

Ministère de l'éducation nationale

OBSERVATOIRE DE PARIS

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Dynamique des systèmes gravitationnels

présentée par Franck MALIGE

**Stabilité effective  
des systèmes planétaires**

**Application au problème séculaire de Jupiter et Saturne**

sous la direction de Jacques LASKAR

et de Philippe ROBUTEL

Soutenue le 19 Novembre 2001, devant le jury composé de

Antonio Giorgilli	rapporteur
Jacques Henrard	rapporteur
Jacques Laskar	directeur de thèse
Jean-Pierre Marco	examineur
Philippe Robutel	directeur de thèse
Bruno Sicardy	président du jury



Un rêve de classicisme enveloppe Jupiter ; en la fixant au télescope, monsieur Palomar reste en attente d'une transformation olympienne. Mais il n'arrive pas à garder une image nette : il doit clore un instant les paupières, laisser sa pupille éblouie retrouver une perception précise des contours, des couleurs, des ombres, mais aussi laisser son imagination se dépouiller de vêtements qui ne sont pas les siens, et renoncer à étaler un savoir livresque.

Palomar, *Italo Calvino*



# Remerciements

Je veux remercier l'ensemble du personnel du campus de l'Observatoire de Paris et de l'IAP qui participent chaque jour à la recherche et l'éducation scientifique :

-Mes encadrants de thèse : Jacques Laskar et, en particulier, Philippe Robutel pour son attention quotidienne.

-Les chercheurs, ingénieurs et personnels des bibliothèques, de l'observatoire, du bureau des longitudes et de l'équipe astronomie et systèmes dynamiques, surtout pour les discussions scientifiques que nous avons eues, les éclaircissements qu'ils m'ont fournis. Je tiens à remercier Mickael Gastineau pour le développement du manipulateur algébrique TRIP qui a été un outil très important lors de ces recherches.

-Les personnels administratifs, de restauration et d'entretien du parc pour m'avoir rendu la vie à l'observatoire agréable durant ces trois années.

-Les étudiants et enseignants du DEA.

Enfin, je veux remercier les membres du jury et rapporteurs.



## Résumé :

Depuis la fin des années 80, des études numériques ont mis en évidence des mouvements chaotiques dans les trajectoires des planètes du système solaire, en particulier d'un temps caractéristique de sensibilité aux conditions initiales de 5 millions d'années. Cela implique l'impossibilité de prédire sur une durée de 100 millions d'années le mouvement des planètes, celles-ci pouvant aller, après une telle durée, jusqu'à rentrer en collision. Toutefois, pour le système des planètes extérieures seules, ces études numériques ont constaté que ce comportement chaotique n'a qu'un effet très faible, pendant la durée de vie du système solaire. Le but de cette thèse est de démontrer certains résultats de stabilité pour des sous-systèmes du système solaire dont les études numériques ont montré la grande stabilité effective. On met en place des méthodes d'analyse de la stabilité des trajectoires, valables pour des systèmes planétaires à  $n$  corps assez généraux. On fait appel à des techniques classiques : expression des équations du mouvement dans des variables liées aux éléments elliptiques, moyennisation et méthodes de perturbation (construction à un ordre élevé d'une forme normale de Birkhoff). Du fait d'une dégénérescence du problème séculaire, on montre que la construction de cette forme normale n'est pas réalisable en général. Pour résoudre ce problème, on donne une nouvelle manière de réduire partiellement le problème planétaire de  $n$  corps par le biais de l'intégrale du moment cinétique. Finalement, on réalise l'étude pratique d'un système approchant la réalité : le problème de trois corps (Soleil, Jupiter et Saturne) séculaire à l'ordre un du rapport des masses. On démontre un résultat de stabilité : les trajectoires restent proches d'un tore donné de l'espace des phases pendant une durée supérieure à 5 milliards d'années et proches d'une solution quasi-périodique donnée pendant 100 millions d'années.

## Abstract :

Since the end of the 80's, numerical studies have displayed the appearance of chaotic motion in the trajectories of the planets of our solar system, more precisely of a characteristic time of sensibility to initial conditions of about 5 million years. This implies the impossibility to foresee the motion of the planets over 100 million years. In such a duration, the planets can even collide. Nevertheless, for the system of outer planets only, these numerical studies have displayed that the chaotic behaviour has very little effect during the time of the solar system life. The aim of this thesis is to prove some results of stability for sub-systems of the solar system which numerical study has shown effective stability. We develop analytical methods to study the stability of the trajectories, that can be used for a general planetary system. We used classical tools : expression of the equations of motion by means of variables linked to the elliptical elements, secularisation, perturbation methods (construction of a Birkhoff normal form at a high degree). A precise study of the constructibility of such a normal form is achieved : owing to a degeneracy of the secular problem, we show that this construction cannot be done in general. To solve this problem, we give a new way to reduce partially the  $n$ -body planetary problem using the angular momentum integral. Finally, we apply these methods to a system close to reality : the 3-body problem (Sun, Jupiter and Saturn), secular at order one of the mass ratio. We prove a result of stability : the trajectories stay close to a given torus of the phase space for more than 5 milliard years and close to a quasi-periodic solution for about 100 million years.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le problème planétaire de <math>n + 1</math> corps</b>	<b>13</b>
1.1	Définition du problème . . . . .	13
1.2	Première réduction, liée à la quantité de mouvement . . . . .	14
1.3	Méthode de perturbation . . . . .	14
1.4	Le moment cinétique . . . . .	16
1.5	Le problème SJS . . . . .	17
1.6	Construction du hamiltonien séculaire d'ordre 1 . . . . .	17
1.6.1	La dégénérescence du problème de $n$ corps . . . . .	17
1.6.2	Méthode de Lindsted-Poincaré . . . . .	18
1.6.3	Passage des variables initiales aux variables séculaires . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Méthode perturbative : construction d'une forme normale de Birkhoff, résonances séculaires</b>	<b>23</b>
2.1	Méthode perturbative . . . . .	23
2.1.1	Les variables actions-angles . . . . .	23
2.1.2	Qu'est-ce qu'on veut au juste ? . . . . .	24
2.2	Diagonalisation et résonances séculaires . . . . .	27
2.2.1	Cas général de $n$ planètes . . . . .	27
2.2.2	Cas de trois corps . . . . .	28
2.3	Construction de la forme normale, résonances . . . . .	30
2.3.1	Construction formelle de la forme normale de Birkhoff . . . . .	30
2.3.2	Résonances . . . . .	33
2.4	Etude du second membre de l'équation homologique . . . . .	34
2.4.1	Moment cinétique . . . . .	34
2.4.2	Le second membre de l'équation homologique . . . . .	35
2.4.3	Considérations générales sur les termes de $\{C_1^1, S_m\}$ . . . . .	37
2.5	Application à la construction de la forme normale dans le cas de trois corps . . . . .	38
2.5.1	Au degré quatre . . . . .	38
2.5.2	Au degré six . . . . .	39
2.5.3	Au degré huit . . . . .	39
2.5.4	Au degré dix . . . . .	41
2.5.5	Conclusions . . . . .	43
2.6	Remarques . . . . .	43
2.6.1	Cas d'une sécularisation à un ordre plus élevé . . . . .	43
2.6.2	Construction de la forme normale de Birkhoff et réduction simultanée . . . . .	43



2.7	Conclusion, cas général de $N$ corps . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Réductions liées à l'invariance du moment cinétique</b>	<b>46</b>
3.1	Réduction pour le problème planétaire des trois corps . . . . .	47
3.1.1	La réduction partielle . . . . .	47
3.1.2	Réduction totale . . . . .	49
3.2	Cas général de $n$ planètes . . . . .	53
3.2.1	Réduction partielle et forme symplectique standard . . . . .	53
3.2.2	Réduction totale . . . . .	62
3.3	Remarques générales à propos de ces réductions . . . . .	63
3.3.1	La méthode . . . . .	63
3.3.2	Construction de la forme normale de Birkhoff . . . . .	64
3.3.3	Comparaison entre la réduction totale et la réduction partielle dans le cas de trois corps . . . . .	64
3.3.4	Le plan invariant . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Stabilité du problème séculaire planétaire Soleil-Jupiter-Saturne</b>	<b>67</b>
4.1	Etude de la dynamique, choix de la méthode . . . . .	67
4.1.1	Définitions . . . . .	67
4.1.2	Travail préparatoire . . . . .	68
4.1.3	Premières études, choix de la méthode . . . . .	68
4.1.4	Construction de la forme normale . . . . .	75
4.2	Diffusion des nouvelles actions $\tilde{J}$ . . . . .	77
4.2.1	Méthode . . . . .	77
4.2.2	Majoration de l'influence du reste $\tilde{R}_0$ . . . . .	78
4.2.3	Résultats de stabilité . . . . .	84
4.3	Raffinements . . . . .	86
4.3.1	Passage des variables initiales $z(0)$ aux variables initiales $\tilde{z}(0)$ . . . . .	86
4.3.2	Etude de l'influence du reste $\tilde{R}$ . . . . .	88
4.3.3	Retour aux anciennes actions $J$ . . . . .	94
4.4	Près d'une solution quasi-périodique . . . . .	95
4.4.1	Minoration des nouvelles actions $\tilde{J}$ . . . . .	96
4.4.2	Calcul d'une majoration de $\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}$ . . . . .	96
4.4.3	Majoration finale . . . . .	98
4.5	Le cas du problème SJS . . . . .	98
4.6	Analyse en fréquence . . . . .	100
4.6.1	Principe . . . . .	100
4.6.2	Comparaisons . . . . .	101
4.7	Etude au voisinage d'une résonance séculaire . . . . .	102



# Introduction

Depuis les années 70 – 80, la mécanique céleste s'est enrichie d'un nouvel outil puissant, l'informatique. Ainsi, ce qui était autrefois impossible, l'estimation pratique du comportement à long terme du mouvement des planètes, par des intégrations numériques, a mis en évidence des phénomènes nouveaux. D'autre part, cet outil a permis de développer les séries perturbatives en jeu à un ordre beaucoup plus élevé, permettant de mettre en oeuvre des méthodes analytiques beaucoup plus précises.

En 1988, G. Sussman et J. Wisdom ont mis en relief, grâce à des intégrations numériques à long terme, le comportement chaotique de Pluton (Sussman et Wisdom, 1988) et en 1989, J. Laskar celui des planètes intérieures du système solaire (Laskar, 1989a). En particulier ils révèlent la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales sur des temps de l'ordre de 100 millions d'années, qui rendent imprévisible la trajectoire à long terme des astres du système solaire. Mais ces études et celles qui les ont suivies n'ont mis en évidence que des apparitions très faibles de chaos pour les planètes Jupiter et Saturne, sur des temps de l'ordre de l'âge du système solaire (5 milliards d'années). Une étude numérique précise des variations séculaires du système Soleil-Jupiter-Saturne par l'intermédiaire de l'analyse en fréquence a confirmé cette régularité des trajectoires (Robutel, 1993).

Il restait néanmoins à obtenir des résultats rigoureux de stabilité et de régularité, se basant sur des méthodes analytiques. De tels résultats ont été fournis récemment par U. Locatelli et A. Giorgilli qui, à l'aide d'outils de calcul formel et d'une application du théorème KAM, ont démontré que, pour le problème séculaire de Jupiter et Saturne à l'ordre deux du rapport des masses, les trajectoires restent piégées entre deux tores pour un temps infini (Locatelli et Giorgilli, 2000). Une autre façon d'aborder ces problèmes, plus quantitative, est de démontrer la stabilité effective du système, c'est-à-dire la stabilité sur un temps fini mais très long. Des résultats de ce type sont obtenus en utilisant les méthodes développées par N. Nekhoroshev. Une étude dans le cas d'un système planétaire de  $N$  corps (Niedermaier, 1993) a été faite mais encore aucune application de ces méthodes au système solaire réel n'a pu être réalisée, les seuils d'application de ces théorèmes étant trop bas (les masses de Jupiter et Saturne devraient être divisées par  $10^{10}$  environ pour obtenir des résultats significatifs). Notre étude reste plus modeste et renvoie à la remarque faite par H. Poincaré, dans l'introduction des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré, 1892). Il fait remarquer que si les séries employées par les astronomes pour donner le mouvement des planètes ne convergent pas quand le temps tend vers l'infini, elles sont cependant utiles sur une durée finie. En partant de cette idée et du progrès du calcul formel (en particulier la mise au point, au bureau des longitudes, du logiciel TRIP dédié à la manipulation des séries rencontrées en astronomie), on peut mener à bien la construction de séries retranscrivant le mouvement à long terme des

planètes, sur des durées finies mais de l'ordre de l'âge du système solaire. Cette méthode fait appel à des méthodes perturbatives classiques du type méthode de Lie et plus précisément de construction d'une forme normale de Birkhoff non résonante. Des résultats de majoration des termes des séries rencontrées sont utilisés, dans l'esprit d'articles comme celui de Giorgilli et al. (1989). On rappelle enfin qu'un historique précis de la question de la stabilité du système solaire est présenté par J. Laskar dans (Laskar,1992) et donne une vue plus précise du contexte global du travail présenté ici.

Le premier chapitre de cette thèse centre l'étude, à l'aide d'un formalisme hamiltonien, sur le problème planétaire de  $N$  corps. Des méthodes perturbatives connues sont d'abord mises en place. En particulier, on exprime ce problème à l'aide de variables canoniques liées de manière simple aux éléments elliptiques des orbites des planètes. D'autre part, on rappelle la construction du problème sécularisé à l'ordre un du rapport des masses qui permet d'étudier les variations à long terme des excentricités et inclinaisons des planètes.

Dans le second chapitre, on rappelle la procédure de construction d'une forme normale de Birkhoff, base de notre méthode perturbative. Toutefois, on met en évidence l'impossibilité, dans le cas d'un système planétaire de  $N$  corps sécularisé à l'ordre un du rapport des masses, d'une construction non résonante, impossibilité directement liée à des résonances séculaires qui surviennent quelles que soient les valeurs des paramètres et des conditions initiales du problème.

Le troisième chapitre présente une manière simple de résoudre le problème posé par les résonances séculaires. Ces résonances étant liées à l'invariance du moment cinétique et en particulier de sa direction, on propose une nouvelle manière de réduire le problème, une réduction partielle, utilisant seulement l'invariance de la direction du moment cinétique. Une nouvelle méthode pour réduire le problème planétaire de  $N$  corps en tenant compte de l'invariance du moment cinétique est ainsi fournie.

Si les trois premiers chapitres traitent principalement du problème général planétaire de  $N$  corps, le quatrième chapitre aborde finalement des questions de stabilité pour un problème particulier : le problème planétaire Soleil-Jupiter-Saturne (SJS). Le choix de ce problème est important pour plusieurs raisons. La première est évidemment que ces trois corps sont les plus massifs du système solaire, ceux dont l'influence est la plus forte. L'étude de leur dynamique est un préalable à l'étude de la dynamique totale du système solaire. Mais il y a une raison plus fondamentale : les difficultés de l'étude d'un système planétaire sont du même ordre pour un système contenant 3 corps ou plus. Ainsi, les méthodes du chapitre 4 s'appliquent à un système planétaire général de  $N$  corps. Mais le calcul formel des expressions des séries à un haut degré, nécessaire à la démonstration de résultats de stabilité, devient très lourd pour plus de trois corps et est actuellement hors de portée. Dans ce chapitre, on démontrera que, pendant une durée au moins comparable à l'âge du système solaire, les solutions du problème SJS restent près d'un tore de l'espace des phases. De plus, ces solutions restent très voisines d'une solution quasi-périodique pendant au moins 100 millions d'années. Les estimations fournies sont assez grossières et en raffinant les méthodes proposées, en calculant explicitement la forme normale de Birkhoff à un ordre plus élevé on devrait pouvoir augmenter cette durée jusqu'à une durée de l'ordre de l'âge du système solaire.

# Chapitre 1

## Le problème planétaire de $n + 1$ corps

Ce chapitre, qui rappelle et commence à aborder des problèmes de stabilité d'un système planétaire de  $n + 1$  corps en attraction gravitationnelle reprend des résultats connus. Elle est très largement inspirée des articles (Laskar, 1989b, Laskar et Robutel, 1995) qui peuvent être consultés pour plus de détails.

### 1.1 Définition du problème

Soient  $P_0, P_1, \dots, P_n$ ,  $n + 1$  corps de masses respectives  $m_0, m_1, \dots, m_n$  en interaction gravitationnelle et  $O$  leur barycentre. Un problème planétaire est un problème de  $n$  corps particulier pour lequel le corps  $P_0$  (le "soleil") a une masse beaucoup plus importante que les autres corps ( $\forall j, 1 \leq j \leq n, m_0 \gg m_j$ ) et tel que ces autres corps (les "planètes") tournent tous dans le même sens autour de  $P_0$  sur des trajectoires qui, en première approximation, sont des ellipses peu excentriques et peu inclinées. C'est le cas de notre système solaire si on ne tient pas compte de la dynamique de Pluton (dont l'orbite est fortement inclinée). Ces conditions sont, on le verra plus tard, essentielles pour démontrer des résultats de stabilité à long terme de ces systèmes et pour la mise en oeuvre des techniques qui vont être développées.

Pour tout corps  $P_j$ , on définit  $\mathbf{u}_j = \vec{OP}_j$  le vecteur position dans un repère de  $R^3$ . Dans le référentiel barycentrique galiléen ayant pour origine  $O$ , les équations de Newton forment une équation différentielle d'ordre  $6(n + 1)$  qui peut être écrite sous une forme hamiltonienne en utilisant les variables canoniques  $(\mathbf{u}_j, \tilde{\mathbf{u}}_j = m_j \dot{\mathbf{u}}_j)_{j=1,n}$  et le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_j\|^2}{m_j} - G \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|} \quad (1.1)$$

où  $G$  est la constante universelle de gravitation et  $\|\mathbf{u}\|$  représente la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{u}$  dans  $R^3$  (la norme euclidienne sera toujours notée de cette façon, quelle que soit la dimension de l'espace du vecteur  $\mathbf{u}$ ). La deux-forme symplectique du problème, qui donne la forme des équations hamiltoniennes est

$$\sigma = \sum_{j=0}^n d\mathbf{u}_j \wedge d\tilde{\mathbf{u}}_j \quad (1.2)$$

Ce problème possède  $3(n+1)$  degrés de liberté. L'étude directe de cette équation différentielle est très difficile. Pour simplifier un peu cette étude, on va commencer, dans ce chapitre, par réduire ce problème en utilisant diverses manières classiques pour obtenir un problème simplifié ayant  $2n$  degrés de liberté.

## 1.2 Première réduction, liée à la quantité de mouvement

Ce système possède sept intégrales premières connues : le hamiltonien  $H$  représentant l'énergie totale du système, les coordonnées de la quantité de mouvement et du moment cinétique  $\mathbf{C}$ . On va se servir de ces intégrales pour réduire le nombre de degrés de liberté du système. Pour réaliser la réduction liée à l'invariance de la quantité de mouvement, Poincaré a proposé deux systèmes de variables tous deux définis par une application linéaire en fonction des variables cartésiennes : les variables canoniques héliocentriques et les coordonnées de Jacobi (Poincaré, 1896 et aussi Laskar, 1989b). Le choix d'une réduction ou de l'autre dépend de la nature du problème de  $n+1$  corps étudié et dans les deux cas seules restent  $6n$  variables dans le problème réduit. Pour réaliser cette première réduction, liée à la conservation de la quantité de mouvement, on choisit naturellement, dans le cas d'un problème planétaire, d'utiliser les variables canoniques héliocentriques  $(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j)$  définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0 \\ \tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_1 + \cdots + \tilde{\mathbf{u}}_n \\ \mathbf{r}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_0 \\ \tilde{\mathbf{r}}_j = \tilde{\mathbf{u}}_j, \text{ pour } 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (1.3)$$

On choisit donc de repérer les coordonnées de chaque planète par rapport au Soleil. Comme l'a déjà noté Poincaré (Poincaré, 1896 voir aussi Laskar, 1989b), l'expression du moment cinétique est conservée par une telle application linéaire et, de plus, comme on a ici  $\tilde{\mathbf{r}}_0 = 0$ , on obtient

$$\mathbf{C} = \sum_{j=0}^n \mathbf{u}_j \times \tilde{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=0}^n \mathbf{r}_j \times \tilde{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \tilde{\mathbf{r}}_j \quad (1.4)$$

Où  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  représente le produit vectoriel de deux vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  de  $R^3$ . Le système ne dépend plus que des variables  $(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j, 1 \leq j \leq n)$  et donc possède  $3n$  degrés de liberté. Dans le cas où on veut mettre en pratique des méthodes perturbatives liées aux orbites képlériennes (voir section (1.3)), la réduction associée au moment cinétique est beaucoup plus compliquée à obtenir pratiquement et n'est présentée que dans le chapitre 3.

## 1.3 Méthode de perturbation

Une des méthodes classiques de perturbation est de trouver des coordonnées canoniques conjuguées  $(p, q)$  telles que le hamiltonien  $H$  du système soit exprimé de la manière suivante

$$H(p, q) = H_{int}(p) + H_{pert}(p, q) \quad (1.5)$$

où  $H_{int}$  est un hamiltonien intégrable (ne dépendant que des variables  $p$ ) et où  $H_{pert}$ , correspondant à la perturbation, est le plus petit possible. Dans le cas d'un système planétaire, on peut exprimer le hamiltonien  $H$  comme la somme d'un hamiltonien  $H_0$  somme de  $n$  hamiltoniens représentant  $n$  problèmes de deux corps indépendants (chaque "planète" de masse  $\beta_j = m_0 m_j / (m_0 + m_j)$  autour d'un "soleil" de masse  $m_0 + m_j$ ) et d'un hamiltonien  $\varepsilon H_1$  qui correspond à la partie perturbative du problème, engendrée par les attractions mutuelles des planètes. On a

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \quad (1.6)$$

On définit la quantité  $\varepsilon = \max_{1 \leq j \leq n} (m_j / m_0)$ . C'est une petite quantité dans un système planétaire, appelée rapport des masses et qui est donc le rapport entre la masse de la planète la plus massive du système et la masse du soleil. Dans le cas particulier du problème SJS, la valeur de ce paramètre est  $\varepsilon \simeq 9.54 \cdot 10^{-3}$ . La perturbation du système par rapport à un problème képlérien intégrable est mesurée par ce petit paramètre  $\varepsilon$ ,  $H_0$  et  $H_1$  étant alors du même ordre de grandeur. On utilise des coordonnées canoniques  $(p, q)$  telles que  $H_0$  ne dépende que des variables  $p$  : les coordonnées rectangulaires complexes de Poincaré  $(\Lambda_j, x_j, y_j, \lambda_j, -i\bar{x}_j, -i\bar{y}_j)$ . Elles sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_j & \text{la longitude moyenne} \\ \Lambda_j = & \beta_j \sqrt{\mu_j a_j} \\ x_j = & \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \exp(i\varpi_j) \\ y_j = & \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{\sqrt{1 - e_j^2} (1 - \cos I_j)} \exp(i\Omega_j) \end{cases} \quad (1.7)$$

où la variable  $a_j$  représente la valeur du demi grand axe,  $e_j$  l'excentricité,  $I_j$  l'inclinaison,  $\lambda_j$  la longitude moyenne et  $\varpi_j$  la longitude du noeud de la planète numérotée  $j$ . On a  $\mu_j = G(m_0 + m_j)$ , et  $\bar{x}_j$  est le conjugué complexe de  $x_j$ . Ces variables ont l'avantage, comparées aux variables de Delaunay, de ne pas donner de singularité quand les inclinaisons et excentricités tendent vers zéro. Les variables  $x_j, y_j$  ont une valeur de l'ordre respectivement des excentricités et inclinaisons qui sont des quantités proches de zéro dans un problème planétaire. On va pouvoir alors développer le hamiltonien en une série des variables  $x_j, y_j$ . Ces variables permettent d'exprimer simplement le problème non perturbé car on a alors,

$$H_0 = - \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^2 \beta_j^3}{2\Lambda_j^2} \quad (1.8)$$

On obtient donc le problème dans des variables canoniques qui représentent les éléments des ellipses képlériennes données par le hamiltonien  $H_0$ . Dans les variables de Poincaré,  $H_1$  peut être exprimé comme une série de la forme suivante :

$$H_1 = \sum_{l, \bar{l}, m, \bar{m} \in \mathbb{N}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{l, \bar{l}, m, \bar{m}, k} (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n) \prod_{j=1}^n x_j^{l_j} \bar{x}_j^{\bar{l}_j} y_j^{m_j} \bar{y}_j^{\bar{m}_j} e^{ik_j \lambda_j} . \quad (1.9)$$

Le calcul de cette série, tronquée à un degré donné en les variables  $x_j, y_j$ , est réalisé par des procédures utilisant le manipulateur algébrique TRIP développé par M. Gastineau et J. Laskar (Laskar, 1989b). Le schéma de construction de  $H_1$  est présenté par J. Laskar et P. Robutel

dans l'article (Laskar et Robutel, 1995). Dans les sections suivantes, on devra calculer les coefficients de ce hamiltonien correspondant à  $k = 0$ ,  $|n| + |\bar{n}| + |m| + |\bar{m}| \leq n_H$  pour trois corps. On note, pour  $k = (k_1, \dots, k_n) \in Z^n$ ,  $|k| = \sum_{j=1}^n |k_j|$ . Pour trois corps, on calculera les fonctions  $\alpha_{l,\bar{l},m,\bar{m},k}$  explicitement en fonction des variables  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  pour  $n_H = 6$  dans la section (2.5) et on évaluera numériquement ces fonctions pour les  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  du problème SJS jusqu'au degré  $n_H = 20$  (chapitre 4).

La deux-forme symplectique du problème a la forme standard suivante :

$$\sigma = \sum_{k=1}^n [d\lambda_k \wedge d\Lambda_k - i(dx_k \wedge d\bar{x}_k + dy_k \wedge d\bar{y}_k)] \quad (1.10)$$

Pour obtenir des résultats de stabilité de ce système, on va chercher à réduire la perturbation  $H_1$  pour se rapprocher d'un système intégrable. Pour ceci, on va se concentrer sur un problème plus simple : l'étude des variations dites "séculaires" du système. Par la suite, on note  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

## 1.4 Le moment cinétique

L'expression des coordonnées du moment cinétique est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \sqrt{\mu_j a_j (1 - e_j^2)} \begin{pmatrix} \sin I_j \sin \Omega_j \\ -\sin I_j \cos \Omega_j \\ \cos I_j \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sqrt{2} \operatorname{Im}(y_j) \sqrt{\Lambda_j - |x_j|^2 - \frac{|y_j|^2}{2}} \\ -\sum_{j=1}^n \sqrt{2} \operatorname{Re}(y_j) \sqrt{\Lambda_j - |x_j|^2 - \frac{|y_j|^2}{2}} \\ \sum_{j=1}^n (\Lambda_j - |x_j|^2 - |y_j|^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.11)$$

On définit alors l'intégrale première complexe :

$$C_1 = \frac{-C_y + iC_x}{\sqrt{2}} = \sum_{j=1}^n y_j \sqrt{\Lambda_j - |x_j|^2 - \frac{|y_j|^2}{2}} \quad (1.12)$$

Le fait que le moment cinétique soit une intégrale première du système définit un plan, orthogonal à  $\mathbf{C}$  qui est un invariant du problème. On choisit alors ce plan comme étant le plan de référence des coordonnées. On a donc, dans ce plan,  $C_1 = 0$  et on choisit le sens de l'axe vertical ( $Oz$ ) de manière à avoir  $C_z \geq 0$ . Le choix de ce plan de référence permet, dans le cas de trois corps de réaliser la réduction de Jacobi liée à l'invariance du moment cinétique et nous permettra, pour le cas plus général de  $n$  corps, de réaliser cette réduction (dans le chapitre 3). Une étude plus précise des raisons du choix de ce plan particulier et son importance comme plan de référence est réalisée dans la section (3.3.4). On a alors  $C_z = \|\mathbf{C}\|$  et, de cette intégrale première, on peut déduire que le hamiltonien est invariant par des rotations autour de l'axe ( $Oz$ ) et qu'il satisfait donc des relations de d'Alembert. Pour un



monôme quelconque  $\mathcal{M} = \prod_{j=1}^n x_j^{l_j} \bar{x}_j^{\bar{l}_j} y_j^{m_j} \bar{y}_j^{\bar{m}_j} e^{ik_j \lambda_j}$  de la série  $H_1$ , on définit la caractéristique de  $\mathcal{M}$ ,  $c(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^n (l_j + m_j - \bar{l}_j - \bar{m}_j - k_j)$ . Les relations de d'Alembert s'expriment de la manière suivante : si  $c(\mathcal{M}) \neq 0$  alors  $\alpha_{l, \bar{l}, m, \bar{m}, k} = 0$ . Cette relation provient du fait que

$$\{H, C_z\} = 0 \quad (1.13)$$

Le problème est aussi invariant par la symétrie orthogonale par rapport au plan de référence. Par cette symétrie, seul les monômes qui sont pairs en les variables d'inclinaison (variables  $y_j$ ) peuvent apparaître, c'est à dire que  $H_1$  ne contient que des monômes pour lesquels  $\sum_{l=1}^n (m_l + \bar{m}_l)$  est paire. Ces relations sont très importante et permettent en particulier de construire des procédures de calcul formel beaucoup plus rapides (Laskar, 1989b).

## 1.5 Le problème SJS

On donne, pour finir, les paramètres et les conditions initiales (DE200) du problème SJS. Les unités que l'on utilisera dans toute cette étude sont : la masse du soleil ( $m_\odot$ ) pour les masses, l'unité astronomique ( $U.A.$ ) pour les distances, les années ( $an$ ) pour le temps. Dans ces unités, la constante de gravitation a pour valeur  $G = 39.47692 U.A.^3 m_\odot^{-1} an^{-2}$ . Les angles sont exprimés en radians. Les inverses des masses du système sont alors, comparées à la masse solaire,

Soleil	1
Jupiter	1047.35
Saturne	3498

Les conditions initiales du mouvement sont données par les éléments elliptiques liés aux deux planètes dans les coordonnées héliocentriques, repérées par rapport au plan invariant :

éléments	a	e	I	$\varpi$	$\Omega$
Jupiter	5.2019 $U.A.$	0.048388	0.006300	0.20326	2.15862
Saturne	9.5556 $U.A.$	0.053978	0.015525	1.53713	-0.98296

La norme du moment cinétique est alors  $C_z = 1.920210^{-2} U.A.^2 m_\odot an^{-1}$ .

## 1.6 Construction du hamiltonien séculaire d'ordre 1

### 1.6.1 La dégénérescence du problème de $n$ corps

Le problème planétaire présente une dégénérescence : le hamiltonien  $H_0$  ne dépend que des variables  $\Lambda_j$ . Dans le problème non perturbé (défini par  $H_0$  seul), les angles des périhélie et des noeuds sont donc constants et les solutions du problème non perturbé réalisent un feuilletage de l'espace des phases en un ensemble de tores de dimension au maximum  $n$  et par conséquent non maximale. Dans le problème perturbé, on doit donc considérer deux types distinct de variations angulaires :

-Les mouvements rapides des longitudes moyennes (période de l'ordre de l'année pour les planètes intérieures du système solaire et de l'ordre de la dizaine d'années ou du siècle pour les planètes extérieures) qui viennent de l'influence des deux parties du hamiltonien mais principalement de  $H_0$ .

-Les mouvements lents des angles des noeuds et des périhélie (périodes de l'ordre de 10000 à 100000 ans pour le système solaire) qui viennent de l'influence seule des perturbations (hamiltonien  $H_1$ ).

Du fait de la présence de cette dégénérescence, de la forte résonance du problème non perturbé ( $2n$  fréquences nulles), le problème est très difficile à aborder. En particulier, si on veut obtenir des résultats de stabilité sur un temps infini, il faut construire une version particulière du théorème KAM qui tienne compte de cette dégénérescence (Arnold, 1963 et aussi Robutel, 1995). Une méthode perturbative classique est alors de moyenner ce problème. C'est-à-dire de construire une forme normale, où les nouvelles variables angulaires rapides (associées aux variables  $\lambda_j$ ) sont éliminées ou rejetées dans un reste le plus petit possible. On étudie alors seulement les variations séculaires ("visibles en un siècle") du problème. C'est au prix de cette simplification énorme (passage de  $3n$  à  $2n$  degrés de liberté) que l'on va pouvoir aborder ce problème et ses variations à long terme.

## 1.6.2 Méthode de Lindsted-Poincaré

On rappelle que le hamiltonien du système de  $n$  corps dans les variables de Poincaré héliocentriques s'écrit :

$$H(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}, y, \bar{y}) = H_0(\Lambda) + \varepsilon H_1(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}, y, \bar{y}) \quad (1.14)$$

Construire le problème séculaire à l'ordre  $m$  des masses consiste à trouver de nouvelles variables canoniques  $(\lambda_m, \Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m)$  telles que dans ces variables le hamiltonien s'exprime comme :

$$\begin{aligned} H_s(\lambda_m, \Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) &= \sum_{k=0}^m \varepsilon^k H_{s,k}(\Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) \\ &+ R_{m+1}(\lambda_m, \Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $R_{m+1} = o(\varepsilon^m)$ . Dans la suite de ce travail, on se limite à la construction du hamiltonien à l'ordre un du rapport des masses. La méthode de Lindsted-Poincaré effectue le calcul d'une fonction génératrice  $S$  telle que

$$S(\lambda, \Lambda_m, \bar{x}, x_m, \bar{y}, y_m) = \sum_{k=0, m} \varepsilon^k S_k \quad (1.16)$$

Cette transformation est voisine de l'identité (la partie de degré 0 en  $\varepsilon$  est l'identité) et on a donc

$$S_0 = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \Lambda_{m,j} + \bar{x}_j x_{m,j} + \bar{y}_j y_{m,j} \quad (1.17)$$

La transformation est alors définie, pour  $1 \leq j \leq n$  par

$$\begin{cases} \Lambda_j = \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} & \lambda_{m,j} = \frac{\partial S}{\partial \Lambda_{m,j}} \\ x_j = \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_j} & \bar{x}_{m,j} = \frac{\partial S}{\partial x_{m,j}} \\ y_j = \frac{\partial S}{\partial \bar{y}_j} & \bar{y}_{m,j} = \frac{\partial S}{\partial y_{m,j}} \end{cases} \quad (1.18)$$

En développant l'égalité

$$H(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}, y, \bar{y}) = H_s(\lambda_m, \Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) \quad (1.19)$$

en une série de Taylor au voisinage de  $(\lambda, \Lambda_m, \bar{x}, x_m, \bar{y}, y_m)$  et en identifiant les termes de même ordre du rapport des masses, pour l'ordre 0, on obtient la relation suivante :

$$H_0(\Lambda_m) = H_{s,0}(\Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) \quad (1.20)$$

On a donc l'identité des parties de degré 0. Pour l'ordre 1, on obtient la relation suivante :

$$\left\langle \frac{\partial H_0}{\partial \Lambda}, \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right\rangle_n + H_1 = H_{s,1}(\Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m) \quad (1.21)$$

où  $\langle u, v \rangle_n$  est le produit scalaire usuel de  $R^n$  et où on note  $\partial H_0 / \partial \Lambda$  le vecteur des dérivées de  $H_0$  par rapport aux variables  $\Lambda_j$  et  $\partial S_1 / \partial \lambda$  le vecteur des dérivées de  $S_1$  par rapport aux variables  $\lambda_j$ .

On note  $\omega_0 = \partial H_0 / \partial \Lambda$  le vecteur fréquence du hamiltonien non perturbé  $H_0$  qui représente en première approximation les fréquences de révolution des différentes planètes. Ainsi, si on décompose  $S_1$  et  $H_1$  en série de Fourier des longitudes moyennes, on a

$$S_1 = \sum_{k \in Z^n} s_k(\Lambda_m, \bar{x}, x_m, \bar{y}, y_m) e^{ik \cdot \lambda} \quad (1.22)$$

et

$$H_1 = \sum_{k \in Z^n} h_k(\Lambda_m, \bar{x}, x_m, \bar{y}, y_m) e^{ik \cdot \lambda} \quad (1.23)$$

et donc

$$\left\langle \frac{\partial H_0}{\partial \Lambda}, \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right\rangle_n + H_1 = \sum_{k \in Z^n} (i k \cdot \omega_0 s_k + h_k) e^{ik \cdot \lambda} \quad (1.24)$$

Si on veut que  $H_{s,1}$  soit indépendant des  $\lambda$ , on doit avoir  $i k \cdot \omega_0 s_k + h_k = 0$  pour toute valeur de  $k$  non nulle. Si il n'y a pas de résonances entre les fréquences de  $\omega_0$  (il n'existe pas de  $k_1 \in Z^n - \{0\}$  tel que  $k_1 \cdot \omega_0 = 0$ ), alors, en partant de  $H_1$ , on peut construire la fonction  $S_1$  en prenant  $s_k = i h_k / k \cdot \omega_0$  si  $k \neq 0$ . Donc

$$S_1 = \sum_{k \in Z^n - \{0\}} \frac{i h_k}{k \cdot \omega_0} e^{ik \cdot \lambda} \quad (1.25)$$

Pour s'assurer que cette série est convergente, on doit supposer que les fréquences  $\omega_0$  sont diophantiennes. Comme le hamiltonien considéré est analytique, on arrive à prouver que les coefficients  $s_k$  sont majorés par une série exponentiellement décroissante (Morbidelli, 1994). On a alors  $H_{s,1} = h_0$ , c'est-à-dire que  $H_{s,1}$  est la moyenne de  $H_1$  suivant les variables  $\lambda$ .

$$H_{s,1} = \int_{[0,2\pi]^n} H_1 d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \quad (1.26)$$

Dans les nouvelles variables le hamiltonien s'écrit

$$H_s = H_0 + \varepsilon h_0 + R_2 \quad (1.27)$$

où  $R_2 = \circ(\varepsilon)$ . Dans la suite on appellera "problème séculaire d'ordre 1 du rapport des masses", le hamiltonien défini par  $H_0 + \varepsilon h_0$  et qui ne dépend plus des nouvelles variables  $\lambda_m$ . Pour ce problème, les  $\Lambda_m$  et donc les demi grand axes séculaires sont constants. Considérer la dynamique du hamiltonien séculaire à l'ordre 1 du rapport des masses revient donc à étudier la déformation des ellipses képlériennes qui ont un demi grand axe constant. On étudie les variables qui ont une variation séculaire : les variables  $(x_m, y_m)$  qui représentent les excentricités, les inclinaisons, les longitudes du périhélie et du noeud. Le hamiltonien  $H_{s,0}$ , étant simplement fonction des paramètres  $\Lambda_m$ , n'intervient alors plus dans la dynamique du problème.  $h_0$  se développe en une série des variables  $x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m$ .

$$h_0 = \sum_{l, \bar{l}, k, \bar{k} \in N^n} \alpha_{l, \bar{l}, k, \bar{k}, 0}(\Lambda_m) \prod_{j=1}^n x_{m,j}^{l_j} \bar{x}_{m,j}^{\bar{l}_j} y_{m,j}^{k_j} \bar{y}_{m,j}^{\bar{k}_j} . \quad (1.28)$$

Cette série vérifie toujours les relations de d'Alembert, de parité en les variables d'inclinaison et les monômes  $\prod_{j=1}^n x_{m,j}^{l_j} \bar{x}_{m,j}^{\bar{l}_j} y_{m,j}^{m_j} \bar{y}_{m,j}^{\bar{m}_j}$  sont de degré total pair. La construction de la forme normale séculaire à un ordre plus élevé devient très rapidement difficile, le nombre de termes des séries en jeu étant grand. De plus, pour réaliser une moyennisation à un ordre supérieur, il faut calculer explicitement la série  $S_1$  et donc les  $s_k$  ce qui n'est possible que pour un nombre fini de valeurs de  $k$  (voir Robutel, 1993). Donc, pour une moyennisation à un ordre plus élevé, on doit se contenter d'une approximation du hamiltonien séculaire en ne calculant qu'une partie des transformation en jeu. Le hamiltonien séculaire à l'ordre 1 du rapport des masses n'est pas une très bonne approximation du problème réel dans beaucoup de cas, en particulier celui du système solaire. Néanmoins, pour trois corps, à un ordre plus élevé de moyennisation, la forme globale des séries moyennisées reste la même que celle de  $h_0$  (1.28) et l'intérêt de l'étude réalisée dans les chapitres suivants est de mettre en place des raisonnements qui peuvent ultérieurement conduire à des résultats pour le problème réel, en utilisant une sécularisation à un ordre plus élevé.

**Remarque 1** Les intégrales liées au moment cinétique  $(C_1, C_z)$  conservent la même forme (1.11,1.12) dans les nouvelles variables du problème sécularisé (Laskar, 2001). En fait, J.Laskar a montré que ces intégrales restent dans la même forme pour tout ordre de normalisation. Cette remarque permet d'appliquer les résultats des chapitres 2, 3 à toute ordre de sécularisation.

### 1.6.3 Passage des variables initiales aux variables séculaires

On connaît les valeurs des conditions initiales du problème planétaire de  $n$  corps par la donnée des positions et vitesses ou des éléments elliptiques à  $t = 0$ . Mais la valeur des conditions initiales dans les variables séculaires ne sont pas connues. De manière à avoir une estimation des valeurs des nouvelles variables, on doit donc calculer explicitement cette transformation donnée par les équations (1.18). A priori, la variation relative entre une variable et la variable séculaire qui lui est associée est de l'ordre de la perturbation  $\varepsilon$ . Mais, de manière à avoir une idée plus précise de cette variation relative, on veut calculer cette transformation. En fait, les variables que l'on doit estimer avant tout sont les variables  $\Lambda_{m,j}$  qui, dans le nouveau problème, deviennent des paramètres. Leur valeur va, par exemple, fixer les fréquences fondamentales du système séculaire (voir 2.2.2) et donc avoir une influence sur l'apparition ou non de résonances séculaires. On a, pour estimer la différence entre les conditions initiales :

$$\Lambda_j(0) - \Lambda_{m,j}(0) = \frac{\partial S_1}{\partial \lambda_j}(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} \frac{i h_k(\Lambda_m(0), \bar{x}(0), x_m(0), \bar{y}(0), y_m(0))}{k \cdot \omega_0} k_j e^{ik \cdot \lambda(0)} \quad (1.29)$$

Pour majorer la variation de  $\Lambda_j(0) - \Lambda_{m,j}(0)$ , on va estimer cette expression en considérant que  $h_k(\Lambda_m(0), \bar{x}(0), x_m(0), \bar{y}(0), y_m(0)) = h_k(\Lambda(0), \bar{x}(0), x(0), \bar{y}(0), y(0))$ , la différence relative entre les variables anciennes et les variables séculaires étant de l'ordre de  $\varepsilon$ , cela donne une différence de l'ordre de  $\varepsilon^2$  pour  $\Lambda_j(0) - \Lambda_{m,j}(0)$ . Un autre problème est que  $S_1$  est une série infinie et qu'on ne peut calculer en pratique que certains de ses termes  $s_k$  en calculant les  $h_k$ . On va donc estimer ces variations par l'approximation suivante :

$$|\Lambda_j(0) - \Lambda_{m,j}(0)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}, |k| \leq N} \frac{|h_k(\Lambda(0), \bar{x}(0), x(0), \bar{y}(0), y(0))|}{|k \cdot \omega_0|} |k_j| \quad (1.30)$$

Où  $|k| = \sum_{j=1}^n |k_j|$  et  $N$  est un entier fixé aussi grand que possible. Les coefficients de Fourier  $h_k$  sont alors calculés très simplement par une moyennisation grâce à une procédure en FORTRAN :

$$h_k = \int_{[0, 2\pi]^n} H_1(\lambda, \Lambda(0), x(0), \bar{x}(0), y(0), \bar{y}(0)) e^{-ik \cdot \lambda} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \quad (1.31)$$

La fonction  $H_1$  est calculée par les expressions données dans la section 3 de l'article (Laskar et Robutel, 1995) : les vitesses et positions des planètes sont exprimées en fonction des éléments elliptiques et en particulier des longitudes moyennes. On montre (figure 1.1) l'évolution des coefficients  $s_k$  et  $h_k$  dans le cas particulier du problème SJS en fonction de la valeur de  $|k|$ .

Toujours dans ce cas particulier, on trouve une majoration de la variation de la valeur du demi grand axe d'environ 0.1% pour Jupiter et 0.35% pour Saturne (en prenant  $N = 20$ ). A partir de la valeur  $N = 10$ , on ne trouve plus de changements notables de la différence, les  $s_k$  devenants très petits (théoriquement, la décroissance de la série  $s_k$  est majorée par une décroissance exponentielle que l'on retrouve sur la figure (1.1)). Le rapport  $\alpha = a_1/a_2$  des demi grand axes séculaires évolue alors entre les valeurs  $\alpha_{min} = 0.5418$  et  $\alpha_{max} = 0.5469$ . On va, par la suite, considérer que les valeurs des conditions initiales séculaires sont égales aux anciennes et seule la fourchette de variation de  $\alpha$  nous servira lors de l'étude de l'apparition de résonances séculaires (pour la figure (4.17) de la section (4.7)). L'étude que l'on va mener par la suite sera en effet valable dans une large zone autour de l'origine et pour des domaines de conditions initiales englobant les valeurs de  $x(0)$  et  $y(0)$ .

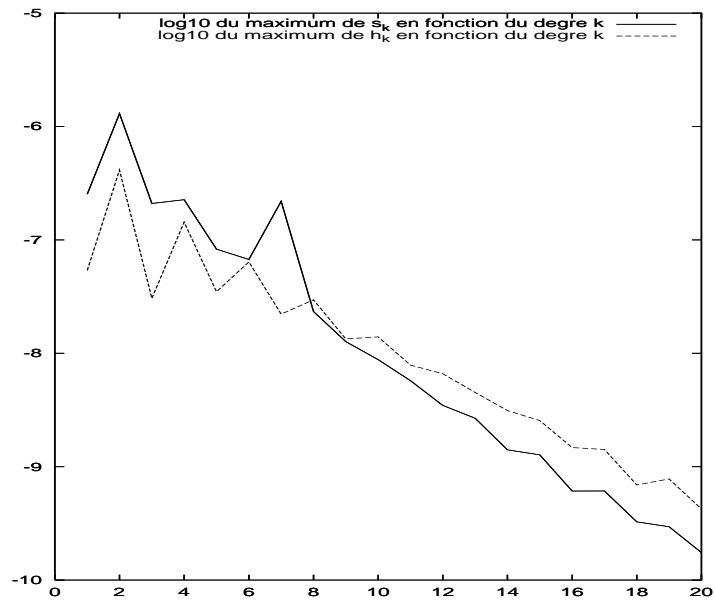


FIG. 1.1: Valeur du  $\log_{10}$  du coefficient maximal  $s_k$  en fonction de  $|k|$ .

# Chapitre 2

## Méthode perturbative : construction d'une forme normale de Birkhoff, résonances séculaires

### 2.1 Méthode perturbative

Dans cette section, on présente le choix du mode d'approche du problème, c'est-à-dire la méthode de perturbation qui va être mise en oeuvre. On rappelle que toutes les études qui vont suivre concernent le problème séculaire à l'ordre 1 du rapport des masses. On va, dans les chapitres suivants, pour éviter des lourdeurs d'expression, noter les nouvelles variables séculaires  $(\lambda_m, \Lambda_m, x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m)$  comme les anciennes  $(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}, y, \bar{y})$ .

#### 2.1.1 Les variables actions-angles

Certaines des variables du problème considéré sont plus importantes du point de vue dynamique : les excentricités et les inclinaisons ont un rôle clef dans la stabilité du système. En effet, quand les excentricités et inclinaisons sont proches de zéro (cas des conditions initiales et plus généralement du domaine de stabilité que l'on va considérer), on a

$$\begin{cases} x_j \sim \sqrt{\frac{\Lambda_j}{2}} e_j \exp(i\varpi_j) \\ y_j \sim \sqrt{\frac{\Lambda_j}{2}} I_j \exp(i\Omega_j) \end{cases} \quad (2.1)$$

et les valeurs des excentricités et inclinaisons vont avoir un effet direct sur la dynamique du système en donnant une valeur plus ou moins grande à la perturbation  $h_0$  (1.28). D'autre part, grâce à la parité en les variables  $x, y$  du hamiltonien  $h_0$ , le point  $x_j = y_j = 0$  est un point fixe elliptique du système séculaire (voir section 2.2). Il correspond à des orbites planes ( $I_j = 0$ ) et circulaires ( $e_j = 0$ ). De manière à faire une séparation nette entre les variables d'excentricité, d'inclinaison d'un côté et de longitude du périhélie et du noeud de l'autre côté, on définit les variables actions-angles du système. La transformation suivante est symplectique, pour

$1 \leq j \leq n$  :

$$\begin{pmatrix} x_j \\ -i\bar{x}_j \\ y_j \\ -i\bar{y}_j \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} J_{x,j} = x_j\bar{x}_j \\ \phi_{x,j} = \arg(x_j) \\ J_{y,j} = y_j\bar{y}_j \\ \phi_{y,j} = \arg(y_j) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Les variables  $J_x, J_y, \phi_x, \phi_y$  sont appelées coordonnées polaires symplectiques. Les variables  $J_x, J_y$  sont les actions et les variables  $\phi_x, \phi_y$  les angles.

### 2.1.2 Qu'est-ce qu'on veut au juste ?

On veut démontrer des résultats de stabilité dynamique du système, limiter la part chaotique des trajectoires. Un premier résultat s'obtient très facilement grâce à l'invariance du moment cinétique en considérant le problème non réduit. La norme du moment cinétique, dans le plan invariant est

$$C_z = \sum_{j=1}^n (\Lambda_j - |x_j|^2 - |y_j|^2) = \sum_{j=1}^n (\Lambda_j - J_{x,j} - J_{y,j}) \quad (2.3)$$

Donc chaque action est majorée par  $\sum_{j=1}^n \Lambda_j - C_z = J_{max}$ . On peut en déduire, en l'absence d'une résonance en moyen mouvement, une majoration des excentricités et inclinaisons séculaires :

$$\Lambda_j(1 - \sqrt{1 - e_j^2}) \leq J_{max} \quad \text{et} \quad \Lambda_j\sqrt{1 - e_j^2}(1 - \cos I_j) \leq J_{max} \quad (2.4)$$

D'où

$$e_{j_{max}} = \sqrt{1 - (1 - J_{max}/\Lambda_j)^2} \quad \text{et} \quad I_{j_{max}} = \arccos(1 - J_{max}/(\Lambda_j\sqrt{1 - e_{j_{max}}^2})) \quad (2.5)$$

A titre d'exemple, on trouve comme majoration des excentricités et inclinaisons de Jupiter (planète 1) et Saturne (planète 2) dans le problème SJS :

$$e_{1_{max}} \simeq 0,0605 \quad e_{2_{max}} \simeq 0,0948 \quad i_{1_{max}} \simeq 3.47^\circ \quad i_{2_{max}} \simeq 5.45^\circ \quad (2.6)$$

ce qui empêche d'avoir une collision entre les planètes pour le système séculaire car on a  $a_1(1+e_{1_{max}}) < a_2(1-e_{2_{max}})$ . Mais cette assurance que ce système ne produira pas de collisions ne donne aucun renseignement sur la dynamique, chaotique ou prévisible, du système. On va essayer d'obtenir des résultats de stabilité près du point fixe elliptique ( $x = y = 0$ ). C'est-à-dire, en pratique, de pouvoir borner la diffusion des variations des actions et des angles par rapport à une solution quasi-périodique ou, si ce n'est pas possible, au moins de borner la diffusion des actions par rapport à un tore fixé ( $J_x = J_x(0)$  et  $J_y = J_y(0)$ ).

