

OBSERVATOIRE DE PARIS
Thèse en vue de l'obtention du titre de
docteur de l'Observatoire de Paris
spécialité Dynamique des systèmes gravitationnels

Effets des marées sur la dynamique
des satellites de Jupiter et de Saturne

Benoît NOYELLES

Directeurs de thèse :
William THUILLOT IMCCE
Alain VIENNE IMCCE

Rapporteurs :
Anne LEMAÎTRE FUNDP (Belgique)
Roberto VIEIRA MARTINS Observatório Nacional (Brésil)

Thèse soutenue le mardi 13 décembre 2005 à l'Observatoire de Paris
devant le jury composé de

Rudolf DVORAK	Institut für Astronomie	Université de Vienne (Autriche)
Anne LEMAÎTRE	FUNDP	Namur (Belgique)
Alessandro MORBIDELLI	Laboratoire Cassiopée	Observatoire de la Côte d'Azur
Bruno SICARDY	LESIA	Observatoire de Paris-Meudon
Jean SOUCHAY	SYRTE	Observatoire de Paris-Meudon
William THUILLOT	IMCCE	Observatoire de Paris-Meudon
Alain VIENNE	IMCCE	Observatoire de Paris-Meudon

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de rentrer dans le milieu de l'astronomie professionnelle. D'abord Sylvain Bontemps, de l'Observatoire de Bordeaux, pour m'avoir proposé un stage sur la formation stellaire alors que j'étais élève-ingénieur, ainsi qu'Ana Gómez pour m'avoir accepté en DEA. Je remercie également Alain Vienne et William Thuillot pour m'avoir accepté en thèse.

Cette thèse n'aurait pas pu aussi bien se dérouler sans l'aide de certaines personnes, je remercie notamment, outre mes directeurs de thèse, Luc Duriez, Valéry Lainey, Anne Lemaître ou encore Philippe Robutel pour leurs conseils scientifiques, et d'une façon plus générale tout l'IMCCE. Je remercie Jérôme Berthier et Frédéric Vachier pour leur patience lorsque je saturais les serveurs de calculs. Je remercie également André Amossé pour m'avoir initié au fonctionnement de la lunette de l'Observatoire de Lille, ainsi que Mme Ballenghien pour son dévouement vis-à-vis de cet Observatoire. Enfin je remercie Frédéric Gillon et Michel Belliart pour m'avoir permis d'enseigner durant ma thèse.

Je tiens à remercier Rudolf Dvorak, Anne Lemaître, Alessandro Morbidelli, Bruno Sicardy et Jean Souchay d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, ainsi que toutes les personnes qui se sont déplacées, parfois de loin (notamment Anne-Sophie Libert et Stéphane Valk) pour être présentes ce jour-là. Enfin je remercie ma famille qui m'a soutenu tout au long de ma thèse.

Table des matières

1	Introduction	17
2	Les satellites de Jupiter	21
2.1	La planète Jupiter φ	21
2.2	Propriétés physiques des satellites	21
2.2.1	Les satellites galiléens	21
2.2.2	Les satellites proches	23
2.2.3	Les satellites lointains	23
2.3	La dynamique du système	24
2.3.1	L'importance des perturbations mutuelles	24
2.3.2	Librations et résonances	26
2.3.3	Les éphémérides	32
3	Les satellites de Saturne	35
3.1	La planète Saturne η	35
3.2	Propriétés physiques des satellites	35
3.2.1	Les principaux satellites	37
3.2.2	Les lagrangiens	38
3.2.3	Les satellites intérieurs aux anneaux	38
3.2.4	Les satellites lointains	39
3.3	La dynamique du système	40
3.3.1	Les perturbations mutuelles	40
3.3.2	Les résonances dans les principaux satellites	43
3.3.3	Les éphémérides	43
4	Effets dynamiques des forces de marée	47
4.1	Le principe des marées	47
4.2	Les paramètres physiques impliqués	48
4.2.1	Le nombre de Love k_2	48
4.2.2	La fonction de dissipation Q	49
4.3	Influence des marées sur les éléments elliptiques	49
4.3.1	Les formules de Kaula (1964)	49
4.3.2	Influence du bourrelet de la planète	51
4.3.3	Influence du bourrelet du satellite	51
4.3.4	Bilan	53

5	Etat de l'art sur l'histoire des résonances	55
5.1	L'histoire de la résonance laplacienne	55
5.1.1	Etablissement de la résonance laplacienne après des résonances 2 : 1	56
5.1.2	Traversées de résonances d'ordre 2 des masses	58
5.1.3	Formation de la résonance dans la nébuleuse proto-jovienne	58
5.1.4	Autres études	59
5.2	L'histoire des résonances dans le système de Saturne	61
5.2.1	Le cas Mimas-Téthys	61
5.2.2	Le cas Encelade-Dioné	67
5.2.3	Le cas Titan-Hypérion	67
6	La détection de chaos	69
6.1	Quelques outils de détection du chaos	69
6.1.1	Les exposants maximaux de Lyapounov (MLE)	69
6.1.2	Outils dérivés	71
6.1.3	L'analyse en fréquence	72
6.2	Test de l'analyse en fréquence	73
6.2.1	Le problème test	73
6.2.2	Vérification numérique	80
6.2.3	Détection du chaos	82
6.2.4	Visualisation des arguments responsables du chaos	84
6.3	Conclusion	86
7	L'inégalité de De Haerdtl : Étude analytique	99
7.1	Les différents arguments	99
7.2	Les équations	101
7.3	Plage d'étude	111
7.4	Analyse des différentes résonances possibles	112
7.5	Vérification numérique	120
7.6	Application au cas Titan-Japet	122
8	L'inégalité de De Haerdtl : Étude numérique	127
8.1	Le système d'équations	127
8.1.1	Les variables	127
8.1.2	Les effets pris en compte	128
8.1.3	Choix des conditions initiales	130
8.1.4	Le système modélisé	130
8.2	La détection du chaos	131
8.2.1	Les exposants de Lyapounov	131
8.2.2	L'analyse en fréquence	133
8.3	L'identification des zones chaotiques	140
8.3.1	La méthode	141
8.3.2	Les résultats	141
8.4	Intégrations à rebours	144
8.4.1	Plusieurs solutions	146
8.4.2	Implications planétologiques	148

8.5	Conclusion	149
9	Signature observationnelle des effets de marées	151
9.1	Quantification des effets des marées	151
9.1.1	Cas des satellites galiléens	152
9.1.2	Cas des satellites de Saturne	157
9.2	Détermination observationnelle des effets de marée	166
9.2.1	État de l'art	166
9.2.2	La précision des observations	168
9.2.3	La détermination des accélérations séculaires	169
10	Les phénomènes mutuels	173
10.1	Le contexte	173
10.1.1	Le principe	173
10.1.2	Historique des phénomènes mutuels	173
10.2	La méthode de réduction	174
10.2.1	Principe de la modélisation	174
10.2.2	Le calcul du temps de lumière	175
10.2.3	Modélisation de la lumière incidente	176
10.2.4	Modélisation de la lumière diffusée	178
10.2.5	Ajustement du modèle aux observations	181
10.2.6	Présentation des résultats	181
10.3	Les observations	181
10.3.1	La campagne PHESAT95	182
10.3.2	La campagne PHEMU03	184
10.4	Conclusion	195
11	Conclusion et perspectives	197
A	Éléments d'une orbite képlérienne	199
A.1	Les éléments osculateurs	199
A.2	Les coordonnées de Jacobi	201
A.3	Autres systèmes de coordonnées	202
A.3.1	Les variables de Delaunay	202
A.3.2	Les variables de Poincaré	203
B	Les éléments propres	205
B.1	Définitions	205
B.2	Aspects pratiques	206
C	Les intégrateurs numériques	209
C.1	Le problème de Cauchy	209
C.2	Les intégrateurs à pas séparés	210
C.3	Les algorithmes de prédiction-correction	212
C.4	L'algorithme de Bulirsch-Stoer	214

D	L'analyse en fréquences	215
D.1	L'algorithme NAFF (1992)	216
D.2	Redétermination des fréquences détectés	218
D.3	La détermination de très hautes fréquences	220
E	Le théorème KAM	223
F	Quelques communications	225
F.1	Publications à comité de lecture	225
F.2	Réunions internationales	225
F.3	Communications diverses	225

Table des figures

2.1	Variation des paramètres dynamiques d'Io	27
2.2	Variation des paramètres dynamiques d'Europe	27
2.3	Variation des paramètres dynamiques de Ganymède	28
2.4	Variation des paramètres dynamiques de Callisto	28
2.5	Arguments en librations	30
2.6	La résonance laplacienne	31
3.1	Orbites de Janus et Épiméthée	40
5.1	Scenarii de Showman & Malhotra	59
5.2	Variation des paramètres orbitaux sous l'effet de la résonance.	63
5.3	chevauchement des résonances	65
5.4	surfaces de section	66
6.1	limite entre recouvrement et non-recouvrement des résonances	80
6.2	Evolution de α en fonction du temps	81
6.3	Evolution des inclinaisons en fonction du temps	82
6.4	Les arguments des résonances	83
6.5	Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 3 \times 10^{-2}$	83
6.6	Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$	84
6.7	Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	84
6.8	Simulation avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	85
6.9	Cartes en fréquences	87
6.10	Évolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 8 \times 10^{-3}$	88
6.11	Évolution des fréquences en fonction de l'action initiale pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 3 \times 10^{-2}$	89
6.12	Évolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$	90
6.13	Évolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	91
6.14	Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 8 \times 10^{-3}$, avec zoom sur la zone perturbée.	92
6.15	Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$, avec zoom sur la zone perturbée.	93

6.16	Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 4.5 \times 10^{-2}$, avec zoom sur la zone perturbée.	94
6.17	Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$	95
6.18	Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	96
6.19	Zoom rapproché sur les arguments Φ_2 et Φ_3 avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	96
6.20	Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	97
6.21	Zoom rapproché sur les arguments Φ_2 et Φ_3 avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$	97
7.1	localisation des résonances entre Ganymède et Callisto	102
7.2	localisation des résonances entre Ganymède et Callisto	103
7.3	Exemples de portraits de phase d'une résonance de type $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$	114
7.4	Les zones caractéristiques de l'espace des phases d'une résonance $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$, figure issue de Lemaître 1984 [129].	115
7.5	Traversée d'une résonance	121
7.6	Essais avec des marées très lentes	121
7.7	Localisation des résonances entre Titan et Japet	124
7.8	Localisation des résonances entre Titan et Japet	125
8.1	Exposants de Lyapounov	132
8.2	Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-6}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-7}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-6}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-7}$	133
8.3	Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-4}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-5}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-4}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-5}$	134
8.4	Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-4}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-4}$	135
8.5	Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-4}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-2}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-4}$	136
8.6	Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-3}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-3}$	137
8.7	Cartes de fréquence pour $e_3 = 2.1 \times 10^{-3}$	139
8.8	Cartes de fréquence pour $e_3 = 5 \times 10^{-4}$	139
8.9	Cartes de fréquence pour $e_3 = 10^{-2}$	140
8.10	Influence des inclinaisons	141
8.11	Évolution de α avec l'intégrateur d'Adams10	142
8.12	Résonance identifiée	143
8.13	Excentricités des satellites pendant la durée de la résonance.	143
8.14	Chevauchement de 2 résonances	144
8.15	Chevauchement de 2 résonances	144
8.16	Une résonance perturbée par 4 termes	145
8.17	Évolution de α avec le temps	146
8.18	Évolution des excentricités avec le temps	147
8.19	Simulations avec Bulirsch-Stoer	148
9.1	Accélération séculaires théoriques des satellites galiléens	155
9.2	Simulations d'accélération séculaires dans les galiléens	156
9.3	Accélération séculaire théorique de Mimas	159

9.4	Accélération séculaire théorique de Téthys	160
9.5	Accélérations séculaires théoriques d'Encelade et de Dioné	160
9.6	Accélérations séculaires théoriques de Rhéa et Titan	161
9.7	Accélérations séculaires théoriques de Hypérion et Japet	161
9.8	Les longues périodes dans la longitude de Mimas	169
10.1	Paramètres caractéristiques d'un phénomène mutuel	175
10.2	Correction du temps-lumière pour une éclipse	176
10.3	Représentation d'une éclipse	177
10.4	Repérage de la surface d'un satellite.	178
10.5	angle de position	182
10.6	Exemples de courbes de lumière PHESAT95	183
10.7	Les courbes de lumière de Lille	192
10.8	Les courbes de lumière de Bordeaux	194
A.1	Définition des éléments elliptiques	200
D.1	Norme de ϕ	217
D.2	Norme de ϕ_2	218
D.3	Comparaison de ϕ et ϕ_2	219
D.4	Le problème des fréquences proches	220

Liste des tableaux

2.1	Propriétés physiques de Jupiter	22
2.2	Propriétés physiques et dynamiques des galiléens	22
2.3	Propriétés physiques et dynamiques des satellites intérieurs de Jupiter	23
2.4	Propriétés des satellites lointains progrades de Jupiter	24
2.5	Propriétés des satellites lointains rétrogrades de Jupiter	24
2.6	Comparaison des différentes perturbations	25
2.7	Solutions de z et ζ pour Io	25
2.8	Solutions de z et ζ pour Europe	25
2.9	Solutions de z et ζ pour Ganymède	26
2.10	Solutions de z et ζ pour Callisto	26
2.11	Décomposition en fréquences de l'argument μ	26
2.12	Décomposition en fréquences de μ_1 et μ_2	29
2.13	Décomposition en fréquences de l'argument de $\mu_1 - \mu_2$ et μ_3	29
3.1	Propriétés physiques de Saturne	36
3.2	Les anneaux de Saturne	36
3.3	Propriétés physiques et dynamiques des principaux satellites de Saturne	37
3.4	Les lagrangiens dans le système de Saturne	38
3.5	Les satellites intérieurs aux anneaux	39
3.6	Comparaison des différentes perturbations sur les satellites de Saturne	42
5.1	Précession des péricentres	60
5.2	Probabilité de capture, issue de Champenois & Vienne [35]	67
6.1	Conditions initiales	77
7.1	Localisation des résonances liées à l'inégalité de De Haerdtl	100
7.2	Évaluation numérique des termes des h_i, V_i	106
7.3	Premiers coefficients du hamiltonien hV	107
7.4	Préfacteurs des perturbations de De Haerdtl	108
7.5	Valeurs des préfacteurs de la partie aperiodique	109
7.6	Périodes associées aux termes de l'inégalité de De Haerdtl	110
7.7	Valeurs des coefficients Γ	111
7.8	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s1	116
7.9	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s1 avec des excentricités et inclinaisons nulles	116

7.10	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s2	117
7.11	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s2 avec des excentricités et inclinaisons nulles	117
7.12	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s3	118
7.13	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s3 avec des excentricités et inclinaisons nulles	118
7.14	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s4	119
7.15	Paramètres du hamiltonien pour la résonance 4s4 avec des excentricités et inclinaisons nulles	119
7.16	Probabilités analytiques de capture	119
7.17	Influence des termes de l'inégalité 1 : 5 sur la longitude de Japet	122
7.18	Valeurs utilisées pour traiter le cas Titan-Japet	122
7.19	Localisation des résonances liées à la grande inégalité Titan-Japet	123
8.1	Conditions initiales	130
8.2	Solutions z et ζ pour Ganymède	131
8.3	Solutions z et ζ pour Callisto	131
9.1	Valeurs des coefficients A_i et B_i	152
9.2	Valeurs utilisées pour les galiléens	153
9.3	Amortissement de l'excentricité des satellites galiléens	154
9.4	Paramètres physiques utilisés pour les Saturniens	157
9.5	Paramètres dynamiques utilisés pour les Saturniens	158
9.6	Valeurs des coefficients A_i et B_i	159
9.7	Accélération séculaires de Mimas et de Téthys	162
9.8	Accélération séculaires d'Encelade et Dioné	163
9.9	Accélération séculaires de Titan et Hypérion	164
9.10	Accélération séculaires estimées des Saturniens	164
9.11	Amortissement de l'excentricité des Saturniens	165
9.12	Accélération séculaires observées des satellites galiléens	167
9.13	Estimations des Q_i	167
9.14	Influence de la dissipation sur les résidus	168
9.15	Accélération séculaires observées de Mimas	168
9.16	Précision des observations	170
9.17	Détection des marées pour les satellites galiléens	170
9.18	Détection des marées pour les satellites de Saturne	170
10.1	Observatoires impliqués dans PHESAT95	183
10.2	Valeurs des paramètres photométriques utilisées pour les 5 premiers satellites de Saturne	184
10.3	Les meilleures observations de PHESAT95	185
10.4	Caractéristiques du matériel d'observation utilisé à Lille	186
10.5	Les phénomènes observés	186
10.6	Ajustement des observations de Lille	188
10.7	Résidus obtenus à l'aide des éphémérides de Lainey et al.	189
10.8	Ajustement de 2o3 le 03/02 : matrice de corrélation	189

10.9 Ajustement de 4e3 le 18/02 : matrice de corrélation	190
10.10Ajustement de 4o1 le 19/02 : matrice de corrélation	190
10.11Ajustement de 4e1 le 19/02 : matrice de corrélation	190
10.12Ajustement de 4e2 le 09/03 : matrice de corrélation	190
10.13Ajustement de 3e4 le 15/03 : matrice de corrélation	190
10.14Ajustement de 2e3 le 18/03 : matrice de corrélation	191
10.15Ajustement de 1e3 le 24/03 : matrice de corrélation	191
10.16Ajustement de 1e3 le 25/03 : matrice de corrélation	191
10.17Ajustement de 2o3 le 25/03 : matrice de corrélation	191
10.18Ajustement de 2e3 le 26/03 : matrice de corrélation	191
10.19Ajustement de 2e1 le 26/03 : matrice de corrélation	193
10.20Ajustement de 3e2 le 19/04 : matrice de corrélation	193
10.21Paramètres issus des observations de phénomènes mutuels à Bordeaux en 2003.	193
10.22Résidus des phénomènes mutuels observés à Bordeaux	195
D.1 Anayse de $f(t) = 1 + \exp(3i\nu_0t)$	220
D.2 Anayse de $f(t) = 1 + \exp(1.5i\nu_0t)$	221
D.3 Anayse de $f(t) = 1 + \exp(i\nu_0t)$	221
D.4 Anayse de $f(t) = 1 + \exp(1.2i\nu_0t) + \exp(1.8i\nu_0t)$	222

Chapitre 1

Introduction

Les effets de marée représentent la principale source de dissipation d'énergie dans les satellites naturels et les planètes. Ils résultent de l'attraction différentielle subie par chaque corps, qui contrarie leur sphéricité et modifie leur dynamique. Ces effets ont des conséquences planétologiques et dynamiques importantes.

Les conséquences planétologiques apparaissent dans la structure interne des satellites naturels. En effet, la dissipation d'énergie due aux marées entraîne un certain nombre de contraintes sur les matériaux constituant ces corps. Il résulte de ces contraintes un échauffement du satellite qui tend à liquéfier les différents matériaux le constituant, favorisant ainsi la migration des éléments lourds vers le centre du corps, et ainsi la différenciation. Un satellite ayant subi un significatif épisode d'échauffement de marée est différencié, c'est-à-dire que sa structure interne est hétérogène, constituée de différentes couches d'éléments de plus en plus lourds à mesure que l'on s'enfonce sous la surface.

Un volcanisme, comme celui de J-1 Io, est significatif d'un échauffement de marée. Cet échauffement s'explique très bien par le forçage de l'excentricité d'Io par le biais de la résonance laplacienne avec Europe et Ganymède. Par contre Ganymède, qui ne subit pas actuellement d'épisode d'échauffement de marée, est bien différencié, ce qui indique qu'il a pu connaître par le passé un tel épisode.

Les conséquences dynamiques des effets de marée se traduisent par une accélération séculaire des satellites. À court terme, cette accélération séculaire se manifeste par un décalage (une avance ou un retard) des longitudes moyennes par rapport à ce que prévoient les éphémérides où les dissipations ne sont pas prises en compte. Actuellement, les modèles dynamiques ne permettent pas de détecter une accélération séculaire de façon fiable pour les satellites galiléens de Jupiter ainsi que les satellites de Saturne.

À long terme, c'est-à-dire à l'horizon de plusieurs millions d'années, les effets dynamiques des marées se traduisent par une migration des satellites dans leur système, autrement dit une évolution des demi-grands axes. Cette migration des demi-grands axes permet la rencontre de zones de résonance, et parfois même des captures. Ainsi, outre la résonance laplacienne à 3 satellites dans le système des satellites galiléens, 3 résonances impliquant 2 satellites sont présentes dans le système des principaux satellites de Saturne. Ces résonances impliquent respectivement Mimas et Téthys, Encelade et Dioné et Titan et Hypéion.

Certains scénarii d'évolution orbitale des systèmes de satellites ont été élaborés dans le passé, permettant par exemple de comprendre la formation de la résonance en inclinaison

entre S-1 Mimas et S-3 Téthys. Par contre, des mystères subsistent, comme l'origine de la résonance Titan-Hypérion ou la différenciation de Ganymède.

Outre les résonances il existe dans le système des satellites galiléens une grande inégalité 7 : 3 entre J-3 Ganymède et J-4 Callisto de période environ 22 ans. Cette grande inégalité n'est pas due à une actuelle résonance. Est-elle la manifestation d'une résonance ancienne ? Nous nous poserons cette question ainsi que la question des effets de cette grande inégalité sur la dynamique à long terme du système des galiléens. En effet, cette inégalité n'a jamais été prise en compte dans les scénarii de capture en résonance laplacienne. Les chapitres 7 et 8 lui sont consacrés. Nous verrons qu'elle ne doit pas être négligée. Nous arrivons à cette conclusion notamment à l'aide d'outils de détection du chaos, exposés au chapitre 6.

L'incapacité que nous avons actuellement à déterminer les accélérations séculaires des satellites vient d'une part de la petitesse de ces effets à court terme, et d'autre part de l'insuffisance des modèles. Ces insuffisances sont notamment dues à la précision des observations. Le chapitre 9 décrit ces problèmes et tente d'y apporter des solutions. Enfin, le chapitre 10 décrit des réductions de phénomènes mutuels de satellites de Saturne, ainsi que des réductions et observations de phénomènes de satellites galiléens. De tels phénomènes mutuels, observations photométriques à but astrométrique, sont observés depuis les années 70. Ces observations permettent une précision astrométrique environ 4 fois supérieure aux observations CCD classiques.

Les notations utilisées

- λ : longitude moyenne
- a : demi-grand axe
- e : excentricité
- γ : sinus de la demie-inclinaison ($\gamma = \sin \frac{i}{2}$)
- ϖ : péricentre
- Ω : nœud ascendant
- $z = e \exp(\sqrt{-1}\varpi) = h + \sqrt{-1}k$
- $\zeta = \gamma \exp(\sqrt{-1}\Omega) = p + \sqrt{-1}q$

Chapitre 2

Les satellites de Jupiter

Introduction

L'existence de satellites pour Jupiter est connue depuis Galilée (janvier 1610) qui avait repéré les 4 satellites dits galiléens en pointant sa lunette vers Jupiter. Aujourd'hui, on connaît 63 satellites, la plupart étant des satellites lointains, probablement des astéroïdes capturés par le champ gravitationnel de Jupiter.

2.1 La planète Jupiter ²⁴

Jupiter est la planète la plus massive du système solaire, elle est environ 320 fois plus massive que la Terre. Il s'agit d'une planète gazeuse, composée essentiellement d'hydrogène et d'hélium, avec un noyau de fer, de silicates, d'hydrocarbures, d'ammoniac et de glace d'eau. Elle présente une rotation rapide et différentielle qui oblige l'UAI à en donner 3 valeurs : $877.900^\circ/j$ pour la rotation moyenne de l'atmosphère à l'équateur ("System I"), $870.270^\circ/j$ pour la rotation moyenne des ceintures équatoriales ("System II"), et $870.5366420^\circ/j$ pour le champ magnétique ("System III") (UAI2000 [176]). Cette rotation rapide engendre un important aplatissement géométrique puisque son rayon polaire est de 66854 km et son rayon équatorial de 71492 km. Par conséquent, Jupiter présente de significatifs coefficients zonaux J_i (cf.Tab2.1).

2.2 Propriétés physiques des satellites

2.2.1 Les satellites galiléens

Les satellites galiléens sont J-1 Io, J-2 Europe, J-3 Ganymède et J-4 Callisto, ils ont la particularité d'être suffisamment massifs pour se perturber fortement mutuellement. L'importance de ces perturbations a tout d'abord été mise en évidence par les éphémérides qui ont notamment permis, par analyse d'observations astrométriques des satellites, d'estimer les perturbations mutuelles effectives et ainsi de remonter aux masses. Depuis une vingtaine d'années, les masses sont estimées grâce aux perturbations subies par les sondes spatiales

masse (M_{\odot})	$9.54588464 \times 10^{-4}$	Pioneer & Voyager [31]
rayon polaire (km)	66854	UAI 2000 [176]
rayon équatorial (km)	71492	UAI 2000 [176]
rayon moyen (km)	69911	UAI 2000 [176]
demi-grand axe (ua)	5.2026032092	Simon et al. 1994 [181]
excentricité	$4.84979255 \times 10^{-2}$	Simon et al. 1994 [181]
inclinaison	$1^{\circ}.30326698$	Simon et al. 1994 [181]
J_2	1.4736×10^{-2}	Pioneer & Voyager [31]
J_3	1.4×10^{-6}	Pioneer & Voyager [31]
J_4	-5.87×10^{-4}	Pioneer & Voyager [31]
J_6	3.1×10^{-5}	Pioneer & Voyager [31]

TAB. 2.1 – Propriétés physiques de Jupiter. Les harmoniques zonaux J_i ont été déterminés par Campbell & Synnott avec la valeur de 71398 km pour le rayon équatorial de Jupiter. Dans les calculs, c’est cette dernière valeur de rayon équatorial que j’ai utilisée, afin de conserver une certaine cohérence dans les valeurs numériques. Les paramètres dynamiques (demi-grand axe, excentricité et inclinaison) sont des éléments moyens (issus de termes séculaires) à J2000.

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
Masse (M_{\oplus})	4.0×10^{-5}	2.56×10^{-5}	7.84×10^{-5}	5.60×10^{-5}
a (km)	422029.96	671261.17	1070620.98	1883133.68
e	$3.4 - 4.9 \times 10^{-3}$	$8.4 - 10.2 \times 10^{-2}$	$0 - 3.3 \times 10^{-3}$	$6.5 - 8.3 \times 10^{-3}$
γ	$1.7 - 4.5 \times 10^{-4}$	$3.6 - 4.5 \times 10^{-3}$	$2.5 - 29 \times 10^{-4}$	$1.2 - 6.4 \times 10^{-3}$
R (km)	1821.46	1562.09	2632.345	2409.3

TAB. 2.2 – Propriétés physiques et dynamiques des satellites galiléens. Les masses des satellites sont issues de [5] pour Io et Europe alors que celles de Ganymède et Callisto viennent de Pioneer et Voyager [31]. Les excentricités et inclinaisons sont issues des éphémérides de Lainey [112], et les rayons des recommandations de l’UAI 2000 [176].

Pioneer, Voyager (Campbell & Synnott [31]) puis Galileo (Anderson [5]) lors de leurs proches rencontres avec les différents satellites.

Io se caractérise principalement par son intense volcanisme, prédit par Peale (1979 [157]) et détecté par Voyager I la même année. Ce volcanisme s’explique par une excitation de la dissipation de marée du fait d’un forçage de son excentricité par la libration des arguments $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$ et $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2$. Io est soupçonné d’être constitué d’un noyau riche en fer et d’un manteau riche en olivine (cf. Sohl et al. 2002 [185]).

Le principal intérêt d’Europe est la présence très probable d’un océan liquide sous la surface, d’une salinité proche de celle de la Terre. Cet océan est l’explication la plus plausible au champ magnétique d’Europe détecté par Galileo. En effet, ce champ est compatible avec un champ dipolaire induit par les variations temporelles du champ magnétique ambiant de la magnétosphère jovienne. Ceci nécessite la présence d’une couche électriquement conductive, donc d’un océan (cf. Khurana et al. 1998 [105]).

Un champ magnétique a également été détecté sur Ganymède et Callisto, ce qui implique également la présence d’un océan sous la surface, constitué probablement d’eau et d’ammoniac. Mais le champ magnétique de Ganymède est trop important pour pouvoir être expliqué

	Métis	Adrastée	Amalthée	Thébé
Masse (M_J)	5.03×10^{-11}	1.01×10^{-11}	1.10×10^{-9} [7]	4.09×10^{-10}
a (km)	127969	128971	181995 [197]	222400 [197]
e	$\leq 5 \times 10^{-3}$	$\leq 5 \times 10^{-3}$	3×10^{-3} [197]	1.77×10^{-2} [197]
γ	$\leq 8.7 \times 10^{-4}$	$\leq 2.6 \times 10^{-3}$	3.2×10^{-3} [197]	9.3×10^{-3} [197]
R moyen (km)	21.5 [176]	8.2 [176]	83.5 [176]	49.3 [176]

TAB. 2.3 – Propriétés physiques et dynamiques des satellites intérieurs de Jupiter.

exclusivement par un champ dipolaire induit. Il est probablement également en partie dû à un effet dynamo provoqué par la rotation d'un noyau liquide de Fe-FeS (cf. Schubert et al. 1996 [173]). Par conséquent, Ganymède est très différencié, ce qui n'est pas le cas pour Callisto, dont le noyau est probablement composé de glace et de silicates.

2.2.2 Les satellites proches

Il s'agit de 4 satellites, J-5 Amalthée, J-14 Thébé, J-15 Adrastée et J-16 Métis, dont les orbites sont intérieures à celle d'Io. À l'exception d'Amalthée, découvert en 1892 par Barnard [18], ils ont été découverts lors du passage de la sonde Voyager 1 à proximité de Jupiter en 1979 (voir par exemple Synnott 1980 [191]). Ce sont des petits corps, de dimensions caractéristiques de l'ordre de 50 km, et de formes plus ellipsoïdales que sphériques. Leurs orbites sont quasi-circulaires et quasi-équatoriales. Leurs éléments orbitaux ainsi que leurs propriétés physiques sont relativement difficiles à déterminer du fait de la difficulté d'observer ces satellites (leurs magnitudes sont comprises entre 14 et 19, et ils sont très proches de Jupiter) et leurs perturbations mutuelles sont très faibles, comparativement par exemple à l'effet de la non-sphéricité de Jupiter et à la perturbation gravitationnelle d'Io.

2.2.3 Les satellites lointains

Les satellites dits lointains de Jupiter sont des petits corps (les plus gros ont des dimensions comparables à celles des satellites intérieurs, les plus petits ont un diamètre d'1 à 2 kilomètres) orbitant bien au-delà de l'orbite de Callisto. Ces satellites sont découverts par des méthodes d'imagerie terrestre à grand champ où l'on repère des sources lumineuses non identifiées qui suivent la planète. Près de la moitié de ces corps ont des orbites rétrogrades (voir par exemple [177]), ceci indiquerait que ces satellites ont été capturés plutôt que formés dans la nébuleuse proto-jovienne. De plus, les satellites capturés ont des orbites plus stables s'ils orbitent dans le sens rétrograde, du fait de la perturbation gravitationnelle de Callisto (cf. Astakhov et al. 2003 [17]). Ainsi, les satellites progrades sont moins susceptibles d'être capturés et plus susceptibles d'être éjectés en cas de capture.

Les propriétés physiques et dynamiques des principaux satellites lointains sont rassemblées Tab.2.4 et 2.5. On peut remarquer les importantes variations des excentricités et inclinaisons de ces satellites.

	Léda	Himalia	Lysithéa	Elara
Masse (M_{J})	3×10^{-12} [73]	2.2×10^{-9} [65]	4×10^{-11} [73]	4×10^{-10} [73]
a ($\times 10^6$ km) [169]	11.15	11.44	11.70	11.72
e [169]	0.12 – 0.21	0.11 – 0.21	0.08 – 0.16	0.16 – 0.27
γ [169]	0.01 – 0.43	0.04 – 0.43	0.2 – 0.43	0.01 – 0.4
R moyen (km) [176]	5	85	12	40

TAB. 2.4 – Propriétés physiques et dynamiques des principaux satellites lointains progrades de Jupiter. Les rayons sont issus des recommandations de l’UAI en 2000 [176], les masses de Fukushima 1990 [73] à l’exception de la masse de Himalia et les paramètres dynamiques de Rocher 1996 [169]. La masse de Himalia a été déterminée par Emelyanov (2005 [65]) grâce à l’observation d’une rencontre proche avec Elara le 15 juillet 1949.

	Ananké	Carmé	Pasiphaé	Sinopé
Masse (M_{J})	2×10^{-11}	5×10^{-11}	10^{-10}	4×10^{-11}
a ($\times 10^6$ km) [169]	21.05	23.28	23.66	23.85
e [169]	0.08 – 0.45	0.13 – 0.41	0.18 – 0.67	0.11 – 0.43
γ [169]	0.86 – 1	0.94 – 1	0.86 – 1	0.91 – 1
R moyen (km) [176]	10	15	18	14

TAB. 2.5 – Propriétés physiques et dynamiques des principaux satellites lointains rétrogrades de Jupiter. Les rayons sont issus des recommandations de l’UAI en 2000 [176], les masses de Fukushima 1990 [73] et les paramètres dynamiques de Rocher 1996 [169].

2.3 La dynamique du système

2.3.1 L’importance des perturbations mutuelles

Les masses importantes des satellites galiléens ont pour première conséquence dynamique d’importantes perturbations mutuelles, qui sont alors d’un ordre de grandeur comparable aux perturbations dues à l’aplatissement de Jupiter. En effet, la Table 2.6 montre qu’une assimilation de la vitesse de précession séculaire des péri-centres à l’effet de l’aplatissement donne une erreur de "seulement" 3% pour Io, mais 26% pour Europe, 32% pour Ganymède et 65% pour Callisto, pour lequel le principal effet séculaire vient de la perturbation de Ganymède. De plus, on constate que le Soleil, s’il a un effet relativement négligeable sur Io, Europe et éventuellement Ganymède, doit être pris en compte dans toute étude de la dynamique de Callisto. Enfin, la faiblesse des perturbations dues à Amalthée indique que les satellites non-galiléens peuvent ne pas être pris en compte pour avoir une bonne précision.

L’importance des masses se manifeste également sur les solutions des différents paramètres orbitaux données par les éphémérides. Plus précisément, différentes contributions périodiques se retrouvent dans les variables $z = e \exp(\sqrt{-1}\varpi)$ et $\zeta = \gamma \exp(\sqrt{-1}\Omega)$, rendant ces variables inassimilables aux modes propres (cf. Annexe B). Les Tables 2.7 à 2.10 donnent les premiers termes, par ordre décroissant d’amplitude, de la décomposition en fréquences des solutions des variables z et ζ pour les 4 satellites galiléens, issue de la thèse de V. Lainey (2002 [110]). Dans ces tables, les ν_i représentent des fréquences propres du système, les ν_1 à ν_4 sont proches des vitesses de précession séculaires des péri-centres respectivement de Io,

	J_2	J-1	J-2	J-3	J-4	J-5	Soleil
J-1 Io	97.15		1.96	0.79	0.08	10^{-4}	0.02
J-2 Europe	75.87	11.44		11.75	0.79	10^{-4}	0.16
J-3 Ganymède	67.64	5.41	13.76		11.72	10^{-4}	1.47
J-4 Callisto	35.34	2.26	3.61	45.89		$< 10^{-4}$	12.91

TAB. 2.6 – Comparaison en % des différentes perturbations sur les vitesses de précession des péricentres. Ici, J_2 désigne le premier coefficient zonal de l’aplatissement de Jupiter, et J-1 à J-4 sont les 4 satellites galiléens. J-5 désigne Amalthée, le plus gros satellite Jovien non galiléen, dont l’orbite est intérieure à celle d’Io. Ces proportions ont été évaluées en estimant les vitesses de précession au degré 0 en excentricité et inclinaison, une telle précision est insuffisante pour faire des éphémérides mais suffisante pour sélectionner les principales perturbations à prendre en compte. Ce tableau peut être réutilisé pour évaluer les contributions des différentes perturbations sur la précession des nœuds puisqu’on a, au degré 0 en excentricité/inclinaison : $|\dot{\varpi}| = |\delta\dot{\Omega}|$.

z_1	amplitude	période	ident.	ζ_1	amplitude	période	ident.
	1752 km	1.3 ans	$\lambda_1 - 2\lambda_2$		365 km	7.4 ans	ν_5
	264 km	1.77 j	λ_1		76 km	30.2 ans	ν_6
	15 km	135.2 ans	ν_3		15 km	∞	ν_0
					14 km	137.7 ans	ν_7

TAB. 2.7 – Solutions de z et ζ pour Io dans les éphémérides L1-1.

Europe, Ganymède et Callisto, et les ν_5 à ν_8 sont proches des vitesses de précession séculaires des nœuds ascendants de ces mêmes satellites. ν_0 désigne la fréquence nulle, elle est associée au plan invariant de chaque satellite.

Le premier constat à la lecture de ces tableaux est la quasi-impossibilité de négliger le deuxième terme par rapport au premier, sauf peut-être dans la solution de z_4 . Le deuxième constat est la présence de termes à courte période dans les solutions relatives aux excentricités.

Ces phénomènes ont pour conséquences des oscillations des excentricités et des inclinaisons (cf. Fig.2.1 à 2.4 obtenues à l’aide des éphémérides de Lainey L1-1). La présence de termes à courtes périodes dans les excentricités des 3 premiers satellites se traduit par une certaine épaisseur des courbes visualisées sur le long terme, alors que les courbes représentant les inclinaisons γ_i sont beaucoup plus fines.

z_2	amplitude	période	ident.	ζ_2	amplitude	période	ident.
	6282 km	1.3 ans	$\lambda_1 - 2\lambda_2$		5424 km	30.2 ans	ν_6
	201 km	3.6 j	λ_2		295 km	137.7 ans	ν_7
	144 km	135.2 ans	ν_3		223 km	∞	ν_0
	133 km	25.4 ans	ν_2		79 km	536.5 ans	ν_8

TAB. 2.8 – Solutions de z et ζ pour Europe dans les éphémérides L1-1.

z_3	amplitude	période	ident.	ζ_3	amplitude	période	ident.
	1530 km	135.2 ans	ν_3		3412 km	137.7 ans	ν_7
	826 km	536.5 ans	ν_4		1827 km	∞	ν_0
	634 km	1.3 ans	$\lambda_1 - 2\lambda_2$		759 km	562.9 ans	ν_8
					309 km	30.2 ans	ν_6

TAB. 2.9 – Solutions de z et ζ pour Ganymède dans les éphémérides L1-1.

z_4	amplitude	période	ident.	ζ_4	amplitude	période	ident.
	13889 km	536.5 ans	ν_4		14471 km	∞	ν_0
	389 km	16.7 j	λ_4		8457 km	562.9 ans	ν_8
	299 km	7.1 j	λ_3		981 km	137.7 ans	ν_7
	294 km	135.2 ans	ν_3				
	280 km	1.77 j	λ_1				

TAB. 2.10 – Solutions de z et ζ pour Callisto, dans les éphémérides L1-1.

2.3.2 Librations et résonances

Le système des satellites galiléens est très intéressant du fait de la présence d'une résonance dite laplacienne entre 3 satellites, Io, Europe et Ganymède, donc d'ordre 2 des masses, ainsi que de termes en libration ou en grande inégalité (circulation lente).

la résonance laplacienne

Il s'agit d'une résonance associée à l'inégalité $\mu = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ mise en valeur pour la première fois par Laplace [116]. Cette résonance vient de l'annulation de la combinaison entière de moyens mouvements

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 \quad (2.1)$$

Elle se traduit géométriquement par une libration de l'argument μ autour de la position d'équilibre π avec une amplitude de l'ordre du demi-degré, et l'apparition d'un terme de période environ 2060 jours. Sa décomposition en fréquences est donnée Table 2.11.

n°	période (j)	amplitude (rad)
1	∞	3.1415968
2	482.056154	0.0030383
3	485.603205	0.0016123
4	3.525463	0.0011046
5	462.514469	0.0010338
6	2059.441556	0.0007118

TAB. 2.11 – Décomposition en fréquences de l'argument de la résonance laplacienne sous la forme d'une somme de cosinus. Cette décomposition a été obtenue à partir de la théorie L-1.1 avec 1982880 points espacés de 0.294118 jours, soit un intervalle de 583200 jours.

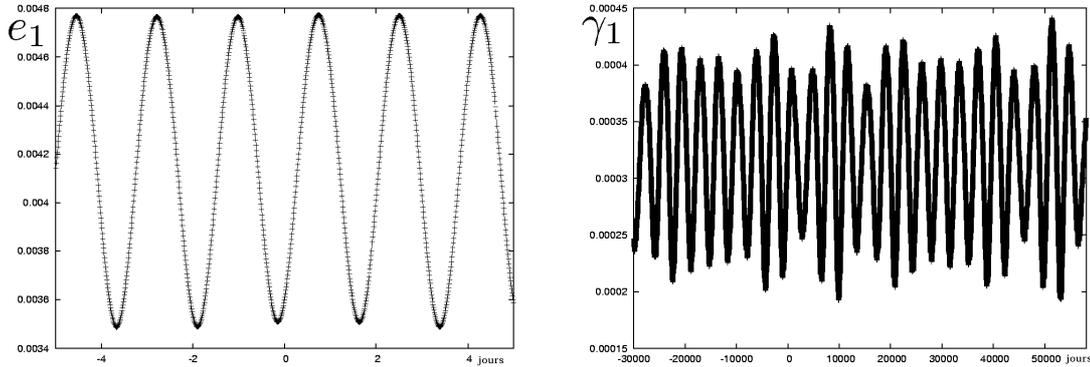


FIG. 2.1 – Variation des paramètres dynamiques d'Io. L'excentricité n'est représentée que sur 10 jours car sa visualisation sur le long terme ne donne pas plus d'informations sur sa variation. L'origine des dates est ici le 1er janvier 1950 à 0h.

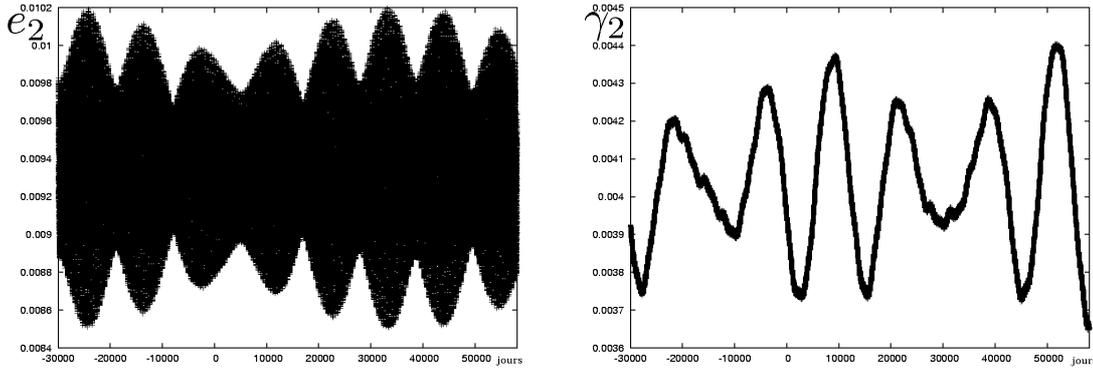


FIG. 2.2 – Variation des paramètres dynamiques d'Europe.

les libérations à 2 satellites impliquant Io, Europe et Ganymède

Il est intéressant de constater qu'outre la résonance laplacienne évoquée au paragraphe précédent, il existe des grandes inégalités de moyens mouvements entre Io, Europe et Ganymède, plus précisément on a

$$n_1 \approx 2n_2 \quad (2.2)$$

et

$$n_2 \approx 2n_3 \quad (2.3)$$

Ces grandes inégalités sont liées à la résonance laplacienne et se traduisent notamment par les libérations de 3 arguments : $\mu_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$, $\mu_2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2$ et $\mu_3 = \lambda_2 - 2\lambda_3 + \varpi_2$. Par la combinaison entière $\mu_2 - \mu_3$, on retrouve l'argument de la résonance laplacienne. Mais ces libérations ont aussi des conséquences géométriques :

- $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1 \approx 0$ donne $(2\lambda_1 - 2\lambda_2) + (\varpi_1 - \lambda_1) \approx 0$, ce qui veut dire : si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors $\lambda_1 = \varpi_1$, donc la conjonction d'Io et Europe a lieu quand Io est à son périjoive.
- $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2 \approx \pi$ donne $(\lambda_1 - \lambda_2) + (\varpi_2 - \lambda_2) \approx \pi$, ce qui veut dire : si $\lambda_1 = \lambda_2 + \pi$ alors $\lambda_2 = \varpi_2$, donc lorsque Io et Europe sont en opposition, Europe est à son périjoive.

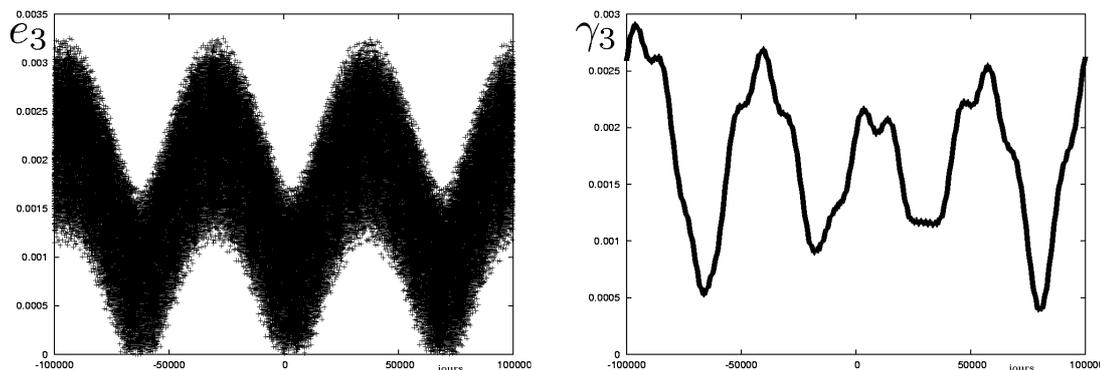


FIG. 2.3 – Variation des paramètres dynamiques de Ganymède.

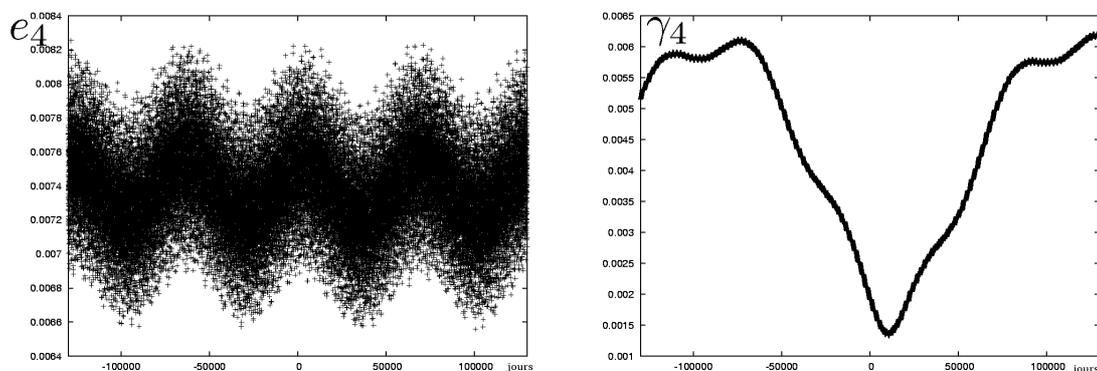


FIG. 2.4 – Variation des paramètres dynamiques de Callisto.

Par combinaison entière $\mu_1 - \mu_2$ on a $\varpi_1 \approx \varpi_2 + \pi$ ce qui veut dire que les péricentres d'Io et Europe sont anti-alignés. Cette configuration garantit qu'une certaine distance sera toujours maintenue entre les 2 satellites puisqu'une rencontre au niveau des 2 péricentres sera évitée, ceci permet une certaine stabilité du système.

