cdot A^m(\alpha) \cos(\Psi_L) + \frac{Gm_s}{a_s} e_s \cdot E^m(\alpha) \cos(\Psi_c), \quad (\text{A.14})$$

où $\Delta_0 = [a_p^2 + a_s^2 - 2a_p a_s \cdot \cos(\lambda - \lambda_s)]^{1/2}$. De plus, nous avons toujours $\alpha = a_p/a_s$, ainsi nous avons : $m > 0, \alpha < 1$ (résonance interne) ou $m < 0, \alpha > 1$ (résonance externe). Finalement :

$$\begin{aligned} A^m(\alpha) &= \frac{1}{2} [2(m+1) + \alpha D] b_{1/2}^{m+1}(\alpha), & \Psi_L &= (m+1)\lambda_s - m\lambda_p - \varpi \\ E^m(\alpha) &= -\frac{1}{2} [(2m+1) + \alpha D] b_{1/2}^m(\alpha), & \Psi_c &= (m+1)\lambda_s - m\lambda_p - \varpi_s, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ceux-ci sont identiques à [Sicardy \[1991\]](#), (ici, on a corrigé le signe moins qui apparait dans cette référence).

Notes :

En prenant pour le moment $m > 0$ (résonance interne), nous avons $A^m(\alpha) > 0$ et $E^m(\alpha) < 0$. De là, le potentiel $(Gm_s/a_s)e_p \cdot A^m(\alpha) \cos(\Psi_L)$ est maximum pour $\Psi_L = 0$, ce qui correspond au fait que la particule est de l'autre côté du satellite, comme prévu.

Si l'on compare avec [Ellis and Murray \[2000\]](#) :

- Résonance interne :

La fonction perturbatrice (opposé du potentiel perturbateur) provenant de l'action du satellite agissant sur la particule est :

$$R_s = \frac{Gm_s}{a_s} R_D(\alpha), \quad (\text{A.16})$$

avec $\alpha = a_p/a_s < 1$. Ainsi, en premier ordre en excentricité e_p et e_s :

$$R_D(\alpha) = e_p f_{27} \cdot \cos[j\lambda_s - (j-1)\lambda_p - \varpi_p] + e_s f_{31} \cdot \cos[j\lambda_s - (j-1)\lambda_p - \varpi_s] \quad (\text{A.17})$$

Eq. A.16 est identique à Eq. A.14, en prenant $m = j - 1$.

- Résonance externe :

La fonction perturbatrice provenant de l'action du satellite sur la particule est :

$$R_s = \frac{Gm_s}{a_s} \alpha R_D(\alpha), \quad (\text{A.18})$$

avec $\alpha = a_s/a_p < 1$. ainsi :

$$R_D(\alpha) = e_s f_{27} \cdot \cos[j\lambda_p - (j-1)\lambda_s - \varpi_s] + e_p f_{31} \cdot \cos[j\lambda_p - (j-1)\lambda_s - \varpi_p] \quad (\text{A.19})$$

Eq. A.18 est identique à Eq. A.14, en prenant $m = -j$.

Nous devons noter que le α considéré ici est l'inverse de α utilisé dans l'équation A.14. En notant $\beta = 1/\alpha$, nous avons l'équation A.4 (avec $\gamma = 1/2$) :

$$\frac{db_{1/2}^m(\alpha)}{d\alpha} = -\beta^2 \left[b_{1/2}^m(\beta) + \beta \frac{db_{1/2}^m(\beta)}{d\beta} \right], \quad (\text{A.20})$$

dans laquelle, nous échangeons f_{27} et f_{31} dans A^m et E^m .

En résumé, nous gardons les termes jusqu'à l'ordre 3 en excentricité et en inclinaisons dans le potentiel :

- Pour une résonance interne :

$$A^m = - [f_{27} + e_p^2 f_{28} + e_s^2 f_{29} + (s_p^2 + s_s^2) f_{30}] \quad (\text{A.21})$$

$$E^m = - [f_{31} + e_p^2 f_{32} + e_s^2 f_{33} + (s_p^2 + s_s^2) f_{34}], \quad (\text{A.22})$$

où le coefficient f_i doit être évalué à $\alpha = a_p/a_s$ et pour $j = m + 1$ dans les tables de [Ellis and Murray \[2000\]](#).

- Pour une résonance externe :

$$A^m = -\frac{a_s}{a_p} [f_{31} + e_s^2 f_{32} + e_p^2 f_{33} + (s_p^2 + s_s^2) f_{34}] \quad (\text{A.23})$$

$$E^m = -\frac{a_s}{a_p} [f_{27} + e_s^2 f_{28} + e_p^2 f_{29} + (s_p^2 + s_s^2) f_{30}], \quad (\text{A.24})$$

où le coefficient f_i doit être évalué à $\alpha = a_s/a_p$ et pour $j = -m$ dans les tables de [Ellis and Murray \[2000\]](#).

Annexe B

Article 1 : Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn

Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn

Philippe Robutel · Nicolas Rambaux ·
Maryame El Moutamid

Received: 31 August 2011 / Revised: 4 November 2011 / Accepted: 23 February 2012 /
Published online: 10 April 2012
© Springer Science+Business Media B.V. 2012

Abstract The Cassini spacecraft collects high resolution images of the Saturnian satellites and reveals the surface of these new worlds. Tiscareno et al. succeeded to determine the Epimetheus rotation from the Cassini Imaging Science Subsystem data, initiating studies on the rotation of Epimetheus and its companion Janus (Tiscareno et al., *Icarus* 204:254–261, 2009; Noyelles, *Icarus* 207:887–902, 2010; Robutel et al., *Icarus* 211:758–769, 2011). Especially, Epimetheus is characterized by its horseshoe shape orbit and the presence of the swap has to be introduced explicitly into rotational models. During its journey in the Saturnian system, Cassini spacecraft accumulates the observational data of the other satellites and it will be possible to determine the rotational parameters of several of them. To prepare these future observations, we built rotational models of the coorbital (also called Trojan) satellites Telesto, Calypso, Helene, and Polydeuces, in addition to Janus and Epimetheus. Indeed, Telesto and Calypso orbit around the L_4 and L_5 Lagrange points of Saturn-Tethys while Helene and Polydeuces are coorbital of Dione. The goal of this study is to understand how the departure from the Keplerian motion induced by the perturbations of the coorbital body, influences the rotation of these satellites. To this aim, we introduce explicitly the perturbation in the rotational equations by using the formalism developed by Érdi (*Celest Mech* 15:367–383, 1977) to represent the coorbital motions, and so we describe the rotational motion of the coorbitals, Janus and Epimetheus included, in compact form.

Keywords Rotation · Coorbitals · Libration · Secondary resonance · Saturn satellites · Hamiltonian formulation

P. Robutel (✉) · N. Rambaux · M. El Moutamid
ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, Paris, France
e-mail: robutel@imcce.fr

N. Rambaux
Université Pierre et Marie Curie (UPMC), Paris, France

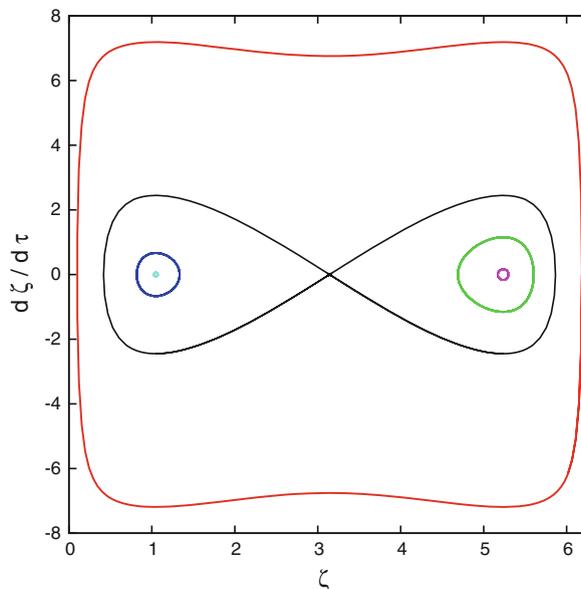
M. El Moutamid
LESIA, Observatoire de Paris, Paris, France

1 Introduction

The space mission Cassini orbiting Saturn since 2004 provides a lot of data and notably images of the surface of over 20 satellites (Thomas 2010). From these images methods based on limb profile provide the satellites shape (Thomas et al. 1998, 2007; Thomas 2010). To combine the different images taken at different times, it is crucial to assume a rotational motion of the satellites. Thus, the rotational determination is obtained as a by-product result. Usually for almost all satellites a synchronous uniform rotational motion seems to be enough to fit the images (Thomas et al. 2007). However, for specific cases such as Janus and Epimetheus more elaborated rotational models are required (Tiscareno et al. 2009) because of the swap in their orbital motion. This swap is due to the 1:1 mean motion resonance where every 4 years these satellites approach and swap their orbits by a few tens of kilometers. The resulting orbits in the rotating reference frame are horseshoe shaped orbits.

In the Saturnian system, four additional coorbital satellites (i.e. in 1:1 orbital resonance) are currently known. They are Calypso and Telesto that are coorbital of Tethys, and, Helene and Polydeuces, coorbital of Dione. Contrary to Janus and Epimetheus, their orbits describe a tadpole shape in the rotating reference frame (Fig. 1). Their masses are very small with respect to their main satellites Tethys and Dione, whereas Janus and Epimetheus have a comparable size. According to *Horizons* ephemeris (Giorgini et al. 1996), the mass ratio between Janus and Epimetheus is about 3.604, while the masses of Telesto, Calypso, and Helene are several tens of thousand times smaller than the one of Tethys and Dione. We note that Polydeuces' mass is currently unknown, but it is expected much smaller than the one of Helene because the mean radius of Polydeuces is less than 2 kilometers (Porco et al. 2007). Consequently, the orbital motion of these four small satellites may be deduced from the restricted three body problem including Saturn and one of these small bodies, Tethys or Dione. In this framework, the small satellites are located close to the L_4 and L_5 Lagrange points of the main satellites, executing a tadpole orbit around one of the Lagrange points (see Christou et al. 2007 and references therein). The objective of the present paper is to investigate the influence of the orbital oscillations resulting from the 1:1 orbital resonance, on the rotational motion of these satellites by developing a general method based on the Hamiltonian approach and parametrization of the orbital motion.

Fig. 1 Average orbit of the satellites modeled by the Eq. (5) plotted in the plan $(\zeta, d\zeta/d\tau)$. The coordinates of L_3, L_4 and L_5 are, respectively $(\pi, 0), (\pi/3, 0)$ and $(5\pi/3, 0)$. The two tadpole orbits surrounding L_4 are associated with Calypso (smallest one) and Helene, while the ones around L_5 corresponds to Telesto (smallest one) and Polydeuces. The outermost orbit describes the average motion of Epimetheus with respect to Janus



The coorbital satellites have irregular shape that probably results from their original accretion or their impact history (Porco et al. 2007; Thomas 2010). The shape can be approximated by an ellipsoid obtained from the best fit to the numerical shape model developed by Thomas (2010). But, for the rotation, the main parameters of interest are the moments of inertia. They can be deduced from the semi-axes of the ellipsoid by assuming an homogenous interior. The error can be estimated as of the order of 30% for Janus (see Sect. 4), so we could explore a large range of values around the homogenous ellipsoidal shape. In addition, we assume that the rotation of these satellites is synchronous as in Porco et al. (2007) and Thomas (2010) because this is the most expected state due to tidal dissipation (e.g. Peale 1999).

In Robutel et al. (2011) a perturbative approach has been used to solve the equations of the rotational motion by assuming that the orbital trajectories of Janus and Epimetheus were quasiperiodic. This method allows us to determine and to measure the influence of the coorbital resonance on the rotation of these satellites. Here, we propose to apply such a method to compute efficiently the rotational motion of these satellites. As the satellites present a 1:1 orbital resonance and 1:1 spin-orbit resonance, first we clarify the vocabulary used in this paper. On one hand, the 1:1 mean motion resonance generates tadpole or horseshoe orbits along which the difference of the longitude of the two satellites are perturbed (called usually libration) with an orbital frequency ν that we called the coorbital frequency. On the other hand, the 1:1 spin-orbit resonance also causes a libration corresponding to an oscillation of the rotation angle of the satellite with respect to an uniform rotation. For quasiperiodic motion, the frequency that depends on the amplitude of the oscillation is called proper libration frequency. This frequency will be denoted σ at the center of libration (see e.g. Wisdom 2004). The term libration is used only to describe the quasiperiodic rotational motion of the satellites.

The paper is divided as follows: first we describe the representation of the orbital motion that we use to model the coorbital satellites. We then present a Hamiltonian formulation of the rotational problem and discuss on non-resonant and secondary resonant cases. These secondary resonant cases result in commensurability between the libration frequency and orbital frequency. They appear for some values of the triaxiality of the satellites and we detail the 1:1 and 1:2 secondary resonances. In particular, we show how the overlap of resonances associated with the coorbital frequency generates relatively large chaotic regions. Finally, we discuss our results in prevision of future observations and the assumption made in this paper.

2 Approximation of the orbital motion

In this paper, we restrict the orbital model to the circular restricted three-body problem. It is within this simplified framework that the phenomena we want to highlight will appear the most clearly. Let us consider two bodies of masses m_0 (Saturn) and m_1 (Dione or Tethys) with $m_0 \gg m_1$ and

$$\mu = \frac{m_1}{m_0 + m_1}. \quad (1)$$

The body of mass m_1 describes a circular orbit of radius r_0 centered on the most massive body with an angular velocity (mean motion) equal to n . The origin of the reference frame is located at the massive body (the planet), and polar coordinates are assigned to the two other bodies: (r_0, v_p) to the main satellite, and (r, v) to the Trojan.

Érdi (1977), in his paper dedicated to the dynamics of the Jovian Trojans, derives asymptotical solutions of the Trojan motion in the case of the elliptic restricted three body problem

expanding the series up to order two in $\sqrt{\mu}$. Limiting Érdi's theory to the first order in $\sqrt{\mu}$ and assuming circular revolutions for the two massive bodies, the coordinates (r, v) can be approximated by these expressions¹:

$$r(t) = r_0 \left[1 + \sqrt{\mu} \rho \cos(v_p(t) + \zeta(t) + \psi) - \frac{2}{3n} \frac{d\zeta(t)}{dt} \right], \tag{2}$$

$$v(t) = v_p(t) + \zeta(t) - 2\sqrt{\mu}\rho \sin(v_p(t) + \zeta(t) + \psi), \tag{3}$$

$$v_p(t) = nt + v_{p,0}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}(t) = -3\mu n^2 (1 - (2 - 2 \cos \zeta(t))^{-3/2}) \sin \zeta(t). \tag{5}$$

The coefficients $(\rho, \psi, v_{p,0})$ are constant parameters linked with the initial conditions. This model provides a quasiperiodic approximation of the motion of the massless body in the coorbital 1:1 mean motion resonance, which is valid for a tadpole orbit as well as for a horseshoe orbit.

The previous expressions split into two components: a fast component whose amplitude is controlled by ρ , and a slow component governed by the function ζ . This function represents the temporal variations of $v - v_p$ averaged on one orbital period $2\pi/n$. An usual approximation of this quantity is given by the solution of the differential equation (5) (see Kevorkian 1970; Salo and Yoder 1988, and also Morais 2001 for an averaged Hamiltonian formulation). This equation provides a good approximation of the coorbital secular motion as long as the trajectories stay outside the Hill sphere (here a circle of radius $r_0(\mu/3)^{1/3}$ whose center is the body of mass m_1). According to Kevorkian (1970), this condition imposes the parameter ρ not to be very large with respect to unity. The system associated with the differential equation (5) possesses three fixed points corresponding to the two stable equilibria L_4 and L_5 for $(\zeta, \dot{\zeta}) = (\pm\pi/3, 0)$, and to the unstable equilibrium L_3 when $(\zeta, \dot{\zeta}) = (\pi, 0)$. The collinear points L_1 and L_2 are not fixed points of the Eq. (5), but as the points lie on the boundary of the Hill sphere, we do not consider this problem. In contrast to the real problem, in this one degree of freedom approximation given by the Eq. (5), the stable and unstable manifolds associated with L_3 coincide (the system is integrable). The domain inside these manifolds is filled with tadpole orbits: periodic orbits surrounding L_4 or L_5 whose frequency varies from $\sqrt{27\mu}n/2$ in the neighborhood of the corresponding equilibrium to 0 approaching the separatrix. Outside the separatrices lie the horseshoe orbits whose frequency ranges from zero on the separatrix to infinity when $\dot{\zeta}$ tends to infinity. However, the value of the frequency is bounded because when $|\dot{\zeta}|$ is large, the distance between the trajectory and the collision with the mass m_1 is small, that is contrary to our hypothesis that the horseshoe trajectory must not enter the Hill sphere (see Eq.5). Therefore, it can be shown that the frequency of the horseshoe trajectories is bounded by a quantity of the order of $\sqrt{\mu}n$, similar to the frequency in the tadpole regime.

The fast component of the motion is equal to $r_0\sqrt{\mu}\rho \cos(v_p + \zeta(t) + \psi)$ in the expression of r and equal to $-2\sqrt{\mu}\rho \sin(v_p + \zeta(t) + \psi)$ for v . These two functions are quasiperiodic with frequencies n and ν where $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ is the frequency of the periodic function ζ representing the secular motion. If we do not consider the function ζ , the expressions of r and v are the same as those obtained by a first order expansion in eccentricity in the Keplerian case, the eccentricity being equal to $\sqrt{\mu}\rho$. This remark will be explored below.

For the real Trojan satellites of Saturn, formulas (2)–(5) provide a quite rough approximation of their orbital motion. Indeed, even if we can assume that the motion of Dione

¹ See the appendix for the relationship of these expressions with the Érdi's theory (1977).

Table 1 Orbital parameters of the six coorbital satellites deduced from the *Horizons* ephemerides: $\mu = m_1/(m_1 + m_0)$, ρ that appears in the expressions (2) and (3) is derived from the satellite's averaged eccentricity, n is the mean motion and ν the coorbital frequency

Satellite	μ	ρ	min ζ (deg.)	max ζ (deg.)	n (rad/day)	ν (10^{-3} rad/day)
Polydeuces	2.9×10^{-6}	11.5	268	321	2.3	7.93
Helene	2.9×10^{-6}	4.6	47	77	2.3	8.18
Telesto	1.0×10^{-6}	0.6	296	304	3.3	9.03
Calypso	1.0×10^{-6}	0.8	59	61	3.3	9.02
Janus	9.7×10^{-10}	218	6	354	9.03	2.15
Epimetheus	3.3×10^{-9}	171	6	354	9.03	2.15

The fourth and fifth columns give minimal and maximal values of the long-term component ζ satisfying the Eq. (6)

(resp. Tethys) is not too much affected by their coorbital companions Helene and Polydeuces (resp. Telesto and Calypso), the motion of Dione and Tethys is not Keplerian. In particular, the 2 : 1 mean motion resonances between Dione and Enceladus and between Mimas and Tethys generate long period variations of the orbital elements of these bodies (period of about 70.5 years for Tethys and 11.1 years for Dione (Vienne and Duriez 1995)). Here, the effect of Saturn's oblateness is not directly taken into account. Its main impact on the orbital motion is to slightly modify the fundamental frequencies. As we derive these frequencies from the *Horizons* ephemerides that already include several spherical harmonics related to the shape of Saturn, the oblateness is implicitly considered. In addition, a second effect of the Saturn J_2 factor is to modify the triangular equilibrium configuration. Indeed, the equilateral triangle flattens slightly to give an isosceles triangle (see Sharma and Rao 1976), but this modification is very small in regard to the other neglected perturbations. Even if the orbital model that we consider here is not accurate enough to describe precisely the orbital motion of the studied satellites, its injection in the equations of the rotation is enough to describe the rotational libration with a better accuracy than the accuracy providing by the Cassini data (Tiscareno et al. 2009).