Le hamiltonien  $h_0$  du problème se développe en une série

$$h_0 = H_2 + \sum_{k \geq 2} H_{2k} \quad (2.7)$$

Où  $H_k$  est la partie de  $h_0$  d'ordre  $k$  en les excentricités et inclinaisons. A partir de maintenant, on note  $H = h_0$ . Dans le cas d'un système planétaire, comme on reste dans une zone de l'espace des phases proche du point fixe grâce à des majorations du type (2.5), le terme  $H_2$



à tendance à être supérieur aux autres termes  $H_k$ . C'est de plus en plus vrai à mesure que l'on se rapproche du point fixe elliptique. On va essayer tout d'abord de trouver un nouveau système de variables actions-angles tel que la partie  $H_2$  s'exprime, dans ces nouvelles variables, en fonction des nouvelles actions seulement. De cette manière, on met alors le système sous la forme (1.5) où le hamiltonien  $H_2$  exprimé dans les nouvelles variables joue le rôle de  $H_{int}$ . Cette transformation, appelée diagonalisation du système linéaire est développée dans la section suivante (2.2) où on prouve que  $H_2$  est une application linéaire en les nouvelles variables  $J$ . Les nouvelles variables actions-angles sont notées  $J_j, \phi_j$  pour  $1 \leq j \leq 2n$  et les nouvelles variables cartésiennes associées sont  $z_j, -i\bar{z}_j$ . On définit le domaine suivant :  $\Delta_\rho = \{z \in C^{2n} / \forall 1 \leq j \leq 2n, |z_j| \leq \rho\} = \{z \in C^{2n} / \forall 1 \leq j \leq 2n, |J_j| \leq \sqrt{\rho}\}$ . Le résultat suivant nous donne une indication sur la stabilité du système en établissant une majoration à la diffusion des nouvelles variables action-angle  $J, \phi$  par rapport à la solution quasi-périodique donnée par le seul hamiltonien  $H_2$  diagonalisé, dans un domaine proche du point fixe :

**Lemme 1** *Soient  $\epsilon, t_{max}$  deux réels strictement positifs. Alors, il existe un réel strictement positif  $\rho_0$  tel que si les conditions initiales  $z(0)$  appartiennent à  $\Delta_{\rho_0}$  alors on a, pour  $1 \leq j \leq 2n$  et pour tout  $t$  tel que  $t \leq t_{max}$ ,*

$$|J_j(t)| \leq \rho_0^2(1 + \epsilon) \quad (2.8)$$

$$|\phi_j(t) - [\frac{\partial H_2}{\partial J_j}(J(0)) t + \phi_j(0)]| \leq \epsilon \quad (2.9)$$

**Démonstration 1** On note  $J$  le vecteur de  $R^{2n}$  représentant les nouvelles actions  $J_j$ . Soient  $\epsilon, t_{max}$  deux réels positifs strictement. On définit les fonctions  $M_J : R^+ \rightarrow R^+$  et  $M_\phi : R^+ \rightarrow R^+$  suivantes :

$$M_J(r) = \max_{j=1,2n} \sup_{\Delta_r} \left| \frac{\partial H}{\partial \phi_j} \right| \quad (2.10)$$

$$M_\phi(r) = \max_{j=1,2n} \sup_{\Delta_r} \left| \frac{\partial(H - H_2)}{\partial J_j} \right| \quad (2.11)$$

On a  $\dot{J}_j = \partial H / \partial \phi_j$  et  $\dot{\phi}_j = -\partial H / \partial J_j$ . Comme  $H_2$  ne dépend que des nouvelles actions  $J$ , quand  $J$  tend vers zéro, on a  $\partial H / \partial \phi_j = O(J^2)$  et donc  $M_J(r) = O(r^4)$  quand  $r$  tend vers zéro. D'autre part, comme  $H_2$  est une application linéaire en les variables  $J$ ,  $\partial H_2 / \partial J_j$  est une constante et on a  $\partial(H - H_2) / \partial J_j = O(J)$  quand  $J$  tend vers zéro. Il existe donc un réel strictement positif  $r_0$  tel que si  $r \leq r_0$ , on a  $M_J(r) \leq \min(r^2 / (2t_{max}), \epsilon r^2 / (4t_{max}))$  et  $M_\phi(r) \leq \epsilon / t_{max}$ . On applique alors le théorème des accroissements finis sur le domaine  $\Delta_{r_0}$ . Sur ce domaine on a  $|\dot{J}_j| \leq r_0^2 / (2t_{max})$ . Alors, si  $z(0) \in \Delta_{r_0/2}$ , On a  $|J_j(t)| \leq |J_j(t) - J_j(0)| + |J_j(0)| \leq (r_0^2 t) / (2t_{max}) + r_0^2 / 4$  et donc pour tout  $t$  tel que  $t \leq t_{max}$ , on a  $|J_j(t)| \leq (3/4)r_0^2 \leq r_0^2$ . Alors, en prenant  $\rho_0 = r_0/2$ , si on a  $z(0) \in \Delta_{\rho_0}$ , on a  $|J_j(t) - J_j(0)| \leq \epsilon \rho_0^2$  pour  $t \leq t_{max}$ . Et donc  $|J_j(t)| \leq \rho_0^2(1 + \epsilon)$ . On a  $\dot{\phi}_j - \partial H_2 / \partial J_j(J(0)) = -\partial(H - H_2) / \partial J_j$  ( $\partial H_2 / \partial J_j$  est une constante indépendante de  $J$ ). Donc, sur  $\Delta_{r_0}$ ,  $|\dot{\phi}_j(t) - (\partial H_2 / \partial J_j t + \dot{\phi}_j(0))| \leq \epsilon t / t_{max}$ . Pour  $t \leq t_{max}$ , on a donc  $|\phi_j(t) - (\partial H_2 / \partial J_j t + \phi_j(0))| \leq \epsilon$ .  $\diamond$

Donc, en se restreignant à un domaine suffisamment proche du point fixe elliptique, on arrive à borner la diffusion de notre trajectoire par rapport à une solution quasipériodique sur un temps quelconque mais fini. Cependant, pour le problème SJS, en prenant  $\epsilon = 10^{-2}$  et  $t_{max} = 5$

milliard d'années, le domaine trouvé est très petit (voir l'étude menée à la section 4.1.3). On est donc obligé de construire des variables qui vont avoir une diffusion plus lente pour pouvoir appliquer un théorème ou des majorations utilisant de même le théorème des accroissements finis sur un domaine plus grand, qui contiendra si possible les conditions initiales réelles de Jupiter et Saturne (la fonction  $M(r)$  sera alors beaucoup plus petite). Le premier pas dans cette voie a été d'effectuer la diagonalisation du système linéaire. La variation des actions  $J$  est en effet beaucoup plus faible que la variation des anciennes actions  $J_x$  et  $J_y$  près du point fixe elliptique (On a  $\dot{J} = O(J^2)$  et  $\dot{J}_x, \dot{J}_y = O(J)$  près du point fixe elliptique. L'idéal serait ensuite la construction de nouvelles variables canoniques  $(\tilde{J}_j, \tilde{\phi}_j)$  telles que le hamiltonien dans ces variables ne dépende que des actions (on aurait alors  $M(r) = 0$  pour tout  $r$ ). On aurait un comportement quasi-periodique sur l'ensemble de l'espace des phases et une diffusion nulle sur un temps infini. Comme l'a remarqué H. Poincaré, ce n'est théoriquement pas possible car les séries considérées, définissant les transformations, divergent sur n'importe quel ouvert de l'espace des phases, même très petit et proche du point fixe elliptique (voir Morbidelli, 1994).

Pour avoir un résultat de stabilité en temps infini, il faut appliquer un théorème de type KAM. L'application de ce théorème au problème de trois corps est déjà très difficile et a été réalisée pour le problème SJS par U. Locatelli et A. Giorgilli (Locatelli et Giorgilli, 2000). Un résultat de ce type est très fort et donne un renseignement, géométrique et qualitatif, très important mais sur une partie très restreinte de l'espace de phases (pour chaque valeur des conditions initiales, la mise en oeuvre des méthodes perturbatives liées au théorème KAM varie). Notre étude est plus quantitative, sur un domaine plus grand de l'espace des phases sur lequel on estime la diffusion des variables par rapport à une solution régulière pendant un temps fini mais assez long. De plus, l'étude menée dans (Locatelli et Giorgilli, 2000) ne donne aucun résultat sur la variation des angles : seules les actions sont confinées entre deux tores de l'espace des phases. Notre étude permet de majorer la diffusion des actions et des angles et donc la diffusion des trajectoires de notre problème par rapport à une trajectoire quasipériodique pendant un temps fini.

Dans ce but, on utilise la méthode suivante : même si la construction de la forme normale de Birkhoff ne converge pas, on peut commencer à construire des variables  $\tilde{J}$ , c'est à dire construire une forme normale de Birkhoff jusqu'à un ordre donné. On a alors un système de variables tel que

$$H(J, \phi) = \tilde{N}(\tilde{J}) + \tilde{R}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \quad (2.12)$$

Si  $\tilde{R}$  est suffisamment petit (en pratique  $\tilde{R} = O(\tilde{J}^m)$  près du point fixe elliptique, où  $m$  est un entier aussi grand que possible) sur un domaine de l'espace des phases (par exemple un ensemble du type  $\Delta_\rho$ ), on peut prouver de la même manière que par le lemme (1) que pour toute durée *finie* inférieure à un temps  $t$ , les coordonnées  $(\tilde{J}, \tilde{\phi})$  sont proches de la solution quasipériodique définie par le hamiltonien  $H(J, \phi) = \tilde{N}(\tilde{J})$ . Si  $t$  est de l'ordre de l'âge du système solaire, on obtient ainsi la stabilité effective du système. En fait, on verra qu'en appliquant cette méthode au problème SJS, pour que  $t$  soit de l'ordre de l'âge du système solaire, on doit se restreindre à un plus petit domaine de l'espace des phases où les excentricités et inclinaisons sont plus faibles que celles du système réel. On obtient plus facilement, sur un domaine plus vaste et comprenant les valeurs réelles des conditions initiales de Jupiter-Saturne, une borne à la diffusion des actions  $\tilde{J}$  mais en perdant tout renseignement sur les angles  $\tilde{\phi}$ , on retrouve alors un résultat de confinement du même type que celui de (Locatelli et

Giorgilli, 2000) mais en temps fini. Dans les sections suivantes, on va développer ces méthodes et mettre en évidence l'apparition de problèmes dus aux résonances séculaires.

## 2.2 Diagonalisation et résonances séculaires

### 2.2.1 Cas général de $n$ planètes

Le hamiltonien  $h_0$  est de la forme

$$h_0 = H_2 + \sum_{k \geq 2} H_{2k} \quad (2.13)$$

La première étape de la construction de la forme normale de Birkhoff est la diagonalisation du système linéaire (défini par le hamiltonien  $H_2$  seul). On recherche de nouvelles variables  $z_j$  ( $1 \leq j \leq 2n$ ) (et des variables action-angle  $J_j, \phi_j$  associées) définies par une transformation linéaire des variables de Poincaré séculaires telle que la partie de degré deux du hamiltonien dans les nouvelles variables  $H_{d,2}$  ne dépende que des nouvelles actions  $J_j$ . La partie  $H_2$  du hamiltonien est une forme quadratique en les variables canoniques réelles  $(\xi_j, \eta_j, p_j, q_j)$  définies par la transformation symplectique  $(\xi_j = \sqrt{2} \operatorname{Re}(x_j), \eta_j = -\sqrt{2} \operatorname{Im}(x_j), p_j = \sqrt{2} \operatorname{Re}(y_j)$  et  $q_j = -\sqrt{2} \operatorname{Im}(y_j)$  pour  $1 \leq j \leq n$ ). On peut alors théoriquement diagonaliser cette forme quadratique dans une base symplectique (Robutel, 1993) et prouver que l'origine du problème séculaire est un point fixe elliptique. Toutefois, dans le cas général de  $N$  corps, on n'obtient pas d'expression explicite de cette transformation et la diagonalisation est alors réalisée numériquement. Néanmoins, on peut obtenir certains renseignements sur les valeurs propres du système linéaire. En particulier, on remarque qu'une des valeurs propres du système est nulle ce qui s'explique par l'invariance du moment cinétique. En effet, les composantes du moment cinétique sont, dans les variables de Poincaré séculaires données par les équations (1.12,1.11) et si on considère le problème linéaire (défini par  $H_2$  seul), à l'ordre 1 en  $x, y, C_1$  peut être exprimé comme une relation linéaire entre les variables  $y, C_1^1$  :

$$C_1^1 = \sum_{j=1}^n y_j \sqrt{\Lambda_j} \quad (2.14)$$

La fonction  $\sum_{j=1}^n y_j \sqrt{\Lambda_j}$  est donc une intégrale première pour le problème linéaire. Ce système linéaire a donc une valeur propre nulle. Comme ce système est diagonalisable, si on utilise des nouvelles coordonnées canoniques  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ , définies à partir des coordonnées  $x, y$  par une transformation linéaire orthogonale telle que  $z_{2n}$  soit le vecteur propre

$$z_{2n} = \sum_{j=1}^n y_j \sqrt{\Lambda_j} / \sqrt{\sum_{k=1}^n \Lambda_k} \quad (2.15)$$

et pour lesquelles le problème linéaire est diagonalisé, on a  $\dot{z}_{2n} = 0$ . On note les valeurs propres de ce problème par  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}$  et on fixe donc  $\nu_{2n} = 0$ . Le fait que le problème séculaire (à tout ordre des masses, puisque  $C_1$  garde cette forme pour tout ordre de moyennisation) possède cette fréquence nulle est un résultat bien connu. Une autre relation moins connue,

existe entre les fréquences séculaires, pour la sécularisation à l'ordre 1 du rapport des masses : la relation dite de "trace nulle"  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{2n} = 0$  remarquée par M.Herman (Abdullah et Albouy, 2000). Toutefois cette relation n'est pas, comme la précédente, liée à une intégrale première du problème. En effet, cette relation n'est plus vérifiée si le potentiel newtonien qui est une fonction en  $1/\Delta$  est remplacé par un potentiel en  $1/\Delta^\alpha$  avec  $\alpha \neq 1$  ( $\Delta$  est la distance mutuelle des deux corps s'attirant) alors que, dans ce cas, les intégrales premières liées à la quantité de mouvement et au moment cinétique restent les mêmes. De plus, la relation de trace nulle n'est valable que pour le problème séculaire à l'ordre un du rapport des masses. Néanmoins, pour le problème séculaire à l'ordre un des masses, ces deux relations entre les fréquences sont valables pour toutes valeurs des demi grands axes, des masses ou de la constante d'attraction universelle. Ces deux relations rendent le problème résonant. On va voir qu'elles peuvent empêcher la construction d'une forme normale de Birkhoff. On montrera même que, dans le cas de trois corps, la construction n'est pas possible au degré dix en les variables  $z$ , des termes résonants apparaissant dans la forme normale à ce degré. On a finalement

$$H_{d,2} = \sum_{j=1}^{2n} \nu_j z_j \bar{z}_j \quad (2.16)$$

En effectuant un changement en variables polaires symplectique :  $z_j = \sqrt{J_j} e^{i\phi_j}$ , le hamiltonien s'écrit donc comme

$$H = H_{d,2}(J_1, \dots, J_{2n}) + \sum_{k \geq 2} H_{d,2k}(J, \phi) \quad (2.17)$$

Les variables  $J_j$  sont appelées actions et les variables  $\phi_j$  les angles du système diagonalisé. La dynamique du seul hamiltonien  $H_{d,2}$  est très facile à étudier, les variables  $J_1, \dots, J_{2n}$  sont constantes et les angles  $\phi_j$  ont une variation linéaire. Près du point fixe elliptique, le second terme de (2.17) est pris comme une perturbation du système linéaire : on va essayer de réduire cette perturbation en construisant une forme normale de Birkhoff (section 2.3).

## 2.2.2 Cas de trois corps

Dans le cas de trois corps, on va expliciter cette diagonalisation. La partie de degré deux du hamiltonien s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{2C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} x_1 \bar{x}_2 + \frac{2C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \bar{x}_1 x_2 + \frac{C_3(\alpha)}{\Lambda_1} x_1 \bar{x}_1 + \frac{C_3(\alpha)}{\Lambda_2} x_2 \bar{x}_2 \\ & + \frac{C_3(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} y_1 \bar{y}_2 + \frac{C_3(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \bar{y}_1 y_2 - \frac{C_3(\alpha)}{\Lambda_1} y_1 \bar{y}_1 - \frac{C_3(\alpha)}{\Lambda_2} y_2 \bar{y}_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $\alpha = a_1/a_2$  est le rapport des demi grands axes (constants dans le problème séculaire) et  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes dépendant de ce rapport (Laskar et Robutel, 1995). Les expressions génériques du hamiltonien tronquées au degré quatre sont fournies dans l'annexe E.

$$\begin{cases} C_2(\alpha) = \frac{3}{8} \alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \alpha^2\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ C_3(\alpha) = \frac{1}{4} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \end{cases} \quad (2.19)$$

Où  $b_n^{(k)}$  est le coefficient de Laplace. On recherche alors une transformation canonique linéaire qui diagonaliserait le système linéaire engendré par  $H_2$ . Comme on a

$$H_2 = H_{2,x}(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) + H_{2,y}(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \quad (2.20)$$

on recherche en fait deux transformations linéaires indépendantes qui diagonalisent séparément les variables  $x$  et  $y$ .  $H_{2,x}$  est défini par la forme quadratique suivante :

$$H_{2,x} = (x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_1} & \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \\ 0 & 0 & \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} & \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_2} \\ \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_1} & \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} & 0 & 0 \\ \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} & \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On définit  $A_x$  la matrice  $2 \times 2$  réelle symétrique suivante :

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_1} & \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \\ \frac{C_2(\alpha)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} & \frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ b_x & c_x \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

On recherche donc une matrice  $2 \times 2$  réelle  $M_x$  définissant les nouvelles coordonnées telle que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et telle que le système linéaire, dans les variables  $z_1, z_2$  soit diagonalisé. On a alors, pour les variables conjuguées complexes,  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Pour que ce changement linéaire de variables soit canonique il faut que  $M_x = {}^t M_x^{-1}$  (Laskar, 1989b), donc que  $M_x$  soit une matrice orthogonale. On pose

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

On veut donc que  ${}^t M_x A M_x$  soit diagonale ce qui est vérifié pour

$$\theta_x = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2b_x}{a_x - c_x}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4C_2}{C_3\left(\sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} - \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}\right)}\right) \quad (2.26)$$

Cette expression permet de prouver que la matrice du changement de coordonnées ne dépend que des masses et du rapport des demi-grands axes séculaires. On réalise la transformation  $M_y$  diagonalisant  $H_{2,y}$  d'une manière similaire : les variables  $z_3, z_4$  sont associées aux variables  $y_1, y_2$ . La matrice  $M_y$  (qui ne dépend de même que des masses et du rapport des demi-grands axes séculaires) a une expression simple en fonction de  $\Lambda_1, \Lambda_2$  :

$$M_y = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_2} & \sqrt{\Lambda_1} \\ -\sqrt{\Lambda_1} & \sqrt{\Lambda_2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

On obtient donc, pour le degré deux du hamiltonien, le système diagonalisé,

$$H_{d,2} = \nu_1 z_1 \bar{z}_1 + \nu_2 z_2 \bar{z}_2 + \nu_3 z_3 \bar{z}_3 + \nu_4 z_4 \bar{z}_4 \quad (2.28)$$

Avec les relations suivantes sur les fréquences :

$$\begin{cases} \nu_4 = 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Les nouvelles actions  $J_j$  sont donc constantes si on considère seulement le problème linéaire et ont une diffusion de l'ordre de la valeur des excentricités et inclinaisons à la puissance quatre dans le cas général lorsqu'on est près du point fixe elliptique : elles sont, en première approximation, des intégrales premières du système.

**Remarque 2** Les nouvelles variables  $z_j$  ont une signification physique différente, moins claire que les anciennes variables  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  : elles sont la combinaison linéaire d'excentricités et de longitude du périhélie des deux planètes pour certaines ( $j = 1$  ou  $2$ ) et d'inclinaisons et longitude des noeuds pour les autres ( $j = 3$  ou  $4$ ). Ces variables ont par contre un sens dynamique important et on peut définir des éléments elliptiques dits "propres" qui leur sont associé en se servant des formules définissant les variables de Poincaré (1.7).

## 2.3 Construction de la forme normale, résonances

### 2.3.1 Construction formelle de la forme normale de Birkhoff

Une étude détaillée de cette méthode est fournie dans (Koseleff, 1993). Les notations que l'on va utiliser ne sont toutefois pas tout à fait les mêmes que dans ce travail et sont empruntées aux notes de cours de DEA de J.Laskar. Dans le but d'obtenir des nouvelles variables plus proches d'intégrales premières du système que les variables  $J_1, \dots, J_{2n}$ , on construit degré par degré une forme normale de Birkhoff en partant de la série calculée :  $H_d = \sum_{n \geq 1} H_{d,2n}$  s'exprimant dans les variables  $z_j, \bar{z}_j$ . On cherche à calculer un changement de variable canonique  $(\tilde{z}, \tilde{\bar{z}}) = \phi(z, \bar{z})^1$  tel que  $\tilde{H}$  le nouvel hamiltonien soit la somme de deux parties : une partie  $\tilde{N}$  ne dépendant que des actions  $\tilde{J}$  et un reste qui dépendra de toutes les variables. Pour cela, on construit degré par degré un changement de variables canonique proche de l'identité, défini

---

<sup>1</sup>Par la suite,  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2n})$

par le flot au temps 1 d'un champs de vecteurs issu du hamiltonien  $W$  que l'on va calculer degré par degré. Ce flot  $\tilde{z}(\epsilon)$  est défini par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}}{d\epsilon} = JDW(\tilde{z}, \epsilon) \\ \tilde{z}(0) = z \end{cases} \quad (2.30)$$

Où  $DW$  est la différentielle de la fonction  $W$ . La solution de cette équation donne, pour  $\epsilon = 1$ , les nouvelles variables  $\tilde{z}$  en fonction des anciennes variables  $z$ .

$$\begin{cases} \tilde{z} = T_{(1)}(z) \\ z = T_{(1)}^*(\tilde{z}) \end{cases} \quad (2.31)$$

Où  $T_{(1)}$  et  $T_{(1)}^*$  sont les changements de variables inverses. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} f(\tilde{z}, \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(\tilde{z}, \epsilon) + \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{d\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(\tilde{z}, \epsilon) + \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} JDW(\tilde{z}, \epsilon) \\ &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(\tilde{z}, \epsilon) + \{W, f\}(\tilde{z}, \epsilon) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Et dans le cas d'une fonction  $f$  indépendante de  $\epsilon$ ,

$$\frac{d}{d\epsilon} f(\tilde{z}) = \{W, f\}(\tilde{z}) = [L_W(f)](\tilde{z}) \quad (2.33)$$

On note les opérateurs de changement de variable  $T_{(\epsilon)}$  et  $T_{(\epsilon)}^*$  tels que  $[T_{(\epsilon)}\tilde{f}](z) = \tilde{f} \circ T_{(\epsilon)}(z) = \tilde{f}(\tilde{z})$  et  $[T_{(\epsilon)}^*f](\tilde{z}) = f \circ T_{(\epsilon)}^*(\tilde{z}) = f(z)$ . Les opérateurs  $T_{(\epsilon)}$  et  $T_{(\epsilon)}^*$  sont inverses l'un de l'autre et on a  $T_{(\epsilon)}T_{(\epsilon)}^* = T_{(\epsilon)}^*T_{(\epsilon)} = Id$ . On recherche l'équation différentielle vérifiée par l'opérateur  $T_{(\epsilon)}$  :

$$\frac{d}{d\epsilon}(T_{(\epsilon)}\tilde{f})(z) = \frac{d}{d\epsilon}\tilde{f}(\tilde{z}) = [L_W(\tilde{f})](\tilde{z}) = [L_W(\tilde{f})](T_{(\epsilon)}z) = [T_{(\epsilon)}L_W(\tilde{f})](z) \quad (2.34)$$

Cette relation étant vérifiée pour toute fonction  $\tilde{f}$ , on peut obtenir des relations algébriques sur les opérateurs  $T_{(\epsilon)}$  et  $T_{(\epsilon)}^*$ . On pose  $T_{(\epsilon)} = \sum_{m \geq 0} \epsilon^m T_m$ ,  $T_{(\epsilon)}^* = \sum_{m \geq 0} \epsilon^m T_m^*$  et  $W = \sum_{m \geq 0} \epsilon^m W_{m+1}$ . Les relations algébriques définissant les opérateurs sont les suivantes :

$$\begin{cases} T_m = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m T_{m-q} \circ L_{W_q} \\ T_0 = Id \end{cases} \quad (2.35)$$

Et, d'autre part, en dérivant  $T_{(\epsilon)}T_{(\epsilon)}^* = Id$  on trouve

$$\begin{cases} T_m^* = -\frac{1}{m} \sum_{q=1}^m L_{W_q} \circ T_{m-q}^* \\ T_0^* = Id \end{cases} \quad (2.36)$$

Finalement, on a

$$\tilde{H}(\tilde{z}) = H_d(z) = H_d(T_{(1)}^*(\tilde{z})) = T_{(1)}^* H_d(\tilde{z}) \quad (2.37)$$

On a donc  $\tilde{H} = T_{(1)}^* H_d$  et de même  $H_d = T_{(1)} \tilde{H}$ . La construction de  $W$  se fait degré par degré. On cherche un hamiltonien  $W$  tel que le flot au temps 1 engendré par ce hamiltonien nous donne de nouvelles variables dans lesquelles le hamiltonien  $\tilde{H}$  est plus simple. L'idéal serait d'obtenir un hamiltonien  $\tilde{H}$  intégrable. Le degré 2 étant déjà intégrable, reste inchangé et on a  $\tilde{H}_2(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) = H_{d,2}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}})$ . On a, à chaque degré de normalisation  $m$  ( $m$  pair), l'équation suivante, dite équation homologique :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m &= \sum_{p=0}^{m-2} T_p^*(H_{d,m-p}) = \sum_{p=0}^{m-3} T_p^*(H_{d,m-p}) + T_{m-2}^*(H_{d,2}) = \\ &\sum_{p=0}^{m-3} T_p^*(H_{d,m-p}) - \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{m-2} L_{W_k} \circ T_{m-2-k}^*(H_{d,2}) + \frac{1}{m-2} L_{\tilde{H}_2}(W_{m-2}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

A chaque degré de normalisation  $m$ , on choisit donc un hamiltonien  $W_{m-2}$  qui donnera l'expression du nouvel hamiltonien  $\tilde{H}_m$ . Pour  $m$  impair, les différentes fonction  $H_{d,m}$ ,  $W_m$ ,  $T_m$  et  $\tilde{H}_m$  sont nulles. On note

$$S_m = \sum_{p=0}^{m-3} T_p^*(H_{d,m-p}) - \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{m-2} L_{W_k} \circ T_{m-2-k}^*(H_{d,2}) \quad (2.39)$$

On voudrait obtenir si possible à chaque étape un hamiltonien  $\tilde{H}_m$  nul. Dans ce but, on considèrerait l'équation

$$L_{\tilde{H}_2}(W_{m-2}) = -(m-2) S_m \quad (2.40)$$

et on inverserait l'opérateur  $L_{\tilde{H}_2}$  de manière à obtenir  $W_{m-2}$ . Mais cet opérateur n'est pas inversible. En revanche, il est diagonal dans la base canonique de l'espace vectoriel des polynomes des variables  $(\tilde{z}_j, \bar{\tilde{z}}_j)$ . On a, en effet,

$$L_{\tilde{H}_2} \left( \prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j} \right) = \left[ \sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j \right] \prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j} \quad (2.41)$$

A chaque étape, on est obligé de garder les monômes résonants qui sont dans le noyau de  $L_{\tilde{H}_2}$ , qu'on ne peut éliminer, dans  $\tilde{H}_m$  (la définition d'un monôme résonant est qu'il appartient à  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$ , c'est à dire que  $\sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j = 0$ ). On élimine les autres monômes en construisant  $W_{m-2}$ . Il apparait alors, dans le hamiltonien  $W$  et donc dans le changement de variables, le diviseur non nul  $\sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j$  : si  $S_m = \sum_{k, |k|=m} s_k(\Lambda) \prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j}$  alors on a

$$W_{m-2} = \sum_{k, |k|=m} -i \frac{(m-2) s_k}{\sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j} \prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j} \quad (2.42)$$



### 2.3.2 Résonances

On définit le module  $M(\nu_1, \dots, \nu_n) = \{(k_1, \dots, k_n) \in Z^n / \sum_{j=1}^n k_j \nu_j = 0\}$ . Si  $M(\nu_1, \dots, \nu_n) = \{0\}$ , alors les fréquences sont dites non résonantes. Si  $M(\nu_1, \dots, \nu_n) \neq \{0\}$  alors les fréquences sont dites résonantes. Parmi les monômes qui vont rester dans  $\tilde{H}_m$  après la normalisation au degré  $m$ , on va établir une distinction : certains monômes appartiennent à  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$  quel que soit le module  $M(\nu_1, \dots, \nu_n)$  et même si celui-ci est nul (fréquences non résonantes). Ces monômes sont tels que pour tout  $j$  on a  $k_j - \bar{k}_j = 0$ . On a alors

$$\prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j} = \prod_{j=1}^{2n} (\tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j)^{k_j} = \prod_{j=1}^{2n} \tilde{J}_j^{k_j} \quad (2.43)$$

Ces monômes ne dépendent donc que des actions et les conserver dans la forme normale ne pose pas de problème : ils définissent un hamiltonien intégrable. Comme  $\tilde{z}_{2n}$  est associé à une fréquence nulle ( $\nu_{2n} = 0$ ) (voir section 2.2.1), un de ces monômes dérivé par  $\tilde{z}_{2n}$  ou  $\bar{\tilde{z}}_{2n}$  reste un monôme de  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$ . En effet, par ces dérivations, on ne change dans (2.41) que les valeurs de  $k_{2n}$  ou  $\bar{k}_{2n}$ . On note  $F_I$  le sous-espace vectoriel de tous ces monômes (tels que  $k_j = \bar{k}_j$ ) et de leur dérivée par rapport aux variables  $z_{2n}, \bar{z}_{2n}$  (ceci pour donner un sens aux remarques de la section à venir (2.4)). Comme nous sommes dans le cas  $M(\nu_1, \dots, \nu_n) \neq 0$  à cause des relations de trace nulle et de fréquence nulle (section 2.2.1), il y a d'autres monômes (qui dépendent des angles) dans  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$ , venant des relations entre les fréquences. Leur expression générique est, comme ces monômes doivent vérifier les relations de d'Alembert :

$$\prod_{j=1}^{2n} |\tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j|^{k_j} \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j \right)^{2n-1} \right]^l \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j \right)^{2n-1} \right]^{\bar{l}} \quad (2.44)$$

où  $k_1, \dots, k_{2n}, l, \bar{l}$  sont des entiers et tels que  $l \neq \bar{l}$ . On définit  $F_G$  le sous-espace vectoriel engendré par ces monômes et leur dérivée par rapport à  $\tilde{z}_{2n}$  ou  $\bar{\tilde{z}}_{2n}$ , qui ne dépendent donc pas seulement des actions mais aussi des angles.  $F_I$  et  $F_G$  sont alors inclus dans  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$  et en somme directe. On note alors

$$\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2}) = F_I \oplus F_G \oplus F_O \quad (2.45)$$

où  $F_O$  représente l'espace vectoriel engendré par les autres monômes résonants qui viennent d'autres relations  $k \cdot \nu = 0$  entre les fréquences. Dans tous les cas on peut construire une forme normale résonante, contenant les monômes de  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$  mais le hamiltonien  $\tilde{H}$  dépend alors en général des angles et les méthodes de perturbations mises en oeuvre sont alors moins efficaces (Giorgilli et al., 1989). On va donc essayer de construire une forme normale non résonante. Dans ce cadre, le cas idéal est alors  $F_O = \{0\}$ . Dans ce cas, les seules résonances, inévitables, proviennent de  $F_I$  et  $F_G$ , et il n'existe pas d'autres relations simples entre les fréquences séculaires. On espère alors construire une forme normale non résonante : les termes venant de  $F_I$  ne gênent pas (ils dépendent seulement des actions) et les termes dans  $F_G$  ne sont peut être pas présents dans l'équation homologique. L'objet des études qui vont suivre est de répondre à cette question. La construction de la forme normale se fait pas à pas et, à chaque étape, nécessite une vérification : y-a-t-il des monômes résonants "génants" (qui appartiennent à  $F_G$ ) dans le second membre de l'équation homologique qui empêcheraient la construction d'une forme normale non résonante ? On peut donner facilement un premier résultat :

**Lemme 2** *Le second membre  $S_k$  ne contient pas de monôme résonant de  $F_G$  pour tout  $k$  inférieur strictement à  $4n - 2$  ( $n$  est le nombre de planètes du système). On peut donc construire une forme normale jusqu'au degré  $4n - 3$ .*

**Démonstration 2** Le degré du monôme  $(\prod_{j=1}^{2n-1} \bar{z}_j) z_{2n}^{2n-1}$  ou de son conjugué est égal à  $4n - 2$ . Il n'y a donc pas de monômes de  $F_G$  de degré inférieur à  $4n - 2$  et donc pas de monômes de  $F_G$  dans  $S_m$  pour  $m \leq 4n - 4$ .

A partir du degré  $4n - 2$  (du degré 6 pour trois corps), on doit vérifier si, à chaque étape de normalisation, des monômes résonants de  $F_G$  apparaissent dans le second membre de l'équation homologique. On va, dans la section suivante, proposer une méthode pour tester l'apparition de ces monômes résonants.

**Remarque 3** On a construit, grâce au manipulateur algébrique TRIP, des procédures permettant le calcul effectif des  $W_k$  (par la procédure présentée dans l'annexe C) en partant du hamiltonien ainsi que d'autres procédures permettant de calculer  $T_{(1)}^*(f)$  ou  $T_{(1)}(f)$  pour des fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  données. Une procédure type de calcul des  $W_k$  et du nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$  est donnée dans l'annexe C.

On constate, pour trois corps ( $n = 2$ ), en construisant numériquement cette forme normale grâce aux procédures TRIP, que ces monômes résonants ne sont pas présents dans les seconds membres de degrés quatre (ce qui s'explique par le précédent lemme) mais aussi de degré six et huit ce qui permet de construire une forme normale de degré huit. Ils apparaissent dans l'équation homologique de degré dix empêchant donc la construction d'une forme normale non résonante à cet ordre et aux suivants. Dans les paragraphes suivants, on s'attache à essayer d'expliquer ces faits par une étude plus précise du second membre de l'équation homologique.

## 2.4 Etude du second membre de l'équation homologique

On va, en se servant de l'invariance de l'intégrale  $C_1$ , obtenir des renseignements sur le second membre de l'équation homologique. De la même manière que l'invariance de  $C_z$  empêche des termes d'apparaître dans le second membre de l'équation homologique (relations de d'Alembert), on espère que l'invariance de  $C_1$  va empêcher des monômes de  $F_G$  d'apparaître.

### 2.4.1 Moment cinétique

Les composantes du moment cinétique sont, dans les variables de Poincaré séculaires, données par (1.11,1.12). On exprime ensuite  $C_1$  et  $C_z$  dans les variables diagonalisées  $(z_j, \bar{z}_j)$ . Comme la diagonalisation fait intervenir une transformation orthogonale, l'expression de l'intégrale  $C_z$  est la même dans ces nouvelles variables :

$$C_z = \sum_{j=1}^n \Lambda_j - \sum_{j=1}^{2n} |z_j|^2 \quad (2.46)$$

Par contre, la diagonalisation ne conserve pas la forme de l'intégrale  $C_1$  : on note  $C_1 = \sum_{m \geq 0} C_1^{2m+1}$  où  $C_1^k$  est un polynôme homogène de degré  $k$  en les variables  $(z_j, \bar{z}_j)$ . Les composantes du moment cinétique sont invariantes par le flot du hamiltonien. Donc  $\{H_d, C_1\} = 0$ ,

$\{H_d, \bar{C}_1\} = 0$  et  $\{H_d, C_z\} = 0$ . De ces égalités découlent des contraintes sur les coefficients du hamiltonien. Par exemple, de  $\{H_d, C_z\} = 0$  découlent les relations de d'Alembert qui sont donc toujours valables pour le hamiltonien diagonalisé. On va montrer que les relations venant de  $\{H_d, C_1\} = 0$  et  $\{H_d, \bar{C}_1\} = 0$  permettent en annulant certains monômes du second membre de l'équation homologique d'expliquer le fait que l'on peut construire la forme normale jusqu'au degré  $4n - 2$  et d'obtenir un critère beaucoup plus efficace pour décider de la constructibilité de la forme normale de Birkhoff. La relation  $\{H_d, C_1\} = 0$  est vraie sur tout l'espace des phases et comme  $H_d$  et  $C_1$  sont analytiques, cette égalité est valable degré par degré. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \{H_{d,2}, C_1^1\} = 0 \\ \{H_{d,4}, C_1^1\} + \{H_{d,2}, C_1^3\} = 0 \\ \{H_{d,6}, C_1^1\} + \{H_{d,4}, C_1^3\} + \{H_{d,2}, C_1^5\} = 0 \\ \{H_{d,8}, C_1^1\} + \{H_{d,6}, C_1^3\} + \{H_{d,4}, C_1^5\} + \{H_{d,2}, C_1^7\} = 0 \\ etc \dots \\ \sum_{k=1}^{m/2} \{H_{d,2k}, C_1^{m-2k+1}\} = 0 \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Où  $m$  est un entier naturel pair. Comme  $C_1^1 = c_1 z_{2n}$  où  $c_1$  est une constante, la relation de fréquence nulle s'explique facilement par le fait que  $\{H_{d,2}, C_1^1\} = 0$ .

## 2.4.2 Le second membre de l'équation homologique

On cherche à avoir des renseignements sur le second membre  $S_m$  de degré  $m$  de l'équation homologique (2.39). On utilise l'invariance du moment cinétique et le fait que les opérateurs  $T, T^*$  conservent le crochet de Poisson de deux fonctions :

$$T^* (\{H_d, C_1\}) = \{T^*(H_d), T^*(C_1)\} = 0 \quad (2.48)$$

Pour une série  $f$  des variables  $z$  (respectivement  $\tilde{f}$  en les variables  $\tilde{z}$ ), on définit  $[f]_k$  la partie homogène de degré  $k$  de  $f$  en les variables  $z$  (respectivement  $[\tilde{f}]_k$  en les variables  $\tilde{z}$ ). Si on découpe alors la série  $T^* (\{H_d, C_1\})$  (exprimée dans les nouvelles variables  $\tilde{z}$ ) degré par degré, pour le degré  $m - 1$ , on obtient :

$$\sum_{k=2, k \text{ pair}}^m \{[T^*(H_d)]_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} = 0 \quad (2.49)$$

En remplaçant dans cette égalité, les termes connus on obtient alors, sachant que, au degré  $k$ ,  $\tilde{H}_k = [T^*(H_d)]_k$ , l'égalité suivante qui va nous permettre d'exprimer le second membre de l'équation homologique :

$$\begin{aligned} & \{\tilde{H}_2, [T^*(C_1)]_{m-1}\} + \sum_{k=4, k \text{ pair}}^{m-2} \{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} + \\ & + \{S_m - \frac{1}{m-2} L_{W_{m-2}}(\tilde{H}_2), C_1^1\} = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pour qu'une simplification intervienne, on exprime le premier terme de cette équation par le développement suivant :

$$\begin{aligned}
[T^*(C_1)]_{m-1} &= \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{m-2} T_k^*(C_1^{m-1-k}) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{m-4} T_k^*(C_1^{m-1-k}) - \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{m-2} L_{W_k} \circ T_{m-2-k}^*(C_1^1)}_{R_{m-1}} - \frac{1}{m-2} L_{W_{m-2}}(C_1^1) \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Le terme  $R_{m-1}$  ne dépend que des  $C_1^k$  et des  $W_h$  pour  $h \leq m-3$ . Il ne dépend donc pas de  $W_{m-2}$ . En utilisant (2.50), on obtient donc l'équation suivante, vérifiée par le second membre de l'équation homologique :

$$\begin{aligned}
\{C_1^1, S_m\} &= \sum_{k=4, k \text{ pair}}^{m-2} \{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} \\
&+ \{\tilde{H}_2, R_{m-1}\} - \frac{1}{m-2} \{\tilde{H}_2, \{W_{m-2}, C_1^1\}\} - \frac{1}{m-2} \{\{W_{m-2}, \tilde{H}_2\}, C_1^1\} \quad (2.52)
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Jacobi et le fait que  $\{\tilde{H}_2, C_1^1\} = 0$  (2.47), on obtient  $\{\tilde{H}_2, \{W_{m-2}, C_1^1\}\} + \{\{W_{m-2}, \tilde{H}_2\}, C_1^1\} = \{W_{m-2}, \{\tilde{H}_2, C_1^1\}\} = 0$ . On obtient finalement l'égalité fondamentale suivante :

$$\{C_1^1, S_m\} = \sum_{k=4, k \text{ pair}}^{m-2} \{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} + \{\tilde{H}_2, R_{m-1}\} \quad (2.53)$$

Cette égalité donne des renseignements sur le second membre de l'équation homologique pour le degré  $m$  et elle ne fait pas intervenir  $W_{m-2}$ . On a le même type d'égalité en remplaçant  $C_1$  par  $\bar{C}_1$ . C'est-à-dire qu'on a le même type d'égalité avec les  $\bar{C}_1^m$ . On rappelle d'autre part que, comme  $C_1^1 = c_1 z_{2n}$  dans les coordonnées issues de la diagonalisation, alors

$$\begin{cases} \{C_1^1, S_m\} = c_1 \frac{\partial S_m}{\partial \bar{z}_{2n}} \\ \{\bar{C}_1^1, S_m\} = c_1 \frac{\partial S_m}{\partial z_{2n}} \end{cases} \quad (2.54)$$

Si il y a des monômes résonants de  $F_G$  dans  $S_m$  alors ils apparaissent dans  $\{C_1^1, S_m\}$  sous la forme de dérivées de

$$\prod_{j=1}^{2n} |z_j \bar{z}_j|^{k_j} \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} z_j \right) \bar{z}_{2n}^{2n-1} \right]^l \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \bar{z}_j \right) z_{2n}^{2n-1} \right]^{\bar{l}} \quad (2.55)$$

par rapport à  $\bar{z}_{2n}$ . Cette remarque légitime les définitions de  $F_I$  et  $F_G$  incluant les dérivées des monômes par rapport à  $z_{2n}$  ou  $\bar{z}_{2n}$  (voir section 2.3). On se sert de la relation fondamentale précédente (2.53) pour tester si il y a des monômes résonants appartenant à  $F_G$  dans le second membre et donc pour déterminer la constructibilité d'une forme normale non résonante degré par degré.

### 2.4.3 Considérations générales sur les termes de $\{C_1^1, S_m\}$

le terme  $\{\tilde{H}_2, R_{m-1}\}$

**Lemme 3** *Pour tout  $m$  entier pair et non nul,  $\{\tilde{H}_2, R_{m-1}\}$  ne contient pas de monômes de  $F_G$ .*

**Démonstration 3** Comme l'opérateur  $L_{\tilde{H}_2}$  est diagonal, si un monôme de  $\{\tilde{H}_2, R_{m-1}\}$  appartient à  $F_G$ , il vient d'un même monôme dans  $R_{m-1}$  mais le crochet de Poisson de ce monôme de  $R_{m-1}$  par  $\tilde{H}_2$  est nul car ce monôme appartient à  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$  ( $F_G$  est inclu dans  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$ ). Il n'y a donc pas de monômes résonants dans  $\{\tilde{H}_2, R_{m-1}\}$ .  $\diamond$

le terme générique  $\{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_h\}$

**Lemme 4** *Si, pour  $h$  un entier impair  $[T^*(C_1)]_h$  contient des monômes de  $F_G$  alors pour tout  $k$  entier pair et non nul,  $\{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_h\}$  en contient. Réciproquement si  $[T^*(C_1)]_h$  ne contient pas de monômes de  $F_G$  alors  $\{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_h\}$  non plus.*

**Démonstration 4** Les sous espaces vectoriels  $F_I$  et  $F_G$  sont stables par l'application linéaire  $L_{\tilde{H}_k}$ . En effet, exprimés dans les coordonnées polaire symplectiques  $(\tilde{J}_j, \tilde{\phi}_j)$ ,  $\tilde{H}_k$  ne dépend que des coordonnées  $\tilde{J}_j$ . Donc, pour un polynôme  $P$  en les variables  $\tilde{z}$ ,

$$\{\tilde{H}_k, P\} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial \tilde{J}_j} \frac{\partial P}{\partial \tilde{\phi}_j} \quad (2.56)$$

Et  $\partial P / \partial \tilde{\phi}_j$  contient les même monômes que  $P$  (sauf les monômes ne dépendant que des actions  $\tilde{J}$ ) et  $\partial \tilde{H}_k / \partial \tilde{J}_j$  ne dépend que des variables  $\tilde{J}$ . Plus précisément,  $F_I \subset \text{Ker}(L_{\tilde{H}_k})$  et si un monôme de  $F_G$  est dans  $P$ , alors il se retrouve dans  $\partial P / \partial \tilde{\phi}_j$ , multiplié par un polynôme ne dépendant que des actions et il donne donc des monômes résonants dans  $\{\tilde{H}_k, P\}$ . De plus, la reciproque est vraie : si un monôme de  $F_G$  est présent dans  $\{\tilde{H}_k, P\}$  alors il y avait un monôme de  $F_G$  dans  $P$ .  $\diamond$

Par ce lemme, il suffit d'étudier les termes  $[T^*(C_1)]_h$ . Si  $h$  est le premier entier pour lequel  $[T^*(C_1)]_h$  contient des monômes de  $F_G$  alors  $\{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_h\}$  en contient aussi. De manière à savoir si des termes résonants apparaissent, on cherche à expliciter le terme  $[T^*(C_1)]_m$  :

$$\begin{aligned} [T^*(C_1)]_m &= \sum_{k=0}^{m-1} T^*_k(C_1)_{m-k} \\ &= C_1^m + \sum_{k=1}^{m-2} T^*_k(C_1^{m-k}) - \frac{1}{m-1} \sum_{q=1}^{m-2} L_{W_q} \circ T^*_{m-1-q}(C_1^1) - \frac{1}{m-1} \{W_m, C_1^1\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Parmi les termes de  $[T^*(C_1)]_m$  on peut montrer facilement que certains ne contiennent pas de termes résonants appartenant à  $F_G$ .

**Le terme  $C_1^m$  :**

**Lemme 5** *Pour tout  $m$ ,  $C_1^m$  ne contient pas de monômes résonants de  $F_G$ .*

**Démonstration 5** Les monômes des  $C_1^m$ , dans les variables non diagonalisées sont du type  $y_j |x_j|^{2k_x} |y_j|^{2k_y}$  (où  $j, k_x, k_y$  sont des entiers). Après diagonalisation, ces monômes donnent des monômes du type  $\prod_{j=1}^{2n} z_j^{m_j} \bar{z}_j^{\bar{m}_j}$  avec des relations particulières pour les exposants  $(m_j, \bar{m}_j)$ . En effet, la diagonalisation opère séparément sur les variables  $x$  et  $y$  et on note  $z_1, \dots, z_n$  les variables venant de la diagonalisation des variables  $x$  et  $z_{n+1}, \dots, z_{2n}$  celles venant des  $y$ . Donc  $\sum_{j=1}^n m_j = k_x$  et  $\sum_{j=1}^n \bar{m}_j = k_x$ . Or le monome générique résonant de  $F_G$  de degré impair est de la forme

$$\prod_{j=1}^{2n} |z_j \bar{z}_j|^{k_j} \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} z_j \right) \bar{z}_{2n}^{2n-1} \right]^l \left[ \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \bar{z}_j \right) z_{2n}^{2n-1} \right]^{\bar{l}} / \bar{z}_{2n} \quad (2.58)$$

Si on l'écrit sous la forme  $\prod_{j=1}^{2n} z_j^{m_j} \bar{z}_j^{\bar{m}_j}$  cela donne les relations  $\sum_{j=1}^n m_j = \sum_{j=1}^n k_j + nl$  et  $\sum_{j=1}^n \bar{m}_j = \sum_{j=1}^n k_j + n\bar{l}$ . Comme un monôme de  $C_1^m$  est forcément tel que  $\sum_{j=1}^n m_j = \sum_{j=1}^n \bar{m}_j$  alors on en déduit que  $l = \bar{l}$  donc que les monômes résonants de  $C_1^m$  sont dans  $F_I$ .  $\diamond$

**Le terme  $\{W_m, C_1^1\}$  :**

**Lemme 6** *Pour tout  $m$ ,  $\{W_m, C_1^1\}$  ne contient pas de monômes résonants de  $F_G$ .*

**Démonstration 6** Par construction, il n'y a pas de monômes résonants dans les  $W_m$  qui ne contiennent que des monômes qui ne sont pas dans  $\text{Ker}(L_{H_2})$ .  $\diamond$

## Conclusion

On se limite à l'étude de la série  $[T^*(C_1)]_m$ , degré par degré. C'est en effet le terme  $\{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_m\}$  qui donnera le premier terme résonant de  $F_G$  s'il y en a un dans un second membre de l'équation homologique. Par suite, l'entier  $m$  pour lequel un terme résonant de  $F_G$  apparaît dans  $[T^*(C_1)]_m$  donne donc directement le degré maximum de construction de la forme normale : on peut construire la forme normale jusqu'au degré  $m + 1$ .