- $\lambda_2 - 2\lambda_3 + \varpi_2 \approx 0$ donne $(2\lambda_2 - 2\lambda_3) + (\varpi_2 - \lambda_2) \approx 0$, ce qui veut dire : si $\lambda_2 = \lambda_3$ alors $\lambda_2 = \varpi_2$, donc Europe est à son périjove lorsque Europe et Ganymède sont en conjonction. Ceci veut également dire qu'une conjonction d'Europe et Ganymède correspond à une opposition d'Io et Europe.

l'inégalité de De Haerdtl

Cette quasi-commensurabilité 7 : 3 entre les moyens mouvements de Ganymède et Callisto a été détectée pour la première fois par De Haerdtl en 1892 [43]. Elle se traduit par une circulation de l'inégalité $3\lambda_3 - 7\lambda_4$ en 8058 jours. Lieske (1973 [130]) a estimé que son influence dans les éphémérides était principalement sous forme de perturbations périodiques d'amplitude de 20 à 40 kilomètres dans les longitudes de Ganymède et Callisto. En 1977 il publie des éphémérides [132] où pour la première fois cette inégalité est prise en compte. Depuis, toutes les éphémérides des satellites galiléens tiennent compte de cette grande inégalité, mais elle n'a cependant jamais été utilisée dans des scénarii d'évolution orbitale à long terme du système des galiléens.

n°	période (j)	amplitude (rad)	n°	période (j)	amplitude (rad)
1	1.762732	0.1484755	1	∞	3.1415838
2	0.881366	0.0108798	2	3.525463	0.0357208
3	482.056161	0.0066913	3	482.056158	0.0231772
			4	462.515858	0.0211162
			5	485.603207	0.0130898
			6	1.762732	0.0126108
			7	7.050927	0.0122462
			8	1.175154	0.0014570

TAB. 2.12 – Décomposition en fréquences des arguments $\mu_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$ (à gauche) et $\mu_2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2$ (à droite) sous la forme d'une somme de cosinus.

n°	période (j)	amplitude (rad)	n°	période (j)	amplitude (rad)
1	∞	3.1415932	1	3.525463	0.0346161
2	1.762732	0.1610863	2	462.515794	0.0221500
3	3.525463	0.0318292	3	482.056055	0.0201413
4	482.056158	0.0298706	4	7.050927	0.0128395
5	462.515910	0.0197499	5	1.762732	0.0124470
6	485.603208	0.0169061	6	485.603208	0.0114803
7	7.050927	0.0143665			
8	0.881366	0.0103652			
9	403.515379	0.0035291			

TAB. 2.13 – Décomposition en fréquences des arguments $\varpi_2 - \varpi_1$ et $\mu_3 = \lambda_2 - 2\lambda_3 - \varpi_2$ sous la forme d'une somme de cosinus.

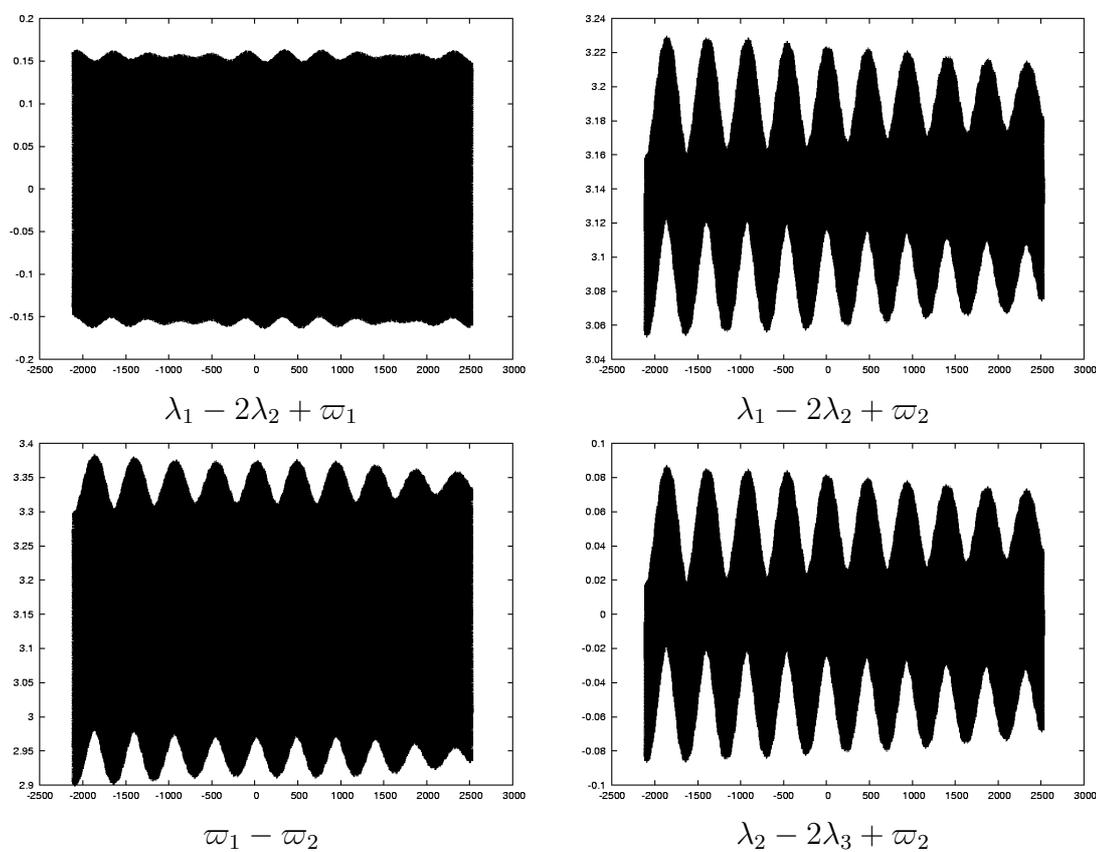


FIG. 2.5 – Arguments en libration, d'après la théorie L1-1. L'unité de temps est le jour, l'origine étant le 1^{er} janvier 1950 à 0h (TT).

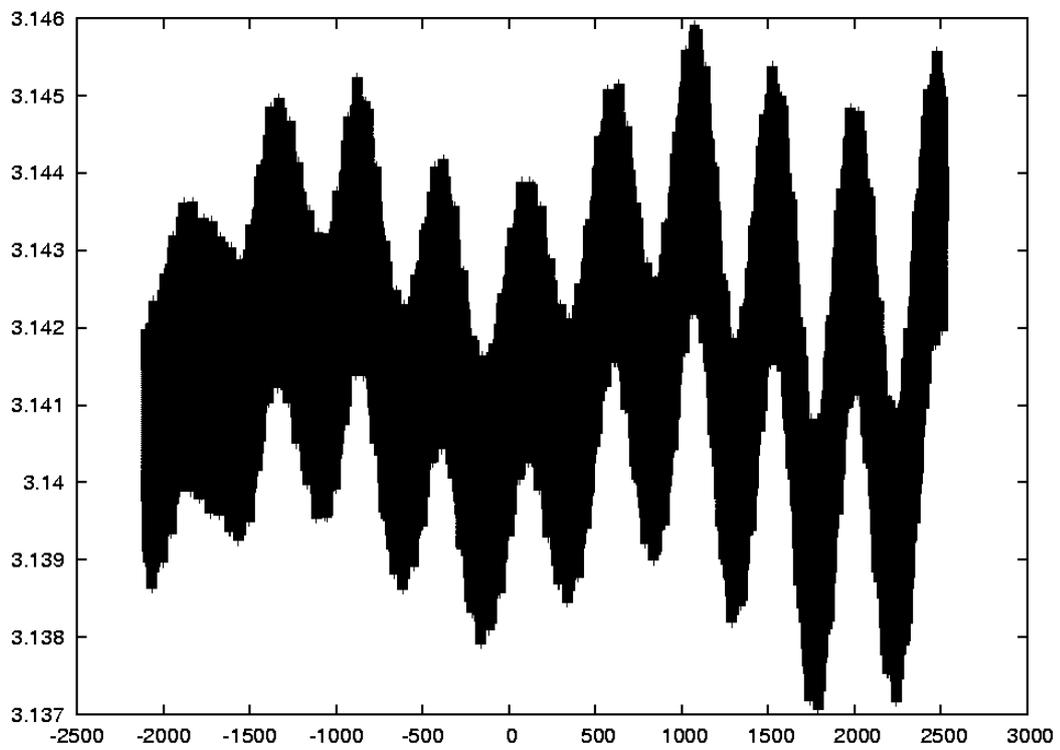


FIG. 2.6 – Arguments de la résonance laplacienne $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$, d'après la théorie L1-1. L'unité de temps est le jour, l'origine étant le 1^{er} janvier 1950 à 0h (TT).

2.3.3 Les éphémérides

les théories analytiques

La première théorie analytique des mouvements des satellites galiléens de Jupiter date de 1788 [115] quand Laplace a notamment établi la relation de résonance $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = \pi$ (à l'époque supposée exacte), cette théorie a été complétée par Souillart (1880 [187]) qui a introduit des termes négligés par Laplace.

Au début du XX^{ème} siècle, Sampson, après plus de 10 ans de calculs, a mis au point une théorie analytique des mouvements des satellites galiléens (1921 [171]). Cette théorie utilise des variables cylindriques et a pour plan de référence l'équateur de Jupiter à la date 1900.0. L'intégration des équations se déroule en 3 étapes, la première consistant à intégrer le système autonome (où le temps n'apparaît pas explicitement), la deuxième à intégrer le système non autonome hors résonance par quadrature, et la troisième où les arguments en libration sont traités pour en déduire les corrections à apporter à la solution issue de la deuxième étape. Cette théorie avait une précision de l'ordre de 600 à 1200 km.

Dans les années 70, l'outil informatique a permis à Lieske de "revitaliser" la théorie de Sampson (1974 [131]) avec

- La correction d'erreurs de calculs de Sampson.
- L'introduction de termes négligés par Sampson (comme l'inégalité de De Haerdtl).
- La solution sous forme de fonctions analytiques des différents constantes d'intégration, avec l'expression des dérivées partielles associées aux différentes constantes. Cette forme de solutions permet de futurs réajustements de la théorie en fonction des nouvelles observations astrométriques.

Cette possibilité de réajustements permettra la publication de plusieurs théories, la première en 1977 [132], puis la théorie E-2 en 1980 [133] avec notamment l'utilisation de phénomènes mutuels en 1973, jusqu'à la théorie E-5 en 1998 [135]. D'autres auteurs ont publié des ajustements de cette théorie dite de Sampson-Lieske, comme par exemple Arlot (1982 [8]).

On peut également citer la théorie de Sagnier (1975 [170]) qui utilise des variables elliptiques. Cette théorie n'a cependant jamais vraiment été utilisée pour réaliser des éphémérides. De même Duriez (1982 [59]) a essayé d'appliquer la théorie générale planétaire aux satellites galiléens.

les théories numériques

Afin de piloter au mieux la sonde Galileo lors de son périple dans le système jovien, R. Jacobson a développé des éphémérides purement numériques des satellites galiléens (2001 [96]) incluant des observations datant d'entre 1967 et 2001. Le refus de prendre en compte des observations plus anciennes tient à la volonté d'être le plus précis possible sur un intervalle de temps restreint, à savoir la durée de la mission Galileo autour de Jupiter (de décembre 1995 à septembre 2003).

L'outil numérique se révèle le moyen le plus efficace pour réaliser des éphémérides de satellites lointains. Pour la mission Galileo, Jacobson (2000 [95]) a réalisé des éphémérides numériques de Himalia, Elara, Lysithéa, Léda, Pasiphaé, Ananké, Carmé et Synopé à partir d'observations terrestres allant de la découverte de ces satellites à 1994. Rocher & Chapront

(1996 [169]) ont également réalisé des éphémérides numériques de Himalia, Elara, Pasiphaé et Sinopé qu'ils présentent sous forme de séries de Poisson, et leur attribuent une validité d'environ 150 ans, sur la période 1900-2050.

Enfin, F. Vachier (2004 [197]) a réalisé une théorie numérique des mouvements des satellites intérieurs Amalthée, Thébé, Métis et Adrastée.

les théories semi-analytiques

V. Lainey (2004 [111] et [112]) a réalisé une théorie semi-analytique des mouvements des satellites galiléens, dite théorie L1, puis L1-1. Le terme "semi-analytique" désigne ici une théorie élaborée uniquement avec des outils numériques, mais dont le résultat est donné sous forme de séries analytiques, obtenues grâce à une analyse en fréquence. Cette méthode est inspirée de celle utilisée par Duriez & Vienne (1997 [62]) pour l'élaboration d'éphémérides de Hypérion. Les équations sont établies sans développement des potentiels perturbateurs, et un filtrage est appliqué au cours de l'intégration des équations afin de séparer les courtes des longues périodes. Ceci permet ensuite de reconstruire la solution sous forme semi-analytique avec une très grande précision.

Un autre apport de la théorie de V. Lainey est la prise en compte des aplatissements des satellites galiléens, c'est-à-dire de leurs J_2 . Ces coefficients sont connus depuis la mission Galileo.

L'un des buts de ces théories est d'accéder à une détermination des accélérations séculaires des satellites, et ainsi aux effets de marée. Pour l'instant les accélérations séculaires n'ont pas été détectées de façon fiable, mais une détermination de l'accélération séculaire d'Io peut être espérée dans un avenir proche.

Chapitre 3

Les satellites de Saturne

3.1 La planète Saturne ♄

Deuxième planète du système solaire par la taille, Saturne est, comme Jupiter, connue depuis l'Antiquité car elle est visible à l'œil nu (sa magnitude est d'environ 0.5). La principale caractéristique de Saturne est la présence d'importants anneaux de planétésimaux dans le plan équatorial de la planète, s'étendant sur environ 400000 kilomètres. La présence de ces anneaux est connue depuis 1659¹, et depuis leur complexité se révèle de plus en plus à nous, d'abord par la découverte de séparations dans ces anneaux (notamment la découverte de la division de Cassini), ensuite par la découverte de satellites mêlés aux anneaux. Ces satellites permettent d'ailleurs d'expliquer la stabilité de certains de ces anneaux. Actuellement, 8 anneaux sont connus, les 7 plus importants étant désignés par des lettres de A à G, et le dernier, désigné provisoirement R/2004 S 1, ayant été découvert par Murray à partir d'images issues de la mission Cassini.

Outre ces anneaux, elle se distingue des autres planètes par une faible densité (environ 0.7), due à une atmosphère essentiellement constituée d'hydrogène, et un assez fort aplatissement, dû à la rotation rapide de la planète².

Outre l'hydrogène, l'atmosphère de Saturne contient de l'hélium, du méthane, de l'éthane et de l'ammoniac. Cette atmosphère recouvre un noyau rocheux de silicates et de fer entouré d'hydrogène métallique puis d'hydrogène liquide.

3.2 Propriétés physiques des satellites

On connaît actuellement 48 satellites de Saturne confirmés³ de Saturne.

¹ils ont en fait été observés dès 1610 par Galilée, mais le manque de résolution de l'instrument à longtemps laissé planer le mystère sur les deux "anses" observées

²810.7939024°/j d'après les recommandations de l'UAI 2000 [176], soit une période de rotation d'environ 10h40min

³2 satellites soupçonnés, localisés au niveau de l'anneau F, sont en cours de confirmation

masse (M_{\odot})	2.8581×10^{-4}	Pioneer & Voyager [32]
rayon polaire (km)	54364	UAI 2000 [176]
rayon équatorial (km)	60268	UAI 2000 [176]
rayon moyen (km)	58232	UAI 2000 [176]
demi-grand axe (ua)	9.5549091915	Simon et al. 1994 [181]
excentricité	$5.55481426 \times 10^{-2}$	Simon et al. 1994 [181]
inclinaison	$2^{\circ}.48887878$	Simon et al. 1994 [181]
J_2	1.6298×10^{-2}	Pioneer & Voyager [32]
J_4	-9.59×10^{-4}	Pioneer & Voyager [32]
J_6	9.5×10^{-5}	TASS 1.6 [203]

TAB. 3.1 – Propriétés physiques de Saturne. Les harmoniques zonaux J_i ont été déterminés par Campbell & Anderson [32] et Vienne (TASS1.6 [203]) avec la valeur de 60330km pour le rayon équatorial de Saturne. Dans les calculs, c’est cette dernière valeur de rayon équatorial que j’ai utilisée, afin de conserver une certaine cohérence dans les valeurs numériques.

Nom	Distance à Saturne ($\times 10^3 km$)	largeur ($\times 10^3 km$)
Anneau D	67 - 74.5	7.5
Anneau C	74.5 - 92	17.5
Trouée de Colombo	77.8	0.1
Trouée de Maxwell	87.500	0.27
Anneau B	92 - 117.500	25.5
Division de Cassini	117.5 - 122.2	4.7
Trouée de Huygens	117.68	0.3
Anneau A	122.2 - 136.8	14.6
Division d’Encke	133.57	0.325
Trouée de Keeler	136.53	0.035
Anneau R/2004 S 1	137.63	?
Anneau F	140.21	0.03 - 0.5
Anneau G	165.8 - 173.8	8
Anneau E	180. - 480.	300.

TAB. 3.2 – Quelques caractéristiques du système des anneaux de Saturne et de leurs divisions.

	Mimas	Encelade	Téthys	Dioné
Masse (M_{h})	6.34×10^{-8}	6.9×10^{-8}	1.06×10^{-6}	1.963×10^{-6}
a (km)	184735.9	237413.3	294171.5	377024.3
e	0.01 – 0.02	4.8×10^{-3}	$< 10^{-3}$	2.2×10^{-3}
γ	0.009 – 0.014	1.3×10^{-4}	0.006 – 0.009	1.5×10^{-4}
R (km)	198.6	249.4	529.8	560
	Rhéa	Titan	Hypérion	Japet
Masse (M_{h})	4.32×10^{-6}	2.36638×10^{-4}	2.63×10^{-8}	2.79×10^{-8}
a (km)	526793.0	1221728.7	1482337.1	3559387.7
e	9.5×10^{-4}	2.89×10^{-2}	0.1	2.9×10^{-2}
γ	3×10^{-3}	0.004 – 0.007	$0 - 10^{-2}$	0.1 – 0.15
R (km)	764	2575	133	718

TAB. 3.3 – Propriétés physiques et dynamiques des principaux satellites de Saturne. Les masses sont issues de TASS1.6 (Vienne & Duriez 1995 [203]) sauf celle de Titan issue des données des sondes Pioneer et Voyager (Campbell & Anderson 1989 [32]) et celle de Hypérion issue de Dobrovolskis & Lissauer (2004 [51]). Les demi-grands axes, excentricités et inclinaisons viennent de TASS1.6 ou 1.7 (pour Hypérion). Les rayons des satellites sont les rayons moyens recommand es par l’UAI en 2000 (2002 [176]). Il est à noter que 4 de ces satellites (Mimas, Encelade, Téthys et Hypérion) ont des formes plus ellipsoïdales que sphériques, ainsi l’UAI donne pour ces satellites, outre un rayon moyen, un rayon polaire et 2 rayons équatoriaux, l’un selon la direction de l’orbite et l’autre en direction de Saturne.

3.2.1 Les principaux satellites

J’appelle ici "principaux satellites" S-1 Mimas, S-2 Encelade, S-3 Téthys, S-4 Dioné, S-5 Rhéa, S-6 Titan, S-7 Hypérion et S-8 Japet. Ces satellites ont été découverts entre 1655 et 1848, leur magnitude visuelle est comprise entre 8.3 (pour Titan) et 12.9 (pour Mimas).

Ces satellites sont essentiellement des petits corps constitu es de glace et de roche, à l’exception de Titan. Le cas d’Encelade est intéressant à signaler du fait d’un volcanisme de glace à sa surface (cf. par exemple Poirier et al. 1983 [162] ou encore Kargel & Pozio 1996 [103]). De plus, une grande indétermination existe sur la masse d’Encelade, masse qui donnerait des résultats sur la composition de ce satellite via sa densité. Le meilleur moyen de déterminer la masse d’Encelade par les éphémérides est d’utiliser l’amplitude de libration de l’argument $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$ (résonance avec Dioné), mais cette libration a une amplitude trop faible pour donner une détermination fiable de la masse. En fait, TASS1.6 donne pour Encelade une densité de $0.6g/cm^3$, TASS1.5 et Dermott & Thomas [46] $1g/cm^3$, Harper & Taylor [85] et Dourneau [54] $1.9g/cm^3$. Cette indétermination sera bientôt levée avec les données issues des survols d’Encelade par Cassini. Les premiers résultats semblent converger vers une densité de $1.606g/cm^3$ (Jacobson 2005 [98]), mais ils demandent encore à être confirm es.

Titan est un cas très particulier parmi les satellites de Saturne : il est si massif qu’il a une atmosphère. Cette atmosphère a la particularité d’être riche en méthane (Kuiper 1944 [109]) et en diazote, or l’association de ces 2 compos es dans la haute atmosphère de Titan conduit à la synthèse de molécules organiques complexes d’intérêt exobiologique (cf. par

satellite	position	rayon (km)	découverte
S-12 Hélène	L_4 Dioné	16 (UAI 2000 [176])	1980 [126]
S-13 Télésto	L_4 Téthys	11 (UAI 2000 [176])	1981 [175] [117] [200]
S-14 Calypso	L_5 Téthys	9.5 (UAI 2000 [176])	1981 [175] [117] [200]
S-34 Polydeuces	L_5 Dioné	13	2004 [163]

TAB. 3.4 – Les lagrangiens dans le système de Saturne. Hélène, Télésto ont été découverts par des observateurs terrestres, Hélène au Pic du Midi par Lecacheux et al. [126], tandis que Télésto et Calypso ont été observés par plusieurs équipes américaines et françaises avant d’être clairement identifiés. Polydeuces a été découvert grâce à la mission Cassini (Porco et al. 2004 [163]).

exemple Raulin 1998 [167]). De telles réactions sont consommatrices de méthane, on peut donc penser qu’il existe un mécanisme d’enrichissement de l’atmosphère en méthane, par exemple par le biais d’un volcanisme. Un tel volcanisme implique une différenciation du satellite.

Titan a fait l’objet le 14 janvier 2005 de l’atterrissage du module Huyghens de l’ESA, qui était parti de la Terre amarré à Cassini. La mission Huyghens a été un succès total car le module est arrivé en bon état sur Titan et a continué à émettre des données plus d’une heure après avoir atteint la surface. Ces données sont actuellement en cours d’analyse.

3.2.2 Les lagrangiens

Un corps lagrangien est un corps coorbital d’un autre corps C bien plus massif, en équilibre autour d’un point de Lagrange L_4 ou L_5 . ces points sont des points d’équilibre stable, c’est-à-dire situés, dans un repère tournant avec C, à 60° respectivement en avant et en arrière de C. S-3 Téthys et S-4 Dioné ont tous deux des satellites lagrangiens à leurs points de Lagrange L_4 et L_5 . Leurs caractéristiques sont rassemblées Tab.3.4.

3.2.3 Les satellites intérieurs aux anneaux

La complexité du système d’anneaux de Saturne tient notamment à la présence en son sein de petits satellites qui entretiennent cette structure.

Atlas, Pandore et Prométhée ont été découverts par les sondes Voyager. Pandore et Prométhée se situent de part et d’autre de l’anneau F et participent probablement au mécanisme de confinement de cet anneau, on les appelle alors satellites "bergers". De même, Atlas se trouve près du bord extérieur de l’anneau A, et pourrait être responsable de la netteté du bord de cet anneau. Les orbites de ces satellites ont des durées de vie assez faibles (de l’ordre de 20 millions d’années, dix fois plus en cas de capture en résonance), et ils pourraient être ainsi un réservoir de matière pour les anneaux. Par exemple, il se peut que Pandore et Prométhée finissent par se désintégrer et que leur matière serve à enrichir l’anneau (Poulet & Sicardy 2001 [164]). La sonde Cassini a récemment trouvé un autre berger de l’anneau F : S/2004 S 3, situé près du bord extérieur de l’anneau.

Pan a été découvert par Showalter et al. en 1991 [178] en analysant des images de Voyager 2, tandis que S/2005 S 1 est apparu pour la première fois sur des images de la sonde Cassini.

satellite	a (km)	rayon (km)	découverte
S-10 Janus	151470	88.8 [176]	1966 [52]
S-11 Épiméthée	151420	59.5 [176]	1980
S-15 Atlas	137700	16[176]	1980
S-16 Prométhée	139353	50.1 [176]	1980
S-17 Pandore	141700	41.9 [176]	1980
S-18 Pan	133600	10 [176]	1991 [178]
S/2004 S 3	140580	≈ 5	2004
S/2005 S 1	136505	≈ 7	2005

TAB. 3.5 – Les satellites intérieurs aux anneaux. Les rayons de Janus, Épiméthée, Atlas, Pandore, Prométhée, Pandore et Pan sont issus des recommandations de l’UAI [176], et ceux des 2 derniers satellites du site Internet de la NASA.

Ces 2 satellites présentent la particularité d’être situés dans des trouées, c’est-à-dire sur des orbites mêlées aux anneaux, mais dans des lacunes. Leur influence gravitationnelle pourrait être responsable de mécanismes d’exclusion, ainsi Pan semble responsable de la division d’Encke et S/2005 S 1 de la trouée de Keeler. Aucun satellite n’a pour l’instant été détecté dans la division de Cassini, mais cette division pourrait être due à l’influence gravitationnelle de Mimas (cf. Schwartz 1981 [174]), par le biais d’une résonance 2 : 1.

Janus et Épiméthée ne sont pas des satellites bergers, mais ils présentent la particularité d’être coorbitaux. Janus a été découvert en 1966 par A.Dollfus [52] et il s’est avéré que son orbite était difficile à déterminer. Les sondes Voyager ont révélé 15 ans plus tard la présence d’Épiméthée, satellite coorbital de Janus. La difficulté de comprendre l’orbite de Janus vient de sa confusion avec Épiméthée lors d’observations. Dans le repère tournant avec le moyen mouvement de ces 2 satellites, Janus présente une faible libration tandis que l’orbite d’Épiméthée est en fer à cheval (cf. Fig.3.1). Les amplitudes de ces 2 mouvements ont permis à Yoder et al. (1989 [211]) d’établir le rapport des masses de ces 2 satellites : Janus est environ 3.61 fois plus massif qu’Épiméthée.

3.2.4 Les satellites lointains

Le principal satellite lointain de Saturne est Phoebé, découvert en 1898 par Pickering. Il orbite à presque 13 millions de kilomètres de Saturne et a la particularité de présenter une orbite rétrograde, c’est-à-dire que son inclinaison dépasse 90° ⁴. Aucun nouveau satellite lointain n’a été découvert pendant plus d’un siècle. Depuis 2000, la recherche systématique de satellites avec de l’imagerie à grand champ a permis de découvrir suffisamment de corps (cf. par exemple Gladman et al. 2001 [76]) pour pouvoir les classer en 3 groupes : les Norses, les Inuits et les Gaulois.

- Les Norses sont les satellites ayant une orbite rétrograde, comme Phoebé. On peut citer : S-9 Phoebé, S-27 Skathi, S-31 Narvi, S-25 Mundilfari, S-23 Suttungr, S-30 Thrymr, S-19 Ymir ainsi que d’autres satellites qui n’ont pas encore de dénomination définitive.
- Les Inuits ont des inclinaisons comprises entre 40° et 50° , on compte parmi eux S-24 Kiviuq, S-22 Ijiraq, S-20 Paaliaq ou encore S-29 Siarnaq.

⁴en fait elle est de 173.73°

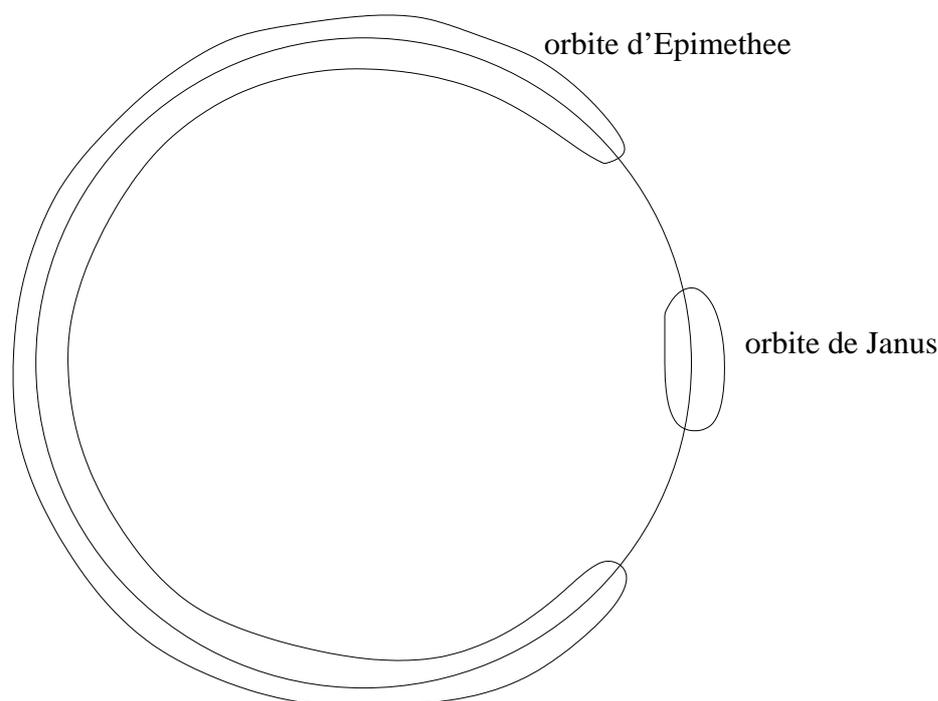


FIG. 3.1 – Orbites de Janus et Épiméthée dans un repère tournant, de spin le moyen mouvement de Janus et Épiméthée.

- Les Gaulois ont des inclinaisons inférieures à 40° , on peut citer parmi eux : S-26 Albiorix, S-28 Erriapo et S-21 Tarvos.

Tous ces corps ont un rayon de l'ordre de quelques kilomètres et ont très probablement été capturés, comme le suggèrent leurs inclinaisons.

3.3 La dynamique du système

3.3.1 Les perturbations mutuelles

Les perturbations mutuelles des principaux satellites de Saturne sont très différentes de celles des satellites galiléens, comme le montre la Table 3.6. En effet, les dynamiques de S-1 Mimas à S-4 Dioné sont perturbées presque uniquement par l'aplatissement de Saturne. En fait, il faut tenir compte également des résonances Mimas-Téthys et Encelade-Dioné, qui n'apparaissent pas dans la table, pour décrire la dynamique avec une précision minimale. Néanmoins, il résulte de cette prépondérance de l'influence de l'aplatissement sur les précessions séculaires que les péri-centres et nœuds ascendants peuvent être assimilés aux éléments propres pour ces 4 premiers satellites.

On se rend compte également que les perturbations mutuelles sont significatives pour le couple Rhéa-Titan. Ceci se traduit d'ailleurs dans les éphémérides par une libration de l'argument $\varpi_5 - \varpi_6$. Cette libration n'est pas due à une résonance, mais à la prépondérance, dans la solution de $z_5 = e_5 \exp(\sqrt{-1}\varpi_5)$, de la fréquence propre associée à la précession du péri-centre de Titan. De plus, pour Titan, les perturbations solaires sont significatives.

À partir de Hypérion, les effets de l'aplatissement ne sont plus prépondérants et deviennent une simple perturbation parmi d'autres. Hypérion est fortement perturbé par les perturbations séculaires de Titan (96%). À ces perturbations séculaires il faut ajouter les effets de la résonance d'argument $3\lambda_6 - 4\lambda_7 + \varpi_7$ qui notamment force l'excentricité de Hypérion à une valeur élevée, de l'ordre de 0.1.

Enfin, pour Japet et Phoebé, les perturbations solaires sont dominantes, au point de rendre les autres perturbations négligeables pour Phoebé, ceci est dû à son très important demi-grand axe. On peut également noter que Phoebé n'influe pratiquement pas sur la dynamique des autres satellites.

satellites	J_2	S-1	S-2	S-3	S-4	S-5	S-6	S-7	S-8	S-9	Soleil
S-1 Mimas	99.931		0.0056	0.0198	0.0114	0.0070	0.0251	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	2×10^{-4}
S-2 Encelade	99.608	0.0109		0.1998	0.0613	0.0291	0.0898	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	8×10^{-4}
S-3 Téthys	99.175	0.0047	0.0246		0.4103	0.1117	0.2712	$< 10^{-4}$	10^{-4}	$< 10^{-4}$	0.0022
S-4 Dioné	97.798	0.0030	0.0084	0.4584		0.7316	0.9922	10^{-4}	4×10^{-4}	$< 10^{-4}$	0.0076
S-5 Rhéa	92.841	0.0022	0.0047	0.1467	0.8593		6.1057	4×10^{-4}	0.0023	$< 10^{-4}$	0.0382
S-6 Titan	95.234	0.0018	0.0034	0.0828	0.2713	1.4213		0.1789	0.1896	$< 10^{-4}$	2.6172
S-7 Hypérion	3.654	10^{-4}	10^{-4}	0.0030	0.0097	0.0475	96.0022		0.0214	$< 10^{-4}$	0.2616
S-8 Japet	9.463	2×10^{-4}	3×10^{-4}	0.0075	0.0228	0.0999	35.6378	0.0075		$< 10^{-4}$	54.7608
S-9 Phoebé	0.028	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	10^{-4}	3×10^{-4}	0.0841	$< 10^{-4}$	0.0107		99.8767

TAB. 3.6 – Comparaison, en %, des contributions des différentes perturbations sur les vitesses de précession des péricentres des différents satellites de Saturne, de la même façon que Tab.2.6.

3.3.2 Les résonances dans les principaux satellites

Il y a, parmi les mouvements des 8 principaux satellites de Saturne, 3 résonances d'orbites : la résonance 4 : 2 entre Mimas et Téthys, la résonance 2 : 1 entre Encelade et Dioné, et la résonance 4 : 3 entre Titan et Hypériorion.

La résonance 4 : 2 entre Mimas et Téthys se caractérise essentiellement par une libration d'amplitude 95° et de période 70 ans de l'argument $\theta = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \Omega_1 + \Omega_3$ autour de 0° . Quant à la résonance entre Encelade et Dioné, elle fait apparaître une libration de faible amplitude et de période 11 ans de l'angle $\theta = 2\lambda_4 - \lambda_2 - \varpi_2$. La résonance 4 : 3 entre Titan et Hypériorion est un cas assez particulier, tout d'abord du fait de la grande amplitude de libration de l'argument $4\lambda_7 - 3\lambda_6 - \varpi_7$ autour de 180° , ensuite du fait des excentricités assez fortes des orbites de ces satellites (0.029 pour Titan, 0.1 pour Hypériorion), de leurs inclinaisons par rapport au plan des anneaux, et enfin de leur éloignement de Saturne, qui impose de tenir compte des perturbations solaires notamment pour les termes à longue période (cf. Vienne 1991 [201]).

3.3.3 Les éphémérides

Les théoriciens de la mécanique céleste se sont en priorité intéressés aux premiers satellites de Saturne (généralement au moins jusque Titan pour sa grande taille et pour la difficulté que représente le suivant, Hypériorion, parfois jusque Phoebé, car notre connaissance des satellites de Saturne y était limitée entre 1898 et 1966). La présence de résonances a longtemps incité à étudier les satellites par couple. Le premier à entamer un tel travail fut H. Struve en 1898 pour le couple Mimas-Téthys, travaux complétés dans les années 1930 par G. Struve qui a aussi travaillé sur le couple Encelade-Dioné. Dans les années 50, Y.Kozai (1955 [107]) a ajusté de nouvelles observations et a également travaillé sur les mouvements de Rhéa et Titan. M.Rapaport (1973 [166]) a ensuite amélioré les résidus trouvés par G.Struve en tenant compte de l'aplatissement de Saturne et en utilisant une nouvelle méthode de résolution analytique des équations. G. Dourneau (1987 [54]) a ensuite amélioré les théories dynamiques existantes en utilisant de nouvelles observations pour en ajuster les paramètres. De son côté, Sinclair a élaboré une théorie de Titan (notamment) qui était toujours celle utilisée au début des années 1990 (1977 [183]). Enfin, Harper & Taylor (1993 [85]) ont réajusté la théorie de Dourneau.

Les différentes théories évoquées ci-dessus sont toutes basées sur le principe de séparation par couple de satellites, ce qui présentait tout d'abord une difficulté d'unification. En effet, les systèmes de coordonnées utilisés pour traiter chaque couple n'étaient pas nécessairement les mêmes, de plus les perturbations apportées par les satellites sur ceux avec qui ils n'étaient pas en résonance étaient souvent négligées, ce qui avait pour conséquence une précision au mieux de 1400 km sur les positions des satellites, 1400 km à comparer à 200 km pour les satellites galiléens de Jupiter et 100 km pour les satellites d'Uranus. On pouvait alors difficilement se contenter d'une telle précision, en particulier dans l'optique de la mission Cassini.

Pour cette raison a été développée la théorie TASS (Théorie Analytique des Satellites de Saturne) qui utilise une nouvelle méthode analytique, la théorie générale planétaire, construite par Duriez (1979 [58]) et Laskar (1984 [118]), qui considère le système des satellites de Saturne dans son ensemble et qui utilise les variables elliptiques saturnocentriques.

La version actuelle de TASS est TASS1.7, cette théorie décrit les mouvements des satellites S-1 à S-8 (Mimas à Japet), elle comprend TASS1.6 [203] à laquelle a été ajoutée

séparément la théorie dynamique de Hypérion [62] du fait de sa complexité, notamment de la difficulté à séparer les termes à courte période des termes à longue période. TASS1.7 dépend de 61 paramètres : la masse de Saturne, les masses des 7 satellites qui interviennent dans TASS1.6, les coefficients d'aplatissement de Saturne J_2 , J_4 et J_6 , l'inclinaison et le nœud du plan équatorial de Saturne sur l'écliptique J2000, et 6 conditions initiales pour chaque satellite.

La construction de TASS passe par les étapes suivantes :

1. Séparation analytique entre les termes à longue période et les termes à courte période, chaque variable x est écrite sous la forme $x_0 + \Delta x$ où x_0 est la partie critique (ou à longue période) et Δx la variable à courte période.
2. Construction analytique du système critique à l'ordre 2 des masses et à l'ordre 3 en J_2 avec une troncature éliminant les termes qui, évalués numériquement, ne dépassent pas 1 km au bout de 100 ans.
3. Intégration analytique terme à terme de la partie à courtes périodes, la solution obtenue dépendant explicitement de la partie critique.
4. Intégration numérique du système critique.
5. Analyse en fréquence des séries temporelles données par les intégrations numériques.
6. Identification des fréquences obtenues sous forme de combinaisons linéaires entières des fréquences fondamentales, ce qui permet de représenter le résultat des intégrations numériques sous la forme de sommes finies de termes périodiques à longues périodes.
7. Variation des conditions initiales de l'intégration numérique au voisinage de valeurs nominales. Les conditions initiales sont obtenues à partir du plus grand nombre possible d'observations, notamment le catalogue de plus de 51000 observations effectuées entre 1874 et 1989 publié par Strugnell et Taylor [190] et les 14 coordonnées différentielles issues de phénomènes mutuels de 1980 et réduites par K.Aksnes (1984 [2]).
8. Report de la solution à longues périodes dans les expressions analytiques obtenues pour les termes à courtes périodes.

Il est finalement à noter que la précision interne obtenue par TASS est de quelques dizaines de kilomètres sur 100 ans sauf pour Hypérion et Japet où elle peut être de 200 km sur 100 ans. Pour Hypérion, les écarts semblent principalement venir des termes à courte période alors que pour Japet ils viennent probablement d'une modélisation insuffisante des perturbations solaires.

La théorie la plus récente des mouvements des principaux satellites de Saturne a été publiée par R. Jacobson (2004 [97]). Il s'agit d'une théorie numérique utilisant des observations datant d'entre 1966 et 2003, avec notamment des observations des phénomènes mutuels de 1995 (Noyelles et al. 2003 [152]), des observations du Hubble Space Telescope (French et al. 2003 [69]), ainsi que des observations issues des précédentes missions spatiales. Cette théorie donne des éphémérides des satellites S-1 à S-9 (Phoebé) ainsi que des lagrangiens Héléne, Télésto et Calypso.

Des éphémérides des satellites lagrangiens Héléne, Télésto et Calypso ont également été élaborées par P. Oberti (cf. par exemple Oberti & Vienne 2003 [154] pour la dernière version de ce travail).

Enfin, des éphémérides numériques des mouvements de Phoebé ont été élaborées par notamment Bec-Borsenberger & Rocher (1982 [19]) qui tiennent compte des perturbations de Titan, du Soleil et de Jupiter.

Chapitre 4

Effets dynamiques des forces de marée

Introduction

Les effets de marée sont la principale source de dissipation d'énergie dans les systèmes de satellites naturels. Cette dissipation a des conséquences aussi bien géophysiques¹ que dynamiques.

D'un point de vue géophysique, la dissipation d'énergie se traduit par un échauffement du corps qui entraîne la fusion d'éléments de sa structure interne. Cette fusion entraîne la migration d'éléments lourds, notamment de fer, vers le cœur du satellite. Il en résulte une structure en couches constituée notamment d'un noyau d'éléments lourds² et, sur certains satellites³, d'un océan situé sous la surface glacée, où une vie bactériologique pourrait exister.

D'un point de vue dynamique, l'énergie orbitale du satellite est inversement proportionnelle à son demi-grand axe. Ainsi, une dissipation d'énergie se traduit par une variation du demi-grand axe, donc une migration du satellite dans le système auquel il appartient. Cette migration permet au satellite de rencontrer des zones chaotiques, des résonances, ou même d'échapper à des résonances.

L'objet de ce chapitre est de comprendre l'influence des effets de marée sur la dynamique d'un satellite ainsi que leur lien avec les équations classiques souvent rencontrées dans la littérature.

4.1 Le principe des marées

Les forces de marées sont dues aux différences d'attraction gravitationnelle subies par les différents points d'un corps. Ces différences d'attraction déforment ce corps en un ellipsoïde ayant un bourrelet de marées orienté vers le corps perturbateur. Plus précisément, considérons le cas Io-Jupiter.

L'attraction de Io sur Jupiter crée sur Jupiter un bourrelet dans la direction d'Io. Mais,

¹Il s'agit d'un abus de langage, le préfixe "géo" désignant en principe la Terre...

²généralement riche en fer

³notamment J-2 Europe

en même temps, Jupiter tourne sur elle-même plus vite que tourne Io autour de Jupiter⁴, ce qui a pour conséquence que le bourrelet a tendance à être en avance sur la direction de Io. L'attraction gravitationnelle d'Io crée alors un couple de rappel sur Jupiter pour aligner le bourrelet dans la direction du satellite. Ce couple tend à ralentir la rotation de Jupiter, ce qui entraîne une augmentation du demi-grand axe d'Io par conservation du moment cinétique total du système⁵.

De même l'attraction gravitationnelle de Jupiter crée un bourrelet sur le satellite. Du fait de la synchronisation spin-orbite des principaux satellites de Jupiter et de Saturne, le bourrelet serait toujours dans la direction de la planète si l'orbite était circulaire. Mais les orbites étant excentriques, un couple de rappel est tout de même créé qui a cette fois tendance à accélérer la rotation du satellite. Dans ce cas le satellite se rapproche de la planète afin de conserver le moment cinétique total du système ainsi que la résonance spin-orbite 1 : 1.

Ainsi, les effets de marée résultent de la composition de 2 effets opposés, ce qui rend a priori incertain le sens de la migration de chaque satellite (se rapproche-t-il de la planète ou s'en éloigne-t-il ?). De plus, le couple de rappel exercé sur le bourrelet soulevé sur le satellite par la planète, en tendant à aligner le bourrelet sur la direction planète-satellite, tend à amortir l'excentricité, l'inclinaison et l'obliquité de ce dernier.

La quantification de ces différents effets dépend des matériaux impliqués, notamment de leur densité et leur temps de réponse à une sollicitation, donc de paramètres géophysiques, que nous allons aborder maintenant.

4.2 Les paramètres physiques impliqués

4.2.1 Le nombre de Love k_2

Le paramètre k_2 est le nombre de Love du second ordre, il peut se définir comme un paramètre qui caractérise la variation du potentiel gravitationnel d'un corps due à la redistribution de masse engendrée par une perturbation extérieure. Dans le cas d'un corps sphérique élastique homogène de rayon R , de densité ρ et de rigidité r , on a (cf. par exemple Munk 1960 [146]) :

$$k_2 = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{19r}{2g\rho R}} \quad (4.1)$$

où g est la gravité de surface. Si l'on veut être plus complet, on peut également utiliser les nombres de Love d'ordre supérieur. Cependant, ces nombres k_i sont très mal connus dans le cas des satellites à partir de l'ordre 3, notamment car ils caractérisent des effets de plus en plus petits à mesure que l'ordre augmente.

Il existe une définition dynamique du nombre de Love k_2 , donnée par Dermott [45] :

$$k_2 = 4\pi G\rho J_2 \dot{\zeta}^{-2} \quad (4.2)$$

⁴La rotation de Jupiter est d'environ 12 heures, et la révolution d'Io environ 40 heures. Io a la période de révolution la plus courte des 4 satellites galiléens.

⁵Ceci est vrai pour tout satellite situé au-delà de l'orbite synchrone. Dans le cas contraire, le bourrelet soulevé sur la planète tend à accélérer le satellite.

où ρ est la masse volumique du corps considéré et $\dot{\zeta}$ sa vitesse angulaire de rotation.

Lorsque ce corps est à l'équilibre hydrostatique, on a

$$J_2 = \frac{10}{3}c_{22} \quad (4.3)$$

où c_{22} est un coefficient sectoriel d'ordre 2. Ainsi la connaissance de J_2 peut permettre de déterminer aussi un k_2 séculaire noté k_{2s} grâce à la valeur de c_{22} , plus précisément :

$$k_{2s} = \frac{4GM}{\omega^2 R^3} c_{22} \quad (4.4)$$

Ce k_{2s} doit être plutôt vu comme un majorant de la valeur réelle de k_2 . Pour l'instant l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique n'a été vérifiée que pour Io par des mesures indépendantes de J_2 et de c_{22} par la sonde Galileo, et donnent $k_{2s} = 1.2924 \pm 0.0027$ (Anderson et al. [6]). Cette quantité diffère de k_2 car ne tient pas compte des variations périodiques de l'axe de rotation du corps considéré.

4.2.2 La fonction de dissipation Q

La quantité Q désigne la fonction (ou le facteur) de dissipation de la planète ou du satellite, elle caractérise la quantité d'énergie dissipée lors d'un cycle de marée lorsque le corps concerné est soumis à une excitation sinusoïdale d'amplitude E_0 :

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E} \quad (4.5)$$

où ΔE est l'énergie dissipée lors d'un cycle. Q est relativement difficile à évaluer même dans le cas des planètes, car elle est directement reliée aux échelles de temps d'évolution des orbites. Elle dépend a priori de la fréquence d'excitation.