The parameters used in this paper to model the orbits are displayed in the Table 1. μ is the mass of the main satellite associated with the coorbital in the three-body problem divided by the mass of Saturn. The value of ρ is fitted to the mean eccentricity of the satellite, derived from the ephemerides, because it controls the amplitude of the short time variations of r and $v - nt$ therefore it acts like the mean eccentricity of the satellite. This crude approximation is sufficient to give a reasonable order of magnitude of the libration amplitude for the coorbital satellites (see Table 2). The secular variations of ν and r are represented by the function ζ , solution of the differential equation (5). For the first four satellites of the table, this solution is chosen such a way that its period $2\pi/\nu$ (ν is given in the last column of the table) is the same as the period of the libration around L_4 or L_5 (depending on the satellite) deduced from the *Horizons* ephemerides (Giorgini et al. 1996).

For Janus and Epimetheus, the situation is more complicated because the long-term component of their true anomaly (the average of ν with respect to the orbital period, namely the 8-years component) does not verify Eq. (5). But, as it is shown in Robutel et al. (2011), the average of the relative mean anomaly (difference between Janus' anomaly and the Epimetheus one) satisfies the differential equation (5). In order to describe the long term temporal evolution of r and ν we use the expressions (2) and (3) again, but by replacing the function ζ by $m_E/(m_J + m_E)\zeta$ for Janus, and $m_J/(m_J + m_E)\zeta$ for Epimetheus, where ζ represents the

Table 2 Amplitude of the forced orbit

Satellite	n (rad/day)	σ (rad/day)	$\sqrt{\mu}\rho$	A_S (deg.)	A_r (deg.)
Polydeuces	2.3	1.86	0.0196	6.5	4.2
Helene	2.3	1.42	0.0078	1.5	0.6
Telesto	3.3	3.22	0.0006	1.4	1.4
Calypso	3.3	2.97	0.0008	0.5	0.4
Janus ^a	9.03	4.94	0.0068	1.1	0.3
Epimetheus ^a	9.03	8.51	0.0098	10	8.9

The mean motion n and the parameter σ (libration frequency at the center of libration) are given in the second and third columns. The fourth column corresponds to the values of the parameter $\sqrt{\mu}\rho$ that governs the variations of the orbital motion at the frequency n . A_S is the amplitude of the forced orbit measured with respect to the line Saturn-satellite, while A_r represent the amplitude of the short-period term of the forced trajectory in uniformly rotating frame.

^a The value of σ comes from [Tiscareno et al. \(2009\)](#)

above mentioned long time variations of relative orbits of Janus and Epimetheus, is solution of the Eq. (5). More explanations concerning this point can be found in [Robutel et al. \(2011\)](#) and references therein. The minimum and maximum values of ζ are presented in the fourth and fifth columns of Table 1. For the orbital motion of Janus and Epimetheus, the variation in ζ is greater than 180 degrees resulting from the horseshoe shape orbits of these satellites. On the contrary, the variations in ζ are smaller for the satellites in tadpole orbits.

In order to display the average orbits of the 6 coorbital satellites on the same plot, different time-scale is used for each body. Rather than t , we use the time $\tau = \sqrt{\mu}nt$ in such a way that the differential equation (5) becomes free from any parameter, that is to say:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -3 (1 - (2 - 2 \cos \zeta)^{-3/2}) \sin \zeta. \tag{6}$$

This rescaling allows us to compare these orbits in the plane $(\zeta, d\zeta/d\tau)$ and to add the separatrix associated with L_3 (black curve) which discriminates the tadpole orbits surrounding L_4 and L_5 from the horseshoe orbits outside the separatrix. For the four satellites in tadpole orbit (Polydeuces, Helene, Calypso, Telesto) the rescaling coefficient $\sqrt{\mu}n$ is derived from the Table 1, while the initial conditions of (6) at $\tau = 0$ are $(\zeta_{\max}, 0)$ where ζ_{\max} is given in the fifth column of the Table 1. As mentioned above, the individual orbit of Janus or Epimetheus is not directly related to the Eq. (5), so we use their relative orbit (red in Fig. 1). This orbit is the integral curve of (6) with $\tau = \sqrt{(m_J + m_E)/(m_S + m_J + m_E)}nt$ which includes the point of coordinates $(\zeta_{\max}, 0)$.

3 A Hamiltonian formulation of the rotation

3.1 A simple quasiperiodic model

The dynamical equation governing the physical libration is inferred from the angular momentum balance equation between the body's inertia and the gravitational torque exerted by Saturn projected onto the equatorial plane of the body. These equations have the following form (see e.g. [Robutel et al. 2011](#)):

$$\ddot{\theta} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin 2(\theta - \nu) = 0, \quad \text{with } \sigma^2 = 3 \frac{Gm_0}{r_0^3} \frac{(B - A)}{C}, \quad (7)$$

where θ is the rotational angle, G the gravitational constant, m_0 the mass of Saturn, A, B, C are the principal moments of inertia such as $A \leq B \leq C$, and (r, r_0, ν) are the orbital parameters defined in the previous section. The frequency σ is constant and corresponds to the frequency of libration at the equilibrium point. σ depends on the difference $B - A$ and for a spherical body, or an axisymmetric body along the north-south direction, it is equal to zero. By introducing the angular distance $x = \theta - \nu$ between the long axis of the satellite and the direction satellite-planet, we obtain the equation

$$\ddot{x} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin 2x = -\ddot{\nu}, \quad (8)$$

whose solutions describe the motion of the planet in the satellite's sky.

Using the approximation of ν given by the relation (3), we get

$$\ddot{x} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin 2x = -2\sqrt{\mu}\rho n^2 \sin(\nu_p + \zeta(t) + \psi), \quad (9)$$

where the terms of order μ are neglected. As mentioned in Sect. 2, r and the right hand side of the Eq. (9) are quasiperiodic functions of frequencies n and ν , thus the differential equation (9) depends quasiperiodically on the time.

The mass ratio μ being small, we adopt a perturbative method. We begin by assuming that $\mu = 0$. The Eq. (9), which is now equivalent to the one representing the motion of the pendulum, possesses a stable fixed point for $\dot{x} = x = 0$ surrounded by periodic trajectories whose frequencies are close to σ in a small neighborhood of the fixed point. Now, increase the value of μ corresponds to perturb the pendulum equation in a quasiperiodic manner. If the size of the perturbation (governed by μ) is small enough, and under other suitable conditions excluding some resonances between the frequencies σ, n and ν , the fixed point of the unperturbed equation is replaced by a quasiperiodic solution of frequencies (n, ν) around which revolves quasiperiodic orbits possessing 3 frequencies (see [Jorba and Simó 1996](#)). The frequencies of the central orbit are the two forcing frequencies n and ν , while the other orbits possess an additional “free” or “proper” frequency (close to σ) which depends on their initial conditions. The perturbed systems thus possesses a one parameter family of 2-frequencies quasiperiodic orbits which end in $x = \dot{x} = 0$ when μ tends to zero.

These forced solutions play a major role in the rotational dynamics of the close satellites. Indeed, in presence of dissipative phenomena, the forced solution will be a stable equilibrium (quasiperiodic attractor) towards which most of the trajectories will converge (see [Celletti and Chierchia 2008](#)). It is worth mentioning that the quasiperiodic attractor of the dissipative case and the quasiperiodic forced solution of the conservative case are not the same trajectories (see [Landau and Lifchitz 1960](#), chap. 28). But their frequencies, which are the orbital frequencies, are independent from the dissipation and consequently are equal. Let us also mention that for small dissipations, the two trajectories are very close, and that the dissipative limit cycle tends to the conservative forced orbit when the dissipation vanishes. For these reasons, we will devote the rest of this article to the study of the dynamics in the neighborhood of the forced quasiperiodic orbit.

3.2 Hamiltonian formulation of the problem

3.2.1 Autonomous Hamiltonian system

In order to adopt an autonomous Hamiltonian formulation which takes into account the different time-scales, let us denote: $\lambda_1 = v_p + \psi$ and $\lambda_2 = \sqrt{\mu}nt$. The solution ζ of the Eq. (5) can be rewritten as:

$$\zeta(t) = \zeta(\lambda_2\sqrt{\mu}^{-1}n^{-1}) = \hat{\zeta}(\lambda_2) \tag{10}$$

and its time derivative as:

$$\frac{d\zeta}{dt}(t) = \sqrt{\mu}n\hat{\zeta}'(\lambda_2), \quad \text{with} \quad \hat{\zeta}'(\lambda_2) = \frac{d\hat{\zeta}}{d\lambda_2}(\lambda_2). \tag{11}$$

It turns out that:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^3 &= 1 + \sqrt{\mu}h(\lambda_1, \lambda_2) + \mathcal{O}(\mu), \quad \text{where} \\ h(\lambda_1, \lambda_2) &= 2\hat{\zeta}'(\lambda_2) - 3\rho \cos u, \quad \text{with} \quad u = \lambda_1 + \hat{\zeta}(\lambda_2) \end{aligned} \tag{12}$$

and

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= n(1 + \sqrt{\mu}g(\lambda_1, \lambda_2)) + \mathcal{O}(\mu), \quad \text{where} \\ g(\lambda_1, \lambda_2) &= \hat{\zeta}'(\lambda_2) - 2\rho \cos u. \end{aligned} \tag{13}$$

Finally, using the conjugated variables $(x, X) = (\theta - v(t), \dot{\theta} - n)$, (λ_1, Λ_1) and (λ_2, Λ_2) , the Eq. (9) is equivalent to the canonical equations associated with the Hamiltonian H given by:

$$H = n\Lambda_1 + \sqrt{\mu}n\Lambda_2 + \frac{X^2}{2} - \frac{\sigma^2}{4}(1 + \sqrt{\mu}h(\lambda_1, \lambda_2))\cos 2x - n\sqrt{\mu}g(\lambda_1, \lambda_2)X. \tag{14}$$

As we are only looking for the solutions in a neighborhood of zero, we expand the term $\cos 2x$ at order 4. Using the variables $(y, Y) = (\sigma^{1/2}x, \sigma^{-1/2}X)$, the expansion of the previous Hamiltonian (that we still denote by H) reads:

$$\begin{aligned} H &= n\Lambda_1 + \sigma\frac{y^2 + Y^2}{2} - \frac{y^4}{6} \\ &+ \sqrt{\mu}\left(n\Lambda_2 + \left(\sigma\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{6}\right)h(\lambda_1, \lambda_2) - n\sqrt{\sigma}g(\lambda_1, \lambda_2)Y\right). \end{aligned} \tag{15}$$

In this expression the terms depending only on λ_1 and λ_2 are omitted.

An usual way to study the dynamics for small values of y and Y is to reduce the Hamiltonian (15) to a normal form (see e.g. Arnold et al. 2006). This will be done in two consecutive steps. The first one, performed in Sect. 3.2.2 leads to get rid of the linear terms in Y , that is to eliminate $g(\lambda_1, \lambda_2)Y$ using a new set of canonical coordinates. This is equivalent to bring back the forced trajectory to the origin of the Cartesian coordinates. The second step, which is described in Sect. 3.3 consists in the replacement of the Cartesian coordinates by polar symplectic ones before averaging the obtained expression.

3.2.2 The quasiperiodic forced trajectory

The suppression of the term $g(\lambda_1, \lambda_2)Y$ in the expression (15) is performed by introducing a new coordinate system $(y', Y', \lambda'_1, \Lambda'_1, \lambda'_2, \Lambda'_2)$ linked to the coordinates $(y, Y, \lambda_1, \Lambda_1, \lambda_2, \Lambda_2)$, by the relations²:

$$y = y' - \frac{\partial F}{\partial Y'}, \quad Y = Y' + \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \lambda_j = \lambda'_j - \frac{\partial F}{\partial \Lambda'_j}, \quad \Lambda_j = \Lambda'_j + \frac{\partial F}{\partial \lambda'_j}, \quad (16)$$

where the generating function F is a solution of the partial differential equation:

$$n \frac{\partial F}{\partial \lambda'_1} + \sigma \left(Y' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) = n\sqrt{\sigma}\sqrt{\mu}g(\lambda'_1, \lambda'_2)Y'. \quad (17)$$

We choose here the solution:

$$F = n\sqrt{\sigma}\sqrt{\mu} \left(\frac{\hat{\zeta}'(\lambda'_2)}{\sigma} y' - 2\rho \frac{\sigma y' \cos(\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2)) - nY' \sin(\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2))}{\sigma^2 - n^2} \right). \quad (18)$$

This solution is valid only if $\sigma \neq n$, and more generally when $|\sigma - n|$ is not too small, in other words when the system is far enough from the 1:1 secondary resonance between the libration frequency σ and the mean motion n .

In the coordinate system $(y', Y', \lambda'_1, \Lambda'_1, \lambda'_2, \Lambda'_2)$ the Hamiltonian (that we denote H again) becomes:

$$H = n\Lambda'_1 + \sigma \frac{y'^2 + Y'^2}{2} - \frac{y'^4}{6} + \sqrt{\mu} \left(n\Lambda'_2 + \left(\sigma \frac{y'^2}{2} - \frac{y'^4}{6} \right) h(\lambda'_1, \lambda'_2) \right). \quad (19)$$

It is now clear that the trajectory

$$(y'(t), Y'(t), \lambda'_1(t), \lambda'_2(t)) = (0, 0, nt + \lambda'_1(0), \sqrt{\mu}nt + \lambda'_2(0)) \quad (20)$$

is a quasiperiodic solution of (19). This trajectory depending only on the orbital frequencies is the forced orbit which reads in original coordinates:

$$x(t) = \theta(t) - v(t) = -2\rho\sqrt{\mu} \frac{n^2}{\sigma^2 - n^2} \sin(\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2)). \quad (21)$$

The expression of the forced trajectory in a reference frame rotating with the angular velocity n reads:

$$\theta(t) - v_p(t) = \zeta(t) - 2\rho\sqrt{\mu} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - n^2} \sin(\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2)). \quad (22)$$

The solution is the sum of two terms of different nature: a long-period term, which amplitude is about 1° for Calypso and can reach 135° for Epimetheus (Robutel et al. 2011), and a term at the orbital period whose amplitude, given in Table 2, does not exceed 9° . The amplitude of this libration is very similar to the one obtained for a satellite in Keplerian motion. If we equate the term $\rho\sqrt{\mu}$ with the orbital eccentricity, we recover the ‘‘Keplerian’’ amplitude expression but the phase has a very different behavior. In contrast with the Keplerian case, the phase is a quasiperiodic function of the time and the solution is close to the solution obtained by adiabatic invariant method developed in Robutel et al. (2011).

² Let us notice that the transformation (16) is canonical only when the terms of order two and more in $\sqrt{\mu}$ are neglected.

3.3 The non-resonant case

In order to proceed to the reduction of the Hamiltonian (19), let us introduce the symplectic polar coordinates

$$(y', Y') = (\sqrt{2W} \sin w, \sqrt{2W} \cos w). \tag{23}$$

In these variables, the Hamiltonian (19) can be split into three components: the unperturbed part H_0 given by

$$H_0 = n\Lambda'_1 + \sigma W, \tag{24}$$

the averaged part of the perturbation \bar{H}_1 which reads

$$\bar{H}_1 = n\sqrt{\mu}\Lambda'_2 - \frac{W^2}{4} + \sqrt{\mu} \left(\sigma W - \frac{W^2}{2} \right) \hat{\xi}'(\lambda'_2), \tag{25}$$

and its remainder \tilde{H}_1 given by

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 = & \left(-\sqrt{\mu}\sigma W \hat{\xi}' + (1 + 2\sqrt{\mu}\hat{\xi}') \frac{W^2}{3} \right) C_{0,2} - (1 + 2\sqrt{\mu}\hat{\xi}') \frac{W^2}{12} C_{0,4} \\ & + \sqrt{\mu}\rho \left(\frac{3\sigma}{2} W - W^2 \right) C_{1,2} + \frac{\sqrt{\mu}\rho W^2}{4} C_{1,4} - 3\sqrt{\mu}\rho \left(\frac{\sigma}{2} W - \frac{W^2}{4} \right) C_{1,0}, \end{aligned} \tag{26}$$

with

$$2C_{p,q} = \cos(pu + qw) + \cos(pu - qw) = 2 \cos pu \cos qw \tag{27}$$

where $u = \lambda'_1 + \hat{\xi}(\lambda'_2)$.

These expressions show that the angles w and λ'_1 vary rapidly ($\dot{w} = \mathcal{O}(\sigma)$ and $\dot{\lambda}'_1 = \mathcal{O}(n)$) while λ'_2 is a slow angle ($\dot{\lambda}'_2 = \mathcal{O}(\sqrt{\mu}n)$). Consequently, an usual way to find the approximate solutions of the previous Hamiltonian system is to consider its average with respect to the fast angles λ_1 and w .

If, as it is the case in the previous section, the terms of order μ and more are neglected, and if the term $\cos 2x$ is expanded in Taylor series up to degree $2p$ in x , the resonances that occur during the first order averaging process of the Hamiltonian (26) are $n + k\sigma = 0$, k being an integer satisfying $|k| \leq 2p$.

As mentioned above, the Hamiltonian H can be reduced to its average with respect to the fast angles λ'_1 and w given by the expression:

$$K = n\Lambda'_1 + \sigma W + n\sqrt{\mu}\Lambda'_2 - \frac{W^2}{4} + \sqrt{\mu} \left(\sigma W - \frac{W^2}{2} \right) \hat{\xi}'(\lambda'_2), \tag{28}$$

where the terms which are negligible with respect to $\sqrt{\mu}$ and W^2 (when μ and W tend to zero) are omitted. The transformation linking H to K is approximated by the expression:

$$z = \bar{z} - \frac{\partial F_a}{\partial \bar{Z}}, \quad Z = \bar{Z} + \frac{\partial F_a}{\partial \bar{z}}, \tag{29}$$

where (z, Z) is a couple of conjugated coordinates belonging to $\{(\lambda'_1, \Lambda'_1), (\lambda'_2, \Lambda'_2), (w, W)\}$, (\bar{z}, \bar{Z}) are the average variables, and F_a the generating function of the transformation. For simplicity, the “bar” symbols will be omitted in the rest of this section.

The function F_a being a solution of the equation

$$n \frac{\partial F_a}{\partial \lambda'_1} + \sigma \frac{\partial F_a}{\partial w} + \tilde{H}_1 = 0, \tag{30}$$

we adopt here:

$$F_a = - \sum_{p,q} H_{p,q}(W, \lambda'_2) S_{p,q}, \tag{31}$$

with

$$S_{p,q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(pu + qw)}{pn + q\sigma} + \frac{\sin(pu - qw)}{pn - q\sigma} \right) \text{ if } H_{p,q} \neq 0, \\ S_{p,q} = 0 \text{ if } H_{p,q} = 0. \tag{32}$$

Solving the Hamiltonian system associated with K allows to give the solutions of the problem in the original variables (x, X) . In particular, we have:

$$x(t) = -2\sqrt{\mu\rho} \frac{n^2}{\sigma^2 - n^2} \sin \bar{u} + \sqrt{2\bar{W}\sigma^{-1}} \sin \bar{w} \\ + \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma} \bar{W}} \left[\hat{\xi}'(\lambda_2) \sin \bar{u} + \frac{3\sigma\rho}{4n} \left(\frac{n + 4\sigma}{n + 2\sigma} \sin(\bar{u} + \bar{w}) + \frac{n - 4\sigma}{n - 2\sigma} \sin(\bar{u} - \bar{w}) \right) \right], \tag{33}$$

where \bar{W} is a constant and the temporal expressions of the angles \bar{u} and \bar{w} are:

$$\bar{u}(t) = nt + \zeta(t) + \psi, \\ \bar{w}(t) = \bar{w}_0 + \left(\sigma - \frac{\bar{W}}{2} \right) t + \frac{\sigma - \bar{W}}{n} \zeta(t). \tag{34}$$

When $\bar{W} = 0$, we find the forced trajectory (21) whose fundamental frequencies are only the orbital frequencies (n, ν) . When $\bar{W} > 0$, the trajectories which oscillate around the forced trajectory have one additional frequency that depends on the distance to the forced orbit \bar{W} : $\bar{\sigma}(\bar{W}) = \sigma - \bar{W}/2 + \mathcal{O}(\bar{W}^2)$. We note that, unlike the naive representation which consists in separating the solution of the motion in a forced and a free component, the part of the trajectory which depends on the parameter \bar{W} does not contain only $\bar{\sigma}(\bar{W})$ but mixed terms containing the three main frequencies.