En particulier, il ne peut y avoir de termes résonants de  $F_G$  dans  $[T^*(C_1)]_h$  qu'à partir de  $h = 4n - 3$  (même remarque que dans la section 2.3). De cette remarque, on en déduit que l'on peut toujours construire la forme normale jusqu'au degré  $4n - 2$ , le premier terme résonant ne pouvant apparaître que dans  $\{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_{4n-3}\}$  donc dans  $S_{4n}$ .

## 2.5 Application à la construction de la forme normale dans le cas de trois corps

### 2.5.1 Au degré quatre

Pour le degré quatre, il n'y a pas de monômes vérifiant les relations de d'Alembert qui sont dans  $F_G$  : les monômes  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3$  et  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3$  sont déjà de degré 6. On peut donc construire la forme normale de degré quatre sans problème.

## 2.5.2 Au degré six

Au degré six par contre il y a deux monômes résonants de  $F_G$  possibles :  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3$  et  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3$ . Le second membre de degré six  $S_6$  contient ces termes si et seulement si  $\partial S_6 / \partial z_4$  ou  $\partial S_6 / \partial \bar{z}_4$  contient respectivement les termes  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^2$  et  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2$ .

$$\{C_1, S_6\} = \{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_3\} + \{\tilde{H}_2, R_5\} \quad (2.59)$$

Grâce aux remarques du paragraphe (2.4.3), aucun monôme résonant de  $F_G$  n'est présent dans le second membre. On peut donc construire la forme normale au degré six.

## 2.5.3 Au degré huit

Au degré huit les choses sont un peu plus compliquées et surtout le fait qu'il n'y ait pas de monôme résonant de  $F_G$  dans le second membre provient d'une suite de "coincidences". Les huit monômes résonants possibles sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_1|^2 z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3, \quad |z_1|^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3, \\ |z_2|^2 z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3, \quad |z_2|^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3, \\ |z_3|^2 z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3, \quad |z_3|^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3, \\ |z_4|^2 z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^3, \quad |z_4|^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^3. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

La relation sur le second membre s'écrit :

$$\{C_1, S_8\} = \{\tilde{H}_6, [T^*(C_1)]_3\} + \{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_5\} + \{\tilde{H}_2, R_7\} \quad (2.61)$$

Grâce aux remarques du paragraphe (2.4.3), aucun monôme résonant n'est présent dans  $\{\tilde{H}_6, [T^*(C)]_3\}$  et  $\{\tilde{H}_2, R_7\}$ . Il reste le terme  $\{\tilde{H}_4, [T^*(C)]_5\}$  et grâce aux remarques précédentes, il reste à étudier le terme  $[T^*(C)]_5$ . On vérifie numériquement, grâce à TRIP, que  $[T^*(C)]_5$  ne contient pas de modules résonants gênants. Si on vérifie rigoureusement que  $[T^*(C)]_5$  ne contient pas de monômes résonant (de la forme  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^2$  ou  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2$ ) alors  $S_8$  n'en contiendra pas. On a

$$\begin{aligned} [T^*(C)]_5 &= T^*_4(C_1^1) + T^*_2(C_1^3) + T^*_0(C_1^5) \\ &= \frac{1}{8}\{W_2, \{W_2, C_1^1\}\} - \frac{1}{4}\{W_4, C_1^1\} - \frac{1}{2}\{W_2, C_1^3\} + C_1^5 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Montrons qu'aucun de ces termes ne contient le monôme résonant  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^2$ . D'après les remarques du paragraphe précédent, les termes  $C_1^5$  et  $\{W_4, C_1^1\}$  ne contiennent pas ces termes résonants.

**Les termes  $\{W_2, C_3\}$  et  $\{W_2, \{W_2, C_1\}\}$  :**

Pour ces deux termes, on utilise le manipulateur algébrique TRIP : On va prouver grâce à un calcul formel, que les deux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \{H_{d,2}, C_1^1\} = 0 \\ \{H_{d,4}, C_1^1\} + \{H_{d,2}, C_1^3\} = 0 \end{array} \right. \quad (2.63)$$

suffisent à prouver qu'il n'y a pas de termes résonants dans  $\{W_2, C_1^3\}$  et  $\{W_2, \{W_2, C_1^1\}\}$ . On commence par définir un hamiltonien réel "générique"  $H_d = H_{d,2} + H_{d,4}$  en les variables diagonalisées  $(z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$  qui satisfait les relations de d'Alembert et la parité en les variables d'inclinaisons et tel que  $H_{d,2}$  soit diagonalisé et contienne une fréquence nulle. Les expressions génériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
H_{d,2} &= H_{2,1} z_1 \bar{z}_1 + H_{2,2} z_2 \bar{z}_2 + H_{2,3} z_3 \bar{z}_3 & (2.64) \\
H_{d,4} &= H_{4,1} z_2^2 \bar{z}_2^2 + H_{4,17} (\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3 z_4 + z_1 z_2 \bar{z}_3 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,2} (z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + z_1 z_2 \bar{z}_2^2) + H_{4,18} (\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3^2 + z_1 z_2 \bar{z}_3^2) \\
&+ H_{4,3} (z_2^2 \bar{z}_1^2 + z_1^2 \bar{z}_2^2) + H_{4,19} (\bar{z}_1^2 z_4^2 + z_1^2 \bar{z}_4^2) \\
&+ H_{4,4} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + H_{4,20} (\bar{z}_1^2 z_3 z_4 + z_1^2 \bar{z}_3 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,5} (z_1 z_2 \bar{z}_1^2 + z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2) + H_{4,21} (\bar{z}_1^2 z_3^2 + z_1^2 \bar{z}_3^2) \\
&+ H_{4,6} z_1^2 \bar{z}_1^2 + H_{4,22} z_2 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_3 \\
&+ H_{4,7} z_4^2 \bar{z}_4^2 + H_{4,23} (z_2 \bar{z}_1 z_3 \bar{z}_3 + z_1 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_3) \\
&+ H_{4,8} (z_4^2 \bar{z}_3 \bar{z}_4 + z_3 z_4 \bar{z}_4^2) + H_{4,24} z_1 \bar{z}_1 z_3 \bar{z}_3 \\
&+ H_{4,9} (z_4^2 \bar{z}_3^2 + z_3^2 \bar{z}_4^2) + H_{4,25} z_2 \bar{z}_2 z_4 \bar{z}_4 \\
&+ H_{4,10} z_3 z_4 \bar{z}_3 \bar{z}_4 + H_{4,26} (z_2 \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_4 + z_1 \bar{z}_2 z_4 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,11} (z_3 z_4 \bar{z}_3^2 + z_3^2 \bar{z}_3 \bar{z}_4) + H_{4,27} z_1 \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_4 \\
&+ H_{4,12} z_3^2 \bar{z}_3^2 + H_{4,28} (z_2 \bar{z}_2 z_4 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,13} (\bar{z}_2^2 z_4^2 + z_2^2 \bar{z}_4^2) + H_{4,29} (z_2 \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_3 + z_1 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,14} (\bar{z}_2^2 z_3 z_4 + z_2^2 \bar{z}_3 \bar{z}_4) + H_{4,30} (z_2 \bar{z}_1 z_3 \bar{z}_4 + z_1 \bar{z}_2 z_4 \bar{z}_3) \\
&+ H_{4,15} (\bar{z}_2^2 z_3^2 + z_2^2 \bar{z}_3^2) + H_{4,31} (z_1 \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_3 + z_1 \bar{z}_1 z_3 \bar{z}_4) \\
&+ H_{4,16} (\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_4^2 + z_1 z_2 \bar{z}_4^2)
\end{aligned}$$

Ensuite, on définit l'expression générique du moment cinétique dans les variables diagonalisées (en tenant compte de la forme (1.12) du moment cinétique dans les variables non diagonalisées) :

$$\begin{aligned}
C_1^1 &= C_{1,1} z_4 & (2.65) \\
C_1^3 &= C_{3,1} z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_3 + C_{3,8} z_4 \bar{z}_3 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,2} z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + C_{3,9} z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,3} z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_3 + C_{3,10} z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,4} z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + C_{3,11} z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,5} z_3 \bar{z}_3^2 + C_{3,12} z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,6} z_3 \bar{z}_3 \bar{z}_4 + C_{3,13} z_4 \bar{z}_3 \bar{z}_4 \\
&+ C_{3,7} z_4 \bar{z}_3^2 + C_{3,14} z_4 \bar{z}_4^2
\end{aligned} \tag{2.66}$$

On calcule alors l'expression de  $W_2$  en fonction des variables  $H_{k,l}$  et des diviseurs formels  $D_{n_1, n_2, n_3} = n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + n_3 \nu_3$  puis l'expression des coefficients du monôme résonant  $z_1 z_2 z_3 \bar{z}_4^2$ , notés  $A_1$  et  $A_2$ , respectivement dans  $\{W_2, C_1^3\}$  et  $\{W_2, \{W_2, C_1^1\}\}$ .

$$\begin{aligned}
A_1 &= -4 C_{3,13} H_{4,17} D_{1,1,-1} \\
&+ 2 C_{3,12} H_{4,18} D_{1,1,-2} \\
&+ 4 C_{3,11} H_{4,21} D_{2,0,-2} \\
&+ 4 C_{3,10} H_{4,15} D_{0,2,-2} \\
&+ 2 C_{3,9} H_{4,18} D_{1,1,-2} \\
&- 4 C_{3,7} H_{4,18} D_{1,1,-2}
\end{aligned} \tag{2.67}$$



$$\begin{aligned}
A_2 &= C_{1,1} ( \\
&- 8 \quad H_{4,21} \ H_{4,29} \ D_{-1,1,-1} \ D_{2,0,-2} \\
&- 4 \quad H_{4,18} \ H_{4,31} \ D_{0,0,-1} \ D_{1,1,-2} \\
&- 4 \quad H_{4,18} \ H_{4,28} \ D_{0,0,-1} \ D_{1,1,-2} \\
&- 8 \quad H_{4,15} \ H_{4,30} \ D_{0,2,-2} \ D_{1,-1,-1} \\
&- 8 \quad H_{4,11} \ H_{4,18} \ D_{0,0,-1} \ D_{1,1,-2} \\
&- 8 \quad H_{4,9} \ H_{4,17} \ D_{0,0,-2} \ D_{1,1,-1} )
\end{aligned} \tag{2.68}$$

On se sert ensuite de la relation  $\{H_{d,4}, C_1^1\} + \{H_{d,2}, C_1^3\} = 0$  : en la calculant explicitement, on obtient, entre autre, l'annulation des coefficients suivants de  $H_4$  dans les variables du système diagonalisé :

$$\begin{aligned}
&H_{4,8} = H_{4,11} = H_{4,14} = H_{4,15} = H_{4,17} = \\
&= H_{4,18} = H_{4,20} = H_{4,21} = H_{4,28} = H_{4,31} = 0
\end{aligned} \tag{2.69}$$

L'annulation de ces coefficients explique l'annulation de  $A_1$  et  $A_2$ . On obtient de même l'annulation des coefficients de  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2$  grâce à la relation  $\{H_{d,4}, \bar{C}_1^1\} + \{H_{d,2}, \bar{C}_1^3\} = 0$ . Il n'y a pas de monômes résonants gênants dans ces deux termes et ceci grâce à la seule relation  $\{H_d, C_1\} = 0$ .

### Conclusion :

On peut donc construire la forme normale au degré huit. Ceci grâce à l'invariance de la direction du moment cinétique seule. L'intérêt de la méthode présentée est de grandement simplifier les calculs. En effet, si on avait regardé le second membre brut de degré huit donné par son expression (2.39), il aurait fallu étudier tous les termes le donnant, ce qui fait intervenir les polynômes  $H_2, H_4, H_6, H_8, W_2, W_4$  et  $W_6$ . Ici on n'étudie une expression dépendant des séries, de tailles beaucoup plus petites,  $H_2, H_4, W_2, C_1^1$  et  $C_1^3$ . Cette méthode va nous permettre, de même, de prouver rigoureusement qu'il y a des termes résonants de  $F_G$  dans le second membre de l'équation homologique de degré dix.

### 2.5.4 Au degré dix

La relation sur le second membre s'écrit :

$$\{C_1, S_{10}\} = \{\tilde{H}_8, [T^*(C_1)]_3\} + \{\tilde{H}_6, [T^*(C_1)]_5\} + \{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_7\} + \{\tilde{H}_2, R_9\} \tag{2.70}$$

Grâce aux deux remarques du paragraphe (4.3), aucun monôme résonant de  $F_G$  n'est présent dans  $\{\tilde{H}_8, [T^*(C_1)]_3\}$  et  $\{\tilde{H}_2, R_9\}$ . De même, grâce aux constatations du paragraphe précédent,  $\{\tilde{H}_6, [T^*(C_1)]_5\}$  ne contient pas de termes résonants de  $F_G$ . Donc, dans  $S_{10}$ , seul le terme  $\{\tilde{H}_4, [T^*(C_1)]_7\}$  peut contenir des termes résonants de  $F_G$  et on concentre l'étude sur  $[T^*(C_1)]_7$ . On a tout d'abord vérifié numériquement avec TRIP qu'en effet  $[T^*(C_1)]_7$  en contient. Un calcul formel plus rigoureux a été ensuite mené pour arriver à montrer que dans  $[T^*(C_1)]_7$  le coefficient du monôme résonant  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2 |z_3|^2$  appartenant à  $F_G$  n'est pas nul en général. On a calculé explicitement ce coefficient par une méthode de calcul formel qui donne celui-ci comme une série des masses et des demi-grands axe des planètes. Pour le calcul de cette série, on a d'abord calculé les parties  $H_2, H_4$  et  $H_6$  du hamiltonien en fonction des variables de Poincaré

$(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, y_1, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_2)$  du rapport des demi-grands axes  $\alpha$ , des paramètres  $\sqrt{\Lambda_1}$  et  $\sqrt{\Lambda_2}$  et des coefficients de Laplace  $(b_{3/2}^{(0)}, b_{3/2}^{(1)})$  pour  $H_2$ ,  $(b_{5/2}^{(0)}, b_{5/2}^{(1)})$  pour  $H_4$  et  $(b_{7/2}^{(0)}, b_{7/2}^{(1)})$  pour  $H_6$  (en accord avec l'article (Laskar et Robutel, 1995) qui fournit le degré optimal  $k$  du choix des coefficients de Laplace  $b_{k/2}^{(l)}$  pour exprimer la série  $H_m$  avec le moins de termes possibles). Les termes de cette série ont alors des coefficients rationnels ce qui permet de réaliser un calcul de façon rigoureuse. On diagonalise alors le hamiltonien ce qui fait intervenir les paramètres  $c_\theta = \cos(\theta_x)$ ,  $s_\theta = \sin(\theta_x)$  et  $\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}$  (voir section 2.2.2). Lors de la construction de la forme normale (construction de  $W_2$  et  $W_4$ ), on fait apparaître les diviseurs sous forme formelle :  $D_{k_1, k_2} = (k_1\nu_1 + k_2\nu_2)^{-1}$  (comme  $\nu_3 = -\nu_1 - \nu_2$ , on peut exprimer tout diviseur à l'aide d'un  $D_{k_1, k_2} : (m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + m_3\nu_3)^{-1} = ((m_1 - m_3)\nu_1 + (m_2 - m_3)\nu_2)^{-1} = D_{m_1 - m_3, m_2 - m_3}$ ). On a besoin des diviseurs suivants :  $D_{0,1}, D_{0,2}, D_{1,-3}, D_{1,-1}, D_{1,0}, D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,5}, D_{2,0}, D_{2,1}, D_{2,2}, D_{3,-1}, D_{3,1}, D_{3,5}, D_{5,1}, D_{5,3}$  pour exprimer  $W_2$  et  $W_4$ . Pour la série représentant le coefficient du terme résonant  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2 |z_3|^2$  dans  $[T^*(C_1)]_7$ , on a finalement besoin de 15 coefficients dépendant des demi-grands axes séculaires et des masses du système. Cette série contient plus de 5000 termes. La figure suivante (figure 2.1) montre la valeur de cette série en fonction du rapport des demi grands axes pour le cas des masses du système SJS.

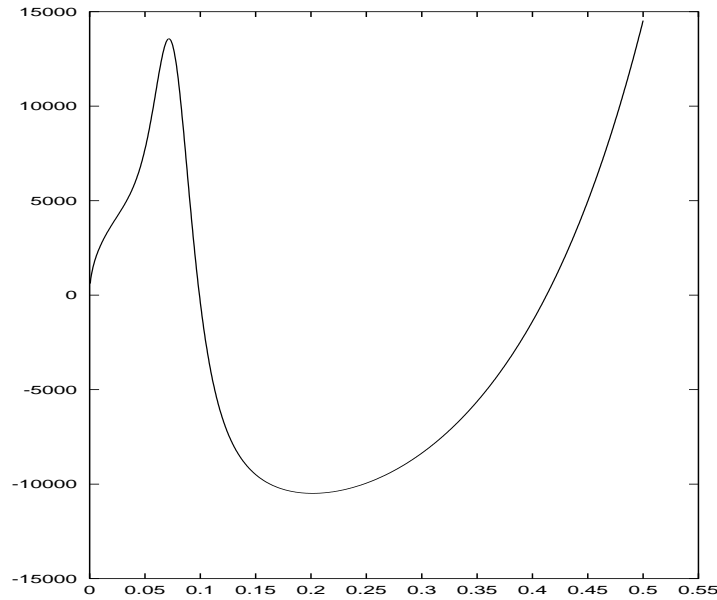


FIG. 2.1: valeur du logarithme décimal du coefficient du monôme  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4^2 |z_3|^2$  dans  $[T^*(C)]_7$  en fonction du rapport  $\alpha$  des demi-grands axes (les masses du système sont fixées et le demi grand axe de Saturne aussi, on ne fait varier que la demi grand axe de Jupiter).

On voit donc que ce coefficient n'est en général pas nul sur le domaine de variation de  $\alpha$  séculaire pour le problème SJS. Le developpement asymptotique de ce coefficient quand  $\alpha$  tend vers zéro est

$$\frac{5}{24} \frac{\beta_2 \sqrt{\mu_2}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_2}^5} \sqrt{\alpha} + o(\sqrt{\alpha}) \quad (2.71)$$

On ne peut pas, en général, construire une forme normale de Birkhoff au degré dix et aux suivants.

## 2.5.5 Conclusions

La preuve fournie pour démontrer la constructibilité de la forme normale de Birkhoff jusqu'au degré 8 est assez alambiquée et provient plutôt d'un hasard : du fait que la relation  $\{H_{d,4}, C_1^1\} + \{H_{d,2}, C_1^3\} = 0$  est vérifiée, on a l'annulation de plusieurs coefficients de monômes de  $H_{d,4}$ . Le résultat le plus important est d'avoir montré que la construction de la forme normale ne coulait pas de source et qu'elle est en général impossible pour le degré 10.

## 2.6 Remarques

### 2.6.1 Cas d'une sécularisation à un ordre plus élevé

Si on considère le problème sécularisé à un ordre supérieur du rapport des masses, la relation de trace nulle n'est plus vérifiée. Les termes  $\prod_{j=1}^{2n} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j}$  du second membre de l'équation homologique donnant un diviseur  $\sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j$  nul à cause de la seule relation restante, la fréquence nulle, sont alors tel que :  $k_j - \bar{k}_j = 0$  pour  $1 \leq j \leq 2n - 1$ . Comme ces termes vérifient les relations de d'Alembert, on a  $\sum_{j=1}^{2n} (k_j - \bar{k}_j) = 0$  donc  $k_{2n} - \bar{k}_{2n} = 0$ . Pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq 2n$  on alors  $k_j = \bar{k}_j$  et les seuls monômes apparaissant dans le second membre de l'équation homologique sont des termes de  $F_I$ . Dans le cas d'une sécularisation à un ordre plus élevé on peut donc construire en général la forme normale de Birkhoff à tout ordre.

### 2.6.2 Construction de la forme normale de Birkhoff et réduction simultanée

Supposons que l'on ne peut construire la forme normale de Birkhoff que jusqu'au degré  $N$  pair. Ceci est équivalent à dire qu'il n'y a pas de termes résonants de  $F_G$  dans  $[T^*(C_1)]_k$  pour tout  $k \leq N - 3$  et qu'il y a des termes résonants de  $F_G$  dans  $[T^*(C_1)]_{N-1}$ . Dans ce cas,  $\tilde{H}_m$  ne contient que des monômes de  $F_I$  pour  $m \leq N$  et ne dépend donc que des variables d'action  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \dots, \tilde{J}_{2n}$ .

**Proposition 1** *Pour tout  $m \leq N$ ,  $\tilde{H}_m$  ne dépend pas de la variable  $\tilde{J}_{2n}$ .*

**Démonstration 1** On va démontrer cette propriété par récurrence. On fait l'hypothèse de récurrence suivante (au rang  $m$ ) :  $[T^*(C_1)]_{m-3} \in F_I$  et  $\tilde{H}_{m-2}$  ne dépend pas de la variable  $\tilde{J}_{2n}$ . Cette hypothèse est vérifiée pour  $m = 4$ . En effet,  $\tilde{H}_2$  ne dépend pas de  $\tilde{J}_{2n}$  car la fréquence  $\nu_{2n}$  est nulle. De plus  $[T^*(C_1)]_1 = c_1 z_{2n}$  et donc  $[T^*(C_1)]_1 \in F_I$ . Supposons-la vérifiée à tout ordre, de 4 jusqu'à  $m \geq 4$ . On considère l'équation (2.53) :

$$\{C_1^1, S_m\} = \{\tilde{H}_2, R_{m-1}\} + \sum_{k=4, k \text{ pair}}^{m-2} \{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} \quad (2.72)$$

Dans l'égalité précédente, on a les termes  $\{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} = 0$  grâce à l'hypothèse de récurrence. En effet,  $\tilde{H}_k$  dépend des variables  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \dots, \tilde{J}_{2n-1}$  et  $[T^*(C_1)]_{m-k+1}$  des variables  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \dots, \tilde{J}_{2n-1}, \tilde{z}_{2n}, \tilde{\bar{z}}_{2n}$  et leur crochet de Poisson est donc nul. On a donc

$$\{C_1^1, S_m\} = \{\tilde{H}_2, R_{m-1}\} \quad (2.73)$$

Comme  $\{\tilde{H}_2, R_{m-1}\}$  ne contient pas de termes de  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2})$ ,  $\partial S_m / \partial \tilde{\bar{z}}_{2n}$  ne contient pas de termes de  $F_I$ . Donc  $\partial \tilde{H}_m / \partial \tilde{\bar{z}}_{2n}$  ne contient pas de termes de  $F_I$ . Comme  $\tilde{H}_m \in F_I$ , on a  $\partial \tilde{H}_m / \partial \tilde{\bar{z}}_{2n} = 0$ . Ce qui démontre que  $\tilde{H}_m$  ne dépend pas de la variable  $\tilde{J}_{2n}$ . Supposons maintenant que  $m < N$ . L'égalité

$$\sum_{k=2, k \text{ pair}}^m \{\tilde{H}_k, [T^*(C_1)]_{m-k+1}\} = 0 \quad (2.74)$$

donne, grâce aux considérations précédentes,

$$\{\tilde{H}_2, [T^*(C_1)]_{m-1}\} = 0 \quad (2.75)$$

$[T^*(C_1)]_{m-1}$  ne contient donc que des termes de  $\text{Ker}(L_{\tilde{H}_2}) = F_I \oplus F_G \oplus F_O$ . On suppose que  $F_O = \{0\}$ . De plus  $\{\tilde{H}_2, [T^*(C_1)]_{m-1}\}$  ne contient pas de termes de  $F_G$  par hypothèse. Donc  $[T^*(C_1)]_{m-1} \in F_I$ . Et l'hypothèse de récurrence est bien héréditaire si  $m < N$ . On a donc démontré que, pour tout  $m \leq N$ ,  $\tilde{H}_m$  ne dépend pas de la variable  $\tilde{J}_{2n}$ .  $\diamond$

On a donc démontré que, tant qu'on peut construire une forme normale de Birkhoff, non résonante, celle-ci ne dépend pas de la variable  $\tilde{J}_{2n}$ . La construction de la forme normale de Birkhoff réduit donc directement le problème. Ainsi, pour une sécularisation à un ordre supérieur du rapport des masses, quand, en général, la relation de trace nulle n'est pas vérifiée, si on construit la forme normale de Birkhoff à tout ordre, on réduit le problème par la même occasion. Toutefois, il est plus facile de réaliser la réduction avant de construire la forme normale, comme présenté dans le chapitre 3.

Le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$  ne dépend que des actions  $\tilde{J}$  (formellement). On définit alors les nouvelles fréquences comme étant les valeurs de  $\partial \tilde{H} / \partial \tilde{J}$ . Ces fréquences varient sur l'espace des phases. Comme la proposition 1 est vraie, on sait qu'il existe encore une fréquence nulle dans le problème normalisé dans tout l'espace des phases. A contrario, on a constaté numériquement que la relation de trace nulle est une relation purement linéaire et qu'en général elle n'est pas vérifiée pour le problème normalisé, dès le degré 4.

## 2.7 Conclusion, cas général de $N$ corps

Le cas général de  $N$  corps n'a pas été abordé pratiquement mais, à priori, on devrait retrouver un comportement similaire : l'impossibilité de construire une forme normale de Birkhoff découlant des relations de résonance. Cette impossibilité marque l'arrêt de la mise en place de la méthode perturbative voulue, basée sur la construction à un degré élevé d'une forme normale de Birkhoff. Si on considère le problème séculaire à un ordre plus élevé du rapport des masses, la relation de trace nulle n'est plus vérifiée et, à priori, cela permet de

construire formellement la forme normale à n'importe quel ordre. Toutefois, les monômes de  $F_G$  donnent quelquefois des petits diviseurs lors de cette construction qui peuvent avoir un effet important sur la convergence des séries considérées et donc sur l'efficacité des méthodes de perturbation. Tous ces problèmes de construction peuvent se résoudre simplement en effectuant une réduction partielle liée à l'invariance de la direction du moment cinétique (chapitre 3). Cette réduction permet ensuite de prouver que les relations de fréquence nulle et de trace nulle n'empêchent plus la construction de la forme normale de Birkhoff et ceci à n'importe quel degré.

# Chapitre 3

## Réductions liées à l'invariance du moment cinétique

Il y a de nombreuses motivations à rechercher une manière de réduire le problème en utilisant les intégrales du moment cinétique. La première est que la réduction nous permet de résoudre la difficulté qui apparaît dans la section précédente (chapitre 2) liée à la construction de la forme normale de Birkhoff. En effet, on a vu que la fréquence nulle est en relation étroite avec l'intégrale  $C_1$ . En réduisant le problème en utilisant cette intégrale  $C_1$ , on n'aura plus de fréquence nulle ce qui permettra de construire de la forme normale de Birkhoff à tout ordre (voir section 3.3.2). La seconde motivation est d'obtenir un système qui contient moins de variables et sur lequel des méthodes perturbatives seront donc plus faciles à mettre en oeuvre, les séries considérées contenant moins de variables et donc moins de termes (voir annexe D).

On va, durant ce chapitre, revenir à un problème planétaire général, non sécularisé. De nombreuses manières de réduire le nombre de degrés de liberté du problème en utilisant les intégrales liées au moment cinétique ont été trouvées depuis (Lagrange, 1772). La réduction théorique est présentée dans (Meyer et Hall, 1992 et Arnold et al., 1985). Pour le problème planétaire de  $n + 1$  corps, la difficulté est de trouver pratiquement le système de variables les plus simples pour exprimer le problème réduit et qui pourrait être utilisé pour la mise en oeuvre de méthodes perturbatives. C'est-à-dire de trouver un changement de variables canonique effectuant la réduction en partant de variables liées aux éléments elliptiques.

Aucune réduction pratique compatible avec une méthode perturbative dans le cas de  $n + 1$  corps par un changement de variables simple n'est connu sauf pour trois corps où une réduction simple existe, appelée "élimination des noeuds" (Jacobi, 1842). Bennett a proposé une méthode pour la réduction dans le cas général de  $n + 1$  corps mais cette méthode est très difficile à mettre en oeuvre (Bennett, 1905 voir aussi Hagihara, 1989a). Depuis, une succession de travaux (Boigey, 1981 et Deprit, 1983), ont proposé, en utilisant une chaîne de repères (d'une manière similaire à la réduction par l'invariance de la quantité de mouvement grâce à une chaîne de repères barycentriques de Jacobi), une réduction explicite pour 4 corps puis pour  $n + 1$  corps plus simple que la réduction de Bennett mais assez difficile à mettre en oeuvre. De plus, dans ces études, les variables réduites n'ont pas un sens physique simple ce qui complique l'interprétation et le traitement du problème. En particulier, le calcul des séries perturbatives dans ces nouvelles variables est très compliqué.

Dans cette partie, on propose une nouvelle méthode basée sur une réduction partielle du

problème : seule la direction du moment cinétique est prise en compte et non sa norme. Dans le cas de trois corps, dans le plan invariant, les angles des noeuds ascendants sont opposés et la réduction partielle peut être effectuée facilement, dans l'esprit de l'élimination des noeuds de Jacobi. Dans le cas général de  $n + 1$  corps, on utilise l'intégrale  $C_1$  (1.12) pour exprimer deux des variables en fonction des autres dans le hamiltonien et la deux forme symplectique du problème. Lorsque l'on considère ce nouveau système, on perd la forme standard des équations hamiltoniennes. Néanmoins, on peut faire ensuite une transformation additionnelle (non canonique) de manière à ramener la deux forme symplectique à une forme standard, en utilisant une version constructive du théorème de Darboux. Cette étape fait appel à un logiciel de calcul formel et les transformations sont construites jusqu'à un certain degré en les variables d'excentricité et d'inclinaison. Cette réduction partielle présente d'autres avantages (en plus de ceux présentés dans les motivations, ci-dessus) : dans le problème partiellement réduit, l'origine du problème séculaire reste un point fixe et il n'y a pas de singularité quand les inclinaisons tendent vers zéro comme dans la réduction de Jacobi (Robutel, 1993). D'autre part, on garde les symétries du problème : relations de d'Alembert et de symétrie dans les variables d'inclinaison. On remarque finalement que, cette réduction partielle étant achevée, un réduction complète, utilisant la norme du moment cinétique peut être aisément réalisée (sections 3.1.2 et 3.2.2).

## 3.1 Réduction pour le problème planétaire des trois corps

Dans le cas particulier du problème planétaire des trois corps, il existe une réduction simple, la réduction de Jacobi, qui enlève deux degrés de liberté au système. Mais dans ce cas, des difficultés apparaissent. On doit inclure un paramètre additionnel dans l'expression du hamiltonien (la valeur  $C_z$  de la norme du moment cinétique). Certaines symétries sont rompues (relations de d'Alembert). On introduit une singularité quand les inclinaisons tendent vers zéro (Robutel, 1995). Finalement, le point fixe du problème séculaire (à l'origine des coordonnées) ne représente pas la même solution pour le problème réduit et non-réduit (voir la remarque 4 de la section 3.1.1 et la section 3.1.2).

En réalisant la réduction partielle présentée ci-dessous, basée sur l'invariance de la direction de  $C$ , on réduit le système d'un seul degré de liberté mais en évitant les quatre désavantages de la réduction de Jacobi mentionnés. On considérant ce fait, on peut avoir intérêt à s'arrêter après la réduction partielle (une discussion comparée est réalisée dans la section 3.3.3). Mais, suivant le problème que l'on considère, on peut choisir de réduire totalement ce problème en utilisant la relation restante : la constance de la norme du moment cinétique. Cette réduction totale est réalisée facilement et de différentes façons incluant la réduction de Jacobi (voir remarque 6 de la section 3.1.2).

### 3.1.1 La réduction partielle

La réduction partielle peut être réalisée théoriquement si on a  $\{C_x, C_y\} = C_z \neq 0$  (Meyer, 1973). Pour un système planétaire, les planètes, massives, tournent autour de l'étoile dans le

même sens : la norme de  $\mathbf{C}$  est donc strictement positive et cette réduction peut être réalisée. Dans le cas de deux planètes, les composantes du moment cinétique sont :

$$\begin{cases} C_1 = y_1 \sqrt{\Lambda_1 - |x_1|^2 - \frac{|y_1|^2}{2}} + y_2 \sqrt{\Lambda_2 - |x_2|^2 - \frac{|y_2|^2}{2}} \\ C_z = \Lambda_1 + \Lambda_2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 - |y_1|^2 - |y_2|^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Si on effectue une transformation en coordonnées polaires symplectiques pour les variables d'inclinaison  $y_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\Omega_1}$ ,  $y_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\Omega_2}$ , l'intégrale première complexe  $C_1 = 0$  donne deux intégrales premières réelles :

$$\Omega_1 = \Omega_2 + \pi \quad (3.2)$$

$$\rho_1 \left( \Lambda_1 - |x_1|^2 - \frac{\rho_1}{2} \right) = \rho_2 \left( \Lambda_2 - |x_2|^2 - \frac{\rho_2}{2} \right) \quad (3.3)$$

Donc, pour trois corps, l'intégrale  $C_1 = 0$  implique que les noeuds des deux planètes sont opposés (3.2). Cette opposition des noeuds, base de la réduction, n'est vérifiée que dans le plan invariant. Le rôle spécial du plan invariant est abordé dans la section (3.3.4). Dans ces nouvelles coordonnées, la forme symplectique devient

$$\sigma = d\lambda_1 \wedge d\Lambda_1 + d\lambda_2 \wedge d\Lambda_2 - i(dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + dx_2 \wedge d\bar{x}_2) + d\Omega_1 \wedge d\rho_1 + d\Omega_2 \wedge d\rho_2 \quad (3.4)$$

Si on effectue la transformation linéaire canonique suivante

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}; & \phi_2 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}; \\ r_1 = \rho_1 + \rho_2; & r_2 = \rho_1 - \rho_2 \end{cases} . \quad (3.5)$$

Les deux intégrales premières (3.2,3.3) deviennent

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

$$(r_1 + r_2) \left( \Lambda_1 - |x_1|^2 - \frac{r_1 + r_2}{4} \right) = (r_1 - r_2) \left( \Lambda_2 - |x_2|^2 - \frac{r_1 - r_2}{4} \right) \quad (3.7)$$

La restriction de la deux forme symplectique  $\sigma$  à la sous-variété définie par les intégrales premières (3.6) et (3.7) est :

$$\sigma = d\lambda_1 \wedge d\Lambda_1 + d\lambda_2 \wedge d\Lambda_2 - i(dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + dx_2 \wedge d\bar{x}_2) + d\phi_1 \wedge dr_1 . \quad (3.8)$$

Le passage des coordonnées de Poincaré cartésiennes à des variables polaires symplectiques introduit une singularité lorsque les inclinaisons sont nulles. Mais on peut éviter cette singularité en utilisant le changement de variable  $y = \sqrt{r_1} e^{i\phi_1}$ . Alors,

$$\sigma = d\lambda_1 \wedge d\Lambda_1 + d\lambda_2 \wedge d\Lambda_2 - i(dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + dx_2 \wedge d\bar{x}_2 + dy \wedge d\bar{y}) . \quad (3.9)$$

On obtient donc un nouveau système de variables dans lequel la réduction est achevée. L'analyticité de cette transformation est obtenue quand on donne l'expression des variables  $y_1, y_2$



en fonction des  $y, \bar{y}$  et des variables inchangées  $(\lambda_1, \lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_2, x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Des équations (3.5, 3.6), on obtient

$$y_1 = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{2}} e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = i \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}. \quad (3.10)$$

En utilisant la deuxième intégrale (3.7), on a

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1 - |x_2|^2 + |x_1|^2}{\Lambda_1 + \Lambda_2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 - r_1}, \quad (3.11)$$

Et donc,

$$y_1 = i \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1 - x_2 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 - x_2 \bar{x}_2 - x_1 \bar{x}_1 - y \bar{y}}} \quad (3.12)$$

Par la même méthode, on trouve

$$y_2 = -i \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1 - x_2 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 - x_2 \bar{x}_2 - x_1 \bar{x}_1 - y \bar{y}}} \quad (3.13)$$

Le hamiltonien réduit est alors obtenu par la substitution des  $y_1, y_2$  par leur expression (3.12, 3.13). Ces expressions conservent la parité dans les variables  $y, \bar{y}$  et comme  $y_1$  et  $y_2$  satisfont des relations de d'Alembert dans les nouvelles variables, le nouvel hamiltonien vérifie les mêmes relations. Exprimés à l'aide des éléments elliptiques classiques (1.7), on a

$$|y|^2 = \Lambda_1 \sqrt{1 - e_1^2} (1 - \cos(I_1)) + \Lambda_2 \sqrt{1 - e_2^2} (1 - \cos(I_2)) \quad (3.14)$$

Donc, quand les excentricités et les inclinaisons sont proche de zéro,  $|y|^2 \sim \frac{\Lambda_1}{2} I_1^2 + \frac{\Lambda_2}{2} I_2^2$  est aussi proche de zéro. La variable  $y$  est, dans un certain sens, une valeur moyenne entre les deux variables d'inclinaison et quand  $y$  tend vers zéro, les inclinaisons tendent aussi vers zéro. En pratique, comme le hamiltonien  $H_1$  est une série des variables  $x_j, \bar{x}_j, y_j, \bar{y}_j$  (1.9), dans le hamiltonien réduit, on développe les expressions (3.12, 3.13) en série des  $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, y, \bar{y}$ , qui sont de petites quantités dans un problème planétaire.

**Remarque 4** Dans le problème planétaire séculaire à l'ordre 1 des masses, le point origine ( $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ ) est un point fixe. Dans les nouvelles coordonnées, l'origine ( $x_1 = x_2 = y = 0$ ) reste un point fixe du problème séculaire qui correspond à la même solution physique : des orbites circulaires et coplanaires.

### 3.1.2 Réduction totale

Le hamiltonien obtenu après la réduction partielle satisfait toujours les relations de d'Alembert. La fin de la réduction, qui utilise la troisième coordonnée  $C_z$  du moment cinétique est donc possible. Dans les nouvelles variables, comme  $|y|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2$  (équation 3.5), on a

$$C_z = \Lambda_1 + \Lambda_2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 - |y|^2 \quad (3.15)$$

Pour transformer cette intégrale première en une relation linéaire entre les variables, on effectue une transformation en coordonnées polaires symplectiques :  $x_1 = \sqrt{R_1}e^{i\varpi_1}$ ,  $x_2 = \sqrt{R_2}e^{i\varpi_2}$ ,  $y = \sqrt{R}e^{i\Omega}$  qui présente une singularité quand une des variables  $x_1$ ,  $x_2$  ou  $y$  est égale à zéro. On a

$$C_z = \Lambda_1 + \Lambda_2 - R_1 - R_2 - R . \quad (3.16)$$

La réduction totale peut être alors réalisée de différentes manières parmi lesquelles on retrouve la réduction de Jacobi. On utilise un changement de variable linéaire pour lequel  $C_z$  (3.16) sera une des nouvelles coordonnées, par exemple :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1 \\ \tilde{\Lambda}_2 \\ \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

La variable  $\tilde{R} = -C_z$  est constante. Par conjugaison, les nouvelles variables angulaires sont

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\varpi}_1 \\ \tilde{\varpi}_2 \\ \tilde{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \varpi_1 \\ \varpi_2 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

On revient alors à des variables d'excentricités rectangulaires :  $\tilde{x}_1 = \sqrt{\tilde{R}_1}e^{i\tilde{\varpi}_1}$ ,  $\tilde{x}_2 = \sqrt{\tilde{R}_2}e^{i\tilde{\varpi}_2}$ . Comme on effectue une autre transformation polaire, les singularités  $x_1 = x_2 = 0$  disparaissent et la seule restante est obtenue pour des inclinaisons nulles ( $y = 0$ ). La variable  $\tilde{\Omega}$  n'est pas définie dans ce cas. Le changement de variables final est

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1 \\ \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 \\ \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\Omega} \\ \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\Omega} \\ x_1 = \tilde{x}_1 e^{i\tilde{\Omega}} \\ x_2 = \tilde{x}_2 e^{i\tilde{\Omega}} \\ y = \sqrt{-C_z + \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_2} e^{i\tilde{\Omega}} \end{cases} \quad (3.19)$$

Comme le hamiltonien  $H_1$  satisfait les relations de d'Alembert, la variable  $\tilde{\Omega}$  n'apparaît pas dans son expression. Grâce à la parité en les variables d'inclinaison ( $y, \bar{y}$ ),  $H_1$  ne dépend seulement que de  $|y|^2$  et aucune racine venant de (3.19) n'est présente dans son expression finale. Comme prévu, un nouveau paramètre  $C_z$  apparaît dans l'expression de  $H_1$ . En se restreignant à la sous variété définie par  $\tilde{R} = -C_z$ , la deux-forme symplectique devient

$$\sigma = d\tilde{\lambda}_1 \wedge d\tilde{\Lambda}_1 + d\tilde{\lambda}_2 \wedge d\tilde{\Lambda}_2 - i(d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 \wedge d\tilde{x}_2) \quad (3.20)$$

La réduction est donc totalement réalisée. Le point fixe ( $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ ) est un point fixe du nouveau système séculaire. Mais ce point fixe est différent du point fixe obtenu après la

réduction partielle : il représente des orbites circulaires avec des inclinaisons fixées qui sont généralement non nulles ( $|y|^2 = -C_z + \Lambda_1 + \Lambda_2$ ) et les formules (3.12,3.13) permettent de remonter aux valeurs, fixées, des inclinaisons.

Les nouvelles variables  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  sont les mêmes que les coordonnées de Poincaré définies après la réduction de Jacobi (Robutel, 1993) à une translation en angles près. En effet, on a pour la transformation de Jacobi :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 e^{-i\Omega_1} = x_1 e^{-i(\Omega + \frac{\pi}{2})} \\ \tilde{x}_2 = x_2 e^{-i\Omega_2} = x_2 e^{-i(\Omega - \frac{\pi}{2})} \end{cases} \quad (3.21)$$

Et pour notre transformation

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 e^{-i\Omega} \\ \tilde{x}_2 = x_2 e^{-i\Omega} \end{cases} \quad (3.22)$$

La principale différence entre ces deux manières de réaliser cette réduction vient du fait que la réduction de Jacobi est directe. Dans les variables de Delaunay, on ne peut séparer les deux réductions (partielle et totale) qui se font simultanément, par une seule transformation linéaire. Les variables de Delaunay sont les variables  $(l_j, g_j, \theta_j, \beta_j L_j, \beta_j G_j, \beta_j \Theta_j)$  liées aux éléments elliptiques (Robutel, 1993) :

$$\begin{cases} L_j = \sqrt{\mu_j a_j} & l_j = M_j(\text{anomalie moyenne}) \\ G_j = L_j \sqrt{1 - e_j^2} & g_j = \omega_j(\text{argument du perihelie}) \\ \Theta_j = G_j \cos(I_j) & \theta_j = \Omega_j \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans ces variables, la réduction est réalisée par le changement de variables canonique suivant :

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ \psi_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (= -\frac{\pi}{2}) \\ \Psi_1 = \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 \quad (= C_z) \\ \Psi_2 = \beta_1 \Theta_1 - \beta_2 \Theta_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour réaliser pratiquement cette réduction, on exprime  $\theta_1, \theta_2, \Theta_1$  et  $\Theta_2$  en fonction de  $\psi_1, \psi_2, \Psi_1$  et  $\Psi_2$  dans le hamiltonien. On remarque alors que  $\Psi_1$  est égal à  $C_z$  et  $\Psi_2 = (\beta_1^2 G_1^2 - \beta_2^2 G_2^2)/C_z$ . Comme  $\Psi_1$  est une intégrale première,  $\psi_1$  n'apparaît pas dans l'expression du hamiltonien réduit et  $\psi_2 = -\pi/2$ . Pour la réduction partielle, on réalise la même transformation linéaire pour les angles des noeuds mais comme la variable conjuguée de  $\psi_1$  n'est pas, comme dans les variables de Delaunay, l'intégrale  $C_z$ , le hamiltonien partiellement réduit dépend encore de la variable  $\psi_1$ . On doit faire une réduction supplémentaire pour retrouver la réduction de Jacobi.

La réduction présentée et celle, bien connue, de Jacobi peuvent alors apparaître comme étant redondantes mais faire cette réduction en deux étapes permet de choisir parmi trois réductions totales possibles (voir remarque 6). De plus, l'apparition du paramètre lié à  $C_z$  est

plus simple (le paramètre  $d$  dans notre étude (voir remarque 8) comparé au paramètre  $D_2$  dans (Robutel, 1993)). Enfin, le fait que l'on conserve les relations de d'Alembert, qu'il n'y ait pas de singularité quand les inclinaisons tendent vers zéro et que le point fixe du problème séculaire reste le même peut inciter à ne faire qu'une réduction partielle du problème (pour une discussion plus précise, voir section 3.3.3).

**Remarque 5** Calculer le hamiltonien non réduit et faire ensuite les deux réductions précédentes n'est pas forcément la meilleure façon d'obtenir le hamiltonien complètement réduit. En effet, le calcul direct du hamiltonien réduit comme dans (Robutel, 1993) est sûrement plus rapide. Cependant, si on a déjà une expression du hamiltonien de trois corps non réduit, on peut réaliser la réduction d'une façon simple : en remarquant que dans (3.12, 3.13) le dénominateur est  $C_z$ , on peut remplacer  $x_1$  par  $\tilde{x}_1$ ,  $x_2$  par  $\tilde{x}_2$  et le monôme général  $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \bar{y}_1^{\bar{k}_1} \bar{y}_2^{\bar{k}_2}$  par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
(-1) \quad & \frac{k_1 - k_2 - \bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2} \left( \frac{C_z - \tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_2}{2C_z} \right)^{\frac{k_1 + k_2 + \bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2}} \\
& \times \sqrt{C_z + \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_2}^{(k_1 + \bar{k}_1)} \\
& \times \sqrt{C_z + \tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_2}^{(k_2 + \bar{k}_2)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

**Remarque 6** Si on considère l'expression (3.16) de  $C_z$  et son expression, symétrique en les variables  $(R_1, R_2, R)$ , la réduction précédente peut être réalisée de deux autres manières. Au lieu d'éliminer la variable  $y$ , on peut choisir d'éliminer  $x_1$  ou  $x_2$ . Si on élimine  $x_2$  par exemple, la transformation (3.19) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1 \\ \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 \\ \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\omega}_2 \\ \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\omega}_2 \\ y = \tilde{y} e^{i\tilde{\omega}_2} \\ x_1 = \tilde{x}_1 e^{i\tilde{\omega}_2} \\ x_2 = \sqrt{-C_z + \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{y} \tilde{y}} e^{i\tilde{\omega}_2} \end{array} \right. \tag{3.26}$$

où  $\tilde{\omega}_2$  est l'argument de la variable  $x_2$ . Dans ce cas, on n'a plus de singularité quand les inclinaisons sont nulles mais quand l'excentricité  $e_2$  est égale à zéro ( $x_2 = 0$ ). La principale différence entre cette réduction et celle de Jacobi est que, comme on a seulement une parité globale en les variables d'excentricité  $x_1, x_2, \bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , dans le nouveau système, on doit développer  $\sqrt{-C_z + \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{y} \tilde{y}}$  en une série des  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \tilde{y}, \tilde{y}$ , qui va donner des termes de degré impair et en particulier des termes de degré 1 dans l'expression du nouvel hamiltonien. A cause de ces termes, le point  $\tilde{x}_1 = \tilde{y} = 0$ , n'est pas un point fixe du système séculaire. Néanmoins, la réduction totale choisie dépend du problème considéré et cette réduction peut être valable dans certains cas, en particulier le cas plan : grâce à la parité en  $y, \bar{y}$ , si les inclinaisons sont égales à zéro ( $y = 0$ ), le système restera indéfiniment

dans le plan invariant. Le système séculaire associé a alors un seul degré de liberté (variables  $\tilde{x}_1, \tilde{\bar{x}}_1$ ), devient intégrable (Poincaré, 1892) et peut être plus facilement étudié.

**Remarque 7** Une remarque importante est que ces deux réductions (partielle et totale) sont réalisées de la même manière pour le problème classique où pour le problème séculaire à n'importe quel ordre du rapport des masses. En effet, comme on l'a déjà rappelé dans la section 1.6, les intégrales premières  $C_1, C_z$  ont la même expression que (1.12,1.11) pour le problème sécularisé à tout ordre du rapport des masses (Laskar, 2001).

**Remarque 8** Dans l'équation (3.19), le terme  $-C_z + \Lambda_1 + \Lambda_2$  noté  $d^2$  est du même ordre de grandeur que les petites quantités  $|x_1|^2, |x_2|^2$  et  $|y|^2$ . C'est donc une petite quantité et on peut développer le hamiltonien réduit en fonction de cette variable  $d$ . Dans le cas séculaire,  $d$  est une constante et son utilisation équivaut, plus ou moins, à l'utilisation du paramètre  $D_2$  rencontré lors de l'élimination des noeuds dans les travaux (Robutel, 1993) et (Locatelli et Giorgilli, 2000).

## 3.2 Cas général de $n$ planètes

Dans le cas plus général de  $n$  planètes ( $n > 2$ ), la réduction partielle précédente ne peut être réalisée. En effet, l'opposition des noeuds ( $\Omega_1 = \Omega_2 + \pi$ ) est essentielle dans cette réduction. Dans le cas général, il n'y a pas de relation linéaire de ce type entre les noeuds et une généralisation facile n'est pas possible. Cependant, la réduction partielle peut être réalisée par une autre méthode.