4.3 Influence des marées sur les éléments elliptiques

4.3.1 Les formules de Kaula (1964)

On trouve souvent dans la littérature (voir par exemple Yoder [210] ou encore Malhotra [136]) les formules suivantes :

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 m_p} \left[1 + \frac{51}{4} e_i^2 \right] - 21 \frac{k_2^i n_i m_p R_i^5}{Q_i m_i a_i^4} e_i^2 \quad (4.6)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{57}{8} \frac{k_2^p n_i m_i}{Q_p m_p} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 e_i - \frac{21}{2} \frac{k_2^i n_i m_p}{Q_i m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 e_i \quad (4.7)$$

l'indice i se référant au satellite et p à la planète. R est le rayon du corps considéré, n son moyen mouvement moyen et m sa masse. Certains auteurs attribuent ces formules à Kaula (1964 [104]). En fait, Kaula a étudié les perturbations du mouvement de la Lune par les marées en donnant des formules très générales issues d'un développement en séries de Fourier de la fonction perturbatrice :

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} = & \sum_{lmpq} -\frac{2D_{lpq}}{a^{2l+2}} \sqrt{\frac{a}{G(m_p + m_s)}} (l - 2p + q) \\ & \left[k_l^p R_p^{2l+1} G m_p \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \sin(\epsilon_{lmpq}^p) \right. \\ & \left. + \frac{m_p}{m_s} k_l^i R_s^{2l+1} G m_s \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \sin(\epsilon_{lmpq}^i) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_i}{dt} = & \sum_{lmpq} -\frac{D_{lpq}}{ea^{2l+2}} \sqrt{\frac{1-e^2}{aG(m_p + m_s)}} [\sqrt{1-e^2}(l-2p+q) - (l-2p)] \\ & \left[k_l^p R_p^{2l+1} G m_p \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \sin(\epsilon_{lmpq}^p) \right. \\ & \left. + \frac{m_p}{m_s} k_l^i R_s^{2l+1} G m_s \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \sin(\epsilon_{lmpq}^i) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_i}{dt} = & \sum_{lmpq} -\frac{D_{lpq}}{a^{2l+2}} \sqrt{\frac{1}{aG(m_p + m_s)(1-e^2)}} \\ & \left[k_l^p R_p^{2l+1} G m_p \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \frac{(l-2p)\cos I - m}{\sin I} \sin(\epsilon_{lmpq}^p) \right. \\ & \left. + \frac{m_p}{m_s} k_l^i R_s^{2l+1} G m_s \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}^2 \frac{(l-2p)\cos \theta - m}{\sin \theta} \sin(\epsilon_{lmpq}^i) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

où les D_{lpq} sont des polynômes en excentricité et les F_{lmp} des polynômes en inclinaison dont l'expression est :

$$\begin{aligned} F_{lmp}(I) = & \sum_{t=0}^{\min(p,k)} \frac{(2l-2t)!}{t!(l-t)!(l-m-2t)!2^{2l-2t}} \sin^{l-m-2t} I \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s I \\ & \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où k est la partie entière de $\frac{l-m}{2}$. On a de plus

$$D_{lpq} = (X_{l-2p+q}^{-(l+1), (l-2p)})^2 \quad (4.12)$$

où X est un polynôme de Hansen (cf. par exemple Duriez [64]). θ désigne l'obliquité du satellite. Les angles ϵ_{lmpq} sont reliés à un facteur de dissipation (cf. 4.2.2) dépendant de la fréquence d'excitation. On peut écrire ainsi :

$$\sin \epsilon_{lmpq} = \text{sign}((l-2p+q)n - m\dot{\theta}) \frac{1}{Q_{lmpq}} \quad (4.13)$$

où n représente le moyen mouvement moyen du corps gravitant et $\dot{\theta}$ le spin⁶ du corps central.

⁶la rotation

4.3.2 Influence du bourrelet de la planète

Le caractère très général des équations 4.8 à 4.10 les rend inutilisables sans quelques simplifications qui tiennent compte de la difficulté de connaître certains paramètres liés à la structure interne des satellites. Tout d'abord, il faut limiter le développement en l à 2 car il est illusoire, du moins dans un avenir proche, de chercher à connaître les nombres de Love d'ordre supérieur ou égal à 3. Ensuite, la difficulté d'évaluer le facteur de dissipation suggère de le fixer à $\pm \frac{1}{Q_p}$ quelque soit la fréquence. On a ainsi :

$$\sin \epsilon_{lmpq}^p = \text{sign}((l - 2p + q - m)n + (l - 2p - m)\dot{\zeta}_p) \frac{1}{Q_p} \quad (4.14)$$

où ζ_p représente le spin du satellite.

Enfin, la difficulté d'évaluer les paramètres géophysiques proscrit tout développement à un ordre trop élevé en excentricité/inclinaison. On a ainsi, pour les contributions du bourrelet de la planète, en partant des équations de Kaula :

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 m_p} \left[1 + \frac{51}{4} e_i^2 + 9 e_i^2 \gamma_i^2 - \frac{49}{4} \gamma_i^4 + \frac{1065}{16} e_i^4 \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{57}{8} \frac{k_2^p n_i m_i}{Q_p m_p} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 e_i \quad (4.16)$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = -\frac{3}{4} \gamma_i \frac{k_2^p n_i m_i}{Q_p m_0} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 \quad (4.17)$$

4.3.3 Influence du bourrelet du satellite

On est a priori tenté d'utiliser les équations de Kaula en intervertissant la planète et le satellite et en tenant compte de la rotation synchrone qui impose

$$\sin \epsilon_{lmpq}^i = 0 \text{ si } m = l - 2p + q \quad (4.18)$$

mais les équations de Kaula ne s'appliquent pas pour les satellites. En effet, le couple de rappel subi par le satellite n'est pas dû qu'aux marées : certains satellites sont si petits qu'il n'est pas une bonne approximation de les considérer sphériques, mais plutôt comme des corps triaxiaux. Cette triaxialité induit un couple de rappel qui peut être plus important que celui dû aux marées dans le cas d'un satellite en rotation synchrone (ce qui est souvent le cas), le bourrelet dû aux marées n'ayant pas de déphasage par rapport à la planète au degré 0 en excentricité/inclinaison⁷. Les équations 4.8 à 4.10 ne s'appliquent donc qu'aux effets du bourrelet de la planète sur les paramètres orbitaux du satellite.

Pour pallier ce problème, Peale & Cassen (1978, [156]) sont partis de l'expression de Kaula du couple de marée d'un point de vue énergétique :

⁷en effet, dans le cas d'une orbite plane circulaire, le bourrelet du satellite sera toujours dirigé vers la planète du fait de la rotation synchrone

$$\dot{E}_{\text{marées}} = k_2^i \frac{Gm_p n}{a_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 \sum_{mpq} (2 - \delta_{0m}) \frac{(2-m)!}{(2+m)!} \left[F_{2mp}(\theta) \right]^2 \left[G_{2pq}(e) \right]^2 (2-2p+q-m) \sin \epsilon_{2mpq}^i \quad (4.19)$$

en limitant le développement à $l = 2$. θ représente ici l'obliquité du satellite. Dans le cas d'une faible excentricité et d'une faible obliquité on a, en partant de l'équation 4.19 :

$$\dot{E}_{\text{marées}} = \frac{3}{2} k_2^i \frac{Gm_p n_i}{a_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 \frac{1}{Q_i} (7e_i^2 + \sin^2 \theta) \quad (4.20)$$

et dans le cas d'une obliquité à 90° :

$$\dot{E}_{\text{marées}} = \frac{15}{8} k_2^i \frac{Gm_p n_i}{a_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 \frac{1}{Q_i} \quad (4.21)$$

En appelant E_{orb} l'énergie orbitale du satellite, on a

$$E_{orb} = -\frac{Gm_p m_i}{2a_i} \quad (4.22)$$

et

$$\dot{E}_{orb} = -\dot{E}_{\text{marées}} \quad (4.23)$$

car on considère les marées comme la seule source de dissipation. On obtient à partir de tout cela, dans le cas d'une faible obliquité :

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = -3 \frac{k_2^i m_p}{Q_i m_i} n_i \left(\frac{r_i}{a_i} \right)^5 (7e_i^2 + \sin^2 \theta) \quad (4.24)$$

et, dans le cas d'une obliquité de l'ordre de 90° :

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = -\frac{15}{4} \frac{k_2^i m_p}{Q_i m_i} n_i \left(\frac{r_i}{a_i} \right)^5 \quad (4.25)$$

Les variations des autres paramètres dynamiques s'obtiennent en utilisant la conservation du moment cinétique du satellite. En effet, la projection L_{orb}^z du moment cinétique du satellite sur la perpendiculaire au plan de son orbite est constante et vaut

$$L_{orb}^z = \sqrt{Gm_p a_i (1 - e_i^2)} m_i \cos i \quad (4.26)$$

De

$$\frac{dL_{orb}^z}{dt} = 0 \quad (4.27)$$

on tire

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{2e_i \dot{e}_i}{1 - e_i^2} + 2 \tan i \frac{di}{dt} \quad (4.28)$$

Si on choisit de ne pas tenir compte de $\frac{di}{dt}$ (généralement parce qu'on estime cette quantité petite et difficile à évaluer du fait de sa dépendance en l'obliquité, ou alors parce qu'on estime être dans un cas où l'étude de l'inclinaison a peu d'intérêt) alors on peut facilement exprimer \dot{e}_i à l'aide des équations 4.24 et 4.28 pour obtenir :

$$\dot{e}_i = -\frac{21}{2} \frac{k_2^i n_i m_p}{Q_i m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 e_i \quad (4.29)$$

4.3.4 Bilan

La difficulté d'obtenir la formule 4.29 impose une certaine prudence dans le développement des équations. Il doit ainsi être limité au degré 2 pour finalement obtenir les équations 4.6 et 4.7 dans le cas d'un satellite de faibles inclinaison et obliquité⁸ :

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 m_p} \left[1 + \frac{51}{4} e_i^2 \right] - 21 \frac{k_2^i n_i m_p R_i^5}{Q_i m_i a_i^4} e_i^2 \quad (4.30)$$

et

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{57}{8} \frac{k_2^p n_i m_i}{Q_p m_p} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 e_i - \frac{21}{2} \frac{k_2^i n_i m_p}{Q_i m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 e_i \quad (4.31)$$

Il serait illégitime d'utiliser l'équation 4.17 pour connaître l'effet des marées sur l'inclinaison car cela reviendrait à négliger l'effet du bourrelet du satellite par rapport à l'effet du bourrelet sur la planète. Cette approximation est dangereuse car elle est par exemple loin d'être vérifiée pour l'excentricité : du fait de la très forte prépondérance du coefficient $\frac{m_p}{m_i}$ par rapport à $\frac{m_i}{m_p}$ ⁹, le terme issu du bourrelet du satellite est prépondérant dans l'équation 4.31, donc les marées circularisent les orbites.

Dans l'équation 4.30, les effets des 2 bourrelets sont généralement du même ordre de grandeur, du fait que celui dû à la planète est d'ordre 0 en excentricité. Ainsi, il n'est pas évident a priori de déterminer si le satellite se rapproche ou pas de la planète. On peut même définir une excentricité limite e_l qui annule $\frac{da_i}{dt}$:

$$e_l = \sqrt{\frac{1}{7} \frac{k_2^p}{k_2} \frac{Q_i}{Q_p} \left(\frac{m_i}{m_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_i} \right)^5} \quad (4.32)$$

Conclusion

Ainsi, les équations 4.6 et 4.7 sont expliquées. Nous savons maintenant que nous pouvons les utiliser et comment les utiliser, c'est-à-dire en s'interdisant tout développement à un

⁸c'est le cas des principaux satellites de Jupiter et de Saturne

⁹le rapport entre ces 2 termes est de l'ordre de 10^{10} pour les satellites galiléens et est encore plus élevée pour les saturniens

degré supérieur¹⁰, qui n'aurait pas vraiment de sens physique du fait des approximations déjà réalisées pour obtenir les formules au degré 2.

La formulation de Kaula n'est pas la seule qui existe, par exemple Mignard (1980 [139]) donne des formules où la fonction de dissipation Q est remplacée par un potentiel retard qui exprime le temps de réponse du matériau pour déplacer le bourrelet de marée. On peut noter que, comme Kaula, Mignard a établi ses équations dans le cadre de l'étude du système Terre-Lune.

¹⁰qui serait en fait de deux degrés supérieur

Chapitre 5

Etat de l'art sur l'histoire des résonances

Introduction

Les systèmes de satellites naturels des planètes extérieures présentent la particularité de résonances impliquant 2 ou 3 satellites. Notamment, le système des satellites galiléens présente la résonance laplacienne d'argument $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ impliquant Io, Europe et Ganymède. De même, dans le système des principaux satellites de Saturne, existent 3 résonances impliquant chacune 2 satellites : Mimas-Téthys, Encelade-Dioné et Titan-Hypérion.

Ces différentes résonances ont été étudiées dans le passé, soit pour expliquer la capture en résonance, soit pour décrire l'évolution des orbites sous résonance, soit encore pour expliquer la structure interne de certains satellites. Ce chapitre résume et analyse ces différentes études sur les résonances dans les systèmes de satellites de Jupiter et de Saturne.

5.1 L'histoire de la résonance laplacienne

La résonance laplacienne intrigue depuis sa découverte par Laplace [116] car elle est un cas unique dans les systèmes de satellites naturels. Elle a connu un important regain d'intérêt depuis la découverte en 1979 du volcanisme d'Io par un raisonnement théorique de Peale, Cassen & Reynolds [157] confirmé quelques jours après la publication par Voyager I ¹ (cf. Morabito et al. 1979 [142]). En effet, l'étude de l'histoire dynamique du système des satellites galiléens est étroitement liée aux effets de marée. Non seulement ces effets dissipatifs permettent les variations séculaires des demi-grands axes, indispensables pour que le système atteigne des zones de résonances, mais aussi réciproquement, les résonances peuvent forcer l'excentricité d'un corps, et ainsi augmenter fortement la quantité d'énergie \dot{E} dissipée dans ce corps par le biais de la formule 4.20 qui peut se résumer ainsi :

$$\dot{E} \propto n^5 e^2 \tag{5.1}$$

¹Peale et. al avaient écrit "Consequences of a largely molten interior may be evident in pictures of Io's surface returned by Voyager I."

Ainsi, la connaissance de l'évolution temporelle de l'excentricité d'un satellite naturel peut en partie expliquer sa géophysique interne, notamment sa différenciation.

Dans le cas des satellites galiléens, Peale, Cassen & Reynolds [157] ont remarqué que l'excentricité actuelle d'Io, estimée à 4.11×10^{-3} et combinée à la relative proximité d'Io à Jupiter, engendre une forte dissipation d'énergie dans ce satellite. De plus, cette excentricité est proche de l'excentricité d'équilibre e_{eq} due au forçage par la libration de l'argument $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$ (ils estiment e_{eq} à 4.3×10^{-3}).

La découverte du volcanisme d'Io par Voyager I peu de temps après la publication de ce résultat théorique a montré la validité d'un tel raisonnement et a incité à l'étude de l'histoire dynamique du système des satellites galiléens, notamment pour tenter de comprendre pourquoi Ganymède et Callisto, similaires par bien des aspects (orbites relativement proches l'une de l'autre, compositions proches en glace et en silicates), sont très différents par leur différenciation.

5.1.1 Etablissement de la résonance laplacienne après des résonances 2 : 1

Suite à la découverte du volcanisme d'Io et de grandes structures rectilignes à la surface d'Europe par les sondes Voyager, plusieurs auteurs ont cherché dans la dynamique des satellites galiléens des explications à une histoire tectoniquement active.

Le premier fut Yoder (1979 [209]). Par un raisonnement utilisant les équations du mouvement des 3 premiers satellites (Callisto était exclu de son modèle) réduites aux perturbations séculaires indépendantes de tout argument, à celles dues aux arguments en libration, ainsi qu'aux dissipations de marée, il établit le scénario suivant :

1. Les 3 satellites orbitent autour de Jupiter loin de toute résonance. L'excentricité d'Io est très faible car amortie sous l'effet des marées.
2. Io migre jusqu'à entrer en résonance 2 : 1 avec Europe. Son excentricité est alors forcée jusqu'à atteindre la valeur $e_1 = \frac{1}{\sqrt{35D}}$ où D est le rapport des forces de marées sur Io et sur Jupiter, donc dépend des nombres de Love et des facteurs de dissipation.
3. Une fois la résonance 2 : 1 établie, le système migre, notamment sous l'effet d'un transfert d'énergie de Io vers Europe qui force l'accélération séculaire d'Europe, jusqu'à l'établissement de la résonance 2 : 1 entre Europe et Ganymède, donc aussi de la résonance laplacienne. Depuis les trois corps sont verrouillés dans une résonance qui force l'excentricité d'Io jusqu'à la valeur $e_1 = \frac{1}{\sqrt{13D}}$.

Dans ce cas, la capture des 3 satellites en résonance date de $1200 Q_{\mathcal{I}_4}$ ans, où $Q_{\mathcal{I}_4}$ est le facteur de dissipation dans Jupiter. L'âge de la résonance est estimé par l'amplitude de la libration de l'argument résonant $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$, évaluée alors à 0.066° (Lieske 1980 [133]). L'excentricité actuelle d'Io permet de contraindre la valeur de D à 4300 puis de $Q_{\mathcal{I}_4}$, estimé entre 2×10^5 et 2×10^6 . Avec ces hypothèses, la résonance laplacienne date d'entre 240 millions et 2.4 milliards d'années.

On peut remarquer que Yoder n'utilise aucun couplage séculaire entre la dynamique des différents satellites, ce qui lui permet d'assimiler les péricentres aux éléments propres. Avec cette approximation, les librations observées dans le système des satellites galiléens sont des résonances, ce qui autorise Yoder à parler de verrouillage en résonance 2 : 1 pour Io et

Europe, puis pour Europe et Ganymède. La mise en cause de cette approximation met en cause la totalité du scénario.

Greenberg (1981 [83]) conteste ce scénario en se basant sur les dissipations d'énergie dans Io observées à notre époque, par les sondes Voyager [142] et depuis la Terre lors d'observations infra-rouge de points chauds à sa surface (Sinton et al. 1980 [184]). Le scénario de Yoder donnant une estimation du rapport des dissipations d'énergie dans Io et Jupiter, Greenberg remarque que cette contrainte impose une dissipation dans Jupiter que nous ne pouvons expliquer, car trop forte. Par conséquent, il estime que, ou nous nous trompons dans les modèles de dissipation dans Jupiter, ou la dissipation dans Io est actuellement bien plus forte qu'elle l'a été dans le passé comme suggéré par Consolmagno (1981 [42]), ou le scénario de Yoder est mis en défaut. Il propose alors un scénario alternatif suggérant que dans le passé, les satellites étaient plus profondément dans les résonances qu'ils le sont actuellement, c'est-à-dire que les captures en résonance sont bien plus anciennes que le suggère Yoder et ont eu lieu avec des excentricités très faibles. Dans ce cas, les satellites sont en train de s'écarter de la résonance exacte, à mesure que leurs excentricités augmentent. Greenberg établit ce scénario à l'aide d'une théorie linéarisée valable avec des petites excentricités. Il confirme la présence d'un état d'équilibre lorsque l'excentricité d'Io atteint la valeur $e_1 = \frac{1}{\sqrt{13D}}$. Il précise que cet équilibre est stable. Cependant, ce scénario est mis en cause par Henrard (1983 [86]) qui détecte un comportement instable très près des résonances exactes. Ce comportement n'est pas visible avec une théorie linéarisée comme celle de Greenberg.

Yoder & Peale (1981 [210]) confirment le scénario de Yoder [209] à l'aide d'une étude plus complète permettant notamment le calcul des probabilités de capture dans les résonances 2 : 1 et l'étude de l'éventualité de captures dans d'autres résonances avant de rencontrer la résonance laplacienne. Ils évaluent à 90% la probabilité de capture dans la résonance laplacienne, cette valeur dépend notamment de D , donc de l'intensité de la dissipation. Ils estiment l'âge de la résonance laplacienne à $1600Q_4$. Ils étudient de plus les possibilités d'anciennes résonances de types $2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 + \varpi_i$ ($i=1,2$ ou 3) ou $3 : 1$ entre Io et Europe.

En posant $\nu_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2$ et $\nu_2 = \lambda_2 - 2\lambda_3$, une résonance de type $2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 + \varpi_i$ ($i=1,2$ ou 3) correspond à une commensurabilité de type $1 : 2$ entre ν_1 et ν_2 . Yoder & Peale considèrent qu'une telle résonance n'a pas eu d'effets significatifs et n'était pas stable si elle a existé. Quant aux résonances de type $3 : 1$ entre Io et Europe, ils restreignent leur étude aux résonances en inclinaison (car les inclinaisons varient très peu avec les marées, les probabilités de capture dans d'anciennes résonances en inclinaison sont ainsi plus facilement estimables que pour les résonances en excentricité) et concluent que si la zone des résonances $3 : 1$ a été traversée alors il y a eu au moins une capture en résonance en inclinaison. Ainsi, au moins une des deux inclinaisons (de Io ou d'Europe) aurait été forcée, ce qui est incompatible avec les valeurs actuelles de ces inclinaisons. Par conséquent, Yoder & Peale concluent que le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ a toujours été inférieur à 3.

Henrard (1983 [87]) confirme le scénario de Yoder & Peale par un mode de calcul plus précis des probabilités de capture.

Toutes ces méthodes sont analytiques, elles présentent l'inconvénient de nécessiter un certain nombre d'approximations, notamment les nœuds et péri-centres sont considérés comme des éléments propres (cf. Annexe B).

5.1.2 Traversées de résonances d'ordre 2 des masses

Dans les années 90, l'utilisation de méthodes numériques a permis l'élaboration de scénarii plus fiables car issus de modèles plus précis. Ainsi, Malhotra (1991 [136]) a effectué des simulations numériques à long terme de l'histoire dynamique des satellites galiléens. Dans son modèle, les variables sont relatives à Io, Europe et Ganymède. La solution de Callisto est forcée. L'inégalité de De Haerdtl n'est pas présente, mais les perturbations séculaires mutuelles sont prises en compte jusqu'au degré 2 en excentricité, y compris les termes d'argument $\varpi_i - \varpi_j$. Ceci a pour conséquence une réelle distinction entre coordonnées et éléments propres, en faisant par exemple apparaître un couplage entre les excentricités, ainsi les arguments en libration de type $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_1$ ne sont plus assimilés à des résonances.

Malhotra utilise les quantités ω_1 et ω_2 définies ainsi :

$$\omega_1 = n_1 - 2n_2$$

$$\omega_2 = n_2 - 2n_3$$

et exprime la résonance laplacienne sous la forme $\omega_1 = \omega_2$. Elle étudie l'éventualité d'une ancienne résonance $\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{1}{2}$. Elle trouve, avec une telle résonance, une possibilité de montée de e_3 (excentricité de Ganymède) jusqu'à 3×10^{-2} , soit 10 fois la valeur actuelle. Malheureusement, elle ne précise pas l'argument résonant, car l'égalité $\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{1}{2}$ donne l'argument $2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3$, qui ne respecte pas la règle de d'Alembert. L'argument résonant est donc de la forme $2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 + \varpi_i$.

Showman & Malhotra (1997 [179]) ont fait d'autres simulations numériques avec le modèle de Malhotra pour différentes conditions initiales. Ils ont trouvé des possibilités de résonances de type $\omega_1 - 2\omega_2$ ou $\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2$. Ces résonances peuvent forcer e_3 jusque 7×10^{-2} , et permettent ainsi de mieux expliquer la différenciation de Ganymède. Pour cela, Showman & Malhotra les jugent plus probables que la résonance envisagée par Malhotra [136]. Encore une fois, l'angle résonant n'est pas précisé sous une forme respectant la règle de d'Alembert mais les courbes d'évolution des 3 excentricités (cf. Fig.5.1) suggèrent sans équivoque que les arguments résonants sont $\lambda_1 - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 - \varpi_3$ (pour le cas $\omega_1 - 2\omega_2$) et $2\lambda_1 - 7\lambda_2 + 6\lambda_3 - \varpi_3$ (pour le cas $\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2$). En effet, sur ces courbes, e_3 augmente franchement tandis que l'amplitude d'oscillation de e_2 augmente, ceci est dû au couplage entre Europe et Ganymède. Il est à noter qu'ils introduisent dans leur modèle une augmentation récente et brutale de la dissipation dans Io, en faisant l'hypothèse que la dissipation actuelle est trop élevée pour être représentative de la dissipation responsable de l'évolution à long terme de la dynamique des satellites galiléens. Ce changement de dissipation peut rendre instable les anciennes résonances soupçonnées.

5.1.3 Formation de la résonance dans la nébuleuse proto-jovienne

Greenberg (1981 [83]) avait évoqué la possibilité d'une origine primordiale de la résonance laplacienne, partant du principe qu'une origine maréale de la résonance, selon le scénario de Yoder (1979 [209]), nécessitait une trop grande dissipation dans Jupiter. À l'époque était connu le modèle d'accrétion MMSN (minimum mass sub nebula), qui indiquait que les satellites galiléens s'étaient formés en même temps que Jupiter. Cependant, ce modèle

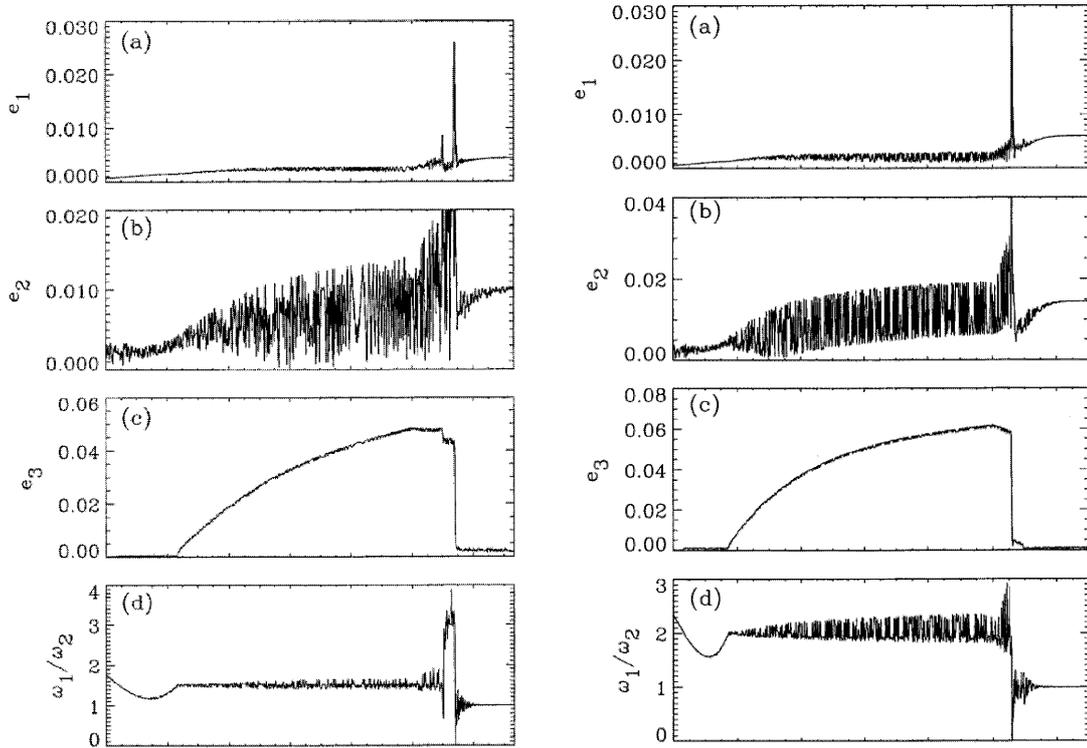


FIG. 5.1 – Les deux scénarii les plus probables de Showman & Malhotra [179], l'un impliquant la résonance $\omega_1 \approx \frac{3}{2}\omega_2$ (à gauche) et l'autre la résonance $\omega_1 \approx 2\omega_2$ (à droite). Les différentes courbes représentent l'évolution des paramètres orbitaux ainsi que du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ en fonction du temps. L'échelle de temps est $12000 Q^2$

implique des températures trop élevées et des accrétions trop rapides pour expliquer les actuelles propriétés physiques des satellites galiléens, notamment la faible différenciation de Callisto.

Canup & Ward (2002 [33]) proposent un autre modèle de formation des satellites galiléens, dans lequel les satellites commencent à s'accréter alors que l'accrétion de Jupiter se termine. Pendant qu'ils s'accrètent, les proto-satellites se rapprochent de Jupiter, d'autant plus rapidement qu'ils sont massifs, ce qui veut dire que Ganymède semble tomber, non seulement sur Jupiter, mais aussi sur Io et Europe, alors que Callisto reste en retrait, du fait de sa masse plus faible que celle de Ganymède. Peale & Lee (2002 [159]) utilisent ce modèle pour construire un scénario, à l'aide d'outils numériques, d'origine primordiale de la résonance laplacienne. Dans ce scénario s'établit d'abord une résonance 2 :1 entre Europe et Ganymède, puis Io est capturé pour former la résonance laplacienne. Cependant, dans cette étude, le problème de la stabilité de la résonance laplacienne, une fois le processus d'accrétion terminé, n'est pas traité.

5.1.4 Autres études

D'autres études de la dynamique des satellites galiléens existent, qui ne se focalisent pas sur la formation de la résonance laplacienne. Citons le travail de Musotto et al. (2002 [147])

sur la stabilité de la résonance laplacienne et celui de Tittlemore (1990 [194]) sur la traversée de la zone de résonances 3 : 1 entre Europe et Ganymède avant la formation de la résonance laplacienne.

Stabilité de la résonance laplacienne

Musotto et al. [147] ont testé la stabilité à long terme de la résonance laplacienne à l'aide d'intégrations numériques sur 100000 ans utilisant un filtre passe-bas pour éliminer les périodes inférieures à 1000 jours (les périodes des librations Io-Europe ou Europe-Ganymède sont toutes inférieures à 487 jours). Leur modèle n'inclut pas les marées. Leur conclusion est que la résonance laplacienne est stable sans dissipation de marée.

Avant la résonance laplacienne

Tittlemore [194] a étudié la possibilité d'une ancienne excentricité élevée de Ganymède due à la traversée de la zone chaotique 3 : 1 avec Europe, ceci pour expliquer l'actuelle différenciation de Ganymède. Pour cela, il a effectué des simulations numériques dans lesquelles aucune perturbation mutuelle séculaire n'est prise en compte, en considérant le problème plan. Ainsi, la zone de résonance 3 : 1 se caractérise par 3 arguments en excentricité $3\lambda_3 - \lambda_2 - 2\varpi_2$, $3\lambda_3 - \lambda_2 - \varpi_2 - \varpi_3$ et $3\lambda_3 - \lambda_2 - 2\varpi_3$. Avec ces approximations, Tittlemore considère les périodes comme des éléments propres. Il fait ensuite des simulations numériques à partir d'un hamiltonien de type pendule impliquant ces 3 arguments résonants. Seulement, dans son modèle, les périodes ne varient que sous l'effet de l'aplatissement de Jupiter, ce qui sous-évalue les vitesses de précession (cf. Tab.5.1).

	Tittlemore [194]	Lainey [110]
$\dot{\varpi}_2(\text{rad.j}^{-1})$	4.43×10^{-4}	6.78×10^{-4}
$\dot{\varpi}_3(\text{rad.j}^{-1})$	8.64×10^{-5}	1.27×10^{-4}

TAB. 5.1 – Vitesses de précession des périodes évalués par Tittlemore, comparés avec les taux de précession des éléments propres de la théorie L1.

Tittlemore trouve du chaos dû à la superposition de résonances (diffusion de Chirikov). Ce chaos est, selon lui, responsable d'une excentricité élevée de Ganymède (jusqu'à 0.07, pendant que l'excentricité d'Europe monte à 0.12). La différenciation de Ganymède est ainsi expliquée. Cependant, sa sous-évaluation des vitesses de précession des périodes sur-évalue les recouvrements de résonances. En effet, chacune des 3 résonances impliquées, écrites sous la forme $\lambda_2 - 3\lambda_3 + q_2\varpi_2 + q_3\varpi_3$, est centrée en $\alpha = 3 - \frac{q_2\dot{\varpi}_2 + q_3\dot{\varpi}_3}{n_3}$ où α est le rapport des demi-grands axes. Ainsi, 2 résonances consécutives ont leurs centres séparés de $\Delta\alpha = \frac{\dot{\varpi}_2 - \dot{\varpi}_3}{n_3}$. Avec $n_3 = 0.878132432119 \text{ rad.j}^{-1}$, le $\Delta\alpha$ réel (d'après les données de L1) vaut 6.27×10^{-4} et celui du modèle de Tittlemore 4.06×10^{-4} . On voit bien que Tittlemore sur-évalue le recouvrement des différentes résonances, donc le chaos. Par conséquent, ses conclusions sont peu fiables.

5.2 L'histoire des résonances dans le système de Saturne

5.2.1 Le cas Mimas-Téthys

La résonance Mimas-Téthys, d'argument $\phi = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \varpi_1 + \varpi_3$, est une résonance de degré 2 en inclinaison, ce qui constitue un cas unique dans le système solaire. L'argument ϕ libre autour de 0 avec une période de 70 ans et une amplitude de 95° . À ce titre, cette résonance a été l'objet d'un certain nombre de travaux depuis Allan (1969 [4]) à Champenois & Vienne (1998 [34], 1999 [35] et [36]).

La contribution d'Allan : les inclinaisons expliquées

Les travaux d'Allan, à défaut d'expliquer la capture dans une résonance en inclinaison, ont grandement fait avancer la compréhension des inclinaisons actuelles de Mimas et de Téthys, en décrivant l'évolution du système {Mimas-Téthys} depuis la capture.

Ces travaux se basent sur la triple hypothèse suivante :

1. Mimas et Téthys ont des orbites circulaires (les excentricités sont supposées négligeables). Cette hypothèse semblait alors une évidence dans le cas de Téthys où aucune excentricité n'avait été détectée. Par contre l'excentricité de Mimas, de valeur moyenne environ 0.015, n'est pas en soi négligeable. Cependant, cette hypothèse est sans doute justifiée par la suivante.
2. L'évolution du système est dominée par les termes d'argument l'argument résonant ϕ . Les autres termes sont considérés comme des termes à courte période et donc disparaissent après moyennisation. Notamment, les termes directement liés à l'excentricité de Mimas, donc avec le péricentre ϖ_1 dans l'expression de l'argument, sont considérés comme nuls.
3. Les inclinaisons de Mimas et de Téthys sont considérées comme proches (c'est-à-dire du même ordre de grandeur) tout au long de l'évolution en résonance, c'est-à-dire de la capture en résonance à nos jours.

Sous ces hypothèses, et en modélisant la résonance Mimas-Téthys à l'aide d'un pendule, Allan obtient l'évolution des inclinaisons i_1 et i_3 en fonction du demi-grand axe a à tout moment depuis la capture en résonance :

$$\langle \gamma_1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{4} \left((3 - 2 \cos i_1) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{d_1} - 1 \right)} \quad (5.2)$$

$$\langle \gamma_3 \rangle = \sqrt{\frac{1}{8} \left(1 - (4 \cos i_3 - 3) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{d_3} \right)} \quad (5.3)$$

avec

$$d_1 = \frac{m_3 H}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$d_3 = -\frac{2m_1 H}{4^{\frac{1}{3}}}$$

et

$$H = \frac{\frac{m_1}{2^{\frac{13}{3}}} + \frac{m_3}{4^{\frac{13}{3}}}}{4\left(\frac{m_1^2}{2^5} + \frac{m_3^2}{4^5}\right)}$$

a_0 désigne le demi-grand axe actuel de Mimas (à l'époque J2000 en fait). L'évolution de a en fonction du temps vient des effets de marées.

Il reste à connaître l'époque de la capture en résonance. Cette époque est connue en modélisant l'amplitude de la libration de l'argument résonant en fonction du temps à l'aide du modèle du pendule, et en considérant qu'au moment de la capture la libration a une amplitude de 180° .

Tous calculs faits, Allan estime que la capture a eu lieu lorsque a valait 99.217% de sa valeur actuelle, que i_1 et i_3 valaient alors respectivement 0.4156° et 1.0463° contre 1.5167° et 1.0927° à J2000 d'après les valeurs connues à l'époque, et que la capture en résonance a eu lieu il y a environ 223 millions d'années (en fait $223Q_{\text{h}}$, Allan prend pour Q_{h} la valeur de Goldreich (1965, [77]), soit 6.7×10^4). Depuis la capture, l'amplitude de la libration ϕ_m n'a fait que décroître et décroîtra encore dans le futur, alors que les inclinaisons continueront à croître (cf. Fig.5.2).

Il est à noter qu'avec des éphémérides (TASS 1.6 [203]) plus récentes et donc nettement améliorées par rapport à ce dont disposait Allan, Champenois (1998 [34]) trouve des inclinaisons avant capture $i_1 = 0.37^\circ$ et $i_3 = 1.037^\circ$.

La contribution de Sinclair : une première tentative d'explication de la capture

Les travaux d'Allan ont permis une avancée significative dans la compréhension des phénomènes résonants dans les systèmes de type planétaire. Notamment ils permettent d'expliquer les phénomènes de forçage d'inclinaisons et aussi d'excentricités, puisque le raisonnement utilisé peut être transposé pour les résonances en excentricités en utilisant les périodes en lieu et place des nœuds. Mais Allan ne parvient pas à expliquer le phénomène de capture en résonance. Néanmoins il a le mérite de suggérer que la capture résulte de l'interaction de plusieurs arguments résonants ou quasi-résonants².

Les travaux de Sinclair (1972 [182]) ont consisté à évaluer la probabilité de capture dans une résonance isolée. En fait, selon les configurations (voir cf. Chap. 7), lors de la traversée de la zone de résonance, la capture peut être certaine, probabiliste ou impossible. Lorsque la capture est probabiliste, l'incertitude sur la capture vient généralement de la méconnaissance de la phase de l'argument étudié au moment de la traversée de la résonance. Cette phase dépend en effet de termes à courte période, dont l'évaluation est incompatible avec des simulations numériques à long terme. Par conséquent, les phases sont considérées équiprobables, le calcul de la probabilité de capture repose sur cette hypothèse.

Comme Allan, Sinclair part du pendule, mais modélisé ainsi :

$$\ddot{\phi} = (K + qFt) \sin \phi + F \tag{5.4}$$

avec

²Il écrit en conclusion : "It is also possible that the nearly resonant terms could have assisted in the process".

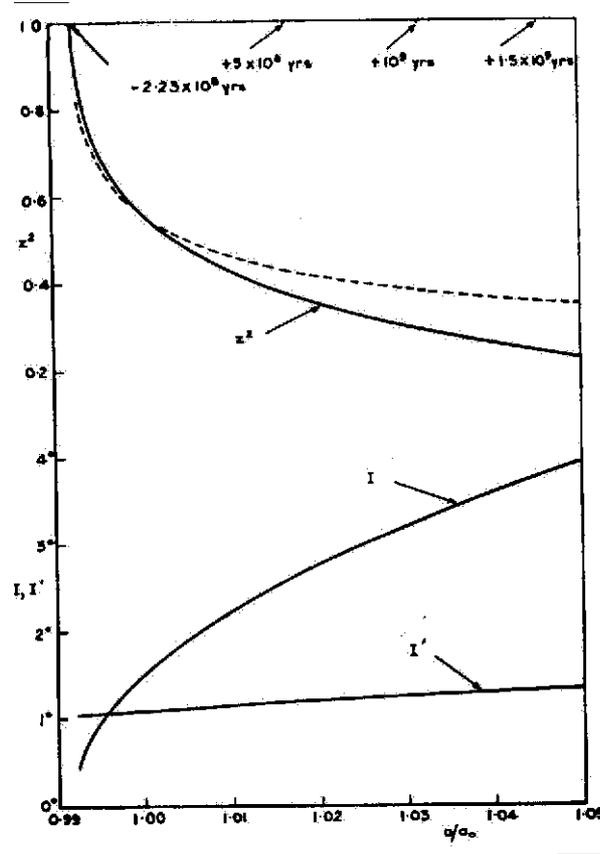


FIG. 5.2 – Variation des paramètres orbitaux sous l'effet de la résonance ϕ , issue de Allan [4]. L'époque actuelle correspond à $\frac{a}{a_0} = 1$. I désigne l'inclinaison de Mimas et I' celle de Téthys, on constate que ces 2 inclinaisons augmentent au cours de l'évolution en résonance mais beaucoup plus celle de Mimas, ceci est dû aux masses respectives des 2 satellites. La décroissance de z^2 est le signe d'une baisse de l'amplitude de la libration. Allan a tracé pour z^2 une courbe en pointillés en plus d'une courbe pleine afin de justifier qu'il néglige un terme de dissipation.

$$K = [12n_1^2\alpha m_3 + 48n_3^2m_1]f(\alpha)\gamma_1\gamma_3$$

et

$$q = -\frac{1}{4}\left(n_1\alpha m_3\frac{\gamma_1}{\gamma_3} + n_3m_1\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)f(\alpha)$$

F représentant la dispersion de marées. Le terme qFt dans l'équation du pendule entraîne une augmentation avec le temps du puits de potentiel associé à la résonance considérée, ou encore de la force de rappel du pendule, ce qui a pour conséquence la capture en résonance. En intégrant le pendule et en négligeant qFt on obtient

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = F\phi + K \cos \phi + E \quad (5.5)$$

E est ici une constante. L'équation (5.5) indique une variation de $\dot{\phi}^2$ à chaque cycle de libration, notamment une baisse de la vitesse lorsque ϕ diminue (F est supposé positif), de l'ordre de $\sqrt{8F\pi}$ à chaque cycle. Sinclair note v^2 la valeur de $\dot{\phi}^2$ en $\phi = \pi$ juste avant le changement de sens de circulation de ϕ , et u^2 la valeur de $\dot{\phi}^2$ juste avant une capture en résonance (qu'il assimile à une libration). En considérant équiprobables les valeurs de $\dot{\phi}^2$ au moment du dernier passage à la position d'équilibre instable π avant changement d'état (libration ou inversion du sens de circulation), alors la probabilité de capture P vaut :

$$P = \left(\frac{u}{v}\right)^2 \quad (5.6)$$

u et v sont calculées numériquement. Sinclair trouve une probabilité de capture de 4% pour la résonance d'argument ϕ et de 7% pour la résonance d'argument $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\delta\Omega_1$, résonance qui a été traversée avant la capture dans la résonance que nous connaissons actuellement. Il est à noter que Champenois [34] a retrouvé ces probabilités de capture en utilisant la formule analytique de Lemaître (1984 [129]) et les inclinaisons d'Allan [4] au moment de la capture.

Il était à l'époque difficile de dire si ces résultats étaient satisfaisants ou pas. En effet, il en résultait une explication possible pour la capture en résonance d'argument ϕ , mais avec l'arrière-goût amer d'une grande influence du hasard, puisque la capture n'était probable qu'à 4%.

La contribution de Champenois & Vienne : un phénomène chaotique

L'élaboration des éphémérides TASS par Vienne & Duriez dans les années 90 (cf. par exemple Vienne 1991 [201]), avec notamment la prise en compte de l'excentricité de Téthys, a mis en relief certains termes à longue période inconnus jusqu'alors, notamment un terme ν de période environ 200 ans, généré par les trois termes suivants :

$$\psi + \phi = 3\lambda_1 - 6\lambda_3 + 2\delta\Omega_1 + \varpi_3$$

$$\psi = \lambda_1 - 2\lambda_3 + \delta\Omega_1 - \delta\Omega_3 + \varpi_3$$

$$\psi - \phi = -\lambda_1 + 2\lambda_3 - 2\delta\Omega_3 + \varpi_3$$

Chacun de ces arguments est associé à une résonance chevauchant la résonance d'argument ϕ (cf. Fig.5.3). L'étude du système incluant ces 4 termes met donc en valeur un phénomène de diffusion chaotique de Chirikov (cf. les surfaces de section représentées Fig.5.4). De plus, la période de libration diminuant avec le temps (elle était infinie au moment de la capture, elle vaut environ 70 ans actuellement), elle a pu entrer en résonance avec ν , on parle dans ce cas de résonance secondaire.

Les simulations numériques réalisées par Champenois & Vienne [35] mettent en valeur 3 scénarii possibles, selon les conditions initiales.

1. Le premier scénario ne fait pas intervenir de résonance secondaire et ne fait pas d'hypothèse particulière sur l'actuelle excentricité de Téthys, c'est-à-dire qu'elle peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 0.001. L'apparition du chaos se traduit par des sauts

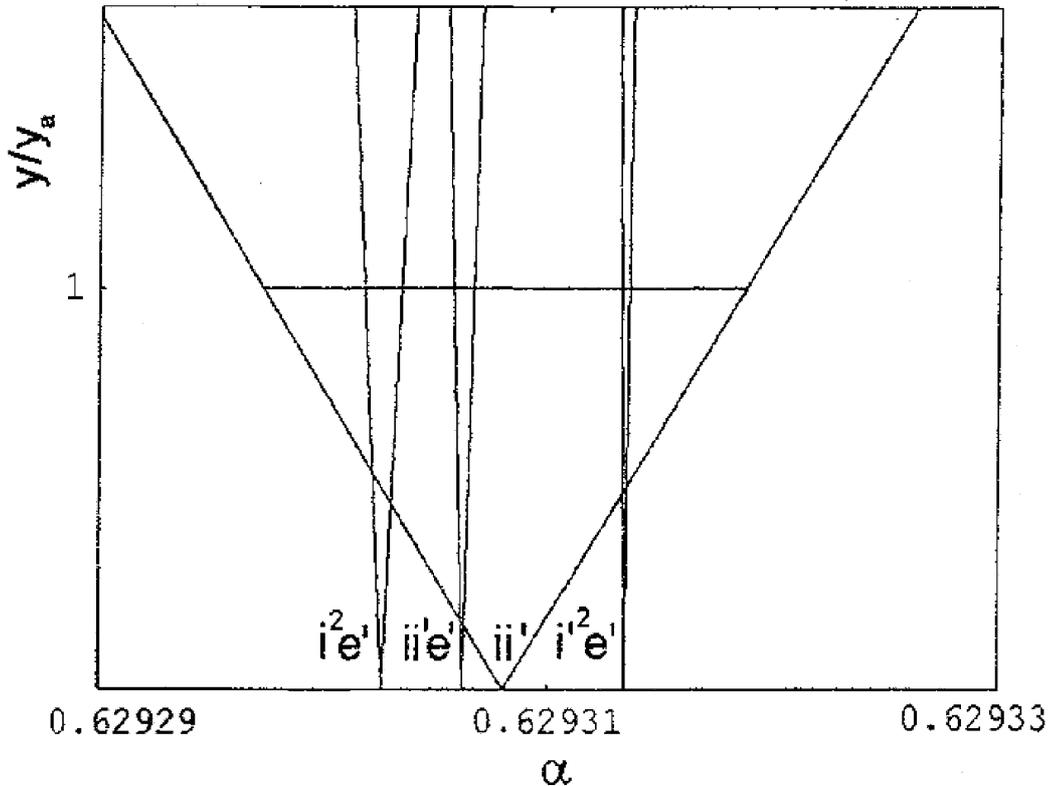


FIG. 5.3 – Localisation des résonances associées aux 4 arguments considérés, issue de Champenois & Vienne [36]. $ii'e'$ se rapporte à ψ , i^2e' à $\psi + \phi$, i^2e' à $\psi - \phi$ et ii' à ϕ .

dans la variation de l'amplitude de libration, sans quoi elle décroîtrait de façon monotone. L'introduction de l'excentricité de Téthys rajeunit la résonance jusqu'à 11% et autorise une capture à inclinaisons plus élevées. Notamment, l'inclinaison de Mimas au moment de la capture était d'autant plus élevée que l'excentricité actuelle de Téthys est élevée, elle a pu être comprise entre 0.45° et 0.70° (alors qu'Allan l'estimait à 0.4156°).

2. Le second scenario, obtenu en modifiant très légèrement le moyen mouvement moyen de Mimas et en fixant l'excentricité actuelle de Téthys à 0.001, fait apparaître la capture dans la résonance actuelle, puis une capture dans la résonance secondaire 1 : 2 avec la fréquence ν . Lors de l'évolution sous cette résonance secondaire, l'amplitude de libration a augmenté, puis a diminué une fois la résonance secondaire rompue. Dans ce scenario, la capture en résonance a eu lieu plus tôt que dans le premier, l'inclinaison de Mimas était alors d'environ 0.18° .
3. Le troisième scenario, obtenu avec des valeurs différentes des coefficients de marée, fait apparaître une capture dans la résonance secondaire 1 : 1, ainsi qu'une très faible inclinaison de Mimas au moment de la capture (de l'ordre de 0.03°).