3.4 Secondary resonances

We have seen in Sect. 3.2.2 that due to the presence of the denominator $\sigma^2 - n^2$ the transformation defined by the relations (16)–(18), which maps a neighborhood of the forced orbit onto a neighborhood of $y' = Y' = 0$, is not defined when the system approaches the 1:1 secondary resonance. Similarly, the averaging performed in Sect. 3.3 makes sense only when $n + k\sigma \neq 0$. Consequently we will see on two particular cases (the 1:1 and 2:1 secondary resonances) how the topology of the phase space is modified when secondary resonances occur. Such a development of secondary spin-orbit resonance has been done by Wisdom (2004) in the case of Keplerian orbit and more specifically for the 3:1 resonance.

3.4.1 The 1:1 secondary resonance

In order to study the dynamics in the neighborhood of 1:1 resonance between the frequency of libration and the orbital frequency, we start from the initial Hamiltonian (15). Using the new coordinate system $(w, W, \lambda'_j, \Lambda'_j)$ defined by the relation $(y, Y, \lambda_j, \Lambda_j) = (\sqrt{2W} \sin w, \sqrt{2W} \cos w, \lambda'_j, \Lambda'_j)$ the Hamiltonian reads

$$H = H_0 + \bar{H}_1 + \tilde{H}_1 + n\sqrt{\mu}\sqrt{2W}\sigma \left(2\rho C_{1,1} - \hat{\zeta}'(\lambda'_2)C_{0,1} \right), \tag{35}$$

where the notations are defined by the formulas (24)–(27). This Hamiltonian presents an additional term with respect to the previous case, the last term, that represents the linear term in Y in Hamiltonian (15). Then, we define a new set of canonical variables as:

$$\begin{aligned} z &= w - u = w - (\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2)), & Z &= W, \\ \vartheta_1 &= \lambda'_1, & \Theta_1 &= \Lambda'_1 + W, \\ \vartheta_2 &= \lambda'_2, & \Theta_2 &= \Lambda'_2 + \hat{\zeta}'(\lambda'_2)W, \end{aligned} \tag{36}$$

where z and ϑ_2 are slow angles. After having averaged the Hamiltonian (35) with respect to the only fast angle ϑ_1 , the Hamiltonian reads:

$$\begin{aligned} K_{1:1} &= n\sqrt{\mu}\bar{\Theta}_2 + (\sigma - n) \left(1 + \sqrt{\mu}\hat{\zeta}'(\bar{\vartheta}_2) \right) \bar{Z} \\ &\quad - \left(1 + 2\sqrt{\mu}\hat{\zeta}'(\bar{\vartheta}_2) \right) \frac{\bar{Z}^2}{4} + n\sqrt{2\bar{Z}\sigma}\sqrt{\mu\rho} \cos \bar{z}, \end{aligned} \tag{37}$$

where $(\bar{z}, \bar{Z}, \bar{\vartheta}_2, \bar{\Theta}_2)$ represent the averaged variables as in Sect. 3.3.

As the term $\sqrt{\mu}\hat{\zeta}'(\bar{\vartheta}_2)$ is always small with respect to the unity, it can be neglected in first approximation³. Consequently, we are left with the one degree of freedom Hamiltonian:

$$K_{1:1}^{(0)} = (\sigma - n)\bar{Z} - \frac{\bar{Z}^2}{4} + n\sqrt{2\bar{Z}\sigma}\sqrt{\mu\rho} \cos \bar{z}, \tag{38}$$

which corresponds to the classical problem known as the second fundamental model of resonance, or also Andoyer’s model (Henrard and Lemaître 1983).

The fixed points of the Hamiltonian system correspond to the slow component of the forced orbits (average with respect to the fast angle λ_1). If we set $Q = \sqrt{2\bar{Z}}$, the coordinates (\bar{z}, \bar{Z}) of these fixed points are given by the positive roots of the polynomial equation:

$$P^-(Q) = Q^3 - 4(\sigma - n)Q - 4n\rho\sqrt{\mu\sigma} = 0 \text{ if } z = 0, \tag{39}$$

$$P^+(Q) = Q^3 - 4(\sigma - n)Q + 4n\rho\sqrt{\mu\sigma} = 0 \text{ if } z = \pi. \tag{40}$$

As $P^-(-Q) = -P^+(Q)$, the roots of one of these polynomials are the opposite of the roots of the other one.

By fixing the parameters μ, ρ, n and vary the frequency σ (in the neighborhood of n), there exists a critical value σ_0 such that for $\sigma < \sigma_0$ the average resonant system has only one fixed point, which is stable. Then, when σ reaches the critical value σ_0 a pitchfork bifurcation with symmetry breaking (see e.g. Lichtenberg and Lieberman 1992) occurs and gives rise to two new branches of fixed points. One of these new families contains stable fixed points

³ If the Trojan satellite is at L_4 or L_5 , then $\hat{\zeta}'(\vartheta_2) = 0 \quad \forall t$.

while the other one possesses unstable equilibrium points. The bifurcation arises when the discriminant Δ of the polynomial involved in (39) or (40) is equal to zero, that is

$$\Delta = 16 \left(n^2 \sigma \mu \rho^2 - \frac{16}{27} (\sigma - n)^3 \right) = 0, \tag{41}$$

or

$$16\delta^3 - 27\mu\rho^2n^2\delta - 27\mu\rho^2n^3 = 0 \quad \text{with} \quad \delta = \sigma - n. \tag{42}$$

Since $\mu\rho^2 < 4$, this equation has only one real root δ_0 given by:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{3n}{4} (2\mu\rho^2)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\mu\rho^2}{4}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu\rho^2}{4}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \frac{3n}{4} (4\mu\rho^2)^{1/3} + o(\mu^{1/3}). \end{aligned} \tag{43}$$

In other words, the critical value of σ is:

$$\sigma_0 = n + \delta_0 = \left(1 + \frac{3}{4} (4\mu\rho^2)^{1/3} \right) n + o(\mu^{1/3}). \tag{44}$$

Finally, the family of fixed points that exists for all values of σ is given by $(\bar{z}_1, \bar{Z}_1) = (0, Q_1^2/2)$ where Q_1 is the positive root of the polynomial equation (39) given by the expression

$$Q_1 = \left(2n\rho\sqrt{\mu\sigma} + \frac{\eta}{2}\sqrt{|\Delta|} \right)^{1/3} + \left(2n\rho\sqrt{\mu\sigma} - \frac{\eta}{2}\sqrt{|\Delta|} \right)^{1/3}, \tag{45}$$

where $\eta = 1$ if $\sigma < \sigma_0$ and $\eta = \sqrt{-1}$ if $\sigma \geq \sigma_0$.

The two others fixed points which coincide when $\sigma = \sigma_0$ and split for larger values are of the form $(\bar{z}_p, \bar{Z}_p) = (\pi, Q_p^2/2)$, where the Q_p 's ($p = 2, 3$), which are the two positive roots of P^+ , can be calculated in the following way. Let us define the complex number u by the expression

$$u = -2n\rho\sqrt{\mu\sigma} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\sqrt{|\Delta|}. \tag{46}$$

As the real part of u is negative and its imaginary part positive, ϕ , the argument of u , is between $\pi/2$ and π . It turns out that the two positive roots of P^+ read:

$$Q_2 = 4\sqrt{\frac{\sigma - n}{3}} \cos \frac{\phi}{3}, \quad Q_3 = 4\sqrt{\frac{\sigma - n}{3}} \cos \frac{\phi + 4\pi}{3}. \tag{47}$$

It is worth mentioning that, as $P^-(-Q) = -P^+(Q)$, the positive root of P^- can also be read:

$$Q_1 = -4\sqrt{\frac{\sigma - n}{3}} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3} \quad \text{for} \quad \sigma \geq \sigma_0. \tag{48}$$

The expression of the Q_j are particularly simple when $\sigma = \sigma_0$. Indeed, as for this value of σ the argument ϕ is equal to π , we have

$$Q_1 = 4\sqrt{\frac{\delta_0}{3}}, \quad Q_2 = Q_3 = 2\sqrt{\frac{\delta_0}{3}}. \tag{49}$$

Regarding the stability of these three equilibrium points, a straightforward calculation shows that the characteristic polynomial of the linearized differential system in the neighborhood of (\bar{z}_j, \bar{Z}_j) is given by:

$$\mathcal{P}_j(h) = h^2 + \frac{1}{4}n\sqrt{\sigma}\sqrt{\mu}\rho \frac{P'(Q_j)}{Q_j}, \tag{50}$$

P' being the first derivative of P^- if $j = 1$ and of $-P^+$ if $j = 2, 3$.

The polynomial function $P^-(Q)$ being increasing for all values of σ , its derivative is positive and the roots of \mathcal{P}_1 are purely imaginary numbers. It turns out that the fixed point of coordinates $(0, \bar{Z}_1)$ is linearly stable. The other family is more interesting. Indeed, when $\sigma = \sigma_0$, $Q_2 = Q_3$ is a double root of P^+ and consequently its first derivative vanishes. This “double” equilibrium point is then degenerated (its eigenvalues are both equal to zero). As soon as σ becomes larger than σ_0 , the point associated with Q_2 becomes hyperbolic, while the one corresponding to Q_3 becomes elliptic. Indeed, the polynomial P^+ having three distinct roots, one negative and the two others Q_2 and Q_3 positive, the product $\frac{dP^+}{dQ}(Q_2)\frac{dP^+}{dQ}(Q_3)$ is negative. As $Q_3 \leq Q_2$, $\frac{dP^+}{dQ}(Q_2) > 0$ and $\frac{dP^+}{dQ}(Q_3) < 0$, which proves the assertion stated above.

A straightforward computation, based on the determination of the generating function used to averaging the Hamiltonian (35) with respect to ϑ_1 , allows us to express the fixed points of (38) in the original variable (x, X) . In particular, we have:

$$x_j = \frac{Q_j}{\sqrt{\sigma}} \sin(\bar{z}_j + \lambda_1) + o\left(\sqrt{\mu}^{\frac{1}{3}}\right), \quad X_j = \dot{x}_j + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}). \tag{51}$$

In the previous expression, the index j is equal to 1 if $\sigma \leq \sigma_0$ (only one fixed point) and to 1, 2 or 3 otherwise (three fixed points). When σ is close to the bifurcation value σ_0 , according to the expressions (44) and (49), we have:

$$x_j = c_j (2\sqrt{\mu}\rho)^{\frac{1}{3}} \sin(\bar{z}_j + \lambda_1) + o(\sqrt{\mu}^{\frac{1}{3}}), \tag{52}$$

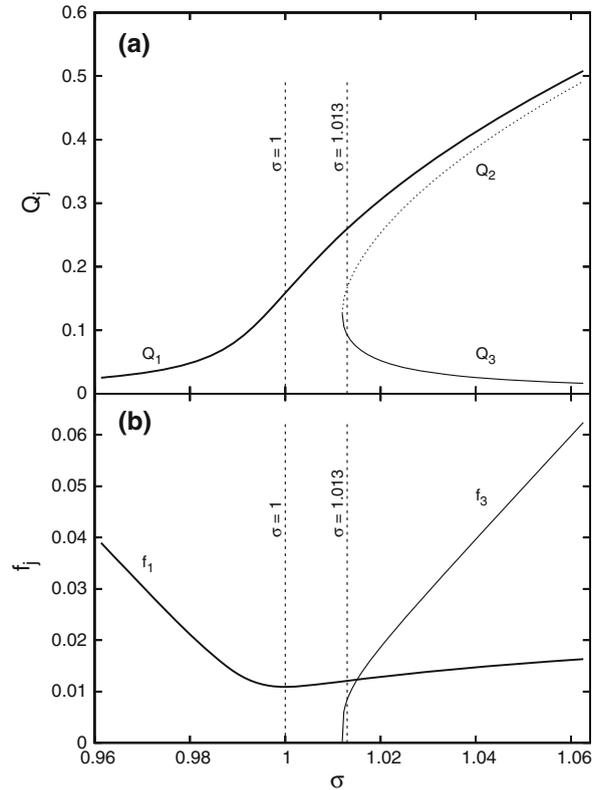
with $c_1 = 2$ and $c_2 = c_3 = 1$. Consequently, the amplitude of the resonant case is much larger than in the non-resonant case, where the forced trajectory is of amplitude $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ (see formula (21) and (33)).

Now we illustrate the analytical results by some numerical simulations. Until the end of this section, we fixed the free parameters of the model such that: $\mu = 1 \times 10^{-6}$, $n = 1$, $\rho = 1$, $\psi = -\pi/3$ and $v_{p,0} = 0$. According to the expression (44) the critical value σ is then equal to $\sigma_0 = 1.011953$.

Let us first illustrate the evolution of the fixed points of the Hamiltonian (38) close to this bifurcation value. The quantities Q_j , which determine the location of the equilibrium points through the formula (51) are plotted in Fig. 2(a) for σ varying in the interval $(0.96, 1.064)$ including σ_0 . For σ smaller than the critical value, the phase space has only one equilibrium point defined by Q_1 (bold curve). In this domain, Q_1 increases since the distance of the fixed points from the origin is of order $\mu^{1/2}$ and of order $\mu^{1/3}$ when σ is close to σ_0 . After the bifurcation, this equilibrium point moves away from the origin.

For $\sigma > \sigma_0$, the stable equilibrium associated with Q_1 persists while a new pair of fixed points appears at a distance of order $\mu^{1/3}$ from the origin: an unstable point related to Q_2 (dotted line) and a stable one associated with Q_3 (thin solid line). While the unstable point moves away from the origin as σ increases, Q_3 decreases, reaching values of order $\sqrt{\mu}$ outside the resonance. In other words, the stable fixed point associated with Q_3 plays the

Fig. 2 Bifurcation inside the 1:1 secondary resonance. The *upper graph* displays the values of the Q_j (*Y-axis*) versus σ (*X-axis*). The quantities associated with the stable equilibria are represented with *solid lines* while *dotted lines* are associated with the unstable equilibrium. The frequencies of the libration around the two stable fixed points are plotted in the *bottom graph*. The two *vertical dotted lines* indicate the values of the parameter σ used in the numerical simulations presented in Fig. 3

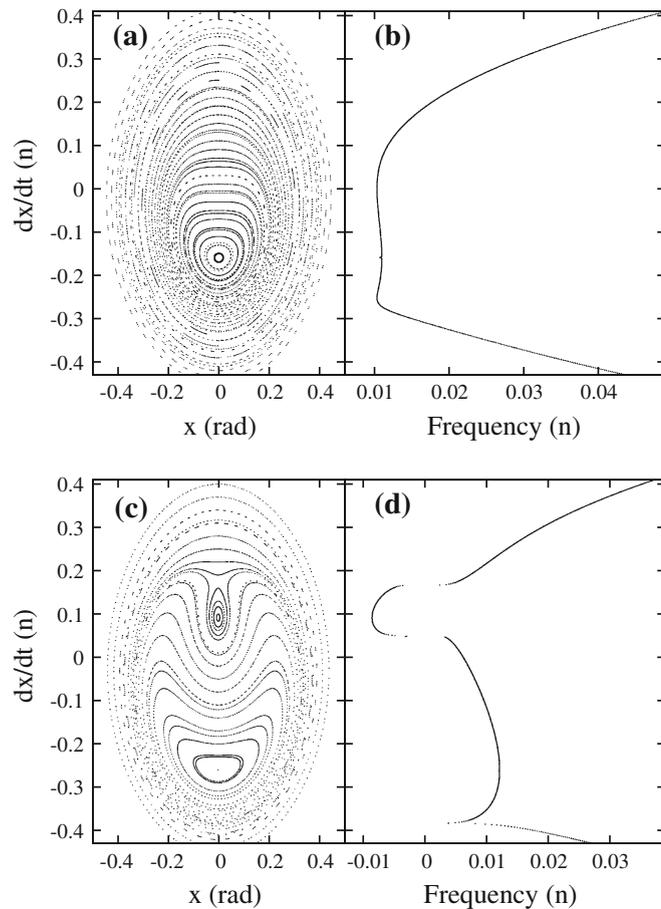


same role after the 1:1 resonance than the one connected to Q_1 before this secondary resonance. The Fig. 2(b) shows the evolution of the frequencies f_1 and f_3 of the two elliptical (stable) fixed points deduced from the equation $\mathcal{P}_j(\sqrt{-1} f_j) = 0$, where the \mathcal{P}_j are defined by the relation (50). When σ increases, the value of the frequency f_1 begins to decrease, reaches a minimum for σ slightly greater than 1, and then increases slowly. The fixed point that is created at the bifurcation being degenerated the frequency f_3 (dotted curve) starts from zero and then increases rapidly along the stable branch.

In order to get more details regarding the structure of the phase space in the neighborhood of the forced trajectory, we use Poincaré sections. To this end, we will not consider averaged equations, or expansions in a neighborhood of zero as we have done to carry out the analytical computations, but the complete initial differential equation (8) where the temporal evolution of v, r and ζ is deduced from (2) to (5). As in the above analytical development, we have neglected the terms containing the function $\hat{\zeta}'$, the function ζ has to be constant along the integration. This can be done easily assuming that the satellite is at the equilibrium points L_4 or L_5 , that is $\zeta = \hat{\zeta} = \pm\pi/3$ and $\dot{\zeta} = \hat{\zeta}' = 0$. Consequently, we are left with a one degree of freedom system depending periodically on the time (just like in the Keplerian case) and the phase portrait can be studied using the first return map defined by the flow of the system at time $2\pi/n$. The global phase portrait of this problem is well known, it resembles to the one of the π -periodic pendulum weakly perturbed by a periodic time dependent function (see e.g. Wisdom 1987, 2004). Here we focus on a neighborhood of $x = \dot{x} = 0$ because we are interested in a local phenomenon that disturbs the forced orbit when σ is close to the critical value σ_0 .

Figures 3(a) and 3(c) show two different phase portraits of the system in coordinates (x, \dot{x}) , restricted to a small area around the origin. The Fig. 3(a) is computed with $\sigma = 1$ chosen below the critical value $\sigma_0 \approx 1.01953$ (Eq. 44), whereas on the bottom plot (c)

Fig. 3 Phase portraits of the 1:1 secondary resonance in the coordinate system (x, \dot{x}) . Figures (a) and (c) show the iterates of the first return map of the unperturbed problem for two different values of σ chosen in both sides of the critical values σ_0 : $\sigma = 1$ in (a) and $\sigma = 1.013$ in (c). Figures (b) and (d) represent the libration frequency $f(\dot{x})$ for the corresponding values of σ . The two gaps visible in (d) correspond to the crossing of the separatrices where a logarithmic singularity is encountered. The tangent to the frequency curve in this point is consequently horizontal



$\sigma = 1.013$ is chosen slightly above the critical value σ_0 . The phase space (a) shows only one elliptical fixed point (a periodic orbit) which is not centered on zero due to the non-zero value of Q_1 . For the phase space (c), a second elliptical point appears at the position Q_3 because the system has crossed the bifurcation located at σ_0 . Around these points, the trajectories rotate in two different directions and these two dynamical states are separated by the separatrix emerging from an hyperbolic point located just upper the Q_3 fixed point.

Figures 3(b) and 3(d) represent the graphs of the frequency map of the system for the two selected values of σ . More precisely, assuming that the system is regular, the orbit of the first return map passing through the point of coordinates $(0, \dot{x})$ is quasiperiodic and has two fundamental frequencies: n and an independent frequency denoted $f(\dot{x})$. The frequency map is the map which associates with \dot{x} the frequency $f(\dot{x})$. In practice, this frequency is evaluated numerically applying the frequency analysis developed by Laskar (1990, 1999). If the dynamics of the studied system is regular (integrable system), the graph of the frequency map is almost everywhere perfectly smooth. On the contrary, its singularities or lack of smoothness indicate the location of chaotic zones, or of hyperbolic domains associated with resonances. In addition, when a stable island associated with a resonance is crossed, the frequency $f(\dot{x})$ remains constant. For further explanations and developments about the frequency map analysis, we refer the reader to Laskar (1999) and references therein.