### 3.2.1 Réduction partielle et forme symplectique standard

L'intégrale  $C_1$  (1.12) nous permet d'exprimer les variables  $y_n$  et  $\bar{y}_n$  en fonction des autres variables. On considère l'équation du second degré d'inconnue  $|y_n|^2$  obtenue à partir de  $C_1 = 0$  :

$$|y_n|^2 \left( \Lambda_n - |x_n|^2 - \frac{|y_n|^2}{2} \right) = |\alpha|^2 \quad (3.27)$$

avec

$$\alpha = - \sum_{j=1}^{n-1} y_j \sqrt{\Lambda_j - |x_j|^2 - \frac{|y_j|^2}{2}}. \quad (3.28)$$

Parmi les deux solutions de cette équation, on choisit pour  $y_n$  la racine qui tend vers zéro quand les variables  $(y_j)_{(1 \leq j \leq n-1)}$  tendent aussi vers zéro :

$$y_n = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{\Lambda_n - |x_n|^2 + \sqrt{(\Lambda_n - |x_n|^2)^2 - 2|\alpha|^2}}} \quad (3.29)$$

Pour réduire le problème, on remplace alors  $y_n$  et  $\bar{y}_n$  par leur expression (3.29) dans le hamiltonien. Comme (3.29) satisfait les relations de d'Alembert, il en est de même pour le hamiltonien. Pratiquement, les expressions de  $y_n$  et  $\bar{y}_n$  sont développées en séries jusqu'à un degré fixe  $d$  en les variables  $x, y^1$ . Le problème est que la restriction de la forme symplectique (1.10)

<sup>1</sup>Par la suite,  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_{n-1}), \Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

à la sous-variété  $C_1 = 0$  n'est plus standard et que la forme standard des équations n'est donc plus conservée. On a maintenant

$$\sigma = \sum_{k=1}^n [d\lambda_k \wedge d\Lambda_k - i(dx_k \wedge d\bar{x}_k)] - \sum_{k=1}^{n-1} i(dy_k \wedge d\bar{y}_k) - i df_y \wedge d\bar{f}_y \quad (3.30)$$

où  $y_n = f_y(x, y, \Lambda)$  est développée en une série des variables  $x, y$  et dont les coefficients dépendent de  $\Lambda$ . La forme symplectique  $\sigma$  peut être écrite sous la forme d'une série :

$$\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k \quad (3.31)$$

où  $\sigma_k$  est la partie de la deux-forme dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré  $k$  en les variables  $x, y$ . Comme au premier ordre en les variables  $x, y$ , on a (3.29) :

$$y_n = - \sum_{j=1}^{n-1} y_j \sqrt{\frac{\Lambda_j}{\Lambda_n}} \quad (3.32)$$

le premier terme  $\sigma_0$  de la 2-forme, qui consiste en des termes dont les coefficients ne dépendent pas de  $(x, y)$ , est

$$\sigma_0 = \sum_{k=1}^n [d\lambda_k \wedge d\Lambda_k - i(dx_k \wedge d\bar{x}_k)] - \sum_{k=1}^{n-1} i(dy_k \wedge d\bar{y}_k) - i \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k}}{\Lambda_n} dy_j \wedge d\bar{y}_k \quad (3.33)$$

Et donc, même à l'ordre zéro en  $(x, y)$ , la deux-forme symplectique n'est pas standard. Nous allons construire une transformation non canonique, degré par degré en  $(x, y)$ , de manière à retrouver une deux-forme standard. A l'ordre 0, cette transformation sera réalisée par une transformation linéaire. A un ordre plus élevé, on va utiliser une version constructive d'un théorème de Darboux pour trouver une transformation proche de l'identité et telle que, dans les nouvelles variables, la forme symplectique soit standard.

**Remarque 9** Dans la forme symplectique  $\sigma$ , les termes  $d\lambda$  sont seulement présents dans  $\sigma_0$  car  $f_y$  ne dépend pas des  $\lambda_j$ .

### Réduction à l'ordre 0

Dans le système de coordonnées  $(\lambda, x, y, \Lambda, -i\bar{x}, -i\bar{y})$ , la matrice de  $\sigma_0$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ -I_{2n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

où  $A = I_{n-1} + \mathbf{V}^t \mathbf{V}$  est une matrice  $(n-1, n-1)$  réelle et symétrique avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_1}/\sqrt{\Lambda_n} \\ \sqrt{\Lambda_2}/\sqrt{\Lambda_n} \\ \vdots \\ \sqrt{\Lambda_{n-1}}/\sqrt{\Lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

La deux-forme symplectique  $\sigma_0$  est déjà standard en les variables  $x, \lambda, \Lambda$ . On va donc effectuer une transformation linéaire

$$y = PY \quad (3.36)$$

telle que  ${}^tPAP = I_{n-1}$ , où  $P$  est une matrice réelle  $(n-1, n-1)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1})$  sont les nouvelles variables. En fait, la structure particulière de la matrice  $A$  permet de trouver une transformation explicite. Soit  $(\mathbf{e}_j)_{j=1, n-1}$  une base canonique de  $R^{n-1}$  et  $Q$  une matrice orthogonale qui envoie  $\mathbf{e}_{n-1}$  (par exemple) sur le vecteur normalisé  $\mathbf{V}/\|\mathbf{V}\|$ . Dans cette nouvelle base  $(Q\mathbf{e}_j)_{j=1, n-1}$ , la matrice de la forme quadratique définie par  $A$  est diagonale ( $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 1 + \|\mathbf{V}\|^2)$ ). L'affinité  $D$  de matrice  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 1/\sqrt{1 + \|\mathbf{V}\|^2})$  ramène la matrice de la forme quadratique à l'identité. L'ensemble des matrices  $Q$  est isomorphe à  $O_{n-2}$ , et on a donc une infinité de choix pour la définition de cette transformation linéaire. Un choix simple est de prendre pour  $Q$  la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à  $\mathbf{v} = \mathbf{V}/\|\mathbf{V}\| - \mathbf{e}_{n-1}$ , ce qui donne, pour  $\mathbf{u} \in R^{n-1}$

$$Q\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{n-1} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (3.37)$$

L'expression explicite de  $Q$  est donnée dans l'annexe A ainsi qu'une autre transformation obtenue par une orthogonalisation de Schmidt. On définit la transformation  $P_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \Lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ Y = P^{-1}y \\ \Lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Comme cette transformation est linéaire et réelle, les relations de d'Alembert sont conservées dans le hamiltonien.

**Remarque 10** Bien que formellement cela ne fasse aucune différence, en pratique il peut être intéressant de choisir  $y_n$  tel que la matrice  $A$  (3.34, 3.35) soit la plus proche possible de la matrice identité. Le meilleur choix dans ce cas est de choisir pour  $y_n$  la planète qui a le  $\Lambda$  le plus grand, c'est à dire la variable associée au corps qui contribue le plus à la norme du moment cinétique  $C_z$ . Dans un sens, ce choix est similaire au choix qui est fait de centrer le repère sur le corps le plus massif (le soleil) pour effectuer la réduction liée à l'invariance de la quantité de mouvement. A titre de comparaison, on fournit les pourcentages en jeu : le pourcentage de la masse du soleil dans le système solaire est de 99.86 % environ et le pourcentage de la part du moment cinétique lié à Jupiter dans le moment cinétique total du système solaire est de 61 % environ, la seconde contribution la plus importante est celle de Saturne, de 25 % environ. D'autre part, la réduction partielle présentée dans ce chapitre s'appliquerait de la même manière pour un problème planétaire hiérarchisé après une réduction de la quantité de mouvement par les coordonnées barycentriques de Jacobi. Un problème planétaire hiérarchisé est du type (Soleil-Terre-Lune) et on peut généraliser cette configuration à  $n$  planètes. Dans ce cas, la contribution au moment cinétique de la première planète (la Terre dans notre exemple) est écrasante et cette méthode peut donner de bons résultats.

**Remarque 11** Les variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$  n'ont pas un sens physique simple, étant définies par une transformation linéaire des variables  $y_1, \dots, y_{n-1}$ . Toutefois, cette transformation est du même type qu'une diagonalisation et donne des variables ayant un sens physique équivalent : des variables décrivant mieux la dynamique du problème.

## Ordres supérieurs

**Partie théorique** Toutes les notations sont tirées de (Spivak, 1999). On recherche un nouvel ensemble de variables  $\tilde{p}$  pour lesquelles la deux-forme symplectique sera standard. Dans le but de calculer la transformation entre  $\tilde{p}$  et les anciennes variables  $p$ , on utilise une version constructive du théorème de Darboux. On construit un chemin différentiable dans l'ensemble des deux-formes symplectiques représenté par l'application  $t \mapsto \sigma_t, t \in [0, 1]$  telle que  $\sigma_0$  est standard et  $\sigma_1 = \sigma$  est notre deux-forme symplectique. On cherche alors une transformation  $\phi_t$  qui satisfait,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$[\sigma_t]_{\phi_t(\tilde{p})}((\phi_{t*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1), (\phi_{t*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_2)) = [\sigma_0]_{\phi_0(\tilde{p})}((\phi_{0*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1), (\phi_{0*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_2)) \quad (3.39)$$

où  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  est un couple quelconque de vecteurs de  $T_{\tilde{p}}R^{6n-2}$ , l'espace tangent à  $R^{6n-2}$  au point  $\tilde{p}$ ,  $(\phi_*)_{\tilde{p}}(\mathbf{v}) = D\phi(\tilde{p})(\mathbf{v})$  est l'application tangente au point  $\tilde{p}$  associée au difféomorphisme  $\phi$  ( $\mathbf{v}$  est un vecteur de  $T_{\tilde{p}}R^{6n-2}$ ) et telle que  $\phi_0(\tilde{p}) = \tilde{p}$  et  $\phi_1(\tilde{p}) = p$ . Ainsi, pour  $t = 1$ , on a

$$[\sigma]_p((\phi_{1*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1), (\phi_{1*})_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_2)) = [\sigma_0]_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (3.40)$$

La forme symplectique est standard dans les variables  $\tilde{p}$ . On recherche donc  $\phi_t$  qui ramène la forme symplectique  $\sigma_t$  à la forme standard  $\sigma_0$  pour tout  $t \in [0, 1]$  (Le pull-back d'une deux-forme  $\alpha$  par un difféomorphisme  $\psi$  est défini par  $[\psi^*\alpha]_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = [\alpha]_{\psi(\tilde{p})}((\psi_*)_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1), (\psi_*)_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_2))$ ). On veut donc que

$$[\phi_t^*\sigma_t]_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = [\phi_0^*\sigma_0]_{\tilde{p}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (3.41)$$

Dans le but de trouver un champs de vecteur associé au flot  $\phi_t$ , on dérive (3.41) par rapport à  $t$  :

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\sigma_t = 0 . \quad (3.42)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t^*\sigma_t &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\phi_{t+s}^*\sigma_{t+s} - \phi_t^*\sigma_t}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\phi_{t+s}^*\sigma_{t+s} - \phi_t^*\sigma_{t+s}}{s} + \frac{\phi_t^*\sigma_{t+s} - \phi_t^*\sigma_t}{s} \right) \\ &= \phi_t^*L_{X_t}(\sigma_t) + \phi_t^*\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \end{aligned}$$

où  $L_{X_t}(\alpha) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\phi_{t+s}^*\alpha$  est la dérivée de Lie suivant le champ de vecteur  $X_t$  de la deux-forme  $\alpha$ . Et, comme  $\phi_t^*$  est linéaire,

$$\phi_t^*(L_{X_t}(\sigma_t) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_t)) = 0 . \quad (3.43)$$



Comme  $\phi_t$  est un difféomorphisme,

$$L_{X_t}(\sigma_t) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_t) = 0 . \quad (3.44)$$

Par la formule de Cartan, on obtient

$$X_t \lrcorner d\sigma_t + d(X_t \lrcorner \sigma_t) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_t) = 0 . \quad (3.45)$$

où  $X_t \lrcorner d\sigma_t$  est le produit intérieur de  $X_t$  dans  $d\sigma_t$ . Soit  $t \mapsto \theta_t, t \in [0, 1]$  un chemin différentiable tel que pour tout  $t$ ,  $\theta_t$  est une primitive de  $\sigma_t$ . Comme  $\sigma_t = d\theta_t$  et  $d\sigma_t = 0$ , on a

$$d(X_t \lrcorner \sigma_t + \frac{\partial}{\partial t}\theta_t) = 0 . \quad (3.46)$$

Et pour toute fonction  $g$  définie sur la variété symplectique, on a une équation vérifiée par  $X_t$  :

$$X_t \lrcorner \sigma_t = -\frac{\partial}{\partial t}\theta_t + dg . \quad (3.47)$$

$\sigma_t$  n'étant pas dégénérée, un fois qu'est choisie une fonction  $g$ , il existe un unique champs de vecteur  $X_t$  telle que cette équation soit vérifiée. Cette primitive  $\theta_t$  doit être réelle pour garantir que les nouvelles variables associées à  $x, \bar{x}$  sont encore conjuguées complexes. La démonstration de cette assertion n'est pas très difficile mais un peu trop longue pour être reproduite ici. Dans les coordonnées  $(\lambda, x, Y, \Lambda, -i\bar{x}, -i\bar{Y})^2$ , on obtient la notation matricielle

$$X_t = \underbrace{(M_{\sigma_t})^{-1}(-\frac{\partial}{\partial t}(\theta_t))}_{\text{transformation qui rend la deux 2-forme standard}} + \underbrace{(M_{\sigma_t})^{-1}(dg)}_{\text{champs de vecteur hamiltonien}} \quad (3.48)$$

où  $M_{\sigma_t}$  est la matrice de la deux-forme symplectique  $\sigma_t$  dans les coordonnées choisies. Nous avons donc unicité du champ de vecteurs  $X_t$  à un champ hamiltonien près. En pratique, on choisit  $g = 0$ , car prendre  $g \neq 0$  revient à effectuer une autre transformation symplectique qui ne change pas la forme symplectique. On a essayé de trouver, dans le cas de quatre corps, une fonction  $g$  qui aurait pu simplifier la transformation, par exemple qui laisserait les variables  $x$  constantes comme pour trois corps mais les essais n'ont pas donné de résultats significatifs. Pour définir pratiquement le chemin différentiable, on choisit la primitive réelle suivante de la deux forme symplectique :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n (\lambda_j d\Lambda_j - \Lambda_j d\lambda_j - ix_j d\bar{x}_j + i\bar{x}_j dx_j) - i \sum_{j=1}^{n-1} (y_j d\bar{y}_j - \bar{y}_j dy_j) - i(f_y d\bar{f}_y - \bar{f}_y df_y) \right] \quad (3.49)$$

(on a  $d\theta_1 = \sigma_1$ ). On exprime alors cette un-forme en une série des coordonnées  $(x, Y)$ . On définit alors le chemin différentiable de l'espace des un-forme  $\theta_t = \theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0)$  où

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n (\lambda_j d\Lambda_j - \Lambda_j d\lambda_j) - i \sum_{j=1}^n (x_j d\bar{x}_j - \bar{x}_j dx_j) - i \sum_{j=1}^{n-1} (Y_j d\bar{Y}_j - \bar{Y}_j dY_j) \right] \quad (3.50)$$

On définit finalement le chemin  $\sigma_t = d\theta_t$ . L'application  $t \mapsto \sigma_t, t \in [0, 1]$  vérifie alors les propriétés voulues.

---

<sup>2</sup>Par la suite,  $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1})$ .

**Calcul Formel** Dans le but de calculer le champs de vecteurs  $X_t$ , on calcule l'inverse de la deux-forme symplectique jusqu'à un certain degré  $d$  par le développement formel :

$$M_{\sigma_t}^{-1} = (Id - J^{-1}[J - M_{\sigma_t}])^{-1} J^{-1} = \sum_{k \geq 0} [J^{-1}(J - M_{\sigma_t})]^k J^{-1} \quad (3.51)$$

où  $J$  est la matrice de la deux-forme standard  $\sigma_0$ .

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{3n-1} \\ -I_{3n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Comme  $M_{\sigma_t} - J$  est au moins de degré un en les variables  $x, Y$ , la somme (3.51) est calculée pour  $k \leq d$ . Le champs de vecteur  $X_t$  est alors calculé par la formule (3.48), et la transformation  $\phi_t$  s'obtient par une méthode de Lie. Soit  $x$  les anciennes variables et  $\tilde{x}$  les nouvelles. On recherche une fonction  $\phi_t(\tilde{x})$  telle que  $\phi_0(\tilde{x}) = \tilde{x}$  et  $\phi_1(\tilde{x}) = x$ . On pose alors  $x(t) = \phi_t(\tilde{x})$ . On a

$$x(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k x}{dt^k} \Big|_{t=0} = \sum_{k \geq 0} t^k G_k(t, x) \Big|_{t=0} \quad (3.53)$$

où on pose  $G_k(t, x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dt^k}$ . On a la formule de récurrence suivante :

$$G_{k+1}(t, x) = \frac{1}{k+1} \frac{dG_k}{dt}(t, x) = \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial G_k}{\partial t} + X_t \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x} \right) \quad (3.54)$$

Comme  $G_0(t, x) = x$ , on calcule, par cette formule, les  $G_k$  jusqu'au degré  $d$ , degré de troncature en les variables  $x, Y$ . En utilisant (3.53), on calcule finalement la fonction  $\phi_t$  et le changement de variable est donné par  $x = x(1) = \phi_1(\tilde{x})$ . Ces transformations ont été calculées en utilisant le manipulateur algébrique TRIP et la procédure présentée dans l'annexe C.

**Propriétés de cette transformation.** On appelle  $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{y}$  les nouvelles variables<sup>3</sup>.

**Proposition 2** *La transformation  $\phi_1$  a la forme suivante :*

$$\begin{cases} (\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j)_{1 \leq j \leq n} \\ (\lambda_j = \tilde{\lambda}_j + \sum_{k=1}^{\infty} P_{j,2k})_{1 \leq j \leq n} \\ (x_j = \tilde{x}_j + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{j,2k+1})_{1 \leq j \leq n} \\ (Y_j = \tilde{y}_j + \sum_{k=1}^{\infty} R_{j,2k+1})_{1 \leq j \leq n-1} \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $P_{j,k}$ ,  $Q_{j,k}$  et  $R_{j,k}$  sont des polynômes homogènes de degré  $k$  en  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  avec des coefficients dépendant de  $\tilde{\Lambda}$ , satisfaisant des relations de d'Alembert et des relations de parité en les variables  $\tilde{y}$ . Les caractéristiques de d'Alembert des polynômes  $P_{j,k}$ ,  $Q_{j,k}$  et  $R_{j,k}$  sont égales respectivement à 0, 1, 1.  $P_{j,k}$  et  $Q_{j,k}$  sont pair et  $R_{j,k}$  impair en les variables  $\tilde{y}$ . Le hamiltonien exprimé dans le nouveau système de coordonnées satisfait les relations de d'Alembert (caractéristique de d'Alembert nulle) et de parité en les variables  $\tilde{y}$ .

<sup>3</sup>Par la suite,  $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_n)$ ,  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ ,  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})$ .

**Démonstration 2** Pour démontrer que dans les nouvelles variables, le système conserve les relations de d'Alembert et de parité, on doit vérifier que le champs de vecteur  $X_t$  les vérifie bien. Pour cela, on doit connaître les caractéristiques de d'Alembert de  $\partial\theta_t/\partial t$  et  $M_{\sigma_t}^{-1}$ . Dans une matrice  $c(M_{\sigma_t})$ , représentant la deux-forme  $M_{\sigma_t}$ , on donne les caractéristiques de d'Alembert des coefficients de façon simplifiée :

$$c(M_{\sigma_t}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Lambda \\ x, Y \\ \lambda \\ \bar{x}, \bar{Y} \end{matrix} \quad (3.56)$$

Chaque coefficient de la matrice représente une caractéristique de d'Alembert des termes correspondants de la matrice  $M_{\sigma_t}$ . On montre qu'alors

$$c(J^{-1}(J - M_{\sigma_t})) = c([J^{-1}(J - M_{\sigma_t})]^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Et finalement, par la formule (3.51), on obtient  $c(M_{\sigma_t}) = c(M_{\sigma_t}^{-1})$ . Comme on a

$$c\left(\frac{\partial\theta_t}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Lambda \\ x, Y \\ \lambda \\ \bar{x}, \bar{Y} \end{matrix} \quad (3.58)$$

On en déduit, par l'équation 3.48, que

$$c(X_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Lambda \\ x, Y \\ \lambda \\ \bar{x}, \bar{Y} \end{matrix} \quad (3.59)$$

Le vecteur  $X_t$  vérifie donc bien les relations de d'Alembert. D'une manière similaire, en utilisant des matrices de ce type, on démontre que  $X_t$  et donc la transformation  $\phi_1$  vérifient la parité en les variables d'inclinaisons. Dans le coordonnées  $(\Lambda, \lambda, x, \bar{x}, Y, \bar{Y})$ , on exprime le champs de vecteur  $X_t$  dans la base associée :

$$X_t = \sum_{j=1}^n (X_t(\Lambda_j) \frac{\partial}{\partial \Lambda_j} + X_t(\lambda_j) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + X_t(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + X_t(\bar{x}_j) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}) + \sum_{j=1}^{n-1} (X_t(Y_j) \frac{\partial}{\partial Y_j} + X_t(\bar{Y}_j) \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j}) \quad (3.60)$$

$X_t(\cdot)$  sont les coordonnées de  $X_t$  dans la base  $\partial/(\partial \cdot)$  de l'espace tangent. On a, par (3.47),

$$X_t \lrcorner \sigma_t = X_t \lrcorner \sigma_0 + t X_t \lrcorner d(\theta_1 - \theta_0) \quad (3.61)$$

La fonction  $f_z$  ne dépend pas des variables  $\lambda$  et donc, en considérant (3.49,3.50),  $X_t \lrcorner d(\theta_1 - \theta_0) \in \text{vect}(d\Lambda, dx, d\bar{x}, dY, d\bar{Y})$  (où  $\text{vect}(d\Lambda, dx, d\bar{x}, dY, d\bar{Y})$  est le sous-espace vectoriel engendré par ces un-formes). Comme

$$\begin{aligned} X_t \lrcorner \sigma_0 &= \sum_{j=1}^n X_t(\Lambda_j) d\lambda_j + X_t(\lambda_j) d\Lambda_j + X_t(x_j) d\bar{x}_j + X_t(\bar{x}_j) dx_j + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} X_t(Y_j) d\bar{Y}_j + X_t(\bar{Y}_j) dY_j, \end{aligned} \quad (3.62)$$

on a

$$X_t \lrcorner \sigma_t = \sum_{j=1}^n X_t(\Lambda_j) d\lambda_j + \alpha_t \quad (3.63)$$

où  $\alpha_t \in \text{vect}(d\Lambda, dx, d\bar{x}, dY, d\bar{Y})$ . Mais, en considérant (3.47),  $X_t \lrcorner \sigma_t = -\partial\theta_t/\partial t = \theta_1 - \theta_0$ . Donc  $X_t \lrcorner \sigma_t \in \text{vect}(d\Lambda, dx, d\bar{x}, dY, d\bar{Y})$  et donc pour  $1 \leq j \leq n$ , on a  $X_t(\Lambda_j) = 0$ . La transformation laisse inchangées les variables  $\Lambda$ . De plus,  $X_t$  ne dépend pas des variables  $\lambda$ . Cela explique le fait que les polynômes  $P_{j,k}$ ,  $Q_{j,k}$  et  $R_{j,k}$  sont indépendants des  $\lambda$ . Les anciennes variables  $\lambda$  sont remplacées dans le hamiltonien  $H_1$  (1.9) en utilisant l'expression suivante :

$$e^{i\lambda_j} = e^{i\tilde{\lambda}_j} S_j(\tilde{\Lambda}, \tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3.64)$$

découlant des propriétés (3.55) et où  $S_j = e^{\sum_{k=1}^{\infty} P_{j,2k}}$  est une série des variables  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  de caractéristique de d'Alembert nulle. Grâce à ces constatations et propriétés, on montre que le hamiltonien vérifie encore les relations de d'Alembert et que la parité dans les nouvelles variables  $\tilde{y}$  est vérifiée.  $\diamond$

**Remarque 12** Dans le cas où les inclinaisons sont nulles ( $Y = 0$ ), la transformation  $\phi_1$  est l'identité pour les variables  $x, \Lambda, \lambda$  : la réduction, dans ce cas, est déjà effectuée. L'intégrale première  $C_1$  est une relation vide.

**Remarque 13** Pour trois corps, quand on utilise cette méthode, on trouve la transformation proposée dans la section (3.1.1). Une expression de cette transformation est donnée dans l'annexe B pour trois planètes (4 corps) et tronquée au degré 4.

**Remarque 14** L'expression (3.55) est purement formelle et aucune étude de convergence n'a été menée.

**Le moment cinétique** Le système réduit partiellement a la propriété suivante :

**Proposition 3** Avec les notations du paragraphe précédent, dans le nouveau système de coordonnées, on a

$$C_z = \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_j - \sum_{j=1}^n |\tilde{x}_j|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} |\tilde{y}_j|^2. \quad (3.65)$$

**Démonstration 3** Le flot hamiltonien au temps  $\theta$  engendré par  $C_z$  (1.11) est la solution du système suivant, pour  $1 \leq j \leq n$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_j(\theta) = \partial C_z / \partial(-i\bar{x}_j) = -ix_j(\theta) \\ \dot{y}_j(\theta) = \partial C_z / \partial(-i\bar{y}_j) = -iy_j(\theta) \\ \dot{\Lambda}_j(\theta) = -\partial C_z / \partial(\lambda_j) = 0 \\ \dot{\lambda}_j(\theta) = \partial C_z / \partial(\Lambda_j) = 1 \end{cases} \quad (3.66)$$

Donc, le flot au temps  $\theta$  est la transformation  $\Psi_\theta$  définie, pour  $1 \leq j \leq n$ , par

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ \Lambda_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi_\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} x_j \\ e^{-i\theta} y_j \\ \Lambda_j \\ \lambda_j + \theta \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Quand on réalise la réduction partielle, on remplace les variables  $y_n, \bar{y}_n$  par les fonctions  $f_y, \bar{f}_y$  des variables  $\Lambda, x, y, \bar{x}$  and  $\bar{y}$ . Le moment cinétique est alors

$$C_z = \sum_{j=1}^n \Lambda_j - \sum_{j=1}^n |x_j|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|^2 - f_y \bar{f}_y \quad (3.68)$$

On définit le flot  $\psi_\theta$  comme l'application suivante :

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_k \\ \Lambda_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi_\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} x_j \\ e^{-i\theta} y_k \\ \Lambda_j \\ \lambda_j + \theta \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

pour  $1 \leq j \leq n$  et  $1 \leq k \leq n-1$ . Comme  $f_y$  vérifie les relations d'Alembert, le flot  $\psi_\theta$  a la même action sur le système réduit que le flot  $\Psi_\theta$  défini par (3.67) et est donc le flot engendré par l'intégrale première  $C_z$  (3.68) dans le système réduit.  $\psi_\theta$  vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{x}_j(\theta) = -ix_j(\theta) \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n-1, \dot{y}_j(\theta) = -iy_j(\theta) \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{\Lambda}_j(\theta) = 0 \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{\lambda}_j(\theta) = 1 \end{cases} \quad (3.70)$$

C'est à dire  $\dot{X} = f(X)$  où les variables  $(x, y, \Lambda, \lambda)$  sont renommées  $X$ . Pour revenir à une forme symplectique standard, on construit une transformation  $\phi = \phi_1^{-1} \circ P_1$  (3.38, 3.55) qui définit de nouvelles variables canoniques  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda})$  renommées  $\tilde{X}$ .  $\phi$  conserve les relations de d'Alembert, donc

$$\phi(\psi_\theta(X)) = \psi_\theta(\phi(X)). \quad (3.71)$$

Pour exprimer le flot engendré par  $C_z$  dans les nouvelles variables, on a

$$\dot{\tilde{X}} = D\phi(X)\dot{X} = D\phi(X)f(X) \quad (3.72)$$

En dérivant (3.71) par rapport à  $\theta$ , on obtient l'identité

$$D\phi(\psi_\theta(X))f(\psi_\theta(X)) = f(\psi_\theta(\phi(X))). \quad (3.73)$$

Et pour  $\theta = 0$ , on a

$$D\phi(X)f(X) = f(\phi(X)) = f(\tilde{X}). \quad (3.74)$$

On obtient finalement  $\dot{\tilde{X}} = f(\tilde{X})$ . Le flot de  $C_z$  est donc engendré par le même système différentiel (3.70) et, comme les nouvelles variables sont canoniques,

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{\tilde{x}}_j(\theta) = -i\tilde{x}_j(\theta) = \partial C_z / \partial(-i\tilde{x}_j) \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n-1, \dot{\tilde{y}}_j(\theta) = -i\tilde{y}_j(\theta) = \partial C_z / \partial(-i\tilde{y}_j) \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{\tilde{\Lambda}}_j(\theta) = 0 = -\partial C_z / \partial \tilde{\Lambda}_j \\ \text{pour } 1 \leq j \leq n, \dot{\tilde{\lambda}}_j(\theta) = 1 = \partial C_z / \partial \tilde{\Lambda}_j \end{cases} \quad (3.75)$$

Et donc, en intégrant les relations précédentes, on obtient, dans les nouvelles variables :

$$C_z = \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_j - \sum_{j=1}^n |\tilde{x}_j|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} |\tilde{y}_j|^2 + K \quad (3.76)$$

où  $K$  est une constante. Comme, par la transformation  $\phi$ , le point  $(\Lambda, x = 0, y = 0, \lambda = 0)$  est changé en le point  $(\tilde{\Lambda}, \tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0, \tilde{\lambda} = 0)$ , la constante  $K$  est égale à zéro.  $\diamond$

La troisième intégrale première du moment cinétique  $C_z$  a donc la même expression que dans les variables de Poincaré. Cela permet (section 3.2.2), de définir simplement une nouvelle transformation, comme dans le cas de trois corps, pour réduire le nombre de degrés de liberté du système.

**L'origine du problème séculaire** L'origine du problème séculaire dans les nouvelles variables  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \dots = \tilde{x}_n = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \dots = \tilde{y}_{n-1} = 0$  est un point fixe du système. Et, des expressions (3.36) et (3.55), on a  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$ . Et, comme on a choisi  $y_n$  tel qu'il tende vers zéro quand les autres  $y_j$  tendent vers zéro (3.29), on a  $y_n = 0$ . Le point fixe à l'origine du problème réduit séculaire est donc le même que celui du problème séculaire non réduit.

### 3.2.2 Réduction totale

Comme dans le cas de trois corps, la réduction totale, utilisant la troisième composante du moment cinétique est possible. Cette seconde réduction, qui peut être réalisée de la même manière si la réduction partielle n'a pas été réalisée, a déjà été présentée dans les variables d'Andoyer (Boigey, 1981).

On fait une transformation en coordonnées polaires symplectiques :  $(\tilde{x}_j = \sqrt{\tilde{R}_j} e^{i\tilde{\omega}_j})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\tilde{y}_j = \sqrt{\tilde{S}_j} e^{i\tilde{\Omega}_j})_{1 \leq j \leq n-1}$  qui donne :

$$C_z = \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_j - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{S}_j \quad (3.77)$$

Comme pour trois corps (section 3.1), on utilise un changement de variables linéaire dans lequel  $C_z$  est une des nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} (\tilde{\Lambda}_j = \tilde{\Lambda}_j)_{1 \leq j \leq n} \\ (\tilde{R}_j = \tilde{R}_j)_{1 \leq j \leq n} \\ (\tilde{S}_j = \tilde{S}_j)_{1 \leq j \leq n-2} \\ \tilde{S}_{n-1} = -\sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_j + \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{S}_j = -C_z \end{cases} \quad (3.78)$$

Par conjugaison, les nouveaux angles sont :

$$\begin{cases} (\tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j + \tilde{\Omega}_{n-1})_{1 \leq j \leq n} \\ (\tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}_j - \tilde{\Omega}_{n-1})_{1 \leq j \leq n} \\ (\tilde{\Omega}_j = \tilde{\Omega}_j - \tilde{\Omega}_{n-1})_{1 \leq j \leq n-2} \\ (\tilde{\Omega}_{n-1} = \tilde{\Omega}_{n-1}) \end{cases} \quad (3.79)$$

On revient ensuite à des variables complexes rectangulaires :  $(\tilde{x}_j = \sqrt{\tilde{R}_j} e^{i\tilde{\omega}_j})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\tilde{y}_j = \sqrt{\tilde{S}_j} e^{i\tilde{\Omega}_j})_{1 \leq j \leq n-2}$ . Ainsi, le changement de variables total est :

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}_j = \tilde{\Lambda}_j \\ \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j - \tilde{\Omega}_{n-1} \\ \tilde{x}_j = \tilde{x}_j e^{i\tilde{\Omega}_{n-1}} \\ \tilde{y}_j = \tilde{y}_j e^{i\tilde{\Omega}_{n-1}} \\ \tilde{y}_{n-1} = \sqrt{-C_z + \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_j - \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \tilde{x}_j - \sum_{j=1}^{n-2} \tilde{y}_j \tilde{y}_j} e^{i\tilde{\Omega}_{n-1}} \end{cases} \quad (3.80)$$

Comme pour la réduction dans le cas de trois corps, la variable  $\Omega_{n-1}$  n'apparaît pas dans le hamiltonien, grâce aux relations de d'Alembert. La forme symplectique devient

$$\sigma = \sum_{k=1}^n [d\tilde{\lambda}_k \wedge d\tilde{\Lambda}_k - i d\tilde{x}_k \wedge d\tilde{x}_k] - \sum_{k=1}^{n-2} i d\tilde{y}_k \wedge d\tilde{y}_k \quad (3.81)$$

Et la réduction totale associée au moment cinétique est alors achevée pour  $n + 1$  corps.

**Remarque 15** La principale différence avec le cas de trois corps est que l'on a pas de parité dans la variable d'inclinaison  $y_{n-1}$  et que donc on doit développer le radical de (3.80) en série. Dans ce cas, l'origine du système  $(\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \dots = \tilde{x}_n = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \dots = \tilde{y}_{n-2} = 0)$  n'est plus un point fixe du système séculaire. L'étude de ce système après la réduction n'est pas facile et il peut être plus intéressant de ne pas faire cette réduction et de s'arrêter après la réduction partielle.

**Remarque 16** Dans cette méthode, on a choisi d'éliminer la variable  $\tilde{y}_{n-1}$ , mais on peut éliminer toute autre variable  $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j$ . Contrairement au cas de trois corps, ces différentes réductions sont à peu près équivalentes et il faut, de toute manière, développer le radical présent dans (3.80) en série. Encore une fois, ce choix dépend avant tout de l'étude qui va suivre la réduction.

## 3.3 Remarques générales à propos de ces réductions

### 3.3.1 La méthode

Notre méthode pour réduire le nombre de variables en utilisant les intégrales premières et une version constructive du théorème de Darboux peut avoir un intérêt et être appliquée dans un autre problème. Si on a un système hamiltonien qui dépend des variables conjuguées  $(p = (p_1, p_2, \dots, p_n), q = (q_1, q_2, \dots, q_n))$  et  $k$  intégrales premières  $F_1(p, q), F_2(p, q), \dots, F_k(p, q)$ . Si on peut développer ces  $k$  intégrales premières en série et exprimer  $k$  variables

choisies comme des fonctions des autres, on remplace ces variables dans le hamiltonien et dans la forme symplectique qui ne reste pas standard. En utilisant une version constructive du théorème de Darboux, on trouve une nouvelle transformation qui ramène la deux-forme à une forme standard. On a appliqué cette méthode à un système qui n'est pas si différent du système considéré précédemment : Le problème séculaire à tout ordre des masses. Le seul changement est que l'on considère la deux-forme :  $\sigma = -i \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge d\bar{x}_k + dy_k \wedge d\bar{y}_k)$  et que les  $\Lambda$  sont des paramètres du système.

### 3.3.2 Construction de la forme normale de Birkhoff

De la même manière que présentée dans la section (2.3), on construit une forme normale de Birkhoff pour le hamiltonien partiellement réduit. Comme on conserve la relation de trace nulle du système linéaire, de la même manière, des termes résonants peuvent empêcher la construction, même formelle de cette forme normale. En fait, grâce aux relations de d'Alembert, on remarque que la construction de la forme normale ne pose pas de problème.

Comme la valeur propre nulle du système linéaire provient de l'invariance de  $C_1$ , dans le système séculaire partiellement réduit et diagonalisé (variables  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2n-1})$ ) on n'a pas de fréquence nulle. De plus, les  $2n - 1$  autres fréquences restent les mêmes que pour le problème non-réduit (pour démontrer ce fait, il suffit de réaliser la diagonalisation du système avant de faire la réduction partielle). Ceci n'est par contre pas vrai pour le système totalement réduit (Robutel, 1993). Dans l'équation homologique, le terme  $\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{z}_j^{k_j} \bar{\tilde{z}}_j^{\bar{k}_j}$  donne le diviseur  $\sum_{j=1}^{2n-1} (k_j - \bar{k}_j) \nu_j$ . Comme la relation de trace nulle  $\sum_{j=1}^{2n-1} \nu_j = 0$  est toujours vérifiée pour toute valeur des paramètres, on peut encore avoir des diviseurs nuls quand il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $j, 1 \leq j \leq 2n - 1, k_j - \bar{k}_j = p$ . Mais, comme le hamiltonien partiellement réduit satisfait toujours les relations de d'Alembert, on a  $\sum_{j=1}^{2n-1} k_j - \bar{k}_j = 0$  et donc forcément  $p = 0$ . Les seuls termes résonants pour toute valeur des paramètres sont donc les termes  $\prod_{j=1}^{2n-1} (\tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j)^{k_j}$ , termes résonants de  $F_I$ . Ces termes sont ceux que l'on garde dans la forme normale et qui ne dépendent que des actions  $\tilde{J}_j = \tilde{z}_j \bar{\tilde{z}}_j$ . La réduction partielle nous permet donc d'éviter les problèmes de résonance, rencontrés dans la section (2.5) pour le problème non réduit.

Dans le problème sécularisé à un ordre plus élevé du rapport des masses, la somme des fréquences n'est plus nulle (Abdullah et Albouy, 2001) mais dans certains cas reste petite comparée aux fréquences du système linéaire. On peut donc avoir des diviseurs qui ne sont pas nuls mais qui sont proches de zéro. La réduction partielle empêche ces termes d'apparaître.

### 3.3.3 Comparaison entre la réduction totale et la réduction partielle dans le cas de trois corps

Pour les études de stabilité qui vont suivre, appliquées au problème planétaire séculaire de trois corps, on est face à la question pratique suivante : pour pouvoir construire la forme normale de Birkhoff, quelle réduction doit être entreprise, la réduction partielle ou la réduction totale ?

Le problème séculaire de trois corps réduit totalement ne possède plus que 2 degrés de liberté alors qu'après la réduction partielle on conserve trois degrés de liberté et donc plus



de variables. Ainsi, on peut s'attendre, pour la réduction partielle, à avoir plus de termes du développement du hamiltonien et donc des séries construites par la méthode perturbative. Toutefois, un argument plaide en faveur de la réduction partielle. Le fait que l'on conserve des symétries (relations de d'Alembert), donne en fait un nombre de termes plus petit (au moins pour les bas degrés, voir l'annexe D) après la réduction partielle qu'après la réduction totale si on ne remplace pas le terme  $d = \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2 - C_z}$  par sa valeur numérique, ce qui revient à étudier le cas général où la valeur de la norme du moment cinétique n'est pas fixée. Il est en tout cas nécessaire de faire au moins la réduction partielle du problème. En effet, le nombre de termes des séries fait apparaître clairement que ces réductions diminuent sérieusement le nombre de termes dans les polynômes homogènes  $H_k$  et par contre coup dans les polynômes  $W_k$ . De plus, il est très facile, une fois l'étude du hamiltonien réduit partiellement effectuée d'appliquer les résultats de cette étude au problème non réduit. La transformation qui réduit partiellement le problème est en effet explicite et ne présente pas de singularité. On remonte ainsi facilement au comportement des angles des noeuds et des inclinaisons. Le point origine représente aussi la même solution physique dans ces deux problèmes. A contrario, si on fait l'étude du système réduit totalement (d'une des trois manières présentées dans la section 3.1.2), on ne peut pas remonter à une des variables angulaires ce qui nous fait perdre de l'information sur le système non réduit. Dans le cas de la réduction de Jacobi, par exemple, on perd tout renseignement sur la variable  $\tilde{\Omega}$ . En effet, on travaille dans un repère tournant avec la ligne des noeuds mais sans connaître l'évolution de cette ligne. Cette évolution est donnée par  $\dot{\tilde{\Omega}} = \partial H / \partial C_z$  et on doit donc conserver l'expression explicite du hamiltonien en fonction de  $C_z$ . De plus, le problème réduit totalement présente une singularité quand les inclinaisons tendent vers zéro, le point d'origine ne correspond pas aux mêmes solutions que pour les problèmes non réduit et partiellement réduit et les fréquences fondamentales ne sont pas les mêmes (Robutel, 1993). Le véritable choix de réduction doit donc s'effectuer entre la réduction partielle et la réduction totale et dépend avant tout du problème que l'on aborde, du type de résultats que l'on désire obtenir.

Dans les études précédentes d'un système planétaire de trois corps (Locatelli et Giorgilli, 2000) et (Robutel, 1993), la réduction totale (de Jacobi) était systématiquement effectuée. Notre étude permet de mieux comprendre l'intérêt de la réduction partielle et de mener une étude sur un système plus général.

### 3.3.4 Le plan invariant

Le plan invariant, orthogonal au moment cinétique, joue un rôle central dans la réduction partielle. En effet, si on choisit un autre plan comme plan de référence, l'intégrale  $C_1$  n'est plus égale à zéro. Pour le cas de trois corps l'opposition des noeuds, base de la réduction partielle n'est plus vérifiée. Pour  $n$  corps, dans l'expression de  $y_n$  (3.29), on a

$$\alpha = C_1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sqrt{\Lambda_i - |x_i|^2 - \frac{|y_i|^2}{2}} \quad (3.82)$$

avec  $C_1 \neq 0$ . Donc, quand on remplace  $y_n$  dans le hamiltonien par son expression (3.29), le nouvel hamiltonien ne satisfait plus les relations de d'Alembert et la parité en les variables d'inclinaison. La situation est plus difficile à comprendre : si les inclinaisons sont nulles au

début du mouvement, elles ne restent pas égales à zéro comme pour le plan invariant. Le point origine  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \dots = \tilde{x}_n = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \dots = \tilde{y}_{n-1} = 0$  n'est plus un point fixe du système séculaire.

De plus, les solutions formelles du problème dans le repère lié au plan invariant sont des séries quasi périodiques dépendant de  $3n - 1$  fréquences non nulles  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{3n-1}$  : si  $Z$  est une des coordonnées polaire complexe  $(\sqrt{\tilde{\Lambda}_j} \exp(i\tilde{\lambda}_j), \tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ , on a

$$Z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^{3n-1}} a_k \exp(i(k_1\nu_1 + \dots + k_{3n-1}\nu_{3n-1})t), \quad (3.83)$$

Et cette série vérifie des relations de d'Alembert :  $a_k = 0$  si  $\sum_{j=1}^{3N-1} k_j \neq \sigma(Z)$  où  $\sigma(\sqrt{\tilde{\Lambda}_j} \exp(i\tilde{\lambda}_j)) = 0$  et  $\sigma(\tilde{x}_j) = \sigma(\tilde{y}_j) = 1$ . Ces relations sur les  $k_j$  permettent d'éviter que les expressions de  $\tilde{x}_j$  ou  $\tilde{y}_j$  contiennent des termes constants. Changer de repère (et de plan de référence) revient à transformer le système de coordonnées cartésiennes par une transformation d'Euler  $\mathcal{R}$ . On peut exprimer cette transformation comme la composée de trois rotations basiques :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_3(\theta_3)\mathcal{R}_1(\theta_2)\mathcal{R}_3(\theta_1)$  où  $\theta_2$  représente l'angle entre l'ancien et le nouveau plan de référence et les rotation sont définies par

$$\mathcal{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Pour calculer les nouveau éléments elliptiques  $I_j, \Omega_j$  dans le nouveau repère, on définit

$$z_j = \frac{1}{\|\mathbf{C}_j\|} ((C_x)_j + i(C_y)_j) = \sin I_j \sin \Omega_j - i \sin I_j \cos \Omega_j. \quad (3.85)$$

On note  $\mathcal{R}_k(z_j)$  la nouvelle valeur de  $z_j$  par toute rotation  $\mathcal{R}_k$ . On a

$$\mathcal{R}_3(\theta)(z_j) = e^{i\theta} z_j \text{ et} \quad (3.86)$$

$$\mathcal{R}_1(\theta)(z_j) = z_j \cos^2(\theta/2) + \bar{z}_j \sin^2(\theta/2) + i \sin \theta \sqrt{1 - |z_j|^2} \quad (3.87)$$

En composant les trois rotations,  $\mathcal{R}z_j$  la nouvelle valeur de  $z_j$ , dans le nouveau repère est :

$$\mathcal{R}z_j = z_j \cos^2(\theta_2/2) e^{i(\theta_3+\theta_1)} + \bar{z}_j \sin^2(\theta_2/2) e^{i(\theta_3-\theta_1)} - i \sin \theta_2 e^{i(\theta_3+\theta_1)} \sqrt{1 - |z_j|^2} \quad (3.88)$$

Et, à cause du terme  $\sqrt{1 - |z_j|^2}$  dans (3.88), dans le nouveau repère, des termes constants apparaissent dans les valeurs de l'inclinaison et des angles des noeuds et donc dans l'expression des  $\tilde{y}$ , des  $x, y$ . Ce fait a été observé dans les théories séculaires construites par exemple dans le repère  $J2000$  (voir Laskar, 1987).

# Chapitre 4

## Stabilité du problème séculaire planétaire Soleil-Jupiter-Saturne

On prouvera, en prenant comme base les techniques de réduction et de normalisation précédentes et en utilisant le schéma de la section (2.1.2), des résultats de stabilité pour le problème séculaire SJS, dont les paramètres et conditions initiales sont données dans la section (1.5). Dans les études menées par la suite, dans ce chapitre, on fera varier les conditions initiales pour mesurer l'efficacité des méthodes proposées et une étude précise sera réalisée pour les conditions réelles du problème SJS (section 4.5).

### 4.1 Etude de la dynamique, choix de la méthode

#### 4.1.1 Définitions

Les définitions et propriétés présentées ici sont extraites de (Giorgilli et al., 1989). Cet article sert de base aux raisonnements qui vont être développés dans cette partie. Soit  $E$  l'espace des séries formelles dans les variables  $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n$  et  $E_k$  le sous-espace de  $E$  des polynômes homogènes de degré  $k$ . Les variables  $(x_j, -i\bar{x}_j)$  sont conjuguées pour la forme symplectique. Soit  $f \in E$ , on écrit  $f = \sum_{|m| \geq 0} [f]_k$  avec  $[f]_k \in E_k$ . On note

$$[f]_k = \sum_{|m|=k} \alpha_m \prod_{j=1}^n x_j^{m_j} \bar{x}_j^{\bar{m}_j}$$

où  $m = (m_1, \bar{m}_1, \dots, m_n, \bar{m}_n) \in Z^{2n}$  et  $|m| = \sum_{j=1}^n (m_j + \bar{m}_j)$ . Les propriétés suivantes sont immédiates : si  $f_k \in E_k$  et  $g_{k'} \in E_{k'}$  alors  $f_k g_{k'} \in E_{k+k'}$  et le crochet de Poisson  $\{f_k, g_{k'}\} \in E_{k+k'-2}$ . Les estimations que l'on va faire pour prouver des résultats de stabilité nécessitent la définition de normes sur les espaces  $E$  et  $E_k$  : si  $f_k \in E_k$ , on définit la norme "k" de  $f_k$  comme étant

$$\|f_k\|_k = \sum_{|m|=k} |\alpha_m| \quad (4.1)$$

On a la propriété fondamentale suivante, démontrée dans l'article (Giorgilli et al., 1989) : si  $f_k \in E_k$  et  $g_{k'} \in E_{k'}$  alors

$$\|\{f_k, g_{k'}\}\|_{k+k'-2} \leq k k' \|f_k\|_k \|g_{k'}\|_{k'} \quad (4.2)$$

On définit le domaine  $\Delta_\rho = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) / |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \leq \rho\}$  et la norme suivante

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \Delta_\rho} |f(x)| \quad (4.3)$$

Le lien entre les deux normes définies est fourni par les inégalités fondamentales suivantes :

$$\|f_k\|_\rho \leq \rho^k \|f_k\|_k \quad (4.4)$$

et, en découlant, quand cette série converge,

$$\|f\|_\rho \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \|f_k\|_k \quad (4.5)$$

Ces définitions seront réintroduites avec de légères variations et précisions lors des études suivantes.

### 4.1.2 Travail préparatoire

On a vu, dans les chapitres précédents (2 et 3), la nécessité de réduire partiellement le problème pour pouvoir construire la forme normale de Birkhoff à tout ordre et donc mettre en oeuvre les méthodes perturbatives voulues (dont les idées générales sont présentées dans la section (2.1.2)). En tenant compte des remarques de la section (3.3.3), on s'arrête après cette réduction et on ne réalise donc pas la réduction totale du système. On effectue ensuite la diagonalisation du système linéaire. Cette diagonalisation est déjà effectuée pour les variables d'inclinaison ( $y$ ) dans le système partiellement réduit. En effet, la partie de degré deux du hamiltonien vérifie les relations de d'Alembert et de parité en les variables d'inclinaison et le seul terme de degré deux contenant la variable  $y$  est donc le monôme  $y\bar{y}$  (voir annexe E). On n'effectue alors la diagonalisation présentée dans la section (2.2) que pour les variables  $x$  seules. On obtient un hamiltonien qui dépend des variables canoniques diagonalisées que l'on nomme  $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3$  où  $z_1, z_2$  sont associées aux variables d'excentricités et  $z_3 = y$  à la variable d'inclinaison. Les variables actions-angles associées sont  $(J_1, J_2, J_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

### 4.1.3 Premières études, choix de la méthode

L'étude de la dynamique du problème SJS présente plusieurs difficultés. La première est que, dans les variables les plus adaptées pour l'étude dynamique du problème à long terme (les variables de Poincaré), on n'a pas d'expression explicite du hamiltonien  $h_0$  (1.28) (que l'on renomme  $H$  dans la suite de l'étude). On ne peut, en pratique, que calculer la série  $H_0$  tronquée à un certain degré des variables d'excentricité et d'inclinaison (par une procédure TRIP, voir annexe C) qui représente les premiers termes du développement en série du hamiltonien. Le hamiltonien se présente alors comme

$$H = H_0 + R \quad (4.6)$$

où  $H_0$  est une série connue et  $R$ , le reste, n'est pas connu. On essaiera d'estimer  $R$  tel que la dynamique liée à  $H$  soit voisine de la dynamique liée à  $H_0$  pendant un temps assez long.