Le résultat le plus spectaculaire de cette étude concerne la probabilité de capture. Cette probabilité a été calculée en s'inspirant de la formule de Sinclair (Eq. 5.6) réécrite ainsi :

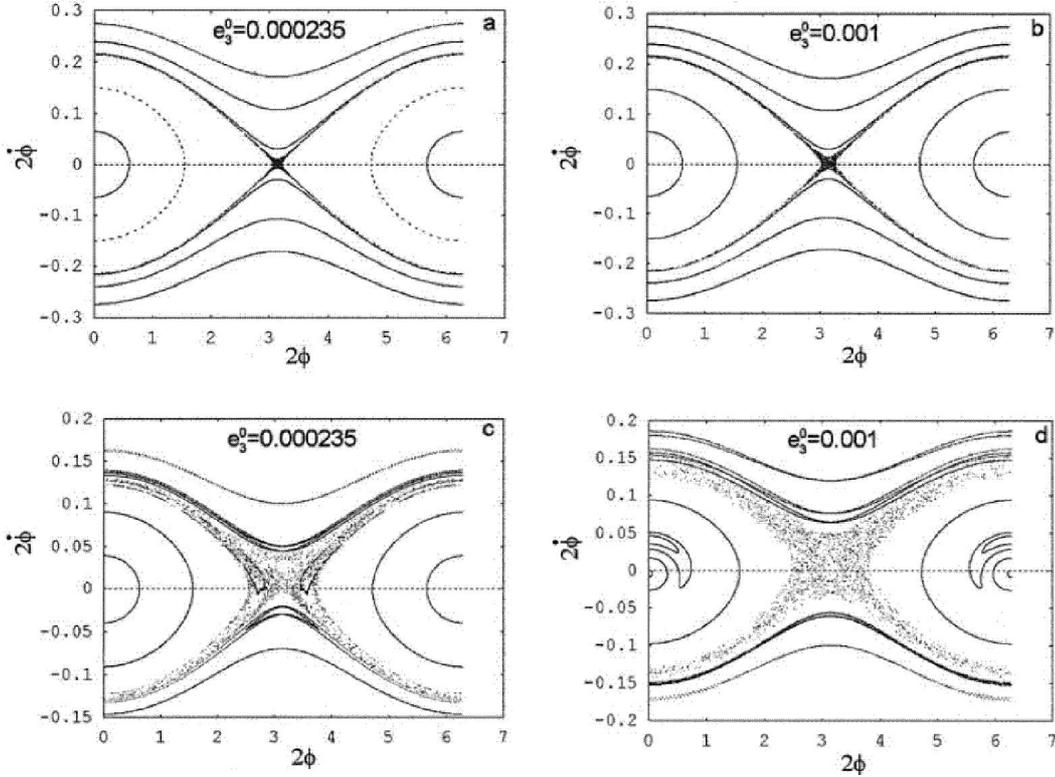


FIG. 5.4 – Surfaces de section du problème Mimas-Téthys issues de Champenois & Vienne [35] actuellement (en haut) et au moment de la capture (en bas), pour différentes valeurs de l'actuelle excentricité de Téthys. Ici, l'argument résonant est désigné " 2ϕ " et non pas " ϕ ". On constate, au moment de la capture, la présence d'une mer chaotique (l'excentricité de Téthys était alors plus élevée), ainsi que des îles de résonance secondaire, dont certaines sont envahies par le chaos.

$$P = \left(\frac{l[0, u]}{l[0, u] + l[u, v]} \right)^2 \quad (5.7)$$

où l désigne la longueur de l'intervalle. $[0, u]$ correspond à la zone où il y a capture, et $[u, v]$ à celle où la résonance est traversée sans capture. Dans le cas d'un phénomène chaotique, les zones de capture C et d'échappement E ne sont pas nécessairement connexes. Dans ce cas la formule (5.7) se réécrit ainsi :

$$P = \left(\frac{m(C)}{m(C) + m(E)} \right)^2 \quad (5.8)$$

où m désigne la mesure de l'ensemble. Il s'est avéré que C et E sont en fait des réunions d'intervalles, intervalles déterminés à l'aide d'essais numériques sur 10000 ans. Il s'avère (cf. Table 5.2) que le chaos dû à l'excentricité de Téthys augmente nettement la probabilité de capture dans la résonance d'argument ϕ , et donc permet d'expliquer l'état actuel du système.

e_3	P
0	0.04
0.0004	0.033
0.0005	0.25
0.0008	0.76
0.0016	1

TAB. 5.2 – Probabilité de capture en fonction de la valeur actuelle de l'excentricité de Téthys. On constate que globalement la probabilité de capture augmente avec l'excentricité. Cependant, on ne peut pas vraiment tracer de courbe représentant l'évolution de la probabilité en fonction de l'excentricité, cette courbe ayant une structure fractale.

5.2.2 Le cas Encelade-Dioné

Encelade & Dioné sont en résonance d'argument $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$. Le cas de cette résonance semble classique puisqu'il s'agit d'une résonance en excentricité de degré 1, aussi peu d'études lui ont été consacrées. Ferraz-Mello & Dvorak (1987 [68]) et Karch et Dvorak (1988 [102]) ont montré que la prise en compte de l'excentricité de Dioné, faible mais non nulle, débouche sur la mise en valeur de chaos au moment de la capture en résonance, quelque soit l'excentricité d'Encelade à cette époque. Callegari & Yokoyama (2005 [30]) ont montré qu'un comportement chaotique au voisinage de cette résonance pouvait venir d'un recouvrement entre l'une des 2 résonances principales (d'arguments $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$ et $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_4$) et des résonances secondaires.

5.2.3 Le cas Titan-Hypérion

Titan et Hypérion sont actuellement dans une résonance d'argument $3\lambda_6 - 4\lambda_7 + \varpi_7$. L'origine de cette résonance est incertaine. En effet, Colombo et al. (1974 [41]) ont confronté deux origines possibles : une origine primordiale et une capture en résonance sous l'effet des marées. Il découle de leur travail qu'il est tout-à-fait possible que Hypérion se soit formé au niveau de la résonance 4 : 3 car la configuration actuelle est stable. Par contre, une capture suite à une évolution due aux marées implique une dissipation Q dans Saturne de l'ordre de 2 à 4×10^3 , ce qui est en contradiction avec le résultat de Gavrilov & Zharkov (1977 [74]), à savoir $Q > 14000^3$. Une autre conclusion de ce travail est que la perturbation gravitationnelle de Hypérion empêche la capture de lagrangers pour Titan. La stabilité de la résonance Titan-Hypérion, malgré la forte excentricité de ce dernier, est confirmée par les simulations numériques de Bevilacqua et al. (1980 [21]). Enfin, Lee & Peale (2000 [127]) ont étudié l'hypothèse de l'origine primordiale en simulant l'accrétion de Hypérion dans un système contenant un proto-Titan. La formation d'un corps de taille significative apparaît bien plus probable à la résonance 3 : 2 qu'à la résonance 4 : 3. L'origine de la résonance Titan-Hypérion est donc encore un mystère.

L'origine de Hypérion est un mystère elle aussi, car il s'agit du plus gros objet de forme irrégulière connu dans le système solaire. On peut donc penser qu'il s'est formé récemment, suite à une collision d'un corps plus gros avec une comète (Farinella et al. 1983 [66]). Cette

³ce résultat a été obtenu en considérant que Mimas a migré de l'orbite synchrone jusqu'à son orbite actuelle

collision a entraîné des éjecta dont certains sont tombés sur Japet (Matthews 1992 [137]), ce qui expliquerait que ce satellite ait une face très sombre, d'autres auraient contribué à la richesse de l'atmosphère de Titan en diazote N_2 (Farinella et al. 1997 [67]). Kandy et al. (2000 [99]) ont détecté des similarités dans les spectres d'absorption de la région spectrale $0.4 - 0.8\mu m$ de Japet, Hypérion et Phoebé, ce qui indique une possible origine commune des matériaux constituant ces 3 corps.

Enfin, l'excentricité de Titan, de l'ordre de 0.029, est assez mystérieuse car inexplicable à l'aide d'un modèle où la dissipation dans Titan est constante⁴ et compatible avec sa structure différenciée, à moins d'une ancienne résonance et/ou d'un phénomène catastrophique qui aurait forcé cette excentricité. Tobie et al. (2005 [196]) ont proposé une explication à l'aide de la présence d'une faible quantité d'ammoniaque (de l'ordre de 5%) dans la couche liquide primordiale de Titan. Cet ammoniaque a eu pour effet principal de retarder le phénomène de convection, et donc la différenciation de Titan. Titan non différencié a très peu amorti son excentricité. Le scénario de Tobie et al. est compatible avec une excentricité primordiale de Titan inférieure à 0.2. Avec une telle excentricité, l'orbite de Titan aurait alors croisé l'orbite actuelle de Hypérion. Mais nous ne connaissons pas l'état de Hypérion à l'époque (corps plus massif?), il est donc dangereux de chercher une confirmation du scénario de Tobie et al. en fonction de nos connaissances actuelles sur Hypérion.

⁴Dans ce cas, l'excentricité primordiale de Titan serait supérieure à 1.

Chapitre 6

La détection de chaos

Introduction

Les phénomènes chaotiques se caractérisent par une grande sensibilité aux conditions initiales au point d'en perdre la mémoire, c'est-à-dire qu'il est très difficile, à partir de l'état d'un système chaotique en un temps T , de connaître de façon fiable son état à un instant T_0 , antérieur ou postérieur, si T et T_0 sont suffisamment éloignés dans le temps.

Ces phénomènes ont une importance fondamentale en mécanique céleste car la présence du chaos dans un système enrichit considérablement sa dynamique. En effet, l'histoire d'un système ne pourra être connue avec précision et sera au mieux décrite à l'aide de probabilités.

Ce chapitre expose différentes méthodes de détection du chaos. L'utilisation de l'analyse en fréquences sera testée sur un problème théorique inspiré du cas Mimas-Téthys, dans le cadre d'une comparaison entre une étude analytique du problème et les résultats numériques de l'analyse en fréquences.

6.1 Quelques outils de détection du chaos

6.1.1 Les exposants maximaux de Lyapounov (MLE)

Le principe du chaos étant la sensibilité aux conditions initiales, on peut le détecter en observant la divergence de 2 trajectoires initialement très proches. Les exposants de Lyapounov caractérisent cette divergence. En toute rigueur, cette divergence vient de l'hyperbolicité locale du système, et non pas du chaos. En effet, dans l'exemple du point hyperbolique d'un pendule simple, on a un exposant de Lyapounov positif alors que son comportement est parfaitement déterminé. Cependant, une perturbation au voisinage d'une hyperbolicité provoque un comportement chaotique, donc les exposants de Lyapounov peuvent être considérés comme indicateurs de chaos.

On définit l'exposant maximal de Lyapounov \mathbb{L} ainsi :

$$\mathbb{L} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta p(t), \delta q(t)\|}{\|\delta p(0), \delta q(0)\|} \quad (6.1)$$

où p désigne les variables d'action et q les variables d'angle. Le vecteur $(\delta p, \delta q)$ représente la différence entre 2 trajectoires proches caractérisées respectivement par les variables

$(p^{(1)}(t), q^{(1)}(t))$ et $(p^{(2)}(t), q^{(2)}(t))$. Ce vecteur différence est au mieux obtenu par linéarisation des équations hamiltoniennes, plus précisément :

$$\dot{\delta p}_i = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}(p^{(1)}(t), q^{(1)}(t))\delta p_j - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i}(p^{(1)}(t), q^{(1)}(t))\delta q_j \quad (6.2)$$

$$\dot{\delta q}_i = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}(p^{(1)}(t), q^{(1)}(t))\delta p_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}(p^{(1)}(t), q^{(1)}(t))\delta q_j \quad (6.3)$$

Lorsque le MLE est calculé "correctement", c'est-à-dire au bout d'un temps suffisamment long et avec les équations linéarisées, alors il est indépendant de $(\delta p(0), \delta q(0))$ ainsi que du jeu de variables canoniques utilisées (Oseledec 1968 [155]). Par contre, il est parfois impossible d'obtenir les équations linéarisées (6.2 et 6.3) par exemple lorsque le hamiltonien du problème n'est pas connu de façon explicite. Dans ce cas, il n'y a pas d'autre solution pour exprimer $(\delta p, \delta q)$ que de prendre la différence entre 2 trajectoires initialement très proches. Cette façon de procéder est dangereuse en particulier pour les systèmes peu chaotiques, qui nécessitent une intégration plus longue pour détecter un chaos éventuel (cf. Holman & Murray 1996 [92]). Dans ce cas, le chaos est détecté mais \mathbb{L} peut être mal évalué. Une solution peut être dans ce cas d'estimer \mathbb{L} à l'aide de plusieurs essais, avec différents $(\delta p(0), \delta q(0))$ choisis aléatoirement dans une boule de faible rayon. On définit aussi le temps de Lyapounov \mathbb{T} ainsi :

$$\mathbb{T} = \frac{1}{\mathbb{L}} \quad (6.4)$$

Le temps de Lyapounov est souvent utilisé, il peut être considéré comme un temps caractéristique représentatif du temps nécessaire au système pour perdre la mémoire des conditions initiales.

Le calcul de \mathbb{L} à l'aide de la formule (6.1) peut numériquement diverger. Néanmoins, Benettin et al. (1980, [20]) ont mis au point un algorithme passant outre ce problème. Soit s_1 défini ainsi :

$$s_1 = \frac{\|\delta p(T), \delta q(T)\|}{\|\delta p(0), \delta q(0)\|} \quad (6.5)$$

où T est choisi afin que le problème soit traitable numériquement. Posons maintenant

$$\delta p_1 = \frac{\delta p(T)}{s_1}$$

et

$$\delta q_1 = \frac{\delta q(T)}{s_1}$$

En considérant δp_1 et δq_1 comme de nouvelles conditions initiales $(\delta p(0), \delta q(0))$ on peut réitérer le processus et déterminer s_2 . Ainsi de suite on construit une suite s_1, s_2, \dots . Benettin et al. ont montré que l'on a :

$$\mathbb{L} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^l \ln s_j}{lT} \quad (6.6)$$

et que ce résultat est indépendant de T .

6.1.2 Outils dérivés

La détermination des MLE est très exigeante en temps de calcul, par conséquent des méthodes inspirées des MLE ont été développées. Ces méthodes ont pour but une plus grande efficacité dans le calcul numérique, cependant elles ne sont pas toujours aussi précises que les MLE. Par conséquent, cette rapidité de calcul se paie au prix d'un résultat contenant moins d'information.

Les exposants de Lyapounov rapides (FLI)

Une équipe de l'Observatoire de la Côte d'Azur travaille sur le Fast Lyapunov Indicator, dont l'idée de base est d'avoir un indicateur de chaos fiable en calculant un exposant de Lyapounov en un certain temps fini. Plusieurs définitions existent pour le FLI

1. Le temps T nécessaire pour que la norme de $(\delta p(t), \delta q(t))$ dépasse un certain seuil (Froeschlé, Lega & Gonczi 1997 [72]).
2. Le temps T nécessaire pour que l'angle entre 2 vecteurs de la famille $(\delta p(t), \delta q(t))$ initialement orthogonale dépasse ou devienne inférieur à un certain seuil [72].
3. Le suivi de l'évolution du sup de la famille $(\delta p(t), \delta q(t))$ [72].
4. La valeur de $\ln \|(\delta p(t), \delta q(t))\|$ à un certain T donné (Froeschlé & Lega 2000 [70]), avec une moyennisation sur un intervalle $[T - \Delta t; T]$. Cette moyennisation a l'intérêt de s'affranchir des effets de l'oscillation de la norme de $(\delta p, \delta q)$ autour de l'asymptote.
5. La valeur maximale de $\ln \|(\delta p(t), \delta q(t))\|$ sur $[0; T]$ (Lega & Froeschlé 2001 [128]).

Ces différentes définitions donnent des indicateurs qui non seulement permettent de distinguer des trajectoires ordonnées de trajectoires chaotiques, mais aussi de distinguer des zones résonantes de non-résonantes (cf. par exemple Froeschlé, Guzzo & Lega 2000 [71]). Par contre, ces indicateurs ont l'inconvénient de donner une valeur dépendant de $(\delta p(0), \delta q(0))$, ils ne peuvent donc être utilisés dans l'absolu, ils peuvent simplement l'être pour comparer différents états d'un même système.

Le MEGNO

L'exposant maximal de Lyapounov \mathbb{L} (6.1) peut s'écrire ainsi :

$$\mathbb{L} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\|\dot{\delta}(p, q)(t)\|}{\|\delta(p, q)(t)\|} dt \quad (6.7)$$

Lorsque l'on a un système chaotique, la quantité $\frac{\|\dot{\delta}(p, q)(t)\|}{\|\delta(p, q)(t)\|}$ tend vers \mathbb{L} lorsque T est assez grand. La formule (6.7) est même une moyennisation de cette quantité afin de ne pas être gêné dans le calcul par des oscillations à courte période. Pour pouvoir déterminer de façon plus efficace \mathbb{L} , il faudrait pouvoir pondérer le calcul lorsque T est "assez grand" afin de mettre en évidence le comportement asymptotique. C'est pourquoi Cincotta & Simó (2000 [39]) ont proposé de calculer la quantité M suivante, appelée MEGNO pour Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits :

$$M(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\|\dot{\delta}(p, q)(\tau)\|}{\|\delta(p, q)(\tau)\|} \tau d\tau \quad (6.8)$$

Dans le cas d'orbites chaotiques, $M(t)$ a un comportement à long terme d'oscillations autour de l'asymptote d'équation $y = \mathbb{L}t$, ainsi que pour des orbites confinées sur des tores invariants, l'asymptote a pour équation $y = 2$. Afin de se soustraire aux effets des termes à courte période, on peut même moyenniser M ainsi :

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t M(\tau) d\tau \quad (6.9)$$

\bar{M} converge vers $\frac{\mathbb{L}}{2}$. Cette technique s'avère donner les mêmes résultats que le calcul direct des exposants de Lyapunov mais est bien plus efficace en termes de temps de calcul numérique, comme le montrent par exemple Cincotta & Giordano (2001 [40]) sur de nombreux exemples sur des systèmes ayant 2 ou 3 degrés de liberté. Initialement développé pour être appliqué en dynamique galactique, le MEGNO est régulièrement utilisé par d'autres auteurs et pour d'autres applications, par exemple la stabilité de systèmes exo-planétaires (cf. par exemple Bois et al. 2003 [23]).

M et \bar{M} se calculent aisément en ajoutant 2 variables et 2 équations au système différentiel des équations du mouvement (Goździewski et al. 2001 [82]) :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\dot{\delta}}{\delta^2} t \quad (6.10)$$

et

$$\frac{dw}{dt} = 2 \frac{y}{t} \quad (6.11)$$

où t est le temps et δ la norme du vecteur tangent à la trajectoire.

Dans ce cas on a

$$M(t) = 2 \frac{y(t)}{t} \quad (6.12)$$

et

$$\bar{M}(t) = \frac{w(t)}{t} \quad (6.13)$$

Toutes ces méthodes nécessitent l'utilisation de variables hamiltoniennes afin d'être appliquées au mieux, notamment dans le calcul du vecteur tangent à la trajectoire. Nous allons voir maintenant la méthode de l'analyse en fréquences, qui peut être utilisée dans le cas de variables non hamiltoniennes.

6.1.3 L'analyse en fréquence

D'après le théorème KAM (cf. Annexe E), lorsqu'un mouvement est chaotique, les solutions du système ne sont pas confinées sur des tores invariants. Par contre, lorsque le mouvement est ordonné et non résonant, les solutions du système restent sur des tores invariants et ont donc des fréquences constantes. Par conséquent, des variations des fréquences associées aux orbites sont des indicateurs de chaos. Cette idée est exposée dans Laskar et al. (1992 [122]). En pratique, elle consiste à réaliser des analyses en fréquences du système donné, et à visualiser certaines fréquences pour déterminer la présence ou non de chaos.

Cette détermination visuelle peut se faire de plusieurs façons. La première, qui découle directement du constat précédent, est d'observer l'évolution des différentes fréquences au cours du temps. Une autre façon est de tracer des cartes d'analyse en fréquence (cf. Laskar 1993 [123]), c'est-à-dire des diagrammes représentant une fréquence en abscisse et une autre en ordonnée. Les tores invariants ne s'intersectant pas, lorsque des lignes de ce diagramme s'intersectent il y a chaos.

Une troisième manière de détecter un comportement chaotique à l'aide de l'analyse en fréquence est de tracer les différentes fréquences fondamentales du système en fonction de p_0 , norme initiale des variables d'action. Lorsque les trajectoires sont situées sur des tores KAM, les fréquences peuvent être représentées par une fonction de classe C^∞ des actions (Lazutkin 1973 [125]). Dit plus simplement, dans un système régulier, une faible variation de p_0 induira une faible variation des fréquences. Par contre, lorsque le système est chaotique, une faible variation des conditions initiales peut entraîner une variation significative et imprévisible des fréquences.

6.2 Test de l'analyse en fréquence

6.2.1 Le problème test

J'ai testé l'efficacité de l'analyse en fréquences sur un problème que j'ai voulu relativement simple et proche du mien, à savoir l'inégalité de De Haerdtl. Habituellement les outils de détection du chaos sont testés sur le standard map, mais cette application ne représente pas un problème de type planétaire. Le problème-test que j'ai choisi est inspiré des perturbations entre Mimas et Téthys, il s'agit d'un problème où 2 corps sont en commensurabilité de moyens mouvements 2 : 1 et proches de 3 résonances en inclinaison. La simplicité du système se reflète essentiellement dans la possibilité d'expliquer analytiquement tous les phénomènes à détecter, notamment la localisation des résonances, leurs conditions de recouvrement, et donc le chaos par diffusion de Chirikov

Soit le hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned}
 H = & -\frac{m_1 G^2 M_0^2}{2L_1^2} - \frac{m_3 G^2 M_0^2}{2L_2^2} - \frac{m_1 m_3^3 G^2 M_0^2}{M_0 L_2^2} \left(f_1(\alpha_{13}) \frac{P_3}{2L_1} \cos(2l_1 - 4l_3 - 2p_3) + \right. \\
 & \left. f_2(\alpha_{13}) \frac{\sqrt{P_3 P_4}}{2\sqrt{L_1 L_2}} \cos(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) + f_3(\alpha_{13}) \frac{P_4}{2L_2} \cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) \right) \quad (6.14) \\
 & - \frac{J_2}{2} R_0^2 G^4 M_0^4 \left(\frac{m_1^7}{L_1^6} \left(1 + 3\frac{P_1}{L_1} - 3\frac{P_3}{L_1} \right) + \frac{m_3^7}{L_2^6} \left(1 + 3\frac{P_2}{L_2} - 3\frac{P_4}{L_2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Ce hamiltonien est une modélisation du système Mimas-Téthys, les différents termes du hamiltonien 6.14 étant successivement : l'attraction gravitationnelle de Saturne sur Mimas, celle sur Téthys, la perturbation mutuelle à longue période au degré 2 avec comme arguments $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\delta\Omega_1$, $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \delta\Omega_1 + \delta\Omega_3$ et $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\delta\Omega_3$, et les effets de l'aplatissement de Saturne sur Mimas et Téthys. Les variables canoniques utilisées sont les suivantes : $L_1, L_2, P_1, P_2, P_3, P_4, l_1, l_2, p_1, p_2, p_3$ et p_4 avec

$$L_1 = m_1 \sqrt{GM_0 a_1} \quad (6.15)$$

$$L_2 = m_3 \sqrt{GM_0 a_3} \quad (6.16)$$

$$P_1 = L_1 (1 - \sqrt{1 - e_1^2}) \quad (6.17)$$

$$P_2 = L_2 (1 - \sqrt{1 - e_3^2}) \quad (6.18)$$

$$P_3 = 2L_1 \sqrt{1 - e_1^2} \gamma_1^2 \quad (6.19)$$

$$P_4 = 2L_2 \sqrt{1 - e_3^2} \gamma_3^2 \quad (6.20)$$

$$l_1 = \lambda_1 \quad (6.21)$$

$$l_2 = \lambda_3 \quad (6.22)$$

$$p_1 = -\varpi_1 \quad (6.23)$$

$$p_2 = -\varpi_3 \quad (6.24)$$

$$p_3 = -\delta\Omega_1 \quad (6.25)$$

$$p_4 = -\delta\Omega_3 \quad (6.26)$$

f_1 , f_2 et f_3 sont issus des perturbations associées respectivement aux arguments $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\delta\Omega_1$, $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \delta\Omega_1 + \delta\Omega_3$ et $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\delta\Omega_3$ et s'explicitent ainsi :

$$f_1(\alpha) = \frac{35}{16} \alpha^4 F\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right], [4], \alpha^2\right) \quad (6.27)$$

$$f_2(\alpha) = -\frac{35}{8} \alpha^4 F\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right], [4], \alpha^2\right) \quad (6.28)$$

$$f_3(\alpha) = \frac{35}{16} \alpha^4 F\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right], [4], \alpha^2\right) \quad (6.29)$$

où F est la fonction hypergéométrique de Gauss. On remarque que $f_3 = f_1$ et $f_2 = -2f_1$, dans la suite on désignera f_1 par f et f_2 et f_3 seront exprimées en fonction de f .

Les équations relatives au hamiltonien 6.14 sont :

$$\dot{l}_1 = \frac{\partial H}{\partial L_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 = & \frac{m_1^3 G^2 M_0^2}{L_1^3} + \frac{m_1 m_3^3 G^2 M_0^2}{M_0 2L_1 L_2^2} f(\alpha) \left(\frac{P_3}{L_1} \cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{P_3 P_4}}{L_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{L_2}} \cos(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) \right) + \frac{J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 m_1^7}{2} \left(6 + \frac{21P_1}{L_1} - \frac{21P_3}{L_1} \right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\dot{l}_2 = \frac{\partial H}{\partial L_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{l}_2 = & \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^3} + \frac{m_1 m_3^3 G^2 M_0^2}{M_0 L_2^3} f(\alpha) \left(\frac{P_3}{L_1} \cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \right. \\ & \left. \frac{5}{2} \sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} \cos(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) + \frac{3P_4}{2L_2} \cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) \right) + \\ & \frac{J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 m_3^7}{2} \left(6 + \frac{21P_2}{L_2} - \frac{21P_4}{L_2} \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{3}{2} J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 \frac{m_1^7}{L_1^7} \quad (6.32)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{3}{2} J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 \frac{m_3^7}{L_2^7} \quad (6.33)$$

$$\dot{p}_3 = \frac{\partial H}{\partial P_3}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 = & -\frac{m_1 m_3^3 G^2 M_0^2}{M_0 2L_1 L_2^2} f(\alpha) \left(\cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \sqrt{\frac{L_1 P_4}{L_2 P_3}} \cos(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) \right) + \\ & \frac{3}{2} J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 \frac{m_1^7}{L_1^7} \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\dot{p}_4 = \frac{\partial H}{\partial P_4}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 = & -\frac{m_1 m_3^3 G^2 M_0^2}{M_0 2L_2^3} f(\alpha) \left(\cos(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) - \sqrt{\frac{L_2 P_3}{L_1 P_4}} \cos(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) \right) + \\ & \frac{3}{2} J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 \frac{m_3^7}{L_2^7} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\dot{L}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 = & -\frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^2} f(\alpha) \left(\frac{P_3}{L_1} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \right. \\ & \left. 2\sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} \sin(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) + \frac{P_4}{L_2} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\dot{L}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = & 2\frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^2} f(\alpha) \left(\frac{P_3}{L_1} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \right. \\ & \left. 2\sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} \sin(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) + \frac{P_4}{L_2} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\dot{P}_1 = 0 \quad (6.38)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\dot{P}_2 = 0 \quad (6.39)$$

$$\dot{P}_3 = -\frac{\partial H}{\partial p_3}$$

$$\dot{P}_3 = \frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^2} f(\alpha) \left(\frac{P_3}{L_1} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_3) - \sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} \sin(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) \right) \quad (6.40)$$

$$\dot{P}_4 = -\frac{\partial H}{\partial p_4}$$

$$\dot{P}_4 = \frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^2} f(\alpha) \left(\frac{P_4}{L_2} \sin(2l_1 - 4l_2 - 2p_4) - \sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} \sin(2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4) \right) \quad (6.41)$$

Les paramètres physiques utilisés sont recensés Table 6.1 :

Ce problème comprend 3 résonances en inclinaison, l'une impliquant l'argument $\Phi_1 = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 - 2p_1$, l'autre l'argument $\Phi_2 = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 - p_1 - p_3$ et la troisième l'argument $\Phi_3 = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 - 2p_3$. Localisons les résonances par la méthode de Champenois & Vienne (1999 [36]) : les centres de ces résonances sont localisés par annulation de la dérivée temporelle

G	$2.83153048983 \times 10^{17} km^3 M_{\text{J}} j^{-2}$
M_0	$1 M_{\text{J}}$
R_0	60330km
m_1	$6.34 \times 10^{-8} M_{\text{J}}$
m_3	$1.060 \times 10^{-6} M_{\text{J}}$
J_2	4.0×10^{-3}
a_1	186019.8km
a_3	294975.0km
e_1	1.5×10^{-2}
e_3	2.35×10^{-4}
γ_1	1.2×10^{-2}
γ_3	8.0×10^{-3}
L_1	1.4550552×10^4
L_2	3.06343797×10^5
P_1	1.637029
P_2	8.458918×10^{-3}
P_3	4.190087
P_4	39.212005

TAB. 6.1 – Paramètres et conditions initiales. Le J_2 n'est pas celui de Saturne, ici une valeur théorique environ 4 fois plus faible a été choisie afin de favoriser l'apparition de phénomènes chaotiques en rapprochant les résonances.

de leur argument. Plus précisément, on a, pour la résonance d'argument Φ_1 , en négligeant les terme d'ordre 1 des masses et ceux de degré 2 en excentricité :

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 2 \frac{m_1^3 G^2 M_0^2}{L_1^3} - 4 \frac{m_3^3 G^2 M_0^2}{L_2^3} + 3 J_2 R_0^2 G^4 M_0^4 \left(\left(\frac{m_1}{L_1} \right)^7 - 4 \left(\frac{m_3}{L_2} \right)^7 \right)$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = n_3 \left(2\alpha^{-\frac{3}{2}} - 4 + 3J_2 \left(\frac{R_0}{a_4} \right)^2 \left(\alpha^{-\frac{7}{2}} - 4 \right) \right) \quad (6.42)$$

De même on a, pour la résonance d'argument Φ_2 :

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = n_3 \left(2\alpha^{-\frac{3}{2}} - 4 + \frac{9}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{a_4} \right)^2 \left(\alpha^{-\frac{7}{2}} - 3 \right) \right) \quad (6.43)$$

et pour la résonance d'argument Φ_3 :

$$\frac{d\Phi_3}{dt} = n_3 \left(2\alpha^{-\frac{3}{2}} - 4 + 3J_2 \left(\frac{R_0}{a_4} \right)^2 \left(2\alpha^{-\frac{7}{2}} - 5 \right) \right) \quad (6.44)$$

Je considère dans cette partie n_3 et a_3 constants aux valeurs respectives $3.3214907 \text{ rad.j}^{-1}$ (TASS1.6 [203]) et 294975.0 km. Ainsi, seul Mimas est affecté par les marées. Il s'agit plus d'une commodité mathématique que d'une réalité physique, qui a pour but de simplifier

l'explication des phénomènes observés. Le préfacteur $J_2\left(\frac{R_0}{a_1}\right)^2$ ayant une valeur faible (de l'ordre de 4×10^{-4}), on peut négliger les variations du terme provenant de l'aplatissement. Par conséquent, la résonance d'argument Φ_1 est centrée en

$$\alpha_1 = \left(2 - \frac{3}{2} J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_1^{-\frac{7}{2}} - 4\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (6.45)$$

celle en Φ_2 est centrée en

$$\alpha_2 = \left(2 - \frac{9}{4} J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_2^{-\frac{7}{2}} - 3\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (6.46)$$

et celle en Φ_3 en

$$\alpha_3 = \left(2 - \frac{3}{2} J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(2\alpha_3^{-\frac{7}{2}} - 5\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (6.47)$$

Une résolution numérique donne :

$$\alpha_1 = 0.6300152452$$

$$\alpha_2 = 0.6301214680$$

et

$$\alpha_3 = 0.6302275794$$

La fonction f varie peu sur un intervalle aussi restreint, il suffit dans ce cas d'évaluer f en un point central α_0 de l'intervalle d'étude, par exemple α_2 . Dans ce cas on a

$$f(\alpha_0) = 0.8212004868$$

La largeur de chaque résonance vaut ainsi, d'après Champenois & Vienne [36] :

$$\Delta\alpha_1 = 2^{\frac{1}{3}} \gamma_1 \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_1^2} + 16m_1 \right)} |f(\alpha_1)| \quad (6.48)$$

$$\Delta\alpha_2 = 2^{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_3}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_2^2} + 16m_1 \right)} |f(\alpha_2)| \quad (6.49)$$

$$\Delta\alpha_3 = 2^{\frac{1}{3}} \gamma_3 \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_3^2} + 16m_1 \right)} |f(\alpha_3)| \quad (6.50)$$

Il est intéressant de déterminer à quelle condition ces résonances se chevauchent. Un tel chevauchement est une condition suffisante au chaos (Chirikov 1979 [37]). Appelons $\Delta_{12}\alpha$ l'écart entre les résonances d'arguments Φ_1 et Φ_2 ($\Delta_{12}\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$), et $\Delta_{23}\alpha$ l'écart entre les résonances d'arguments Φ_2 et Φ_3 ($\Delta_{23}\alpha = \alpha_3 - \alpha_2$). Afin de donner une expression analytique de ces écarts, une linéarisation des équations (6.45) à (6.47) s'impose. Une telle linéarisation

est légitime en assimilant $\alpha^{-\frac{7}{2}}$ à $\alpha_0^{-\frac{7}{2}}$ et en considérant que le préfacteur $J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2$ est petit devant l'unité (en pratique il vaut 1.7×10^{-4}). On a dans ce cas

$$\alpha_1 = 2^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 4\right)}{2} \right) \quad (6.51)$$

$$\alpha_2 = 2^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3}{4} J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 3\right) \right) \quad (6.52)$$

$$\alpha_3 = 2^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(2\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 5\right)}{2} \right) \quad (6.53)$$

Ainsi

$$\Delta_{12}\alpha = 2^{-\frac{2}{3}} \frac{J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 1\right)}{4} \quad (6.54)$$

$$\Delta_{23}\alpha = 2^{-\frac{2}{3}} \frac{J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 1\right)}{4} \quad (6.55)$$

(on remarque que $\Delta_{12}\alpha = \Delta_{23}\alpha$). On obtient numériquement, en utilisant les formules (6.54) et (6.55) :

$$\Delta_{12}\alpha = \Delta_{23}\alpha = 1.06334065 \times 10^{-4}$$

alors que l'on a, en utilisant les valeurs de α_1 , α_2 , α_3 déterminées précédemment :

$$\Delta_{12}\alpha = 1.061114 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_{23}\alpha = 1.062228 \times 10^{-4}$$

l'approximation faite par le développement limité donne donc une erreur relative inférieure à 0.3%.

Pour qu'il y ait dans ce système un chevauchement de résonances on doit avoir

$$\Delta_{12}\alpha < \frac{\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2}{2} \quad (6.56)$$

ou

$$\Delta_{23}\alpha < \frac{\Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3}{2} \quad (6.57)$$

L'équation 6.56 devient :

$$2^{-\frac{2}{3}} \frac{J_2\left(\frac{R_0}{a_3}\right)^2 \left(\alpha_0^{-\frac{7}{2}} - 1\right)}{4} < \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_0^2} + 16m_1\right)} |f(\alpha_0)|}{2} \left(2^{\frac{1}{3}}\gamma_1 + 2^{\frac{5}{6}}\sqrt{\gamma_1\gamma_3}\right)$$

et peut s'exprimer de façon plus condensée sous la forme

$$A < B\gamma_1 + C\sqrt{\gamma_1\gamma_3} \quad (6.58)$$

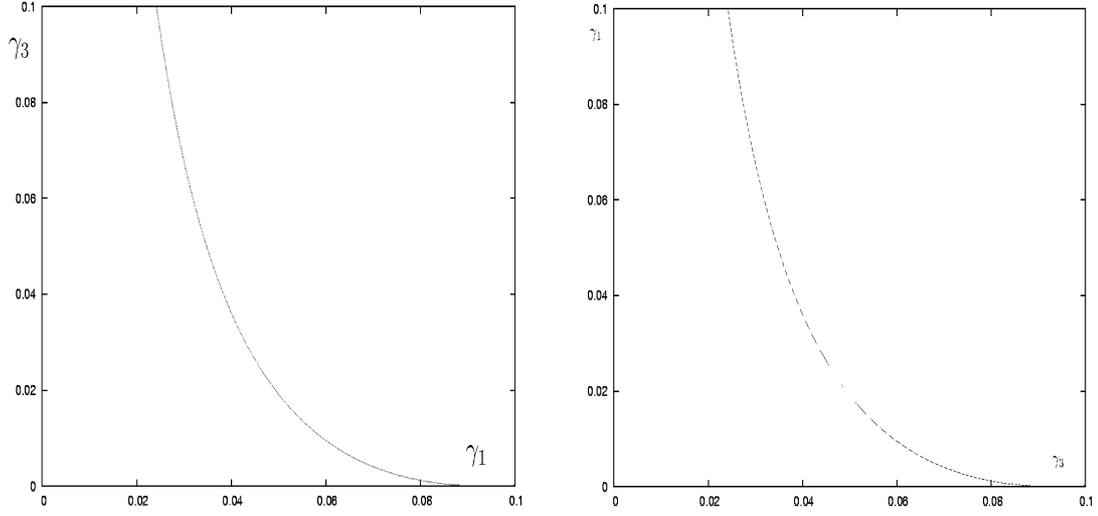


FIG. 6.1 – Limite entre recouvrement et non-recouvrement des 2 résonances, d'arguments Φ_1 et Φ_2 à gauche et d'arguments Φ_2 et Φ_3 à droite.

avec

$$A = \Delta_{12}\alpha \approx 1.06 \times 10^{-4}$$

$$B = 2^{-\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_0^2} + 16m_1 \right) |f(\alpha_0)|} \approx 1.13 \times 10^{-3}$$

et

$$C = 2^{-\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{4m_3}{\alpha_0^2} + 16m_1 \right) |f(\alpha_0)|} \approx 1.60 \times 10^{-3}$$

Par conséquent, il y a chevauchement (donc chaos) au-dessus de la courbe d'équation

$$\gamma_3 = \frac{(A - B\gamma_1)^2}{C^2\gamma_1}$$

On peut transposer ce raisonnement au chevauchement des résonances d'arguments Φ_2 et Φ_3 ce qui donne chevauchement au-delà de la courbe d'équation

$$\gamma_1 = \frac{(A - B\gamma_3)^2}{C^2\gamma_3}$$

6.2.2 Vérification numérique

Une vérification numérique a été effectuée avec les conditions de la Table 6.1 et des effets de marées sur le demi-grand axe de Mimas, avec $\frac{\dot{n}_1}{n_1} = -2 \times 10^{-11}$. Ceci doit être vu essentiellement comme une commodité mathématique permettant de parcourir la zone concernée par les 3 résonances, et non pas comme une étude de l'évolution du système sous

l'effet des marées. Le demi-grand axe initial de Mimas a été modifié aussi afin de partir d'un bord de la zone concernée, ainsi il a été fixé initialement à $a_3 \times 0.6296$.

Les variables utilisées sont les variables hamiltoniennes exposées précédemment à l'exception des variables de longitudes moyennes l_1 et l_2 qui ont été recombinaées sous la forme $l_1 - 2l_2$. Le vecteur solution est donc composé de 11 variables. Les intégrations sont effectuées à l'aide de l'intégrateur d'Adams10 (cf. Annexe C) avec un pas de 10^{-2} an.

Les résultats sont donnés Figures 6.2 à 6.4. On constate que le système traverse les 3 résonances sans être capturé, ces résonances sont clairement identifiées grâce à la visualisation des arguments correspondants (Fig 6.4) et sont situées en α conformément à la théorie.

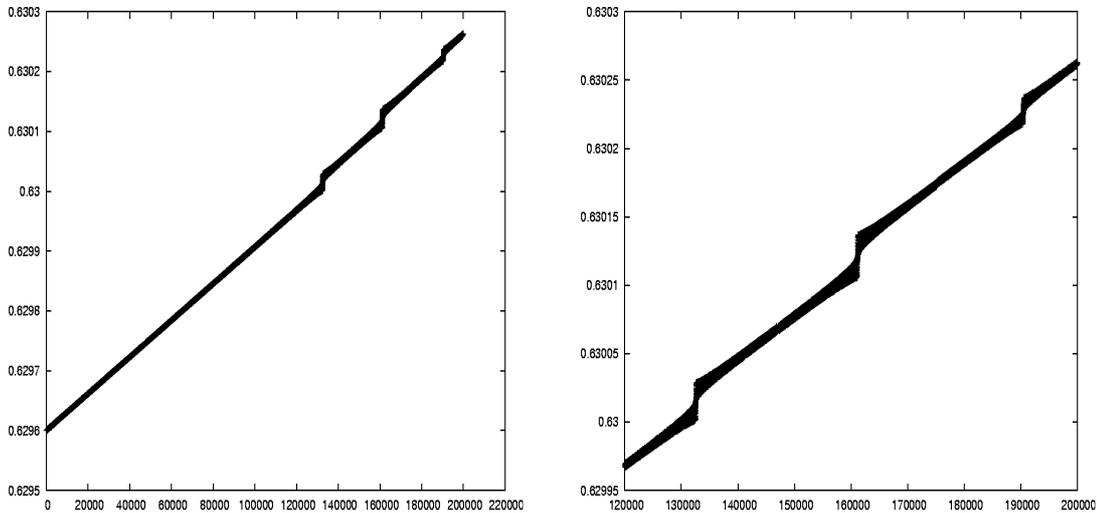


FIG. 6.2 – Evolution du rapport des demi-grands axes α en fonction du temps en jours (à droite : zoom sur la zone des résonances). On constate qu'il y a bien 3 traversées de résonances caractérisées ici par des sauts. Ces traversées correspondent aux valeurs de α trouvées théoriquement.

J'ai également effectué des simulations numériques avec des inclinaisons plus fortes afin de visualiser un comportement chaotique (cf. Fig.6.5 à 6.8). La Figure 6.5, où γ_3 vaut 3×10^{-2} , représente un comportement régulier dans le sens où on distingue nettement les 3 traversées de résonances. Mais les représentations de γ_1 et γ_3 présentent quelques petites irrégularités, qui n'affectent pas significativement la dynamique du système.

À partir de la Figure 6.6 où les inclinaisons sont plus importantes, le chaos semble présent. En tout cas, la courbe d'évolution de γ_3 ne marque plus qu'une seule résonance alors que celle de γ_1 en présente 2, comme si les résonances d'argument Φ_2 et Φ_3 étaient confondues (ce qui d'ailleurs correspond aux conclusions du raisonnement analytique). Dans les Figures 6.6 et 6.8 α semble osciller autour de 2 valeurs moyennes, comme s'il se trouvait aléatoirement dans l'une ou l'autre des 2 résonances, on parle dans ce cas de chaos stable (cf. Milani & Nobili 1992 [140]). Par contre, dans la Figure 6.7, le chaos se traduit par une éjection du système au-delà de la dernière résonance, avec un important saut de α .

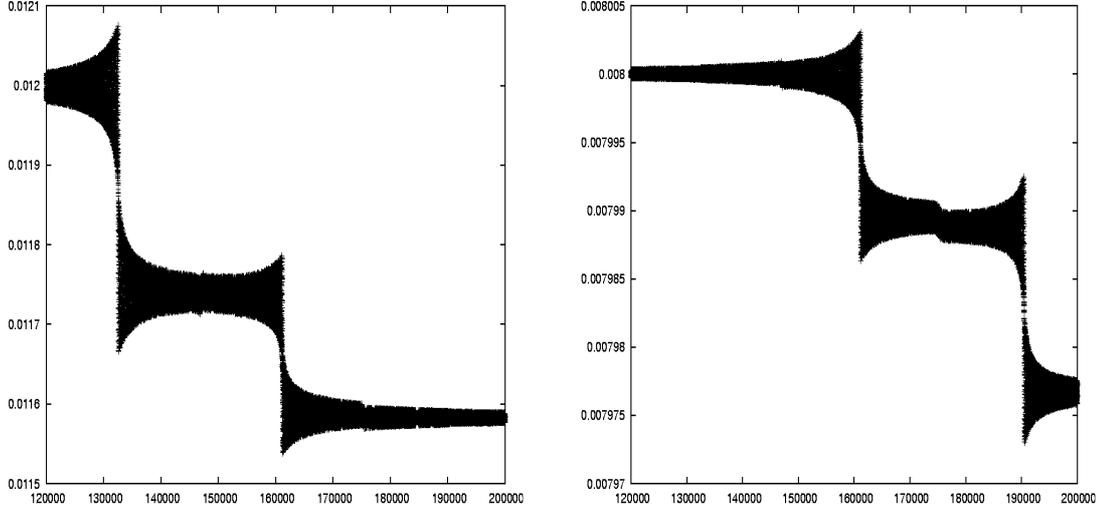


FIG. 6.3 – Evolution des inclinaisons γ_1 et γ_3 en fonction du temps. On constate que chaque inclinaison est concernée par 2 traversées de résonance, γ_1 par $2l_1 - 4l_2 - 2p_3$ et $2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4$, et γ_3 par $2l_1 - 4l_2 - p_3 - p_4$ et $2l_1 - 4l_2 - 2p_4$.

6.2.3 Détection du chaos

La figure Fig.6.9 représente des cartes de fréquences pour notre problème-test. Pour chacune de ces cartes on observe des accumulations de points sur des lignes transversales, accumulations d'autant plus fortes que les inclinaisons sont élevées. Ceci correspond à une augmentation de la force des résonances. À partir de la quatrième carte on constate visuellement une diffusion chaotique vers les fréquences plus faibles. Cette diffusion augmente à mesure que les inclinaisons augmentent. On peut remarquer que cette quatrième carte est proche de la limite de recouvrement des résonances d'arguments Φ_2 et Φ_3 (cf. Fig.6.1), ce qui suggère une diffusion de Chirikov due au recouvrement de ces 2 résonances. Elle est proche de la limite mais légèrement en-dessous, ceci n'est pas inquiétant car le critère de Chirikov tend à sous-estimer l'apparition de chaos en négligeant toute résonance secondaire ainsi que toute interaction mutuelle susceptible de déformer les résonances (cf. Morbidelli 1994 [143]). Ainsi, la présence de chaos soupçonnée plus haut est confirmée.

J'ai également tracé les différentes fréquences fondamentales du système en fonction de l'action initiale p_0 . Les résultats sont représentés Fig.6.10 à 6.13, ils ont été obtenus par détermination des fréquences associées aux variables p_1 , p_2 , p_3 et p_4 sur 16384 points avec un pas de 7×10^{-3} ans, soit 2.55675 jours. Chaque point d'une même courbe résulte d'une intégration numérique et est indépendant des autres points. Il y a sur chaque courbe 1001 points équidistants en a_1 (demi-grand axe de Mimas) répartis sur le segment [185687; 185982] (en kilomètres), ce qui permet de balayer la zone de résonances.

On constate visuellement que ces courbes sont proches de droites. Pour les fréquences associées à Mimas (p_1 et p_3) on voit nettement que l'écart à la linéarité augmente avec les inclinaisons. Pour les fréquences associées à Téthys ce phénomène est moins visible, ceci est dû à l'absence de pente de ces droites, absence de pente due au fait que le demi-grand axe de Téthys est ici toujours le même. Ainsi, l'échelle en ordonnée pour les courbes de p_2 et p_4 est due uniquement aux phénomènes irréguliers (résonance et diffusion chaotique).