The frequency $f(\dot{x})$ versus \dot{x} is plotted in the right column of the Fig. 3. In Fig. 3(b), where $\sigma = 1$, the curve seems perfectly smooth, which indicates the global stability of the considered problem (if unstable regions exist, their size is microscopic at the scale of the figure). The frequency reaches a local maximum corresponding to the fixed point. Its value

fits very well to the value predicted by the relation (50). The two local minima are not directly related to critical points or singular structures of the phase space, but by increasing the values of σ , these minima will tend to zero. When $\sigma = \sigma_0$, one of these minima indicates the location of the fixed point $Q_2 = Q_3$ and the other one, the location of its separatrix. Notice that, for $\sigma = 1$, the frequency $f(\dot{x})$ is always greater than 0.01, that will be of interest when the coorbital perturbation will be added to the model.

For $\sigma = 1.013$ (Fig. 3d), the frequency curve is globally smooth, but possesses three singularities associated with two gaps (close to $\dot{x} = 0.15$ and 0.18) and a cusp (at $\dot{x} = -0.4$). These structures correspond to the crossing of the separatrices emerging from the unstable equilibrium. Between these singularities, the frequency reaches two extrema, the positive one, which coincides with the equilibrium located inside the big clockwise libration island, and the negative minimum associated with the fixed point lying inside the small counter-clockwise libration island. Here again, the agreement between the values of the extrema and the values predicted by f_1 and f_3 is better than 1%.

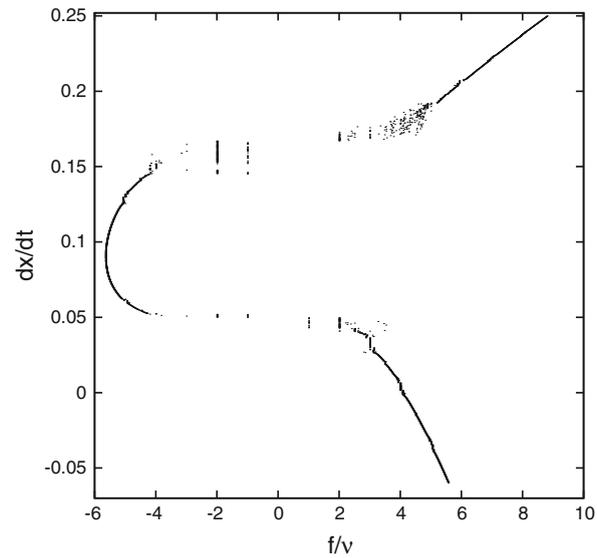
Let us now study the effect of the coorbital perturbation on the rotation inside the 1:1 secondary resonance. As the perturbed problem has three degrees of freedom, we cannot visualize its dynamics using Poincaré sections. But we can still study the frequency map of the perturbed problem. Here the situation is very different from the non-resonant case studies in Sect. 3.3. Indeed, in the non-resonant case, the libration frequency is close to σ . It turns out that the ratio of this frequency by the coorbital frequency ν is of order $1/\sqrt{\mu}$. Then, the possible resonances between these frequencies are of high order and their dynamical influence is negligible. But, as in the resonant case, the libration frequency can reach null values, so we can expect to observe interesting phenomena that we detail below.

As the size of the perturbation increases with the amplitude of the variations of ζ , a large amplitude tadpole orbit has been chosen to introduce the perturbation in our simulation. Its initial conditions are $\zeta(0) = \pi/3$, $\dot{\zeta}(0) = 0.0024$. Along this orbit, ζ varies between 24.3° and 162.5° and the coorbital frequency is equal to $\nu = 1.5085 \cdot 10^{-3}$.

In the case of $\sigma = 1$, the frequency curve of the perturbed problem (not presented in the paper) is extremely similar to the one of the unperturbed problem drawn in Fig. 3(b). This shows that the addition of the perturbation does not generate any significant instability. This is probably due to the fact that the minimum of the libration frequency being of about 0.0103, the lower order reachable resonance is given by $f = 7\nu$, and the system is in some sense protected from the destabilizing influence of the perturbation. Consequently, the chaotic zones resulting from these resonances are extremely small.

On the contrary, the situation is much more interesting when $\sigma = 1.013$ for at least two reasons. First, due to the presence of a hyperbolic fixed point, very thin chaotic regions exist near the separatrices of the unperturbed problem. Then we expect that, adding one degree of freedom, the size of these chaotic region increases. The second reason lies on the fact that, as shown in Fig. 3(d), the frequency f approaches zero, making possible resonances of low order between f and ν . The expected phenomena are observed in Fig. 4 which presents an enlargement of the graph of the perturbed frequency map. The global shape of the frequency curve is similar to the case of the unperturbed problem (Fig. 3d), but new structures are clearly visible. This curve presents two very different regions. The first one is composed of three pieces of the curve: the part lying above the line $\dot{x} = 0.196$, the part below $\dot{x} = 0.025$ and the one located in the left side of the vertical line $f/\nu = -4$. In this first domain, the curve is very smooth except for some regions marked by discontinuities generated by resonances between $f(\dot{x})$ and ν . But they are isolated and their associated chaotic areas are not observable, even at this scale.

Fig. 4 Chaotic behavior of the libration frequency of the perturbed problem: enlargement of the counterclockwise libration island. The *X-axis* represents the ratio of the frequencies $f(\dot{x})/\nu$, thus the abscissa of the main resonances are integer (or half-integer). The values of \dot{x} are on the *Y-axis*. This figure highlights the overlap of the lower order resonances and its associated chaotic area. The regions where $f(\dot{x})$ is constant (vertical segments) are associated with the resonances $f/\nu = p \in \mathbb{N}$



The second region includes what remains of the two (quasi) horizontal branches of Fig. 3(d) marking the crossing of the separatrices of the unperturbed problem. The regular branches are replaced by vertical segments, whose abscissa is integer, and by regions where the points are not well arranged. These structures are mainly generated by the presence of low order resonances $f = k\nu$, the integer k satisfying $-4 \leq h \leq 5$, and of their overlapping. Although these phenomena are clearly visible, they are confined to the vicinity of the separatrices of the unperturbed problem. In the parameter space that we explored, this should not significantly affect the rotation of the satellite. By extension, in the case of the coorbitals, with the parameters listed in Tables 1 and 2, the resonances should stay confined in very limited phase space.

3.4.2 The 2:1 secondary resonance

According to Sect. 3.3, the invariant set $(y'(t), Y'(t), \lambda'_1(t), \lambda'_2(t)) = (0, 0, nt + \lambda'_1(0), \sqrt{\mu}nt + \lambda'_2(0))$ corresponds to the forced trajectory which is elliptic (stable) in absence of secondary resonances. As its normal frequency is close to σ , a doubling period like bifurcation arises when σ is close to $n/2$. In order to study this phenomenon, we introduce the canonical coordinates:

$$\begin{aligned} z &= 2w - u = 2w - (\lambda'_1 + \hat{\zeta}(\lambda'_2)), & Z &= W/2, \\ \vartheta_1 &= \lambda'_1, & \Theta_1 &= \Lambda'_1 + W/2, \\ \vartheta_2 &= \lambda'_2, & \Theta_2 &= \Lambda'_2 + \hat{\zeta}'(\lambda'_2)W/2, \end{aligned} \tag{53}$$

such that z and ϑ_2 are two slow angles. After the substitution of $(w, W, \lambda'_j, \Lambda'_j)$ by the new coordinates $(z, Z, \vartheta_j, \Theta_j)$ in the Hamiltonian H defined by the relations (24)–(26), followed by its averaging with respect to ϑ_1 , the resonant Hamiltonian reads⁴:

$$\begin{aligned} K_{2:1} &= (2\sigma - n)Z - Z^2 + \frac{\sqrt{\mu}\rho}{2} (3\sigma Z - 4Z^2) \cos z \\ &\quad + \sqrt{\mu}n\Theta_2 + \sqrt{\mu} (2\sigma - n - 2Z) Z \hat{\zeta}'(\vartheta_2). \end{aligned} \tag{54}$$

⁴ In order to simplify the notations, the bars over the variables are omitted in the expression of the averaged Hamiltonian.

As in Sect. 3.4.1, in a first step, we can focus on the first line of the previous expression, neglecting the terms depending on (ϑ_2, Θ_2) . The topology of the phase space of this Hamiltonian system whose Hamiltonian is denoted by $K_{2:1}^{(0)}$ bifurcates for two different values of the parameter σ :

$$\sigma_0 = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{\mu\rho} \right)^{-1}, \quad \text{and} \quad \sigma_\pi = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{\mu\rho} \right)^{-1}. \quad (55)$$

When $\sigma < \sigma_0$ the system associated with $K_{2:1}^{(0)}$ does not have any fixed point, except the point $Z = 0$, which corresponds to the singular half-line of the polar coordinates. In other words, in Cartesian coordinates $(\sqrt{2Z} \sin z, \sqrt{2Z} \cos z)$, the origin is a stable fixed point, and the topology of the phase space is similar to the non resonant case. When the first critical value σ_0 is reached, the origin (or the half-line $Z = 0$) loses its stability given rise to a new elliptical fixed points of coordinates (z_0, Z_0) with

$$z_0 = 0, \quad Z_0 = \frac{2(2\sigma - n) + 3\sqrt{\mu\rho}\sigma}{4(1 + 2\sqrt{\mu\rho})}. \quad (56)$$

From the second critical value σ_π , the central equilibrium point recovers its stability while a new unstable fixed point of coordinates (z_π, Z_π) , where

$$z_\pi = \pi, \quad Z_\pi = \frac{2(2\sigma - n) - 3\sqrt{\mu\rho}\sigma}{4(1 - 2\sqrt{\mu\rho})}, \quad (57)$$

emerges from $Z = 0$. Its separatrix surrounds the point (z_0, Z_0) which becomes stable again. This kind of bifurcation is described by Murray and Dermott (1999, Chap. 8, Fig. 8.12) for a different situation corresponding to an internal second-order mean motion resonance in the restricted three body problem. One gets the same phase portrait as in the book using a coordinate system like $(Z \cos(z/2), Z \sin(z/2))$.

As it is the case for the 1:1 secondary resonance studied in Sect. 3.4.1, if the value of the parameter σ exceeds σ_0 , the frequency can approach zero. If we take into account the orbital perturbation, this will give rise to resonances with the frequency ν , generating wide chaotic regions in the neighborhood of the separatrices of the unperturbed problem. But the goal of this paper is not to describe these local phenomena.

4 Discussion and conclusion

In previous sections, we have described the dynamical behavior of the rotational motion of the coorbital satellites. Notably, we show that three parameters control the dynamics: (i) the frequency σ related to the dynamical figure of the satellite, (ii) the departure from the Lagrangian points that leads to introduce orbital perturbations represented by ζ and adds a new frequency in the system, and (iii) the combination $\sqrt{\mu\rho}$ coming from the short-period orbital perturbation.

(i) The coorbital satellites are small satellites of some kilometers (the mean radius ranges from 1.3 kilometers for Polydeuces to 89.5 kilometers for Janus). The Cassini spacecraft provides high resolution images leading to mapping and cartography these satellites with an accuracy of 0.4 kilometers for Polydeuces (Porco et al. 2007; Thomas 2010). The only accessible parameters for the figure of the satellites are the long axes ellipsoidal shape. From these data, we can compute the moment of inertia by assuming that the satellites are homogeneous and ellipsoidal

$$A = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \tag{58}$$

$$B = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \tag{59}$$

$$C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2), \tag{60}$$

where A, B, C are the principal moment of inertia and a, b, c are the fitted long axis ellipsoidal shape coming from shape models (Thomas 2010). By looking the recent images of Helene (Cassini image N00172886.jpg, NASA/JPL/Space Science Institute 2011), it is clear that it is a rough hypothesis. We use the data provided by Thomas (2010) that compiled the recent shape models of these satellites and we compute the triaxiality $(B - A)/C$ that is equal to

$$\frac{B - A}{C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \tag{61}$$

so the main uncertainties come from the equatorial axes of the shape. The resulting values of $\sigma = n\sqrt{3(B - A)/C}$ are shown in Table 2. To give an idea of the error due to the ellipsoidal approximation, it is interesting to review the determination of the shape of Janus and Epimetheus. Tiscareno et al. (2009) provided the moments of inertia of both satellites from shape model without the assumption of the ellipsoidal shape and deduced σ equal to 8.51, and 4.94 rad/day instead of 5.62, and 3.85 rad/day for the ellipsoidal shape model. Clearly, the ellipsoidal shape model gives an error of the order of 33%. Table 2 provides the different values of σ for the coorbitals by assuming an ellipsoidal shape. We note that Telesto, Calypso, and Polydeuces present a departure from the 1:1 secondary resonance of 3.3, 12.0, 23.2%, whereas Helene shows 19.0% departure from the 1:2 secondary resonance. Consequently, by assuming an uncertainty of 30%, these satellites could be in or close to secondary resonance and more data are necessary to determine their figure. Basing on the values given in the Tables 1 and 2, we estimate the amplitude of the forced orbit for each of the six coorbital satellites. To this end, we assume that the rotation of the satellites is not in secondary resonance, and use the expression (21) to derive the amplitude of the libration with respect to the line Saturn-satellite $A_S = 2\rho\sqrt{\mu}n^2(n^2 - \sigma^2)^{-1}$, which is given in the fifth column of the Table 2. The amplitude of the forced orbit in a uniformly rotating reference frame (Table 2, last column) derived from the expression (22) is given by $A_r = 2\rho\sqrt{\mu}\sigma^2(n^2 - \sigma^2)^{-1}$.

(ii) The departure of the trajectories from the Lagrange points leads to long-period oscillations in the orbital motion characterized by ζ . The perturbation of the orbital motion influences the rotational motion of the satellites by varying the gravitational torque coming from Saturn expressed in (6), through r and v . This is an indirect effect acting on the satellite. It has been shown in the Eq. (21) that the amplitude of the forced trajectory is almost the same than in the Keplerian case but its phase differs by the ν -periodic function $\zeta(\nu t)$. For the σ values listed in Table 2, the influence of ζ is small for Calypso, Telesto, and Helene. However, for large tadpole orbits such as Polydeuces and for horseshoe orbits (Janus and Epimetheus) the influence is large. In addition, for σ leading to secondary spin-orbit resonance, the presence of the additional frequency ν causes new resonances and generates chaotic areas.

(iii) The orbital motion of the satellites is described through Érdi's formalism (Érdi 1977) and the initial values come from the *Horizons* ephemerides (Giorgini et al. 1996). The *Horizons* ephemerides provide a recent orbit of the satellites based on additional images from Cassini spacecraft (Jacobson et al. 2008). In our model the parameter $\sqrt{\mu}\rho$ controls the amplitude of the orbital short period variations as the eccentricity does for Keplerian motions.

Consequently, ρ is directly adjusted to the mean eccentricity of the satellite. The eccentricity of the coorbitals from the *Horizons* ephemerides varies with time on short and long periods due to several effects. First, the eccentricity of the principal satellites is not equal to zero. The eccentricities of Dione and Tethys are 0.0022 and 0.0001, respectively. [Érdi \(1977\)](#) shows that in this case, the Eq. (2) will present an additional periodic term at the orbital frequency leading to an additional term of frequency n in the solution. Moreover, due to the interactions between the satellites, the longitude v will present secular terms, long periodic component, as illustrated for Janus and Epimetheus ([Robutel et al. 2011](#)). All these effects could be easily introduced in the present formalism by adding periodic terms in the equation of motion. On contrast, the interactions with Enceladus and Mimas that are in 2:1 resonance with Dione and Tethys, and therefore with the coorbitals, are more complicated to model and to describe.

In conclusion, we have studied the impact of the coorbital resonance on the rotational motion of Telesto, Calypso, Helene and Polydeuces, in the planar problem (orbital and equatorial inclination are neglected). We have shown that the main parameters acting on the rotational motion are $(\sigma, \zeta, \sqrt{\mu}\rho)$ where σ is related to the dynamical figure of the moons, ζ is the secular perturbation of the orbit and $\sqrt{\mu}\rho$ is the departure from the Lagrangian points. The uncertainties in the dynamical figure of the moons range the possibility that they are close or in secondary resonances. Such secondary resonances, coupled with the secular motion of the moons due to the coorbital resonance, increase the possibility to reach supplementary resonances and these satellites are inclined to exhibit a rich dynamics. The determination of the dynamical figure of these satellites by space observations will bring precious information for the dynamics of these moons.

Acknowledgments The authors thank Elodie Thilliez for her help concerning the application of [Érdi's](#) approximations and the referee Benoit Noyelles for his useful remarks and suggestions.

Appendix

The link with the expressions given by [Érdi \(1977\)](#) and the equations (2)–(5) is not straightforward and some clues are given in the following lines. The x th formula is denoted by $[x]$ if it appears in [Érdi \(1977\)](#) and by (x) if it comes from the present paper.

From the relations [5a] and [19] truncated at first order in $\varepsilon = \sqrt{\mu}$, we deduce that $r = 1 + \sqrt{\mu}(\rho_1 \cos(\varphi + \psi_1) - \frac{2}{3}f_1)$, while [5b] and [20] give $\theta = \varphi - 2\sqrt{\mu}\rho_1 \sin(\varphi + \psi_1) + \sqrt{\mu}q_1$ (the polar angle θ is denoted by v in our paper). The functions φ , f_1 , ρ_1 and ψ_1 depend a priori on \tilde{v} which is a slow time defined by $\tilde{v} = \sqrt{\mu}(v - v_0)$, v being the true anomaly of the massless body ($v = nt$ in the Circular Restricted Three Body Problem (C.R.T.B.P.)). As from [27a] and [27b], the functions ρ_1 and ψ_1 are constant ($e_1 = 0$ in the C.R.T.B.P.), it only remains to give an explicit expression for φ and f_1 . From [7a] we have $\varphi = v + \sqrt{\mu} \int f_1(\tilde{v})d\tilde{v}$ and the relation [23] links f_1 , and consequently φ , to ζ_1 (ζ in the present paper) that satisfies the differential equation [24] (Eq. (5) in this text). By some changing of notations, we get the approximations (2)–(5).

Here, we have extracted from [Érdi's](#) paper only the necessary relations to get a simple orbital model of a Trojan satellite. However, [Érdi's](#) theory goes far further since it gives asymptotical expansions to second order in $\sqrt{\mu}$ within the framework of the planar elliptic restricted three body problem. The section 7 of [Érdi \(1977\)](#) summarizes these results. A spatial theory is given in [Érdi \(1978\)](#).