## Etude préliminaire de $H_0$

On calcule, par des procédures TRIP, le hamiltonien séculaire réduit partiellement et diagonalisé, jusqu'au degré  $n_H$  en les variables  $z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2$  et  $\bar{z}_3$ . Le choix du degré  $n_H$  dépend principalement du temps de calcul et on a pris  $n_H = 20$ . Le calcul du polynôme  $H_0$  fait intervenir des polynômes contenant les variables de Poincaré ainsi que les variables de longitudes moyennes  $\lambda_j$  et le temps de calcul devient très vite énorme. Il est multiplié par 5 à peu près à chaque passage de  $n_H$  à  $n_H + 2$ . Le temps de calcul pour  $n_H = 20$  est d'une semaine en utilisant le calculateur formel de l'école polytechnique. On verra que pour notre étude et pour les conditions initiales du problème SJS, ce degré de troncature sera suffisant pour affirmer des résultats de stabilité sur un temps de l'ordre de l'âge du système solaire. On redéfinit le domaine suivant :  $\Delta_\rho = \{z_1, z_2, z_3 / |z_1|, |z_2|, |z_3| \leq \rho\}$ . On étudie dans un premier temps le polynôme  $H_0$  et plus particulièrement les valeurs prises par le majorant de cette fonction sur un domaine  $\Delta_\rho$ . Ce polynôme  $H_0$  nous donne une bonne approximation de ce que va être le vrai hamiltonien  $H$  pour des valeurs des variables proches du point fixe elliptique.

**Etude du polynôme  $H_0$**  On va étudier ce polynôme et les valeurs qu'il prend en utilisant les deux norme définies précédemment (4.1,4.3). On commence par tracer sur la figure (4.1), les valeurs de  $||[H_0]_k||_k$ . Comme on connaît explicitement le hamiltonien  $H_0$ , les normes "k" de  $[H_0]_k$  sont calculées rigoureusement degré par degré (de 2 à 20) par une procédure TRIP.

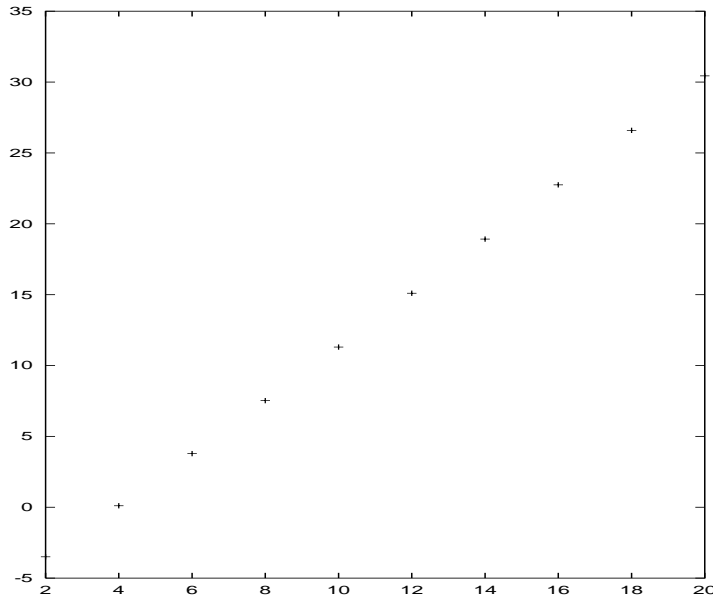


FIG. 4.1:  $\log_{10}$  de  $||[H_0]_k||_k$  en fonction du degré  $k$  du hamiltonien  $H_0$ .

On a, grâce à cette figure (4.1), une mesure empirique du rayon de convergence de la série  $H_0$ .  $H$  étant analytique sur  $\Delta_\rho$  pour  $\rho < \rho_0$  où  $\rho_0$  est le rayon de convergence de cette série, il existe des réels  $c, d$  tels que

$$||[H_0]_k||_k \leq dc^{k-2} \quad (4.7)$$

On estime les réels  $d, c$  donnés par la figure (4.1) pour  $k \leq 20$ . les valeurs sont  $c \simeq 77.5$  et  $d \simeq 1.979 \cdot 10^{-4}$ . On peut donner alors une mesure approximative du rayon de convergence du hamiltonien se basant sur les premiers termes de la série  $H$ . L'estimation du rayon de convergence donnée par cette méthode grossière est  $\rho_C \simeq c^{-1} = 1.28 \cdot 10^{-2}$ . Cette mesure est bien sûr tout sauf rigoureuse mais donne une idée des domaines de convergence du hamiltonien considéré et en pratique, on travaillera toujours dans un domaine plus réduit, plus près du point fixe elliptique. On définit le rayon réel du problème comme étant  $\rho_r = \max(|z_1(0)|, |z_2(0)|, |z_3(0)|)$ . Les conditions initiales sont donc dans le domaine  $\Delta_{\rho_r}$ . Pour le problème SJS, ces valeurs initiales sont connues :

$$\begin{cases} |z_1(0)| = 3.4908 \cdot 10^{-3} \text{ UA} \cdot a n^{1/2} \\ |z_2(0)| = 3.4537 \cdot 10^{-3} \text{ UA} \cdot a n^{1/2} \\ |z_3(0)| = |y(0)| = 9.6915 \cdot 10^{-4} \text{ UA} \cdot a n^{1/2} \end{cases} \quad (4.8)$$

On prend donc  $\rho_r = |z_1(0)| = 3.4908 \cdot 10^{-3} \text{ UA} \cdot a n^{1/2}$ . Le rayon  $\rho_r$  est donc bien inférieur à  $\rho_C$  mais, et c'est une des caractéristique fondamentale du problème (SJS), les valeurs de  $\rho_C$  et  $\rho_r$  sont quasiment du même ordre de grandeur ( $\rho_r/\rho_C = 0.27$ ). Dans la suite, on verra que la valeur de  $\rho_r$  sera toujours faiblement en dessous des seuils de convergence des séries intervenant dans les méthodes perturbatives mises en oeuvre. On étudie ensuite le rapport entre les majorations en norme "k" et les majorations  $||[H_0]_k||_{\rho}$ . Pour cela, on définit le réel  $\tau_{k,\rho}(f)$  comme étant

$$\tau_{k,\rho}(f) = \frac{\rho^k ||[f]_k||_k}{||[f]_k||_{\rho}} \quad (4.9)$$

Ce rapport est, pour une fonction  $f$  donnée, une mesure du rapport entre les deux principales normes utilisées (4.1,4.3).

La figure (4.2) représente une estimation de la valeur moyenne de  $\tau_{k,\rho}(H_0)$  (sur l'ensemble des valeurs de  $\rho$  inférieures à  $\rho_C$ ) en fonction du degré  $k$ . Pour calculer  $||[H_0]_k||_{\rho}$ , on utilise une méthode approchée : on calcule, pour un grand nombre de points de  $\Delta_{\rho}$  la valeur de la fonction  $[H_0]_k$  et on choisit la valeur maximale comme majorant. On voit nettement que ce rapport se dégrade en fonction de la valeur de  $k$  et est, en première approximation, une série géométrique de raison 0.67 environ. Et donc, numériquement, on trouve  $\tau_{k,\rho}(H_0) \sim a^k = (0.67)^k$ . Les normes "k" seront très utiles pour établir des propriétés rigoureuses de convergence et pour estimer les restes liés à des transformations utilisant des méthodes de Lie (en particulier grâce à la relation 4.2). Mais elles ont tendance à diminuer le rayon de convergence de la série  $H_0$  d'un facteur  $a = 0.67$  environ. L'estimation du rayon de convergence vrai est donc à peu près égal à  $\rho_C/a \simeq 1.9 \cdot 10^{-2}$ .

**Remarque 17** On a utilisé le critère donné par Sundman (Sundman, 1916 voir aussi Hagi-hara, 1989b) pour estimer d'une autre manière le rayon de convergence de la série  $H$ .

Le critère donné par Sundman est le suivant :

**Théorème 1** *Le développement de l'inverse de la distance mutuelle  $1/\Delta$  en les éléments elliptiques classiques est convergent si et seulement si les éléments elliptiques vérifient la relation suivante :*

$$a_1 F_1(e_1) < a_2 F_0(e_2) \quad (4.10)$$

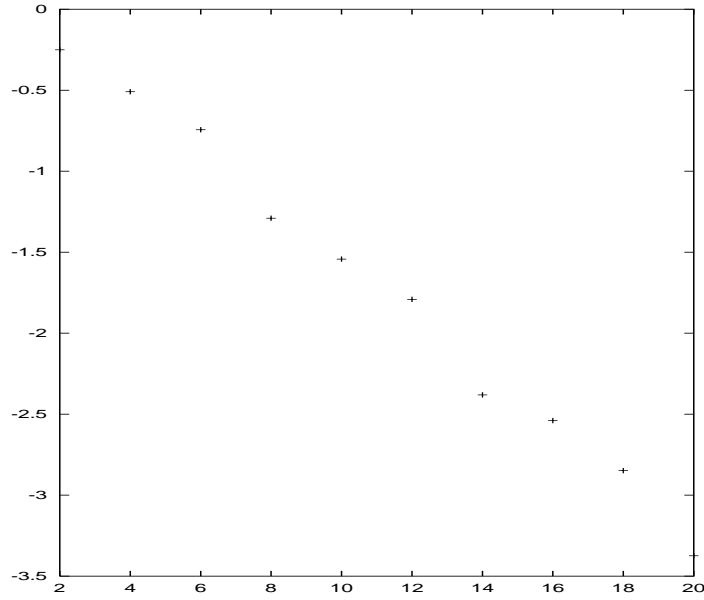


FIG. 4.2:  $\log_{10}$  de la valeur moyenne (pour des valeurs de  $\rho$  telles que  $10^{-3} \leq \rho \leq 1.3 \cdot 10^{-2}$ ) de  $\tau_{k,\rho}(H_0)$  en fonction de  $k$ .

avec

$$\begin{cases} F_1(g) = e^w + g + (\sqrt{1+g^2} - 1) \cosh(w) \\ F_0(g) = e^{-w} - g - (\sqrt{1+g^2} - 1) \cosh(w) \end{cases} \quad (4.11)$$

et avec  $w$  défini par la relation  $w = g \cosh(w)$ .

Dans notre cas présent, on doit donc avoir, comme les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  sont respectivement décroissantes et croissantes,

$$\frac{F_0(e_{2max})}{F_1(e_{1max})} > \alpha \quad (4.12)$$

où  $e_{1max}$  et  $e_{2max}$  sont donnés, dans le domaine  $\Delta_\rho$  par  $e_{jmax} = \sqrt{1 - (1 - \rho^2/\Lambda_j)}$ . On obtient alors la fonction décroissante  $F_2(\rho) = F_0(e_{2max})/F_1(e_{1max})$  et on cherche la valeur minimale du rayon de convergence  $\rho'_C$  telle que  $F_2(\rho'_C) = \alpha$ . Pour le problème SJS,  $\alpha \simeq 0.5443$  et l'étude menée nous donne  $\rho'_C \simeq 7.2 \cdot 10^{-3}$ . Il faut noter que cet article donne un critère pour le cas plan. On a donc recalculé le rayon de convergence  $\rho_C = c^{-1} = 2.1 \cdot 10^{-2}$  dans ce cas précis ( $y = 0$ ). La comparaison des deux rayons n'est pas simple mais le résultat donné n'est pas contradictoire :  $\rho'_C$  est une estimation rigoureuse du rayon de convergence et  $\rho_C$  est une estimation, d'après les seuls premiers termes de  $H$  de ce minimum. Ces deux rayons sont du même ordre de grandeur.

**Etude grossière de la diffusion** On étudie la diffusion des actions  $J$  dans un domaine où la convergence du hamiltonien est supposée forte. C'est-à-dire dans un domaine compris dans  $\Delta_{\rho_C}$ . Dans l'esprit du lemme (1), on estime le temps maximal (en années) pour avoir une diffusion de  $10^{-2}$  pour les actions de départ. On utilise pour cela la norme "k" du hamiltonien, ce qui permet d'établir des majorations rigoureuses des séries considérées.

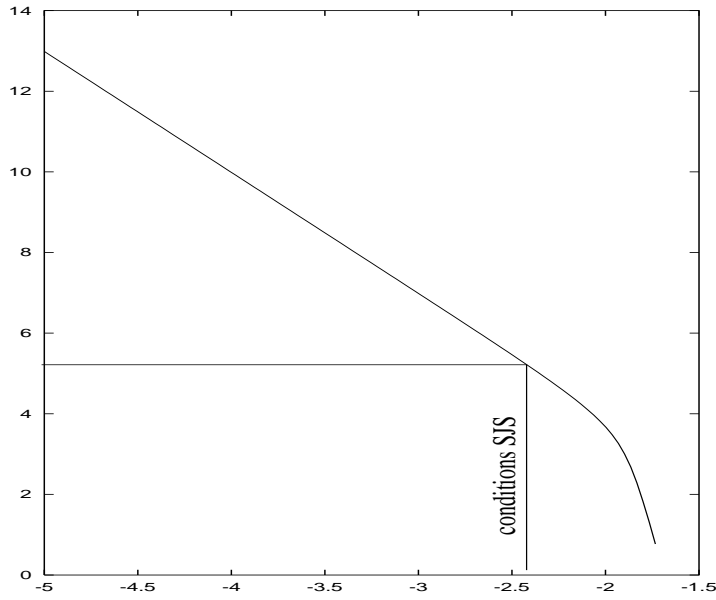


FIG. 4.3:  $\log_{10}$  du temps minimal pour une diffusion de  $10^{-2}$  des actions  $J_j$  en fonction de  $\log_{10}$  du rayon des actions de départ.

Les résultats sont donnés sur la figure (4.3) et la conclusion qui découle de cette figure est que, pour les valeurs du problème SJS, cette méthode est beaucoup trop grossière et ne permet d'obtenir une stabilité que sur un temps très court ( $t \simeq 10^5$  ans), correspondant à quelques périodes séculaires tout au plus. A plus forte raison l'étude du hamiltonien complet  $H$  donnerait, par une méthode similaire de mauvais résultats. Cette étude n'est évidemment pas rigoureuse mais permet d'avoir une idée des domaines de convergence, des domaines sur lesquels on va pouvoir effectivement travailler et de l'amélioration apportée par la construction de la forme normale par rapport à une étude brute (figure 4.14).

**Etude basée sur l'article de Giorgilli et al., 1989** On essaie d'appliquer le théorème (6.1) fourni par l'article (Giorgilli et al., 1989), qui fournit des résultats analogues à ceux que l'on veut obtenir :

**Théorème 2** (Giorgilli et al., 1989) Soit  $H = \sum_{k \geq 2} H_k$  le hamiltonien d'un système à  $n$  degrés de liberté avec  $H_2 = i \sum_{j=1}^n \nu_j x_j y_j$  et  $\|H_k\|_k \leq d c^{k-2}$  pour  $k \geq 3$ . On suppose que les fréquences  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  sont non résonantes et que pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  et  $|k| = \sum_{j=1}^n |k_j| \leq r$ , on a  $|k \cdot \nu| \geq \alpha_r > 0$ . Alors le hamiltonien  $T_r^* H$ , issu de la construction de la forme normale jusqu'au degré  $r$  est convergent sur tout disque  $\tilde{\Delta}_R$  de rayon  $R < R_r^*$  avec

$$R_r^* = \left[ \left(9 + \frac{32}{5}r\right) \frac{d}{\alpha_r} + \left(1 + \frac{32}{5}r\right) \right]^{-1} c^{-1} \quad (4.13)$$

Et la variation des nouvelles actions  $\dot{J}_r$  est majorée par

$$|\dot{J}_r| \leq \frac{d}{c} R \left(\frac{R}{R_r^*}\right)^r \left(r + 1 - r \frac{R}{R_r^*}\right) \left(1 - \frac{R}{R_r^*}\right)^{-2} \quad (4.14)$$



La principale différence, si on veut appliquer ce théorème en construisant une forme normale de Birkhoff est que nos fréquences sont ici fortement résonantes :  $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0$ . On a donc  $\mathcal{M}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \neq \{0\}$ . Toutefois, grâce aux relations de d'Alembert, cette résonance n'empêche pas la construction d'une forme normale résonante (voir section 3.3.2). Donc on a seulement besoin d'un petit aménagement pour retrouver les mêmes majorations. La définition de  $\alpha_r$  doit être changée et on prend  $\alpha'_r = \min |k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2|$  pour  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  et  $|k| \leq 2r$ . De cette manière, si  $m = (m_1, m_2, m_3)$  est tel que  $|m| \leq r$  alors on a  $|m_1 \nu_1 + m_2 \nu_2 + m_3 \nu_3| = |(m_1 - m_3) \nu_1 + (m_2 - m_3) \nu_2|$ . Comme  $|m_1 - m_3| + |m_2 - m_3| \leq |m_1| + |m_2| + 2|m_3| \leq r + |m_3| \leq 2r$ , on peut en déduire que  $|m_1 \nu_1 + m_2 \nu_2 + m_3 \nu_3| \geq \alpha'_r$  pour  $|m| \leq r$ . Donc  $\alpha_r \geq \alpha'_r$  et on peut se servir des majorations fournies par l'article dans le cas  $\mathcal{M} = 0$  en remplaçant  $\alpha_r$  par  $\alpha'_r$ . Il reste alors à calculer une majoration des normes "k" de  $[H_0]_k$ . On a déjà calculé numériquement la valeur des réels  $c, d$  tels que  $\| [H_0]_k \|_k \leq d c^{k-2}$  pour toutes les valeurs de  $k$  inférieures à  $n_H = 20$ . Pour appliquer le théorème, on suppose que cette majoration tient pour toute valeur de  $k$  (le hamiltonien étant une fonction analytique, ses normes  $k$  sont de toute façon bornées par une suite à comportement exponentiel (donnée par exemple par le critère de Sundman, voir la remarque 17). On applique alors le théorème : on calcule la fonction  $R_r^*$  en fonction des différentes valeurs du degré de normalisation  $r$  par la formule (4.13).

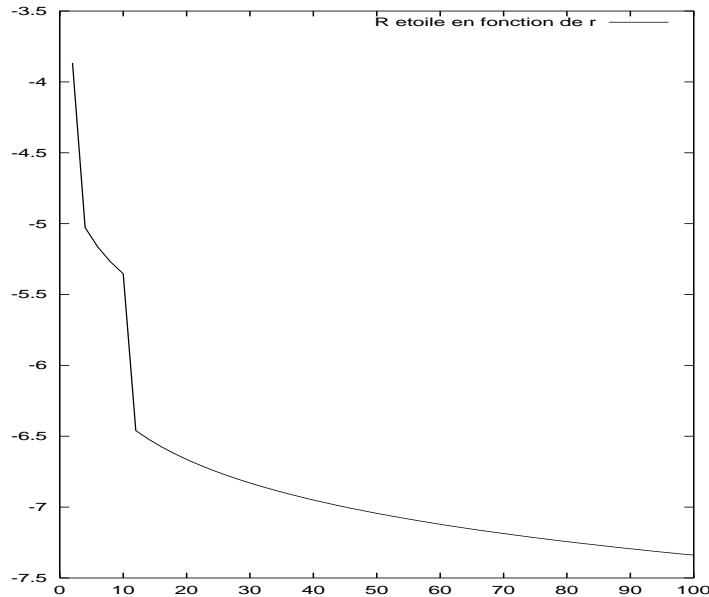


FIG. 4.4:  $\log_{10}$  de  $R_r^*$  en fonction du degré de normalisation  $r$

La figure (4.4) nous donne un premier renseignement sur les domaines de convergence estimés par cette méthode. Les conditions initiales du problème SJS ne sont malheureusement pas comprises dans ce domaine ( $\log_{10}(\rho_r) \sim -2.45$ ). La méthode présentée dans cet article est très générale et peut être appliquée à de nombreux problèmes. Mais dans notre cas particulier, où les conditions initiales ont des valeurs assez importantes, il faut appliquer une méthode plus précise, tenant plus compte des particularités du système pour obtenir des résultats de stabilité. Pour cela, on va calculer explicitement les fonctions en jeu en se servant du manipulateur algébrique TRIP.

## Peut-on négliger l'influence du reste $R$ ?

Les équations du mouvement sont, pour  $1 \leq j \leq 3$  et exprimées en les variables  $(z, \bar{z})$  :

$$\begin{cases} \dot{J}_j = \frac{\partial H_0}{\partial \phi_j}(z, \bar{z}) + \frac{\partial R}{\partial \phi_j}(z, \bar{z}) \\ \dot{\phi}_j = -\frac{\partial H_0}{\partial I_j}(z, \bar{z}) - \frac{\partial R}{\partial J_j}(z, \bar{z}) \end{cases} \quad (4.15)$$

On note  $(J_0)_j(t)$  et  $(\phi_0)_j(t)$  les solutions du système de hamiltonien  $H_0$  seul (système non perturbé par le reste) et  $(z_0, \bar{z}_0)$  les coordonnées cartésiennes associées. On espère que pour un  $R$  suffisamment petit  $J_j(t)$  et  $(J_0)_j(t)$  vont être suffisamment proches pendant un temps de l'ordre de l'âge du système solaire. On a donc

$$\begin{cases} (J_0)_j = \frac{\partial H_0}{\partial \phi_j}(z_0, \bar{z}_0) \\ (\phi_0)_j = -\frac{\partial H_0}{\partial J_j}(z_0, \bar{z}_0) \end{cases} \quad (4.16)$$

On se place dans le domaine de l'espace  $\Delta$  des phases correspondant à  $J_1, J_2, J_3 \leq J_{max}$ . On a, par le théorème des accroissements finis pris sur ce domaine :

$$|J_j(t) - (J_0)_j(t)| \leq t \sup_{t_1 \in [0, t]} |\dot{J}_j(t_1) - (\dot{J}_0)_j(t_1)| \quad (4.17)$$

$$|J_j(t) - (J_0)_j(t)| \leq t \sup_{\Delta} \left| \frac{\partial H_0}{\partial \phi_j}(z_0, \bar{z}_0) - \frac{\partial H_0}{\partial \phi_j}(z, \bar{z}) - \frac{\partial R}{\partial \phi_j}(z, \bar{z}) \right| \quad (4.18)$$

Et donc

$$\begin{aligned} |J_j(t) - (J_0)_j(t)| &\leq t \sup_{\Delta} \left\| D \frac{\partial H_0}{\partial \phi_j} \right\| \sup_{\Delta} \|z - z_0\| \\ &\quad + t \sup_{\Delta} \left| \frac{\partial R}{\partial \phi_j}(z, \bar{z}) \right| \end{aligned} \quad (4.19)$$

Cette majoration donne de très mauvais résultats car le premier terme est de l'ordre de grandeur de  $H_0$  : en effet  $\|D(\partial H_0 / \partial \phi_j)\|$  est beaucoup plus gros que  $|\partial R / \partial \phi|$ . On n'obtient des résultats que pour un domaine très petit inclu dans  $\Delta$ , pour lequel  $\|z - z_0\|$  est proche de zéro, de la même manière que pour le lemme (1). On ne peut pas sous ces conditions ne considérer que la dynamique du hamiltonien  $H_0$  pour approcher celle de  $H$ . On va donc considérer la dynamique globale du système tout en ne construisant une forme normale qu'à partir du seul hamiltonien connu  $H_0$ . Cela va nous permettre d'éliminer, par cette transformation, la difficulté rencontrée qui vient principalement de la variation trop importante de  $H_0$ .

## Conclusion, Méthode choisie

On choisit de mettre en oeuvre la méthode suivante : on calcule le hamiltonien  $H_0$  jusqu'à un degré  $n_H$  (aussi élevé que possible pour avoir un reste  $R$  aussi petit que possible) puis on

construit explicitement un changement de variables qui donne une forme normale de Birkhoff jusqu'à un degré  $n_N$  à partir du hamiltonien  $H_0$  seul. On a

$$H(J, \phi) = \tilde{N}_0(\tilde{J}) + \tilde{R}_0(\tilde{J}, \tilde{\phi}) + \tilde{R}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \quad (4.20)$$

où  $\tilde{N}_0$  est la forme normale,  $\tilde{R}_0$  le reste venant de la normalisation et  $\tilde{R}$  est le reste  $R$  exprimé dans les nouvelles variables. Comme ici  $\partial\tilde{N}_0/\partial\tilde{\phi} = 0$ , il suffit que  $\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})/\partial\tilde{\phi}$  soit suffisamment petit pour garantir des résultats de stabilité.

#### 4.1.4 Construction de la forme normale

##### Construction formelle

La transformation est définie de la même manière qu'à la section (2.3) et est calculée explicitement jusqu'à un certain ordre  $n_N$ . La limitation de cette construction est donnée par le temps de calcul des séries  $W_k$ .

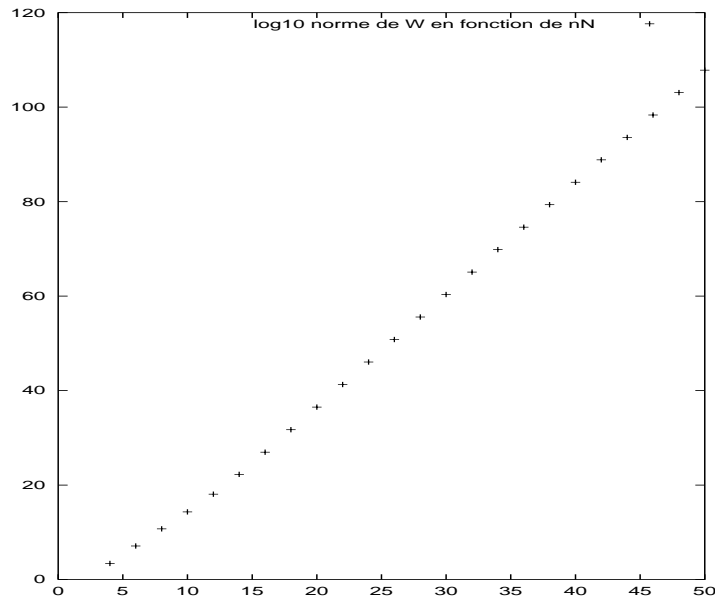


FIG. 4.5:  $\log_{10}$  de  $\|W_{k-2}\|_k$  en fonction du degré  $k$

Sur cette figure (4.5), on représente les normes  $k$  du hamiltonien  $W$  définissant la transformation qui permet la construction de la forme normale (en partant du hamiltonien tronqué au degré  $n_H = 20$ ). Le calcul effectif de ces normes est très important et va nous permettre de majorer efficacement les termes des séries intervenant lors de la normalisation du hamiltonien. Le temps pris pour le calcul de ces fonctions  $W_k$  double à peu près à chaque passage de  $k$  à  $k + 2$  et on a calculé pour l'instant ces fonctions jusqu'à  $k = n_N = 50$ . Pour ce degré, le temps de calcul est à peu près d'une semaine en utilisant le service de calcul formel de l'école Polytechnique. On ne peut donc pas espérer aller à un ordre beaucoup plus élevé, le temps de calcul devenant très rapidement énorme.

## Domaine de convergence

La définition de la transformation effectuant la normalisation à un degré donné que l'on a fournie dans la section (2.3) est purement formelle et on a donc besoin d'estimer son rayon de convergence. On utilise les résultats classiques de (Ramis et al., 1987).

**Definition 1** *Cylindre de sécurité :*

*On considère l'équation différentielle*

$$y' = f(y, t) \quad (4.21)$$

où  $f : J \times U \rightarrow E$  est continue,  $J$  étant un intervalle de  $R$  et  $U$  un ouvert de l'espace de Banach  $E$ . On appelle cylindre de sécurité en  $(t_0, y_0) \in J \times U$  tout couple  $(I, B)$ , où  $I$  est un intervalle borné vérifiant  $\{t_0\} \subset I \subset J$ ,  $B$  une boule fermée  $B_f(y_0, r)$ , ( $r > 0$ ) incluse dans  $U$  et si il existe un réel  $M$  strictement positif tel que :

$$\forall t \in I, |t - t_0| \leq \frac{r}{M} \quad \text{et} \quad \forall (t, y) \in I \times B \quad \|f(t, y)\| \leq M \quad (4.22)$$

**Lemme 7** *Il existe un réel  $r_0$  strictement positif tel que, pour l'équation différentielle (2.30),  $[0, 1] \times B_f(0, r_0)$  soit un cylindre de sécurité.*

**Démonstration 7** On définit la fonction  $M : R \rightarrow R$  de la façon suivante :

$$M(r) = \max_{j=1,3} \sum_{k=2}^{n_N-2} \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{k+1} r^{k+1} \quad (4.23)$$

Alors, sur le domaine  $B(0, r) \times [0, 1]$ , la fonction  $JDW(\tilde{z}, \epsilon)$  est majorée par le majorant  $M(r)$ . Or on a  $W(\tilde{z}, \epsilon) = \sum_{k=1}^{n_N-3} \epsilon^k W_{k+1}$ . Comme  $W_1 = 0$ , On a  $M(r) = O(r^3)$  quand  $r$  tend vers zéro. Et donc il existe  $r_0$  tel que pour tout  $r \in [0, r_0]$ , on a  $M(r) \leq r$ . On vérifie alors bien que  $[0, 1] \times B(0, r_0)$  est un cylindre de sécurité.  $\diamond$

On utilise alors le théorème suivant :

**Théorème 3** (Ramis et al., 1987) *Soit  $(I, B)$  un cylindre de sécurité en  $(t_0, y_0)$ . Si  $f$  est  $k$ -lipchitzienne en  $y$  sur  $I \times B$ , il existe une solution unique de (4.21),  $\Psi : I \rightarrow E$ , telle que  $\Psi(I) \subset B$  et  $\Psi(t_0) = y_0$ .*

Comme la fonction  $JDW(\tilde{z}, \epsilon)$  est à coefficients polynômiaux, elle est  $k$ -lipchitzienne en  $\tilde{z}$  et on prouve donc l'existence d'une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle  $[0, 1]$  entier. Naturellement, le  $r_0^C$  critique apparait : le réel  $r_0$  le plus grand tel que  $[0, 1] \times B(0, r_0)$  soit un cylindre de sécurité. La valeur de  $r_0^C$  nous donne une borne supérieure du rayon de convergence de cette transformation. On estime alors les valeurs de  $r_0^C$  en fonction de  $n_H$  et  $n_N$ . On a

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{r_0} \leq \sum_{k=2}^{n_N-2} \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{k+1} r_0^{k+1} \quad (4.24)$$

Donc il existe un réel  $r_0^C$  minimum tel que

$$\sum_{k=2}^{n_N-2} \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{k+1} r_0^{k+1} \leq r_0 \quad (4.25)$$

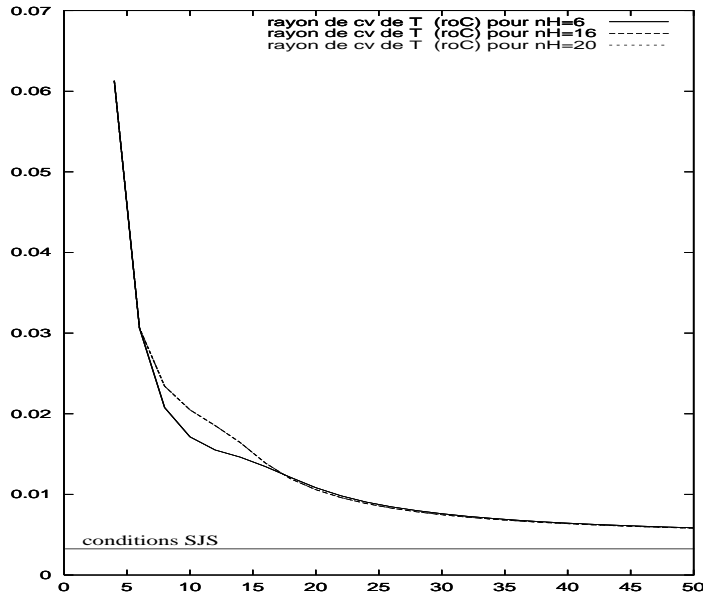


FIG. 4.6: rayon critique  $r_0^C$  en fonction du degré de normalisation  $n_N$  et pour plusieurs valeurs du degré de troncature du hamiltonien  $n_H$ .

pour tout  $r_0 \leq r_0^C$  et pour tout  $j = 1, 2, 3$ . On calcule pratiquement la valeur de  $r_0^C$  qui dépend donc avant toute chose du degré de normalisation du système.

On voit, sur la figure (4.6), que la dépendance de ces courbes en fonction du degré  $n_H$  de troncature du hamiltonien est faible (les courbes tracées correspondent à  $n_H = 6$ ,  $n_H = 16$  et  $n_H = 20$ ). Ces courbes doivent bien entendu tendre vers zéro quand le degré de normalisation tend vers l'infini (La forme normale de Birkhoff n'est pas convergente). Mais pour le domaine de conditions initiales considéré, on peut aller jusqu'à une normalisation au degré 50 sans problème. La différence entre les courbes  $n_H = 16$  et  $n_H = 20$  est très faible et pourrait être vue par un zoom aux alentours de  $n_N = 18$ .

## 4.2 Diffusion des nouvelles actions $\tilde{J}$

Dans cette section, on aborde une question plus simple qui consiste en l'étude de la dynamique des nouvelles actions en ne tenant pas compte du reste  $R$  (4.6) : on va majorer la diffusion relative de ces actions par une petite quantité sur un temps fini mais long en ne tenant compte que du reste venant de la normalisation.

### 4.2.1 Méthode

Pour la majoration rigoureuse des restes issus de la normalisation, on utilise une méthode semblable à celle de l'article (Giorgilli et al., 1989). La principale différence est que l'on va calculer explicitement les polynômes résultants de la construction de la forme normale jusqu'à des degrés élevés et on va donc pouvoir établir des majorations plus précises pour les séries entrant en jeu (dans l'esprit de travaux comme (Giorgilli et Skokos, 1996), (Skokos et

Dokoumetzikis, 2000) et (Gabern et Jorba, 2001)). On définit  $\tilde{\Delta}_\rho = \{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 / |\tilde{z}_1|, |\tilde{z}_2|, |\tilde{z}_3| \leq \rho\}$ . On a

$$\begin{aligned} H(J, \phi) &= H_0(J, \phi) + R(J, \phi) \\ &= \tilde{H}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) = \tilde{N}_0(\tilde{J}) + \tilde{R}_0(\tilde{J}, \tilde{\phi}) + \tilde{R}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Où  $\tilde{N}_0$  est la forme normale du système,  $\tilde{R}_0$  le reste provenant de la construction de la forme normale et  $\tilde{R}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) = R(J, \phi)$ . On cherche à majorer, pour des conditions initiales choisies dans un domaine proche de l'origine, la quantité  $|\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)|$  pour tout  $t$  inférieur à 5 milliard d'années (âge approximatif du système solaire), ce qui donnera un résultat de stabilité pour notre système, une borne à la diffusion des actions. D'une manière classique et dans le même esprit que le lemme (1), on prend les actions  $\tilde{J}(0)$  initiales dans un domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_0}$  et on prouve que sur un temps assez long la diffusion est plus faible qu'une valeur  $\delta$  : on reste dans le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}$  où  $\rho_\delta = (1 + \delta)\rho_0$ . Pour cette étude, on ne considère que la dynamique du hamiltonien  $\tilde{H}_0 = \tilde{N}_0(\tilde{J}) + \tilde{R}_0(\tilde{J}, \tilde{\phi})$  et donc on néglige le reste  $\tilde{R}$ . On néglige ce reste pour pouvoir avoir une idée précise de l'influence de la normalisation. En particulier, cela nous permet de calculer le degré optimal de normalisation rendant le degré  $\tilde{R}_0$  le plus petit possible. Le reste  $\tilde{R}$  sera pris en compte dans la section (4.3.2). Dans le même esprit que l'article (Giorgilli et al., 1989), on majore, sur le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}$ , les  $|\dot{\tilde{J}}_j| = |\partial \tilde{R}_0 / \partial \tilde{\phi}_j|$  pour appliquer le théorème des accroissements finis. Le reste  $|\partial \tilde{R}_0 / \partial \tilde{\phi}_j|$  est majoré en utilisant des estimations purement algébriques sur l'opérateur  $T^*$  de changement de variables. On s'assure finalement que la valeur de  $|\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)|$  est suffisamment petite pour que l'on reste dans  $\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}$  et pour que les variables  $\tilde{J}_j$  soient quasi constantes pendant l'âge du système solaire. On obtient finalement, sur un temps  $t$ , une majoration de la diffusion de  $|\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)|$ .

### 4.2.2 Majoration de l'influence du reste $\tilde{R}_0$

Cette majoration va requérir plusieurs lemmes. On se place dans un domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}$  où  $\rho_\delta = \rho_0(1 + \delta)$ . On va majorer la diffusion des nouvelles actions  $\tilde{J}$  sur ce domaine de l'espace des phases. On a, dans les nouvelles variables,

$$\tilde{H}_0(\tilde{J}, \tilde{\phi}) = T^* H_0 = \tilde{N}_0(\tilde{J}) + \tilde{R}_0(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \quad (4.27)$$

On exprime la variation temporelle des actions  $\tilde{J}_j$ , ( $1 \leq j \leq 3$ ) par

$$|\dot{\tilde{J}}_j| = |\{\tilde{H}_0, \tilde{J}_j\}| = |T^*(\{H_0, J_j\})| = \left| \sum_{k \geq 2, k \text{ pair}} [T^*(\{H_0, J_j\})]_k \right| \quad (4.28)$$

D'autre part,  $\tilde{N}_0$  ne dépend que des actions  $J_j$  et donc

$$\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n_N} [T^*(\{H_0, J_j\})]_k = \{\tilde{N}_0, \tilde{J}_j\} = 0 \quad (4.29)$$

Ces séries sont exprimées dans les nouvelles variables  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$  et  $\tilde{z}_3$ . En utilisant les normes précédemment définies, on obtient

$$|\dot{\tilde{J}}_j| \leq \sum_{k \geq n_N + 2, k \text{ pair}} \|[T^*(\{H_0, J_j\})]_k\|_k \rho_\delta^k \quad (4.30)$$

On va, en considérant les équations algébriques donnant  $[T^*(\{H_0, J_j\})]_k$ , majorer les normes  $\|[T^*(\{H_0, J_j\})]_k\|_k$ .

### Majoration des $\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k$

La majoration des normes  $\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k$  requiert des raisonnements purement algébriques et l'utilisation de procédures de calcul formel. Toutes les étapes et les calculs qui vont suivre sont implémentés sous TRIP. On a, pour chacun de ces  $J_j$ ,

$$[T^*({H_0, J_j})]_k = \sum_{l=2, l \text{ pair}}^k T_{k-l}^*([{H_0, J_j}]_l) \quad (4.31)$$

On va calculer les normes  $\| T_k^*([{H_0, J_j}]_l) \|_{k+l}$ . La première étape est le calcul effectif des crochets de Poisson  $[{H_0, J_j}]_l = \{[H_0]_l, J_j\}$ . Comme  $[H_0]_l$  est nul pour tout  $l > n_H$ , on a  $\| T_k^*([{H_0, J_j}]_l) \|_{k+l} = 0$  pour  $l > n_H$ . On commence par calculer ces normes explicitement. C'est à dire que pour tout les  $(k, l)$  tels que  $2 \leq l \leq n_H$  et  $0 \leq k \leq n_1$ , on calcule explicitement les séries  $T_k^*([{H_0, J_j}]_l)$  et leur norme (le choix de l'entier  $n_1$  dépend du temps de calcul de ces séries). On cherche ensuite à majorer la norme du terme  $T_k^*([{H_0, J_j}]_l)$ , pour tout  $k$ . On se sert du lemme suivant.

**Lemme 8** *On a*

$$\| T_k^*([{H_0, J_j}]_l) \|_{k+l} \leq B_{k,l} \quad (4.32)$$

où  $k, l$  sont un couple d'entiers et où les  $B_{k,l}$  sont définis de la manière suivante :  $B_{k,l} = 0$  si  $k$  ou  $l$  sont impairs.  $B_{k,2} = 0$  pour tout  $k$ .  $B_{k,l} = 0$  pour tout  $l > n_H$ .

Pour tout  $l, k$  tels que  $4 \leq l \leq n_H$  et  $0 \leq k \leq n_1$ ,

$$B_{k,l} = \max_{j=1,3} \| T_k^*([{H_0, J_j}]_l) \|_{k+l} \quad (4.33)$$

Pour tout  $l, k$  tels que  $4 \leq l \leq n_H$  et  $k > n_1$ ,

$$B_{k,l} = \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^k (q+2)(k-q+l) \| W_q \|_{q+2} B_{k-q,l} \quad (4.34)$$

**Démonstration 8** Pour  $l = 2$  ou  $l > n_H$ ,  $[{H_0, J}]_l$  est nul et donc, dans ces cas on peut prendre comme majorant  $B_{k,l} = 0$ . Pour le calcul des autres  $B_{k,l}$ , on se sert de la formule de récurrence de l'opérateur  $T^*$ .

$$T_k^*([{H_0, J}]_l) = -\frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^k L_{W_q} \circ T_{k-q}^*([{H_0, J}]_l) \quad (4.35)$$

On obtient alors, en utilisant la propriété fondamentale de majoration (4.2)

$$\| T_k^*([{H_0, J}]_l) \|_{k+l} \leq \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^k (q+2)(k-q+l) \| W_q \|_{q+2} B_{k-q,l} \quad (4.36)$$

Ce qui prouve le lemme.  $\diamond$

Pour pouvoir trouver une majoration du reste, il reste à obtenir une majoration de la suite  $B_{k,l}$  quand  $k$  tend vers l'infini. On majore cette suite par une suite géométrique grâce au lemme suivant :

**Lemme 9** Pour  $4 \leq l \leq n_H$ , il existe un réel positif  $\beta_C$ , dit "critique" tel que pour tout réel positif  $\beta_l > \beta_C$ , il existe un réel  $P_l$  positif et un entier naturel  $N_l$  tel que pour  $k \geq N_l$ , on a

$$B_{k,l} \leq P_l \beta_l^k \quad (4.37)$$

**Démonstration 9** On définit  $\beta_C$  comme étant le réel positif tel que

$$\sum_{q=2, q \text{ pair}}^{n_N-2} (q+2) \|W_q\|_{q+2} \beta_C^{-q} = 1 \quad (4.38)$$

Ce réel existe car la fonction  $f(\beta) = \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{n_N-2} (q+2) \|W_q\|_{q+2} \beta^{-q}$  est continue, strictement décroissante sur  $R^+$ ,  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} f(\beta) = 0$  et  $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} f(\beta) = +\infty$ . Soit  $l$  fixé. Soit un réel  $\beta_l$  supérieur strictement à  $\beta_C$ . On définit l'entier  $N_l$  de la manière suivante : on a

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{\min(k, n_N-2)} (q+2)(k-q+l) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} \right] = \\ & \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{\min(k, n_N-2)} (q+2) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} + \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{n_N-2} (q+2)(-q+l) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} \end{aligned} \quad (4.39)$$

On sait que

$$\sum_{q=2, q \text{ pair}}^{\min(k, n_N-2)} (q+2) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} < 1 \quad (4.40)$$

car  $\beta_l > \beta_C$ . Donc il existe un entier  $N_l$  tel que pour  $k$  supérieur à cet entier  $N_l$ , on a

$$\left[ \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{\min(k, n_N-2)} (q+2)(k-q+l) \beta_l^{-q} \right] < 1 \quad (4.41)$$

On définit ensuite  $P_l$  tel que  $P_l = \max_{k=N_l-n_N, N_l} (\beta_l^{-k} B_{k,l})$ . La propriété  $B_{k,l} \leq P_l \beta_l^k$  est donc vérifiée pour  $k = N_l$ . On utilise alors une démonstration par récurrence sur  $k$  pour  $k \geq N_l + 1$ . Supposons cette propriété vraie jusqu'au rang  $k - 1$ .

$$B_{k,l} = \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^k (q+2)(k-q+l) \|W_q\|_{q+2} B_{k-q,l} \quad (4.42)$$

Donc,

$$B_{k,l} \leq \left[ \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{\min(n_N-2, k)} (q+2)(k-q+l) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} \right] P_l \beta_l^k \quad (4.43)$$

Comme on a

$$\left[ \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^{n_N-2} (q+2)(k-q+l) \|W_q\|_{q+2} \beta_l^{-q} \right] \leq 1, \quad (4.44)$$

la récurrence est vraie.  $\diamond$



En pratique, on va faire le plus possible de calculs explicites de ces majorations en utilisant un manipulateur algébrique qui calcule les séries étudiées et la valeur exacte de la norme  $k+l$  du polynôme homogène  $T_k^*({H_0, J_j})_l$ . Toutefois, ces calculs deviennent rapidement trop longs (dès  $k=8$ ) car les séries considérées contiennent trop de termes. On calcule alors les valeurs de la suite  $B_{k,l}$  en prenant sa définition (lemme 8). Le lemme 9 fournit ensuite une majoration pour les termes  $B_{k,l}$  non calculés. Pour obtenir une meilleure majoration des termes que l'on ne pourra pas calculer, on doit choisir des  $\beta_l$  pas trop éloignés de la valeur critique  $\beta_C$  : on calcule explicitement, grâce à la formule (4.34), les  $B_{k,l}$  pour tous les  $l$  tels que  $4 \leq l \leq n_H$  et pour un grand nombre de valeurs de  $k$  ( $n_1 + 2 \leq k \leq n_{M1}$ ). On choisit l'entier  $n_{M1}$  tel que  $n_{M1} > n_N$  (en pratique on prend même  $n_{M1}$  de l'ordre de 100 ou 200 alors que  $n_N$  est égal à 50 au maximum). Ensuite on majore les  $B_{k,l}$  par une relation du type  $B_{k,l} \leq P_l \beta_l^k$  pour  $4 \leq l \leq n_H$  et  $k \geq n_{M1} - n_N$  pour laquelle les  $\beta_l$  sont peu supérieurs à  $\beta_C$ . En pratique, on ajuste les valeurs de  $P_l$  et  $\beta_l$  pour que cette majoration soit tout juste vérifiée et que, par la formule de récurrence (4.34), cette majoration soit imposée pour tout  $k \geq n_{M1}$ . On a finalement  $\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \leq \sum_{l=1, l \text{ pair}}^k B_{k-l,l}$ . On calcule explicitement, par la formule de récurrence (4.34), les  $\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k$  jusqu'à  $k = n_{M1}$ . Ensuite, pour  $k \geq n_{M1}$ , on majore les  $\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k$  grâce à la majoration  $B_{q,l} \leq P_l \beta_l^q$ . On a  $B_{q,l} = 0$  pour  $l > n_H$  donc, comme  $n_{M1} \geq n_H$ , on obtient

$$\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \leq \sum_{l=1, l \text{ pair}}^{n_H} B_{k-l,l} \quad (4.45)$$

On a donc, pour  $k > n_{M1}$ ,

$$\| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \leq \sum_{l=4, l \text{ pair}}^{n_H} P_l \beta_l^{k-l} \quad (4.46)$$

### Majoration de $|\dot{J}_j|$

En utilisant les majorations précédentes, on va obtenir une majoration de  $|\dot{J}_j|$  sur le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}$ .

$$|\dot{J}_j| \leq \sum_{k \leq n_{M1}, k \text{ pair}} \| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \rho_\delta^k + \sum_{k \geq n_{M1}+2, k \text{ pair}} \| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \rho_\delta^k \quad (4.47)$$

La partie  $\sum_{k \leq n_{M1}, k \text{ pair}} \| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \rho_\delta^k$  est calculée explicitement par des procédures TRIP en utilisant les valeurs calculées de la suite  $B_{k,l}$ . Pour l'autre partie, on se sert des majorations précédentes :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq n_{M1}+2, k \text{ pair}} \| [T^*({H_0, J_j})]_k \|_k \rho_\delta^k &\leq \sum_{k \geq n_{M1}+2, k \text{ pair}} \left( \sum_{l=4, l \text{ pair}}^{n_H} P_l \beta_l^{k-l} \right) \rho_\delta^k \\ &= \sum_{l=4, l \text{ pair}}^{n_N} P_l \beta_l^{-l} \left( \sum_{k \geq n_{M1}+2, k \text{ pair}} (\rho_\delta \beta_l)^k \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Il faut remarquer que la condition fondamentale de convergence de ces séries est  $\rho_\delta \beta_l < 1$  pour tout  $4 \leq l \leq n_H$ . Dans le cas où cette condition est vérifiée :

$$\sum_{k \geq n_{M1}+2, k \text{ pair}} \|[T^*(\{H_0, J_j\})]_k\|_k \rho_\delta^k \leq \sum_{l=2, l \text{ pair}}^{n_H} P_l \beta_l^{-l} \frac{(\rho_\delta \beta_l)^{n_{M1}+2}}{1 - (\rho_\delta \beta_l)^2} \quad (4.49)$$

**Remarque 18** La valeur de  $\beta_C$  nous donne une borne inférieure du rayon de convergence de ces transformations. Si  $\rho_\delta < \beta_C^{-1}$  alors on peut affirmer que la transformation est convergente. La figure (4.7) donne la borne inférieure  $\beta_C^{-1}$  du rayon de convergence en fonction du degré de

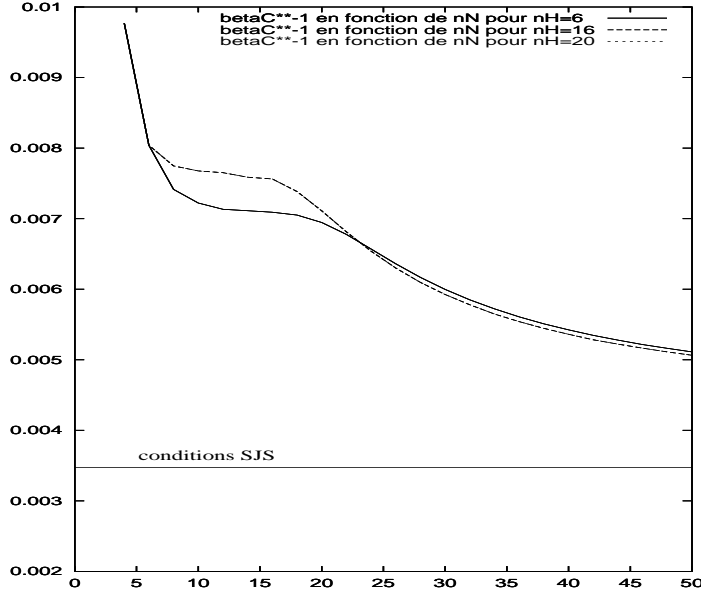


FIG. 4.7: valeur de la borne inférieure  $\beta_C^{-1}$  du rayon de convergence en fonction du degré  $n_N$  de normalisation pour différentes valeurs du degré  $n_H$  de troncature du hamiltonien.

normalisation. Ce rayon décroît, tout comme  $r_0^C$ , quand le degré de normalisation augmente et tend vers zéro quand celui-ci tend vers l'infini. Toutefois, même pour le degré 50 de normalisation, ce rayon reste supérieur au rayon du domaine englobant les conditions initiales du problème SJS et on peut donc appliquer les lemmes précédents dans ce cas-là. Toutefois, comme on l'a déjà remarqué dans la section (4.1.3), le rapport entre ces deux rayons n'est pas très élevé :  $\rho_r \beta_C \simeq 0.7$  et on ne pourra pas établir de majoration sur un grand domaine de conditions initiales. Par la suite, on se concentre sur l'étude du hamiltonien tronqué au degré  $n_H = 20$  : au vu des remarques précédentes, il n'y a pas beaucoup de différences entre cette troncature et d'autres pour la construction de la forme normale et cela permettra d'avoir une valeur plus faible pour le reste  $R$ .