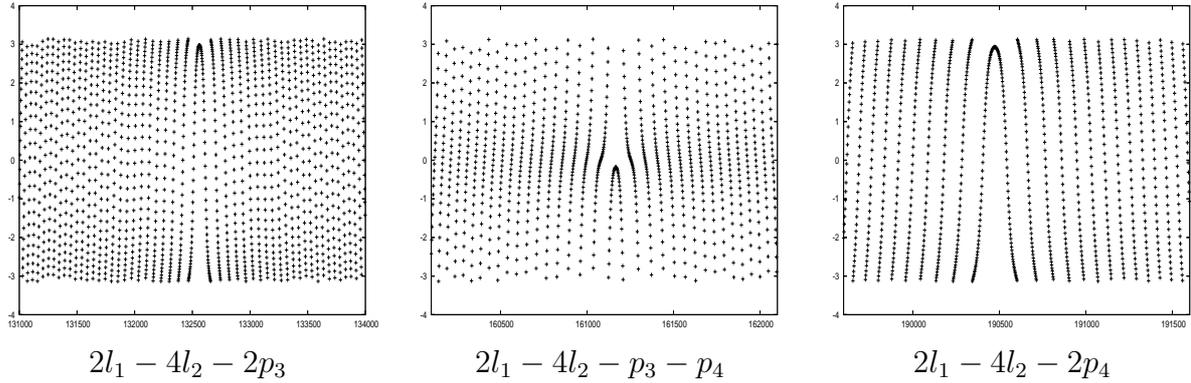


FIG. 6.4 – Evolution des différents arguments liés aux résonances potentielles. On constate que chaque traversée de résonance se caractérise par une inversion du sens de circulation d'un des arguments.

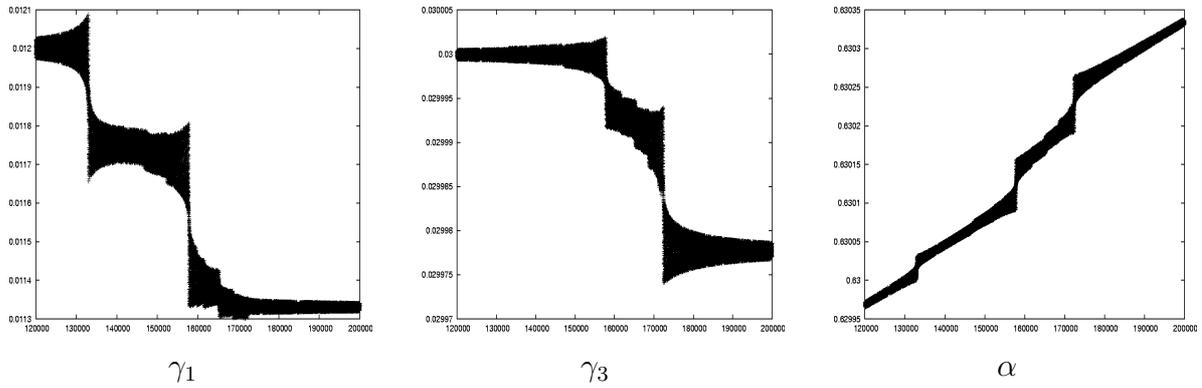
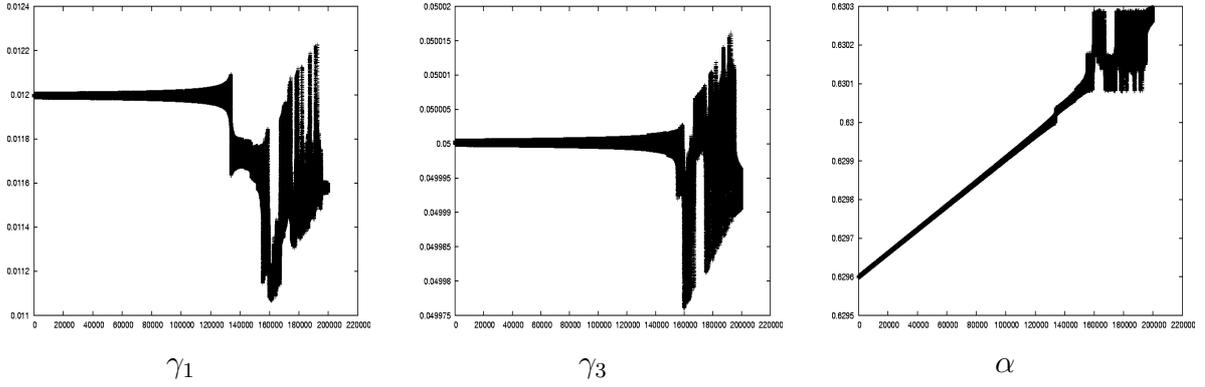
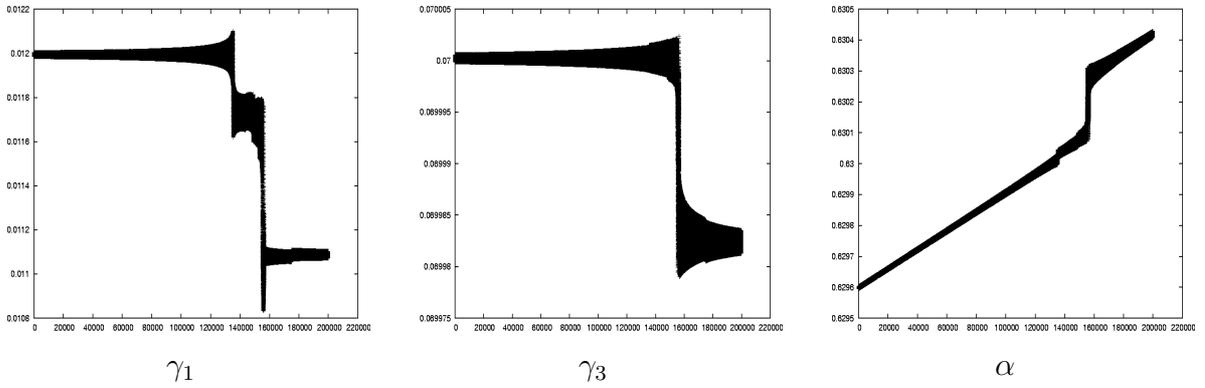


FIG. 6.5 – Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 3 \times 10^{-2}$.

Si on regarde plus en détail, les résonances sont visibles sur chacune de ces courbes, du moins lorsqu'elles sont bien séparées (Fig. 6.10 à 6.11). Sur les courbes relatives à Mimas (p_1 et p_3) les résonances sont des ruptures de pente, soit sous forme de paliers (c'est-à-dire à l'apparence visuelle de segments de droite de faible pente), soit sous forme de bosses. Par contre, sur les fréquences relatives à Téthys, où les phénomènes sont plus facilement visibles du fait de la pente quasi-nulle de la droite, les résonances apparaissent sous forme de pics, avec parfois inversion du sens de variation de la courbe lors de la traversée de la résonance. À partir de la Figure 6.12, les 2 dernières résonances ne sont plus distinctes et des irrégularités apparaissent dans les courbes, comme si le sens de variation changeait continuellement. On peut donc parler de chaos à partir de cette figure.

Les Figures 6.14 à 6.16 sont analogues aux précédentes, mais avec un resserrement de l'intervalle d'étude autour de la zone perturbée par les 3 résonances. La Figure 6.14 représente le même système que le Fig.6.10 et permet de mieux observer la localisation des résonances. La Figure 6.15 représente le cas très perturbé de la Figure 6.13, tandis que la Figure 6.16 représente le cas-limite entre système régulier et système chaotique. Elle ne correspond à aucune des figures précédentes mais est proche de la Figure 6.12 avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 4.5 \times 10^{-2}$ (contre 5×10^{-2} pour Fig.6.12). L'examen de cette dernière figure permet une localisation des 3 résonances, mais avec quelques difficultés pour la distinction des 2

FIG. 6.6 – Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$.FIG. 6.7 – Simulation avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.

dernières. On peut dire qu'elle est très proche de l'apparition du chaos.

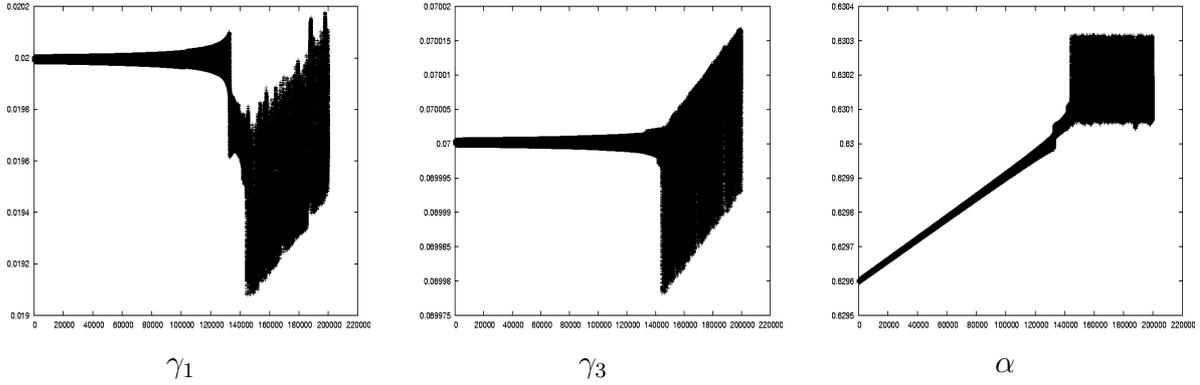
6.2.4 Visualisation des arguments responsables du chaos

Reprenons les simulations numériques des figures 6.6 à 6.8. Ces simulations sont particulièrement intéressantes car on y observe des comportements d'apparence irrégulière à partir du niveau de la résonance d'argument Φ_2 . De plus, les cartes en fréquence ont révélé la présence de chaos. Nous savons qu'à partir de la Fig.6.6 il y a recouvrement des résonances d'argument Φ_2 et Φ_3 et de plus qu'un tel recouvrement entraîne de la diffusion chaotique de Chirikov [37].

L'idée est maintenant de visualiser les différents arguments soupçonnés d'être à l'origine du comportement chaotique afin d'avoir confirmation ou infirmation de leur implication.

Les Figures 6.17 à 6.21 montrent les évolutions des arguments Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 et on constate que, dans les zones où α semble stagner de façon séculaire tout en oscillant avec une grande amplitude, tantôt Φ_2 libre autour de 0 pendant que Φ_3 circule, tantôt Φ_3 libre autour de π pendant que Φ_2 circule. Le système semble aller de façon aléatoire d'une résonance à l'autre, il est donc bien sur une zone de recouvrement de ces 2 résonances. Ceci confirme la présence d'un phénomène de diffusion chaotique de Chirikov.

Le plus simple pour bien comprendre les résultats observés est de représenter les résonances d'arguments Φ_2 et Φ_3 par le modèle du pendule, en les considérant comme isolées. Le

FIG. 6.8 – Simulation avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.

modèle du pendule associé à une résonance d'argument Φ s'écrit sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\Phi} + a \sin \Phi = 0 \quad (6.59)$$

Si $a > 0$ alors $\Phi = 0$ est une position d'équilibre stable (point elliptique) et $\Phi = \pi$ est une position d'équilibre instable (point hyperbolique) alors que si $a < 0$ les positions sont inversées ($\Phi = 0$ est instable et $\Phi = \pi$ est stable).

Il faut donc obtenir une équation différentielle de la forme $\ddot{\Phi}_2 + a \sin \Phi_2 = 0$. On a

$$\dot{\Phi}_2 = 2n_1 - 4n_3 - \dot{p}_3 - \dot{p}_4$$

À l'aide de la troisième loi de Képler et l'expression de L_1 (6.15) on obtient :

$$\frac{dn_1}{dt} = -3 \frac{m_1^3 (GM_0)^2}{L_1^4} \frac{dL_1}{dt} \quad (6.60)$$

et de même :

$$\frac{dn_3}{dt} = -3 \frac{m_3^3 (GM_0)^2}{L_2^4} \frac{dL_2}{dt} \quad (6.61)$$

Les dérivations des dérivées de \dot{p}_3 (6.34) et \dot{p}_4 (6.35) sont d'un ordre des masses supérieur, donc on peut les négliger dans le modèle approximé du pendule, dans ce cas on obtient

$$\ddot{\Phi}_2 = -12 \frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^4 M_0^4}{L_2^2} \left(\frac{m_1^3}{L_1^4} + 4 \frac{m_3^3}{L_2^4} \right) \sqrt{\frac{P_3 P_4}{L_1 L_2}} f(\alpha) \sin(\Phi_2) \quad (6.62)$$

et par un raisonnement analogue :

$$\ddot{\Phi}_3 = 6 \frac{m_1}{M_0} \frac{m_3^3 G^4 M_0^4}{L_2^2} \left(\frac{m_1^3}{L_1^4} + 4 \frac{m_3^3}{L_2^4} \right) \frac{P_4}{L_2} f(\alpha) \sin(\Phi_3) \quad (6.63)$$

Ainsi, on a $\ddot{\Phi}_2 + a_2 \sin \Phi_2 = 0$ avec $a_2 > 0$ et $\ddot{\Phi}_3 + a_3 \sin \Phi_3 = 0$ avec $a_3 < 0$, donc le pendule associé à Φ_2 a 0 comme position d'équilibre stable et celui associé à Φ_3 a π comme position d'équilibre stable. Ceci explique que les figures nous montrent des résonances d'argument Φ_2

autour de la position d'équilibre 0, et des résonances d'argument Φ_3 autour de la position d'équilibre π .

Par conséquent la visualisation des différents arguments associés aux résonances initialement supposées permet d'identifier de façon fiable les différents termes responsables de la diffusion chaotique et ainsi de confirmer la nature de la diffusion (diffusion de Chirikov).

6.3 Conclusion

Ce chapitre a permis d'évaluer la fiabilité de l'utilisation de la représentation des fréquences dans un problème de type satellites naturels en résonance pour détecter le chaos. Les cartes de fréquences, comme la représentation des fréquences en fonction de l'action, donnent de bons résultats. Cependant, les cartes en fréquence présentent l'intérêt de pouvoir faire varier 2 paramètres indépendants (ici a_1 et a_3), donc de chercher à détecter le chaos sur un domaine à 2 dimensions, ou sur un domaine plus large à une dimension si on se ramène à un seul paramètre (par exemple le rapport des demi-grands axes α).

De plus, la visualisation des différents arguments permet d'identifier les résonances responsables des phénomènes chaotiques.

Nous avons maintenant vérifié la fiabilité et l'efficacité de ces outils, que nous pouvons utiliser dans la suite.

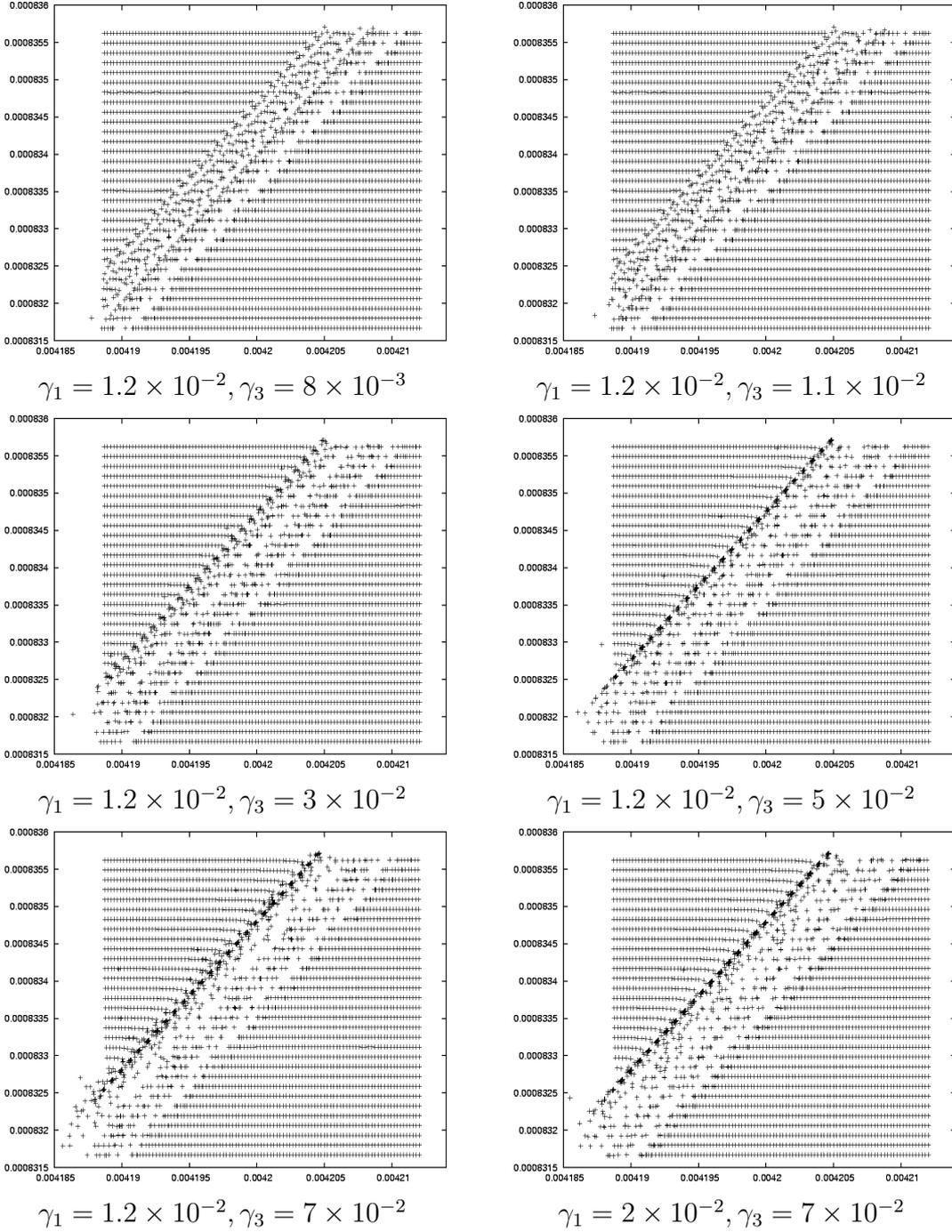


FIG. 6.9 – Cartes en fréquences du problème-test, \dot{p}_3 est en abscisses et \dot{p}_4 en ordonnées pour différentes valeurs d'inclinaisons. Les excentricités sont $e_1 = 1.5 \times 10^{-2}$ et $e_3 = 2.35 \times 10^{-4}$. Les fréquences ont été calculées sur 4096 points espacés de 7×10^{-3} ans, soit 2.55675 jours et sont exprimées en jours⁻¹ (elles sont environ 4 fois plus faibles que celles données par les éphémérides (cf TASS1.6 [203]), cet écart vient de la modification de la valeur du coefficient J_2). Chaque carte présente 3131 points où les demi-grands axes initiaux varient, a_1 sur [185687; 185982] et a_3 sur [294775; 295175] (en kilomètres).

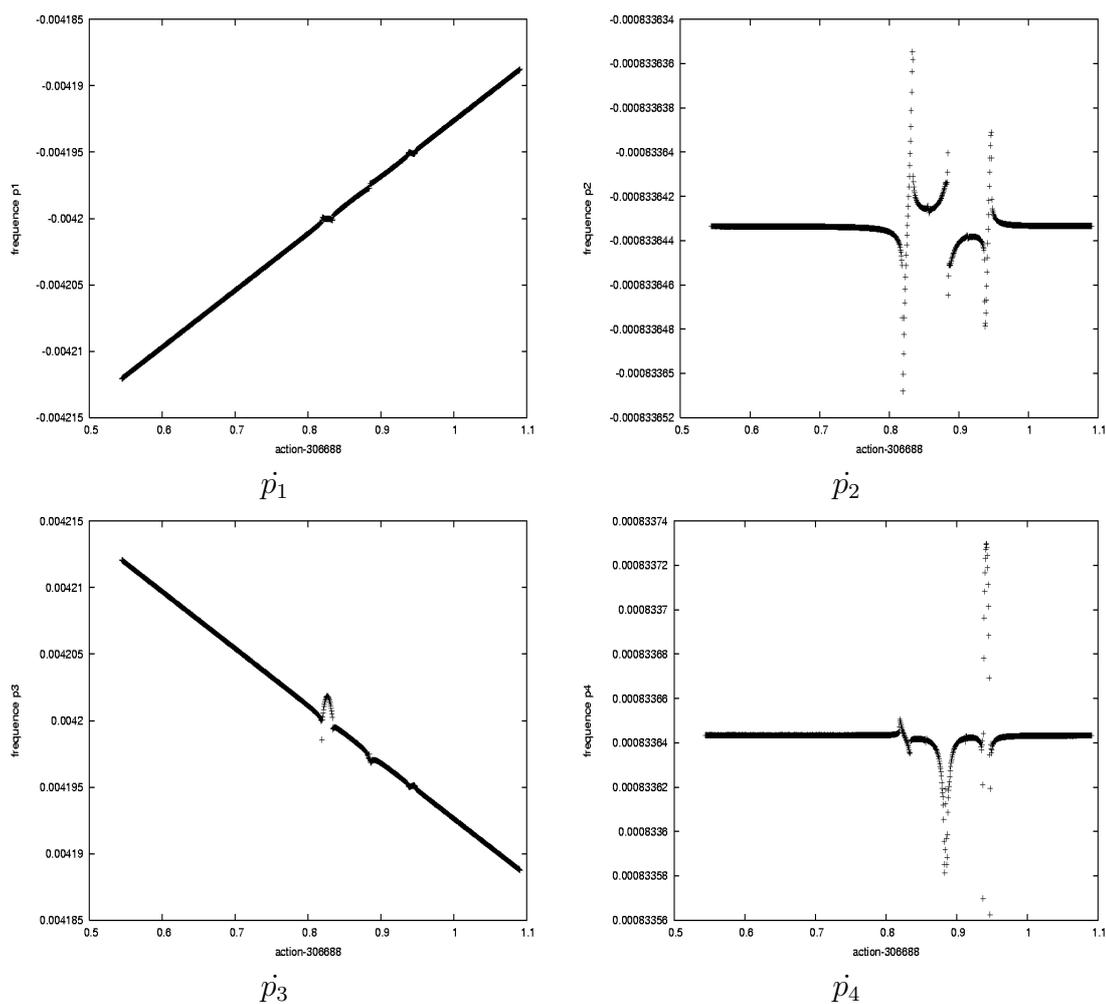


FIG. 6.10 – Evolution des fréquences en fonction de l'action initiale pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 8 \times 10^{-3}$. Les irrégularités dans les courbes coorespondent aux résonances. Aucun chaos n'apparaît.

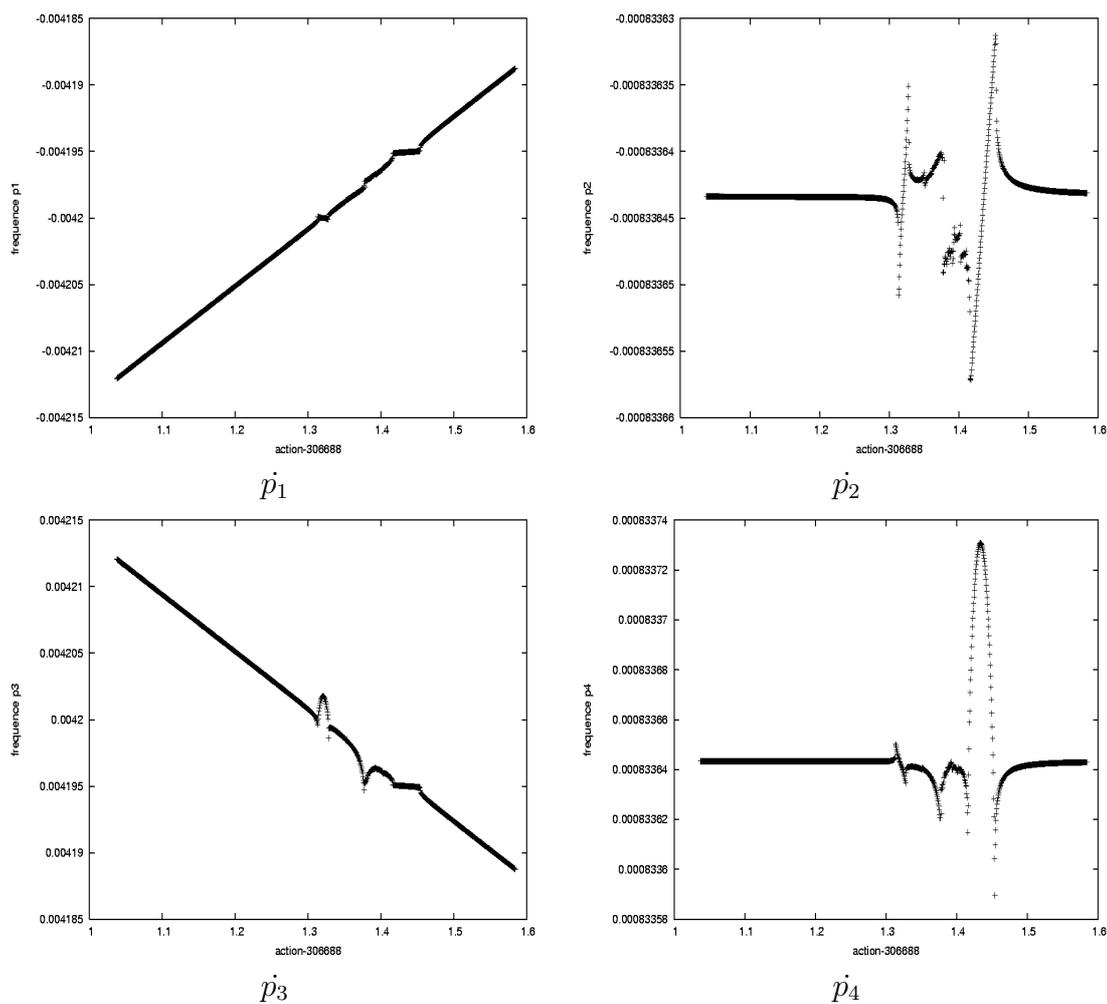


FIG. 6.11 – Évolution des fréquences en fonction de l'action initiale pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 3 \times 10^{-2}$. On peut remarquer que les courbes sont moins régulières que dans la figure précédente (γ_3 était moins important), néanmoins les 3 résonances sont toujours bien distinctes.

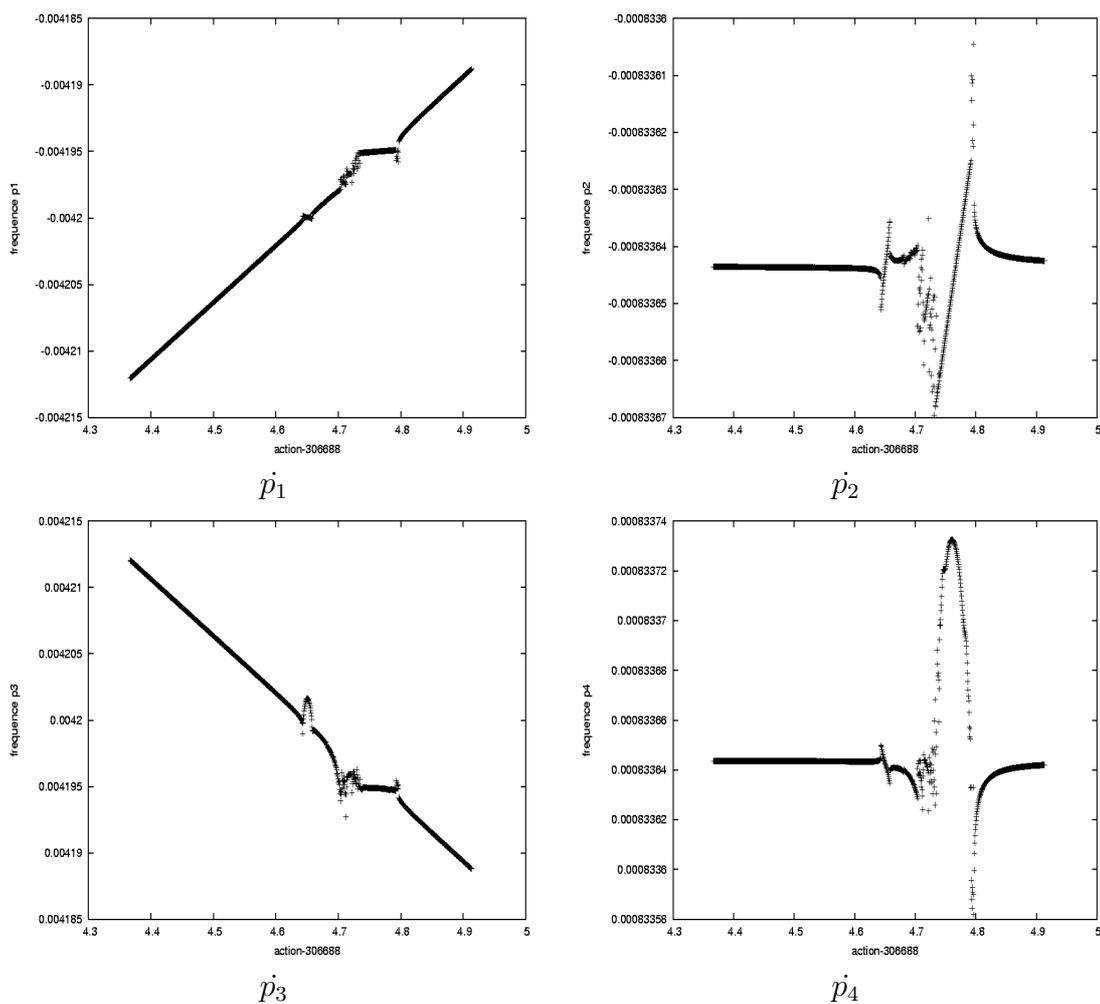


FIG. 6.12 – Évolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$. Les localisations des résonances d'arguments Φ_2 et Φ_3 ne sont plus très nettes, ce qui suggère un chevauchement de ces 2 résonances.

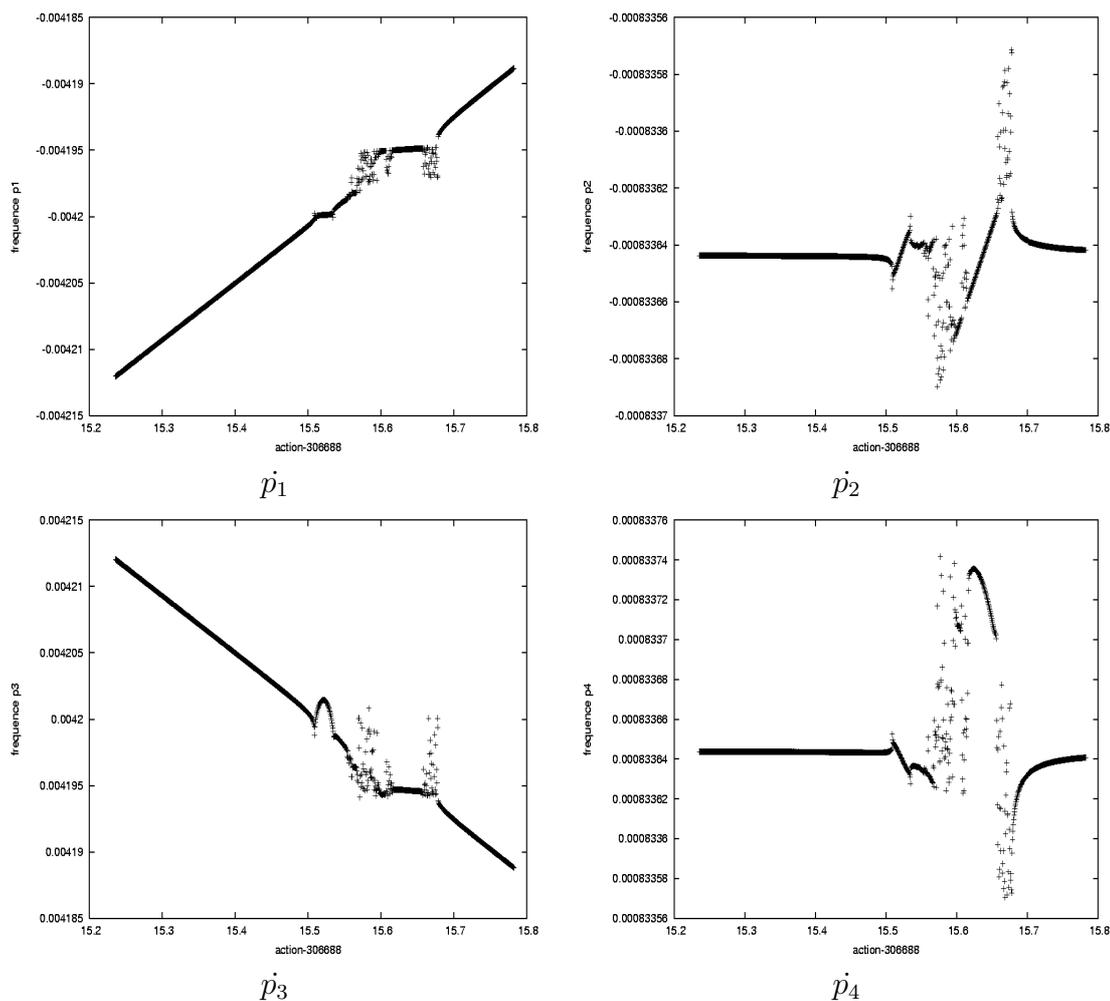


FIG. 6.13 – Évolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$. Là encore, les localisations des 2 dernières résonances ne sont plus nettes, mais surtout les courbes sont bien plus irrégulières qu'à la Figure précédente. Ceci indique qu'une hausse des inclinaisons implique une augmentation du chaos.

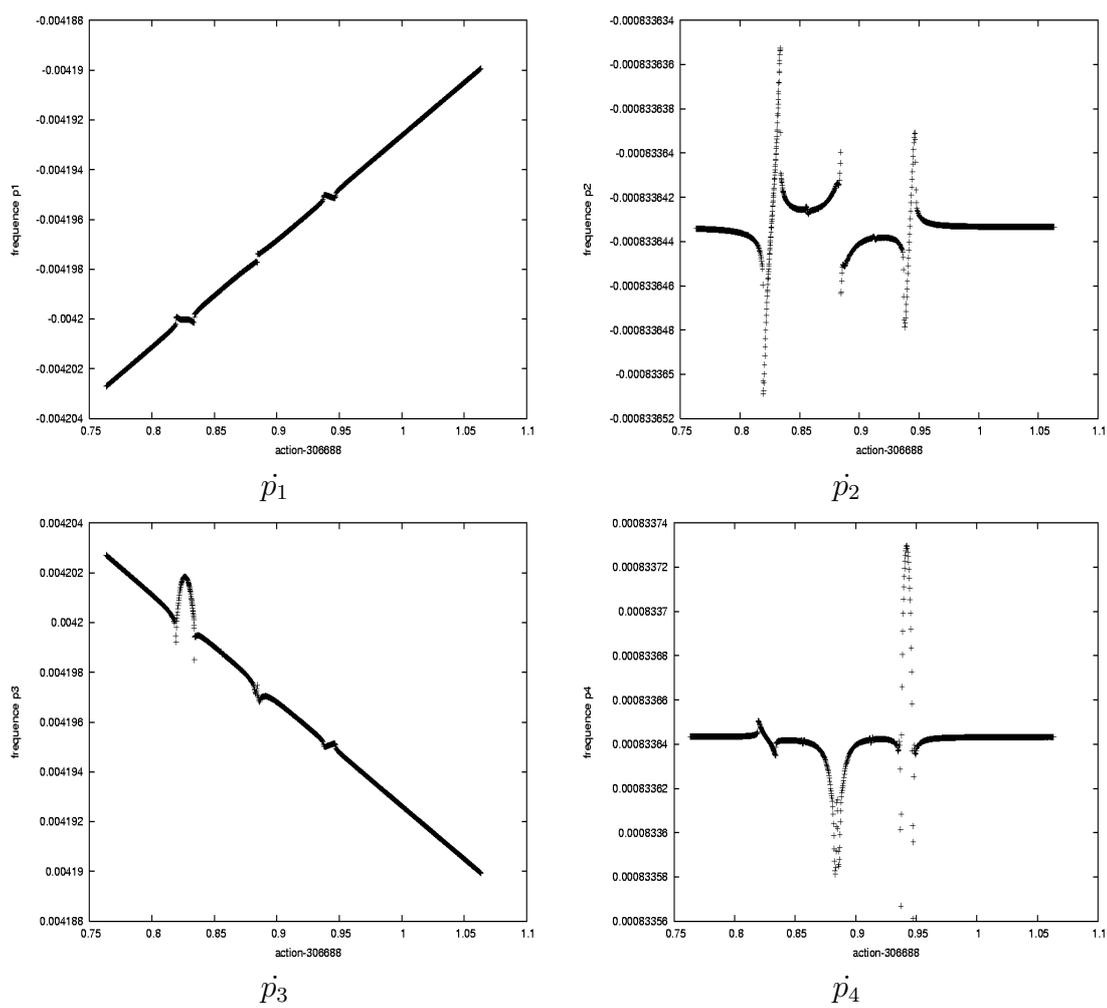


FIG. 6.14 – Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 8 \times 10^{-3}$, avec zoom sur la zone perturbée.

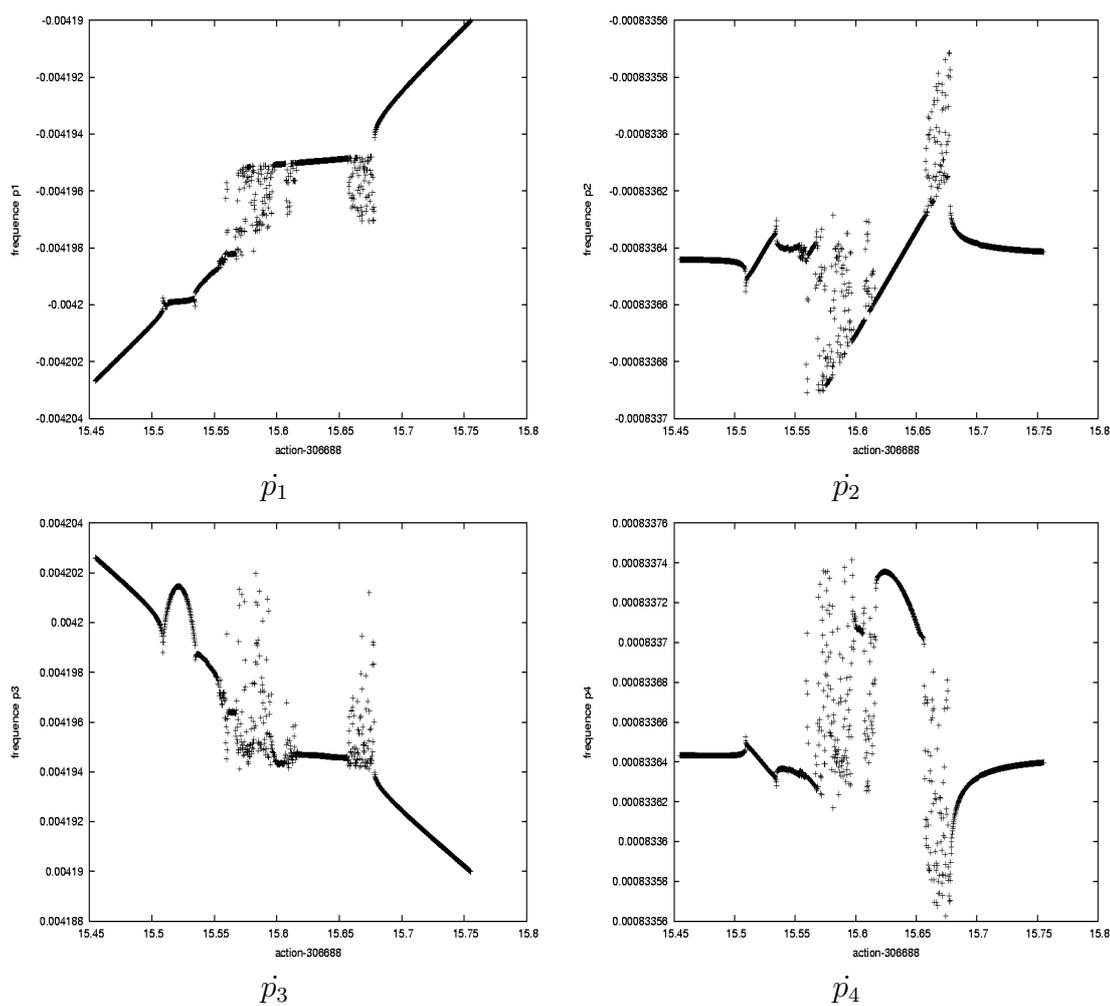


FIG. 6.15 – Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$, avec zoom sur la zone perturbée.

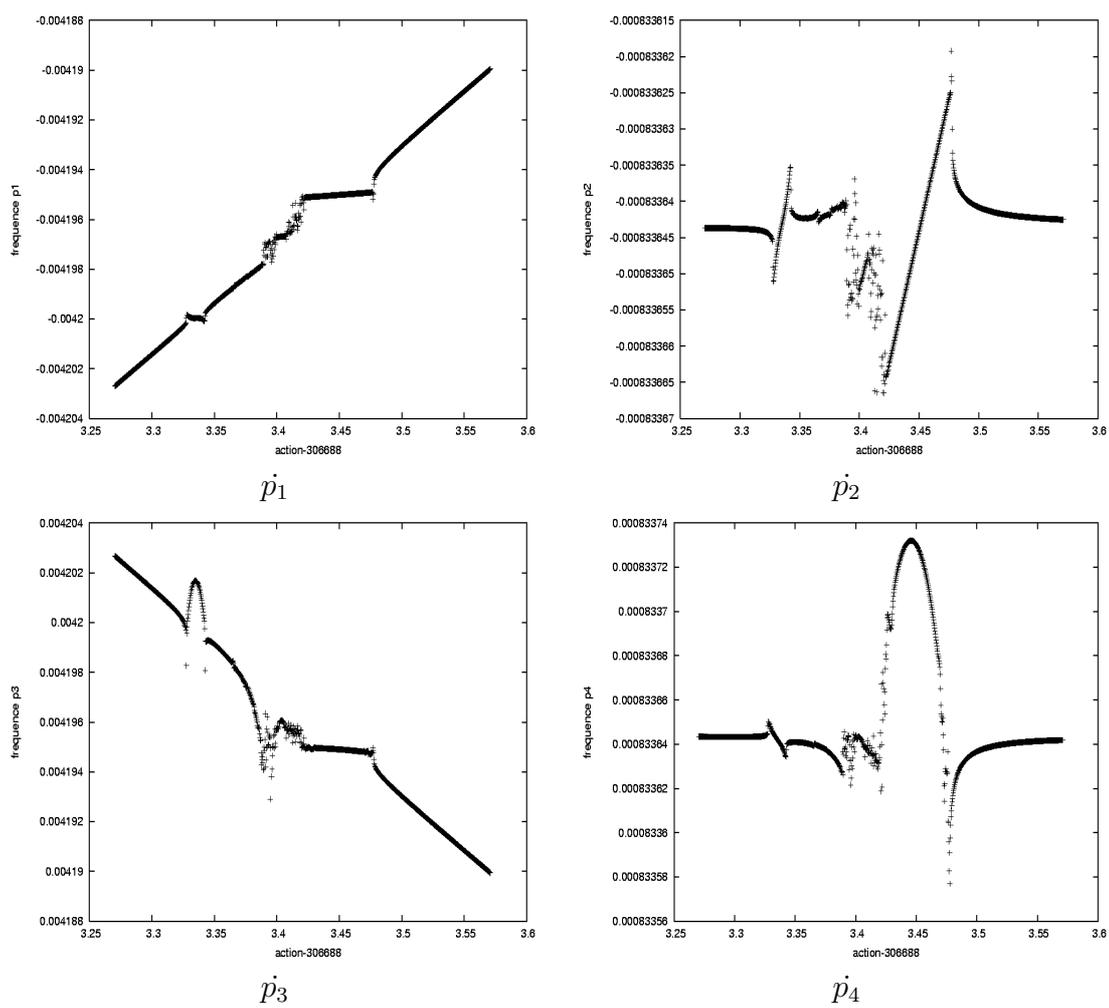


FIG. 6.16 – Evolution des fréquences en fonction de l'action pour $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 4.5 \times 10^{-2}$, avec zoom sur la zone perturbée.