References

- Arnold, V.I., Kozlov, V., Neistadt, A.: *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, Berlin (2006)
- Celletti, A., Chierchia, L.: Measures of basins of attraction in spin-orbit dynamics. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **101**, 159–170 (2008)
- Christou, A.A., Namouni, F., Moreira Morais, M.H.: The long term stability of coorbital moons of the satellites of Saturn. I. Conservative case. *Icarus* **192**, 106–116 (2007)
- Érdi, B.: An asymptotic solution for the trojan case of the plane elliptic restricted problem of three bodies. *Celest. Mech.* **15**, 367–383 (1977)
- Érdi, B.: The three-dimensional motion of trojan asteroids. *Celest. Mech.* **18**, 141–161 (1978)
- Giorgini, J.D., Yeomans, D.K., Chamberlin, A.B., Chodas, P.W., Jacobson, R.A., Keesey, M.S., et al.: JPL's on-line Solar system data service. In: *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume **28** of *Bulletin of the American Astronomical Society*, p. 1158 (1996)
- Henrard, J., Lemaître, A.: A second fundamental model for resonance. *Celest. Mech.* **30**, 197–218 (1983)
- Jacobson, R.A., Spitale, J., Porco, C.C., Beurle, K., Cooper, N.J., Evans, M.W., Murray, C.D.: Revised orbits of Saturn's small inner satellites. *Astron. J.* **135**, 261–263 (2008)
- Jorba, A., Simó, C.: On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.* **27**(6), 1704–1737 (1996)
- Kevorkian, J.: The planar motion of a Trojan asteroid. In: Giacaglia, G.E.O. (Ed.) *Periodic Orbits Stability and Resonances*, pp. 286–303. Reidel (1970)
- Landau, L., Lifchitz, E.: *Mechanics*. Pergamon press, Oxford (1960)
- Laskar, J.: The chaotic motion of the Solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zone. *Icarus* **88**, 266–291 (1990)
- Laskar, J.: Introduction to frequency map analysis. In: Simó, C. (ed.) *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, NATO ASI, pp. 134–150. Kluwer, Dordrecht (1999)
- Lichtenberg, A.J., Leiberman, M.A.: *Regular and Chaotic Dynamics*, Vol 38 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin (1992)
- Morais, M.H.M.: Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.* **369**, 677–689 (2001)
- Murray, C.D., Dermott, S.F.: *Solar System Dynamics*. Cambridge University press, Cambridge (1999)
- NASA, Jet Propulsion Laboratory, Space Institute: Cassini image N00172886. <http://saturn.jpl.nasa.gov/photos/raw/rawimagedetails/index.cfm?imageID=239054> (2011)
- Noyelles, B.: Theory of the rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus* **207**, 887–902 (2010)
- Peale, S.J.: Origin and evolution of the natural satellites. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **37**, 533 (1999)
- Porco, C.C., Thomas, P.C., Weiss, J.W., Richardson, D.C.: Saturn's small inner satellites: clues to their origins. *Science* **318**, 1602–1607 (2007)
- Robutel, P., Rambaux, N., Castillo-Rogez, J.: Analytical description of physical librations of Saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus. *Icarus* **211**, 758–769 (2011)
- Salo, H., Yoder, C.F.: The dynamics of coorbital satellite systems. *Astron. Astrophys.* **205**, 309–327 (1988)
- Sharma, R.K., Rao, P.V.S.: Stationary solutions and their characteristic exponents in the restricted three-body problem when the more massive primary is an oblate spheroid. *Celest. Mech.* **13**, 137–149 (1976)
- Thomas, P.C.: Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus* **208**, 395–401 (2010)
- Thomas, P.C., Davies, M.E., Colvin, T.R., Oberst, J., Schuster, P., Neukum, G., Carr, M.H., McEwen, A., Schubert, G., Belton, M.J.S.: The shape of Io from Galileo Limb measurements. *Icarus* **135**, 175–180 (1998)
- Thomas, P.C., Burns, J.A., Helfenstein, P., Squyres, S., Veverka, J., Porco, C., Turtle, E.P., McEwen, A., Denk, T., Giese, B., Roatsch, T., Johnson, T.V., Jacobson, R.A.: Shapes of the saturnian icy satellites and their significance. *Icarus* **190**, 573–584 (2007)
- Tiscareno, M.S., Thomas, P.C., Burns, J.A.: The rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus* **204**, 254–261 (2009)
- Vienne, A., Duriez, L.: TASS1.6: Ephemerides of the major Saturnian satellites. *Astron. Astrophys.* **297**, 588–605 (1995)
- Wisdom, J.: Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites. *Astron. J.* **94**, 1350–1360 (1987)
- Wisdom, J.: Spin-orbit secondary resonance dynamics of enceladus. *Astron. J.* **128**, 484–491 (2004)

Annexe C

Article 2 : Coupling between corotation and Lindblad resonances in the elliptic planar three-body problem

Coupling between corotation and Lindblad resonances in the elliptic planar three-body problem

M. El Moutamid · B. Sicardy · S. Renner

To be submitted to *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*. Version: August 14, 2013

Abstract We investigate the dynamics of two satellites μ_s and μ'_s orbiting a massive central planet in a common plane, near a first order mean motion resonance $m+1:m$ (m integer). We consider only the resonant terms of first order in eccentricity in the disturbing potential of the satellites, plus the secular terms causing the orbital apsidal precessions. We obtain a two-degree of freedom system, associated with the two critical resonant angles $\phi = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi$ and $\phi' = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'$, where λ and ϖ are the mean longitude and longitude of periapsis of μ_s , respectively, and where the primed quantities apply to μ'_s . We consider the special case where $\mu_s \rightarrow 0$ (restricted problem). The symmetry between the two angles ϕ and ϕ' is then broken, leading to two different kinds of resonances, classically referred to as Corotation Eccentric resonance (CER) and Lindblad Eccentric Resonance (LER), respectively. We write the four reduced equations of motion near the CER and LER, that form what we call the CoraLin model. This model depends upon only two dimensionless parameters that control the dynamics of the system: the distance D between the CER and LER, and a forcing parameter ϵ_L that includes both the mass and the orbital eccentricity of the disturbing satellite. Three regimes are found: for $D = 0$ the system is integrable, for D of order unity, it exhibits prominent chaotic regions, while for D large compared to 2, the behavior of the system is regular and can be qualitatively described using simple adiabatic invariant arguments. We apply this model to three recently discovered small Saturnian satellites dynamically linked to Mimas through first order mean motion resonances : Aegaeon, Methone and Anthe. Poincaré surfaces of section reveal the dynamical structure of each orbit, and their proximity to chaotic regions. This work may be useful to explore various scenarii of resonant capture for those satellites.

Keywords Elliptic Three-body planar problem · Mean Motion Resonance · Hamiltonian formalism · Corotation · Lindblad

1 Introduction

We consider the problem of two small bodies of masses μ_s and μ'_s orbiting in a common plane around a central massive body of mass M_p ($\mu_s, \mu'_s \ll M_p$). In this paper, the central massive body will be called the planet, while the two orbiting objects will be called the satellites¹. We consider a configuration that

Maryame El Moutamid
LESIA / IMCCE - Observatoire de Paris
5, Place Jules Janssen
92195 Meudon Cedex, France
Tel.: +33-1-45077492
Fax: +33-1-45077110
E-mail: maryame.elmoutamid@obspm.fr

Bruno Sicardy
LESIA - Observatoire de Paris
University Pierre et Marie Curie, Paris

Stéfan Renner
Laboratoire d'Astronomie de Lille Université Lille 1
IMCCE - Observatoire de Paris

¹ For sake of brevity, the masses M_p , μ_s and μ'_s will denote at the same time the bodies and their masses.

is close to a first-order $m + 1:m$ mean motion resonance:

$$(m + 1)n' \approx mn,$$

where m is an integer (positive or negative depending on whether μ_s orbit inside or outside μ'_s), and n and n' are the mean motions of μ_s and μ'_s , respectively. Near the resonance, the dynamics of the satellites is described by a two-degree of freedom system with two critical resonant angles ϕ and ϕ' :

$$\begin{aligned}\phi &= (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi \\ \phi' &= (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi',\end{aligned}\tag{1}$$

where λ and ϖ and their primed counterparts are the classical notations for the mean longitude and longitude of periapsis of the satellites, respectively.

Having two degrees of freedom, the Hamiltonian describing the motion of μ_s and μ'_s is in general not integrable, and leads to chaotic behaviors in certain regions of phase space, as shown herein.

The aims of this paper are: (1) to clearly distinguish the effects of the two kinds of resonances associated with ϕ and ϕ' . When $\mu_s \neq 0$ and $\mu'_s \neq 0$, the two resonances have indeed symmetric behaviors, but this symmetry is broken when for instance $\mu_s = 0$, that is, the planar restricted three-body problem. The angle ϕ then describes the so-called Lindblad Eccentric Resonance (LER), while ϕ' describes the Corotation Eccentric Resonance (CER). This terminology originated from galactic dynamics, see e.g. [Lindblad \(1961, 1962\)](#); [Lin and Shu \(1964\)](#); [Goldreich and Tremaine \(1979\)](#), but is not widely spread in celestial mechanics. As recalled later, LER's mainly excite orbital eccentricities (leaving semi-major axes largely unaffected), while CER's mainly change semi-major axes (leaving eccentricities largely unaffected).

A second goal of this paper is (2) to discuss the integrability of the two-degree of freedom system in the presence of the two critical angles ϕ and ϕ' . There is a considerable amount of literature for the case $\mu_s = 0$ and $e' = 0$ (the planar, restricted and circular three-body problem), in which only the critical angle ϕ appears, reducing the problem to a one-degree of freedom integrable system described by the classical Andoyer Hamiltonian given in Eq. (24), see [Henrard and Lemaître \(1983\)](#); [Ferraz-Mello \(1985, 2007\)](#). The problem where both ϕ and ϕ' are present has been treated by [Sessin and Ferraz-Mello \(1984\)](#) in the Keplerian case (i.e. with a central potential $\propto -\mathcal{G}M_p/r$, where \mathcal{G} is the constant of gravitation and r is the distance to M_p) and for $\mu_s \neq 0$ and $\mu'_s \neq 0$. These authors show that the two-degree of freedom system is then integrable. More precisely, they show that the problem can be reduced to a one-degree of freedom system described again by an Andoyer Hamiltonian. More discussion about this result and its developments is provided in Section 2.2.

The final goal of this paper is (3) to rescale the restricted problem ($\mu_s = 0$) so that it depends upon two dimensionless parameters only: the distance D between the two resonances and a parameter ϵ_L that depends upon the mass and orbital eccentricity of μ'_s , thus allowing a generic approach of the problem. While the problem is integrable when the $D = 0$, we show numerically that large chaotic regions appear for small distances. For large D 's, the system tends again toward an integrable system that can be solved using adiabatic invariance arguments.

Our work can be applied in a general way to various problems involving ring and satellite dynamics. This extends for instance the approach of [Goldreich et al. \(1986\)](#) and [Porco \(1991\)](#), who proposed a model to explain the stability of Neptune's incomplete rings (arcs) under the combined effects of Lindblad and corotation resonances. More recently, [Cooper et al. \(2008\)](#) and [Hedman et al. \(2009, 2010\)](#) have studied the motion of the small Saturnian satellites Anthe, Aegaeon and Methone that are trapped in corotation resonances with Mimas, while being perturbed by nearby Lindblad resonances.

2 General case

2.1 Derivation of the Hamiltonian

We use here standard notations: a , e , n , λ and ϖ denote the semi-major axis, orbital eccentricity, mean motion, mean longitude and longitude of periapsis of μ_s , respectively, with similar primed quantities for μ'_s . For an oblate planet, this elements denote the geometric elements (and not the osculating elements), see [Borderies-Rappaport and Longaretti \(1994\)](#); [Renner and Sicardy \(2006\)](#) for details. In that case, the quantities $\dot{\varpi}_s$ and $\dot{\varpi}'_s$ will denote the secular time variations of ϖ_s and ϖ'_s (precession rates) arising from the planet oblateness, i.e. the variations that are not due to the resonances themselves.

We assume that the semi-major axes of μ_s and μ'_s remain close to reference values a_0 and a'_0 , respectively, where the mean motions are n_0 and n'_0 . Those reference values are chosen in a univocal way so that $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = 0$, and so that the total orbital energy of μ_s and μ'_s is $-\mathcal{G}M_p\mu_s/2a_0 - \mathcal{G}M_p\mu'_s/2a'_0$. Then $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}_s = \dot{\varpi}'_s - \dot{\varpi}_s$, which defines the distance (in term of frequency) between the two resonances. This choice for the reference values a_0 and a'_0 is arbitrary, and is motivated by the fact that we will study later the behavior of a test particle near the corotation resonance, where $(m+1)n' - mn - \dot{\varpi}'_s = 0$. We define:

$$\xi = \frac{a - a_0}{a_0}, \quad \xi' = \frac{a' - a'_0}{a'_0},$$

as the relative differences of the semi-major axes with respect to the reference radii. We finally assume that μ_s and μ'_s stay far apart, in the sense that their orbital eccentricities and excursions in semi-major axes are small compared to their relative orbital separation: $\xi, \xi', e, e' \ll |a - a'|/a' \sim 1/m$.

The expansion of the disturbing function acting on μ_s and μ'_s to first order in eccentricities yields two terms slowly varying with time: $\mathcal{G}\mu_s\mu'_s e A \cdot \cos(\phi)$ and $\mathcal{G}\mu_s\mu'_s e' A' \cdot \cos(\phi')$, where ϕ and ϕ' are given in Eq. (1). Those terms include both direct and indirect parts from the perturbing function. The quantities A and A' are combinations of Laplace coefficients $b_{1/2}^{(m)}$, see [Ellis and Murray \(2000\)](#) for details. For numerical purposes, it is useful to note that A and A' have opposite signs, and that

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2a'} [2(m+1) + \alpha\mathcal{D}] b_{1/2}^{(m+1)}(\alpha) \approx +\frac{0.802m}{a'} \\ A' &= -\frac{1}{2a'} [(2m+1) + \alpha\mathcal{D}] b_{1/2}^{(m)}(\alpha) \approx -\frac{0.802m}{a'}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\alpha = a/a'$, $\mathcal{D} = d/d\alpha$, and where the approximations hold in the case of large m 's.

The derivation of the Hamiltonian of the system is classical and is described in many works, see e.g. [Laskar and Robutel \(1995\)](#) for a general approach. Averaging the rapidly varying terms to zero, and keeping only the terms containing ϕ and ϕ' , we obtain the averaged Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu^3(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'^3(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu\mu' A \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Lambda}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu\mu' A' \sqrt{\frac{2\Gamma'}{\Lambda'}} \cdot \cos(\phi') - \dot{\varpi}_s \Gamma - \dot{\varpi}'_s \Gamma'. \quad (3)$$

If μ'_s orbits inside μ_s , then $M = M_p(M_p + \mu_s + \mu'_s)/(M_p + \mu'_s)$, $M' = M_p^3/(M_p + \mu'_s)^2$, $\mu = \mu_s(\mu'_s + M_p)/(\mu_s + \mu'_s + M_p)$ and $\mu' = \mu'_s(\mu'_s + M_p)/M_p$, see [Sessin and Ferraz-Mello \(1984\)](#). Equivalent expressions may be derived if μ_s orbits inside μ'_s . In all cases, the orbital elements refer to the center of mass of M_p and the innermost satellite. Note that since $\mu_s, \mu'_s \ll M_p$, we have $M \approx M' \approx M_p$, $\mu \approx \mu_s$ and $\mu' \approx \mu'_s$.

Moreover, since the functional dependence of the state vectors of μ and μ' upon the geometric elements is the same as for Keplerian case, to first order in eccentricities, the values of A and A' can be directly derived from the formulae (2), provided geometric elements are used instead of osculating elements.

The actions Λ , Γ , Λ' and Γ' are the Poincaré variables, which are respectively conjugates to the angle variables λ , $-\varpi$, λ' and $-\varpi'$ as shown below:

$$\begin{aligned} \lambda &\longleftrightarrow \Lambda = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma} \\ -\varpi &\longleftrightarrow \Gamma = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx \mu e^2 \sqrt{\mathcal{G}Ma}/2 \\ \lambda' &\longleftrightarrow \Lambda' = \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'} \\ -\varpi' &\longleftrightarrow \Gamma' = \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'}(1 - \sqrt{1 - e'^2}) \approx \mu' e'^2 \sqrt{\mathcal{G}M'a'}/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Because \mathcal{H}_1 depends only on ϕ and ϕ' , it is convenient to use the new pairs of conjugate variables:

$$\begin{aligned} \lambda &\longleftrightarrow J = \Lambda + m(\Gamma + \Gamma') \\ \lambda' &\longleftrightarrow J' = \Lambda' - (m+1)(\Gamma + \Gamma') \\ \phi &\longleftrightarrow \Theta = \Gamma \\ \phi' &\longleftrightarrow \Theta' = \Gamma', \end{aligned} \quad (5)$$

and introduce the new actions Λ , Γ , Λ' and Γ' into \mathcal{H}_1 .

2.2 Physical interpretation of the actions

In order to better understand globally the motions of μ and μ' , it is instructive to consider the various actions entering in the system. Because \mathcal{H}_1 does not depend on λ and λ' , J and J' are constants of motion. Consequently, the initial four-degree of freedom system (two satellites moving in a common plane) reduces to a two-degree of freedom system. It is generally not integrable (see e.g. Fig. 5), unless $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s = 0$, as discussed later.

Turning back to J and J' , we have:

$$\begin{cases} J + J' = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma(1-e^2)} + \mu'\sqrt{\mathcal{G}M'a'(1-e'^2)} = \text{constant} \\ \frac{J}{m} + \frac{J'}{m+1} \approx \frac{2}{mn_0} \cdot \left[-\frac{\mathcal{G}M\mu}{2a} - \frac{\mathcal{G}M'\mu'}{2a'} \right] = \text{constant.} \end{cases} \quad (6)$$

Consequently, the conservations of J and J' merely express the conservation of the total angular momentum and energy of the system. More precisely, the Hamiltonian \mathcal{H}_1 describes the motion of two satellites that would orbit a motionless central massive planet. Thus, the exchange of energy and angular momentum occurs only between the satellites, and not between the satellites and the planet. In terms of ξ , e , ξ' and e' , the two equations (6) read:

$$\begin{cases} \frac{\mu(\xi - e^2)}{a_0^2 n_0} + \frac{\mu'(\xi' - e'^2)}{a_0'^2 n_0'} = \text{constant} \\ \frac{\mu\xi}{a_0} + \frac{\mu'\xi'}{a_0'} = \text{constant} \end{cases} \quad (7)$$

We now define $J_c = \Lambda + m\Gamma = J - m\Theta'$ and $J'_c = \Lambda' - (m+1)\Gamma' = J' + (m+1)\Theta$, which are averaged versions of the Jacobi quantity, or Tisserand parameter, see e.g. [Murray and Dermott \(2000\)](#). It can be shown that, to within additive constants²:

$$\begin{cases} J_c = \frac{\mu a_0^2 n_0}{2} [\xi + me^2] \\ J'_c = \frac{\mu' a_0'^2 n_0'}{2} [\xi' - (m+1)e'^2]. \end{cases} \quad (8)$$

The conservations of J and J' thus impose $\dot{J}_c = m\partial\mathcal{H}_1/\partial\phi'$ and $\dot{J}'_c = -(m+1)\partial\mathcal{H}_1/\partial\phi$, or:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\xi + me^2) = -\frac{2m\mathcal{G}\mu'}{a_0^2 n_0} A'e' \cdot \sin(\phi') \\ \frac{d}{dt} [\xi' - (m+1)e'^2] = \frac{2(m+1)\mathcal{G}\mu}{a_0'^2 n_0'} Ae \cdot \sin(\phi). \end{cases} \quad (9)$$

As expected, the Jacobi quantity J_c (resp. J'_c) is constant if $e' = 0$ (resp. $e = 0$).

On the other hand, we have $\dot{\Gamma} = \partial\mathcal{H}_1/\partial\varpi$ and $\dot{\Gamma}' = \partial\mathcal{H}_1/\partial\varpi'$, so that:

$$\begin{cases} \frac{d(e^2\sqrt{\mathcal{G}Ma})}{dt} = 2\mathcal{G}\mu' Ae \cdot \sin(\phi) \\ \frac{d(e'^2\sqrt{\mathcal{G}M'a'})}{dt} = 2\mathcal{G}\mu A'e' \cdot \sin(\phi'), \end{cases} \quad (10)$$

The quantity $e^2\sqrt{\mathcal{G}Ma}$ (resp. $e'^2\sqrt{\mathcal{G}M'a'}$) is the action associated with the fast, radial motions of μ (resp. μ'). In effect, the particle radial motion has an amplitude $\Delta r \approx ae$, while its radial velocity has an amplitude $\Delta p_r \approx aen \propto a^{-1/2}e$, from Kepler's third law. Thus, $\oint p_r dr \propto e^2 a^{1/2}$.