**Remarque 19** Quand on compare les figures (4.6) et (4.7), on remarque que la contrainte majeure de convergence est donnée par la valeur de  $\beta_C^{-1}$ , plus faible en général que  $r_0^C$ .

### Degré optimal de normalisation

En considérant les figures (4.7) et (4.6), on voit qu'il y a forcément un degré optimal de normalisation inférieur à 50 pour les valeurs du rayon  $\rho_\delta$  supérieures à la valeur 0.005. En

effet pour le degré 50, le reste  $\tilde{R}_0$  ne converge pas. On va calculer, grâce à l'équation (4.30) et les majorations réalisées, le majorant des  $\partial\tilde{R}_0/\partial\tilde{\phi}_j$  ( pour  $1 \leq j \leq 3$ ) en fonction du rayon  $\rho_\delta$  et du degré de normalisation  $n_N$  donné par les lemmes précédents.

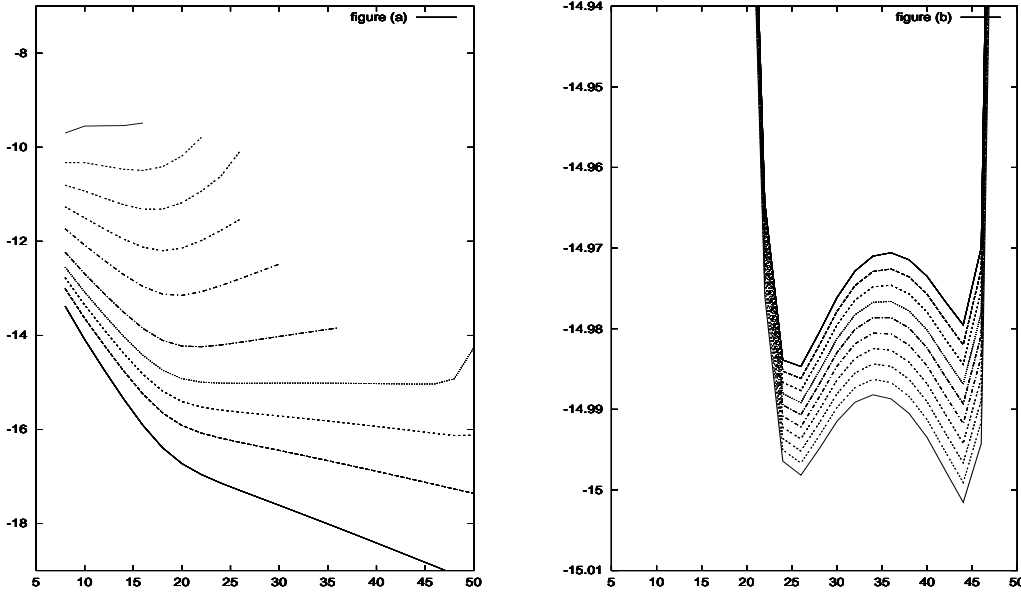


FIG. 4.8: figure(a) : Valeur de  $\log_{10}$  du majorant de  $\partial\tilde{R}_0/\partial\tilde{\phi}_j$  en fonction du degré de normalisation pour plusieurs valeurs du rayon  $\rho_\delta$  ( $\rho_\delta$  prend les valeurs  $3.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $3.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $4.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $4.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $4.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $5.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $5.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $6.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $6.5 \cdot 10^{-3}$  et  $7.0 \cdot 10^{-3}$  de bas en haut). Les courbes sont stoppées lorsque l'estimation des séries définissant le reste ne converge plus. figure (b) : Zoom de la figure (a) pour une fourchette plus restreinte de valeurs du rayon, au niveau du changement brutal de degré optimal de normalisation ( $\rho_\delta$  prend des valeurs régulières entre  $4.200 \cdot 10^{-3}$  et  $4.209 \cdot 10^{-3}$  de bas en haut).

Les courbes obtenues indiquent clairement la présence d'un degré optimal de normalisation, sauf pour des valeurs faibles du rayon du domaine où visiblement ce rayon optimal n'est pas atteint mais pour lesquelles on considèrera que ce rayon optimal (pour notre étude) est  $n_N = 50$ . La figure (4.8b) indique aussi clairement qu'il y a un saut entre les valeurs 26 et 44 du degré optimal de normalisation pour la valeur  $\rho_0 \simeq 4.203 \cdot 10^{-3}$ .

On peut faire plusieurs commentaires à propos de ces résultats, donnés par la figure (4.8). Pour le problème SJS le degré optimal de normalisation n'est pas atteint avant le degré 50. Le degré optimal de normalisation semble devenir très grand pour des valeurs du rayon  $\rho_\delta$  inférieure à  $4.2 \cdot 10^{-3}$  et très faible pour une valeur supérieure à  $6.7 \cdot 10^{-3}$  (dans ce cas, les estimations liées à la normalisation ne servent à rien). Bien que calculée différemment dans l'article (Giorgilli et Skokos, 1996), la courbe qui donne le degré optimal de normalisation en fonction du rayon du domaine a la même allure que la figure (4.9). En particulier, Il apparaît aussi une valeur du rayon qui donne un saut du degré de normalisation. Toutefois, une étude plus récente (Skokos et Dokoumetzidis, 2000) met en évidence un comportement différent du degré de normalisation optimal. Ces comportements ne sont pas expliqués mais une étude plus générale sur l'apparition du degré optimal de normalisation lors de la construc-

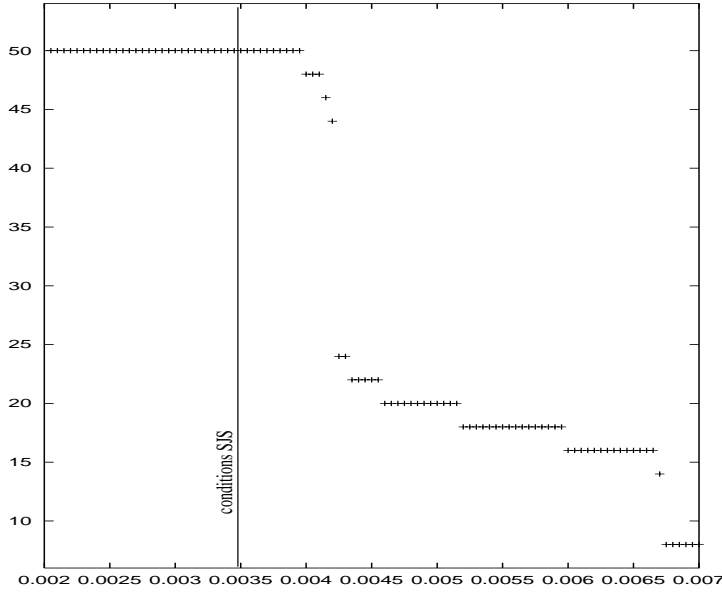


FIG. 4.9: Valeur optimale (inférieure à 50) du degré de normalisation en fonction du rayon  $\rho_\delta$

tion d'une forme normale de Birkhoff dans un problème générique pourrait mettre en lumière ces comportements. Dans notre cas particulier, la courbe (4.9) permet de relier le rayon  $\rho_0$  à la variable  $n_N$ . Par la suite, on se servira toujours du degré optimal de normalisation pour les différentes études menées, ce qui réduit le nombre de paramètres de l'étude et la rend plus facile. D'autre part, la zone de changement de degré de normalisation est entre  $10^{-3}$  et  $7 \cdot 10^{-3}$  : on va restreindre notre étude à ce domaine de rayons (qui contient les conditions initiales du problème SJS) pour mesurer l'efficacité de ces méthodes de normalisation.

### 4.2.3 Résultats de stabilité

Les majorations précédentes permettent de prouver des résultats de stabilité :

**Lemme 10** *Supposons que les conditions initiales  $\tilde{x}(0)$  soient dans le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_0}$  où  $\rho_0$  est un réel positif. Soient  $\delta, \epsilon$  des réels positifs tel que sur le domaine  $\Delta_{\rho_\delta}$ , on ait  $|\dot{\tilde{J}}_j| \leq \epsilon$  (avec  $\rho_\delta = (1 + \delta)\rho_0$ ) Alors,*

$$|\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)| \leq \epsilon t \quad (4.50)$$

pour tout  $t$  tel que  $\epsilon t \leq ((1 + \delta)^2 - 1)\rho_0^2$ .

**Démonstration 10** On applique le théorème des accroissements finis sur le domaine  $\Delta_{\rho_\delta}$ . On veut que, pendant le temps considéré,  $|\tilde{J}_j(t)| \leq \rho_\delta^2$ . Or on a  $|\tilde{J}_j(0)| \leq \rho_0^2$ . Donc, si on a  $|\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)| \leq ((1 + \delta)^2 - 1)\rho_0^2$ , alors la condition  $|\tilde{J}_j(t)| \leq \rho_\delta^2$  est vérifiée. Donc, pour  $t \leq ((1 + \delta)^2 - 1)\rho_0^2/\epsilon = t_{max}$ , les actions  $J_j(t)$  restent dans le domaine  $\Delta_{\rho_\delta}$ . La majoration trouvée n'est valable que pendant ce temps là.  $\diamond$

Ce lemme permet donc une majoration très simple de la diffusion des actions pendant un temps fini. Plus  $\rho_0$  est petit et plus la diffusion est faible et le temps sur lequel cette diffusion

est bornée est long. Avoir une majoration en temps fini est le prix à payer pour pouvoir affirmer des résultats pour des conditions initiales prises dans un ouvert de l'espace des phases.

## Etude pratique

On se sert du lemme ainsi que de l'étude donnant le degré optimal de normalisation pour trouver une majoration de la diffusion. On calcule, quel est le temps minimum donnant une diffusion de 1%, 0.1% et 0.01% des actions  $\tilde{J}$  en fonction du domaine  $\Delta_{\rho_0}$  comprenant les conditions initiales  $\tilde{J}(0)$  pour le degré optimal de normalisation donné par la figure (4.9).

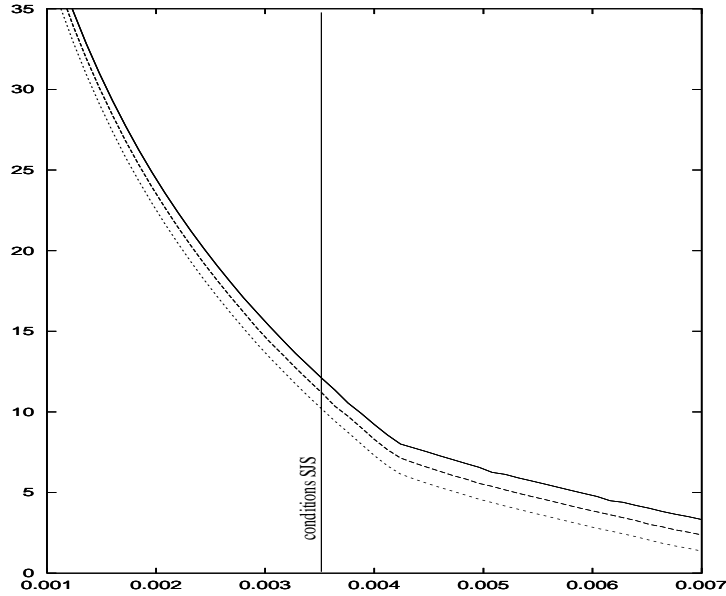


FIG. 4.10:  $\log_{10}$  de la valeur du temps minimum pour une diffusion de  $10^{-4}, 10^{-3}$  et  $10^{-2}$  (courbes de bas en haut) des actions  $\tilde{J}$  en fonction du rayon des actions de départ  $\tilde{J}(0)$  pour  $nH = 20$ .

Le premier commentaire que l'on peut faire est que, pour les conditions initiales du problème SJS, le temps minimum pour avoir une diffusion de  $10^{-2}$  est bien supérieur à l'âge approximatif du système solaire ( $\simeq 5$  milliard d'années). Toutefois, les conditions initiales  $\tilde{J}(0)$  ne sont pas bien connues pour le problème SJS, la seule donnée que l'on a sont les conditions initiales  $J(0)$ . On va essayer dans la section suivante de tenir compte de cette remarque et du reste  $R$  jusqu'alors négligé. Les résultats de cette section concernent surtout le degré optimal de normalisation qui ne dépend pas de ces deux simplifications : on gardera donc les valeurs du degré optimal durant toutes les études qui vont suivre.

Les résultats donnés par cette étude sont très tranchés : si les excentricités initiales (SJS) sont divisées par deux, les temps de stabilité deviennent très grands ( $t \simeq 10^{25} \text{ans}$ ). A contrario, si elles sont multipliées par deux, on n'obtient plus de résultat ( $t \simeq 10^4 \text{ans}$ ).

## 4.3 Raffinements

Cette étude préalable est assez grossière et plusieurs effets sont négligés. Le premier que l'on vient de constater, est que l'on n'établit de diffusion que pour des conditions initiales prises dans le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_0}$  des variables  $\tilde{z}$  et non dans le domaine vrai des conditions initiales des anciennes actions  $\Delta_\rho$ . Le second est que l'on a négligé l'influence du reste  $R$  dans la dynamique du problème. On essaie, dans cette section, de tenir compte de ces effets. Toutefois, le reste  $R$  ne pourra pas être majoré rigoureusement et on se limitera à une étude peu précise dans ce domaine, en essayant juste de mesurer l'influence des raffinements sur la figure (4.10).

### 4.3.1 Passage des variables initiales $z(0)$ aux variables initiales $\tilde{z}(0)$

les valeurs  $J_j(0)$  sont connues (conditions initiales du système, 4.8) mais les valeurs  $\tilde{J}_j(0)$  non. On a estimé la différence entre ces deux valeurs pour avoir des renseignements sur la valeur initiale des nouvelles actions dans le but d'appliquer ensuite le lemme précédent. On choisit le domaine  $\Delta_\rho$  englobant les conditions initiales. On doit forcément aussi avoir  $\rho < (r_0)_C$  pour assurer que la transformation  $T$  est convergente. Pour  $z(0)$  dans le domaine  $\Delta_\rho$ , on doit estimer les nouvelles coordonnées  $\tilde{z}(0) = (\tilde{z}_1(0), \tilde{z}_2(0), \tilde{z}_3(0))$ . Pour le faire, on majore  $|\tilde{J}_j - J_j|$  en se servant de majorations de  $JDW(\tilde{z}, \epsilon)$  (2.30). On obtient finalement  $|\tilde{J}_j(0) - J_j(0)| \leq \epsilon_1$ . Pour obtenir un  $\epsilon_1$  suffisamment petit et la convergence des opérateur  $T, T^*$ , il faut se placer dans un domaine proche du point fixe elliptique ( $\rho$  petit). Les coordonnées initiales  $|\tilde{z}_1(0)|, |\tilde{z}_2(0)|, |\tilde{z}_3(0)|$  sont majorées par  $\rho_0 = \sqrt{\rho^2 + \epsilon_1}$  (elles appartiennent au domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_0}$ ).

#### Majoration de la différence des actions $J(0)$ et $\tilde{J}(0)$

Si les variables  $z_j(0)$  sont dans le domaine  $\Delta_\rho$ , on va essayer de montrer que les variables  $\tilde{z}_j(0)$  sont alors dans un domaine  $\Delta_{\rho(1+w)}$  où  $w$  est dans  $R^+$ . Pour cela on se sert du lemme suivant, qui va nous donner, par la suite, une méthode pratique d'étude de la différence  $|\tilde{J}_j(0) - J_j(0)|$  :

**Lemme 11** *Soit  $M$  un réel positif. Il existe un réel positif  $\rho_{max}$  tel que si les conditions initiales  $z_j(0)$  sont dans le domaine  $\Delta_{\rho_{max}}$ , alors on a  $|\tilde{J}_j(0) - J_j(0)| \leq M$ .*

**Démonstration 11** Soit  $M$  un réel positif. La formule donnant les nouvelles actions  $\tilde{J}_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$  en fonction des anciennes variables est la suivante :

$$\tilde{J}_j(\tilde{z}) = T_1 \tilde{J}_j(z) \quad (4.51)$$

Mais le calcul de l'opérateur  $T_1$  est difficile, la formule de récurrence le définissant (2.35) n'étant pas d'usage facile et ne permettant pas d'avoir des majorations algébriques intéressantes. En particulier, l'application de l'inégalité (4.2) ne permet pas de faire des majorations efficaces. On va, en fait, revenir à une définition plus fondamentale de la transformation entre les coordonnées  $z$  et  $\tilde{z}$ . Soient  $w, \rho$  deux réels positifs. On se place dans les variables action-angle et dans un domaine  $U = [0, 1] \times B(0, \rho(1+w))$  qui est un cylindre de sécurité. Il suffit de prendre  $w, \rho$  tel que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$\rho(1+w) \leq (r_0)_C \quad (4.52)$$

On note  $\rho_w = \rho(1 + w)$ . On a

$$\dot{J}_j(\epsilon, z) = \frac{\partial W}{\partial \phi_j}(\epsilon, \tilde{z}(\epsilon)) \quad (4.53)$$

On applique alors le théorème des accroissements finis sur le domaine  $U$ . On a

$$|\tilde{J}_j(\epsilon_1) - \tilde{J}_j(\epsilon_2)| \leq |\epsilon_1 - \epsilon_2| \max_{(|\tilde{z}| \leq \rho_w, \epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_2)} \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_j}(\epsilon, \tilde{z}) \right| \quad (4.54)$$

D'où

$$|\tilde{J}_j(\epsilon_1) - \tilde{J}_j(\epsilon_2)| \leq \max_{(|\tilde{z}| \leq \rho_w, 0 \leq \epsilon \leq 1)} \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_j}(\epsilon, \tilde{z}) \right| \quad (4.55)$$

On a, sur le domaine  $U$ ,

$$\left| \frac{\partial W}{\partial \phi_j}(\epsilon, \tilde{z}) \right| \leq \sum_{k=2}^{n_N-2} \epsilon^{k-1} \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \phi_j} \right\|_{k+2} \rho_w^{k+2} \quad (4.56)$$

Et donc on obtient la majoration de la valeur de  $|\tilde{J}(\epsilon_1) - \tilde{J}(\epsilon_2)|$  suivante :

$$\max_{[0,1] \times \Delta_{\rho_w}} \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_j}(\epsilon, \tilde{z}) \right| \leq \max_{j=1,3} \sum_{k=2}^{n_N-2} \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \phi_j} \right\|_{k+2} \rho_w^{k+2} = \tau(\rho, w) \quad (4.57)$$

Si on prend  $\epsilon_1 = 0$  et  $\epsilon_2 = 1$  on obtient donc une majoration de la différence des actions initiales  $|J_j(t=0) - \tilde{J}_j(t=0)|$  :

$$|J_j(0) - \tilde{J}_j(0)| \leq \tau(\rho, w) \quad (4.58)$$

On doit vérifier aussi que  $|\tilde{z}(\epsilon)| \leq \rho_w$  pour toute valeur de  $\epsilon$  entre 0 et 1. C'est-à-dire que  $|\tilde{J}(\epsilon)| \leq \rho_w^2$ . On a

$$|\tilde{J}(\epsilon)| \leq |\tilde{J}(\epsilon) - \tilde{J}(0)| + |\tilde{J}(0)| \leq \tau + \rho^2 \quad (4.59)$$

On doit donc avoir  $\tau + \rho^2 \leq \rho_w^2$  c'est à dire

$$\tau \leq (\rho(1+w))^2 - \rho^2 \quad (4.60)$$

Quand  $\rho$  tend vers zéro, on a  $\tau(\rho, w) = O(\rho^4)$  et donc, pour toute valeur strictement positive de  $w$ , si on prend  $\rho$  assez petit, l'inégalité (4.60) est vérifiée. De même si  $\rho$  est suffisamment petit, l'inégalité

$$\tau(\rho, w) \leq M \quad (4.61)$$

est vérifiée. Il existe donc un réel positif  $\rho_{max}$  tel que si  $\rho \leq \rho_{max}$ , alors les trois inégalités (4.52,4.60,4.61) sont vérifiées et le lemme est démontré.  $\diamond$

**Remarque 20** En pratique, on ne choisit pas le majorant  $M$  voulu de  $|J_j - \tilde{J}_j|$ . On va prendre, si c'est possible,  $\rho$  comme le majorant des variables et on calcule alors, si il existe, le  $w$  minimum tel que les inégalités (4.52,4.60) soient vérifiées. Le majorant  $M$  est alors  $M = \tau(\rho, w)$ . Les variables  $\tilde{x}$  sont alors dans le domaine  $\Delta_{\rho_0}$  où  $\rho_0 = \sqrt{\rho^2 + \tau}$ . On pose  $\epsilon_1 = \tau$ .

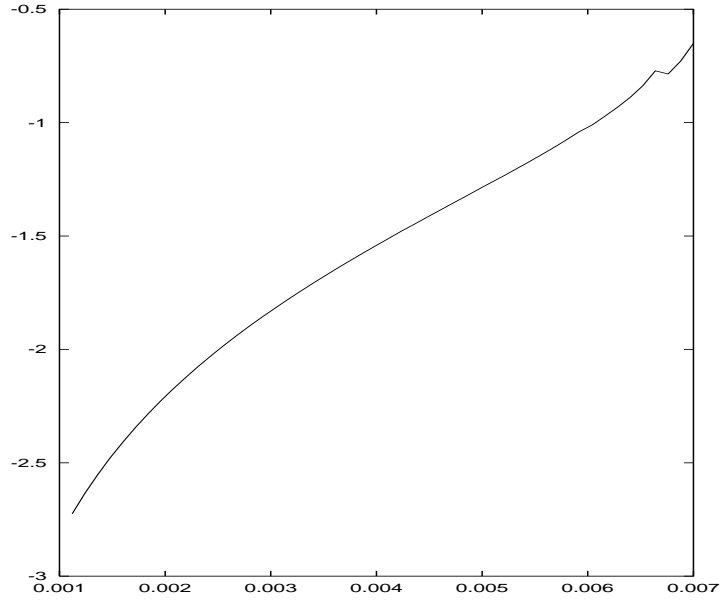


FIG. 4.11:  $\log_{10}$  de  $w$  en fonction du rayon  $\rho$  du domaine  $\Delta_\rho$  comprenant les conditions initiales  $z(0)$ .

### Etude pratique

On donne ici la courbe représentant le  $w$  calculé (grâce au lemme) en fonction de  $\rho$  et pour le degré de normalisation optimal.

Le fait que la différence entre les anciennes actions et les nouvelles soit si faible s'explique par le fait que l'étude réalisée dans ce paragraphe est précise : elle ne nécessite la démonstration d'aucune convergence et s'obtient par la majoration simple d'un polynôme sur un domaine donné. Cette étude va néanmoins avoir tendance à déformer la courbe de la figure (4.10). En donnant de moins bon résultats. Cette courbe, tenant compte de cet effet, sera donc retracée, à la fin de l'étude suivante, dans la figure (4.14).

### 4.3.2 Etude de l'influence du reste $\tilde{R}$

La deuxième simplification faite lors de l'étude de la section (4.2) est de considérer que le reste  $\tilde{R}$  n'influence pas la dynamique du système au moins pendant une période de temps assez longue. On va, dans cette partie, essayer de mesurer l'influence du reste  $\tilde{R}$  sur les variations de  $\tilde{J}$ . On a

$$|\dot{\tilde{J}}_j| \leq \left| \frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \tilde{\phi}_j} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right| \quad (4.62)$$

L'influence du premier terme a été déjà étudiée. On majore l'influence du second terme de la façon suivante :

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right| \leq \left| i \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \tilde{z}_j - i \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \tilde{z}_j \right| \leq \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| |\tilde{z}_j| + \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| |\tilde{z}_j| \quad (4.63)$$



Comme  $\tilde{R}$  est une série à valeurs réelles,

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right| \leq 2|\tilde{z}_j| \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| \quad (4.64)$$

Pour établir une majoration de  $\partial \tilde{R} / \partial \tilde{z}_j$ , on revient aux variables initiales :

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| \leq \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial R}{\partial z_k} \right| \left| \frac{\partial z_k}{\partial \tilde{z}_j} \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial \bar{z}_k} \right| \left| \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \tilde{z}_j} \right| \quad (4.65)$$

Comme le reste  $R$  est une fonction réelle,

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| \leq \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial R}{\partial z_k} \right| \left( \left| \frac{\partial z_k}{\partial \tilde{z}_j} \right| + \left| \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \tilde{z}_j} \right| \right) \quad (4.66)$$

On va étudier séparément la majoration des différents facteurs de cette inégalité.

### Majoration des dérivées $\frac{\partial z_k}{\partial \tilde{z}_j}$

On se sert encore une fois des majorations de l'opérateur  $T^*$  pour majorer  $\partial z_k / \partial \tilde{z}_j$ . L'expression des anciennes variables en fonction des nouvelles est donnée par  $z_k = T_1^* z_k(\tilde{z})$ . Donc,

$$\left| \frac{\partial z_k}{\partial \tilde{z}_j} \right| \leq \sum_{q=0, q \text{ pair}} \left| \frac{\partial T_q^*(z_k)}{\partial \tilde{z}_j} \right| \leq \sum_{q=0, q \text{ pair}} \left\| \frac{\partial T_q^*(z_k)}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_q \rho_\delta^q \quad (4.67)$$

On choisit un entier  $n_2$  tel que les calculs des séries  $\partial T_q^*(z_k) / \partial \tilde{z}_j$  seront menés, par une procédure TRIP, jusqu'au degré  $n_2$ . Il reste ensuite à estimer les valeurs de  $\|\partial T_q^*(z_k) / \partial \tilde{z}_j\|$  pour  $q$  plus grand que  $n_2$ . On a

$$\left\| \frac{\partial T_q^*(z_k)}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_q = \|\{T_q^*(z_k), \tilde{z}_j\}\|_q \leq (q+1) \|T_q^*(z_k)\|_{q+1} \quad (4.68)$$

On calcule aussi explicitement les normes  $\|T_q^*(z_k)\|_{q+1}$  jusqu'à  $q = n_2$ . On va majorer, pour  $q > n_2$ , les  $\|T_q^*(z_k)\|_{q+1}$ , comme pour les étapes précédentes, en utilisant la relation de récurrence définissant les opérateurs puis on majorera ces quantités par une suite géométrique. On ne donne pas les démonstrations qui sont équivalentes à celles de la section (4.2.2).

**Lemme 12** *Pour tout  $l$  entier naturel, on a*

$$\|T_l^*(z_k)\|_{q+1} \leq D_l \quad (4.69)$$

où la suite  $D_l$  est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } 0 \leq l \leq n_2, & D_l = \max_{k=1,3} \|T_l^*(z_k)\|_{l+1} \\ \text{pour } l > n_2, & D_l = \frac{1}{l} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^l (q+2)(l-q+1) \|W_q\|_{q+2} D_{l-q} \end{cases} \quad (4.70)$$

**Lemme 13** Pour tout réel  $\zeta > \beta_C$ , il existe un réel  $S$  et un entier  $N$  tel qu'on peut obtenir la majoration suivante des  $D_l$  :

$$D_l \leq S\zeta^l \quad (4.71)$$

pour tout  $l \geq N$ .

En pratique, on calcule les  $D_k$  pour un grand nombre de valeurs, jusqu'à  $l = n_{M2}$ . Ensuite entre  $n_{M2} - n_N$  et  $n_{M2}$  on calcule la majoration plus précise :  $D_l \leq S\zeta^l$ . Puis par une démonstration par récurrence on établit  $D_l \leq S\zeta^l$  pour tout  $l \geq n_{M2}$ . On a finalement

$$\begin{aligned} |\partial z_k / \partial \tilde{z}_j| &\leq \sum_{q=0, q \text{ pair}}^{n_2-2} \|\partial T_q^*(z_k) / \partial \tilde{z}_j\|_q \rho_\delta^q \\ &+ \sum_{q=n_2, q \text{ pair}}^{n_{M2}} (q+1) \|T_q^*(z_k)\|_{q+1} \rho_\delta^q + \sum_{q \geq n_{M2}+2, q \text{ pair}} (q+1) \rho_\delta^q S\zeta^q \end{aligned} \quad (4.72)$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} |\partial z_k / \partial \tilde{z}_j| &\leq \sum_{q=0, q \text{ pair}}^{n_2-2} \|\partial T_q^*(z_k) / \partial \tilde{z}_j\|_q \rho_\delta^q + \\ &+ \sum_{q=n_2, q \text{ pair}}^{n_{M2}} (q+1) D_q \rho_\delta^{q+1} + S(\rho_\delta \zeta)^{n_{M2}+2} \frac{(n_{M2}+3) - (n_{M2}+1)(\rho_\delta \zeta)^2}{(1 - (\rho_\delta \zeta)^2)^2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

**Remarque 21** On emploie la même méthode pour la majoration des  $\partial \bar{z}_k / \partial \tilde{z}_j$ .

On calcule la majoration, pour  $\rho_\delta$  entre  $2 \cdot 10^{-3}$  et  $7 \cdot 10^{-3}$  des  $\partial z_j / \partial \tilde{z}_k$  et des  $\partial \bar{z}_j / \partial \tilde{z}_k$  pour toutes les valeurs de  $k$  et  $j$  sur le domaine  $\Delta_\rho$ . Ces résultats sont donnés sur la figure (4.12)

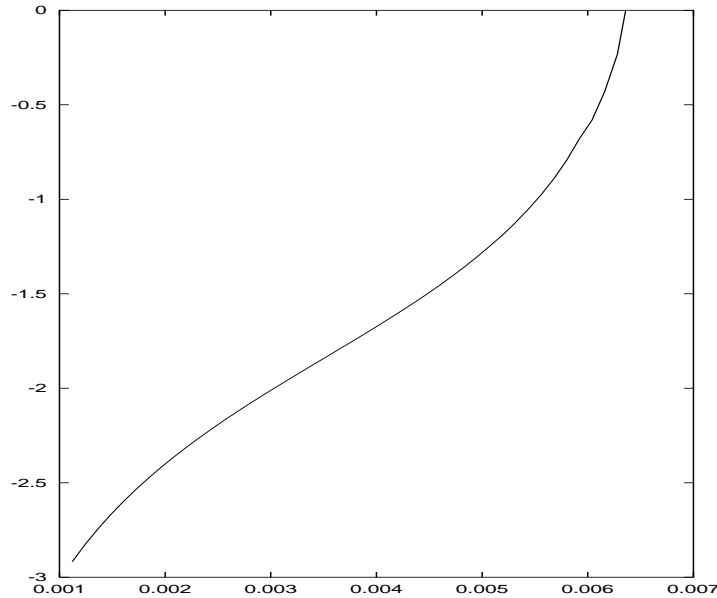


FIG. 4.12: Valeur maximale, pour  $1 \leq j, k \leq 3$ , de  $|\partial z_k / \partial \tilde{z}_j| - \delta_{k,j}$  et  $|\partial \bar{z}_k / \partial \tilde{z}_j|$  en fonction du rayon du domaine  $\rho_\delta$  ( $\delta_{k,j}$  est le symbole de Kronecker).

Sur cette figure, apparait très nettement une valeur critique du rayon  $\rho_{C,2}$  pour laquelle les valeurs des dérivées divergent ( $\rho_{C,2} \simeq 0.0065$ ). Cette valeur donne encore une borne du domaine plus réduite pour l'application de ces méthodes mais qui englobe encore les conditions initiales SJS.

### Majoration des dérivées $\partial R/\partial z_k$

La première chose à faire pour pouvoir étudier la dérivée du reste est de savoir dans quelle zone évoluent les anciennes variables  $z_k$ . Cette zone est estimée de la même manière que dans la section (4.3.1) et les anciennes variables sont dans  $\Delta_{\rho_z}$  où  $\rho_z = \sqrt{\rho_\delta^2 + \epsilon_2}$ .  $\epsilon_2$  est la valeur de  $\epsilon_1$  de l'étude de la section (4.3.1) dans le cas où les variables sont supposées être dans le domaine  $\Delta_{\rho_\delta}$  au départ. L'estimation du reste ou plus particulièrement de sa dérivée est l'étape la plus délicate de cette étude. En effet, on n'a pas d'expression analytique de ce reste. Le seul moyen d'estimer ce reste est de calculer deux termes :

$$\frac{\partial R}{\partial z_k} = \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{\partial H_0}{\partial z_k} \quad (4.74)$$

Comme on calcule ces deux termes de deux manières très différentes, on ne va pouvoir estimer leur différence que ponctuellement, sur un ensemble de points du domaine  $\Delta_{\rho_z}$ . La valeur maximale de cette différence sur cet ensemble de points est alors prise comme majorant de la fonction  $R$  sur l'ensemble du domaine  $\Delta_{\rho_z}$ . Cette estimation n'est pas rigoureuse mais une étude rigoureuse est difficile à mener. Le terme  $\partial R/\partial z_k$  est facilement calculé à partir des  $\partial R/\partial x_j, \partial R/\partial y$  car il y a une relation linéaire entre les variables  $x_j, y = x_3$  non diagonalisées et les variables  $z_k$  diagonalisées.

Le terme  $\partial H_0/\partial x_j$  est facile à calculer. C'est un polynôme connu, calculé, et on se sert d'une procédure TRIP pour estimer sa valeur en un point précis de l'espace des phases.

Le terme  $\partial H/\partial x_j$  est calculé par une procédure FORTRAN moyennisant la véritable distance mutuelle pour trouver la valeur juste de cette fonction. Pour les notations, on se réfère à (Laskar, 1995). On a

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = K \int_{[0,2\pi]^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \right) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (4.75)$$

Où  $K$  est une constante dépendant des paramètres du système : masses, constante de gravitation, demi grands axes séculaires (voir annexe E). Pour exprimer la dérivée partielle de la distance mutuelle suivant la variable  $x_j$ , on doit donc calculer pour tout couple  $(k, j)$  ( $1 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq 3$ ) les dérivées  $\partial \mathbf{r}_k/\partial x_j$ . Pour réaliser ce calcul, on se sert de l'expression de ces dérivées donnée par exemple dans la thèse de L.Niederman (Niederman, 1993) dans la section "Présentation du problème planétaire" et à la page 60. On calcule alors les valeurs de ces dérivées en fonction des éléments elliptiques ce qui permet de faire l'intégration (4.75) avec une bonne précision par une procédure fortran utilisant un algorithme de type "Romberg". On estime alors la valeur de  $\|\partial R/\partial z_k\|_\rho$  comme étant la valeur maximale prise par la fonction  $|\partial H/\partial z_k - \partial H_0/\partial z_k|$  sur l'ensemble des points du domaine  $\Delta_\rho$  pour lesquels on a effectué le calcul. Les actions  $J_{x_1}, J_{x_2}$  et  $J_y$  sont prises entre 0 et le rayon  $\rho$ . Pour les angles, on a

$$H = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} c_k(J_{x_1}, J_{x_2}, J_y) e^{i(k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + k_3\phi_3)} \quad (4.76)$$

Pour trouver le maximum, on peut prendre  $\phi_3 = 0$ . En effet, le hamiltonien est invariant par rotation. On a alors

$$H = \sum_{k \in Z^3} c_k(J_{x_1}, J_{x_2}, J_y) e^{i((k_1+k_2)\phi_1+k_2(\phi_2-\phi_1))} \quad (4.77)$$

Comme  $k_3$  est pair (parité en les variables d'inclinaison) et que  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$  (relations de d'Alembert),  $k_1 + k_2$  est donc pair. Si on considère la variation des angles du système donnée par la variation de  $\phi_1$  et  $\phi_2 - \phi_1$ , on n'a besoin de prendre  $\phi_1$  entre 0 et  $\pi$  seulement car  $H(\phi_1 + \pi, \phi_2 - \phi_1) = H(\phi_1, \phi_2 - \phi_1)$ . On prend donc la valeur fixée  $\arg(y) = 0$ , la valeur de  $\arg(x_1)$  varie entre 0 et  $\pi$  et celle de  $\arg(x_2) - \arg(x_1)$  entre 0 et  $2\pi$ . On estime alors (figure 4.13a) ce maximum pour un nuage d'environ 16000 points répartis régulièrement en actions et angles :

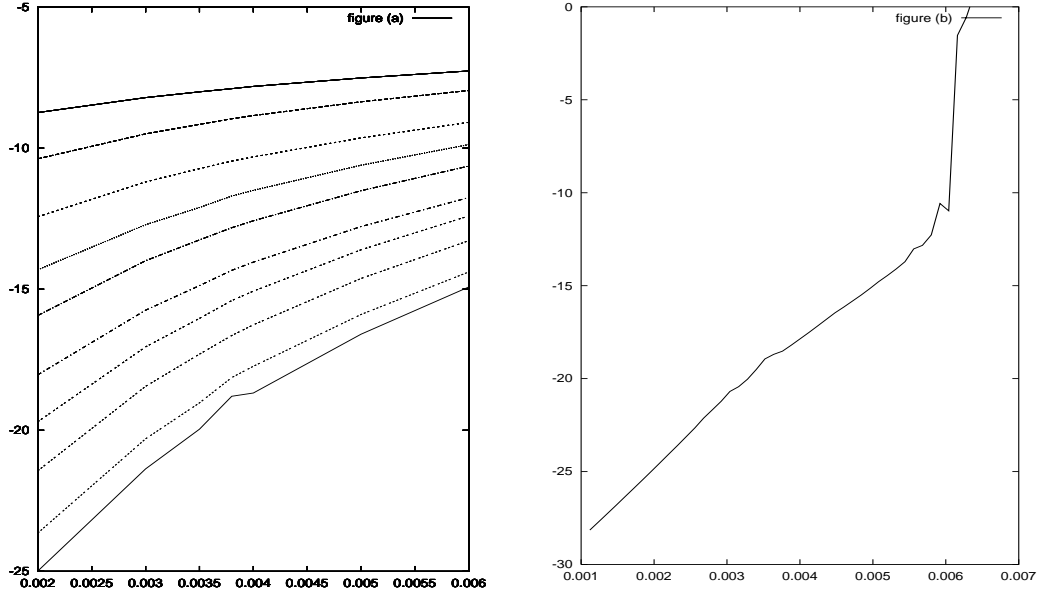


FIG. 4.13: figure (a) : estimation de la valeur de  $\|\partial R/\partial \phi_1\|_\rho$  en fonction du rayon  $\rho$  pour plusieurs troncature du hamiltonien (tronqué au degré  $n_H = 2$  pour la courbe du haut et de deux en deux jusqu'au degré  $n_H = 20$  pour la courbe du bas) et figure (b) : pour  $n_H = 20$ ,  $\log_{10}$  de la valeur finale du majorant de  $\partial \tilde{R}/\partial z_j$  en fonction du rayon du domaine des variables de départ  $z(0)$ .

Sur la figure (4.13b), on donne le résultat final du calcul de  $\partial \tilde{R}/\partial z_j$  (équation 4.66).

**Remarque 22** En réalisant cette recherche du maximum de  $\partial R/\partial z_k$ , on a constaté que les valeurs maximale de cette fonction étaient toujours obtenues pour des points de l'espace des phases tels que  $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ . Une étude plus systématique des valeurs prise par la fonction  $H$  sur l'ensemble de l'espace des phases serait à mener.

**Remarque 23** *Raffinements*

On pourrait raffiner cette étude par une recherche plus systématique du maximum du reste sur un certain domaine  $\Delta_\rho$  et en construisant une procédure Fortran plus adaptée, ce qui donnerait un résultat plus rigoureux.

D'autre part, un résultat mathématique rigoureux peut être obtenu en faisant des estimations "à la Cauchy" sur la série définissant le hamiltonien (1.28). Toutefois, cette méthode aurait une tendance très forte à diminuer le rayon des domaines dans lesquels on peut prouver qu'il y a une faible diffusion pendant l'âge du système solaire.

### Etude pratique de la diffusion en tenant compte du reste $R$

On prend donc pour la valeur du reste  $|\partial\tilde{R}/\partial\tilde{z}_j|$  la valeur donnée par la courbe (4.13b) et on retrace pour cette valeur la figure (4.10) en tenant compte de ce reste :

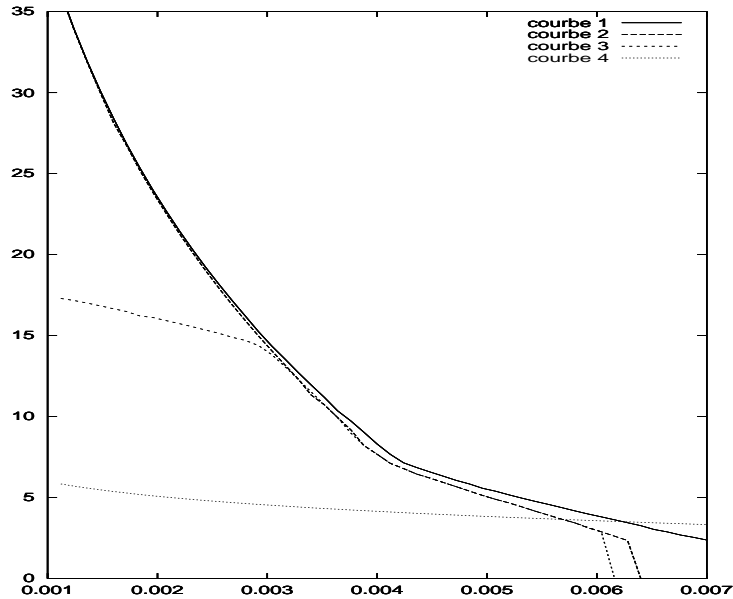


FIG. 4.14: Temps minimum pour une diffusion des actions  $\tilde{J}$  égale à  $10^{-3}$  pour quatre cas : la courbe (1) représente la valeur donnée par l'étude de la section (4.2). L'axe des abscisses représente la valeur du rayon du domaine contenant de  $\tilde{z}(0)$ . Pour les trois courbes suivantes cet axe représente la valeur du rayon du domaine contenant  $z(0)$ . la courbe (2) représente la valeur donnée en tenant compte du changement de variables de l'étude de la section (4.3.1). la courbe (3) représente la valeur donnée en tenant compte du reste  $\tilde{R}$  de l'étude de la section (4.3.2). la courbe (4) représente la valeur donnée par l'étude naive de la section (4.1.3).

La figure (4.14) indique la différence intervenant entre la courbe de la figure (4.10) obtenue en ne tenant pas compte du reste  $R$ , celle obtenue en tenant compte du reste  $R$  et celle obtenue par l'étude naive de la section (4.1.3) pour une diffusion de  $10^{-3}$  des actions  $\tilde{J}$ .

On peut noter quelques traits de cette figure. Les différences entre les courbes 1 et 2 (qui retranscrivent les différences de conditions initiales entre  $J(0)$  et  $\tilde{J}(0)$ ) sont minimales en particulier quand on se rapproche du point fixe elliptique. A partir de  $\rho > 0.005$  la méthode perturbative ne donne plus de résultats intéressants et diverge même à partir de  $\rho > 0.006$ . L'influence du reste  $R$  (courbe 4) ne se fait sentir que pour  $\rho < 0.003$  et devient rapidement prépondérante quand  $\rho$  tend vers zéro. Pour  $\rho < 0.003$ , il n'est pas nécessaire de continuer à

normaliser à un ordre supérieur à  $n_N = 50$  tant que l'on n'a pas calculé le hamiltonien à un degré  $n_H$  supérieur à 20.

Pour les conditions initiales du problème (SJS), on obtient donc une diffusion de  $10^{-3}$  pendant une durée approximative supérieure à  $10^{10}$  années et donc supérieure à l'âge estimé du système solaire ( $\simeq 5 \cdot 10^9$  années).

### 4.3.3 Retour aux anciennes actions $J$

On cherche à obtenir une majoration de la diffusion des actions  $J$ . On se sert de toutes les majorations que l'on a réalisé. On a

$$|J_j(t) - J_j(0)| \leq |J_j(t) - \tilde{J}_j(t)| + |\tilde{J}_j(t) - \tilde{J}_j(0)| + |\tilde{J}_j(0) - J_j(0)| \quad (4.78)$$

Pour toute valeur des conditions initiales prises dans le domaine  $\Delta_\rho$ , et pour tout  $t$  inférieur à la valeur donnée par le lemme (10), on obtient, d'après les majorations (4.50,4.58),

$$|J_j(t) - J_j(0)| \leq \epsilon_2 + \epsilon t + \epsilon_1 = \epsilon_3 \quad (4.79)$$

Toutefois, cette borne à la diffusion des variables  $J(t)$  (variables issues de la diagonalisation) ne donne pas des renseignements très bons sur la variation, chaotique ou non, des excentricités qui s'obtiennent à partir de la formule de diagonalisation car on ne sait aucun renseignement sur les variables angles  $(\phi_1, \phi_2)$  du système.

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\theta)z_1 - \sin(\theta)z_2 = \cos(\theta)\sqrt{J_1}e^{i\phi_1} - \sin(\theta)\sqrt{J_2}e^{i\phi_2} \\ x_2 = \sin(\theta)z_1 + \cos(\theta)z_2 = \sin(\theta)\sqrt{J_1}e^{i\phi_1} + \cos(\theta)\sqrt{J_2}e^{i\phi_2} \end{cases} \quad (4.80)$$

De même, on n'obtient aucun renseignement sur l'évolution des longitudes des noeuds. Toutefois, on obtient des renseignements sur les inclinaisons qui s'obtiennent grâce aux formules (3.12) et (3.13) (voir remarque suivante). Ce résultat nous permet seulement de réduire la part de chaos des solutions de ce problème quand on est près du point fixe elliptique mais dans une zone qui reste raisonnablement grande et qui englobe les conditions initiales de notre système solaire : les solutions restent près d'un tore particulier (défini par  $\tilde{J}(0)$ ) pendant la durée du système solaire mais on ne sait rien de l'évolution de cette solution près du tore considéré. Si on veut un résultat de quasipériodicité pour les variables d'excentricité et d'inclinaison, on doit essayer d'avoir des renseignements sur les angles du système : cette étude est réalisée dans la section suivante.

**Remarque 24** Ce résultat permet de borner la diffusion des actions de départ qui, prises dans le domaine  $\Delta_\rho$  restent dans le domaine  $\Delta_{\rho_{fin}}$  où  $\rho_{fin} = \sqrt{\rho^2 + \epsilon_3}$ . On obtient donc aussi le résultat d'encadrement des actions suivant :

$$\mu_j^2 = \max(|J_j(0)| - \epsilon_3, 0) \leq |J_j(t)| \leq |J_j(0)| + \epsilon_3 = \rho_j^2 \quad (4.81)$$

On obtient alors  $z_j(t) \in \Delta_{\rho_j}$  pour le temps considéré. Et donc, dans les variables non diagonalisées,

$$\begin{cases} \min(|\cos(\theta_x)| \mu_1 - |\sin(\theta_x)| \rho_2, -|\cos(\theta_x)| \rho_1 + |\sin(\theta_x)| \mu_2) \leq |x_1| \leq |\cos(\theta_x)| \rho_1 + |\sin(\theta_x)| \rho_2 \\ \min(|\sin(\theta_x)| \mu_1 - |\cos(\theta_x)| \rho_2, -|\sin(\theta_x)| \rho_1 + |\cos(\theta_x)| \mu_2) \leq |x_2| \leq |\sin(\theta_x)| \rho_1 + |\cos(\theta_x)| \rho_2 \\ \mu_3 \leq |y| \leq \rho_3 \end{cases} \quad (4.82)$$

Ce qui donne de nouveaux encadrements pour les excentricités et inclinaisons. Toutefois, en général, pour les excentricités, cette majoration n'est pas très intéressante et ne donne pas de résultats bien meilleurs que la majoration obtenue en tenant compte de l'invariance du moment cinétique (comparer les majorations de la section 2.1.2 et de la section 4.5). Par contre, pour les inclinaisons, on obtient des résultats intéressants (l'étude est menée dans le cas du problème SJS, dans la section 4.5). La différence vient du fait que, si on ne sait pas comment évoluent les angles des noeuds, on sait qu'en tout cas ils sont opposés. La norme de  $y$  ne fait pas intervenir les expressions des angles du système. Cette constatation permet d'obtenir des encadrements précis des valeurs de  $|y_1|$  et  $|y_2|$  (grâce aux formules 3.12 et 3.13).