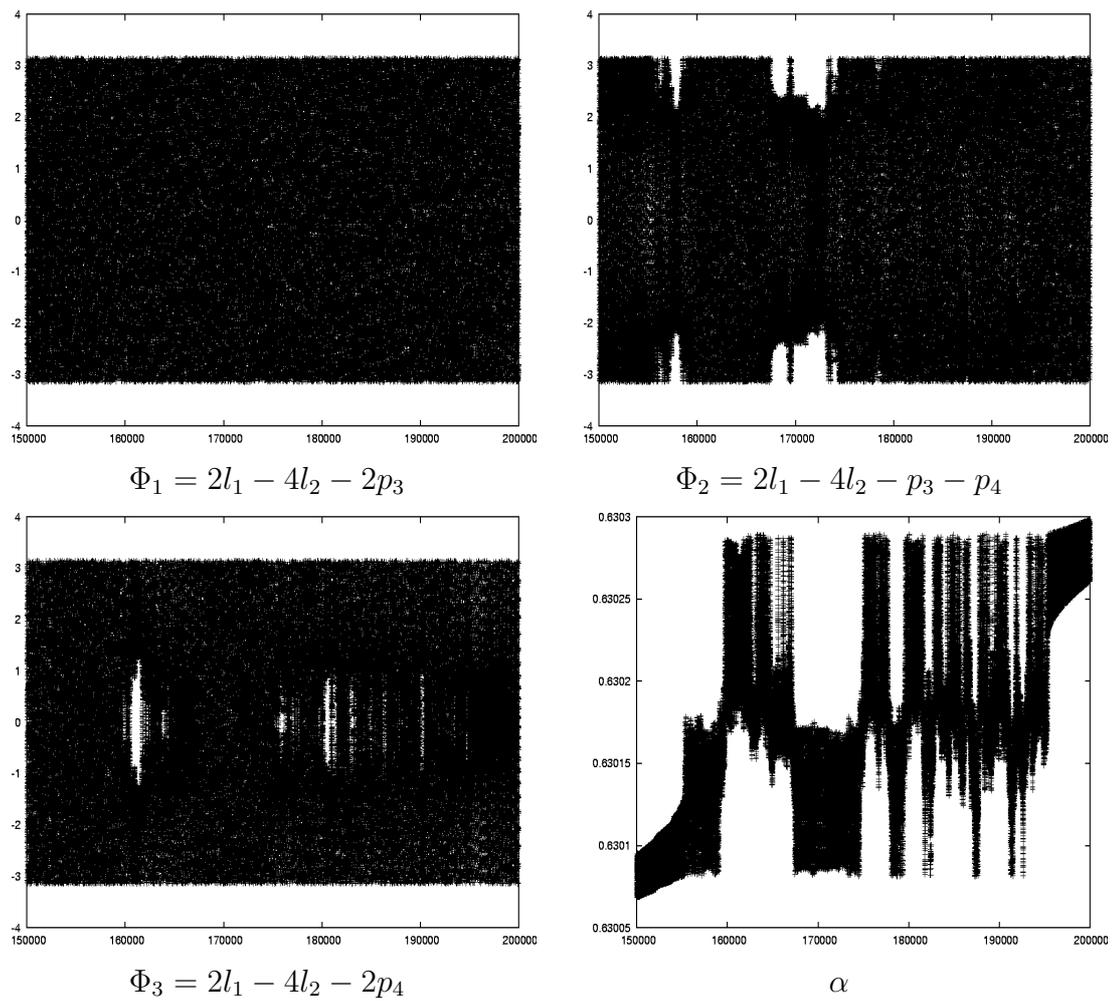
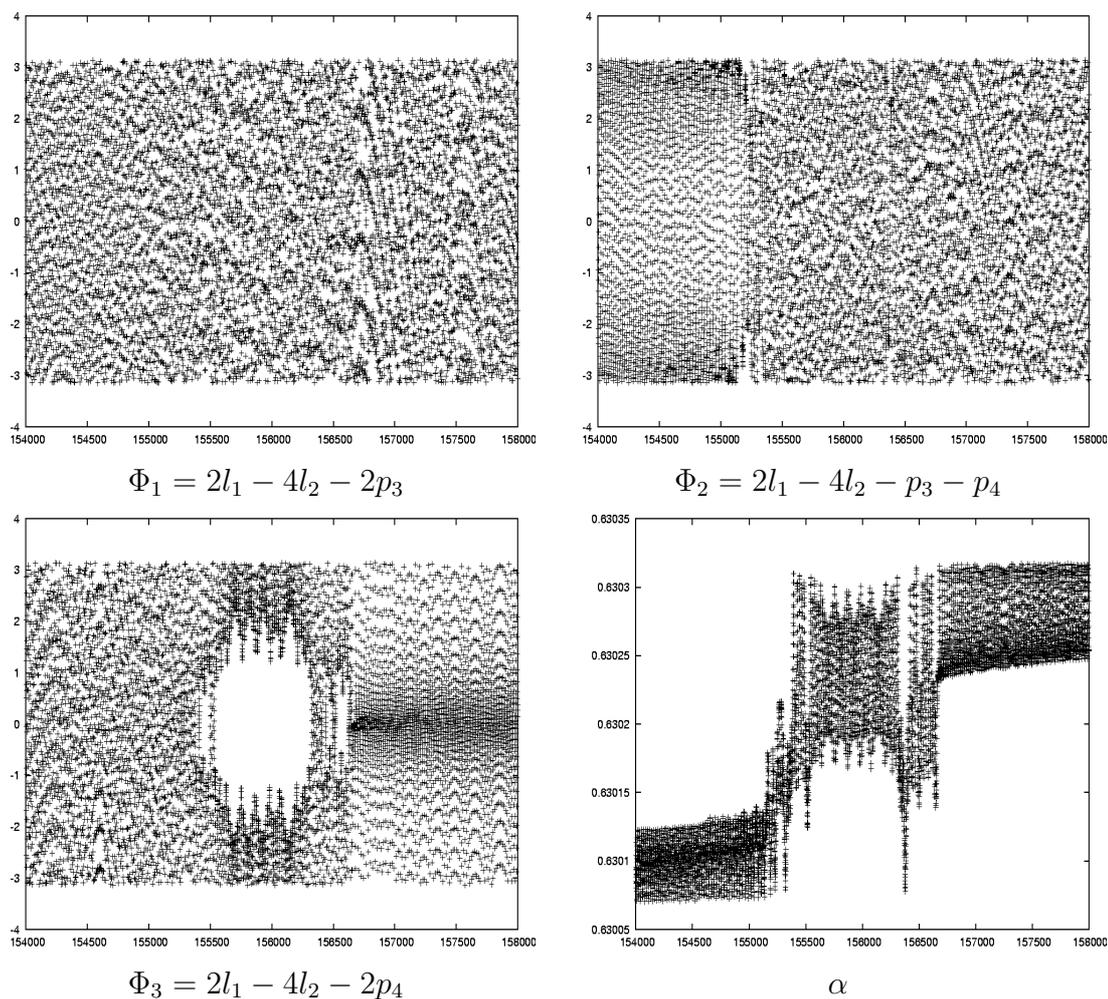
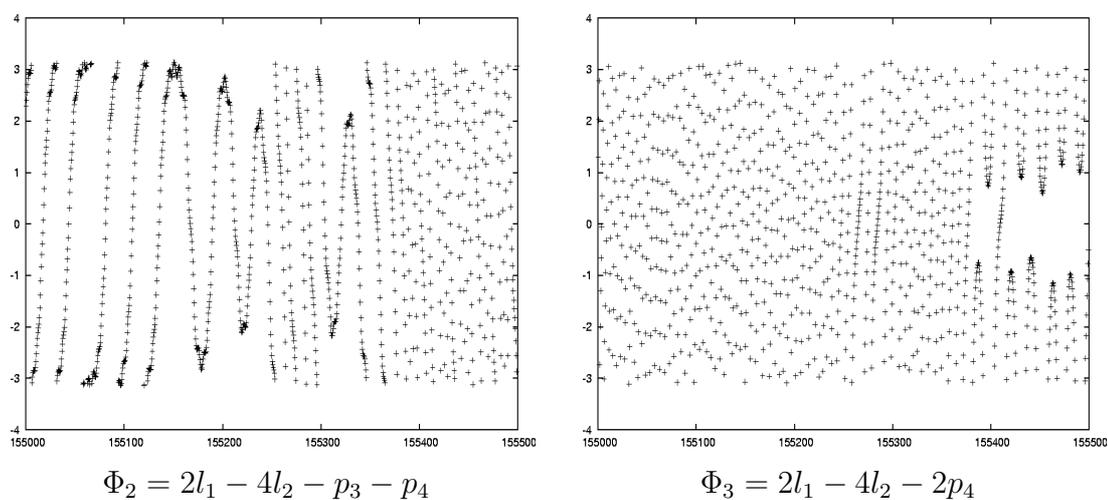
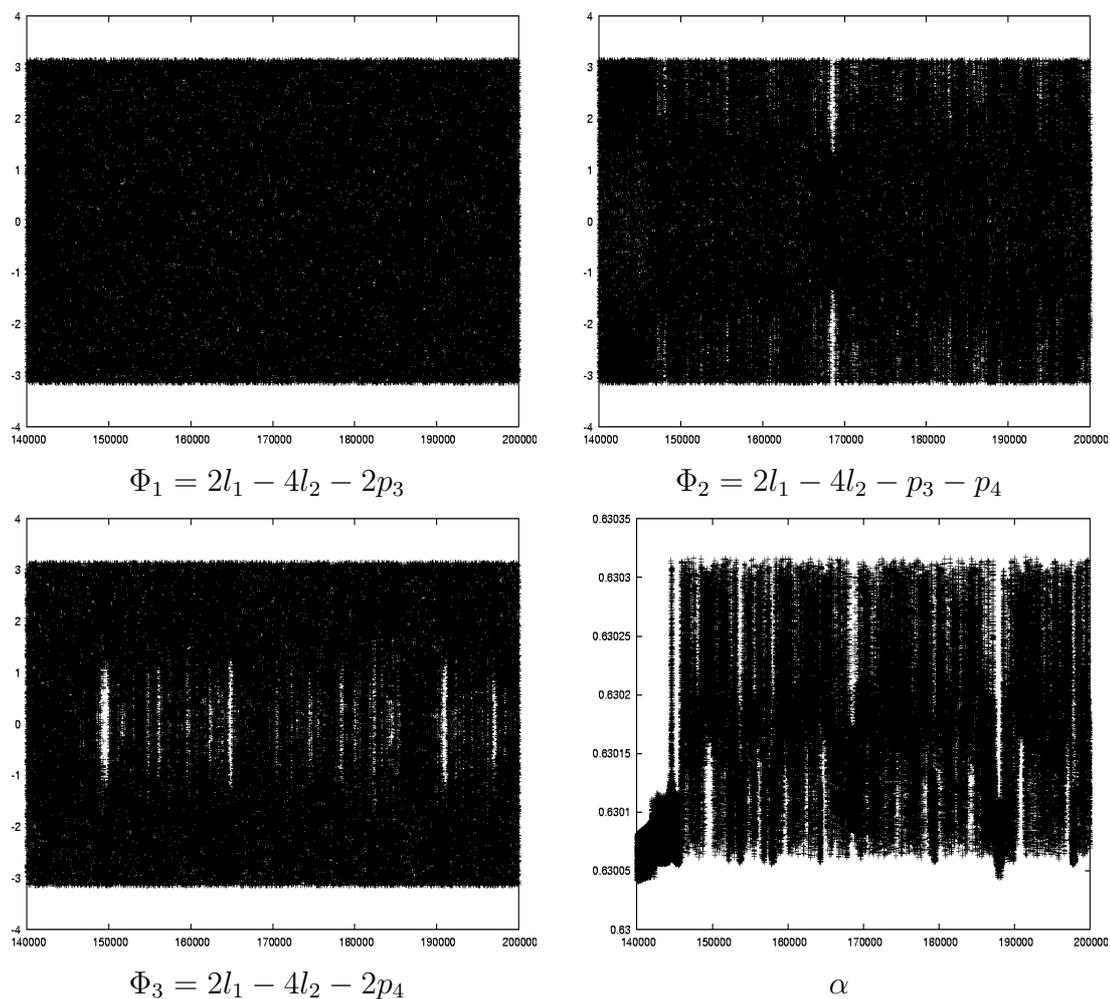
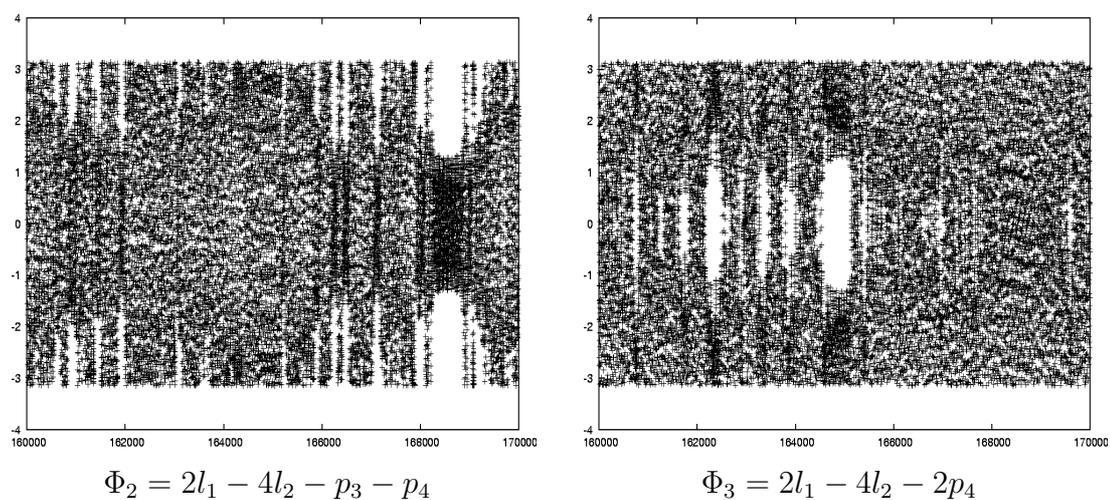


FIG. 6.17 – Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 5 \times 10^{-2}$.

FIG. 6.18 – Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.FIG. 6.19 – Zoom rapproché sur les arguments Φ_2 et Φ_3 avec $\gamma_1 = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.

FIG. 6.20 – Zoom sur les arguments avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.FIG. 6.21 – Zoom rapproché sur les arguments Φ_2 et Φ_3 avec $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ et $\gamma_3 = 7 \times 10^{-2}$.

Chapitre 7

L'inégalité de De Haerdtl : Étude analytique

Introduction

Ce chapitre a pour but une étude analytique des perturbations induites par l'inégalité de De Haerdtl $3\lambda_3 - 7\lambda_4$ entre Ganymède et Callisto. À cette fin, les résonances associées à cette inégalité seront exprimées afin d'obtenir une première appréhension du chaos induit par cette inégalité ainsi que d'essayer de déterminer les anciennes résonances possibles.

7.1 Les différents arguments

Le développement du potentiel perturbateur lié à l'inégalité de De Haerdtl donne, au degré le plus bas, c'est-à-dire au degré 4, 19 termes. Chacun des arguments de ces termes s'exprime sous la forme

$$\phi = 3\lambda_3 - 7\lambda_4 + q_1\varpi_3 + q_2\varpi_4 + q_3\delta\mathcal{L}_3 + q_4\delta\mathcal{L}_4 \quad (7.1)$$

avec $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 4$ et $q_3 + q_4$ pair d'après la règle de D'Alembert. À la résonance on a $\langle \dot{\phi} \rangle = 0$, donc $\langle 3n_3 - 7n_4 + q_1\dot{\varpi}_3 + q_2\dot{\varpi}_4 + q_3\delta\dot{\mathcal{L}}_3 + q_4\delta\dot{\mathcal{L}}_4 \rangle = 0$. Pour cette étude analytique, j'ai fait l'approximation de prendre comme vitesses des nœuds et péri-centres les valeurs trouvées par Valéry Lainey pour les éléments propres associés à ces variables. Dans ce cas, il n'y a que 19 résonances possibles. J'ai de plus considéré que seul n_3 variait entre notre époque et celle des éventuelles captures, c'est en effet de loin la valeur la plus affectée par les marées. J'ai ainsi déduit les quantités α_r correspondant aux valeurs de $\frac{a_3}{a_4}$ au centre de chaque résonance (cf. Tab.7.1), c'est-à-dire à la résonance exacte.

Une telle localisation ne suffit pas car la capture en résonance peut s'accompagner de variations du rapport des demi-grands axes α . Ceci a pour conséquence, une fois la capture effectuée, un confinement du système d'autant plus large que les variables d'excentricité et/ou d'inclinaison associées à ladite résonance sont importantes. Ainsi, à chaque argument, on peut associer une zone de résonance.

Dans le cas d'une résonance d'argument

ϕ	α_r	$f(\alpha_r)$	$\Delta\alpha$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta\Omega_3$	0.5683648985367078	0.58824	$0.02114\gamma_3^2$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	0.5683784640438814	-2.35301	$0.04229\gamma_3^{\frac{3}{2}}\sqrt{\gamma_4}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\delta\Omega_3 + 2\delta\Omega_4$	0.5683920303605243	3.53040	$0.0518\gamma_3\gamma_4$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \delta\Omega_3 + 3\delta\Omega_4$	0.5684055974867138	-2.35419	$0.0423\sqrt{\gamma_3}\gamma_4^{\frac{3}{2}}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + 2\delta\Omega_3$	0.5684100399203551	12.70766	$0.0928e_4\gamma_3$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta\Omega_4$	0.5684191654225274	0.58870	$0.02115\gamma_4^2$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	0.5684236081212789	-25.41985	$0.139e_4\sqrt{\gamma_3\gamma_4}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_3$	0.5684237310196537	-14.11393	$0.10358\sqrt{e_3e_4\gamma_3}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + 2\delta\Omega_4$	0.5684371771319292	12.71219	$0.0983e_4\gamma_4$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	0.5684373000376385	28.23360	$0.14649\sqrt{e_3e_4\gamma_3\gamma_4}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\delta\Omega_3$	0.5684374229434144	3.95733	$0.05484e_3\gamma_3$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_4$	0.5684508698654278	-14.11967	$0.10359\sqrt{e_3e_4\gamma_3}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	0.5684509927785388	-7.91647	$0.07757e_3\sqrt{\gamma_3\gamma_4}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$	0.5684551902682581	14.76909	$0.10595e_4^2$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\delta\Omega_4$	0.5684645634235459	3.95914	$0.05486e_3\gamma_4$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + 3\varpi_4$	0.5684688840865706	-37.12489	$0.16798\sqrt{e_3e_4^{\frac{3}{2}}}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\varpi_4$	0.5684825787296069	34.82326	$0.16269e_3e_4$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\varpi_3 + \varpi_4$	0.5684962741974466	-14.46451	$0.10485e_3^{\frac{3}{2}}\sqrt{e_4}$
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_3$	0.5685099704901693	2.24634	$0.04132e_4^2$

TAB. 7.1 – Localisation des résonances liées à l'inégalité de De Haerdtl. La colonne $f(\alpha_r)$ donne le coefficient intervenant dans l'amplitude du terme perturbateur.

$$\phi = p\lambda_3 - (p + q)\lambda_4 + q_1\varpi_3 + q_2\varpi_4 + q_3\delta\Omega_3 + q_4\delta\Omega_4$$

avec

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

Champenois & Vienne (1999 [36]) ont élaboré la formule suivante, qui représente l'amplitude maximale de α , à la limite entre libration et circulation de l'argument résonant, lorsque la résonance est considérée comme isolée :

$$\Delta\alpha = 4p^{\frac{2}{3}}(p + q)^{-\frac{5}{3}}y\sqrt{\frac{1}{3}[p^2\alpha_r^{-2}m_4 + (p + q)^2m_3]}|f(\alpha_r)| \quad (7.2)$$

avec

$$y = \sqrt{|e_3^{|q_1|} e_4^{|q_2|} \gamma_3^{|q_3|} \gamma_4^{|q_4|}|}$$

Afin de représenter ces différentes résonances sur une même figure, on utilise en ordonnée la quantité $\frac{y}{y_1}$, y_1 étant la valeur actuelle de y . Il faudrait en fait prendre la valeur de y à la traversée de la séparatrice, mais cette valeur est très difficile à évaluer pour l'instant. Lorsque 2 séparatrices s'intersectent pour $y \leq y_1$, alors il y a recouvrement de 2 zones de résonance. Dans ce cas, le système se trouve dans une zone chaotique dominée par la diffusion de Chirikov (1979 [37]), qui est la diffusion induite lorsque le système hésite entre 2 résonances. Une fois le recouvrement atteint, la formule (7.2) n'est plus valide car les 2 résonances ne peuvent plus être considérées comme isolées. La diffusion de Chirikov induit donc une déformation des lignes de résonance.

On constate que les différentes résonances associées à l'inégalité de De Haerdtl sont très fines, il n'y a que 3 zones de recouvrement pour $y \leq y_1$. Ces zones concernent :

1. l'une les arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_3$ pour $\alpha \approx 0.568424$
2. l'autre les arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\delta\Omega_3$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + 2\delta\Omega_4$ (recouvrement entre 3 résonances) pour $\alpha \approx 0.568437$
3. et la troisième les arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_4$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$ pour $\alpha \approx 0.568451$.

Ces 3 zones de recouvrement sont des zones de chaos car elles remplissent les conditions du critère de Chirikov. Il n'est pas a priori interdit de considérer les autres résonances comme isolées, dans la suite nous essaierons d'établir des probabilités de capture dans certaines de ces résonances.

7.2 Les équations

Je me suis inspiré de l'étude de Henrard et de Vleeschauwer (1988 [90]) sur une résonance d'ordre 2, notamment dans le choix des variables. Le hamiltonien H du problème planétaire à 3 corps peut notamment être écrit sous la forme $H = h + V_3 + V_4$ avec :

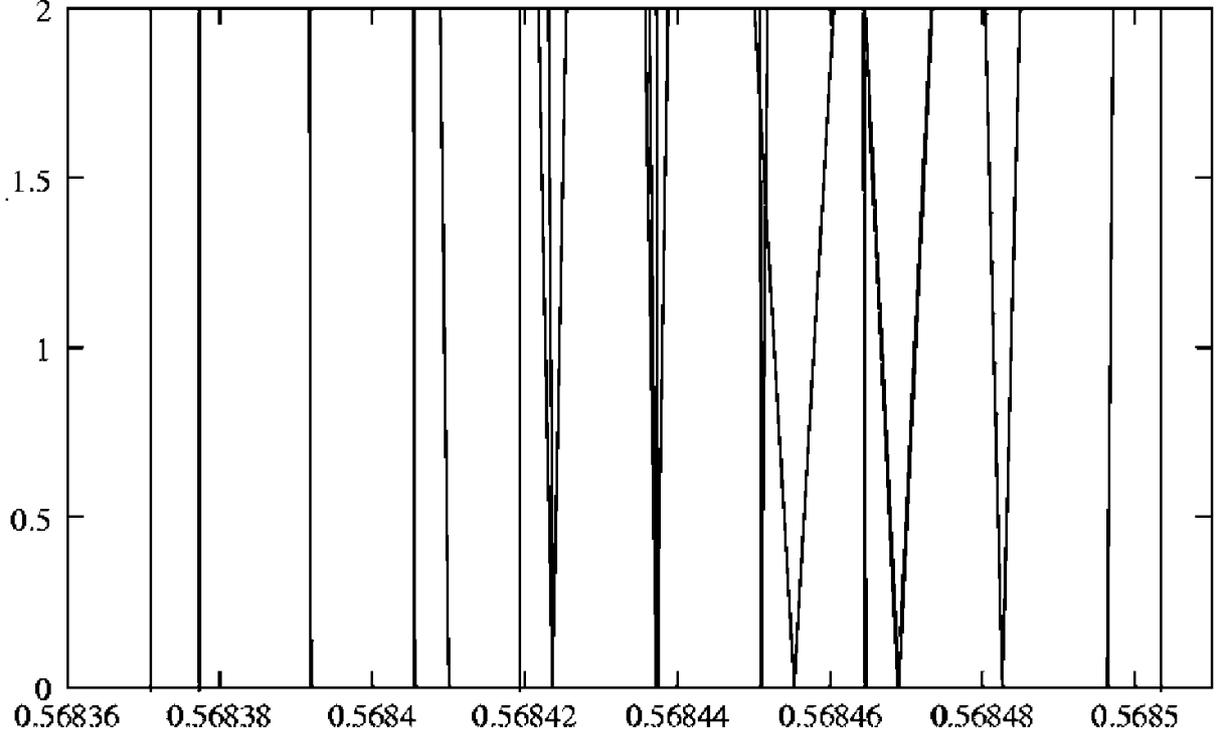


FIG. 7.1 – Localisation des résonances entre Ganymède et Callisto pour l'inégalité de De Haerdtl. α est en abscisses, $\frac{y}{y_1}$ en ordonnées.

$$h = -\frac{Gm_0m_3}{2a_3} - \frac{Gm_0m_4}{2a_4} - Gm_3m_4 \left[\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} - \frac{\langle \vec{r}_3, \vec{r}_4 \rangle}{r_4^3} \right] \quad (7.3)$$

et

$$V_i = -\frac{Gm_0m_i}{2a_i} J_2 \left(\frac{R}{a_i} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2}e_i^2 - 6\gamma_i^2 \right) \quad (7.4)$$

où l'indice 0 se réfère à Jupiter, 3 à Ganymède et 4 à Callisto. Les termes de la forme $-\frac{Gm_0m_i}{2a_i}$ dans h sont les termes képlériens associés à chacun des 2 satellites, tandis que le terme

$$-Gm_3m_4 \left[\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} - \frac{\langle \vec{r}_3, \vec{r}_4 \rangle}{r_4^3} \right]$$

décrit la perturbation mutuelle. Ce sont les variables de Jacobi qui sont utilisées ici, c'est-à-dire que le centre de Ganymède est repéré par rapport au centre de Jupiter, et que le centre de Callisto est repéré par rapport au centre de masse du système {Jupiter+Ganymède}. L'utilisation de ces variables permet d'écrire un potentiel perturbateur commun aux 2 satellites, c'est le développement de ce potentiel au minimum au degré 4 en excentricité-inclinaison et à l'ordre 1 des masses qui fera apparaître les termes associés aux 19 arguments évoqués plus haut. En fait, on peut écrire :

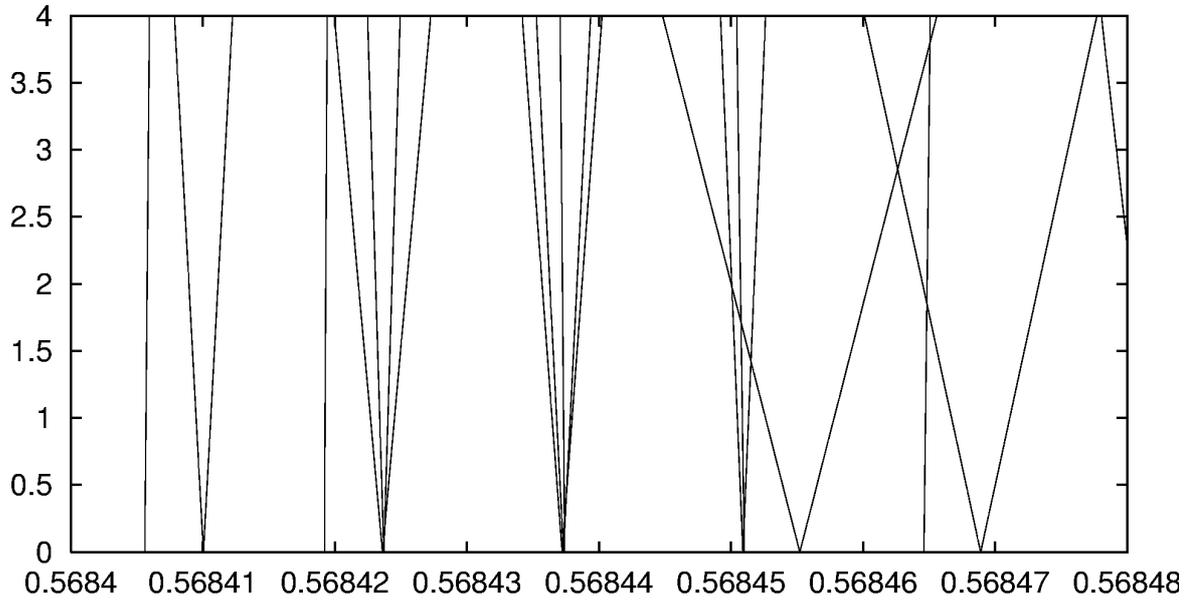


FIG. 7.2 – Localisation des résonances entre Ganymède et Callisto. Zoom sur la zone où il y a le plus de résonances, avec notamment les recouvrements. Un recouvrement des résonances à $y = y_1$ est condition suffisante à l'apparition de chaos.

$$-Gm_3m_4 \left[\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} - \frac{\langle \vec{r}_3, \vec{r}_4 \rangle}{r_4^3} \right] = -\frac{Gm_3m_4(m_0 + m_3)^3}{m_0^2(m_0 + m_3 + m_4)a_4} \times \quad (7.5)$$

$$\sum f(\alpha) e_3^{|j_3|} e_4^{|j_4|} \gamma_3^{|k_3|} \gamma_4^{|k_4|} \cos(p\lambda_3 - (p+q)\lambda_4 + j_3\varpi_3 + j_4\varpi_4 + k_3\Omega_3 + k_4\Omega_4)$$

où les coefficients i, j , vérifient la propriété de D'Alembert, c'est-à-dire qu'on a :

$$j_3 + j_4 + k_3 + k_4 = q$$

et $k_3 + k_4$ est pair. On a aussi

$$\alpha = \frac{a_3}{a_4}$$

f est une fonction de α liée aux coefficients de Laplace, elle est donc propre à l'argument considéré.

Les 2 termes V_i (c'est-à-dire V_3 et V_4) représentent la perturbation des orbites de chacun des 2 satellites par l'aplatissement du corps central, qui n'est pas réellement ici Jupiter car le J_2 est devenu J_{2g}^* et J_{2c}^* pour inclure artificiellement les effets séculaires d'Io et d'Europe sur les nœuds et péricentres. Ainsi, on obtient pour les précessions de ces arguments des valeurs réalistes, en accord avec celles données par Lainey [110]. Seules les variations séculaires a périodiques (ne dépendant d'aucun argument) sont représentées ici, les termes périodiques disparaissant par moyennisation.

J'utilise dans un premier temps les variables canoniques suivantes :

$$\lambda_3, L_3 = m_3 \sqrt{Gm_0 \mu_3 a_3}$$

$$\lambda_4, L_4 = m_4 \sqrt{Gm_0 \mu_4 a_4}$$

$$p_1 = -\varpi_3, \quad P_1 = L_3 \left[1 - \sqrt{1 - e_3^2} \right]$$

$$p_2 = -\varpi_4, \quad P_2 = L_4 \left[1 - \sqrt{1 - e_4^2} \right]$$

$$p_3 = -\Omega_3, \quad P_3 = 2L_3 \gamma_3^2 \sqrt{1 - e_3^2}$$

$$p_4 = -\Omega_4, \quad P_4 = 2L_4 \gamma_4^2 \sqrt{1 - e_4^2}$$

avec

$$\mu_3 = \frac{m_0}{m_0 + m_3}$$

et

$$\mu_4 = \frac{m_0 + m_3}{m_0 + m_3 + m_4}$$

Ces variables sont dites “variables de Jacobi”, elles permettent d’écrire le hamiltonien H sous la forme :

$$H = h_3 + h_4 + h_{34} + V_3 + V_4 \quad (7.6)$$

avec

$$h_3 = -\frac{G^2 m_0^2 m_3^3 \mu_3}{2L_3^2} \quad (7.7)$$

(terme képlérien associé à Ganymède)

$$h_4 = -\frac{G^2 m_0^2 m_4^3 \mu_4}{2L_4^2} \quad (7.8)$$

(terme képlérien associé à Callisto) et

$$h_{34} = -\sum \frac{G^2 m_3 m_4^3 \mu_4^2}{\mu_3^2 L_4^2} m_0 f(\alpha) e_3^{|j_3|} e_4^{|j_4|} \gamma_3^{|k_3|} \gamma_4^{|k_4|} \cos(\phi) \quad (7.9)$$

avec $\phi = p\lambda_3 - (p+q)\lambda_4 - j_3 p_1 - j_4 p_2 - k_3 p_3 - k_4 p_4$, il s’agit du terme de perturbation mutuelle, c’est-à-dire inter-satellites.

J’ai laissé les quantités e_i et γ_i dans l’expression du potentiel perturbateur mutuel 7.9 pour des raisons de lisibilité, ces paramètres dynamiques s’expriment ainsi :

$$e_i = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{P_{i-2}}{L_i}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2P_{i-2}}{L_i}}$$

et

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{P_i}{2(L_i - P_{i-2})}} \approx \sqrt{\frac{P_i}{2L_i}}$$

car les variables P sont petites devant les variables L , elles sont de l'ordre de grandeur des $e_i^2 L_i^2$ et $\gamma_i^2 L_i^2$.

En remplaçant les paramètres dynamiques par leurs expressions exactes dans les nouvelles variables dans (7.4), on obtient :

$$V_i = -\frac{G^4 m_0^4 m_i^7}{2L_i^6} \mu_i^3 J_2 R^2 \left(1 + 3\frac{P_{i-2}}{L_i} - 3\frac{P_i}{L_i}\right) \quad (7.10)$$

J'ai ensuite effectué un changement de variables canonique afin que les termes résonants soient des combinaisons linéaires simples des variables d'angles :

$$s_1 = (4p_1 - k\lambda_3 + (k+4)\lambda_4)/4, \quad S_1 = P_1$$

$$s_2 = (4p_2 - k\lambda_3 + (k+4)\lambda_4)/4, \quad S_2 = P_2$$

$$s_3 = (4p_3 - k\lambda_3 + (k+4)\lambda_4)/4, \quad S_3 = P_3$$

$$s_4 = (4p_4 - k\lambda_3 + (k+4)\lambda_4)/4, \quad S_4 = P_4$$

$$\phi_1 = \lambda_3, \quad \Phi_1 = L_3 + \frac{k}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

$$\phi_2 = \lambda_4, \quad \Phi_2 = L_4 - \frac{k+4}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

avec $k = 3$ dans notre cas.

En exprimant les différentes composantes du hamiltonien H dans les nouvelles variables et en développant au degré 2 en S_i , on obtient :

$$h_3 = a_0 + a_1 \sum_{i=1}^4 S_i + a_2 \left(\sum_{i=1}^4 S_i \right)^2 \quad (7.11)$$

$$h_4 = b_0 + b_1 \sum_{i=1}^4 S_i + b_2 \left(\sum_{i=1}^4 S_i \right)^2 \quad (7.12)$$

$$V_3 = c_0 + c_1 (S_1 - S_3) + c_2 \sum_{i=1}^4 S_i \quad (7.13)$$

J_{2q}^*	1.915×10^{-2}	
J_{2c}^*	2.1×10^{-2}	
μ_1	0.999921963127	
μ_2	0.999943324289	
S_1	$173.1M_{\gamma_+}$	km^2j^{-1}
S_2	$1853M_{\gamma_+}$	km^2j^{-1}
S_3	$411.6M_{\gamma_+}$	km^2j^{-1}
S_4	$736.1M_{\gamma_+}$	km^2j^{-1}
Φ_1	7.852138478×10^7	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-1}$
Φ_2	7.562890292×10^7	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-1}$
a_0	-3.447285418×10^7	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-2}$
b_0	-1.423810359×10^7	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-2}$
c_0	-2.99030251×10^3	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-2}$
e_0	-4.301114198×10^2	$M_{\gamma_+} km^2 j^{-2}$
a_1	-0.658537562	j^{-1}
b_1	0.658919548	j^{-1}
a_2	$-9.435088688 \times 10^{-9}$	$M_{\gamma_+}^{-1} km^{-2}$
b_2	$-2.287051286 \times 10^{-8}$	$M_{\gamma_+}^{-1} km^{-2}$
c_1	$-1.142479537 \times 10^{-4}$	j^{-1}
c_2	$-1.713719304 \times 10^{-4}$	j^{-1}
e_1	$-1.706139068 \times 10^{-5}$	j^{-1}
e_2	$5.971486739 \times 10^{-5}$	j^{-1}

TAB. 7.2 – Évaluation numérique des termes des h_i, V_i

$$V_4 = e_0 + e_1(S_2 - S_4) + e_2 \sum_{i=1}^4 S_i \quad (7.14)$$

Ces différentes quantités sont évaluées numériquement dans la Table 7.2, cette table permet de se rendre compte de l'ordre de grandeur des différentes contributions. On peut remarquer que les quantités principales sont a_1 et b_1 , représentant le degré 1 (en S_i) du potentiel képlérien. Ces quantités sont en valeur absolue très proches l'une de l'autre du fait de la quasi-commensurabilité entre les moyens mouvements de Ganymède et Callisto. Ces valeurs devant être soustraites (du fait des signes opposés de a_1 et b_1), il est fondamental d'être précis quant à leurs valeurs numériques. La différence de ces 2 quantités pourrait devenir inférieure aux autres termes du hamiltonien. Les termes a_2 et b_2 représentent la contribution des termes képlériens de degré 2. Quant à c_1, c_2, e_1 et e_2 , ils sont liés aux termes en J_2 de degré 1 en excentricité/inclinaison.

Ainsi, la quantité $hV = h_3 + h_4 + V_3 + V_4$ s'écrit :

$$hV = A_0 + \sum_{i=1}^4 A_i S_i + A_5 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 S_i S_j \quad (7.15)$$

A_0	-4.871437818×10^7	$M_{\oplus} km^2 j^{-2}$
A_1	$1.560809833 \times 10^{-4}$	j^{-1}
A_2	$2.532675463 \times 10^{-4}$	j^{-1}
A_3	$3.845768907 \times 10^{-4}$	j^{-1}
A_4	$2.873903277 \times 10^{-4}$	j^{-1}
A_5	$-3.230547726 \times 10^{-8}$	$M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$

TAB. 7.3 – Premiers coefficients du hamiltonien hV

Ces termes sont évalués Table 7.3. On y retrouve la prépondérance de la partie képlérienne, c'est-à-dire h_3 et h_4 . En effet, avec les valeurs actuelles des paramètres physiques la somme des termes képlériens du premier degré est d'un ordre de grandeur nettement supérieur aux autres termes malgré la soustraction de valeurs numériques très proches. On peut remarquer aussi que le terme A_5 est très proche des valeurs $a_2 + b_2$ et $2(a_2 + b_2)$ ($-3.230560155 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$ et $-6.46112031 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$).

Le développement de la perturbation mutuelle est relativement facile à exprimer dans le cas des termes de l'inégalité de De Haerdtl lorsqu'on se limite au degré le plus bas, c'est-à-dire 4 en excentricité-inclinaison ou encore 2 en S_i . Dans ce cas on a $p = 3$ et $q = 4$ (inégalité de caractéristique 4). On peut écrire :

$$H_{DH} = \sum K_{j_3 j_4 k_3 k_4} S_1^{\frac{|j_3|}{2}} S_2^{\frac{|j_4|}{2}} S_3^{\frac{|k_3|}{2}} S_4^{\frac{|k_4|}{2}} \cos(j_3 s_1 + j_4 s_2 + k_3 s_3 + k_4 s_4) \quad (7.16)$$

avec $j_3 + j_4 + k_3 + k_4 = 4$ et

$$K_{j_3 j_4 k_3 k_4} = -2^{\frac{|j_3|+|j_4|-|k_3|-|k_4|}{2}} \frac{G^2 m_3 m_4^3 \mu_4^2 m_0}{\mu_3^2 \Phi_1^{\frac{|j_3|+|k_3|}{2}} \Phi_2^{2+\frac{|j_4|+|k_4|}{2}}} f_{j_3 j_4 k_3 k_4}(\alpha)$$

On peut utiliser d'autres termes issus de la perturbation mutuelles comme les termes indépendants de tout argument. Pour exprimer ces termes, j'ai utilisé les procédures Maple de Luc Duriez [63], que l'on peut trouver en ligne à l'adresse

http://www.univ-lille1.fr/lal/mecanique_celeste.html

Je me suis arrêté au degré 4 des excentricités et inclinaisons. La partie sans argument s'écrit :

$$H_a = -\frac{G^2 m_1 m_2^3 \mu_2^2}{\mu_1^2 L_2^2} m_0 \left(f_0(\alpha) + (e_1^2 + e_2^2 - 4\gamma_1^2 - 4\gamma_2^2) f_1(\alpha) + e_1^4 f_2(\alpha) + e_2^4 f_3(\alpha) \right. \\ \left. + (\gamma_1^4 + \gamma_2^4) f_4(\alpha) + (e_1^2 e_2^2 - 4e_1^2 \gamma_1^2 - 4e_1^2 \gamma_2^2 - 4e_2^2 \gamma_1^2 - 4e_2^2 \gamma_2^2 + 16\gamma_1^2 \gamma_2^2) f_5(\alpha) \right) \quad (7.17)$$

avec

$$f_0(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{9}{64} \alpha^4 + \frac{25}{256} \alpha^6 + \frac{1225}{16384} \alpha^8$$

$$f_1(\alpha) = \frac{3}{8} \alpha^2 + \frac{45}{64} \alpha^4 + \frac{525}{512} \alpha^6 + \frac{11025}{8192} \alpha^8$$

K_{4000}	$-3.240886469 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{3100}	$2.126605534 \times 10^{-11}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{2200}	$-5.217052948 \times 10^{-11}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{1300}	$5.667248628 \times 10^{-11}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0400}	$-2.297157449 \times 10^{-11}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0040}	$-5.315958205 \times 10^{-14}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0031}	$2.166664281 \times 10^{-13}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0022}	$-3.31156251 \times 10^{-13}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0013}	$2.249529917 \times 10^{-13}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0004}	$-5.730359343 \times 10^{-14}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{2020}	$-1.42895835 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{2011}	$2.912055453 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{2002}	$-1.483609891 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0220}	$-4.76409891 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0211}	$9.70869402 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{0202}	$-4.946305016 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{1120}	$5.193082203 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{1111}	$-1.058291403 \times 10^{-11}$	$M_4^{-1} km^{-2}$
K_{1102}	$5.391695371 \times 10^{-12}$	$M_4^{-1} km^{-2}$

TAB. 7.4 – Préfacteurs des perturbations de De Haerdtl. On constate que les quantités associées aux résonances en excentricité sont en valeur absolue plus importantes que celles associées aux résonances en inclinaison, ceci peut laisser présager une plus grande influence des excentricités sur la dynamique du système, cf. Eq. 7.16.

B_0	-2.443997212×10^3	$M_+ km^2 j^{-2}$
B_1	$9.929147223 \times 10^{-5}$	j^{-1}
B_2	$9.876317244 \times 10^{-5}$	j^{-1}
B_3	$1.26918083 \times 10^{-4}$	j^{-1}
B_4	$1.274463828 \times 10^{-4}$	j^{-1}
B_{11}	$-3.488222089 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{22}	$-3.769854822 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{33}	$-4.813463225 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{44}	$-5.331358441 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{12}	$-8.111020582 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{13}	$-5.978090401 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{14}	$-6.577328501 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{23}	$-5.600844465 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{24}	$-5.832050558 \times 10^{-12}$	$M_+^{-1} km^{-2}$
B_{34}	$-1.111679329 \times 10^{-11}$	$M_+^{-1} km^{-2}$

TAB. 7.5 – Valeurs des préfacteurs de la partie aperiodique, cf. Eq. 7.18

$$f_2(\alpha) = \frac{135}{512}\alpha^4 + \frac{2625}{2048}\alpha^6 + \frac{231525}{65536}\alpha^8$$

$$f_3(\alpha) = \frac{15}{32}\alpha^2 + \frac{945}{512}\alpha^4 + \frac{4725}{1024}\alpha^6 + \frac{606375}{65536}\alpha^8$$

$$f_4(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{405}{32}\alpha^4 + \frac{2625}{64}\alpha^6 + \frac{385875}{4096}\alpha^8$$

$$f_5(\alpha) = \frac{9}{16}\alpha^2 + \frac{225}{64}\alpha^4 + \frac{11025}{1024}\alpha^6 + \frac{99225}{4096}\alpha^8$$

Le hamiltonien 7.17 exprimé avec les nouvelles variables donne :

$$H_a = B_0 + \sum_{i=1}^4 B_i S_i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i}^4 B_{ij} S_i S_j = \frac{G^2 m_1 m_2^3 \mu_2^2}{\mu_1^2 \Phi_2^2} m_0 \left(b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i S_i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i}^4 b_{ij} S_i S_j \right) \quad (7.18)$$

Pour évaluer les coefficients j'ai pris $\alpha = 0.5684$ qui est une valeur approchée qui sied à tous les termes de l'inégalité de De Haerdtl avec une précision acceptable car elle permet de connaître les 4 premiers chiffres significatifs de chaque paramètre.

Pour résumer tous ces développements, le système Ganymède+Callisto est représenté par un hamiltonien H de la forme

angle	terme	période (ans)
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta\Omega_3$	$4s_3$	13.4458
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	$3s_3 + s_4$	14.516386
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\delta\Omega_3 + 2\delta\Omega_4$	$2s_3 + 2s_4$	15.77216
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \delta\Omega_3 + 3\delta\Omega_4$	$s_3 + 3s_4$	17.265777
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + 2\delta\Omega_3$	$2s_2 + 2s_3$	17.818388
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta\Omega_4$	$4s_4$	19.071876
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	$2s_2 + s_3 + s_4$	19.748411
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_3$	$s_1 + s_2 + 2s_3$	19.767857
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_4 + 2\delta\Omega_4$	$2s_2 + 2s_4$	22.1473288
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	$s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	22.17178916
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\delta\Omega_3$	$2s_1 + 2s_3$	22.1963036
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + \varpi_4 + 2\delta\Omega_4$	$s_1 + s_2 + 2s_4$	25.24134196
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + \delta\Omega_3 + \delta\Omega_4$	$2s_1 + s_3 + s_4$	25.27311887
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$	$4s_2$	26.4053476
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\delta\Omega_4$	$2s_1 + 2s_4$	29.3402109
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \varpi_3 + 3\varpi_4$	$s_1 + 3s_3$	30.924816
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\varpi_3 + 2\varpi_4$	$2s_1 + 2s_2$	37.3108397
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\varpi_3 + \varpi_4$	$3s_1 + s_2$	47.020686
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_3$	$4s_1$	63.56225

TAB. 7.6 – Périodes associées aux termes de l'inégalité de De Haerdtl

$$\begin{aligned}
H(S_1, S_2, S_3, S_4, \Phi_1, \Phi_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \phi_1, \phi_2) = & \Gamma_0 + \sum_{i=1}^4 \Gamma_i S_i + \sum_{i=1}^4 \Gamma_{ii} S_i^2 + \sum_{j=i+1}^4 \sum_{i=1}^4 \Gamma_{ij} S_i S_j \\
& + K_{4000} S_1^2 \cos(4s_1) + K_{3100} S_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{S_2} \cos(3s_1 + s_2) + K_{2200} S_1 S_2 \cos(2s_1 + 2s_2) \\
& + K_{1300} \sqrt{S_1} S_2^{\frac{3}{2}} \cos(s_1 + 3s_2) + K_{0400} S_2^2 \cos(4s_2) + K_{0040} S_3^2 \cos(4s_3) \\
& + K_{0022} S_3 S_4 \cos(2s_3 + 2s_4) + K_{0004} S_4^2 \cos(4s_4) + K_{1111} \sqrt{S_1 S_2 S_3 S_4} \cos(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\
& + K_{2020} S_1 S_3 \cos(2s_1 + 2s_3) + K_{2011} S_1 \sqrt{S_3 S_4} \cos(2s_1 + s_3 + s_4) + K_{2002} S_1 S_4 \cos(2s_1 + 2s_4) \\
& + K_{0220} S_2 S_3 \cos(2s_2 + 2s_3) + K_{0211} S_2 \sqrt{S_3 S_4} \cos(2s_2 + s_3 + s_4) + K_{0202} S_2 S_4 \cos(2s_2 + 2s_4) \\
& + K_{1120} \sqrt{S_1 S_2 S_3} \cos(s_1 + s_2 + 2s_3) + K_{1102} \sqrt{S_1 S_2 S_4} \cos(s_1 + s_2 + 2s_4) \\
& + K_{0031} S_3^{\frac{3}{2}} \sqrt{S_4} \cos(3s_3 + s_4) + K_{0013} \sqrt{S_3 S_4} \cos(s_3 + 3s_4)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

avec

$$\Gamma_0 = A_0 + B_0$$

$$\Gamma_i = A_i + B_i$$

ij	Γ	A	B
0	$-4.871682218 \times 10^7 M_{\oplus} km^2 j^{-2}$	-4.871437818×10^7	-2.443997212×10^3
1	$2.553724555 \times 10^{-4} j^{-1}$	$1.560809833 \times 10^{-4}$	$9.929147223 \times 10^{-5}$
2	$3.520307187 \times 10^{-4} j^{-1}$	$2.532675463 \times 10^{-4}$	$9.876317244 \times 10^{-5}$
3	$5.114949737 \times 10^{-4} j^{-1}$	$3.845768907 \times 10^{-4}$	$1.26918083 \times 10^{-4}$
4	$4.148367105 \times 10^{-4} j^{-1}$	$2.873903277 \times 10^{-4}$	$1.274463828 \times 10^{-4}$
11	$-3.230896548 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-3.230547726 \times 10^{-8}$	$-3.488222089 \times 10^{-12}$
12	$-6.461906554 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-8.111020582 \times 10^{-12}$
13	$-6.461693261 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-5.978090401 \times 10^{-12}$
14	$-6.461753185 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-6.577328501 \times 10^{-12}$
22	$-3.230924711 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-3.230547726 \times 10^{-8}$	$-3.769854822 \times 10^{-12}$
23	$-6.461655536 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-5.600844465 \times 10^{-12}$
24	$-6.461678657 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-5.832050558 \times 10^{-12}$
33	$-3.231029072 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-3.230547726 \times 10^{-8}$	$-4.813463225 \times 10^{-12}$
34	$-6.462207131 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-6.461095452 \times 10^{-8}$	$-1.111679329 \times 10^{-11}$
44	$-3.231080862 \times 10^{-8} M_{\oplus}^{-1} km^{-2}$	$-3.230547726 \times 10^{-8}$	$-5.331358441 \times 10^{-12}$

TAB. 7.7 – Valeurs des coefficients Γ et importance des perturbations séculaires. Ici A_5 vaut $-3.230547726 \times 10^{-8}$, c'est cette valeur qui est reportée pour A_{ii} et $2A_5$ pour A_{ij} avec $i \neq j$.

$$\Gamma_{ii} = A_5 + B_{ii}$$

$$\Gamma_{ij} = 2A_5 + B_{ij} (i \neq j)$$

La Table 7.7 indique les valeurs des coefficients Γ ainsi que la contribution des termes séculaires (B), on constate que les termes de degré 1 sont du même ordre de grandeur, mais ceux issus de la partie képlérienne viennent d'une différence de 2 termes très proches et supérieurs de 3 ordres de grandeur, donc les marées peuvent faire énormément évoluer les termes A_i du premier ordre, ce qui peut en changer l'ordre de grandeur pour devenir beaucoup plus grand ou pour être dominé par les termes séculaires.

7.3 Plage d'étude

Certains paramètres dynamiques qui caractérisent le système sont amenés à être modifiés au cours du temps (typiquement sur des échelles supérieures au million d'années) notamment sous l'effet des dissipations de marées. Ces dissipations sont en théorie d'autant plus fortes que le satellite affecté est proche de sa planète. De plus, la résonance laplacienne implique des échanges d'énergie d'Io vers Europe et Ganymède (Yoder 1979 [209]) qui entraînent les accélérations séculaires d'Europe et Ganymède. Elles sont ainsi à peu près de l'ordre de grandeur de celle d'Io (ceci est confirmé numériquement par les simulations numériques de Valéry Lainey [110] et [195]). On peut par conséquent considérer, en première approximation, que l'accélération séculaire de Callisto est négligeable par rapport à celle de Ganymède, donc

que les seuls effets de marées à prendre en compte sont les variations de demi-grand axes de Ganymède.