In the case of a Keplerian central potential $-\mathcal{G}M_p/r$, we have $\dot{\omega}_s = \dot{\omega}'_s = 0$. The two-degree of freedom system described by \mathcal{H}_1 then admits a second integral of motion (besides the Hamiltonian itself), and is

² The notation J_c is used later for a local version of the Jacobi constant, see Table (1). It is the same quantity as used here, except for a multiplicative constant.

thus integrable. This second integral was found by [Sessin and Ferraz-Mello \(1984\)](#) for the general case $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$ and extended to the restricted case by [Wisdom \(1986\)](#), while being further analyzed by [Henrard and Lemaître \(1986\)](#). The existence of this second constant can be demonstrated by using canonical transformations in which the sum $\mu\mu' Ae \cdot \cos(\phi) + \mu\mu' A'e' \cdot \cos(\phi')$ in Eq. (3) is replaced by a unique term $\sqrt{2\Phi} \cdot \cos(\varphi)$, and by showing that the new Hamiltonian only depends on the conjugate variables Φ , φ , reducing the system to a one-degree of freedom, integrable problem.

A more geometrical demonstration of the existence of a second constant of motion for \mathcal{H}_1 is provided here by posing $\sigma = (m+1)\lambda' - m\lambda$ and by defining the vectors $\mathbf{u} = [\cos(\sigma), \sin(\sigma)]$ and $\mathbf{v} = [-\sin(\sigma), \cos(\sigma)]$. Note that $\partial\mathbf{u}/\partial\sigma = -\mathbf{v}$. We also define the eccentricity vectors of μ and μ' as

$$\begin{cases} \mathbf{e} = (p, q) = [e \cos(\varpi), e \sin(\varpi)] \\ \mathbf{e}' = (p', q') = [e' \cos(\varpi'), e' \sin(\varpi')]. \end{cases} \quad (11)$$

For the Keplerian case, $\dot{\varpi}_s = \dot{\varpi}'_s = 0$, the Hamiltonian \mathcal{H}_1 now reads:

$$\mathcal{H}_{1K} = -\frac{\mu^3(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'^3(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu\mu' A(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) + \mathcal{G}\mu\mu' A'(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{u}). \quad (12)$$

Using the approximations $e \ll 1$ and $\Lambda \approx \Lambda_0 = \mu\sqrt{\mathcal{G}Ma_0}$, we obtain $\dot{p} = (\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial q)/\Lambda_0$ and $\dot{q} = -(\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial p)/\Lambda_0$, so that $\dot{\mathbf{e}} = -(\mathcal{G}\mu\mu' A/\Lambda_0)\mathbf{v}$. Likewise, $\dot{\mathbf{e}}' = -(\mathcal{G}\mu\mu' A'/\Lambda'_0)\mathbf{v}$. Using Kepler's third law and noting that A and A' have opposite signs, the two latter equations provides the following vectorial constant of motion:

$$\frac{\Lambda_0}{A}\mathbf{e} - \frac{\Lambda'_0}{A'}\mathbf{e}' \propto \frac{\mu}{a_0|A|n_0}\mathbf{e} + \frac{\mu'}{a'_0|A'|n'_0}\mathbf{e}' = \mathbf{e}_{\text{tot}} = \text{constant}, \quad (13)$$

where the vector \mathbf{e}_{tot} defined here is called the ‘‘total eccentricity’’ of the system. Moreover, $\dot{\Lambda} = -\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial\lambda = m\partial\mathcal{H}_{1K}/\partial\sigma = -m(\Lambda_0\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} + \Lambda'_0\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}')$. Using the conservation of \mathbf{e}_{tot} , and performing the same calculation for Λ' , we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{A^2\dot{\Lambda}}{m\Lambda_0} &= -[\Lambda\mathbf{e} + \Lambda'\mathbf{e}'] \cdot A\dot{\mathbf{e}} \\ \frac{A'^2\dot{\Lambda}'}{(m+1)\Lambda'_0} &= +[\Lambda\mathbf{e} + \Lambda'\mathbf{e}'] \cdot A'\dot{\mathbf{e}}'. \end{aligned}$$

Subtracting these two equations and noting that $\dot{\Lambda}/\Lambda_0 \approx \dot{\xi}/2$ and $\dot{\Lambda}'/\Lambda'_0 \approx \dot{\xi}'/2$, we finally arrive at:

$$J_{c,\text{relat}} = \frac{A^2\xi}{m} - \frac{A'^2\xi'}{m+1} + (|A|\mathbf{e} - |A'|\mathbf{e}')^2 = \text{constant}. \quad (14)$$

Comparison with Eqs. (8) shows that the second constant of motion can be interpreted as a ‘‘relative Jacobi constant’’, which extends the notion of Jacobi constant to the non-circular 3-body problem. Eq. (14) tells us that the exchange of energy between the satellites only depends on the relative eccentricity vector $\mathbf{e}_{\text{relat}} = |A|\mathbf{e} - |A'|\mathbf{e}'$. Moreover, Eq. (7) tells us how this energy is distributed between μ and μ' . Finally, Eq. (13) shows that the interaction between μ and μ' conserves the total eccentricity of the system \mathbf{e}_{tot} . For large m 's, $|a_0An_0| \approx |a'_0A'n'_0|$, and the total eccentricity is just proportional to $\mu\mathbf{e} + \mu'\mathbf{e}'$. This is a classical result already obtained by [Hénon and Petit \(1986\)](#) for the Hill's Keplerian limiting case and by [Foryta and Sicardy \(1996\)](#) for the generalization to an oblate planet.

3 Restricted case

When $\mu = 0$, the actions describing the motion of μ must be expressed in terms of unit mass. Thus, the hamiltonian \mathcal{H}_1 must be divided by μ . This new hamiltonian is not autonomous anymore, since λ' and ϖ' are now linear functions of time: $\lambda' = n't$ and $\varpi' = \dot{\varpi}'_s t$. This yields the Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_2 = -\frac{(\mathcal{G}M)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'(\mathcal{G}M')^2}{2\Lambda'^2} + \mathcal{G}\mu' A \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Lambda}} \cdot \cos(\phi) + \mathcal{G}\mu' A' e' \cdot \cos(\phi') - \dot{\varpi}_s \Gamma + n' \Lambda' - \dot{\varpi}'_s \Gamma', \quad (15)$$

where the angle-action variables are now:

$$\begin{aligned}
\lambda &\longleftrightarrow \Lambda = \sqrt{\mathcal{G}Ma} \\
-\varpi &\longleftrightarrow \Gamma = \sqrt{\mathcal{G}Ma}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx e^2 \sqrt{\mathcal{G}Ma}/2 \\
\lambda' = n't &\longleftrightarrow \Lambda' = \sqrt{\mathcal{G}M'a'} \\
-\varpi' = -\dot{\omega}'_s t &\longleftrightarrow \Gamma' = \sqrt{\mathcal{G}M'a'}(1 - \sqrt{1 - e'^2}) \approx e'^2 \sqrt{\mathcal{G}M'a'}/2
\end{aligned} \tag{16}$$

Then, the treatment of \mathcal{H}_2 proceeds in the same way as for the general case previously considered, i.e. by defining the same transformations as in Eqs. (5). Again the Hamiltonian is reduced to that of a two-degree of freedom system which is in general not integrable, except for the special case of a central Keplerian potential $-\mathcal{G}M_p/r$. In this case, ξ' and \mathbf{e}' are constant, so that Eq. (14) can be re-written:

$$J_{c,\text{relat}} = \xi + m \left(\mathbf{e} - \left| \frac{A'}{A} \right| \mathbf{e}' \right)^2 = \text{constant}, \tag{17}$$

which generalizes the expression of the Jacobi constant $\xi + me^2$ associated with μ , where the eccentricity vector \mathbf{e} has been replaced by the relative eccentricity vector

$$\mathbf{e}_{\text{relat}} = \mathbf{e} - \left| \frac{A'}{A} \right| \mathbf{e}'. \tag{18}$$

Physically, this means that, at the first order approximation in eccentricities used here, the exchange of energy between the satellite and the particle (described by $\dot{\xi}$) only depends on the relative eccentricity vector \mathbf{e}_{rel} .

Finally, both Eqs. (14) and (17) show why the relative Jacobi constant is destroyed when the central potential departs from the Keplerian form $-\mathcal{G}M_p/r$. In fact, a general potential induces a differential secular precession rate $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s$ between the vectors \mathbf{e} and \mathbf{e}' , which causes a drift of the angle between \mathbf{e} and \mathbf{e}' which is imposed “from outside”, i.e. independent of the interactions between μ and μ' .

We conjecture that as soon as $\dot{\omega}_s \neq \dot{\omega}'_s$, the Hamiltonians \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 (Eqs. (3) and (15)) are not integrable, as shown for instance in Fig. (5). The demonstration of such a result is beyond the scope of this paper, however, and will be accepted on numerical grounds.

4 Lindblad vs. corotation resonances

Eqs. (9) and (10) show that the term $A' \cdot \sin(\phi')$ modifies the Jacobi quantity of μ and the radial action of μ' . Conversely, the term $A \cdot \sin(\phi)$ modifies the Jacobi quantity of μ' and the radial action of μ . Consequently, the resonances associated with ϕ and ϕ' play symmetrical roles, and cannot be distinguished, as it is clearly apparent from the form of \mathcal{H}_1 (Eq. (3)).

This symmetry is broken, however, when the mass of one of the satellites tends to zero (restricted case), and the different roles played by the two resonances clearly appear. Taking for instance $\mu = 0$, the resonance associated with ϕ is then called the Lindblad Eccentric Resonance (LER), while the resonance associated with ϕ' is called the Corotation Eccentric Resonance (CER)³. This nomenclature comes from galactic and ring dynamics, where those resonances were studied, see [Goldreich and Tremaine \(1979\)](#) and the references already quoted in the introduction.

If we consider the LER alone (i.e. taking $A' = 0$), then $\xi + me^2$ is constant. Using $\xi = (a - a_0)/a_0$, this yields

$$\frac{\delta a}{a} = -2me^2 \cdot \frac{\delta e}{e}. \tag{19}$$

Thus, the LER mainly excites the orbital eccentricity of μ , and much less its semi-major axis. This is physically understandable by noting that the LER corresponds to $(m + 1)n' - mn - \dot{\omega}_s = 0$, i.e. $\kappa = (m + 1)(n - n')$, where $\kappa = n - \dot{\omega}_s$ is the epicyclic, radial oscillation of the particle. The quantity $n - n'$ is the synodic frequency, i.e. the frequency at which the satellite and the particle are in conjunction. Thus, $n - n'$ is the frequency at which μ' perturbs μ through periodic kicks in the *radial* direction. For $\kappa = (m + 1)(n - n')$, those kicks resonantly excite the radial action of μ (Eq. (10)). On the other hand,

³ Lindblad and corotation resonances associated with orbital inclinations are also possible, hence the specific term “eccentric” used here.

because they are radial, the kicks essentially conserve the energy of the particle, and thus, its semi-major axis, as shown in Eq. (19).

Conversely, if we consider the CER only by making $A = 0$, the radial action $\Gamma \propto e^2 a^{1/2}$ is constant. This imposes

$$\frac{\delta e}{e} = -\frac{\delta a}{4a}. \quad (20)$$

The comparison of Eqs. (19) and (20) shows that the corotation resonance affects much less the orbital eccentricity of the particle than the Lindblad resonance.

This is physically understandable by noting that the CER corresponds to $(m+1)n' - mn - \dot{\varpi}'_s = 0$, i.e. $n = n' + \kappa'/m$, where $\kappa' = n' - \dot{\varpi}'_s$ is the epicyclic, radial oscillation of the satellite μ' . Then, the mean motion of μ matches the pattern speed $n_{\text{pattern}} = n' + \kappa'/m$ of one of the harmonics of the disturbing potential of μ' , hence the denomination corotation. Those resonances are in fact identical in essence to the classical 1:1 co-orbital resonance, but they occur at radii that are different from a' .

Note in particular that the CER slowly modulates the *azimuthal* potential acting on the particle since $\mathcal{G}\mu\mu'e'A' \cdot \cos(\phi') \approx \mathcal{G}\mu\mu'e'A' \cdot \cos[m(\theta - n_{\text{pattern}}t)]$, where θ is the true longitude of μ . This periodic potential creates a small, slowly varying azimuthal acceleration on the particle that slowly modifies its semi-major axis a . As a slowly varies, the radial action of μ , $\Gamma \propto e^2 a^{1/2}$ is conserved, as expressed in Eq. (20). More exactly, this conservation is actually the adiabatic conservation of the fast radial action $e^2 a^{1/2}$, as the azimuthal action $\sqrt{\mathcal{G}M_p a}$ slowly varies. More discussions about the conservation of $e^2 a^{1/2}$ in various contexts can be found in [Fleming and Hamilton \(2000\)](#) and [Sicardy and Dubois \(2003\)](#).

While the separate effects of LER and CER are easy to describe in term of 1-degree of freedom systems, the problem is complex when they are coupled. The following section provides the simplest equations that permit to explore this complexity.

5 The CoraLin model

The restricted case $\mu = 0$ can be studied through the Hamiltonian \mathcal{H}_2 (Eq. (15)). The derivation of the equations of motion stemming from \mathcal{H}_2 is standard, see for instance [Murray and Dermott \(2000\)](#). Near a_0 , the actions Λ and J can be written $\Lambda = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$ and $J = J_0 + \Delta J$, respectively, where $\Delta J = \Delta\Lambda + m(\Theta + \Theta')$ is a constant of motion. The Hamiltonian \mathcal{H}_2 is then expanded to second order in $\Delta\Lambda$, providing an approximation of the Hamiltonian valid near a_0 .

At this point, it is useful to consider the Jacobi quantity $J_c = \Delta\Lambda + m\Gamma$ that appears in the first line of Eqs. (5), from which we obtain $J_c = \Delta J - m\Theta'$. Consequently, $\dot{J}_c = -m\dot{\Theta}' = m\partial\mathcal{H}_2/\partial\phi'$ and $\dot{\phi}' = -m\partial\mathcal{H}_2/\partial J_c$. These are almost the canonical Hamiltonian equations, but not quite, because of the appearance of the factor $-m$. This suggests to take ϕ' and J_c as conjugate variables, after redefining the action J_c and the Hamiltonian \mathcal{H}_2 to within multiplicative and additive factors. The choice of those factors is rather arbitrary. We choose them so that to simplify as much as possible the expression of \mathcal{H}_2 , so that to obtain the form in Eq. (22). Moreover, as the particle remains close to the corotation resonance radius a_0 , it is convenient to use the new time scale $\tau = n_c t$, where n_c is the libration frequency of ϕ_c near the corotation fixed point in the absence of the Lindblad resonance.

As discussed in Section 4, the resonances associated with ϕ and ϕ' can be separated into LER and CER types, respectively. To enhance this distinction, we will use from now the conjugate variables $(\phi_c, \phi_L, J_c, J_L)$ instead of $(\phi', \phi, \Theta', \Theta)$. The actions J_c (proportional to $\Delta\Lambda + m\Gamma$) and J_L (proportional to Θ) are defined in Table 1. Moreover, the angles ϕ_c and ϕ_L are defined by:

$$\begin{cases} \phi_c = +\phi' + \pi & = +(m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' + \pi & \text{if } m > 0 \text{ (}\mu \text{ inside } \mu') \\ \phi_c = +\phi' & = +(m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' & \text{if } m < 0 \text{ (}\mu \text{ outside } \mu') \\ \phi_L = -\phi & = -(m+1)\lambda' + m\lambda + \varpi \end{cases} \quad (21)$$

The particular choice for ϕ_c is motivated by the fact that it allows a unique form of \mathcal{H} , avoiding a ± 1 factor in front of the term $\cos(\phi_c)$ in Eq. (22). With this convention, the stable corotation point is always at $\phi_c = 0$. Moreover, the minus sign used to define ϕ_L from ϕ stems from the requirement that we retrieve the canonical equations $\dot{h} = -\partial\mathcal{H}/\partial k$ and $\dot{k} = +\partial\mathcal{H}/\partial h$ with the correct signs in the system (23).

Using the equations $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = 0$ and $(m+1)n'_0 - mn_0 - \dot{\varpi}'_s = \dot{\varpi}'_s - \dot{\varpi}_s$ (see Section (2.1)), and the quantities D , ϵ_L , J_c and J_L defined in Table 1, we finally obtain the following Hamiltonian with

Constant parameters		
$n_c = \left(3m^2 a_0 A ' e' \frac{\mu'}{M}\right)^{1/2} \cdot n_0$	$D = \frac{\dot{\omega}'_s - \dot{\omega}_s}{n \cdot (3m^2 a_0 A ' e' \mu' / M)^{1/2}}$	$\epsilon_L = \left(\frac{a_0 \mu'}{3m^2 M}\right)^{1/4} \cdot \frac{A}{(A ' e')^{3/4}}$
Actions		
$J_c = \text{sgn}(m) \left(\frac{3}{4a_0 A ' \mu' e'} \frac{M}{\mu' e'}\right)^{1/2} \cdot (\xi + me^2)$		$\sqrt{2J_L} = \left(\frac{3m^2}{a_0 A ' \mu' e'} \frac{M}{\mu' e'}\right)^{1/4} \cdot e$

Table 1 Quantities entering in the Hamiltonian \mathcal{H} (Eq. 22), where A and A' are a combination of Laplace coefficients given by (2) and a_0 is the reference value of the corotation, Note that the time scale used in Eq. (23) is $\tau = n_c t$. Those definitions relate the actual parameters of the problems (mass of the satellite, semi-major axis, orbital eccentricity, etc..) and the non-dimensional variables used in Eqs. (22) and (23).

the two pairs of conjugate variables (J_c, ϕ_c) and $[h = \sqrt{2J_L} \cdot \cos(\phi_L), k = \sqrt{2J_L} \cdot \sin(\phi_L)]$:

$$\mathcal{H} = \frac{(J_c - J_L)^2}{2} - DJ_L - \cos(\phi_c) - \epsilon_L h. \quad (22)$$

The associated equations of motion are:

$$\begin{cases} \frac{dJ_c}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_c} = -\sin(\phi_c) \\ \frac{d\phi_c}{d\tau} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_c} = J_c - [J_L] \\ \frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = +([J_c] - J_L + D)k \\ \frac{dk}{d\tau} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = -([J_c] - J_L + D)h - \epsilon_L, \end{cases} \quad (23)$$

where $\tau = n_c t$ and $J_L = (h^2 + k^2)/2$. Note from Eqs. (2) and Table 1 that $\text{sgn}(\epsilon_L) = \text{sgn}(m)$.

We call this system of equations the ‘‘CoraLin’’ model, as it describes the motion of a particle near a corotation and a Lindblad resonances. It is completely non-dimensional and can be used in a generic way to analyze the coupling between the two resonances. In fact, this system is parametrized by only two quantities: D , which measures the distance between the two resonances, and ϵ_L , which measures the forcing of the particle orbital eccentricity by the satellite, while absorbing the satellite’s orbital eccentricity. Finally, the time scale τ is parametrized by the quantity n_c , see Table 1.

The coupling between the two resonances comes from the bracketed terms in Eqs. (23), namely (i) the term J_L in the second equation, which tells us how the particle orbital eccentricity (mainly driven by the Lindblad resonance) perturbs the simple pendulum motion and (ii) the term J_c in the third and fourth equations, which tells us how the corotation resonance affects the motion of (h, k) driven by the Lindblad resonance.

If we suppress the term $\cos(\phi_c)$ in \mathcal{H} in order to keep only the LER, then the Hamiltonian takes the form

$$\mathcal{H}_{\text{And}} = J_L^2/2 - (J_c + D)J_L - \epsilon_L h, \quad (24)$$

where J_c is now a constant parameter. This is the classical Andoyer Hamiltonian that has been extensively studied and reviewed in many publications in the last few decades, see e.g. [Henrard and Lemaître \(1983\)](#), [Ferraz-Mello \(1985\)](#) and [Ferraz-Mello \(2007\)](#).