## 4.4 Près d'une solution quasi-périodique

Si on veut que notre solution soit proche d'une solution quasi-périodique, on doit obtenir des renseignements sur la diffusion des angles. La variation des angles est donnée par

$$\dot{\phi}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{J}_j} = \frac{\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j} + \frac{\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{J}_j} \quad (4.83)$$

Le risque principal est que, dans cette expression, le terme  $\partial \tilde{N}_0 / \partial \tilde{J}_j$  soit beaucoup plus grand que la contribution des restes ce qui ne permet pas d'obtenir des résultats sur la dynamique des angles. Soit  $(\tilde{J}_0, \tilde{\phi}_0)$  la solution quasi-périodique du système de hamiltonien  $\tilde{N}_0$  et de mêmes conditions initiales que notre système. Les solutions de ce système intégrable sont données par

$$\begin{cases} \tilde{J}_{0,j}(t) = \tilde{J}_j(0) \\ \tilde{\phi}_{0,j}(t) = \tilde{\phi}_j(0) + \tilde{\nu}_j t \end{cases} \quad (4.84)$$

Où les fréquences de cette solution quasi-périodique  $\tilde{\nu}_j$  sont définies par

$$\tilde{\nu}_j = \frac{\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j}(\tilde{J}_j(0)) \quad (4.85)$$

On va essayer de borner la diffusion de notre solution, comparée à cette solution quasipériodique. La diffusion des actions a déjà été bornée dans les section précédentes. Pour les angles, on a

$$\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_{0,j} = \frac{\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j}(\tilde{J}) - \frac{\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j}(\tilde{J}_0) + \frac{\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{J}_j}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \quad (4.86)$$

Comme on a établi un résultat de stabilité sur les actions  $\tilde{J}$ , qui restent pendant un temps  $t$  dans le domaine  $\tilde{\Delta}_{\rho_s}$ , on obtient la majoration suivante, qui permet de borner la diffusion des angles par rapport à cette solution quasipériodique pendant le temps  $t$  :

$$|\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_{0,j}| \leq \sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_0}} \left\| \frac{D\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j} \right\| \sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_s}} \|\tilde{J} - \tilde{J}_0\| + \sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_s}} \left| \frac{\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{J}_j} \right| \quad (4.87)$$

La fonction  $D(\partial \tilde{N}_0 / \partial \tilde{J}_j)$  est facile à calculer et à majorer grâce à TRIP. En effet on a

$$\left\| \frac{D\partial \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j} \right\| = \left( \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j \partial \tilde{J}_k} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.88)$$

Et on majore cette expression

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j \partial \tilde{J}_k} \right| \leq \sum_{n=4}^{n_N} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{N}_0}{\partial \tilde{J}_j \partial \tilde{J}_k} \right\|_{n-4} \rho_0^{n-4} \quad (4.89)$$

La fonction  $\tilde{N}_0$  étant calculée explicitement, ces normes sont aussi calculables explicitement. La majoration de  $\sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}} \|\tilde{J} - \tilde{J}_0\|$  s'obtient par les raisonnements précédents (sections (4.2) et (4.3)) qui majorent la diffusion des actions : pendant la durée du système solaire, on a  $\sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}} \|\tilde{J} - \tilde{J}_0\| \leq \epsilon t$  (voir lemme (10)). Le terme  $\sup_{\tilde{\Delta}_{\rho_\delta}} |\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})/\partial \tilde{J}_j|$  est un peu plus difficile à obtenir. On a

$$\frac{\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{J}_j} = \frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \tilde{z}_j} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial \tilde{J}_j} + \frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \tilde{z}_j} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial \tilde{J}_j} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial \tilde{J}_j} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial \tilde{J}_j} \quad (4.90)$$

Comme  $\tilde{R}_0$  et  $\tilde{R}$  sont des fonctions réelles, on a

$$\left| \frac{\partial(\tilde{R}_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{J}_j} \right| \leq 2 \left( \left| \frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \tilde{z}_j} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{z}_j} \right| \right) \left| \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial \tilde{J}_j} \right| \quad (4.91)$$

Le terme  $\partial \tilde{R}_0 / \partial \tilde{z}_j = \{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}$  se majore en utilisant une méthode similaire à celles utilisées dans les raisonnements précédents (voir section (4.4.2)). Le terme  $\partial \tilde{R} / \partial \tilde{z}_j$  a déjà été majoré (voir section (4.3.2)). Le terme  $\partial \tilde{z}_j / \partial \tilde{J}_j = (\tilde{z}_j)^{-1}$  pose un problème : Il faudrait pouvoir minorer  $|\tilde{z}_j|$  pour en trouver une majoration, ce qui revient à minorer  $\tilde{J}_j$ . Dans la section (4.2), on peut, sans trop rajouter d'hypothèses, calculer une minoration des actions  $\tilde{J}$ .

#### 4.4.1 Minoration des nouvelles actions $\tilde{J}$

Pour pouvoir donner des renseignements sur les angles du système, on doit minorer les actions. En effet, si les actions sont nulles, dans le système de variables action-angles, on a une singularité et les angles  $\tilde{\phi}_j$  ne sont pas définis. Dans le lemme (10), on a établi une borne à la diffusion des actions :  $|\tilde{J}(t) - \tilde{J}(0)| \leq \epsilon t$ . Si on minore les actions de départ  $\tilde{J}(0) \geq \mu$  alors les actions restent minorées par  $\max(\mu - \epsilon t, 0) = \mu_0$ . Si  $\epsilon$  est suffisamment petit alors on peut arriver à avoir  $\mu_0 > 0$  et donc à majorer  $|\tilde{z}_j|^{-1}$ . L'étude conjointe d'un minimum et d'un maximum des actions  $\tilde{J}$  est assez complexe et on va réaliser une étude seulement pour la valeur du minimum des actions correspondant à la valeur minimale des actions pour le problème SJS c'est-à-dire que l'on prend  $|z_j(0)| \geq 9 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4.4.2 Calcul d'une majoration de $\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}$

On peut majorer ce terme par

$$\begin{aligned} |\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}| &\leq \sum_{k \geq n_N + 2, k \text{ pair}} \|[\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}]_{k-1}\|_{k-1} \rho_\delta^{k-1} \\ &\leq \sum_{k \geq n_N + 2, k \text{ pair}} k \|[\tilde{R}_0]_k\|_k \rho_\delta^{k-1} \end{aligned} \quad (4.92)$$



On doit donc majorer les normes  $||[\tilde{R}_0]_k||_k$  pour obtenir la majoration voulue. On a

$$[\tilde{R}_0]_k = [\tilde{H}_0]_k = [T^*H_0]_k = \sum_{l=0, l \text{ pair}}^{\min(k, n_H)} T_{k-l}^* H_l \quad (4.93)$$

On commence par calculer les valeurs des  $T_k^* H_l$  pour tous les  $l$  entre 2 et  $n_H$  et pour tout  $k$  inférieur à  $n_3$ , un entier choisi. Ensuite on se sert des lemmes suivants pour majorer les normes des  $T_k^* H_l$ . On ne démontre pas ces lemmes car ils font appel aux mêmes techniques que celle utilisées dans la section (4.2).

**Lemme 14** *Soit  $(k, l)$  un couple d'entiers naturels, on a*

$$||T_k^*[H_0]_l||_{k+l} \leq A_{k,l} \quad (4.94)$$

où les  $A_{k,l}$  sont définis de la manière suivante :  $A_{k,l} \neq 0$  si et seulement si  $k$  et  $l$  sont pairs.  $A_{k,l} = 0$  pour tout  $l > n_H$ . Pour tout  $2 \leq l \leq n_H$  et  $0 \leq k \leq n_3$ ,

$$A_{k,l} = ||T_k^*[H_0]_l||_{k+l} \quad (4.95)$$

Pour tout  $2 \leq l \leq n_H$  et  $k > n_3$ ,

$$A_{k,l} = \frac{1}{k} \sum_{q=2, q \text{ pair}}^k (q+2)(k-q+l) ||W_q||_{q+2} A_{k-q,l} \quad (4.96)$$

Pour pouvoir trouver une majoration du reste, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 15** *Pour  $2 \leq l \leq n_H$ , pour tout réel positif  $\alpha_l > \beta_C$ , il existe un réel  $M_l$  positif et un entier naturel  $N_l$  tel que pour  $k \geq N_l$ , on a*

$$A_{k,l} \leq M_l \alpha_l^k \quad (4.97)$$

En pratique, pour obtenir une meilleure majoration, on choisit des  $\alpha_l$  assez proches de  $\beta_C$  : on calcule explicitement, grâce à la formule (4.96), les  $A_{k,l}$  pour tous les  $l$  tels que  $2 \leq l \leq n_H$  et pour un grand nombre de valeurs de  $k$  ( $n_3 + 2 \leq k \leq n_{M3}$ ). On choisit l'entier  $n_{M3}$  tel que  $n_{M3} > n_N$ . Ensuite on essaie de majorer les  $A_{k,l}$  par une relation du type  $A_{k,l} \leq M_l \alpha_l^k$  pour  $2 \leq l \leq n_H$  et  $k \geq n_{M3} - n_N$  pour laquelle les  $\alpha_l$  sont peu supérieurs à  $\alpha_C$ . On vérifie ensuite que la formule de récurrence (4.96) impose cette relation pour tout  $k \geq n_{M3}$ . On a finalement  $||[T^*H_0]_k||_k \leq \sum_{l=1, l \text{ pair}}^k A_{k-l,l}$ . On calcule explicitement, par la formule de récurrence (4.96), les  $||[T^*H_0]_k||_k$  jusqu'à  $k = n_{M3}$ . Ensuite, pour  $k \geq n_{M3}$ , on majore les  $||[T^*H_0]_k||_k$  grâce à la majoration  $A_{k,l} \leq M_l \alpha_l^k$ . On a  $A_{k,l} = 0$  pour  $l > n_H$  donc, comme  $n_{M3} \geq n_H$ , on obtient

$$||[T^*H_0]_k||_k \leq \sum_{l=1, l \text{ pair}}^{n_H} A_{k-l,l} \quad (4.98)$$

On a donc

$$||[\tilde{H}_0]_k||_k \leq \sum_{l=2, l \text{ pair}}^{n_H} M_l \alpha_l^{k-l} \quad (4.99)$$

Et finalement, on obtient la majoration suivante de  $|\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}|$  :

$$\begin{aligned} |\{\tilde{R}_0, \tilde{z}_j\}| &\leq \sum_{k>n_N+2, k \text{ pair}}^{n_{M3}} k \|[\tilde{R}_0]_k\|_k \rho_\delta^{k-1} + \\ &+ \sum_{k>n_{M3}+2, k \text{ pair}} k \left( \sum_{l=2, l \text{ pair}}^{n_H} M_l \alpha_l^{k-l} \right) \rho_\delta^{k-1} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Ce qui donne la majoration suivante

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k>n_N+2, k \text{ pair}}^{n_{M3}} k \|[\tilde{R}_0]_k\|_k \rho_\delta^{k-1} + \\ &+ \sum_{l=2, l \text{ pair}}^{n_H} M_l \alpha_l^{1-l} (\alpha_l \rho_\delta)^{n_{M3}-1} \frac{n_{M3}(1 - (\alpha_l \rho_\delta)^2) + 2(\alpha_l \rho_\delta)^2}{(1 - (\alpha_l \rho_\delta)^2)^2} \end{aligned} \quad (4.101)$$

### 4.4.3 Majoration finale

Si on se place dans un domaine où  $\sup_{\Delta_{\rho_\delta}} \|\tilde{J} - \tilde{J}_0\|$  est très petit et pour lequel les conditions initiales  $\tilde{J}_j(0)$  ne sont pas trop proche de zéro, on peut arriver à obtenir la majoration

$$|\dot{\tilde{\phi}}_j - (\dot{\tilde{\phi}}_0)_j| \leq \epsilon_{\phi_j} \quad (4.102)$$

L'angle  $\tilde{\phi}_0(t)$  a une variation linéaire en fonction du temps  $(\tilde{\phi}_0)_j(t) = \tilde{\nu}_j t + (\tilde{\phi}_0)_j(0)$ . Pour  $t \leq t_{max}$ , l'angle  $\phi_j$  a alors quasiment une variation linéaire :

$$|\tilde{\phi}_j(t) - (\tilde{\nu}_j t + (\tilde{\phi}_0)_j(0))| \leq \epsilon_{\phi_j} t \quad (4.103)$$

si  $t$  est tel que  $\epsilon_{\phi_j} t \ll 1$ .

Dans la figure (4.15), on donne les temps minimum pour s'éloigner de la solution quasi-périodique (0.1 radian de différence) et du tore  $\tilde{J} = \tilde{J}(0)$  en fonction du rayon du domaine contenant les conditions initiales.

Pour un certain rayon du domaine de conditions initiales, on a donc le comportement suivant : pendant un temps  $t_1$  donné par la courbe 1, les trajectoires restent près d'une trajectoire quasipériodique. Passé ce temps  $t_1$ , on perd tout renseignement sur les angles du système mais on reste près du tore  $\tilde{J} = \tilde{J}(0)$  jusqu'au temps  $t_2$  donné par la courbe 2. Passé ce temps  $t_2$ , la diffusion est trop importante et on ne peut plus assurer une régularité dans le comportement des trajectoires.

## 4.5 Le cas du problème SJS

Dans cette section sont présentés des résultats concernant plus particulièrement le problème SJS. Au vu des études menées dans les sections précédentes, on va tronquer le hamiltonien au degré  $n_H = 20$  et construire la forme normale au degré  $n_N = 50$ . Le rayon  $\rho = \rho_r$  majorant les conditions initiales est fixé. On obtient ainsi une mesure du temps minimum pour avoir

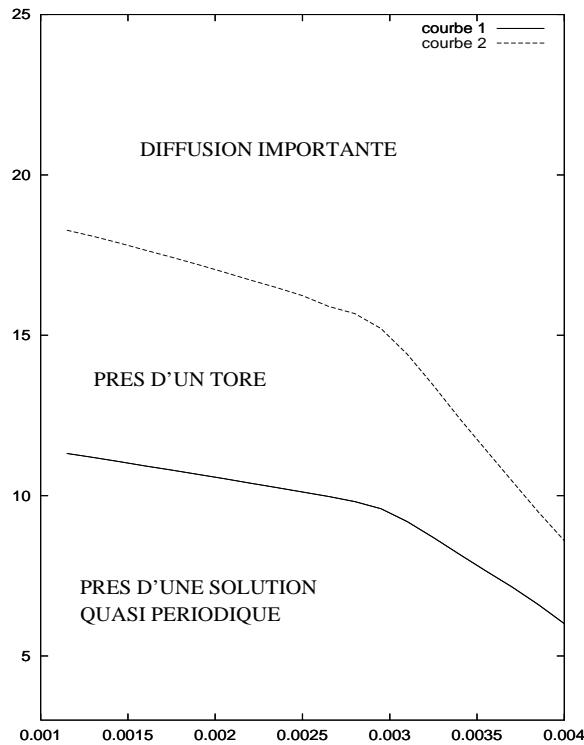


FIG. 4.15: Domaines donnés par les études des sections 4.3 et 4.4 : la courbe 1 donne le logarithme décimal du temps minimum pour une diffusion de  $10^{-1}$  rad de notre solution par rapport à la solution quasipériodique donnée par l'équation (4.84) et la courbe 2 donne le temps minimum pour une diffusion de  $10^{-2}$  des actions  $\tilde{J}$ .

une diffusion donnée par rapport à un tore particulier ou mieux, par rapport à une solution quasipériodique (figure 4.16).

Au vu de la courbe (4.16), on a donc démontré le fait que les variations séculaires du problème SJS restent proches d'une solution quasipériodique pendant à peu près  $10^8$  années et que ces variations restent dans le voisinage proche d'un tore pendant à peu près  $10^{12}$  années.

D'autre part, pendant la durée du système solaire la diffusion des actions est inférieure à  $10^{-4}$ . Pendant ce temps, grâce aux encadrements des variables  $x_1, x_2$  et  $y$  (voir section 4.3.3), on trouve l'encadrement suivant des excentricités et inclinaisons (en radians) :

$$\begin{cases} e_{1max} \simeq 0,0602 & e_{2max} \simeq 0,0941 & i_{1max} \simeq 0.00671 & i_{2max} \simeq 0.0165 \\ e_{1min} = 0 & e_{2min} = 0 & i_{1min} \simeq 0.00588 & i_{2min} \simeq 0.0145 \end{cases} \quad (4.104)$$

En ce qui concerne les excentricités, ces encadrements apportent très peu par rapport aux majorations données par la valeur du moment cinétique (2.5). Mais pour les inclinaisons séculaires, on obtient un encadrement très précis.

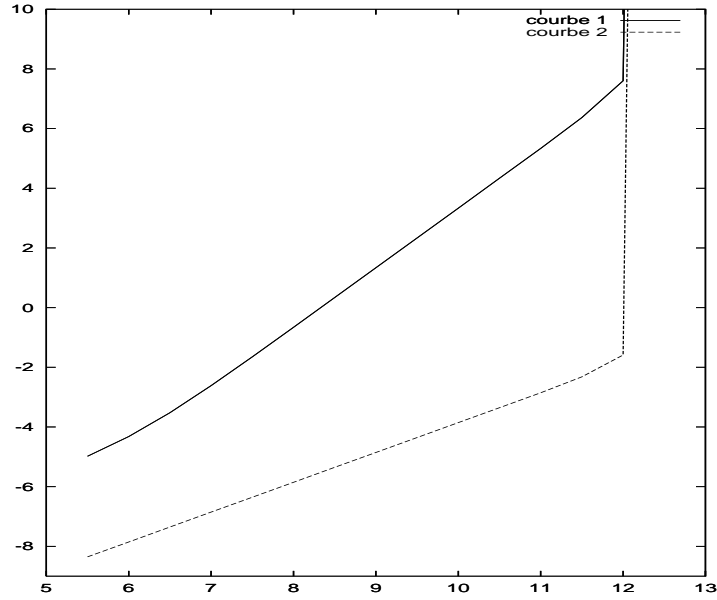


FIG. 4.16: La courbe 1 représente le  $\log_{10}$  de la diffusion maximale des angles en fonction du  $\log_{10}$  du temps par rapport à une solution quasi-périodique. La courbe 2, le  $\log_{10}$  de la diffusion des actions  $\tilde{J}$  par rapport au tore  $\tilde{J} = \tilde{J}(0)$ .

## 4.6 Analyse en fréquence

### 4.6.1 Principe

On va comparer deux études différentes de la stabilité du système : celle qui a été présentée lors des sections précédentes, qui fournit un résultat rigoureux de stabilité et l'analyse en fréquence du système, étude numérique destinée à tester la quasipériodicité d'une solution. L'analyse en fréquence permet de fournir une approximation quasipériodique d'une fonction à valeurs complexes (Laskar, 1999). Dans ce but, on intègre le problème séculaire diagonalisé tronqué  $H_d = \sum_{k=2, k \text{ pair}}^{n_H} H_{d,k}$  avec  $n_H = 20$  en partant des conditions initiales  $z_j(0)$  sur 25 millions d'années et on réalise une analyse en fréquence de la solution fournie. Cette analyse nous donne une solution  $z_{a,j}$  approchée de la fonction  $z_j$  :

$$z_{a,j}(t) = \sum_{k=0}^{N_1} \alpha_{a,k} e^{i\omega_{a,k}t} \quad (4.105)$$

où les  $\alpha_{a,k}$  sont des constantes complexes et les  $\omega_{a,k}$  sont des fréquences réelles. Parallèlement, la méthode que nous avons jusqu'alors mise en oeuvre, la normalisation, nous donne un nouvel hamiltonien de la forme :

$$\tilde{H}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) = \tilde{N}(\tilde{J}) + \text{Reste}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) \quad (4.106)$$

On a vu que sous certaines conditions, dans un domaine proche du point fixe elliptique, on peut approcher la solution de ce système par une solution quasi-périodique qui correspond au hamiltonien  $\tilde{H}(\tilde{J}, \tilde{\phi}) = \tilde{N}(\tilde{J})$  pendant une durée suffisamment longue. Pour les conditions

SJS, cette durée est approximativement de 100 millions d'années. Ce hamiltonien donne la solution quasipériodique suivante (4.84) :

$$\tilde{z}_j(t) = \tilde{z}_j(0)e^{i\tilde{\nu}_j t} \quad (4.107)$$

En considérant la transformation  $z = T_{(1)}^*(\tilde{z})$ , on obtient alors un expression quasipériodique de la fonction  $z(t)$ . On ne peut, en pratique, que calculer  $z_{n,j}$  une expression tronquée en excentricités et inclinaisons de cette transformation  $T_{(1)}^*$  :

$$z_{n,j}(t) = \tilde{z}_j(t) + \sum_{k=3, k \text{ impair}}^{k=N_2} P_k(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) \quad (4.108)$$

Où  $P_k$  est de degré  $k$  en les variables  $\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}$ . Donc, on obtient

$$z_{n,j}(t) = \sum_{k=1}^{N_3} \alpha_{n,k} e^{i\omega_{n,k} t} \quad (4.109)$$

On doit ensuite comparer les solutions  $z_{a,j}$  et  $z_{n,j}$  données par les deux méthodes (4.105) et (4.109), c'est à dire comparer les  $\alpha_{a,k}$  et  $\alpha_{n,k}$  et les fréquences  $\omega_{a,k}$  et  $\omega_{n,k}$ . D'autre part, les fréquences  $\omega_{a,k}$  et  $\omega_{n,k}$  sont combinaisons de trois fréquences fondamentales qui correspondent aux fréquences  $\tilde{\nu}_j$ , ( $1 \leq j \leq 3$ ) pour la forme normale et aux fréquences  $\tilde{\nu}_{a,j}$ , ( $1 \leq j \leq 3$ ) pour l'analyse en fréquence.

## 4.6.2 Comparaisons

On se place ici exclusivement dans le cas des conditions initiales SJS.

Les résultats des études de la forme normale et de l'analyse en fréquence sont rassemblées dans le tableau suivant, qui donne la solution quasipériodique proche de  $\tilde{z}_1$ . Les fréquences sont données en seconde d'arc par années et on donne les combinaisons de fréquences fondamentales ( $\tilde{\nu}_{a,1}, \tilde{\nu}_{a,2}$  et  $\tilde{\nu}_{a,3}$ ) donnant les fréquences  $\omega_{a,k} = k_1\tilde{\nu}_{a,1} + k_2\tilde{\nu}_{a,2} + k_3\tilde{\nu}_{a,3}$ .

$k$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	fréquence $\omega_{a,k}$	module $\alpha_{a,k}$	$(\alpha_{n,k} - \alpha_{a,k})/\alpha_{n,k}$
1	-1	0	0	-3.48836304242	$3.4920421 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$
2	0	-1	0	-22.4336762084	$8.2615426 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-14}$
3	1	-2	0	-41.3789893743	$1.2499347 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-13}$
4	-2	1	0	15.4569501235	$1.2232627 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$
5	0	1	-2	74.9715521598	$5.0443408 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-12}$
6	1	0	-2	56.0262389938	$3.4029564 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$
7	2	-3	0	-60.3243025402	$5.2914489 \cdot 10^{-9}$	$7.1 \cdot 10^{-9}$
8	2	-1	-2	37.0809258281	$3.0037513 \cdot 10^{-9}$	$5.3 \cdot 10^{-9}$
9	-1	-2	2	100.893591410	$2.8632854 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$
10	0	-3	2	119.838904576	$2.4287182 \cdot 10^{-9}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$

La différence relative des fréquences fondamentales données par l'analyse en fréquence et la forme normale est

$$\begin{cases} (\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_{a,1})/\tilde{\nu}_1 = 2.2 \cdot 10^{-14} \\ (\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_{a,2})/\tilde{\nu}_2 = 1.6 \cdot 10^{-14} \\ (\tilde{\nu}_3 - \tilde{\nu}_{a,3})/\tilde{\nu}_3 = 1.9 \cdot 10^{-14} \end{cases} \quad (4.110)$$

En réalisant plusieurs analyses en fréquence, on peut aussi estimer la diffusion des fréquences : on réalise deux intégrations sur des intervalles de temps successifs  $[0, T]$  et  $[T, 2T]$  (ici  $T = 25$  millions d'années) et on compare les résultats d'une analyse en fréquence sur ces deux intervalles. On obtient des diffusions relatives respectivement de  $\tilde{\nu}_{a,1}$ ,  $\tilde{\nu}_{a,2}$  et  $\tilde{\nu}_{a,3}$  de l'ordre de  $9.5 \cdot 10^{-14}$ ,  $1.8 \cdot 10^{-15}$  et  $1.6 \cdot 10^{-13}$ . Ces valeurs sont de l'ordre de grandeur des différences données par l'évaluation numérique ci-dessus. Il faut toutefois noter que ces calculs donnent plutôt une valeur maximale de la diffusion et que ces diffusions sont aussi proches de l'ordre de grandeur de l'erreur numérique des calculs menés (calculs effectués en double précision). On a vérifié que pour des conditions initiales plus proches du point fixe, ces différences relatives et donc cette mesure de la diffusion avaient tendance à décroître.

On va comparer ces valeurs de diffusion avec celles de notre étude théorique. Sur 25 millions d'années, la diffusion théorique par rapport à une solution quasipériodique est donnée par l'étude de la section (4.5). La diffusion de la valeur des fréquence est donnée par la formule (4.87) et, sur une durée de 25 millions d'années, les diffusions relatives respectivement de  $\tilde{\nu}_1$ ,  $\tilde{\nu}_2$  et  $\tilde{\nu}_3$  sont de l'ordre de  $3.3 \cdot 10^{-5}$ ,  $5.2 \cdot 10^{-6}$  et  $4.5 \cdot 10^{-6}$ . Ces valeurs sont bien supérieures aux diffusions réelles des fréquences fondamentales données par les études numériques ci-dessus. Cette différence s'explique par le fait que la diffusion donnée par la méthode de normalisation est un majorant de la diffusion, utilisant des majorations grossières (par les normes  $k$ ). Cette étude permet de voir la différence entre les vraies valeurs de la diffusion (qui sont bien mieux estimées par une méthode numérique) et les valeurs fournies par notre étude (équation 4.87). Les valeurs des diffusion sont très différentes et notre étude (rigoureuse) permet une estimation plus que grossière du comportement, quasi-périodique ou non des fonctions. Par contre, la forme normale  $\tilde{N}$  donne une très bonne approximation des fréquences fondamentales.

## 4.7 Etude au voisinage d'une résonance séculaire

On peut se demander quelle est l'efficacité des méthodes précédentes quand on est beaucoup plus proche d'une résonance séculaire c'est-à-dire d'une résonance (qui ne provient pas de la trace nulle) entre les fréquences linéaires du problème séculaire (cas où  $F_O \neq \{0\}$ ). On va, pour cela, commencer par trouver quelles résonances peuvent faire apparaître des petits diviseurs lors de la construction de la forme normale. Le diviseur  $D$  qui apparait dans la solution de l'équation homologique (2.38) et qui vient du monôme  $z_1^{k_1} \bar{z}_1^{\bar{k}_1} z_2^{k_2} \bar{z}_2^{\bar{k}_2} z_3^{k_3} \bar{z}_3^{\bar{k}_3}$  est

$$D = (k_1 - \bar{k}_1)\nu_1 + (k_2 - \bar{k}_2)\nu_2 + (k_3 - \bar{k}_3)\nu_3 \quad (4.111)$$

Les relations de symétrie que l'on a pour le hamiltonien se retrouvent dans l'équation homologique et vont empêcher les résonances d'apparaître dans les termes de bas degré. Ces relations s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{relations de d'Alembert} : & k_1 + k_2 + k_3 = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 \\ \text{parité} : & k_3 + \bar{k}_3 \text{ est pair} \\ \text{trace nulle} : & \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \end{cases} \quad (4.112)$$

On se sert de ces relations (trace nulle puis relations de d'Alembert) pour exprimer les diviseurs :

$$D = [(k_1 - \bar{k}_1) - (k_3 - \bar{k}_3)]\nu_1 + [(k_2 - \bar{k}_2) - (k_3 - \bar{k}_3)]\nu_2 =$$

$$= [2(k_1 - \bar{k}_1) + (k_2 - \bar{k}_2)]\nu_1 + [(k_1 - \bar{k}_1) - 2(k_2 - \bar{k}_2)]\nu_2 \quad (4.113)$$

On note  $p_1 = k_1 - \bar{k}_1$  et  $p_2 = k_2 - \bar{k}_2$ . La relation de parité impose de plus que  $k_3 + \bar{k}_3$  soit pair et donc que  $k_3 - \bar{k}_3$  soit pair. Comme  $k_3 - \bar{k}_3 = -p_1 - p_2$  alors on doit avoir  $p_1$  et  $p_2$  de même parité. On recherche, en tenant compte de ces relations, quelles peuvent être les monômes qui peuvent amener une résonance à apparaître dans le second membre de degré  $N$ . Pour qu'une résonance donne un diviseur petit au degré  $N$  et pas avant, il faut considérer que le monôme  $z_1^{k_1} \bar{z}_1^{\bar{k}_1} z_2^{k_2} \bar{z}_2^{\bar{k}_2} z_3^{k_3} \bar{z}_3^{\bar{k}_3}$  du second membre de l'équation homologique de degré  $N$ , qui va donner ce diviseur, ne contient pas de modules  $z_j \bar{z}_j$  et donc est tel que  $k_1 \bar{k}_1 = k_2 \bar{k}_2 = k_3 \bar{k}_3 = 0$  (pour tout  $j$  de 1 à 3, on doit avoir  $k_j = 0$  ou  $\bar{k}_j = 0$ ). Dans ce cas, on a  $p_1 = \max(|k_1|, |\bar{k}_1|)$  et  $p_2 = \max(|k_2|, |\bar{k}_2|)$ . Et on va donc considérer que, au degré  $N$ ,  $p_1$  peut prendre toutes les valeurs de  $-N/2$  à  $N/2$ ,  $p_2$  de même en respectant le fait que  $p_1 + p_2$  est pair.  $p_1$  et  $p_2$  ne peuvent pas prendre une valeur supérieure strictement à  $N/2$  sinon cela implique que  $k_1, \bar{k}_1, k_2$  ou  $\bar{k}_2$  sont supérieurs strictement à  $N/2$  et les relations de d'Alembert ne sont plus vérifiées. Pour toutes ces valeurs, la résonance  $2p_1 + p_2, p_1 + 2p_2$  apparaît dans l'équation homologique de degré  $N$ . Dans le tableau suivant, on note le degré minimal d'apparition des résonances (apparition du monôme donnant cette résonance dans le second membre de l'équation homologique), jusqu'au degré 50 (degré maximal de construction de la forme normale dans notre étude). On ne note que les résonances  $2p_1 + p_2, p_1 + 2p_2$  où ces deux termes sont de signe opposé parce que les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont de même signe (voir figure (4.17)).

Degré	Résonances	Degré	Résonances
4	-1/1	28	-10/1 -8/5
6	pas de résonances	30	-19/7 -17/11
8	pas de résonances	32	-3/2 -11/2
10	-7/1	34	-7/3 -25/1 -23/5 -19/13
12	-4/1	36	-10/7
14	-3/1	38	-9/1 -7/5 -25/7 -23/11
16	-5/2	40	-13/4 -11/8
18	-13/1 -11/5	42	-31/1 -29/5 -25/13 -23/17
20	-2/1	44	-4/3 -16/1 -14/5
22	-5/1 -13/7	46	-11/1 -9/5 -31/7 -29/11 -25/19
24	-7/4	48	-17/2 -13/10
26	-5/3 -19/1 -17/5	50	-11/3 -9/7 -37/1 -31/13 -29/17

On peut remarquer les relations de d'Alembert et de parité empêchent les résonances d'apparaître à des bas degrés. Pour voir dans quel cas (pour quelle valeur des paramètres) ces résonances peuvent effectivement créer des petits diviseurs, on va étudier les fréquences du système séculaire en détail. On a vu, dans la section (2.2.2) que les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $A_x$  (2.22). Elles sont donc les racines du polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\left(\frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_1} - X\right)\left(\frac{C_3(\alpha)}{2\Lambda_2} - X\right) - \frac{C_2^2(\alpha)}{\Lambda_1\Lambda_2} = 0 \quad (4.114)$$

On trouve

$$\nu_j = \frac{C_3(\alpha)}{4} \left( \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_2} \right) + \epsilon \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (4.115)$$

Où  $\epsilon$  est égal à  $-1$  ou  $+1$  et

$$\Delta = \frac{C_3^2(\alpha)}{4} \left( \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_2} \right)^2 + \frac{4C_2^2(\alpha)}{\Lambda_1\Lambda_2} \geq 0 \quad (4.116)$$

On peut, en étudiant les valeurs de  $C_2$  et  $C_3$  (2.19) en fonction du rapport des demi-grands axes  $\alpha$ , prouver que pour  $\alpha \in [0, 1]$ , on a  $C_3 \geq 0$  et  $C_2 \leq 0$ . On définit les deux fréquences telles que  $\nu_1 \leq \nu_2$ . Pour  $\nu_1$ , on prend  $\epsilon = -1$  et pour  $\nu_2$ ,  $\epsilon = +1$  dans (4.115). On obtient finalement, en se servant du fait que  $\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}$ , le rapport des fréquences comme une fonction simple du rapport des demi-grands axes :

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}(\alpha) = \frac{\frac{C_3}{2}(1+k) - \sqrt{\frac{C_3^2}{4}(1-k)^2 + 4C_2^2 k}}{\frac{C_3}{2}(1+k) + \sqrt{\frac{C_3^2}{4}(1-k)^2 + 4C_2^2 k}} \quad (4.117)$$

Où  $k = \Lambda_1/\Lambda_2$  ne dépend que de la valeur de  $\alpha$ . En effet, on calcule  $k$  par la formule suivante

$$k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{2,0}} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0}} \quad (4.118)$$

Où  $\Lambda_{1,0}$ ,  $\Lambda_{2,0}$  et  $\alpha_0$  sont les valeurs de  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  et  $\alpha$  pour les paramètres du problème SJS.

La figure (4.17a) montre que pour les valeurs des masses du système, la fréquence  $\nu_1$  est tout le temps supérieure à zéro. Le domaine de variation du rapport des demi-grands axes, indiqué sur la figure (4.17b) et qui est fourni par l'étude de la section (1.6.3), ne contient pas de résonances séculaires jusqu'au degré 50. On peut toutefois se demander quelle serait l'efficacité de notre méthode de perturbation pour une valeur du rapport des fréquences plus proche d'un résonance. Dans ce but, on a pris, pour les mêmes masses du système et le même demi-grand axe de Saturne, un demi-grand axe de Jupiter un petit peu différent  $a_1 = 5.44398568411732 U.A.$  de manière à avoir un rapport des fréquences très proche de la résonance 7/1 :

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{7}(1 + 10^{-8}) \quad (4.119)$$

Ce changement de la valeur du demi-grand axe n'est pas très important, de l'ordre de 4%. On remet en place alors toutes les techniques des sections (4.1.4) et (4.2) dans ce cas particulier. On rassemble alors sur une même figure (4.18) les courbes donnant le rayon de convergence des transformations  $r_0^C$  et  $\beta_C^{-1}$  pour le cas que l'on a déjà étudié et pour le cas résonant.

La résonance 1/7 apparaît dans l'équation homologique de degré  $n_N = 10$ . La grande valeur du diviseur correspondant dégrade fortement les rayons de convergence à partir de ce degré. On voit donc bien que la méthode que l'on a employée n'est pas bonne dans le cas où



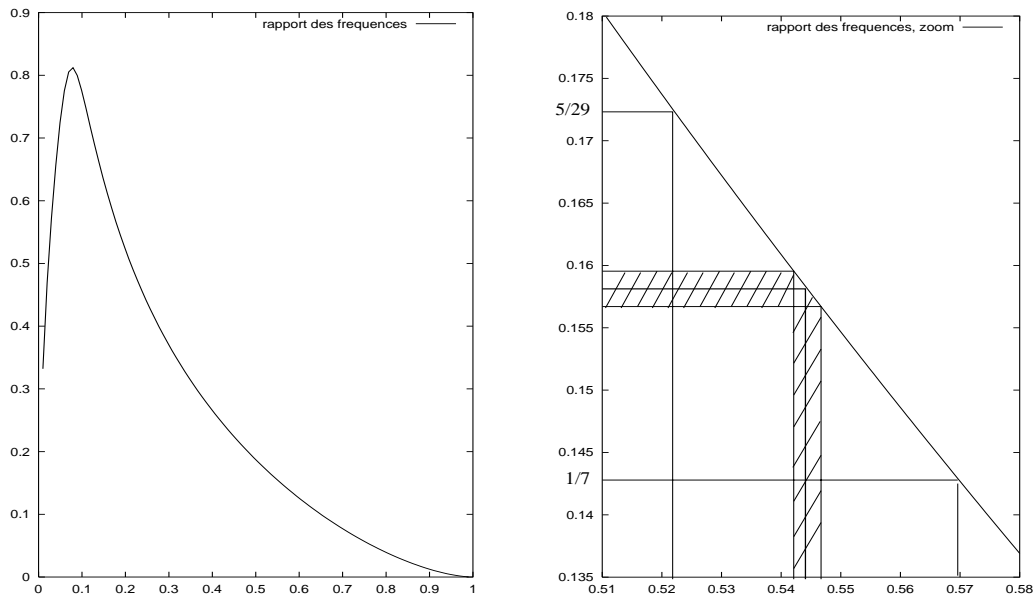


FIG. 4.17: figure (a) : Valeur du rapport des fréquences en fonction du rapport des demi grands axes et figure (b) : zoom de la figure (a), on a indiqué les résonances séculaires proches de la situation du problème SJS ainsi que la zone possible d'évolution du demi-grand axe séculaire (zone hachurée). En trait gras, la valeur du choix que l'on a fait du rapport des demi grand axes séculaires, correspondant à la valeur initiale du rapport des demi grand axes dans les variables non séculaires.

on est proche d'une résonance séculaire, les conditions initiales (excentricité et inclinaison) du problème SJS n'étant pas comprises dans les domaines de convergence pour une normalisation supérieure au degré 10. Les domaines de convergence trouvés sont de l'ordre des domaines de l'étude brute (4.1.3) et cette normalisation n'apporte rien.

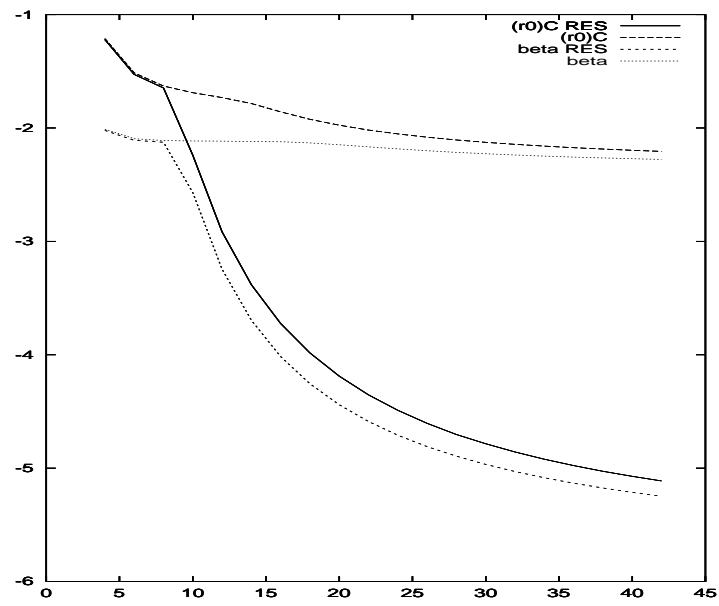


FIG. 4.18: Comparaison des rayons de convergence entre le cas non résonant et le cas résonant (RES) en fonction du degré de normalisation  $n_N$  pour  $n_H = 16$

# Conclusions et perspectives

L'un des résultats les plus importants de ce travail de thèse est que l'on a démontré que la construction d'une forme normale de Birkhoff était impossible dans le cas d'un problème planétaire de trois corps séculaire à l'ordre un du rapport des masses. Même si l'étude n'a pas été réalisée pour un système planétaire de  $n + 1$  corps, on devrait retrouver un comportement similaire. Par conséquent, on met en lumière la nécessité d'une réduction partielle du système planétaire qui, étant facile à réaliser dans le cas de trois corps, simplifiant grandement les expressions et la taille des séries considérées, et ne changeant pas la nature du problème, devrait être systématiquement réalisée. L'introduction de cette réduction partielle permet de plus d'avoir une vision plus nette du problème, et de choisir si le système a besoin d'une réduction totale et laquelle (section 3.3.3). Les résultats de stabilité du chapitre 4 sont complémentaires aux résultats en temps infini fournis par U.Locatelli et A.Giorgilli pour des valeurs particulières de conditions initiales. Ils permettent de fournir un résultat de stabilité (en temps fini) pour un système un peu plus général (où la norme du moment cinétique n'est pas fixée) et sur un ouvert de conditions initiales comprenant le point fixe elliptique. De plus, cette étude a permis de faire surgir des questions nouvelles liées à la construction d'une forme normale de Birkhoff.

Ce travail de thèse ouvre la voie à plusieurs études.

Premièrement, il faudrait faire une étude pratique plus précise de l'apparition de termes résonants dans le cas plus général de  $n + 1$  corps pour confirmer le fait qu'une forme normale non résonante n'est pas constructible. Les études menées dans la section (2.4) permettent d'aborder plus facilement cette question.

Ensuite, il manque une étude des domaines de convergence de la méthode de réduction partielle. En particulier, pour quelles valeurs des excentricités et inclinaisons la décomposition (3.31) de la deux-forme symplectique est-elle possible ?

Le chapitre 4 met en lumière des questions plus pratiques. Le système SJS non sécularisé étant proche de la résonance (2,-5) en moyen mouvement, la sécularisation à l'ordre un du rapport des masses n'est pas une bonne approximation du système. Une nouvelle étude, partant d'un système sécularisé à un ordre supérieur devrait être menée.

Ce travail a aussi mis le doigt sur la nécessité de mener une étude précise de la série définissant le hamiltonien du système dans des variables liées aux éléments elliptiques. En particulier, l'étude du rayon de convergence de cette série, des points pour lesquels elle prend ses valeurs maximales dans un domaine fixé est importante tant pour des études numériques que théoriques. Les études menées dans ce domaine sont encore trop peu nombreuses ((Sundman, 1916), (Silva, 1909) et (Niedermaier, 1993)) et ont montré la difficulté de ces questions.

Une extension naturelle de ce travail serait l'application des méthodes (réduction partielle

et méthodes perturbatives) à un problème plus général : le problème planétaire de 5 corps de la dynamique des planètes extérieures (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune). Les effets principaux intervenant dans la dynamique de ce problème viennent de l'interaction entre Jupiter et Saturne et l'étude que nous avons menée a permis, entre autre d'avoir une idée des moyens à mettre en oeuvre pour une telle étude. En particulier, en allant à un degré de normalisation beaucoup plus faible (vu la taille des séries mises en jeu), on devrait pouvoir prouver des résultats de stabilité pour des conditions initiales plus proches du point fixe elliptique mais tout de même dans un domaine proche des conditions initiales réelles du système.

D'autre part, une étude intéressante serait de mieux comprendre, dans un cadre plus général, pour un système hamiltonien quelconque auquel on applique une méthode de construction d'une forme normale de Birkhoff, comment apparait le degré optimal de normalisation en fonction de la taille de la perturbation. Les méthodes de N. Nekhoroshev fournissent avant tout une estimation du comportement asymptotique de ce degré quand la perturbation tend vers zéro. Il serait intéressant d'étudier plus précisément cette fonction et ses variations. En particulier le comportement, mis en évidence dans cette étude mais aussi dans l'article de (Giorgilli et Skokos, 1996), de "saut" de cette fonction (figures 4.8, 4.9). Avec le développement des techniques de calcul formel, on peut réaliser une étude plus systématique, à des degrés élevés de normalisation qui permettrait d'avoir une idée plus précise de ces phénomènes, pour des systèmes hamiltoniens plus génériques.

# Annexe A

On présente, en annexe, deux façons différentes de réaliser la transformation linéaire de la section (3.2.1) qui rend standard la forme symplectique à l'ordre zéro. La première transformation orthogonale possible est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $\mathbf{v} = \mathbf{V} / \|\mathbf{V}\| - \mathbf{e}_{n-1}$  qui peut être calculée en utilisant la formule (3.37) :

$$Q = I_{n-1} - \frac{D_{n-1} + \sqrt{\Lambda_{n-1}}}{D_{n-1}D_{n-2}^2} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2} & \cdots & \sqrt{\Lambda_1\Lambda_{n-1}} \\ \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2} & \Lambda_2 & \cdots & \sqrt{\Lambda_2\Lambda_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\Lambda_1\Lambda_{n-1}} & \sqrt{\Lambda_2\Lambda_{n-1}} & \cdots & \Lambda_{n-1} \end{pmatrix} \\ + \frac{D_{n-1} + \sqrt{\Lambda_{n-1}}}{D_{n-2}^2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\Lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\Lambda_{n-2}} \\ \sqrt{\Lambda_1} & \cdots & \sqrt{\Lambda_{n-2}} & 2\sqrt{\Lambda_{n-1}} - D_{n-1} \end{pmatrix}$$

où  $D_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k \Lambda_i}$  et  $I_{n-1}$  est la matrice identité  $(n-1) \times (n-1)$ . Dans cette transformation linéaire, la variable  $n-1$  joue un rôle spécial mais les  $n-2$  autres ont le même rôle.

Une seconde transformation orthogonale possible est obtenue grâce à une orthogonalisation de Schmidt et la matrice  $Q$  a alors cette expression :

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}{D_1D_2} & -\frac{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_3}}{D_2D_3} & -\frac{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_4}}{D_3D_4} & \cdots & -\frac{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_{n-1}}}{D_{n-2}D_{n-1}} & -\frac{\sqrt{\Lambda_1}}{D_{n-1}} \\ \frac{D_1}{D_2} & -\frac{\sqrt{\Lambda_2\Lambda_3}}{D_2D_3} & -\frac{\sqrt{\Lambda_2\Lambda_4}}{D_3D_4} & \cdots & -\frac{\sqrt{\Lambda_2\Lambda_{n-1}}}{D_{n-2}D_{n-1}} & -\frac{\sqrt{\Lambda_2}}{D_{n-1}} \\ 0 & \frac{D_2}{D_3} & -\frac{\sqrt{\Lambda_3\Lambda_4}}{D_3D_4} & \cdots & -\frac{\sqrt{\Lambda_3\Lambda_{n-1}}}{D_{n-2}D_{n-1}} & -\frac{\sqrt{\Lambda_3}}{D_{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{D_3}{D_4} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} & -\frac{\sqrt{\Lambda_{n-1}}}{D_{n-1}} \end{pmatrix}$$

# Annexe B

On présente la réduction partielle (section 3.2.1) dans le cas de 4 corps en utilisant la seconde transformation de l'annexe A (orthogonalisation de Schmidt). Le calcul effectif de cette transformation prend à peu près une minute en utilisant la procédures TRIP de réduction partielle donnée dans l'annexe C. Les expressions données sont tronquées au degré 4. Obtenir ces expressions explicites pour une troncature à un haut degré devient très rapidement hors de portée à cause de la longueur des calculs.

Les 18 anciennes variables (de Poincaré)  $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$  sont exprimées en fonction des 16 variables du système réduit :  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \tilde{\tilde{x}}_3, \tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2$ . On rappelle que  $D_2 = \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}$  et  $D_3 = \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \tilde{x}_1 \\
 &+ \frac{1}{4} \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \tilde{\tilde{y}}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-1} \\
 &- \frac{1}{4} \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \tilde{\tilde{y}}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-1} \\
 &+ \circ (\tilde{x}, \tilde{y})^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \tilde{x}_2 \\
 &- \frac{1}{4} \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \tilde{\tilde{y}}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-1} \\
 &+ \frac{1}{4} \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \tilde{\tilde{y}}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-1} \\
 &+ \circ (\tilde{x}, \tilde{y})^4
 \end{aligned}$$

$$x_3 = \tilde{x}_3 + \circ (\tilde{x}, \tilde{y})^4$$







$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \tilde{\lambda}_3 + i( \\
&- \frac{1}{16} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1^2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^4 D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1^2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^2 D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{16} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^4 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{8} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{8} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{8} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{8} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-3} D_2^2 D_3^{-3} ) \\
&+ \circ (\tilde{x}, \tilde{y})^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \\
&- 1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&- 1 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2} D_2^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^3 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{2} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^2 \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3 \\
&- \frac{1}{8} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{4} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{8} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} D_2^{-1} \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{2} \tilde{x}_3 \tilde{x}_3 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \tilde{x}_3 \tilde{x}_3 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&- \frac{1}{2} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^2 \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^2 \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \circ (\tilde{x}, \tilde{y})^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= \\
&- 1 \quad \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ 1 \quad \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} D_2^{-1} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^3 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2 D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3 \\
&+ \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} D_2^{-1} \\
&+ \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_3 \tilde{x}_3 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^3 D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_1}^2 \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^2 D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \circ \quad (\tilde{x}, \tilde{y})^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= \\
&+ 1 \quad \tilde{y}_2 D_2^{-1} D_3 \\
&- 1 \quad \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2 D_2^{-1} D_3^{-1} \\
&- \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} D_3^2 \\
&+ \frac{1}{8} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^3 D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_3 \tilde{x}_3 \tilde{y}_2 D_2 D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} \\
&+ \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}^{-1} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&- \frac{1}{2} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \sqrt{\Lambda_3}^2 D_2^{-1} D_3^{-3} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3}^{-1} D_2^{-1} \\
&- \frac{1}{4} \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sqrt{\Lambda_1}^{-1} \sqrt{\Lambda_2} \sqrt{\Lambda_3} D_2^{-1} D_3^{-2} \\
&+ \circ \quad (\tilde{x}, \tilde{y})^4
\end{aligned}$$

# Annexe C

Dans cet annexe, on présente les procédures les plus importantes construites pendant notre étude : la procédure de calcul des transformations de la réduction partielle (section 3.2.1) et la procédure de normalisation (section 2.3.1). Ces procédures sont écrites en langage TRIP. Ce logiciel de calcul formel est dédié à la manipulation des séries rencontrées en mécanique céleste. La plupart des instructions rencontrées dans ces programmes se comprennent assez facilement. Des outils spécifiques ont néanmoins été créés comme la définition de variables conjuguées symplectiquement, le crochet de Poisson de deux séries, la représentation de séries en blocs homogènes ou en blocs de d'Alembert (Laskar, 1989b). Ces outils permettent de gagner beaucoup de temps de calcul et donc, en particulier, de réaliser la normalisation du système à un degré plus élevé.

1) Procédure de calcul des changements de variables de la réduction partielle.

Remarques :

-On obtient, par cette procédure, les expressions des différents changements de variables  $P_1$  et  $\phi$  (équations 3.38 et 3.55).

-Les  $\Lambda$  ont un rôle particulier car ils ne s'expriment que par les variables  $\sqrt{\Lambda}$  et aussi par l'intermédiaire des diviseurs  $D_m = \sqrt{\sum_{j=1}^m \Lambda_j}$ . On retrouve ce comportement dans la définition du tableau  $B$  et dans les cas particuliers de dérivation liés à cette expression.

-La procédure se découpe en plusieurs parties :

Etape 1) Le calcul de la deux-forme symplectique sous une forme matricielle (matrice  $M$ ), tronquée (au degré  $n$ ) lorsque l'on remplace les variables  $y_{NB}$  et son conjugué par leur expression (3.29). On calcule aussi la primitive réelle  $\theta_1$  (3.49) de la deux-forme symplectique.

Etape 2) On réalise la transformation linéaire  $P_1$  (3.38) qui rend standards la deux-forme et sa primitive à l'ordre zéro en excentricités et inclinaisons.

Etape 3) On définit les chemins  $\theta_t$  et  $\sigma_t$ .

Etape 4) On inverse la matrice  $M_{\sigma_t}$  grâce à la méthode donnée dans la section "Calcul formel" de la section 3.2.1.