Actuellement, on a $\alpha = 0.5685421$, les résonances sont situées entre $\alpha = 0.56836$ et $\alpha = 0.56851$, on peut donc considérer qu'il convient d'étudier le système pour α variant entre 0.5683 et 0.5687, pour englober la zone de résonance et pour avoir un domaine assez symétrique par rapport à la configuration actuelle du système. Dans ces conditions, en considérant que l'on a toujours $a_4 = 1882758.6$ km (effets des marées sur Callisto négligés), on a

$$a_3 \in [1069971.71238km; 1070724.81582km]$$

ce qui représente, en considérant $\left| \frac{n_3}{n_3} \right| = 5 \times 10^{-11} an^{-1}$, une évolution sur environ 12 millions d'années. Pendant ce temps, en admettant la valeur $\left| \frac{n_4}{n_4} \right| = 10^{-14} an^{-1}$, le demi-grand axe de Callisto varie de moins de 2 km. Les variations des autres paramètres dynamiques (excentricités et inclinaisons de Ganymède et Callisto) sont délicates à prendre en compte car, outre les effets des marées qui sont relativement mal connus notamment pour les inclinaisons (les excentricités devraient évoluer entre 0.00187 et 0.0024 et 0.00698 et 0.00702 sous l'effet des marées), ces paramètres peuvent être forcés au cours de l'histoire du système par des résonances. Il conviendra donc, dans l'étude des résonances, de laisser des plages de variation assez larges pour les quantités S_i .

Dans les variables utilisées, ceci donne

$$\Phi_1 \in [7.850466578 \times 10^7 M_\oplus km^2 j^{-1}; 7.853228882 \times 10^7 M_\oplus km^2 j^{-1}]$$

tandis que Φ_2 sera considéré constant avec $\Phi_2 = 7.56289 \times 10^7 M_\oplus km^2 j^{-1}$. Une annulation des quantités S_i modifie les Φ_i d'environ $5 \times 10^{-3}\%$.

On a une plage de variations pour la quantité critique $a_1 + b_1$:

$$a_1 + b_1 \in [-3.877 \times 10^{-5} j^{-1}; 6.563 \times 10^{-4} j^{-1}]$$

on constate que cette quantité change de signe à la traversée des zones de résonance. La somme des contributions des termes séculaires de perturbation mutuelle et d'aplatissement vaut environ $-2.1 \times 10^{-4} j^{-1}$, ce qui n'empêchera pas le changement de signe.

7.4 Analyse des différentes résonances possibles

Le but de cette section est une étude analytique des 19 résonances a priori possibles. Ces résonances sont ici considérées comme isolées (c'est-à-dire que je considère qu'il n'y a pas de superposition entre elles), cette approximation n'est pas nécessairement légitime pour rendre compte de l'état dynamique de la commensurabilité 7 : 3 entre Ganymède et Callisto, mais elle permet une première appréhension de ce problème. Ceci permettra notamment de localiser les zones de résonance. Pour cela, les termes périodiques ne correspondant pas à l'inégalité concernée seront ignorés, et leurs variables d'action correspondantes seront considérées constantes. Selon la structure de l'angle impliqué, on peut classer les résonances possibles en 5 catégories qui nécessiteront des calculs bien différents notamment pour le tracé

des portraits de phase. Chacune de ces catégories correspond à une expression générale d'argument : $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2z_1 + 2z_2$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3z_1 + z_2$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2z_1 + z_2 + z_3$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, chacun des z pouvant correspondre à ϖ_3 , ϖ_4 , $\delta\Omega_3$ ou $\delta\Omega_4$. J'ai étudié en détail le premier cas.

$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$ où $z = \varpi_3, \varpi_4, \delta\Omega_3$ ou $\delta\Omega_4$

Ces termes correspondent à des hamiltoniens de la forme

$$H = A_0 + AS + BS^2 + KS^2 \cos(4s) \quad (7.20)$$

On obtient cette forme en considérant comme constantes les variables angulaires non concernées par cet argument, ainsi que leurs variables conjuguées. Le terme A_0 est constant, sa présence n'est pas nécessaire pour le tracé du portrait de phase, mais elle permet de localiser l'état actuel du système sur le portrait de phase.

Cette forme est identique à celle étudiée par Anne Lemaître en 1984 [129] dans le cas du problème des 3 corps restreint, par conséquent son raisonnement est applicable. Elle avait transformé le hamiltonien (7.20) en :

$$H' = R^2 - \delta R + bR^2 \cos(4r) \quad (7.21)$$

avec

$$\begin{aligned} R &= S \\ r &= \begin{cases} (\text{sign } B)s & \text{si } BK > 0 \\ (\text{sign } B)s - \frac{\pi}{4} & \text{si } BK < 0 \end{cases} \\ \delta &= -\frac{A}{B} \end{aligned}$$

et

$$b = \left| \frac{K}{B} \right|$$

Le passage en variables de Poincaré [161] $x = \sqrt{2R} \cos(r)$ et $y = \sqrt{2R} \sin(r)$ permet de tracer le portrait de phase, on a alors

$$4H' = (x^2 + y^2)^2 - 2\delta(x^2 + y^2) + b(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (7.22)$$

Ce portrait de phase est assez simple puisque, si $\delta < 0$ il n'y a pas de zone de résonance, et si $\delta > 0$ alors le portrait de phase est partagé en 3 parties : 2 zones de circulation (dites "interne" et "externe") séparées par une zone critique dite résonante (cf. Fig.7.3 et Fig.7.4, issues de Lemaître 1984 [129]). Cette zone critique contient 4 points d'équilibre stable ($x_e = \pm\sqrt{\frac{\delta}{2(1-b)}}, y_e = \pm\sqrt{\frac{\delta}{2(1-b)}} = \pm x_e$) et est "pincée" par 4 points d'équilibre instable ($x_e = \pm\sqrt{\frac{\delta}{1+b}}, y_e = 0$) et ($x_e = 0, y_e = \pm\sqrt{\frac{\delta}{1+b}}$). Elle est délimitée par des trajectoires homocliniques qui sont des trajectoires parcourues par le système en un temps infini qui correspondent à des librations d'angle 2π de l'argument considéré (il s'agit donc de la limite entre libration et circulation). L'ensemble de ces trajectoires constituent la séparatrice, que l'on peut considérer composée de la séparatrice interne (interface résonance - circulation

interne) et de la séparatrice externe (interface résonance - circulation externe). Les valeurs numériques des coefficients des 4 hamiltoniens rattachés aux 4 résonances de cette forme sont données dans les tables 7.8 à 7.15. On remarque en particulier que δ change de signe au moment où le système traverse la résonance exacte ($\langle \dot{\phi} \rangle = 0$), ce changement de signe correspond à l'apparition des deux séparatrices sur le portrait de phase.

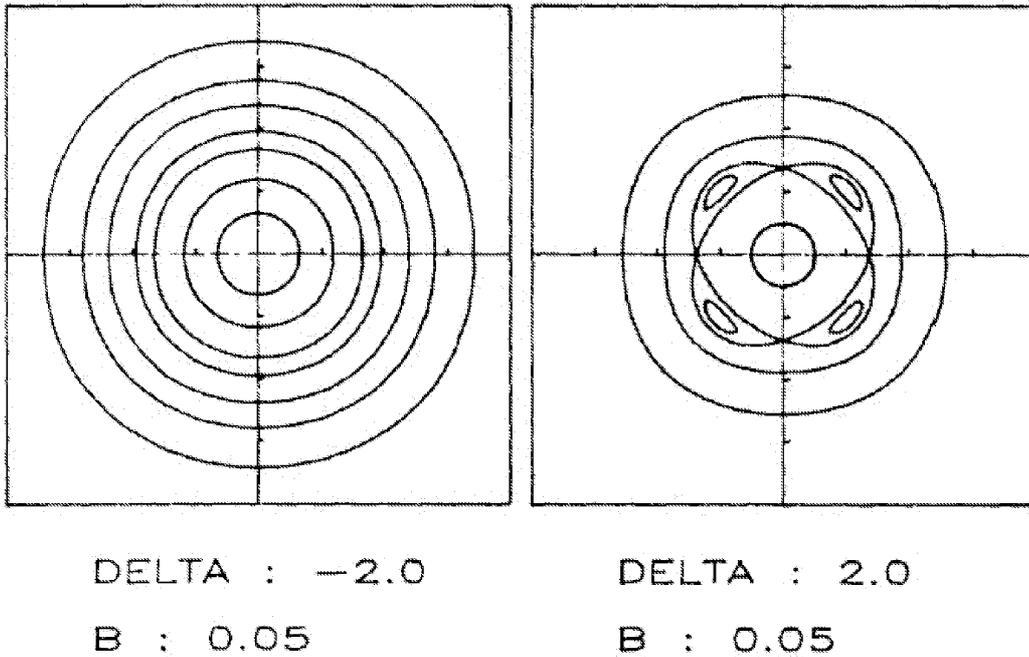


FIG. 7.3 – Exemples théoriques de portraits de phase d'une résonance de type $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$, figure issue de Lemaître 1984 [129].

Dans de tels cas, il est possible d'estimer analytiquement une probabilité de capture, moyennant l'hypothèse de l'invariant adiabatique (cf. par exemple Landau & Lifchitz 1960 [114]). Cette hypothèse consiste à considérer que l'aire englobée par la trajectoire du système sur le portrait de phase varie très peu avec le temps. Elle peut se traduire mathématiquement ainsi :

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} R(r, \alpha) dr \approx cst \quad (7.23)$$

où α est le rapport des demi-grands axes, quantités qui ne dépend que des marées lorsque le système se trouve loin de toute résonance. La dépendance de R en α indique que le système n'est en toute rigueur pas autonome, l'hypothèse de l'invariant adiabatique consiste à négliger cette dépendance, ce qui explique que la dissipation de marée n'apparaît pas dans le hamiltonien du problème.

Lorsque le système se trouve dans une zone de circulation (donc hors résonance) et que, sous l'effet des marées, il glisse dans l'espace des phases jusqu'à s'approcher d'une séparatrice, deux cas de figure peuvent apparaître : ou il va passer directement d'une zone de circulation à l'autre, ou il va être capturé par la résonance qu'il va traverser. On introduit dans ce cas

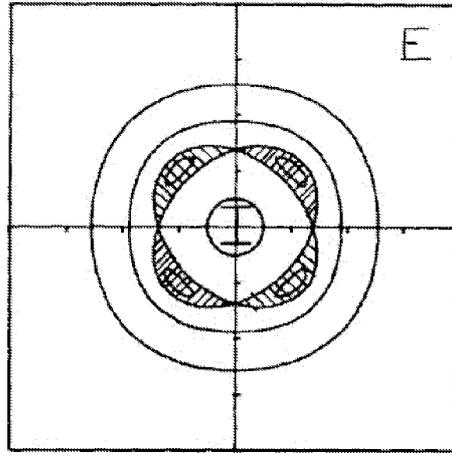


FIG. 7.4 – Les zones caractéristiques de l’espace des phases d’une résonance $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$, figure issue de Lemaître 1984 [129].

la notion de “probabilité de capture” qui va représenter la probabilité qu’a le système d’être capturé lors de la traversée de la zone de résonance.

Cette probabilité de capture est nulle lorsque δ est décroissant. En effet, lorsque δ décroît, les séparatrices se resserrent sur le portrait de phase autour de l’origine du repère. Si le système traverse la résonance lorsque δ décroît, c’est qu’il est originellement dans la zone de circulation inverse, donc rencontre d’abord la séparatrice interne. Le système évoluant sur une isocline (par l’hypothèse de l’invariant adiabatique), son énergie (assimilable à l’aire englobée par la trajectoire sur le portrait de phase) croît par rapport à celle représentée par la séparatrice. La zone de capture représentant un déficit d’énergie, le système va naturellement vers la zone d’énergie plus élevée, c’est-à-dire la zone de circulation externe. Par contre, lorsque δ croît, les séparatrices englobent une aire de plus en plus grande sur le portrait de phase, et le système se trouve dans la zone de circulation externe. Dans ce cas, l’énergie du système décroît par rapport à celle associée aux séparatrice. Ainsi, lorsque la séparatrice externe rencontre la trajectoire, le système sera attiré dans une zone d’énergie inférieure, qui peut être soit la zone de résonance, soit la zone de circulation interne.

La capture ou non en résonance va dépendre de la phase de l’angle critique au moment de la traversée de la séparatrice. L’estimation de la probabilité de capture admet comme hypothèse de départ l’équiprobabilité des phases. En appelant C l’aire de la zone de libration (capture) et E la zone de circulation interne (échappement, c’est-à-dire traversée de la résonance sans capture), Henrard et Lemaître [89] donnent la formule suivante :

$$P = \frac{\frac{\partial C}{\partial \delta}}{\frac{\partial C}{\partial \delta} + \frac{\partial E}{\partial \delta}} \quad (7.24)$$

qui devient $P = 0$ (pas de capture) lorsque la quantité donnée est négative et $P = 1$ (capture certaine) lorsque la quantité donnée est supérieure à 1. Dans notre cas, P a déjà été calculée (Lemaître 1984 [129]), on a ainsi :

$$P = \frac{2\pi - 2 \arccos \frac{3b-1}{1+b}}{\pi(2 - b^2) - \arccos \frac{3b-1}{1+b}} \quad (7.25)$$

α	$\delta(M_{\uparrow} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-10975.66938	$9.999264947 \times 10^{-5}$
0.5684	-5589.633076	$1.001232997 \times 10^{-4}$
0.5685	-204.8674718	$1.002541043 \times 10^{-4}$
0.5686	5178.613762	$1.003850632 \times 10^{-4}$
0.5687	10560.81554	$1.005161765 \times 10^{-4}$

TAB. 7.8 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance d'argument $4s_1=3\lambda_3 - 7\lambda_7 + 4\varpi_3$

α	$\delta(M_{\uparrow} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-11353.24071	$1.000013089 \times 10^{-4}$
0.5684	-5966.366706	$1.001319736 \times 10^{-4}$
0.5685	-580.7435858	$1.002627927 \times 10^{-4}$
0.5686	4803.576126	$1.003937658 \times 10^{-4}$
0.5687	10186.63289	$1.005248935 \times 10^{-4}$

TAB. 7.9 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance $4s_1$ avec des excentricités et inclinaisons nulles

lorsque $\delta \geq 0$. De plus, on a $P = 0$ lorsque δ décroît (puisque la capture n'est possible qu'à δ croissant). Dans le cas où b est petit, on peut même utiliser la formule suivante, issue d'un développement limité :

$$P \approx \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{b} - \frac{16}{\pi^2} b \quad (7.26)$$

Cette dernière formule permet de vérifier que la probabilité de capture augmente avec l'amplitude du terme résonant $|K|$, puisque $b \propto \sqrt{|K|}$.

1. $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_3$

On considère ici S_2 , S_3 et S_4 constants, on travaille donc avec le hamiltonien suivant :

$$H = \left(\Gamma_1 + \Gamma_{12}S_2 + \Gamma_{13}S_3 + \Gamma_{14}S_4 \right) S_1 + \Gamma_{11}S_1^2 + K_{4000}S_1^2 \cos(4s_1) \quad (7.27)$$

On a donc

$$\delta = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_{12}S_2 + \Gamma_{13}S_3 + \Gamma_{14}S_4}{\Gamma_{11}}$$

$$b = \left| \frac{K_{4000}}{\Gamma_{11}} \right|$$

La Table 7.8 donne les valeurs des différents coefficients du hamiltonien lorsque α varie mais pas les autres paramètres dynamiques. Si e_3 varie uniquement sous l'effet des marées dans l'intervalle, alors S_1 va varier entre $137M_{\uparrow} km^2 j^{-1}$ et $226M_{\uparrow} km^2 j^{-1}$. On constate que δ croît avec α , or on peut supposer α croissant avec le temps d'après les simulations numériques de Lainey & Tobie ([110], [195] ou encore [113]) qui donnent un Ganymède qui ralentit sous l'effet des marées et des échanges d'énergie de la résonance laplacienne quelque soit le signe de l'accélération séculaire d'Io. Ce ralentissement le fait

α	$\delta(M_+ km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-4682.769161	$7.096328364 \times 10^{-4}$
0.5684	701.2750346	$7.101934620 \times 10^{-4}$
0.5685	6084.056714	$7.107544837 \times 10^{-4}$
0.5686	11465.57607	$7.113159019 \times 10^{-4}$
0.5687	16845.83330	$7.118777170 \times 10^{-4}$

TAB. 7.10 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance d'argument $4s_2=3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$

α	$\delta(M_+ km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-8418.739484	$7.095463993 \times 10^{-4}$
0.5684	-3033.827493	$7.101069781 \times 10^{-4}$
0.5685	2349.822178	$7.106679531 \times 10^{-4}$
0.5686	7732.209723	$7.112293245 \times 10^{-4}$
0.5687	13113.33534	$7.117910927 \times 10^{-4}$

TAB. 7.11 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance $4s_2$ avec des excentricités et inclinaisons nulles

s'éloigner de Jupiter et donc rapprocher de Callisto qui est nettement moins affecté par les marées du fait de sa distance à Jupiter et de l'absence d'actuel piégeage en résonance, donc α augmente. α étant actuellement supérieur à ce qu'il serait s'il y avait résonance, les résonances éventuelles recherchées sont des résonances passées. La croissance de α donne une probabilité de capture non nulle. En prenant $b \approx 10^{-4}$, on a $P \approx 1.78\%$.

2. $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$

Ici, S_1 , S_3 et S_4 sont considérés constants, on a donc :

$$H = \left(\Gamma_2 + \Gamma_{12}S_1 + \Gamma_{23}S_3 + \Gamma_{24}S_4 \right) S_2 + \Gamma_{22}S_2^2 + K_{0400}S_2^2 \cos(4s_2) \quad (7.28)$$

ce qui donne

$$\delta = - \frac{\Gamma_2 + \Gamma_{12}S_1 + \Gamma_{23}S_3 + \Gamma_{24}S_4}{\Gamma_{22}}$$

et

$$b = \left| \frac{K_{0400}}{\Gamma_{22}} \right|$$

Les Tables 7.10 et 7.11 donnent les valeurs de b et δ pour différentes valeurs de α , on constate la grande influence des excentricités et inclinaisons sur la localisation de cette résonance, mais pas sur la probabilité de capture, qui ne dépend que de b . Avec $b \approx 7.1 \times 10^{-4}$, on a $P \approx 4.68\%$. Il est à noter que la quantité S_2 varie peu sous l'effet des marées car dépend du demi-grand axe de Callisto.

3. $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\Omega_3$

Ici, S_1 , S_2 et S_4 sont considérés constants, on a donc :

α	$\delta(M_{\oplus} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-2690.647584	$1.638489219 \times 10^{-6}$
0.5684	2692.158529	$1.641292335 \times 10^{-6}$
0.5685	8073.704053	$1.644100199 \times 10^{-6}$
0.5686	13453.98828	$1.646912819 \times 10^{-6}$
0.5687	18833.01171	$1.649730205 \times 10^{-6}$

TAB. 7.12 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance d'argument $4s_3=3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\Omega_3$

α	$\delta(M_{\oplus} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-3542.609351	$1.638631115 \times 10^{-6}$
0.5684	1840.991849	$1.641434523 \times 10^{-6}$
0.5685	7223.332061	$1.644242680 \times 10^{-6}$
0.5686	12604.41148	$1.647055594 \times 10^{-6}$
0.5687	17984.23030	$1.649873274 \times 10^{-6}$

TAB. 7.13 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance $4s_3$ avec des excentricités et inclinaisons nulles

$$H = \left(\Gamma_3 + \Gamma_{13}S_1 + \Gamma_{23}S_2 + \Gamma_{34}S_4 \right) S_3 + \Gamma_{33}S_3^2 + K_{0040}S_3^2 \cos(4s_3) \quad (7.29)$$

ce qui donne

$$\delta = -\frac{\Gamma_3 + \Gamma_{13}S_1 + \Gamma_{23}S_2 + \Gamma_{34}S_4}{\Gamma_{33}}$$

et

$$b = \left| \frac{K_{0040}}{\Gamma_{33}} \right|$$

Les valeurs numériques du hamiltonien 7.29 sont réunies Tables 7.12 et 7.13, avec $b \approx 1.64 \times 10^{-6}$ on a $P \approx 0.23\%$.

4. $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\Omega_4$

Ici, S_1 , S_2 et S_3 sont considérés constants, on a donc :

$$H = \left(\Gamma_4 + \Gamma_{14}S_1 + \Gamma_{24}S_2 + \Gamma_{34}S_3 \right) S_4 + \Gamma_{44}S_4^2 + K_{0004}S_4^2 \cos(4s_4) \quad (7.30)$$

ce qui donne

$$\delta = -\frac{\Gamma_4 + \Gamma_{14}S_1 + \Gamma_{24}S_2 + \Gamma_{34}S_3}{\Gamma_{44}}$$

et

$$b = \left| \frac{K_{0004}}{\Gamma_{44}} \right|$$

Les paramètres du hamiltonien 7.30 sont tabulés Tables 7.14 et 7.15 selon les valeurs des excentricités et inclinaisons. Avec $b \approx 1.77 \times 10^{-6}$ on a $P \approx 0.24\%$.

α	$\delta(M_{\oplus} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-4974.468532	$1.765436006 \times 10^{-6}$
0.5684	410.0661920	$1.768767459 \times 10^{-6}$
0.5685	5793.338487	$1.772105092 \times 10^{-6}$
0.5686	11175.34855	$1.775448917 \times 10^{-6}$
0.5687	16556.09657	$1.778798947 \times 10^{-6}$

TAB. 7.14 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance d'argument $4s_4=3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta_4$

α	$\delta(M_{\oplus} km^2 j^{-1})$	b
0.5683	-6476.745598	$1.765220977 \times 10^{-6}$
0.5684	-1091.343067	$1.768552077 \times 10^{-6}$
0.5685	4292.797232	$1.771889358 \times 10^{-6}$
0.5686	9675.675491	$1.775232830 \times 10^{-6}$
0.5687	15057.29191	$1.778582506 \times 10^{-6}$

TAB. 7.15 – Paramètres du hamiltonien pour la résonance $4s_4$ avec des excentricités et inclinaisons nulles

argument	P
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_3$	1.78%
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$	4.68%
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta_3$	0.23%
$3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\delta_4$	0.24%

TAB. 7.16 – Probabilités analytiques de capture dans les résonances d'arguments de la forme $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4z$. On constate que les probabilités de capture sont faibles, mais néanmoins significatives pour les résonances en excentricité. Les 4.68% associés à l'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$ peuvent être rapprochés de la probabilité de capture de 4% estimée par Sinclair [182] pour la résonance Mimas-Téthys.

Je n'ai pas cherché à déterminer analytiquement des probabilités de capture dans d'autres résonances, car j'ai d'abord cherché à vérifier numériquement la validité des probabilités de capture que j'ai obtenues, avant éventuellement de réfléchir à la question des autres résonances.

7.5 Vérification numérique

J'ai cherché à vérifier numériquement les probabilités de capture théoriques données dans la Table 7.16. Pour cela j'ai réalisé des intégrations numériques non pas à partir du hamiltonien (7.21) mais à partir du hamiltonien (7.20), plus représentatif de résonances entre Ganymède et Callisto. En effet, (7.21) a été obtenu en factorisant la quantité B , ce qui a par exemple pour conséquence d'accélérer considérablement la variation de la variable angulaire. Ainsi, une étude numérique réalisée à partir de (7.21) reviendrait à vérifier les probabilités de capture en résonance du système représenté par (7.21), alors que c'est Ganymède-Callisto qui nous intéresse.

Je me suis plus particulièrement focalisé sur la résonance d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$ car la probabilité de capture trouvée analytiquement rend la capture dans cette résonance plausible. L'expression de la probabilité de capture repose sur le fait qu'il y a incertitude sur la phase de l'angle critique au moment de la traversée de la résonance. Ainsi, toutes les phases sont considérées comme équiprobables.

Ma vérification numérique a consisté à réaliser un nombre significatif d'intégrations du hamiltonien (7.20) et d'observer s'il y a capture en résonance ou traversée. La variable d'action évolue sous l'effet des marées avec $\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 7 \times 10^{-11} an^{-1}$ et $\frac{\dot{n}_4}{n_4} = 0$, ce qui est cohérent avec un Ganymède accéléré par Io (c'est-à-dire en considérant la résonance laplacienne maintenue). La théorie donne une probabilité de capture de 4.68%, c'est-à-dire que le système a un peu plus d'une chance sur 22 d'être capturé à la traversée de la résonance. 100 simulations ont été réalisées avec des phases uniformément réparties au départ de la simulation (cf. Fig.7.5), et aucune capture n'a été observée.

J'ai réalisé ensuite deux autres essais avec $\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 3.65 \times 10^{-13} an^{-1}$ et $\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 3.65 \times 10^{-14} an^{-1}$. Le premier essai correspond à une accélération séculaire faible mais cependant réaliste d'un Ganymède non accéléré par Io et Europe, c'est-à-dire avant la capture en résonance laplacienne. Dans ce cas, aucune capture n'est observée, ce qui indique une probabilité de capture inférieure à 1%.

Par contre, avec $\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 3.65 \times 10^{-14} an^{-1}$, sur 100 essais, 7 aboutissent à une capture (cf. Fig.7.6). Ceci donne une probabilité de capture de l'ordre de 7%. Cette dernière valeur d'accélération séculaire semble très faible par rapport aux estimations du chapitre 9 et n'est donc pas vraiment réaliste.

L'outil numérique semble indiquer un lien entre la probabilité de capture et l'intensité de la dissipation, ce qui met en défaut l'hypothèse de l'invariant adiabatique. Or, cette hypothèse donne de bons résultats pour estimer les probabilités de capture dans les résonances de degré 2 (cf. par exemple le travail de Champenois sur la résonance Mimas-Téthys [34]). Il semble vraisemblable que la validité de l'hypothèse de l'invariant adiabatique diminue avec le degré de la résonance considérée. Cependant, ceci n'explique pas que numériquement, une probabilité de capture supérieure à celle prévue analytiquement ait été trouvée. Toutefois, ce résultat numérique nécessite d'être confirmé par un plus grand nombre d'essais.

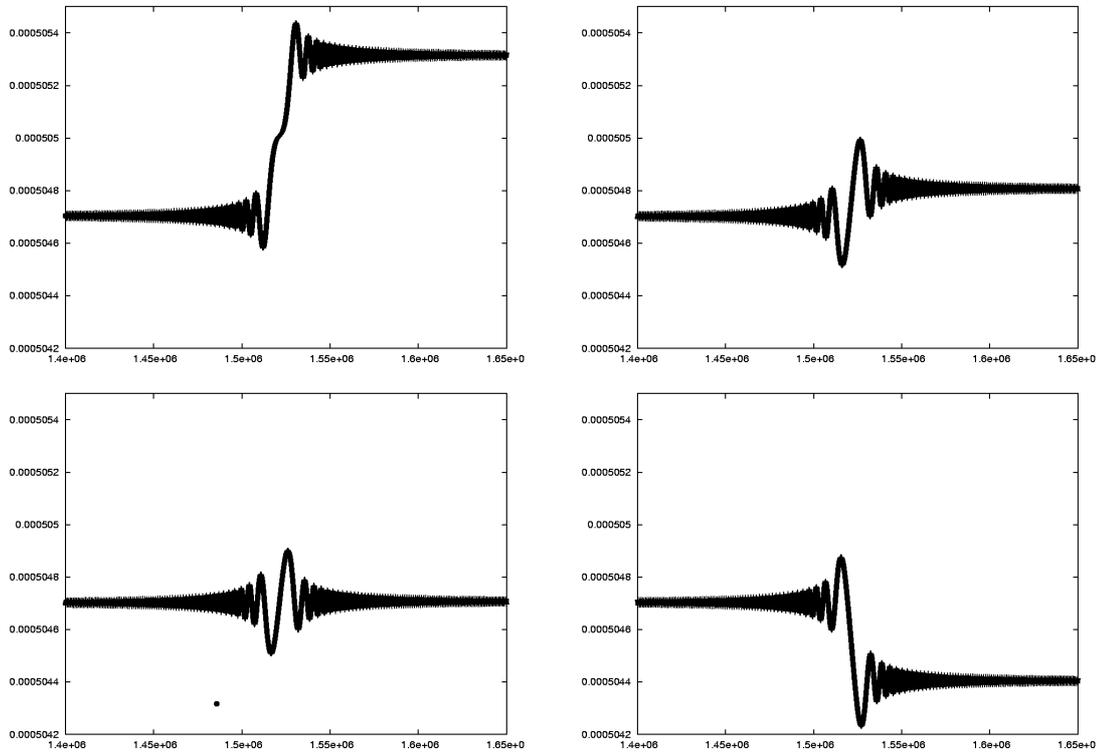


FIG. 7.5 – Simulations numériques de l'évolution de l'excentricité de Callisto e_4 à la traversée de la résonance d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\varpi_4$, en fonction du temps en années. Cette figure illustre le fait qu'une traversée de résonance sans capture se traduit par un saut des variables d'excentricité/inclinaison associées à cette résonance. L'amplitude de ce saut dépend de la phase de l'argument au moment de la traversée de la résonance. On constate aussi que l'amplitude des oscillations de e_4 augmente à mesure que la résonance est proche, ceci est dû à la présence d'un diviseur dans les équations relatives à l'excentricité, diviseur qui tend vers 0 à mesure que le système s'approche de la résonance.

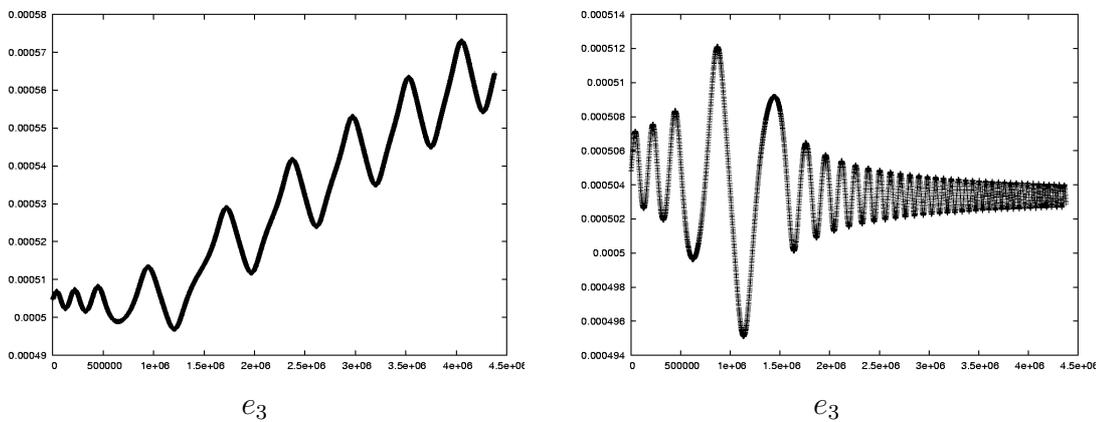


FIG. 7.6 – Essais avec $\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 3.65 \times 10^{-14} an^{-1}$. Avec cette dissipation, il est possible d'observer des captures (à gauche). La courbe de droite représente une traversée de résonance sans capture, avec la même vitesse de dissipation.

7.6 Application au cas Titan-Japet

Titan et Japet sont dans une grande inégalité 5 : 1, plus précisément le terme $n_6 - 5n_8$ a une période d'environ 8.74 ans (cf. TASS1.6 [203]). Certains arguments associés à cette inégalité apparaissent d'ailleurs explicitement dans la décomposition de la solution pour λ_8 (cf. Tab 7.17).

argument	fréquence(an^{-1})	période(ans)	amplitude(km)
$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - 2\varpi_8 - 2\Omega_8$	0.71846607	8.745	107.5
$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - \varpi_6 - 3\varpi_8$	0.70370643	8.929	77.9
$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - \varpi_6 - \varpi_8 - 2\Omega_8$	0.7115069	8.831	59.6
$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - 2\varpi_6 - 2\varpi_8$	0.69674725	9.018	52.5

TAB. 7.17 – Influence des termes de l'inégalité 5 : 1 sur la longitude de Japet d'après TASS1.6 [203]. Je fais ici une confusion entre ϖ_6 , ϖ_8 , Ω_6 et Ω_8 d'une part, et ϕ_6 , ϕ_8 , Φ_6 et Φ_8 qui sont les éléments propres identifiés dans la décomposition en fréquences de TASS1.6.

Afin d'avoir des valeurs utilisables pour les vitesses des nœuds et péricentres ainsi que pour les excentricités et inclinaisons, j'ai utilisé les solutions pour z_6 , z_8 , ζ_6 et ζ_8 données par TASS1.6 et j'en ai déduites les valeurs données dans la Table 7.18.

variables	valeurs
e_6	0.0289
e_8	0.029
γ_6	0.004 - 0.007
γ_8	0.1 - 0.15
$\dot{\varpi}_6$	$8.93386 \times 10^{-3}.an^{-1}$
$\dot{\varpi}_8$	$1.97469 \times 10^{-3}.an^{-1}$
$\dot{\Omega}_6$	$-8.93124 \times 10^{-3}.an^{-1}$
$\dot{\Omega}_8$	$-1.92554 \times 10^{-3}.an^{-1}$
n_8	$28.9427898783.an^{-1}$
m_6	$2.36638 \times 10^{-4}M_{\text{J}}$
m_8	$3.1 \times 10^{-6}M_{\text{J}}$

TAB. 7.18 – Valeurs utilisées pour traiter le cas Titan-Japet. Les valeurs dynamiques sont issues des solutions de TASS1.6 [203], dont la convergence rapide autorise à donner des valeurs pour les vitesses des nœuds et péricentres, du moins dans le cas de Titan. La masse de Japet vient également de TASS1.6, tandis que celle de Titan est issue des données des sondes Pioneer et Voyager [32]. On peut noter que, contrairement au cas Ganymède-Callisto où les masses sont du même ordre de grandeur, il y a ici un rapport 76 entre la masse de Titan et celle de Japet. Il faut néanmoins préciser qu'il y a une certaine incertitude sur la masse de Japet, qui selon les ajustements peut être évaluée entre 1.9 et $5.1 \times 10^{-6}M_{\text{J}}$.

Les figures 7.7 et 7.8 représentent la localisation des résonances entre Titan et Japet avec deux valeurs différentes de γ_8 . Il est intéressant de constater qu'il y a de nombreux recouvrements, donc de nombreuses zones de chaos. L'inclinaison de Japet est très importante,

ϕ	α_r	$f(\alpha_r)$	$\Delta\alpha$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\Omega_6$	0.34193892	-1.76911×10^{-2}	$1.6196 \times 10^{-2} \gamma_6^2$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 3\Omega_6 + \Omega_8$	0.34194988	7.07776×10^{-2}	$3.2395 \times 10^{-2} \gamma_6^{\frac{3}{2}} \sqrt{\gamma_8}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\Omega_6 + 2\Omega_8$	0.34196084	-0.10619	$3.9680 \times 10^{-2} \gamma_6 \gamma_8$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \Omega_6 + 3\Omega_8$	0.34197180	7.08045×10^{-2}	$3.2401 \times 10^{-2} \sqrt{\gamma_6} \gamma_8^{\frac{3}{2}}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8 + 2\Omega_6$	0.34197327	-0.81068	$0.1096 e_8 \gamma_6$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\Omega_8$	0.34198276	-1.77045×10^{-2}	$1.6202 \times 10^{-2} \gamma_8^2$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8 + \Omega_6 + \Omega_8$	0.34198423	1.62154	$0.1551 e_8 \sqrt{\gamma_6 \gamma_8}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6 + \varpi_8 + 2\Omega_6$	0.34198423	0.52957	$8.8612 \times 10^{-2} \sqrt{e_6 e_8} \gamma_6$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8 + 2\Omega_8$	0.341995196	-0.81087	$0.1096 e_8 \gamma_8$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6 + \varpi_8 + \Omega_6 + \Omega_8$	0.34199520	-1.05930	$0.1253 \sqrt{e_6 e_8 \gamma_6 \gamma_8}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6 + 2\Omega_6$	0.34199520	-8.89173×10^{-2}	$3.6310 \times 10^{-2} e_6 \gamma_6$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6 + \varpi_8 + 2\Omega_8$	0.34200616	0.52973	$8.8626 \times 10^{-2} \sqrt{e_6 e_8} \gamma_6$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6 + \Omega_6 + \Omega_8$	0.34200616	0.17787	$5.1355 \times 10^{-2} e_6 \sqrt{\gamma_6 \gamma_8}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\varpi_8$	0.34200763	-0.45482	$8.2121 \times 10^{-2} e_8^2$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6 + 2\Omega_8$	0.34201713	-8.89496×10^{-2}	$3.6316 \times 10^{-2} e_6 \gamma_8$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6 + 3\varpi_8$	0.34201860	2.64263	$0.1980 \sqrt{e_6} e_8^{\frac{3}{2}}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6 + 2\varpi_8$	0.34202957	-1.60463	$0.1542 e_6 e_8$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 3\varpi_6 + \varpi_8$	0.34204053	0.42816	$7.9677 \times 10^{-2} e_6^{\frac{3}{2}} \sqrt{e_8}$
$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\varpi_6$	0.34205150	-5.20390×10^{-2}	$2.7778 \times 10^{-2} e_6^2$

TAB. 7.19 – Localisation des résonances liées à la grande inégalité Titan-Japet. La colonne $f(\alpha_r)$ donne le coefficient intervenant dans l'amplitude du terme perturbateur.

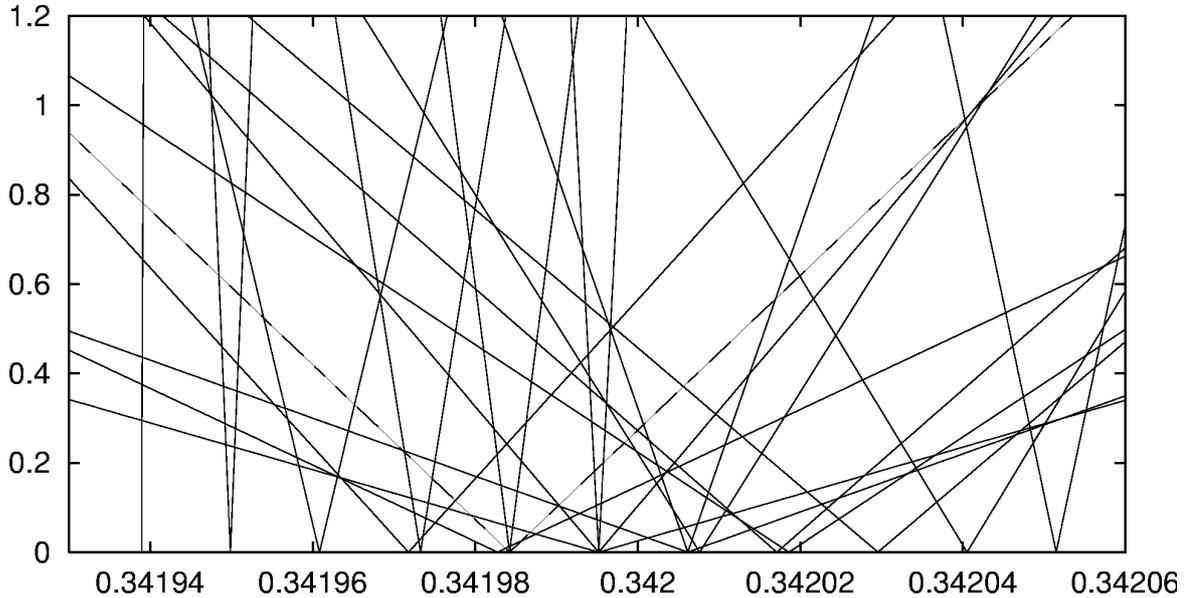


FIG. 7.7 – Localisation des résonances entre Titan et Japet. α est en abscisses, $\frac{y}{y_1}$ en ordonnées. Les paramètres dynamiques ont des valeurs acceptables à l'époque actuelle ($e_6 = 0.0289$, $e_8 = 0.029$, $\gamma_6 = 0.0055$ et $\gamma_8 = 0.12$).

supérieure à 0.1, ce qui provoque un très large évasement de certaines résonances (Fig.7.7). Dans ce cas, il faut considérer avec prudence l'équation 7.2, valable pour de faibles excentricités et inclinaisons. La Figure 7.8 a été tracée avec une inclinaison 10 fois moindre. En effet, l'inclinaison de Japet est peut-être due aux effets de cette grande inégalité, on peut donc considérer une inclinaison plus faible au moment des éventuelles captures en résonance. Même dans ce cas, aucune résonance n'est isolée. Ainsi, chercher à déterminer la probabilité de capture dans une résonance n'a pas vraiment de sens.

De plus, les incertitudes régnant sur les accélérations séculaires de Japet et Titan empêchent d'affirmer que la zone des résonances liées à la grande inégalité $\lambda_6 - 5\lambda_8$ a été effectivement traversée dans le passé. En négligeant l'accélération séculaire de Japet par rapport à celle de Titan, il faut que Titan s'éloigne de Saturne avec les marées, ce qui impose, d'après l'équation 4.6 et après application numérique à l'aide des valeurs recensées Tab.7.18 :

$$0.0178 \frac{k_{2Titan}}{Q_{Titan}} < \frac{k_{2\eta}}{Q_{\eta}} \quad (7.31)$$

(cf. Noyelles & Vienne 2004 [153]). Enfin, les incertitudes régnant sur le passé de Hypérion (cf. 5.2.3) mettent encore un peu plus de mystère sur la raison de la grande inclinaison de Japet...

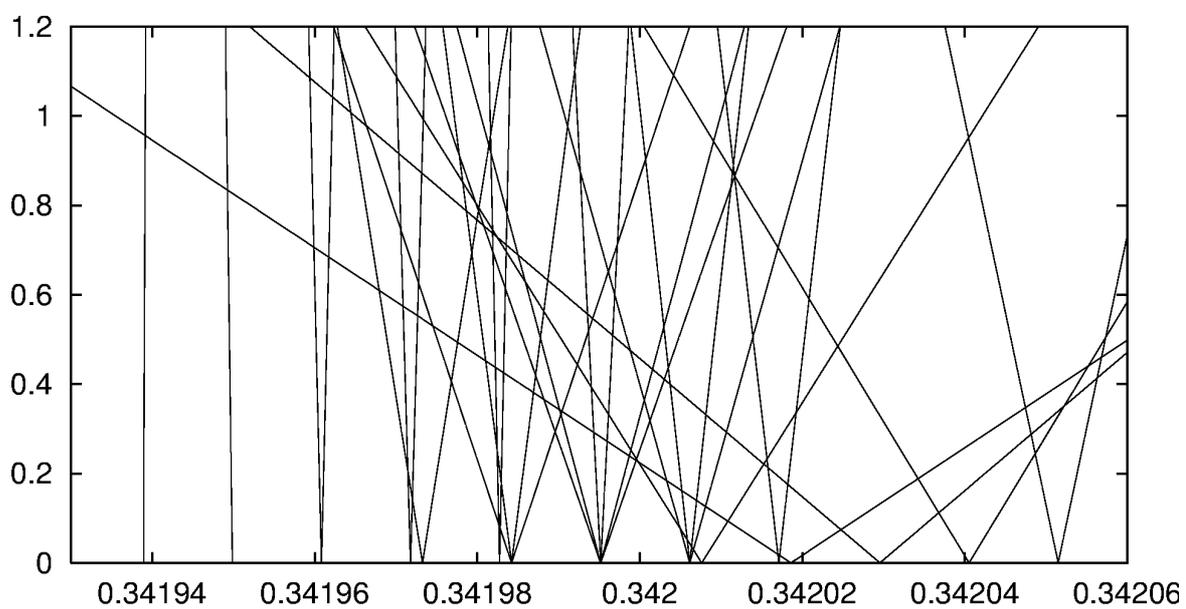


FIG. 7.8 – Localisation des résonances entre Titan et Japet. α est en abscisses, $\frac{y}{y_1}$ en ordonnées. Ici γ_8 vaut le dixième de la valeur précédemment utilisée, on ne peut en effet a priori exclure que l'inclinaison importante de Japet ne soit pas due à la traversée de cette zone.

Chapitre 8

L'inégalité de De Haerdtl : Étude numérique

J'ai effectué une étude numérique afin d'inclure un certain nombre d'effets dont la prise en compte complique fortement tout raisonnement analytique, notamment ceux dus aux termes séculaires dépendant des nœuds et péricentres. Ces termes sont responsables d'un couplage entre les mouvements séculaires des différents satellites et sont par exemple responsables des oscillations des excentricités des satellites galiléens autour d'une valeur moyenne (cf. chapitre 2.1).

8.1 Le système d'équations

8.1.1 Les variables

Pour les simulations numériques, j'ai représenté les mouvements des 4 satellites galiléens Io, Europe, Ganymède et Callisto. Pour chacun de ces satellites je n'utilise pas 6 mais 5 variables. En effet, les solutions des longitudes moyennes d'Io et d'Europe ne sont pas utiles pour le système moyen. Celles de Ganymède et Callisto sont exprimées plus loin. Ces 5 variables sont :

- le demi-grand axe a_i
- h_i et k_i , parties réelles et imaginaires de $z_i = e_i \exp(\sqrt{-1}\varpi_i)$. On a donc $h_i = e_i \cos \varpi_i$ et $k_i = e_i \sin \varpi_i$
- p_i et q_i , parties réelles et imaginaires de $\zeta_i = \gamma_i \exp(\sqrt{-1}\delta_i)$. On a donc $p_i = \gamma_i \cos \delta_i$ et $q_i = \gamma_i \sin \delta_i$

À ces 20 variables j'ai ajouté la variable à longue période $3\lambda_3 - 7\lambda_4$, représentative de l'inégalité de De Haerdtl. Ainsi, le vecteur solution est composé de 21 variables.

Soit U_i le potentiel perturbateur associé aux forces subies par le satellite i . Le système d'équations s'écrit :

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{2}{n_i a_i} \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} \quad (8.1)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = -\frac{1}{n_i a_i^2} \left[\phi_i \frac{\partial U_i}{\partial k_i} + h_i \frac{\phi_i}{1 + \phi_i} \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} + \frac{k_i}{2\phi_i} \left(p_i \frac{\partial U_i}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial U_i}{\partial q_i} \right) \right] \quad (8.2)$$

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{1}{n_i a_i^2} \left[\phi_i \frac{\partial U_i}{\partial h_i} - k_i \frac{\phi_i}{1 + \phi_i} \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} + \frac{h_i}{2\phi_i} \left(p_i \frac{\partial U_i}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial U_i}{\partial q_i} \right) \right] \quad (8.3)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{4n_i a_i^2 \phi_i} \left[\frac{\partial U_i}{\partial q_i} + 2p_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} + h_i \frac{\partial U_i}{\partial k_i} - k_i \frac{\partial U_i}{\partial h_i} \right) \right] \quad (8.4)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{4n_i a_i^2 \phi_i} \left[\frac{\partial U_i}{\partial p_i} - 2q_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} + h_i \frac{\partial U_i}{\partial k_i} - k_i \frac{\partial U_i}{\partial h_i} \right) \right] \quad (8.5)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \frac{1}{n_i a_i^2} \left[-2a_i \frac{\partial U_i}{\partial a_i} + \frac{\phi_i}{1 + \phi_i} \left(h_i \frac{\partial U_i}{\partial h_i} + k_i \frac{\partial U_i}{\partial k_i} \right) + \frac{1}{2\phi_i} \left(p_i \frac{\partial U_i}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial U_i}{\partial q_i} \right) \right] \quad (8.6)$$

avec

$$\phi_i = \sqrt{1 - e_i^2}$$

Les termes inclus dans ce système d'équations sont issues des routines Maple de Duriez [63] qui consiste à faire une séparation analytique entre les différentes inégalités de la forme $p\lambda - (p + q)\lambda'$. Les termes inclus sont ensuite intégrés numériquement.

8.1.2 Les effets pris en compte

Les effets séculaires

La Table 2.6 permet de comparer les différentes perturbations séculaires subies par les satellites galiléens. Il s'avère qu'à l'exception éventuellement des effets d'Io sur Callisto, les perturbations séculaires mutuelles sont significatives par rapport aux perturbations dues à l'aplatissement de la planète. Par conséquent, j'ai tenu compte, pour chaque satellite, des perturbations séculaires jusqu'au degré 4 en excentricité/inclinaison. Les perturbations séculaires incluent non seulement les termes indépendants de tout angle, mais également ceux dépendant des nœuds et péricentres. Ce sont ces derniers qui permettent le couplage entre les mouvements des satellites, visible notamment dans les oscillations des excentricités, ou encore dans les solutions pour les variables z et ζ (cf. Tab. 2.7 à 2.10).