On the other hand, if we make $\epsilon_L = 0$, then J_L is constant, \mathcal{H} reduces to the Hamiltonian of the simple pendulum:

$$\mathcal{H}_{\text{pen}} = \chi^2/2 - \cos(\phi_c), \quad (25)$$

where we define $\chi = J_c - J_L$. Then we obtain $\ddot{\phi}_c = -\sin(\phi_c)$, which describes the stable oscillatory motion of the particle guiding center around the corotation fixed point at $\phi_c = 0$. Note that in this case, $J_L = \text{constant}$, meaning that the particle orbital eccentricity is conserved, as announced by Eq. (20).

An alternative form of the system (23), although not using conjugate variables, is:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -\sin(\phi_c) - J_L \\ \dot{\phi}_c = \chi \\ \dot{h} = -(\chi + D)k \\ \dot{k} = +(\chi + D)h + \epsilon_L. \end{cases} \quad (26)$$

If the corotation motion of the particle is not perturbed by the LER, then the librating zone for ϕ_c has a width of $\Delta\chi = \pm 2$, see Fig. (1). The exact LER occurs at $\chi = -D$. Consequently, the two resonances collapse into a single one for $D = 0$, and are well separated for $|D|$ significantly larger than 2. We now explore the dynamics of the system for intermediate values of D , showing that significant chaotic zones appear in the phase space for those intermediate cases.

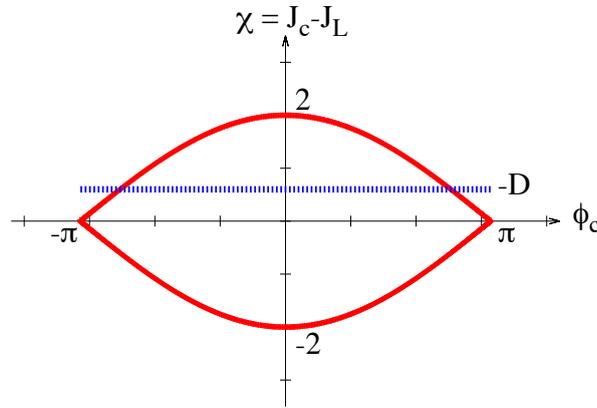


Fig. 1 Scheme of the CoraLin model. In the absence of the Lindblad resonance (LER), the pendular motion forced by the corotation resonance (CER) is confined into the red separatrix curve, whose full width is given by $\Delta\chi = \pm 2$. In the absence of the CER, the LER radius is at $\chi = -D$ (dotted blue line). The coupling between the two resonance strongly depends on D , see Fig. (5).

6 Asymptotic behaviors

6.1 Superimposed resonances

If $D = 0$, the CER and LER are superimposed, and the problem is integrable (Section 2.2). Poincaré surfaces of section taken at $k = 0$ are then regular, and they can be obtained analytically by noting that the second constant of motion in Eq. (17) can be re-written:

$$S = J_c + \frac{\sqrt{2J_L}}{\epsilon_L} \cos(\phi_c - \phi_L) \quad (27)$$

Using Eqs. (22) and (27) and making $k = 0$, we obtain:

$$\chi^4 - 4H\chi^2 + 8\epsilon_L^2\chi - 4\cos^2(\phi_c) + 4H^2 = 8\epsilon_L^2 S, \quad (28)$$

where H is the value of the Hamiltonian \mathcal{H} . For H fixed, the surface of sections are the level contours of the surface defined by Eq. (28) for various values of S . Note these contours are π -periodic, not 2π -periodic.

The fixed points are given by the singular points of that surface:

$$\begin{cases} \chi^3 - 2H\chi + 2\epsilon_L^2 = 0 \\ \phi_c = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

The number of solutions in χ depends of the sign of the discriminant $\Delta = 32H^3 - 108\epsilon_L^4$. Therefore, there exists a critical value $H_0 = (27\epsilon_L^4/8)^{1/3}$: for $H < H_0$ the system has only one solution in χ :

$$\chi_0 = \left(\frac{2\epsilon_L^2 + \sqrt{-\Delta/27}}{2} \right)^{1/3} + \left(\frac{2\epsilon_L^2 - \sqrt{-\Delta/27}}{2} \right)^{1/3}$$

For $H > H_0$ a pitchfork bifurcation occurs and provides three solutions:

$$\chi_p = 2\sqrt{\frac{-2H}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\epsilon_L^2 \sqrt{27/8H^3} \right) + \frac{2p\pi}{3} \right]$$

with $p \in \{0, 1, 2\}$.

Examples of surfaces of section with $H < H_0$ and $H > H_0$ are given in Fig. 2. Note that orbits near the fixed elliptical points do *not* correspond to librations of ϕ_c (i.e. to particles trapped in a CER). For instance the fixed point near $\phi_c = 0$, $\chi = 0$ in the left panel corresponds to the trajectory shown in blue, for which ϕ_c is circulating.

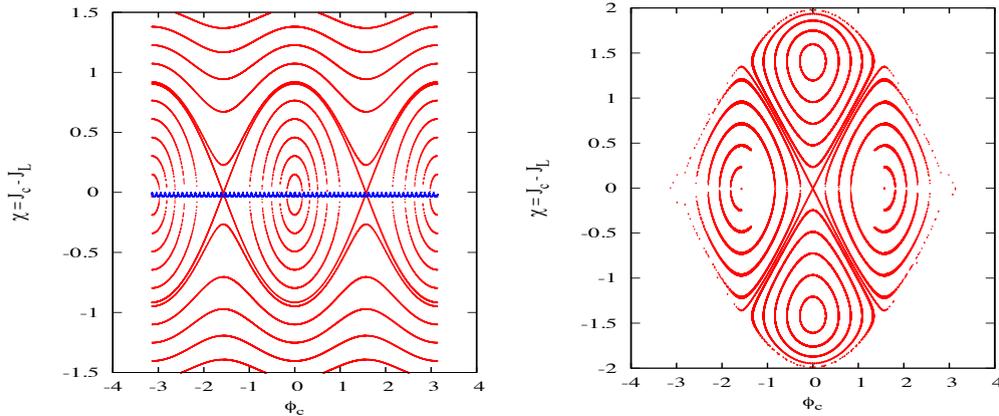


Fig. 2 Phase portraits of the system (23) when the corotation and Lindblad resonances (CER and LER, respectively) are superimposed, i.e. $D = 0$. We show Poincaré surfaces corresponding to $k = 0$, with prescribed values H of the Hamiltonian \mathcal{H} , and various values of the second constant of motion S (Eq. (27)). For both panels, $\epsilon_L = -0.123$, which provides a critical value $H_0 = (27\epsilon_L^4/8)^{1/3} = 0.091\dots$. Left panel: $H = -1 < H_0$, there is only one solution in χ for the fixed points. Right panel: $H = 1 > H_0$, there are three solutions in χ for the fixed points. see text for details.

6.2 Well separated resonances

We consider the situation in which the CER and LER are well separated, $|D| \gg 2$. Two cases are discussed.

(a) *The particle is trapped in the corotation region.* In this case, the variations of (h, k) in the systems (23) and (26) are much faster than the variations of (J_c, ϕ_c) . Consequently, the action $\oint h dk$ is adiabatically conserved. Since the vector (h, k) essentially describes a circle centered on the forced value $(-\epsilon_L/(\chi + D), 0)$, it means that (h, k) rapidly moves on a circle of constant radius, whose center slowly moves along the Oh axis, see Fig. 3. In particular, if (h, k) starts at the forced value $(-\epsilon_L/(\chi + D), 0)$,

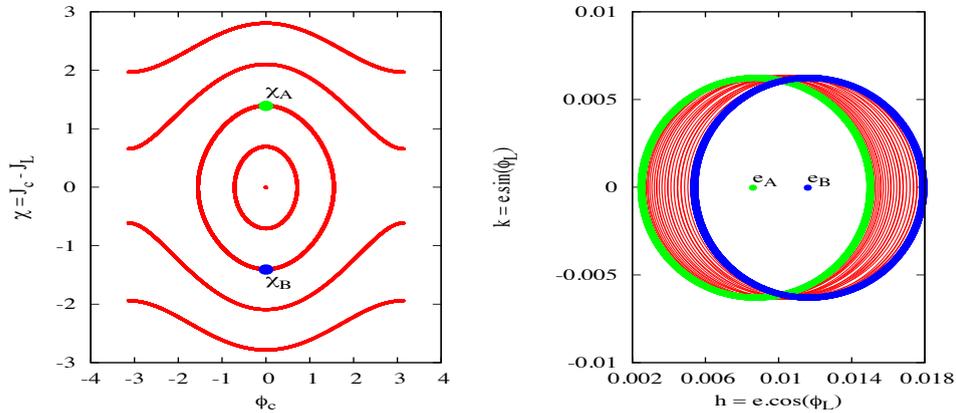


Fig. 3 Left: Poincaré surfaces of section $k = 0$ of the system (23) with $D = 10$ (the Lindblad resonance is far away from the corotation radius at $\chi = -D = -10$) and $\epsilon_L = -0.1$. The phase portrait of the CER is very close to that of a simple pendulum. Right : the vector (h, k) rapidly describes a circle centered on the forced value ($h = e_f = |\epsilon_L/(\chi + D)|, k = 0$) that moves slowly as χ varies (red circles). When $\chi = 1.4$ (green point at left), then $e_f = e_A = (0.008, 0)$, corresponding to the green orbit at right. When $\chi = -1.4$ (blue point at left), then $e_f = e_B = (0.016, 0)$ (blue orbit at right).

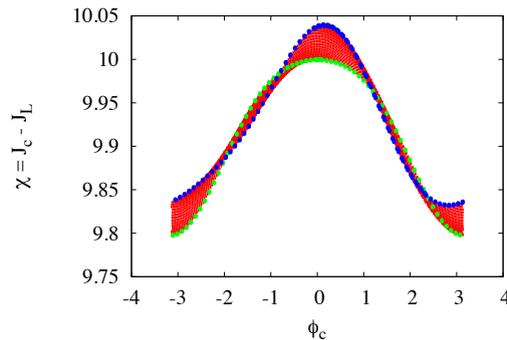


Fig. 4 Poincaré surfaces of section $k = 0$ of the system (23) with $D = 10$ and $\epsilon_L = -0.1$. The particle is now close to the Lindblad resonance, ϕ_c and χ vary rapidly compared to h and k , while keeping $\int J_c d\phi_c$ adiabatically constant.

then it will stay at that value as χ slowly changes. In other words, the orbital eccentricity of the particle will permanently adjust itself so that $e = |\epsilon_L/(\chi + D)|$ as χ varies.

(b) *The particle is trapped in the Lindblad resonance.* The situation is now reversed: (h, k) slowly varies as J_c as ϕ_c oscillates rapidly. Thus $\int J_c d\phi_c$ is adiabatically conserved. In fact, the system :

$$\begin{cases} \dot{J}_c = -\sin(\phi_c) \\ \dot{\phi}_c = J_c - J_L \end{cases} \quad (29)$$

correspond to a simple pendulum with a slowly varying parameter, J_L . Thus, the particle will librate around the slowly varying point ($J_c = J_L, \phi_c = 0$), while adiabatically conserving $\int J_c d\phi_c$, see Fig. 4.

7 Intermediate cases

7.1 Chaoticity

We have explored numerically the transition from the integrable case $D = 0$ to the chaotic regime for D of order unity. We consider here an illustrative case where $\epsilon_L = -0.1$ and $H = -0.5$. This choice is motivated by the fact that they are typical values relevant to the small Saturnian satellites Anthe, Methone and Aegaeon, see Table 2.

Fig. 5 shows that the phase portrait of system (23) is rapidly invaded by a chaotic region for values of D as small as ~ 0.01 . As D increases, a central regular region appears, corresponding to the trapping of the particle in the corotation site, i.e. to a libration of the critical angle ϕ_c . Only for value of $|D|$ significantly larger than 2 does the system retrieves its regularity, and can the orbits be described using adiabatic invariant arguments, see Section 6. In fact, Fig. (5) shows that for $0 < |D| < 2$ the motion of the particle near the CER is dominated by chaos. This is true for the actual Saturnian satellites that we examine now.

7.2 Applications to Saturnian satellites

We apply the CoraLin model to several recently discovered small satellites dynamically linked to Mimas through first mean motion resonances: Anthe, Methone and Aegaeon (Cooper et al., 2008; Hedman et al., 2009, 2010), all associated with arc material. The presence of these structures are consistent with their confinement by corotation resonance with Mimas: Aegaeon is trapped in an inner 7:6 CER with Mimas, while Anthe and Methone are trapped in the outer 10:11 and a 14:15 CER's, respectively. All satellites are strongly perturbed by the associated LER. This is expected by looking at the values of D and ϵ_L listed in (Table 2), and confirmed by the phase portraits plotted in Fig. 6.

	m	D	ϵ_L	H	ϕ_c (CER)	ϕ_L (LER)
Aegaeon	+6	-1.155	0.132	-0.27	$+7\lambda' - 6\lambda - \varpi' + \pi$	$-7\lambda' + 6\lambda + \varpi$
Methone	-15	0.129	-0.115	-0.62	$-14\lambda' + 15\lambda - \varpi'$	$+14\lambda' - 15\lambda + \varpi$
Anthe	-11	0.286	-0.123	1.03	$-10\lambda' + 11\lambda - \varpi'$	$+10\lambda' - 11\lambda + \varpi$

Table 2 Values of D , ϵ_L and H for Aegaeon, Methone and Anthe to be used in the CoraLin model (Eqs. (23)). These parameters depend on the satellites orbital elements and Mimas' mass (N. J. Cooper, private communication) The associated critical angles are also listed. We note that for the inner (resp. outer) moons D is positive (resp. negative) and ϵ_L is negative (positive).

The trajectories of all three satellites are close to prominent chaotic regions, in particular Anthe. The latter has a variation in semi-major axis of ± 26 km (Cooper et al., 2008), knowing that the full width of the unperturbed corotation resonance is 50.7 km. Similarly, Methone suffers a variation of semi-major axis of ± 20 km, while the corotation resonance has a full width of 55.4 km. The case of Aegaeon (inside the orbit of Mimas) is different, as it appears located deeper inside the corotation resonance. The variation of its semi-major axis is only ± 4 km (Hedman et al., 2009, 2010), vs. 31.6 km for the full width of the corotation resonance.

8 Conclusion

We have studied the behavior of two satellites of masses μ_s and μ'_s , revolving along coplanar, small-eccentricity orbits around a planet of mass $M_p \gg \mu_s, \mu'_s$. We have averaged the equations of motion close to a first order mean motion commensurability $m+1:m$, keeping only perturbing terms of first order in eccentricity and accounting for the secular apsidal precessions rates $\dot{\varpi}_s$ and $\dot{\varpi}'_s$ of the satellites. This allows to derive the classical Hamiltonian of the system, with the two critical resonant arguments $\phi = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi$ and $\phi' = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'$. Using the constants of motion (total energy and angular momentum), the initial four-degree of freedom system reduces to a two-degree of freedom problem that is not in general integrable.

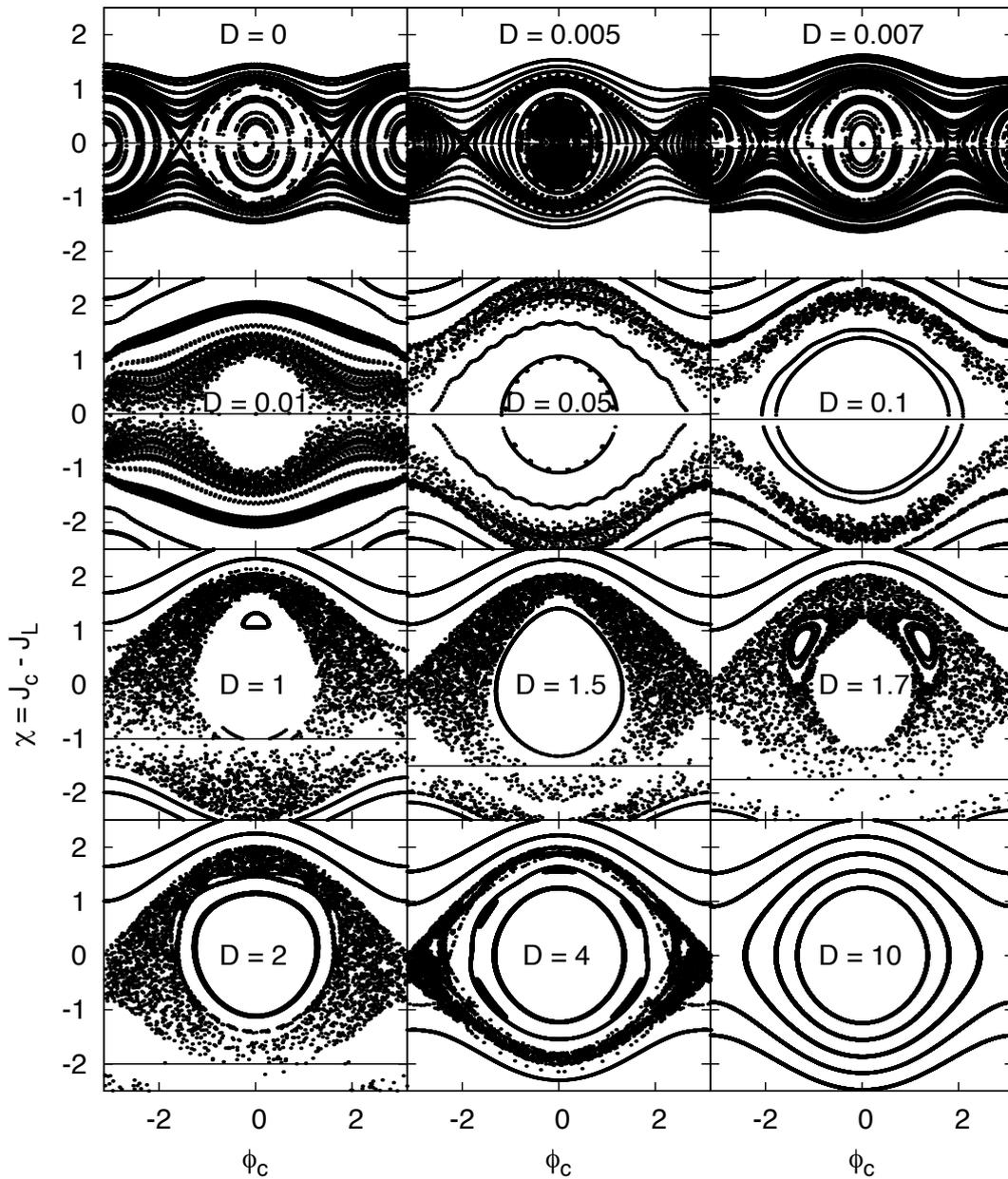


Fig. 5 Poincaré surfaces of section of system (23) using $\epsilon_L = -0.1$ and $H = -0.5$ for twelve different values of D . Each phase portrait is obtained when $k = 0$ for sixteen different trajectories with the same value of H . When $D = 0$ and $D = 10$, the trajectories are regular. For intermediate cases, chaos is prevalent.

For $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s = 0$ (as it is the case for the Keplerian problem), the Hamiltonian is integrable, a result initially derived by Sessin and Ferraz-Mello (1984). The integrability of the system stems from the existence of a second constant of motion, besides the Hamiltonian. Here we show that this constant is actually a generalized version of the Jacobi constant (Eq. (14)), where the orbital eccentricities of μ_s or μ'_s are replaced by a quantity that we call the relative eccentricity of the two orbits (Eq. (18)). Secular terms forces a differential precession between the two orbits (i.e. $\dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s \neq 0$), and destroys the generalized Jacobi constant.