Etape 5) On réalise le calcul du champs de vecteur  $X_t$  par la formule (3.48).

Etape 6) On calcule la transformation  $\phi_1$  grâce à la méthode de Lie donnée dans la section "Calcul formel" de la section 3.2.1.

```

/*nombre de planetes*/
NB=3;

/*degre de troncature des calculs*/
n=4;

/*DEFINITIONS*/

/*variables de Poincare*/

dimvar l[1:NB]$
dimvar raLa[1:NB]$
dimvar x[1:NB]$
dimvar xb[1:NB]$
dimvar y[1:NB]$
dimvar yb[1:NB]$

/*variables issues de la transformation lineaire de l'annexe A*/

dimvar Y[1:NB-1]$
dimvar Yb[1:NB-1]$

/*variables nouvelles de la reduction partielle*/

dimvar ln[1:NB]$
dimvar raLan[1:NB]$
dimvar xn[1:NB];
dimvar xnb[1:NB];
dimvar yn[1:NB-1];
dimvar ynb[1:NB-1];

tabvar(l)$
tabvar(raLa)$
tabvar(x)$
tabvar(xb)$
tabvar(y)$
tabvar(yb)$
tabvar(Y)$
tabvar(Yb)$
tabvar(ln)$
tabvar(raLan)$
tabvar(xn)$
tabvar(xnb)$
tabvar(yn)$
tabvar(ynb)$

trT = ({T,n-2});

trvar=({(x,y,xb,yb),n})$
trvarmoins1=({(x,y,xb,yb),n-1})$
trvarmoins2=({(x,y,xb,yb),n-2})$

```

```

for k=1 to NB{
  varconj((x[k],xb[k]),(y[k],yb[k]),(xn[k],xnb[k]));
};

for k=1 to NB-1{
  varconj((yn[k],ynb[k]),(Y[k],Yb[k]));
};

*****

/*ETAPE 1 : calcul la 2-forme symplectique pour NB planetes*/

*****

macro symplect_x_Z[n,M]{

  usetrnc(trT)$

  U=(1+T)**(1/2)$
  V=(1+T)**(-1/2)$

  efftrnc;

  usetrnc(trvarmoins1)$

  alpha=0;
  for k=1 to NB-1
  {
    auxilliaire=subst(U,T,-x[k]*xb[k]/raLa[k]**2-y[k]*yb[k]/(2*raLa[k]**2))$
    alpha=alpha+auxilliaire*(-y[k]*raLa[k])$
  };

  AUX=subst(U,T,-2*x[NB]*xb[NB]/raLa[NB]**2+
  x[NB]**2*xb[NB]**2/raLa[NB]**4-2*alpha*conj(alpha)/raLa[NB]**4)$
  AUX2=subst(V,T,-x[NB]*xb[NB]/(2*raLa[NB]**2)+AUX/2-1/2)$

  F=alpha*AUX2/raLa[NB]$
  Fb=conj(F)$

  efftrnc;

  /*matrice de la 2-forme*/

  usetrnc(trvarmoins2)$

```

```

dimvar COOR[1:NB*6-2];

for k=1 to NB {COOR[k]:=raLa[k]$};
for k=1 to NB {COOR[k+NB]:=x[k]$};
for k=1 to NB-1 {COOR[k+2*NB]:=y[k]$};
for k=1 to NB {COOR[k+3*NB-1]:=l[k]$};
for k=1 to NB {COOR[k+4*NB-1]:=xb[k]$};
for k=1 to NB-1 {COOR[k+5*NB-1]:=yb[k]$};

dim B[1:NB*6-2];

for k=1 to NB*6-2
  {
  B[k]=1$
  };

for k=1 to NB
  {
  B[k]=1/(2*raLa[k])$
  };

for k=1 to NB*6-2
  {
  for l=1 to NB*6-2
    {
    M[k,l]=0$
    };
  };

for k=1 to NB
  {
  M[k,NB*3-1+k]=1$
  M[k+NB*3-1,k]=-1$
  };

for k=1 to NB*2-1
  {
  M[k+NB,NB*4-1+k]=i$
  M[k+NB*4-1,k+NB]=-i$
  };

for l=1 to NB*6-2
  {
  for k=1 to NB*6-2
    {
    M[k,l]=M[k,l]+i*B[k]*B[l]*(deriv(F,COOR[k])*deriv(Fb,COOR[l])-
    deriv(F,COOR[l])*deriv(Fb,COOR[k]))$
    };
  };

efftronc;

```

```

};

macro primitive{

/* calcul de la primitive teta de la 2-forme*/

usetronc(trvar)$

dim teta[1:6*Nb-2];

for k=1 to Nb
{
teta[k]=-COOR[3*Nb-1+k]/2$
teta[3*Nb-1+k]=(COOR[k])**2/2$
}$

for k=1 to 2*Nb-1
{
teta[Nb+k]=-i*COOR[4*Nb-1+k]/2$
teta[4*Nb-1+k]=i*COOR[Nb+k]/2$
}$

for k=1 to 6*Nb-2
{
teta[k]=teta[k]+(i/2)*B[k]*(F*deriv(Fb,COOR[k])-Fb*deriv(F,COOR[k]))$
}$

};

%symplect_x_Z[n,[M_red]];
%primitive;

```

```

*****

```

```

/*ETAPE2 : transformation lineaire pour rendre la
forme standard pour l'ordre 0 des variables*/

```

```

*****

```

```

dim f[1:NB-1];
dimvar div[1:NB];

tabvar(div);
div[1]=1/raLa_1$

trvarY={({x,Y,xb,Yb),n})$
trvarYmoins1={({x,Y,xb,Yb),n-1})$
trvarYmoins2={({x,Y,xb,Yb),n-2})$

usetronc(trvarYmoins1)$

for k=1 to NB-1
  {
    f[k]=0$
    for l=k+1 to NB
      {
        f[k]=f[k]-Y[l-1]*raLa[k]*raLa[l]*div[l-1]*div[l]$
      };
    };

sommecarres=raLa[1]**2$

for k=2 to NB-1
  {
    f[k]=f[k]+sommecarres*Y[k-1]*div[k-1]*div[k]$
    sommecarres=sommecarres+raLa[k+1]**2$
  };

/* changement de variables dans la deux-forme*/

macro chgvar[fonct]{
  aux=fonct$
  for k=1 to NB-1
  {
    aux=subst(aux,y[k],f[k])$
    aux=subst(aux,yb[k],conj(f[k]))$
  };

};

/*pour la 2-forme*/

for p=1 to NB*6-2
  {
    for q=1 to NB*6-2

```



```

        {
        %chgvar[M_red[p,q]];
        M_red[p,q]=aux$
        };
};

/*jacobienne*/

usetronc(trvarYmoins2)$

dim jaco[1:NB*6-2,1:NB*6-2];
dim transjaco[1:NB*6-2,1:NB*6-2];

for k=1 to NB*6-2
{
  for l=1 to NB*6-2
  {
    jaco[k,l]=0$
  };
};

for k=1 to NB*2
{
  jaco[k,k]=1$
  jaco[k+NB*3-1,k+NB*3-1]=1$
};

for k=1 to NB-1
{
  for l=k to NB-1
  {
    jaco[k+NB*2,l+NB*2]=-raLa[k]*raLa[l+1]*div[l]*div[l+1]$
    jaco[k+NB*5-1,l+NB*5-1]=-raLa[k]*raLa[l+1]*div[l]*div[l+1]$
  };
};

sommecarres=raLa[1]**2$

for k=2 to NB-1
{
  jaco[k+NB*2,k+NB*2-1]=sommecarres*div[k-1]*div[k]$
  jaco[k+NB*5-1,k+NB*5-1-1]=sommecarres*div[k-1]*div[k]$
  sommecarres=sommecarres+raLa[k+1]**2$
};

```

```

/*la partie deriv(y)/deriv(La)*/

for k=1 to NB-1
  {
  for l=1 to NB
    {
    jaco[k+NB*2,1]=(1/(2*raLa[1]))*deriv(f[k],raLa[1])$
    jaco[k+NB*5-1,1]=(1/(2*raLa[1]))*deriv(conj(f[k]),raLa[1])$
    for m=1 to NB
      {
      jaco[k+NB*2,1]=jaco[k+NB*2,1]-(1/2)*deriv(f[k],div[m])*div[m]**3$
      jaco[k+NB*5-1,1]=jaco[k+NB*5-1,1]-(1/2)*deriv(conj(f[k]),div[m])*div[m]**3$
      };
    };
  };

for k=1 to 6*NB-2
  {
  for l=1 to 6*NB-2
    {
    transjaco[k,1]=jaco[1,k]$
    };
  };

/*la deux forme dans les nouvelles variables*/

auxmat= transjaco &* M_red$
M_red=auxmat &* jaco$

/*on remplace a l'ordre 0 par la forme standard*/

trvar0={({x,Y,xb,Yb},0)}$

for k=1 to NB-1
  {
  usetronc(trvar0)$
  aux=M_red[k+NB*2,k+NB*5-1]*1$
  efftronc;
  M_red[k+NB*2,k+NB*5-1]=M_red[k+NB*2,k+NB*5-1]-aux+i$
  M_red[k+NB*5-1,k+NB*2]=-M_red[k+NB*2,k+NB*5-1]$
  };

usetronc(trvarY)$

```

```
/* la transformation dans la primitive teta*/
```

```
dim tetanew[1:6*Nb-2]$
```

```
for k=1 to 6*Nb-2  
{  
  %chgvar[teta[k]];  
  teta[k]=aux$  
};
```

```
/*les lambda,x,xb sont conserves*/
```

```
for k=1 to Nb  
{  
  tetanew[k+3*Nb-1]=teta[k+3*Nb-1]$  
  tetanew[k+Nb]=teta[k+Nb]$  
  tetanew[k+4*Nb-1]=teta[k+4*Nb-1]$  
};
```

```
/* les autres*/
```

```
for k=1 to Nb-1  
{  
  tetanew[2*Nb+k]=0$  
  tetanew[5*Nb-1+k]=0$  
  for l=1 to Nb-1  
  {  
    tetanew[2*Nb+k]=tetanew[2*Nb+k]+teta[2*Nb+1]*deriv(f[l],Y[k])$  
    tetanew[5*Nb-1+k]=tetanew[5*Nb-1+k]+teta[5*Nb-1+1]*deriv(conj(f[l]),Yb[k])$  
  };  
};
```

```
macro derivationlambda[k,fonct]{
```

```
der=deriv(fonct,raLa[k])*(1/(2*raLa[k]))$
```

```
for l=max(k,2) to Nb  
{  
  der=der-deriv(fonct,div[l])*(1/2)*div[l]**3$  
};
```

```
};
```

```
for k=1 to Nb
```

```

{
tetanew[k]=teta[k]$
for h=1 to NB-1
  {
    %derivationlambda[k,f[h]];
    tetanew[k]=tetanew[k]+teta[2*NB+h]*der$
    %derivationlambda[k,conj(f[h])];
    tetanew[k]=tetanew[k]+teta[5*NB-1+h]*der$
  };
};

/* cela remplace les termes dont l'expression, compliquee, vaut i/2 par i/2*/

trvar1=({(x,Y,xb,Yb),1})$

for k=1 to NB-1
  {
    usetronc(trvar1)$
    aux=tetanew[k+2*NB]*1$
    auxb=tetanew[k+5*NB-1]*1$
    efftronc;
    tetanew[k+2*NB]=tetanew[k+2*NB]-aux-i/2*Yb[k]$
    tetanew[k+5*NB-1]=tetanew[k+5*NB-1]-auxb+i/2*Y[k]$
  };

usetronc(trvarY)$

/* On renomme les variables de facon a avoir toujours x,Y pour les procedures suivantes */

dimvar COORD[1:NB*6-2];

for k=1 to NB {COORD[k]:=raLa[k]$};
for k=1 to NB {COORD[NB+k]:=x[k]$};
for k=1 to NB-1 {COORD[2*NB+k]:=Y[k]$};
for k=1 to NB {COORD[3*NB-1+k]:=l[k]$};
for k=1 to NB {COORD[4*NB-1+k]:=xb[k]$};
for k=1 to NB-1 {COORD[5*NB-1+k]:=Yb[k]$};

*****

/*ETAPE 3 : definition de l'application sigma_t*/

*****

```

```

dim M_redtps[1:NB*6-2,1:NB*6-2]$
for k=1 to NB*6-2
  {
    for l=1 to NB*6-2
      {
        M_redtps[k,l]=M_red0[k,l]+t*(M_red[k,l]-M_red0[k,l])$
      };
    };
};

```

```

dim teta0[1:6*NB-2];
for k=1 to NB
  {
    teta0[k]=0$
    teta0[3*NB-1+k]=(COORD[k])**2$
  }$

```

```

for k=1 to 2*NB-1
  {
    teta0[NB+k]=0$
    teta0[4*NB-1+k]=i*COORD[NB+k]$
  }$

```

```

for k=1 to NB*6-2
  {
    teta[k]=teta0[k]+(tetanew[k]-teta0[k])*t$
  };

```

\*\*\*\*\*

/\*ETAPE 4 : inversion de la matrice de la deux forme symplectique\*/

\*\*\*\*\*

```

macro intro{
  dim M_red0[1:NB*6-2,1:NB*6-2];
  dim M_red[1:NB*6-2,1:NB*6-2];
  dim IM_red0[1:NB*6-2,1:NB*6-2];
  dim IM_red[1:NB*6-2,1:NB*6-2];
}

```

```

for k=1 to NB*6-2
  {
  for l=1 to NB*6-2
    {
      M_red0[k,l]=0$
      IM_red0[k,l]=0$
    };
  };

for k=1 to NB
  {
  M_red0[k,NB*3-1+k]=1$
  M_red0[k+NB*3-1,k]=-1$
  IM_red0[k,NB*3-1+k]=-1$
  IM_red0[k+NB*3-1,k]=1$
  };

for k=1 to NB*2-1
  {
  M_red0[k+NB,NB*4-1+k]=i$
  M_red0[k+NB*4-1,k+NB]=-i$
  IM_red0[k+NB,NB*4-1+k]=i$
  IM_red0[k+NB*4-1,k+NB]=-i$
  };

};

macro inv_mat[dimen,deg,MO,inv_MO,M,inv_M]
{
  dim S[1:NB*6-2,1:NB*6-2];

for k=1 to NB*6-2
  {
  for l=1 to NB*6-2
    {
      S[k,l]=0$
    };
  S[k,k]=1$
  };

  Auxd = MO - M$
  Aux1=inv_MO &* Auxd$
  Auxd=Aux1$
  inv_M=S$

```

```

usetronc(trvarYmoins2);
for d=1 to deg
  {
    Aux1=S &* Auxd$
    S = Aux1$
    inv_M = inv_M + S$
    d;
  };

Aux1=inv_M &* inv_MO$
inv_M = Aux1$

efftronc;

/*afftab(inv_M)$*/

};

%intro;

macro inv
  {
    %inv_mat[6*Nb-2,n-2,[M_red0],[IM_red0],[M_redtps],[IM_red]];
  };

%inv;

*****

/*ETAPE 5 : calcul du champ de vecteurs */

*****

usetronc(trvarY);

dim Xt[1:6*Nb-2];

for k=1 to 6*Nb-2
  {
    Xt[k]=0$
    for l=1 to 6*Nb-2
      {
        Xt[k]=Xt[k]-deriv(teta[l],t)*IM_red[l,k]$
      };
  };

```

```

};

*****
/* ETAPE 6 : transformation de Lie */
*****

nmax=n;

dim Flie[1:6*NB-2,0:nmax];
dim W[1:6*NB-2];
dimvar Ncoor[1:6*NB-2];

/*nouvelles coordonnees*/

for k=1 to NB
  {
    Ncoor[k]:=raLan[k]$
    Ncoor[NB+k]:=xn[k]$
    Ncoor[3*NB-1+k]:=ln[k]$
    Ncoor[4*NB-1+k]:=xnb[k]$
  };

for k=1 to NB-1
  {
    Ncoor[2*NB+k]:=yn[k]$
    Ncoor[5*NB-1+k]:=ynb[k]$
  };

trtotale=({t,nmax},{(x,xb,Y,Yb),n});
usetronc(trtotale);

macro lie_transf{

for p=1 to nmax
  {
    for k=1 to 6*NB-2
      {
        Flie[k,p]=deriv(Flie[k,p-1],t)/p$
        for l=1 to 6*NB-2
          {
            Flie[k,p]=Flie[k,p] + W[l]*B[l]*deriv(Flie[k,p-1],COORD[l])/p$
          };
        };
      };
    };
  };

```



```

    };
    p;
  };
};

/*transformation de Lie*/

for k=1 to 6*Nb-2
  {
    W[k]=Xt[k]$
    Flie[k,0]=COORD[k]$
  };

for k=1 to Nb
  {
    Flie[k,0]=COORD[k]**2$
  };

%lie_transf;

/*impression des resultats*/

dim transfo[1:6*Nb-2,0:nmax];

for k=1 to 6*Nb-2
  {
    transfo[k,0]=Ncoor[k]$
    for p=1 to nmax
      {
        transfo[k,p]=coef_ext(Flie[k,p],(t,0))$
        for l=1 to 6*Nb-2
          {
            transfo[k,p]=substvar(transfo[k,p],(COORD[l],Ncoor[l]))$
          };
        };
      };
};

for k=1 to Nb
  {
    transfo[k,0]=Ncoor[k]**2$
  };

dim trans[1:6*Nb-2]$

for k=1 to 6*Nb-2

```

```

{
trans[k]=0$
for p=0 to nmax
{
trans[k]=trans[k]+transfo[k,p]$
};
};

/*le tableau trans donne finalement les anciennes variables
(lambda,Lambda,x,Y) en fonction des nouvelles (lambda_n,Lambda_n,x_n,Y_n).*/

```

## 2) Procédure de calcul du hamiltonien

Cette procédure est inspirée de la procédure "hamsectrip" calculant le hamiltonien séculaire totalement réduit et donnée dans la thèse de P.Robutel (Robutel, 1993).

## 3) Procédure de normalisation

Cette procédure donne l'algorithme de normalisation pour le système partiellement réduit. Des procédures analogues peuvent être construites pour le système non réduit, pour le système réduit totalement.

Remarques :

- Cette procédure utilise une méthode de Lie et les formules (2.35,2.36) pour le calcul des séries.

- La résolution de l'équation homologique est obtenue simplement par une intégration (par rapport à  $t$ ) du second membre, les variables  $z_j$  étant définies comme égales à  $e^{i\nu_j t}$ .

```

_modenum=NUMQUAD;

canonvar((z1,z1b),(z2,z2b),(z3,z3b));
varconj((z1,z1b),(z2,z2b),(z3,z3b));

nmax=48;
nmaxpp=nmax+2;

inithdal(6,nmaxpp);
varhdal(z1,z1b,z2,z2b,z3,z3b);
paritehdal(z3,z3b);
_mode=POLH;

```

```

dim Hsecdiag[1:20];

loadF(Hsecdiag[2])$
loadF(Hsecdiag[4])$
loadF(Hsecdiag[6])$
loadF(Hsecdiag[8])$
loadF(Hsecdiag[10])$
loadF(Hsecdiag[12])$
loadF(Hsecdiag[14])$
loadF(Hsecdiag[16])$
loadF(Hsecdiag[18])$
loadF(Hsecdiag[20])$

hdal(Hsecdiag[2])$
hdal(Hsecdiag[4])$
hdal(Hsecdiag[6])$
hdal(Hsecdiag[8])$
hdal(Hsecdiag[10])$
hdal(Hsecdiag[12])$
hdal(Hsecdiag[14])$
hdal(Hsecdiag[16])$
hdal(Hsecdiag[18])$
hdal(Hsecdiag[20])$

fonctaux=Hsecdiag[2]$
z1=expi(t,coef_ext(fonctaux,(z1,1),(z1b,1)),0);
z1b=expi(t,-coef_ext(fonctaux,(z1,1),(z1b,1)),0);
z2=expi(t,coef_ext(fonctaux,(z2,1),(z2b,1)),0);
z2b=expi(t,-coef_ext(fonctaux,(z2,1),(z2b,1)),0);
z3=expi(t,coef_ext(fonctaux,(z3,1),(z3b,1)),0);
z3b=expi(t,-coef_ext(fonctaux,(z3,1),(z3b,1)),0);

dim H[0:nmax,0:nmax];
dim W[-2:nmaxpp];
dim NH[0:nmax];

/* initialisation du Hamiltonien */
for n=1 to nmax
  { H[0,n] =0$} $

H[0,0] =Hsecdiag[2]$
H[0,2] =Hsecdiag[4]$
H[0,4] =Hsecdiag[6]$
H[0,6] =Hsecdiag[8]$
H[0,8] =Hsecdiag[10]$
H[0,10] =Hsecdiag[12]$
H[0,12] =Hsecdiag[14]$
H[0,14] =Hsecdiag[16]$
H[0,16] =Hsecdiag[18]$
H[0,18] =Hsecdiag[20]$

```

```

/* algorithme avec T^-1 */
for il = 1 to nmax
  {
    for ic = 1 to il -1
      {
        H[il-ic,ic]=0 $
        for p = 1 to il-ic
          {
            H[il-ic,ic] = H[il-ic,ic] + (1/(il-ic))*i*{W[p],H[il-ic-p,ic]}$
          };
        };
      H[il,0]=0 $
      for p = 1 to il-1
        {
          H[il,0] = H[il,0] + (1/il)*i*{W[p],H[il-p,0]} $
        };
      AUX = H[il,0] $
      for p = 1 to il
        {
          AUX = AUX + H[il-p,p] $
        };
      NH[il]= coef_ang(AUX,(z1,0),(z2,0),(z3,0)) $
      AUX = AUX - NH[il] $

      /* resolution de l'equation homologique {W[il],H[0,0]} = R1 */
      W[il] = -il*integ(AUX,t)$

      H[il,0]=H[il,0]+(i/il)*{W[il],H[0,0]} $
      il;
      time_1;
    };

/*la forme normale*/

dim N[1:50];

N[2]=H[0,0]$
saveF(N[2])$

for k=4 to nmaxpp step (2)
  {
    N[k]=NH[k-2]$
    saveF(N[k])$
  };

/*sauvegarde des fonctions W*/

for k=1 to nmax
  {

```

```
saveF(W[k]);  
};
```

# Annexe D

Dans cet annexe sont données les tailles (le nombre de termes) des différentes séries numériques intervenant dans les méthodes de perturbation pour le cas de trois corps.

## 1) Calcul du hamiltonien

a) Hamiltonien du système non réduit. Il dépend des variables  $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, y_1, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_2$  et satisfait les relations de d'Alembert et de parité en les variables d'inclinaison.

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$H_k$	1	8	52	200	617	1568	3536	7200	13625	24200	40916

b) Hamiltonien du système partiellement réduit. Il dépend des variables  $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, Y, \bar{Y}$  et satisfait les relations de d'Alembert et de parité en les variables d'inclinaison.

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$H_k$	1	6	20	52	117	225	400	656	1025	1525	2196

c) Hamiltonien du système totalement réduit (réduction de Jacobi). Il dépend des variables  $\tilde{x}_1, \tilde{\bar{x}}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\bar{x}}_2$  et du paramètre  $d = \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2 - C_z}$  et satisfait les relations de parité en la variable d'inclinaison (variable  $d$ ). Il ne satisfait plus les relations de d'Alembert. On considère dans ce cas le hamiltonien  $H_k$  comme étant la partie de degré  $k$  en les variables  $\tilde{x}_1, \tilde{\bar{x}}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\bar{x}}_2$  et  $d$ . En effet  $d$  est de l'ordre des excentricités et inclinaisons.

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$H_k$	1	5	32	78	211	381	756	1176	1985	2825	4316

d) Hamiltonien du système totalement réduit (réduction de Jacobi). Il dépend des variables  $\tilde{x}_1, \tilde{\bar{x}}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\bar{x}}_2$  (la valeur du moment cinétique  $C_z$  est fixée). Il ne conserve pas de symétrie. Le degré est ici compté avec les variables  $\tilde{x}_1, \tilde{\bar{x}}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\bar{x}}_2$ .

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$H_k$	1	10	35	84	165	286	425	578	741	910	1081

Les remarques qui accompagnent ces tableaux et que l'on retrouve dans plusieurs sections

de la thèse (en particulier section 3.3.3) sont les suivantes. Le hamiltonien non réduit contient beaucoup plus de termes que les hamiltoniens réduits pour un même degré de troncature en les inclinaisons et excentricités. Comme, avec la réduction partielle, on ne perd aucun renseignement sur le système, celle-ci doit être réalisée.

Ensuite, quand on compare la réduction partielle avec la réduction totale (dans lequel, on ne remplace pas  $d$  par sa valeur numérique), pour les premiers termes de la série (jusqu'à  $n_H = 20$ ), on a à peu près deux fois moins de termes pour la réduction partielle.

Il faut noter que le fait que le hamiltonien réduit totalement avec  $d$  numérique contient pour les faibles degrés plus de termes que le hamiltonien réduit totalement avec  $d$  explicite n'est qu'une contradiction apparente. En effet, les termes en plus proviennent de termes de degrés supérieurs dans le hamiltonien réduit totalement avec  $d$  explicite. On peut vérifier ce fait en se reportant aux développements des différents hamiltoniens donnés dans l'annexe E.

## 2) Normalisation

On donne le nombre de termes des séries intervenant dans les processus de normalisation à partir du hamiltonien partiellement réduit.

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$W_k$	-	24	44	102	204	372	620	980	1470	2130	2982	4074	5432	7112
$\tilde{N}_k$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	77	90	104	119

k	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$W_k$	9144	11592	14490	17910	21890	26510	31812	37884	44772	52572	61334
$\tilde{N}_k$	135	152	170	189	209	230	252	275	299	324	350

# Annexe E

On présente, dans cet annexe, les expressions analytiques des hamiltoniens séculaires à l'ordre un du rapport des masses pour le problème planétaire de trois corps. Les hamiltoniens sont développés dans les variables de Poincaré, tronqués à l'ordre 4 en excentricités et inclinaisons pour le problème non-réduit (NR), partiellement réduit (PR) et totalement réduit (TR).

Les expressions dependent des paramètres et variables suivants :

$\alpha = a_1/a_2$ , rapport des demi grand axes

$$k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$$

$$X_j = x_j \sqrt{\frac{2}{\Lambda_j}} \quad (j = 1 \text{ or } 2)$$

$$Y_j = y_j \sqrt{\frac{1}{2\Lambda_j}} \quad (j = 1 \text{ or } 2)$$

$$Y = y \sqrt{\frac{1}{2(\Lambda_1 + \Lambda_2)}}$$

$$D = d \sqrt{\frac{1}{2(\Lambda_1 + \Lambda_2)}}$$

$$K = -\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2^2m_2/\Lambda_2^2m_0.$$

et des coefficients  $C_j(\alpha)$  dont l'expression est donnée dans l'annexe. Les  $x_j, y_j$  sont les variables de Poincaré's,  $y$  la variable du système partiellement réduit (section 3.1.1) et  $d$  le paramètre apparaissant dans le système totalement réduit (remarque 8 dans la section 3.1.2).

Pour le hamiltonien non-réduit, on reprend les notations de l'article (Laskar et Robutel, 1995) :

$$\begin{aligned} H_{2, NR} &= K( \\ &C_2(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_2 + \bar{X}_1X_2) \\ + &C_3(\alpha) \quad (\frac{1}{2}(X_1\bar{X}_1 + \bar{X}_2X_2) + 2(Y_1\bar{Y}_2 + \bar{Y}_1Y_2 - Y_1\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2Y_2))) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
H_{4, NR} &= K( \\
&C_4(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_2Y_1\bar{Y}_2 + \bar{X}_1X_2\bar{Y}_1Y_2) \\
+ &C_5(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_2^2X_2 + \bar{X}_1\bar{X}_2X_2^2) \\
+ &C_6(\alpha) \quad (X_1^2\bar{X}_1\bar{X}_2 + X_1\bar{X}_1^2X_2) \\
+ &C_7(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_2Y_1\bar{Y}_1 + \bar{X}_1X_2Y_1\bar{Y}_1 + X_1\bar{X}_2\bar{Y}_2Y_2 + \bar{X}_1X_2\bar{Y}_2Y_2) \\
+ &C_8(\alpha) \quad (2(X_1X_2\bar{Y}_1\bar{Y}_2 + \bar{X}_1\bar{X}_2Y_1Y_2 - \bar{X}_1X_2Y_1\bar{Y}_2 \\
&\quad - X_1\bar{X}_2\bar{Y}_1Y_2) - \bar{X}_1\bar{X}_2Y_1^2 - X_1X_2\bar{Y}_1^2 \\
&\quad - X_1X_2\bar{Y}_2^2 - \bar{X}_1\bar{X}_2Y_2^2) \\
+ &C_9(\alpha) \quad (\bar{X}_2^2Y_1^2 + X_2^2\bar{Y}_1^2 + X_2^2\bar{Y}_2^2 + \bar{X}_2^2Y_2^2 \\
&\quad - 2X_2^2\bar{Y}_1\bar{Y}_2 - 2\bar{X}_2^2Y_1Y_2) \\
+ &C_{10}(\alpha) \quad (X_1^2\bar{X}_2^2 + \bar{X}_1^2X_2^2) \\
+ &C_{11}(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_1Y_1\bar{Y}_1 + \bar{X}_2X_2\bar{Y}_2Y_2) \\
+ &C_{12}(\alpha) \quad (Y_1^2\bar{Y}_1\bar{Y}_2 + Y_1\bar{Y}_1^2Y_2 + Y_1\bar{Y}_2^2Y_2 + \bar{Y}_1\bar{Y}_2Y_2^2) \\
+ &C_{13}(\alpha) \quad (X_1^2\bar{X}_1^2) \\
+ &C_{14}(\alpha) \quad (Y_1^2\bar{Y}_1^2 + \bar{Y}_2^2Y_2^2 + Y_1^2\bar{Y}_2^2 + \bar{Y}_1^2Y_2^2) \\
+ &C_{15}(\alpha) \quad (X_1\bar{X}_1Y_1\bar{Y}_2 + \bar{X}_2X_2Y_1\bar{Y}_2 + X_1\bar{X}_1\bar{Y}_1Y_2 + \bar{X}_2X_2\bar{Y}_1Y_2) \\
+ &C_{16}(\alpha) \quad (\bar{X}_2^2X_2^2) \\
+ &C_{17}(\alpha) \quad (\bar{X}_1^2Y_1^2 + X_1^2\bar{Y}_1^2 + X_1^2\bar{Y}_2^2 + \bar{X}_1^2Y_2^2 \\
&\quad - 2X_1^2\bar{Y}_1\bar{Y}_2 - 2\bar{X}_1^2Y_1Y_2) \\
+ &C_{18}(\alpha) \quad (\frac{1}{4}X_1\bar{X}_1\bar{X}_2X_2 + 4Y_1\bar{Y}_1\bar{Y}_2Y_2 \\
&\quad - \bar{X}_2X_2Y_1\bar{Y}_1 - X_1\bar{X}_1\bar{Y}_2Y_2) )
\end{aligned}$$

Les coefficients  $C_k$  sont définis par les expressions suivantes, dépendant des coefficients de Laplace  $b_s^{(k)}$  (Laskar et Robutel, 1995).

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha) &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)} \\
C_2(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha b_{3/2}^{(0)} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha^2)b_{3/2}^{(1)} \\
C_3(\alpha) &= \frac{1}{4}\alpha b_{3/2}^{(1)} \\
C_4(\alpha) &= (-\frac{15}{4}\alpha - \frac{15}{4}\alpha^3)b_{5/2}^{(0)} + (\frac{3}{2} + \frac{27}{8}\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha^4)b_{5/2}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5(\alpha) &= \left(-\frac{15}{64}\alpha + \frac{15}{64}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{32} - \frac{9}{64}\alpha^2 - \frac{3}{32}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_6(\alpha) &= \left(\frac{15}{64}\alpha - \frac{15}{64}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{32} - \frac{9}{64}\alpha^2 + \frac{3}{32}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_7(\alpha) &= \left(\frac{15}{8}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_8(\alpha) &= \frac{9}{16}\alpha^2 b_{5/2}^{(1)} \\
C_9(\alpha) &= -\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{16}\alpha + \frac{9}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{10}(\alpha) &= \frac{45}{128}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{9}{64}\alpha - \frac{9}{64}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{11}(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{12}(\alpha) &= -\frac{15}{4}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{13}(\alpha) &= \frac{9}{128}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{64}\alpha + \frac{3}{64}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{14}(\alpha) &= \frac{21}{8}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{15}(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{8}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{16}(\alpha) &= \frac{9}{128}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{64}\alpha - \frac{3}{64}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{17}(\alpha) &= -\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{9}{16}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)} \\
C_{18}(\alpha) &= \frac{9}{8}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}
\end{aligned}$$

On donne alors les expressions du système partiellement réduit, obtenu en utilisant les équations (3.12,3.13).

$$\begin{aligned}
H_{2, PR} &= K( \\
&C_2(\alpha) \quad (X_1 \bar{X}_2 + \bar{X}_1 X_2) \\
+ &C_3(\alpha) \quad (\frac{1}{2}(X_1 \bar{X}_1 + \bar{X}_2 X_2) - 2(2 + k^{-1} + k)Y\bar{Y}) )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{4, PR} = & K( \\
& C_4(\alpha) \quad (-X_2 \bar{X}_1 Y \bar{Y} - X_1 \bar{X}_2 Y \bar{Y}) \\
+ & C_5(\alpha) \quad (X_2^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_1 X_2 \bar{X}_2^2) \\
+ & C_6(\alpha) \quad (X_1 X_2 \bar{X}_1^2 + X_1^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2) \\
+ & C_7(\alpha) \quad (k^{-1} + k)(X_2 \bar{X}_1 Y \bar{Y} + X_1 \bar{X}_2 Y \bar{Y}) \\
+ & C_8(\alpha) \quad ((2 + k + k^{-1})(\bar{X}_1 \bar{X}_2 Y^2 + X_1 X_2 \bar{Y}^2) \\
& \quad + 2 X_1 \bar{X}_2 Y \bar{Y} + 2 X_2 \bar{X}_1 Y \bar{Y}) \\
+ & C_9(\alpha) \quad (-1)(2 + k^{-1} + k)(\bar{X}_2^2 Y^2 + X_2^2 \bar{Y}^2) \\
+ & C_{10}(\alpha) \quad (X_2^2 \bar{X}_1^2 + X_1^2 \bar{X}_2^2) \\
+ & C_{11}(\alpha) \quad (k^{-1} X_1 \bar{X}_1 Y \bar{Y} + k X_2 \bar{X}_2 Y \bar{Y}) \\
+ & C_{12}(\alpha) \quad (-2)(k + k^{-1})Y^2 \bar{Y}^2 \\
+ & C_{13}(\alpha) \quad (X_1^2 \bar{X}_1^2) \\
+ & C_{14}(\alpha) \quad (2 + k^2 + k^{-2})Y^2 \bar{Y}^2 \\
+ & C_{15}(\alpha) \quad (-2 X_2 \bar{X}_2 Y \bar{Y} - 2 X_1 \bar{X}_1 Y \bar{Y}) \\
+ & C_{16}(\alpha) \quad (X_2^2 \bar{X}_2^2) \\
+ & C_{17}(\alpha) \quad (-1)(2 + k^{-1} + k)(\bar{X}_1^2 Y^2 + X_1^2 \bar{Y}^2) \\
+ & C_{18}(\alpha) \quad (-k^{-1} X_2 \bar{X}_2 Y \bar{Y} + 4 Y^2 \bar{Y}^2 \\
& \quad + \frac{1}{4} X_1 X_2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 - k X_1 \bar{X}_1 Y \bar{Y})
\end{aligned}$$

On peut remarquer que  $H_{4, PR}$  ne dépend pas du paramètre  $C_3(\alpha)$  comme on aurait pu s'y attendre, venant de la partie de degré deux du hamiltonien non réduit  $H_{2, NR}$ . En effet, le terme en  $C_3(\alpha)$  est égal à zéro pour le degré 4 mais des termes apparaissent au degré 6.

On donne finalement l'expression analytique du hamiltonien totalement réduit, en prenant compte du fait que le paramètre  $D$  est du même ordre de grandeur que les variables  $X$ . Cette expression est obtenue en utilisant le changement de variables (3.19).

$$\begin{aligned}
H_{2, TR} = & K( \\
& C_2(\alpha) \quad (X_1 \bar{X}_2 + \bar{X}_1 X_2) \\
+ & C_3(\alpha) \quad ((1 + \frac{k}{2})X_1 \bar{X}_1 + (1 + \frac{k^{-1}}{2})\bar{X}_2 X_2 \\
& \quad - 2(2 + k^{-1} + k)D^2) \quad )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{4, TR} = & K( \\
- & C_4(\alpha) (X_2 \bar{X}_1 + X_1 \bar{X}_2) \\
& \times (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
+ & C_5(\alpha) (X_2^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_1 X_2 \bar{X}_2^2) \\
+ & C_6(\alpha) (X_1 X_2 \bar{X}_1^2 + X_1^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2) \\
+ & C_7(\alpha) (k^{-1} + k)(X_2 \bar{X}_1 + X_1 \bar{X}_2) \\
& \times (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
+ & C_8(\alpha) (\delta_1 \delta_2 (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_1 X_2) + 2(X_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_1)) \\
& \times (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
- & C_9(\alpha) \delta_1 \delta_2 (\bar{X}_2^2 + X_2^2) (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
+ & C_{10}(\alpha) (X_2^2 \bar{X}_1^2 + X_1^2 \bar{X}_2^2) \\
+ & C_{11}(\alpha) (k^{-1} X_1 \bar{X}_1 + k X_2 \bar{X}_2) \\
& \times (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
- & C_{12}(\alpha) 2(k + k^{-1})(D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4)^2 \\
+ & C_{13}(\alpha) (X_1^2 \bar{X}_1^2) \\
+ & C_{14}(\alpha) (2 + k^2 + k^{-2})(D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4)^2 \\
- & C_{15}(\alpha) 2(X_2 \bar{X}_2 + X_1 \bar{X}_1)(D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
+ & C_{16}(\alpha) (X_2^2 \bar{X}_2^2) \\
- & C_{17}(\alpha) \delta_1 \delta_2 (\bar{X}_1^2 + X_1^2) (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) \\
+ & C_{18}(\alpha) (-k^{-1} X_2 \bar{X}_2 (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4) + \\
& 4(D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4)^2 + \frac{1}{4} X_1 X_2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 \\
& - k X_1 \bar{X}_1 (D^2 - \delta_1^{-1} X_1 \bar{X}_1 / 4 - \delta_2^{-1} X_2 \bar{X}_2 / 4))
\end{aligned}$$

On peut alors comparer cette expression avec l'expression donnée dans (Robutel, 1995). Dans cet article, le développement de la série est réalisé en utilisant le paramètre  $D_2$  qui a le même ordre en excentricité et inclinaison que  $D^2$ . On peut alors comparer le terme de degré zéro en  $D_2$  et  $D$ . Dans (Robutel, 1995), il y avait une erreur de frappe dans l'expression des coefficients  $H_{1,1,0,0}^{(0)}$ ,  $H_{1,2,1,0}^{(0)}$  and  $H_{0,2,2,0}^{(0)}$ . Les variables  $X_j$  de notre étude ne sont pas exactement les mêmes que dans cet article (voir équations 3.21 et 3.22) et cela explique pourquoi il y a certains changements de signe dans les coefficients  $H_{p,\bar{p},q,\bar{q}}^{(r)}$ . La partie du hamiltonien séculaire totalement réduit est écrite sous la forme :

$$(2\pi)^{-2} \int \frac{a_2}{\Delta} d\lambda_1 d\lambda_2 = \sum_{p,\bar{p},q,\bar{q},r} H_{p,\bar{p},q,\bar{q}}^{(r)}(\alpha, k) D^r X_1^p \bar{X}_1^{\bar{p}} X_2^q \bar{X}_2^{\bar{q}}.$$

Comme le hamiltonien est une fonction ne prenant que des valeurs réelles, on a les relations suivantes entre les termes :

$$H_{p,\bar{p},q,\bar{q}}^{(r)}(\alpha, k) = H_{\bar{p},p,\bar{q},q}^{(r)}(\alpha, k)$$

et seule la moitié de ces termes est reproduite ici.

*Coefficients de la partie quadratique,  $H_2, TR$*

$$\begin{aligned}
 H_{1,1,0,0}^{(0)}(\alpha, k) &= H_{0,0,1,1}^{(0)}(\alpha, k^{-1}) = \frac{1}{8}(2+k)\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{1,0,0,1}^{(0)}(\alpha, k) &= H_{0,1,1,0}^{(0)}(\alpha, k) = -\frac{3}{8}\alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) + \frac{1}{4}(1+\alpha^2)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{0,0,0,0}^{(2)}(\alpha, k) &= -\frac{1}{2}(2+k+k^{-1})\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

*Coefficients de la partie de degré 4,  $H_4, TR$*

$$\begin{aligned}
 H_{3,1,0,0}^{(0)}(\alpha, k) &= H_{2,0,1,1}^{(0)}(\alpha, k^{-1}) \\
 &= -\frac{15}{128}(1+k)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
 &\quad + \frac{3}{64}(1+k)(3\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{1,1,0,2}^{(0)}(\alpha, k) &= H_{0,0,1,3}^{(0)}(\alpha, k^{-1}) \\
 &= -\frac{15}{128}(1+k)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
 &\quad + \frac{3}{64}(1+k)(\alpha + 3\alpha^3)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{2,1,1,0}^{(0)}(\alpha, k) &= H_{0,1,1,2}^{(0)}(\alpha, k^{-1}) = -\frac{9}{64}(1+k)\alpha^2 b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{1,2,1,0}^{(0)}(\alpha, k) &= \left(-\frac{15}{64}(\alpha + 3\alpha^3) - \frac{15}{32}k(\alpha + \alpha^3)\right)b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
 &\quad + \left(\frac{3}{64}(2 + 3\alpha^2 + 6\alpha^4) + \frac{3}{32}k(2 + 3\alpha^2 + 2\alpha^4)\right)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
 H_{0,1,2,1}^{(0)}(\alpha, k) &= \left(-\frac{15}{64}(3\alpha + \alpha^3) - \frac{15}{32}k^{-1}(\alpha + \alpha^3)\right)b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
 &\quad + \left(\frac{3}{64}(6 + 3\alpha^2 + 2\alpha^4) + \frac{3}{32}k^{-1}(2 + 3\alpha^2 + 2\alpha^4)\right)b_{5/2}^{(1)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1,1,1,1}^{(0)}(\alpha, k) &= \frac{3}{64}(5k^{-1} + 24 + 5k)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad + \frac{3}{32}(k^{-1} + k)(\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
H_{2,2,0,0}^{(0)}(\alpha, k) &= \frac{3}{128}(6 + 18k + 7k^2)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad + \frac{3}{64}(2\alpha + 4\alpha^3 - (\alpha + \alpha^3)k^2)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
H_{0,2,2,0}^{(0)}(\alpha, k) &= \frac{45}{128}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) - \frac{9}{64}(\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
H_{0,0,2,2}^{(0)}(\alpha, k) &= \frac{3}{128}(7k^{-2} + 18k^{-1} + 6)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad + \frac{3}{64}(4\alpha + 2\alpha^3 - (\alpha + \alpha^3)k^{-2})b_{5/2}^{(1)}(\alpha) \\
H_{0,0,0,2}^{(2)}(\alpha, k) &= (2 + k + k^{-1})\left(\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} - \left(\frac{3}{16}\alpha + \frac{9}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}\right) \\
H_{0,0,1,1}^{(2)}(\alpha, k) &= H_{1,1,0,0}^{(2)}(\alpha, k^{-1}) = \\
&\quad - \frac{3}{16}(7k^{-2} + 19k^{-1} + 17 + 5k)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} \\
&\quad + \frac{3}{8}(k^{-2} + k^{-1} - 1 - k)(\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(1)} \\
H_{0,1,0,1}^{(2)}(\alpha, k) &= \frac{9}{16}(2 + k + k^{-1})\alpha^2 b_{5/2}^{(1)} \\
H_{0,1,1,0}^{(2)}(\alpha, k) &= (2 + k + k^{-1})\left(\frac{15}{8}(\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(0)}\right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{3}{4} - \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)}\right) \\
H_{0,2,0,0}^{(2)}(\alpha, k) &= (2 + k + k^{-1})\left(\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} - \left(\frac{9}{16}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}\right) \\
H_{0,0,0,0}^{(4)}(\alpha, k) &= \frac{3}{8}(7k^{-2} + 20k^{-1} + 26 + 20k + 7k^2)\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} \\
&\quad - \frac{3}{4}(k^{-2} + 2k^{-1} + 2 + 2k + k^2)(\alpha + \alpha^3)b_{5/2}^{(1)}
\end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] Abdullah, K. et Albouy, A. : 2001, 'On a strange resonance noticed by M. Herman', *preprint*.
- [2] Arnold, V. : 1963, 'Small denominators', *Russ. Math. Surv.* **Vol 18, N6** pp. 85-192.
- [3] Arnold, V., Koslov, V.V. et Neishtadt A.I : 1985, 'Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics', *Springer* second edition, 1997 pp. 78-106.
- [4] Bennett, T.L. :1905, 'On the reduction of the problem of n bodies', *Messenger of mathematics* **Vol.XXXIV** pp. 113-120.
- [5] Boigey, F. : 1981, 'Transformations canoniques à variables imposées. Applications à la mécanique celeste', *Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6* pp. 113-114.
- [6] Deprit, A. : 1983, 'Elimination of the nodes in problems of N bodies', *Celestial Mechanics* **Vol.30** pp. 181-195.
- [7] Gabern F. et Jorba A. : 2001, 'A restricted four-body model for the dynamics near the lagrangian points of the Sun-Jupiter system', *Discrete and continuous dynamical systems, serie B* **Vol.1, Number 2** pp. 143-182.
- [8] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L. et Simo C. : 1989, 'Effective stability for a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem', *Journal of differential equations* **Vol.77**.
- [9] Giorgilli A. et Skokos C. : 1996, 'On the stability of the Trojan asteroids', *Astronomy and Astrophysics* **Vol.317** pp. 254-261.
- [10] Hagihara Y. : 1989a, 'Celestial Mechanics', *The MIT Press* **Vol.1** pp. 476-482.
- [11] Hagihara Y. : 1989b, 'Celestial Mechanics', *The MIT Press* **Vol.2, part 1** pp. 58-79.
- [12] Jacobi, C.G.J. : 1842, 'Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps', *Astronomische Nachrichten* **Bd XX** pp. 81-102.
- [13] Koseleff, P.V. : 1993, 'Calcul formel pour les méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne', *Thèse de doctorat de l'école polytechnique*.
- [14] Lagrange, J.L. : 1772, 'Essai sur le problème des trois corps', *Oeuvre complètes***Vol.6** pp. 229-324.
- [15] Laskar, J. : 1987, 'Secular evolution of the solar system over 10 million years', *Astronomy and Astrophysics* **198** pp. 341-362.
- [16] Laskar, J. : 1989a, 'A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system', *Nature* **338** pp. 237-238.

- [17] Laskar, J. : 1989b, 'Les méthodes modernes de la mécanique céleste sous la direction de Daniel Benest et Claude Froeschlé', *Editions Frontières* pp. 63-87.
- [18] Laskar, J. : 1992, 'La stabilité du système solaire' dans 'Chaos et déterminisme', *Editions Seuil Points Sciences* pp. 170-211.
- [19] Laskar, J. et Robutel P. : 1995, 'Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian', *Celestial Mechanics* **Vol.62** pp. 193-217.
- [20] Laskar, J. : 1999, 'Introduction to frequency map analysis', *NATO ASI Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom* **C.Simo, Ed.** pp. 134-150 .
- [21] Laskar, J. : 2001, 'AMD-stability and the organization of planetary systems', *preprint* .
- [22] Locatelli, U. : 1998, 'Three-body planetary problem : study of KAM stability for the secular part of the Hamiltonian', *Planetary and Space Science* **46** 11,12 pp. 1453-1464.
- [23] Locatelli, U. et Giorgilli A. : 2000, 'Invariant tori in the secular motions of the three-body planetary systems', .
- [24] Meyer, K.R. : 1973, Symmetries and Integrals in Mechanics, *Dynamical Systems* Academic Press, New-York pp. 259-271.
- [25] Meyer, K.R. and Hall G.R. : 1992, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, *Springer-Verlag* .
- [26] Morbidelli, A. : 1994, 'Resonant structure and diffusion in hamiltonian systems', *Chaos and diffusion (Cham94)* D.Benest, C. Froeschle pp. 65-112.
- [27] Niederman, L. : 1993, 'Résonances et stabilité dans le problème planétaire, Solutions de seconde espèce', *Thèse de doctorat de l'université Paris 6* pp. 24-29 et 60.
- [28] Poincaré H. : 1892, 'Méthodes nouvelles de la mécanique céleste', *Gauthier-Villars* **Vol.7** pp. 7-47.
- [29] Poincaré H. : 1896, 'Oeuvres complètes de Poincaré', *Gauthier-Villars* **Vol.7** pp. 496-511.
- [30] Ramis, E., Deschamps C. and Odoux J. : 1987, Cours de mathématiques spéciales, Séries et équations différentielles, *Masson* **4** pp. 154-155 .
- [31] Robutel P. : 1993, 'Contribution à l'étude de la stabilité du problème planétaire des trois corps', *Thèse de doctorat de l'observatoire de Paris* .
- [32] Robutel P. : 1995, 'Stability of the planetary three-body problem. II. KAM theory and existence of Quasiperiodic Motions', *Celestial Mechanics* **Vol.62** pp. 193-217.
- [33] Silva, G. : 1909, 'Sur les limites de convergence du développement de la fonction perturbatrice', *Bull. Astron.* **26** pp. 49-75, 97-114 (voir aussi Hagihara, 1989b).
- [34] Skokos, Ch. et Dokoumetzidis, A. : 2000, 'Effective stability of the Trojan asteroids', *Astronomy and Astrophysics* **367** pp. 729-736 .
- [35] Spivak M. : 1999, 'A comprehensive Introduction to differential geometry', *Publish or Perish INC, Houston, Texas* **Vol.1**.
- [36] Sundman, K.F. : 1916, *Öfversigt Finska Vetenskaps-Soc. Förh.* **58 A** (24) (voir aussi Hagihara, 1989b).
- [37] Sussman, G.J. et Wisdom J. : 1988, 'Numerical evidence that the motion of pluto is chaotic', *Science* **257** pp. 433-437.