In the general case ($\mu_s \neq 0, \mu'_s \neq 0$), the two satellites play symmetrical roles. This symmetry is broken, however, in the restricted problem (e.g. $\mu_s = 0$). The two critical resonant angles ϕ and ϕ' , or their counterparts ϕ_L and ϕ_c , are then associated with two resonances (Lindblad and corotation, or LER and CER, respectively) that plays very different roles. While the LER mainly excites the orbital

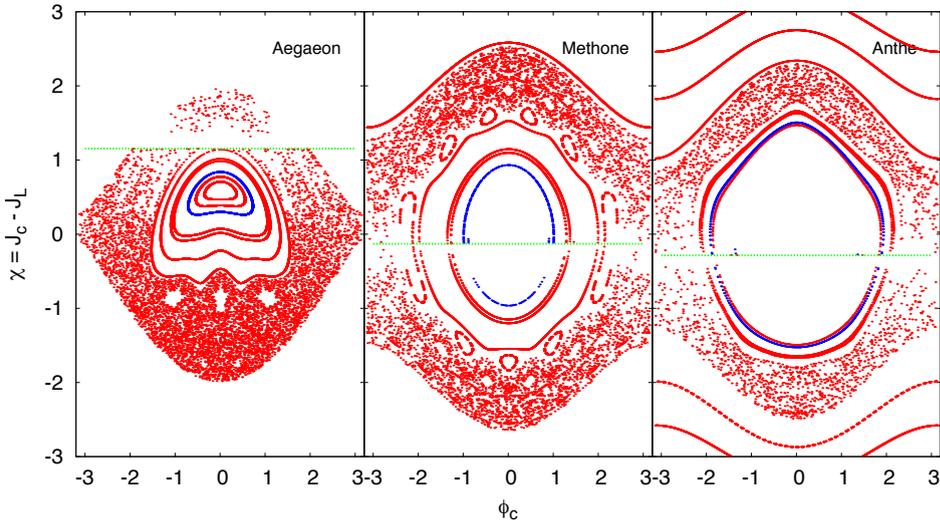


Fig. 6 Phase portrait of Aegaeon, Methone and Anthe obtained for $k = 0$ and $\dot{k} > 0$. The blue curves are the trajectories of the satellites, using the parameters of Table 2. Initial conditions for each satellite were provided by N.J. Cooper ([private communication 2011](#)), under the form geometrical orbital elements at a given time. The green curves mark the position of the LER, at $\chi = -D$. Red curve: surfaces of sections of trajectories with the same value of H as for the respective satellites. Note that all the satellites are close to chaotic regions.

eccentricity of the test particle, leaving its semi-major axis relatively unaltered (Eq. (19)), the CER mainly changes its semi-major axis, leaving its eccentricity almost constant (Eq. (20)).

The two resonances may be simultaneously described by a reduced Hamiltonian (Eq. (22)), that depends upon only two dimensionless parameters that control the dynamics of the system: (*i*) the distance $D \propto \dot{\omega}_s - \dot{\omega}'_s$ between the CER and LER, and (*ii*) the forcing parameter ϵ_L that includes both the mass and the orbital eccentricity of the disturbing satellite, see Table 1.

The resulting equations of motion are summarized by four simple differential equations that constitute the “CoraLin model” (see the system (23)). This system describes the coupling between the motion of a simple pendulum (Eq. (25)) that has a separatrix of width ± 2 , and an Andoyer-type oscillator (Eq. (24)) centered at $\chi = -D$, see Fig. 1. It has the advantage to permit a generic exploration of the dynamics of the system through simple numerical integrations, Poincaré surface of section, etc... Furthermore, it uses dimensionless parameters that encapsulate all the parameters of the systems (mass and orbital eccentricity of the perturber, secular precessions of the orbits, etc...).

As an example, we have examined the phase portraits relevant to small Saturnian satellites trapped in CER’s with Mimas: Aegaeon, Methone and Anthe. While the system is integrable for $D = 0$, chaos is rapidly prevalent for values of D as small as about 0.01, see Fig. 5. Only for large values of $D \gg 2$ is the system almost integrable again, with a behavior that can be qualitatively described using simple adiabatic invariant arguments.

More specific integrations (Fig. 6) show that Aegaeon, Methone and especially Anthe are close to prominent chaotic regions. Future works are now in order to explain how those satellites may have been captured inside their respective corotation sites. The numerical implementation of orbital migrations of Mimas and/or the small satellites in the CoraLin system is in fact very simple, and we will use that model to explore various scenarii of resonant capture.

Acknowledgements The authors thank Sylvio Ferraz-Mello for enlightening discussions concerning the integrability of the 3-body problem with two critical resonant arguments. We had several fruitful discussions with Philippe Robutel, Nicholas J. Cooper and Carl D. Murray, and we thank Nicholas J. Cooper for providing orbital elements of Aegaeon, Methone and Anthe. We acknowledge the EMERGENCE-UPMC project EME0911 for collaborations and financial support.

References

- Borderies-Rappaport, N., Longaretti, P.Y., 1994. Test particle motion around an oblate planet. *Icarus* 107, 129.
- Cooper, N.J., Murray, C.D., Evans, M.W., Beurle, K., Jacobson, R.A., Porco, C.C., 2008. Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn. *Icarus* 195, 765–777.
- Dumas, C., Terrile, R.J., Smith, B.A., Schneider, G., Becklin, E.E., 1999. Stability of Neptune’s ring arcs in question. *Nature* 400, 733–735.
- Ellis, K.M., Murray, C.D., 2000. The Disturbing Function in Solar System Dynamics. *Icarus* 147, 129–144.
- Ferraz-Mello, S., 1985. Resonance in regular variables. I - Morphogenetic analysis of the orbits in the case of a first-order resonance. *Celestial Mechanics* 35, 209–220.
- Ferraz-Mello, S., (Ed.) *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library* 2007.
- Fleming, H.J., Hamilton, D.P., 2000. On the Origin of the Trojan Asteroids: Effects of Jupiter’s Mass Accretion and Radial Migration. *Icarus* 148, 479–493.
- Foryta, D.W., Sicardy, B., 1996. The Dynamics of the Neptunian ADAMS Ring’s Arcs. *Icarus* 123, 129–167.
- Goldreich, P., Tremaine, S., 1979. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *Astrophys. J.* 233, 857–871.
- Goldreich, P., Tremaine, S., Borderies, N., 1986. Towards a theory for Neptune’s arc rings. *Astron. J.* 92, 490–494.
- Hedman, M.M., Cooper, N.J., Murray, C.D., Beurle, K., Evans, M.W., Tiscareno, M.S., Burns, J.A., 2010. Aegaeon (Saturn LIII), a G-ring object. *Icarus* 207, 433–447.
- Hedman, M.M., Murray, C.D., Cooper, N.J., Tiscareno, M.S., Beurle, K., Evans, M.W., Burns, J.A., 2009. Three tenuous rings/arcs for three tiny moons. *Icarus* 199, 378–386.
- Hénon, M., Petit, J.M., 1986. Series expansion for encounter-type solutions of Hill’s problem. *Celestial Mechanics* 38, 67–100.
- Henrard, J., Lemaître, A., 1983. A second fundamental model for resonance. *Celestial Mechanics* 30, 197–218.
- Henrard, J., Lemaître, A., 1986. A perturbation method for problems with two critical arguments. *Celestial Mechanics* 39, 213–238.
- Laskar, J., Robutel, P., 1995. Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 62, 193–217.
- Lin, C.C., Shu, F.H., 1964. On the Spiral Structure of Disk Galaxies.. *Astrophys. J.* 140, 646.
- Lindblad, B., 1961. On the formation of dispersion rings in the central layer of a galaxy. *Stockholms Observatoriums Annaler* 21, 8.
- Lindblad, B., Theories of Spiral Structure in Galaxies. in: *Problems of Extra-Galactic Research*, (Ed.) G.C. McVittie vol. 15 of *IAU Symposium* 1962 p. 146.
- Murray, C.D., Dermott, S.F., *Solar System Dynamics* 2000.
- Porco, C.C., 1991. An explanation for Neptune’s ring arcs. *Science* 253, 995–1001.
- Renner, S., Sicardy, B., 2006. Use of the Geometric Elements in Numerical Simulations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94, 237–248.
- Sessin, W., Ferraz-Mello, S., 1984. Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1 solutions of the Hori auxiliary system. *Celestial Mechanics* 32, 307–332.
- Shu, F.H., Waves in planetary rings. in: *IAU Colloq. 75: Planetary Rings*, (Eds.) R. Greenberg, A. Brahic 1984 pp. 513–561.
- Sicardy, B., 1991. Numerical exploration of planetary arc dynamics. *Icarus* 89, 197–219.
- Sicardy, B., Dubois, V., 2003. Co-Orbital Motion with Slowly Varying Parameters. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 86, 321–350.
- Sicardy, B., Roddier, F., Roddier, C., Perozzi, E., Graves, J.E., Guyon, O., Northcott, M.J., 1999. Images of Neptune’s ring arcs obtained by a ground-based telescope. *Nature* 400, 731–733.
- Spitale, J.N., Jacobson, R.A., Porco, C.C., Owen Jr., W.M., 2006. The Orbits of Saturn’s Small Satellites Derived from Combined Historic and Cassini Imaging Observations. *Astrophys. J.* 132, 692–710.
- Wisdom, J., 1986. Canonical solution of the two critical argument problem. *Celestial Mechanics* 38, 175–180.

Bibliographie

- Borderies-Rappaport, N., Longaretti, P.Y., 1994. Test particle motion around an oblate planet. *Icarus*107, 129.
- Brouwer, D., Clemence, G.M., 1962. Review of Publications- Methods of Celestial Mechanics. *JRASC*56, 31.
- Burns, J.A., (Ed.) *Planetary satellites* 1977.
- Burns, J.A., Showalter, M.R., Hamilton, D.P., Nicholson, P.D., de Pater, I., Ockert-Bell, M.E., Thomas, P.C., 1999. The Formation of Jupiter's Faint Rings. *Science* 284, 1146.
- Burns, J.A., Simonelli, D.P., Showalter, M.R., Hamilton, D.P., Porco, C.D., Throop, H., Esposito, L.W., *Jupiter's ring-moon system* 2004 pp. 241–262 pp. 241–262.
- Chambers, J.E., 1999. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*304, 793–799.
- Champenois, S., Vienne, A., 1999. Chaos and secondary resonances in the mimas-tethys system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 74, 111–146.
- Charlier, C.V.L., 1900. Mémoires et observations. Sur les points singuliers des inégalités séculaires des petites planètes. *Bulletin Astronomique, Serie I* 17, 209–219.
- Charlier, C.V.L., 1902. Mémoires et observations. Sur la convergence de développements suivant les puissances des masses des planètes. *Bulletin Astronomique, Serie I* 19, 380–385.
- Charnoz, S., Brahic, A., Thomas, P.C., Porco, C.C., 2007. The Equatorial Ridges of Pan and Atlas : Terminal Accretionary Ornaments?. *Science* 318, 1622–1625.
- Charnoz, S., Salmon, J., Crida, A., 2010. The recent formation of Saturn's moonlets from viscous spreading of the main rings. *Nature*465, 752–754.
- Cooper, N.J., Murray, C.D., Evans, M.W., Beurle, K., Jacobson, R.A., Porco, C.C., 2008. Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn. *Icarus*195, 765–777.
- Crida, A., Charnoz, S., 2010. Solar system : Recipe for making Saturn's rings. *Nature*468, 903–905.
- Crida, A., Charnoz, S., 2012. Formation of Regular Satellites from Ancient Massive Rings in the Solar System. *Science* 338, 1196–1199.
- de Pater, I., Gibbard, S.G., Chiang, E., Hammel, H.B., Macintosh, B., Marchis, F., Martin, S.C., Roe, H.G., Showalter, M., 2005. The dynamic neptunian ring arcs : evidence for a gradual disappearance of Liberté and resonant jump of courage. *Icarus*174, 263–272.

- Dvorak, R., 1986. Critical orbits in the elliptic restricted three-body problem. *A&A*167, 379–386.
- Ellis, K.M., Murray, C.D., 2000. The Disturbing Function in Solar System Dynamics. *Icarus* 147, 129–144.
- Ferraz-Mello, S., 1985. Resonance in regular variables. I - Morphogenetic analysis of the orbits in the case of a first-order resonance. *Celestial Mechanics* 35, 209–220.
- Ferraz-Mello, S., (Ed.) *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library* 2007.
- Fleming, H.J., Hamilton, D.P., 2000. On the Origin of the Trojan Asteroids : Effects of Jupiter's Mass Accretion and Radial Migration. *Icarus*148, 479–493.
- Foryta, D.W., Sicardy, B., 1996. The Dynamics of the Neptunian ADAMS Ring's Arcs. *Icarus*123, 129–167.
- Fouchard, M., Lega, E., Froeschlé, C., Froeschlé, C., 2002. On the Relationship Between Fast Lyapunov Indicator and Periodic Orbits for Continuous Flows. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83, 205–222.
- French, R.G., McGhee, C.A., Dones, L., Lissauer, J.J., 2003. Saturn's wayward shepherds : the peregrinations of Prometheus and Pandora. *Icarus*162, 143–170.
- Froeschlé, C., Lega, E., Gonczi, R., 1997. Fast Lyapunov Indicators. Application to Asteroidal Motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 67, 41–62.
- Goldreich, P., Peale, S., 1966. Spin-orbit coupling in the solar system. *AJ*71, 425.
- Goldreich, P., Tremaine, S., 1979a. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*233, 857–871.
- Goldreich, P., Tremaine, S., 1979b. Towards a theory for the Uranian rings. *Nature*277, 97–99.
- Goldreich, P., Tremaine, S., Borderies, N., 1986. Towards a theory for Neptune's arc rings. *AJ*92, 490–494.
- Hedman, M.M., Burns, J.A., Tiscareno, M.S., Porco, C.C., Jones, G.H., Roussos, E., Krupp, N., Paranicas, C., Kempf, S., 2007. The Source of Saturn's G Ring. *Science* 317, 653–.
- Hedman, M.M., Cooper, N.J., Murray, C.D., Beurle, K., Evans, M.W., Tiscareno, M.S., Burns, J.A., 2010. Aegaeon (Saturn LIII), a G-ring object. *Icarus*207, 433–447.
- Hedman, M.M., Murray, C.D., Cooper, N.J., Tiscareno, M.S., Beurle, K., Evans, M.W., Burns, J.A., 2009. Three tenuous rings/arcs for three tiny moons. *Icarus*199, 378–386.
- Henon, M., Petit, J.M., 1986. Series expansion for encounter-type solutions of Hill's problem. *Celestial Mechanics* 38, 67–100.
- Henrard, J., Lemaître, A., 1983. A second fundamental model for resonance. *Celestial Mechanics* 30, 197–218.
- Henrard, J., Lemaître, A., 1986. A perturbation method for problems with two critical arguments. *Celestial Mechanics* 39, 213–238.
- Karjalainen, R., 2007. Aggregate impacts in Saturn's rings. *Icarus*189, 523–537.

- Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., Charnoz, S., Arlot, J.E., Emelyanov, N., Le Poncin-Lafitte, C., Mathis, S., Remus, F., Tobie, G., Zahn, J.P., 2012. Strong Tidal Dissipation in Saturn and Constraints on Enceladus' Thermal State from Astrometry. *ApJ*752, 14.
- Laskar, J., Robutel, P., 1995. Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 62, 193–217.
- Lin, C.C., Shu, F.H., 1964. On the Spiral Structure of Disk Galaxies.. *ApJ*140, 646.
- Lindblad, B., Theories of Spiral Structure in Galaxies. in : *Problems of Extra-Galactic Research*, (Ed.) G.C. McVittie vol. 15 of *IAU Symposium* 1962 p. 146.
- Meyer-Vernet, N., Sicardy, B., 1987. On the physics of resonant disk-satellite interaction. *Icarus*69, 157–175.
- Milani, A., Knezevic, Z., 1990. Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 49, 347–411.
- Milani, A., Knezevic, Z., 1992. Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus*98, 211–232.
- Milani, A., Knezevic, Z., 1994. Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt. *Icarus*107, 219–254.
- Morbidelli, A., *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics* Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics, by Alessandro Morbidelli. London : Taylor & Francis, 2002, ISBN 0415279399 2002.
- Morbidelli, A., Gonczi, R., Froeschle, C., Farinella, P., 1994. Delivery of meteorites through the ν_6 secular resonance. *A&A*282, 955–979.
- Morbidelli, A., Henrard, J., 1991. Secular resonances in the asteroid belt - Theoretical perturbation approach and the problem of their location. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 51, 131–167.
- Murray, C.D., Beurle, K., Cooper, N.J., Evans, M.W., Williams, G.A., Charnoz, S., 2008. The determination of the structure of Saturn's F ring by nearby moonlets. *Nature*453, 739–744.
- Murray, C.D., Dermott, S.F., *Solar system dynamics* 1999.
- Namouni, F., Porco, C., 2002. The confinement of Neptune's ring arcs by the moon Galatea. *Nature*417, 45–47.
- Noyelles, B., Charnoz, S., Lainey, V., Baillié, K., The Eccentricity Of Mimas And The Cassini Division : A Common History. in : *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting* vol. 43 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting* 2012 .
- Porco, C.C., 1991. An explanation for Neptune's ring arcs. *Science* 253, 995–1001.
- Porco, C.C., Nicholson, P.D., 1987. Eccentric features in Saturn's outer C ring. *Icarus*72, 437–467.
- Porco, C.C., Thomas, P.C., Weiss, J.W., Richardson, D.C., 2007. Saturn Small Inner Satellites : Clues to Their Origins. *Science* 318, 1602–.
- Poulet, F., Sicardy, B., 2001. Dynamical evolution of the Prometheus-Pandora system. *MNRAS*322, 343–355.

- Renner, S., Sicardy, B., 2006. Use of the Geometric Elements in Numerical Simulations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94, 237–248.
- Robutel, P., Rambaux, N., El Moutamid, M., 2012. Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 113, 1–22.
- Sessin, W., Ferraz-Mello, S., 1984. Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2 :1 solutions of the Hori auxiliary system. *Celestial Mechanics* 32, 307–332.
- Showalter, M.R., Cheng, A.F., Weaver, H.A., Stern, S.A., Spencer, J.R., Throop, H.B., Birath, E.M., Rose, D., Moore, J.M., 2007. Clump Detections and Limits on Moons in Jupiter's Ring System. *Science* 318, 232–235.
- Showalter, M.R., Lissauer, J.J., 2006. The Second Ring-Moon System of Uranus : Discovery and Dynamics. *Science* 311, 973–977.
- Shu, F.H., Waves in planetary rings. in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings* 1984 pp. 513–561.
- Sicardy, B., 1991. Numerical exploration of planetary arc dynamics. *Icarus* 89, 197–219.
- Sicardy, B., Dynamics of Planetary Rings. in : *Dynamics of Extended Celestial Bodies and Rings*, (Ed.) J. Souchay vol. 682 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag* 2006 p. 183.
- Sicardy, B., Dubois, V., 2003. Co-Orbital Motion with Slowly Varying Parameters. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 86, 321–350.
- Sicardy, B., Lissauer, J.J., 1992. Dynamical models of the arcs in Neptune's 63K ring (1989N1R). *Advances in Space Research* 12, 81–95.
- Spitale, J.N., Jacobson, R.A., Porco, C.C., Owen Jr., W.M., 2006. The Orbits of Saturn's Small Satellites Derived from Combined Historic and Cassini Imaging Observations. *Astrophys. J.* 132, 692–710.
- Tisserand, F., 1882. Memoire sur les mouvements seculaires des plans des orbites de trois planetes. *Annales de l'Observatoire de Paris* 16.
- Williams, J.G., *Secular Perturbations in the Solar System*. Ph.D. thesis UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES. 1969.
- Wisdom, J., 1986. Canonical solution of the two critical argument problem. *Celestial Mechanics* 38, 175–180.
- Yoshikawa, M., 1987a. A simple analytical model for the secular resonance ν_6 in the asteroidal belt. *Celestial Mechanics* 40, 233–272.
- Yoshikawa, M., The eccentricity variations of asteroids in the secular resonance ν_6 . in : *Twentieth Symposium on Celestial Mechanics*, (Eds.) H. Kinoshita, H. Nakai, M. Yoshikawa 1987 pp. 1–8.