La Table 2.6 indique qu'il est indispensable de tenir compte des perturbations solaires pour représenter de façon réaliste la précession du péricentre de Callisto. Ainsi, j'ai introduit le Soleil dans mon modèle sous la forme d'une solution séculaire forcée, qui vient de la solution de Laskar (1988 [120]) pour l'excentricité et l'inclinaison de Jupiter à long terme. Le demi-grand axe est issu de Simon et al. (1994 [181]).

J'ai également tenu compte de l'aplatissement de Jupiter car il s'agit d'un effet prépondérant sur les précessions des nœuds et péricentres, au moins des 3 premiers satellites. J'ai tenu compte des termes de cet aplatissement en J_2 , J_4 et $(J_2^2)^1$ jusqu'au degré 2 en excentricité/inclinaison.

¹terme correctif d'ordre 2 du système moyenné

Les marées sont prises en compte lors de certaines simulations (le terme "certaines" sera précisé dans la suite). Du fait des nombreuses incertitudes sur l'évaluation des marées sur Io et Europe, et compte tenu que ces satellites sont présents dans le système essentiellement pour permettre une représentation plus réaliste des mouvements de Ganymède et Callisto, Io et Europe sont considérés comme non affectés par les marées. Ainsi, les marées s'appliquent sur Ganymède et Callisto. L'algorithme calcule d'abord une accélération séculaire de marée $\frac{\dot{n}}{n}$ (Eq. 9.1) en fonction des paramètres géophysiques (nombres de Love et facteurs de dissipation relatifs au satellite et à Jupiter) ainsi qu'un coefficient d'amortissement de l'excentricité τ (Eq. 9.3). Puis ces quantités sont utilisées dans les équations du mouvement de la façon suivante :

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_M = -\frac{2a}{3} \frac{\dot{n}}{n} \quad (8.7)$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_M = -\frac{h}{\tau} \quad (8.8)$$

$$\left(\frac{dk}{dt}\right)_M = -\frac{k}{\tau} \quad (8.9)$$

Les effets dépendant des longitudes

La dépendance en longitudes moyennes provient de l'inégalité de De Haerdtl. Le développement de la perturbation mutuelle Ganymède-Callisto limité aux termes dont l'argument contient $3\lambda_3 - 7\lambda_4$ donnera 19 termes au degré 4 en excentricité/inclinaison. Je me suis limité à ces termes. Ces termes dépendent du rapport des demi-grands axes $\alpha_{34} = \frac{a_3}{a_4}$.

L'un des buts de cette étude étant de déterminer si l'inégalité de De Haerdtl a pu jouer un rôle significatif dans la formation de la résonance laplacienne, je n'ai pas tenu compte des termes en libration liés à cette dernière résonance. Ainsi, les termes liés à l'inégalité de De Haerdtl sont les seuls termes dépendant des longitudes apparaissant dans le système que j'ai utilisé.

Introduction de ces effets dans les équations

Ces effets sont issus de termes qui ont été séparés analytiquement à l'aide des routines Maple de Duriez [63]. Ces routines permettent d'obtenir le développement par rapport à une inégalité de la forme $p\lambda - (p+q)\lambda'$, p et q étant donnés par l'utilisateur. Les expressions obtenues dépendent du rapport des demi-grands axes α sous la forme $f(\alpha)$. f dépend des coefficients de Laplace utilisant les fonctions hypergéométriques de Gauss. f n'est pas développée en puissances de α du fait de la lente convergence du développement, α n'étant pas petit par rapport à l'unité. Cependant, le calcul des fonctions hypergéométriques de Gauss est coûteux en temps. Alors l'algorithme les calcule une fois au début, au milieu de l'intervalle d'étude α_0 , pour évaluer f en ce point ainsi que sa dérivée première. Ensuite, sur l'ensemble de l'intervalle d'étude, $f(\alpha)$ est assimilée à la tangente de f en α_0 . Une telle approximation est acceptable dans la mesure où α varie de l'ordre de 0.1% sur l'intervalle d'étude.

variable	valeur initiale
a_1	422029.957998784
h_1	$-2.334396957561419 \times 10^{-3}$
k_1	$-2.746063819404366 \times 10^{-3}$
p_1	$-3.181766167189224 \times 10^{-4}$
q_1	$1.966765650661954 \times 10^{-4}$
a_2	671261.1711220763
h_2	$5.493977114358724 \times 10^{-3}$
k_2	$7.810567157900131 \times 10^{-3}$
p_2	$1.743501353454657 \times 10^{-3}$
q_2	$3.526974175221473 \times 10^{-3}$
a_3	1070621.016067049
h_3	$-1.572336082848885 \times 10^{-4}$
k_3	$7.790462763933649 \times 10^{-5}$
p_3	$-1.926468891653076 \times 10^{-3}$
q_3	$7.337683959989285 \times 10^{-7}$
a_4	1883133.533981626
h_4	$6.222025177489796 \times 10^{-3}$
k_4	$-4.899234331984133 \times 10^{-3}$
p_4	$-4.593549429566746 \times 10^{-4}$
q_4	$1.838107198434996 \times 10^{-3}$

TAB. 8.1 – Conditions initiales. Les demi-grands axes sont exprimés en kilomètres, les autres variables sont sans dimension. La 21^{ème} variable, $3\lambda_3 - 7\lambda_4$, n'est pas représentée dans cette table. Je lui ai donné différentes valeurs lors des différentes simulations numériques afin de tenir compte de l'incertitude sur la valeur de la phase de chaque argument critique lors des traversées des zones de résonances.

8.1.3 Choix des conditions initiales

La dynamique actuelle du système dépendant significativement de termes à courte période, il est nécessaire de réaliser une moyennisation des éphémérides afin d'obtenir des conditions initiales réalistes dans le cadre d'une étude à long terme. La moyennisation a eu lieu sur 100000 jours à partir des éphémérides L1, avec un pas de 1 jour. Chaque condition initiale correspond donc à une moyenne de 100000 points. Les conditions initiales que j'ai adoptées sont regroupées Table 8.1.

8.1.4 Le système modélisé

Les tables Tab.8.2 et Tab.8.3 indiquent les décompositions en fréquence des solutions de mon système pour les variables z et ζ de Ganymède et Callisto données dans le modèle numérique que j'ai utilisé. Ces décompositions ont été obtenues à l'aide d'une intégration numérique utilisant l'intégrateur d'Adams10 (cf. Annexe C) permettant d'avoir un pas constant. Le pas choisi h est 36.525 jours, soit 0.1 an, les décompositions en fréquences ont été faites sur 65536 points, c'est-à-dire sur un intervalle de temps de 6553.5 ans. Ainsi, le nœud ascendant de Callisto est représenté sur plus de 10 périodes (en fait presque 12), et près de 300 points

z_3	amplitude	période	id.	ζ_3	amplitude	période	id.
	1098 km	136.9 ans	ν_3		3458 km	133.9 ans	ν_7
	869 km	538.4 ans	ν_4		1430 km	6.4×10^7 ans	ν_0
	282 km	29.7 ans	ν_2		1335 km	559.3 ans	ν_8
					334 km	29.7 ans	ν_6

TAB. 8.2 – Solutions z et ζ pour Ganymède

z_4	amplitude	période	id.	ζ_4	amplitude	période	id.
	14705 km	538.4 ans	ν_4		15743 km	559.3 ans	ν_8
	213 km	136.9 ans	ν_3		11791 km	6.4×10^7 ans	ν_0
	23 km	6.4×10^7 ans			964 km	133.9 ans	ν_7
	8 km	29.7 ans	ν_2				

TAB. 8.3 – Solutions z et ζ pour Callisto

échantillonnent une période du péricentre d'Europe. Le pas d'intégration choisi permet de travailler avec une bonne confiance sur des systèmes dont la plus courte période est de 8 ans (80h).

Dans ces tables, les ν_i , i variant de 1 à 4, représentent les fréquences propres associées aux précessions des péricentres des 4 satellites galiléens, tandis que pour i variant de 5 à 8, les ν_i représentent les vitesses de précession des nœuds ascendants, ces vitesses sont négatives. Ces 2 tables sont à comparer aux Tables 2.9 et 2.10. ν_0 est une fréquence très faible, elle représente des plans invariants, Ganymède et Callisto ayant des plans invariants en théorie différents et en pratique très proches (l'écart entre leurs 2 phases diffère de 0.02 rad). Cette fréquence n'est numériquement pas rigoureusement nulle du fait des termes à très longue période apparaissant dans la solution du Soleil. Le terme constant dans la solution de z_4 est un artefact numérique. On constate l'absence de termes à courtes périodes, cette absence est due à la volonté de considérer le système avant la formation de la résonance laplacienne, donc les périodes des librations entre Io et Europe et Europe et Ganymède disparaissent. De plus, les autres courtes périodes disparaissent par moyennisation analytique des équations du mouvement. Par ailleurs, des fréquences liées à Europe, notamment à son péricentre, apparaissent, en particulier dans la solution de z_3 . Ainsi, avant la formation de la résonance laplacienne, la fréquence ν_2 a pu jouer un rôle dans la dynamique de Ganymède et Callisto.

Un essai numérique dans lequel le Soleil est absent donne une période de précession des nœuds de Callisto de l'ordre de 630 ans au lieu de 560.

8.2 La détection du chaos

8.2.1 Les exposants de Lyapounov

La première méthode que j'ai utilisée pour détecter le chaos est celle des exposants de Lyapounov. J'ai calculé les FLI (cf. 6.1.2) à différentes valeurs de $\alpha_{34} = \frac{a_3}{a_4}$ afin de localiser le chaos sur un diagramme analogue à la Figure 7.1, sur 1 million d'années. Je l'ai fait à partir de plusieurs trajectoires très proches, et j'ai calculé les quantités $\ln \|(\delta p(t), \delta q(t))\|$ après avoir exprimé ces trajectoires dans les variables de Jacobi. J'ai ensuite normalisé à

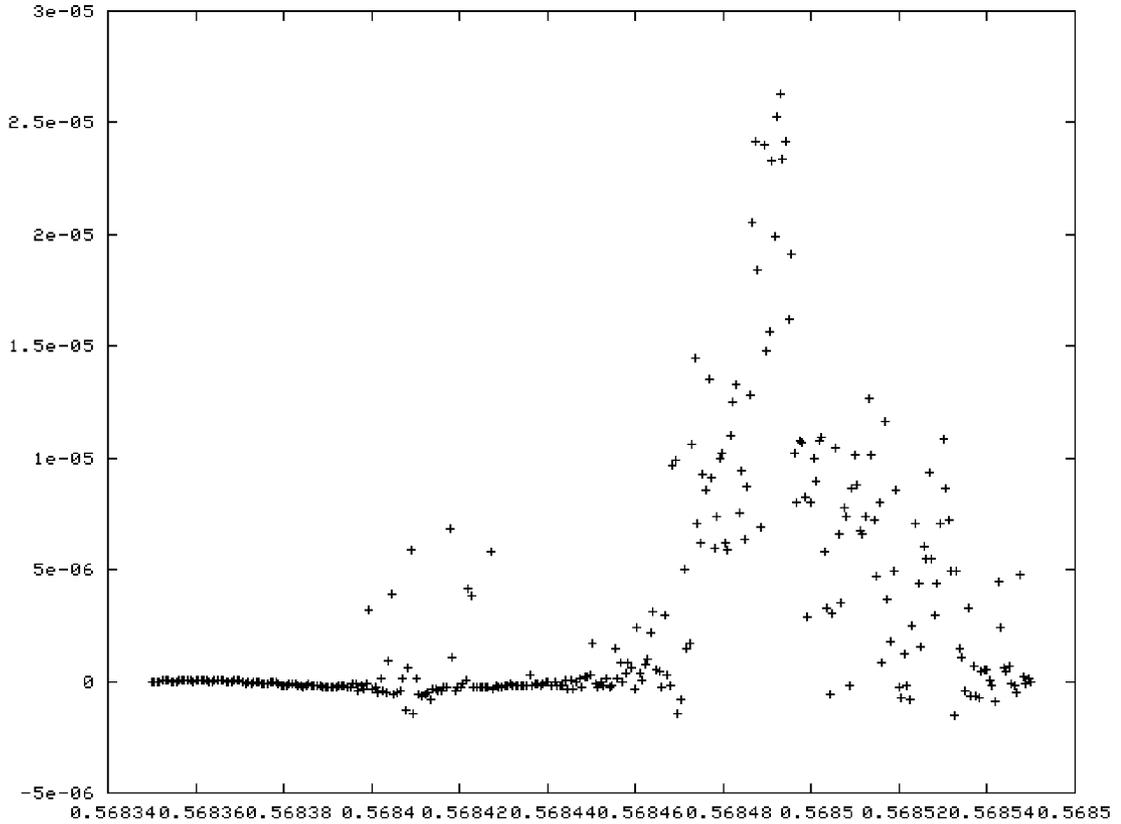


FIG. 8.1 – Exposants de Lyapounov. En abscisse se trouve le rapport des demi-grands axes α et en ordonnée l'exposant de Lyapounov, c'est-à-dire l'inverse du temps de Lyapounov.

l'aide des valeurs de $\ln \|(\delta p(0), \delta q(0))\|$. Les résultats figurent Fig.8.1.

On peut constater la présence de 2 zones de chaos. La première vers $\alpha \approx 0.56842$ et correspond à une zone de recouvrement de résonances indiquée Fig.7.2. La deuxième, bien plus importante, s'étend de $\alpha \approx 0.56848$ jusqu'à $\alpha \approx 0.56850$ et n'est pas prévisible par la Fig.7.2. Cette deuxième zone est dominée par les termes en excentricité, c'est-à-dire dominée par les termes dépendant des fréquences ν_i pour i inférieur ou égal à 4. En effet, ces fréquences sont positives, donc ont tendance à augmenter la valeur de α_r , centre de la résonance.

Les temps de Lyapounov sont inverses des exposants de Lyapounov, donc des valeurs indiquées en ordonnée. Les temps de Lyapounov les plus bas détectés sont de l'ordre de 40000 ans pour $\alpha \approx 0.56849$.

Le calcul des exposants de Lyapounov n'est pas très pratique dans la mesure où il demande un important temps de calcul. De plus, il est plutôt indiqué dans le cas d'équations hamiltoniennes, ce qui n'est pas le cas ici. En effet, seule la formulation hamiltonienne permet de calculer correctement le vecteur-tangent. Pour ces 2 raisons, je me suis plutôt tourné vers la méthode de l'analyse en fréquences pour détecter le chaos.

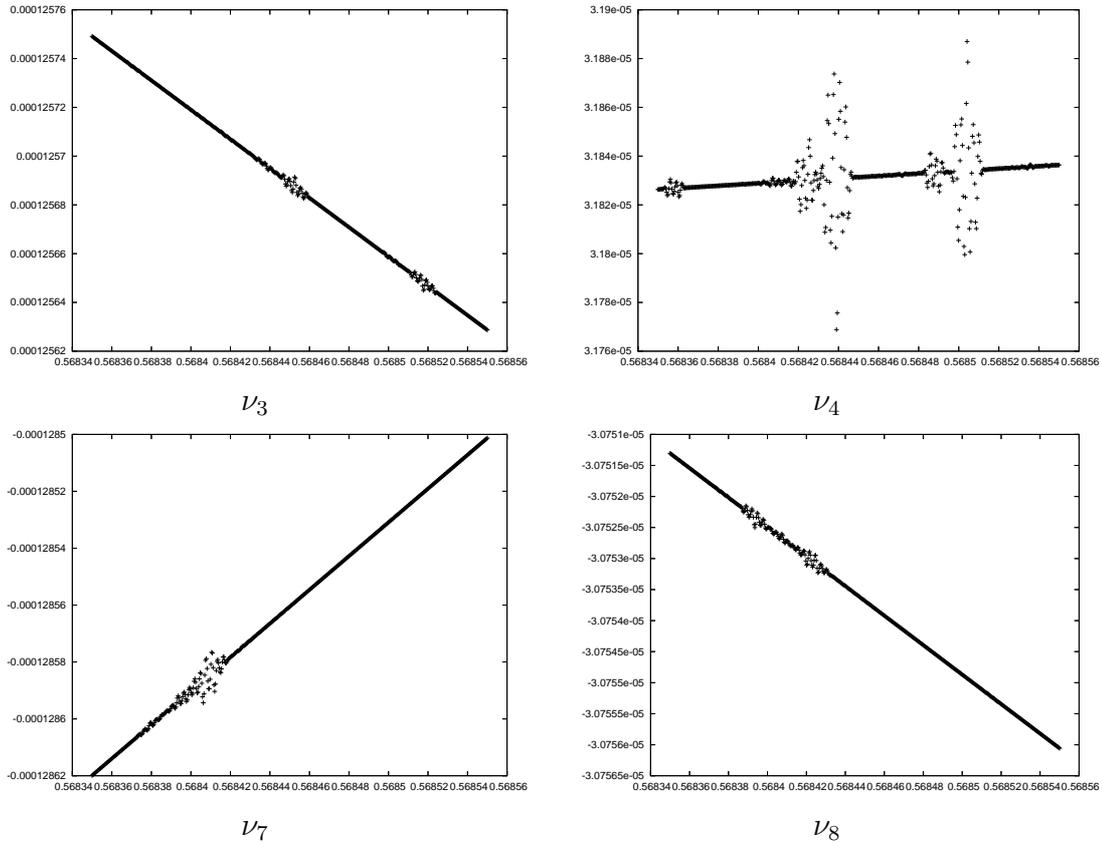


FIG. 8.2 – Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-6}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-7}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-6}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-7}$.

8.2.2 L'analyse en fréquence

Évolution des fréquences en fonction de α

J'ai tout d'abord tracé l'évolution des différentes fréquences caractéristiques du système en fonction du rapport des demi-grands axes α . Pour cela j'ai fait des analyses en fréquence sur 16384 points avec un pas de 0.1 an, soit 1638.3 ans, avec à chaque fois des valeurs différentes de α . Une telle durée permet de représenter la période la plus longue, associé à ν_3 , sur 2.93 périodes, ce qui est suffisant pour avoir une précision acceptable (il est conseillé de travailler sur au moins 2 périodes). Comme précédemment, la période la plus courte est représentée sur 300 points. J'ai obtenu les différentes valeurs initiales de α en faisant varier le demi-grand axe de Ganymède a_3 . J'ai considéré a_4 comme constant, Callisto étant en pratique peu affecté par les marées. Les différentes figures (Fig.8.2 à 8.6) qui suivent ont été obtenues à l'aide de différentes valeurs d'excentricités et d'inclinaisons.

Toutes ces figures donnent l'évolution des fréquences ν_3 , ν_4 , ν_7 et ν_8 en fonction de α . La représentation de ν_2 ne donne pas d'information complémentaire. La Figure 8.2 représente l'évolution de ces fréquences avec de très faibles valeurs d'excentricités ($\approx 10^{-6}$) et d'inclinaisons ($\approx 10^{-7}$). On note, notamment sur l'évolution de ν_4 , l'existence de 2 zones perturbées correspondant aux zones détectées Fig.8.1. La Figure 8.3 donne l'évolution de ces fréquences avec des paramètres environ 100 fois plus élevés. On constate que les courbes sont un peu

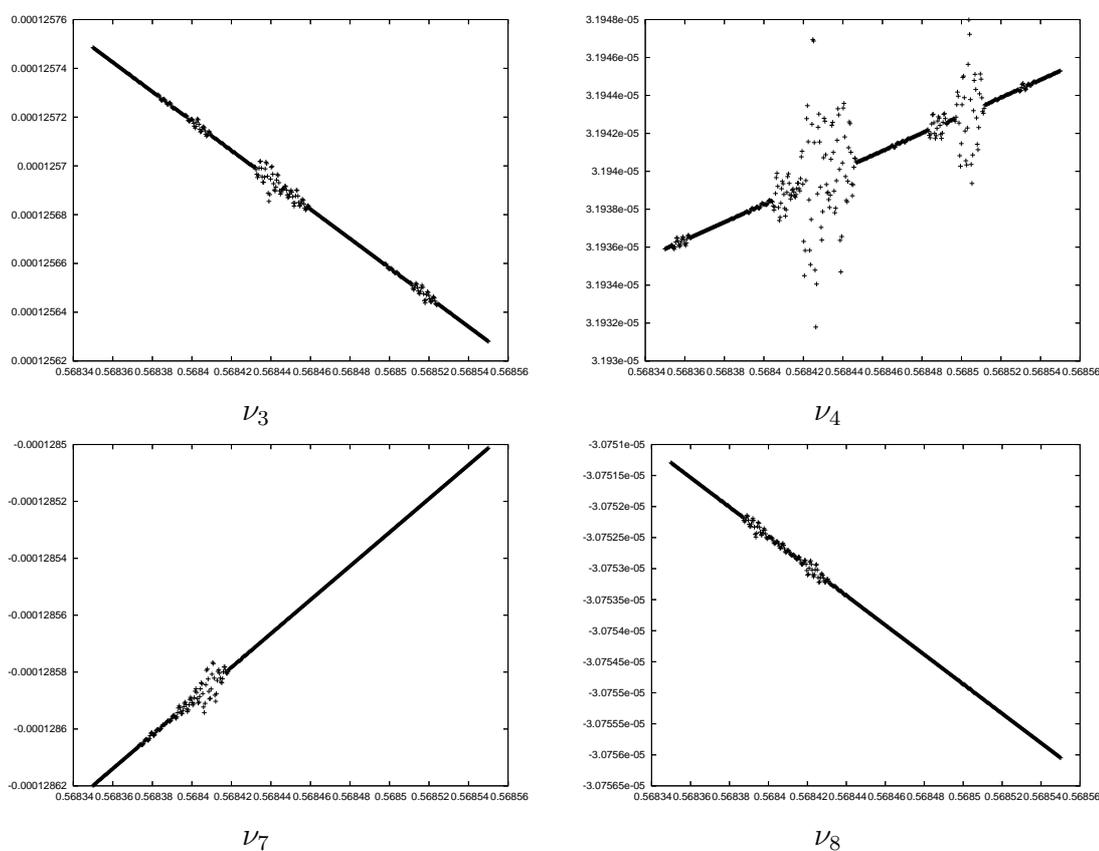


FIG. 8.3 – Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-4}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-5}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-4}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-5}$.

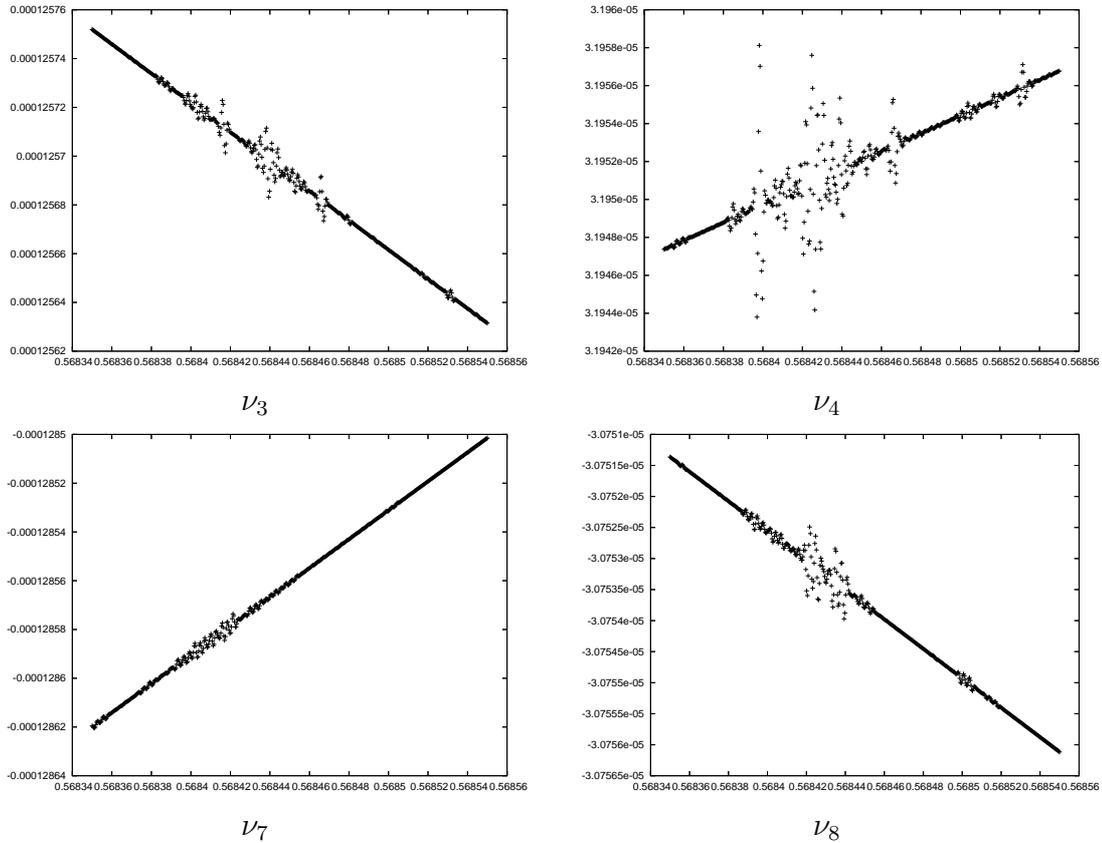


FIG. 8.4 – Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-4}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-4}$.

moins régulières qu'à la Figure 8.2, mais sans grande différence. On peut ainsi considérer que l'état chaotique du système ne change pas pour des valeurs d'excentricités et d'inclinaisons inférieures à celles utilisées Fig.8.3.

Les Figures 8.4 à 8.6 représentent des situations où le chaos du système est plus élevé. Fig. 8.4 représente l'évolution des fréquences pour des excentricités de l'ordre de 10^{-3} , on peut constater un peu plus de chaos que sur les Figures précédentes. Sur la Fig.8.5 où l'excentricité de Callisto est de l'ordre de 10^{-2} , le chaos se retrouve partout au point de perdre toute information sur la droite à laquelle chaque courbe est assimilable dans les figures précédentes. Par contre, sur la Fig.8.6, l'excentricité de Ganymède est de l'ordre de 10^{-2} et celle de Callisto de l'ordre de 10^{-3} , et le chaos est comparable à celui de la Fig.8.4. Ces constatations indiquent que des excentricités inférieures à 10^{-3} n'influent pas sur le chaos. Par contre, au-delà de 10^{-3} , une augmentation des excentricités entraîne une augmentation de l'état chaotique du système, plus particulièrement s'il s'agit de l'excentricité de Callisto e_4 .

Cartes de fréquences

J'ai enfin utilisé la technique de représentation des cartes de fréquences (cf. 6.1.3). Cette technique m'a permis de représenter les différentes fréquences caractéristiques du système

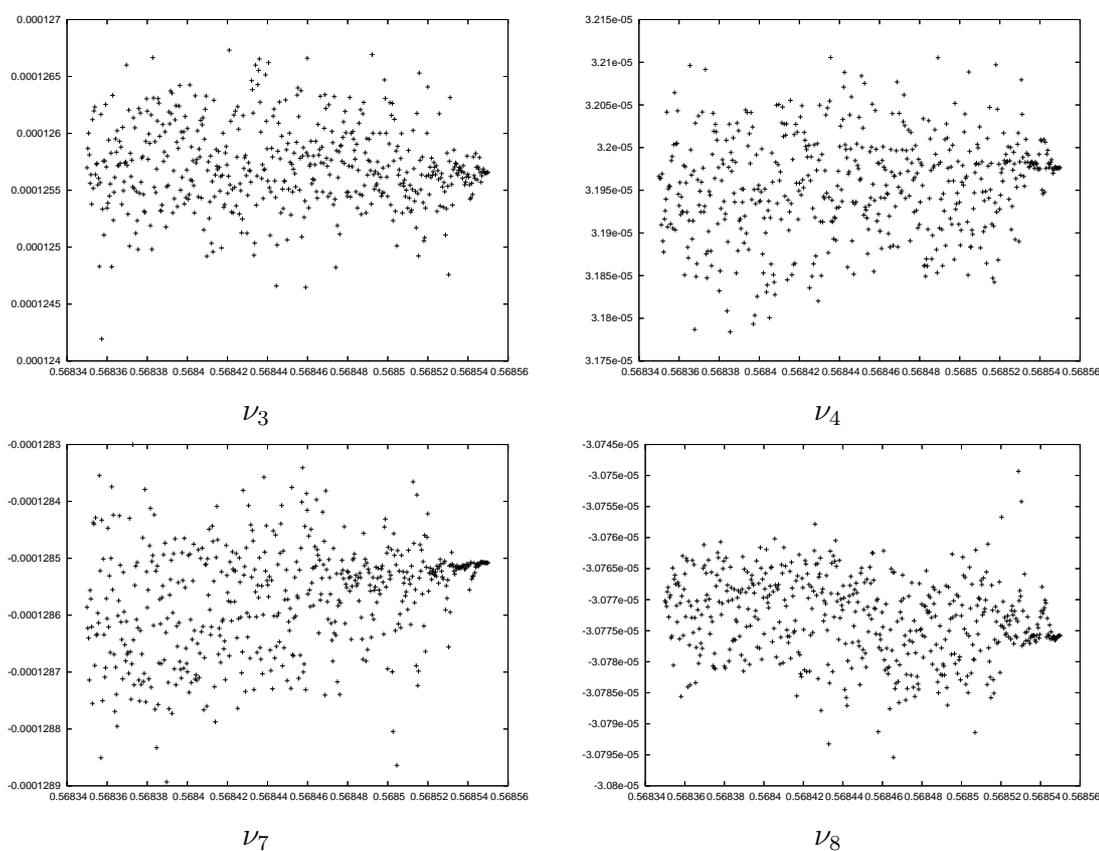


FIG. 8.5 – Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-4}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-2}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-4}$.

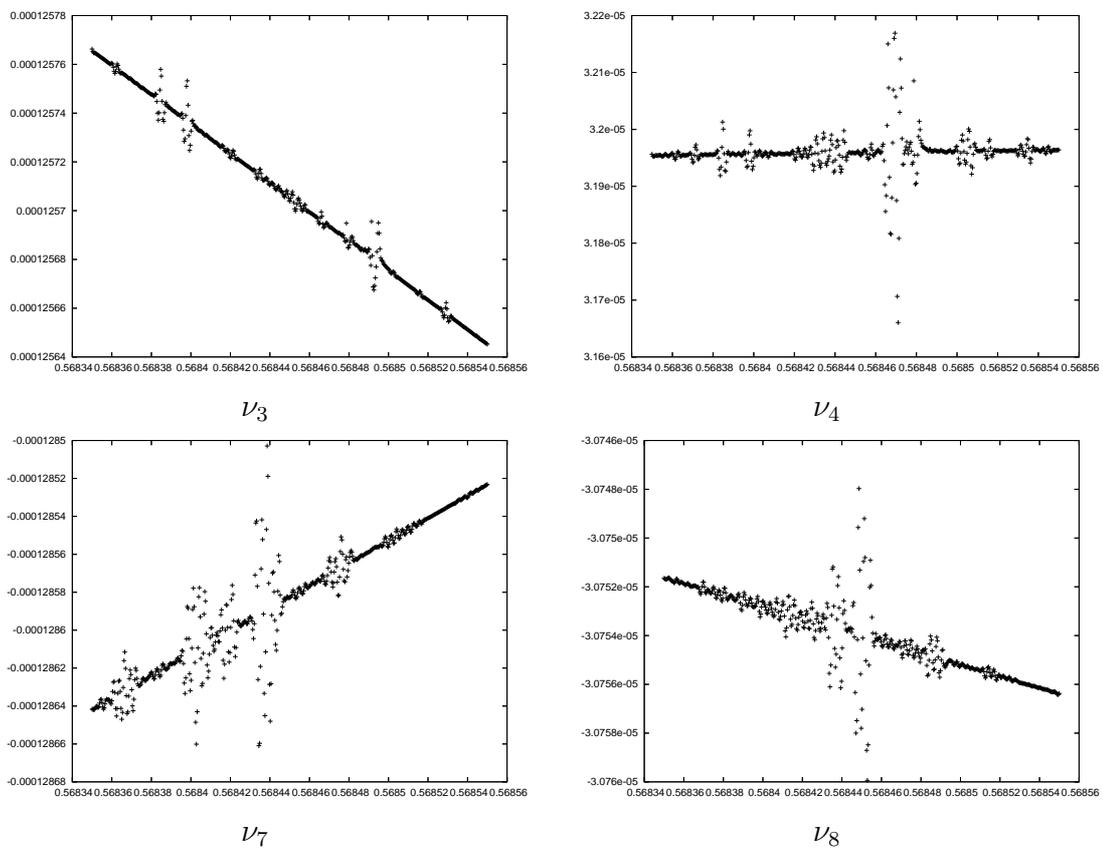


FIG. 8.6 – Évolution des fréquences pour $e_3 = 1.02 \times 10^{-2}$, $\gamma_3 = 1.1 \times 10^{-3}$, $e_4 = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.5 \times 10^{-3}$.

sous l'influence aussi bien des variations de a_3 que de a_4 (respectivement les demi-grands axes de Ganymède et de Callisto). Ainsi, on peut considérer une carte de fréquences comme la restriction à 2 fréquences d'une application associant les demi-grands axes aux fréquences caractéristiques du système.

Je me suis concentré sur les 5 fréquences ayant le plus d'importance dans ma solution (cf. Tab.8.2 et 8.3), à savoir ν_2 , ν_3 , ν_4 , ν_7 et ν_8 , ce qui donne 10 possibilités de cartes où seulement 2 fréquences sont représentées. Sur chaque carte, les valeurs indiquées en abscisse et en ordonnée sont des variations en % de la fréquence considérée, les valeurs de référence étant $5.785 \times 10^{-4} j^{-1}$ pour ν_2 , $1.259 \times 10^{-4} j^{-1}$ pour ν_3 , $3.193 \times 10^{-5} j^{-1}$ pour ν_4 , $-1.2875 \times 10^{-4} j^{-1}$ pour ν_7 et $-3.103 \times 10^{-5} j^{-1}$ pour ν_8 .

Chaque carte est constituée de 3000 points. a_3 varie de 1069000 à 1070700 km sur 100 points et a_4 de 1882600 à 1883200 km sur 30 points. Cette possibilité de variation des 2 demi-grands axes élargit la plage de variation de α_{34} qui ainsi peut varier de 0.567651 à 0.568735. Chaque fréquence est calculée sur 16384 points avec un pas de temps de 35.625 jours ou 0.1 an, donc sur 1638.4 ans. On peut remarquer que le domaine de travail n'est pas vraiment symétrique par rapport aux conditions initiales, en fait je me suis concentré sur l'intervalle où les termes issus de l'inégalité de De Haerdtl ont les effets les plus significatifs. Cet intervalle correspond à des valeurs de α légèrement plus faibles que la valeur actuelle, ce qui justifie la dissymétrie par rapport aux demi-grands axes donnés par les éphémérides.

Pour chaque carte, j'ai gardé les actuelles valeurs des excentricités et inclinaisons de Io et Europe. Je me suis principalement consacré sur l'apparition de chaos en fonction des excentricités de Ganymède et Callisto. Ainsi, j'ai également conservé les inclinaisons de Ganymède et Callisto respectivement $\gamma_3 = 1.619 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.206 \times 10^{-3}$. J'ai par contre fait varier l'excentricité de Ganymède e_3 de 5×10^{-4} à 10^{-2} et celle de Callisto e_4 de 10^{-4} à 7×10^{-3} . Les actuelles valeurs moyennes de e_3 et e_4 sont 2.1×10^{-3} et 7×10^{-3} .

L'expérience montre que la fréquence la plus intéressante à examiner est ν_4 . En effet, sa dépendance en a_3 et a_4 est faible du fait de la petite variation de a_4 et surtout de l'éloignement de Callisto à Jupiter. Ainsi, visuellement, les variations de ν_4 dues à la diffusion chaotique sont bien visibles par rapport à celles dues aux variations de a_3 et a_4 .

La Figure 8.7 montre des cartes de fréquences (ν_4, ν_7) pour $e_3 = 2.1 \times 10^{-3}$ et différentes valeurs de e_4 . Chacune de ces cartes semble représenter une bande d'une certaine largeur. On constate pour $e_4 < 10^{-3}$ un resserrement progressif de la bande à mesure que e_4 augmente, ceci est dû à l'augmentation avec e_4 des forces des différentes résonances induites par l'inégalité de De Haerdtl, qui ont tendance à confiner les trajectoires. À partir de $e_4 = 5 \times 10^{-4}$ on constate un débordement de quelques points par rapport à la bande, débordement qui augmente avec e_4 , on a là la marque d'une diffusion chaotique. Ainsi, les actuelles valeurs d'excentricité de Ganymède et Callisto permettent une diffusion chaotique pour certaines valeurs de α .

La Figure 8.8 représente des cartes de fréquence pour $e_3 = 5 \times 10^{-4}$, ces cartes ne présentent pas de différence réelle par rapport aux 3 dernières cartes de la Figure 8.7. Ainsi on peut considérer que le chaos détecté n'est dû qu'à la valeur de e_4 , et que la valeur actuelle de l'excentricité de Ganymède n'induit pas à elle seule du chaos au niveau de l'inégalité de De Haerdtl.

La Figure 8.9 donne les mêmes cartes en fréquence mais pour e_3 bien plus élevé, c'est-à-dire 10^{-2} . On constate de la diffusion chaotique même pour de faibles valeurs de l'excentricité

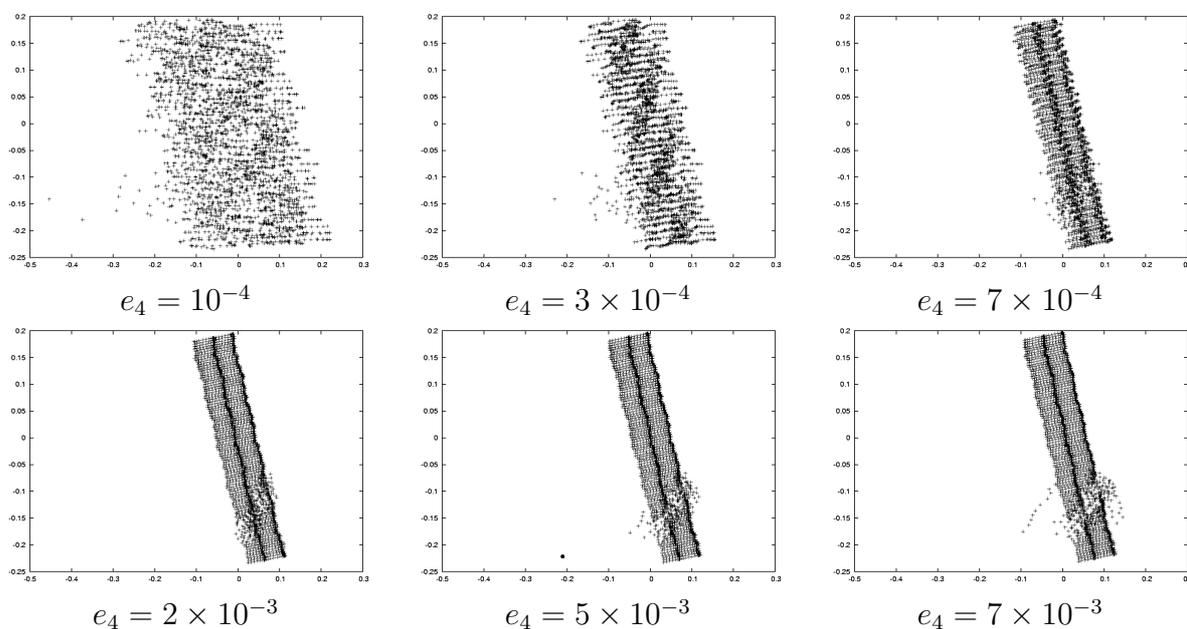


FIG. 8.7 – Cartes de fréquence (ν_4, ν_7) pour $e_3 = 2.1 \times 10^{-3}$ et différentes valeurs de e_4 . Les valeurs indiquées sur les axes sont les variations en % de la fréquence considérée (ν_4 en abscisse, ν_7 en ordonnée).

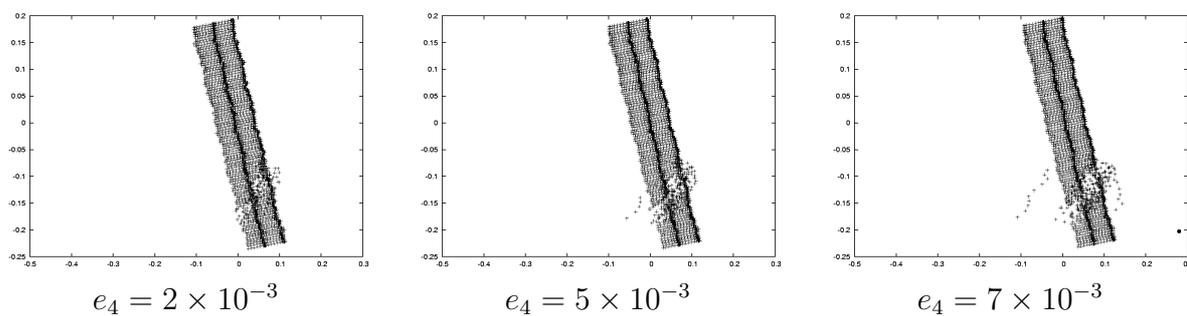


FIG. 8.8 – Cartes de fréquence (ν_4, ν_7) pour $e_3 = 5 \times 10^{-4}$ et différentes valeurs de e_4 . Les valeurs indiquées sur les axes sont les variations en % de la fréquence considérée (ν_4 en abscisse, ν_7 en ordonnée).

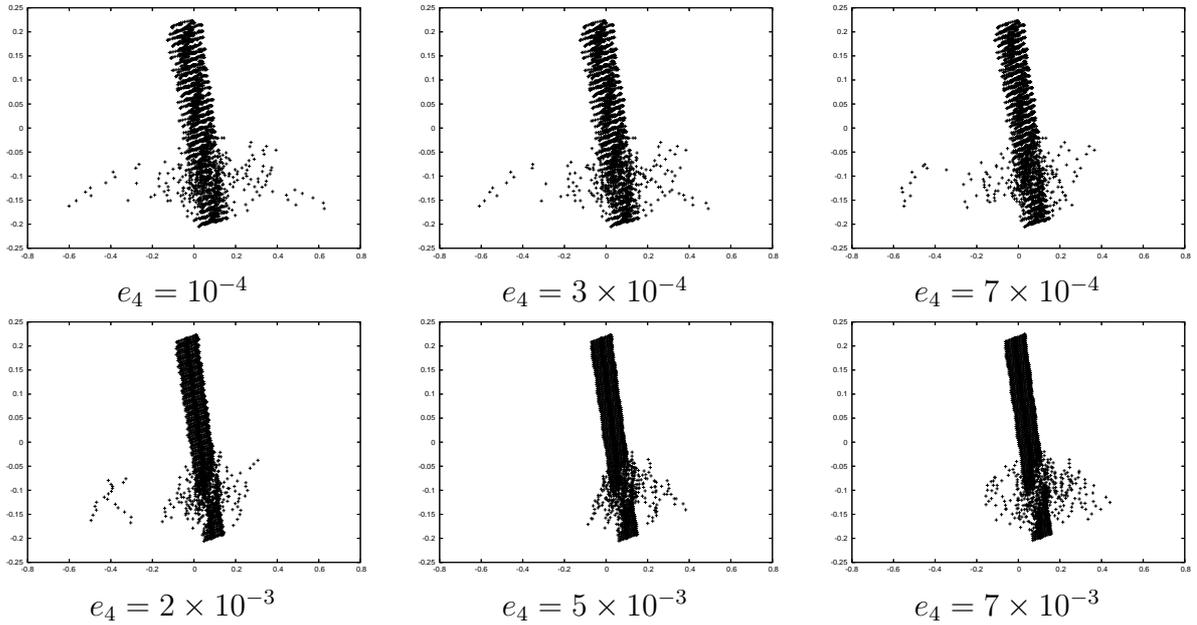


FIG. 8.9 – Cartes de fréquence (ν_4, ν_7) pour $e_3 = 10^{-2}$ et différentes valeurs de e_4 . Les valeurs indiquées sur les axes sont les variations en % de la fréquence considérée (ν_4 en abscisse, ν_7 en ordonnée). L'ampleur de la diffusion impose à l'échelle d'être plus large que dans les 2 précédentes figures 8.7 et 8.8.

e_4 . En augmentant, e_4 a légèrement tendance à confiner les fréquences mais sans empêcher le chaos, et à partir de $e_4 = 5 \times 10^{-5}$ la diffusion chaotique réaugmente. Ainsi, ce cas de figure présente de la diffusion chaotique due à la fois à l'excentricité de Callisto mais aussi à celle de Ganymède.

Enfin, la Figure 8.10 a pour objet d'estimer l'influence des inclinaisons sur le chaos en représentant des cartes (ν_4, ν_7) pour de faibles inclinaisons (à gauche), pour les inclinaisons actuelles (au milieu) et pour des inclinaisons de l'ordre de 10^{-2} à droite. Les deux premières cartes sont peu différentes, par contre celle de droite indique bien plus de diffusion chaotique. Ceci signifie que les inclinaisons actuelles ne sont pas responsables de chaos. Par contre, s'il s'avère que lors de la traversée de la zone où sont localisées les résonances de De Haerdtl, une inclinaison était plus forte qu'actuellement, alors le système a pu subir une diffusion chaotique.

8.3 L'identification des zones chaotiques

Nous savons qu'il y a du chaos dans le système Ganymède-Callisto, induit par l'inégalité de De Haerdtl. La plus probable cause de chaos dans les systèmes planétaires est la diffusion de Chirikov due à des recouvrements de résonances. L'objet de cette section est d'identifier les arguments responsables du chaos détecté dans le système Ganymède-Callisto.

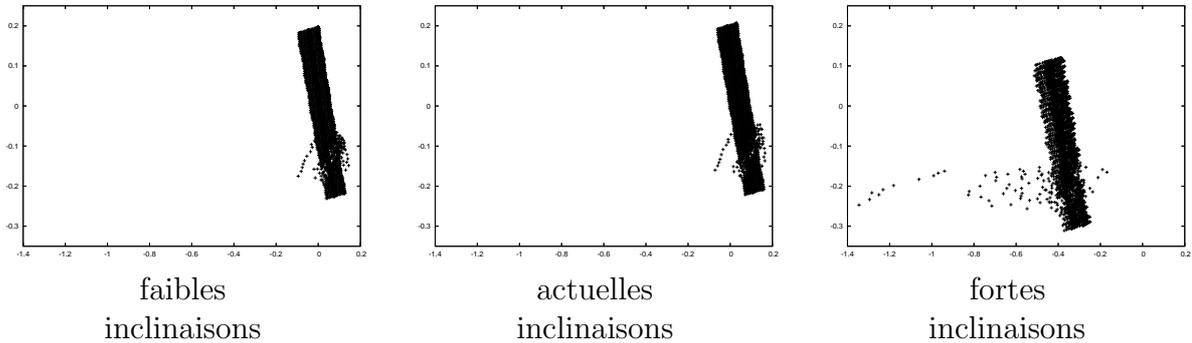


FIG. 8.10 – Cartes de fréquence (ν_4, ν_7) pour $e_2 = 1.02 \times 10^{-3}$, $e_3 = 2.1 \times 10^{-3}$ et $e_4 = 7 \times 10^{-3}$. La différence entre ces 3 cartes est la valeur des inclinaisons, qui valent toutes 3×10^{-4} à gauche, sont de l'ordre de 10^{-3} au milieu ($\gamma_2 = 4.051 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 1.619 \times 10^{-3}$ et $\gamma_4 = 2.206 \times 10^{-3}$), et sont bien plus fortes à droite ($\gamma_2 = 4.051 \times 10^{-3}$, $\gamma_3 = 10^{-2}$ et $\gamma_4 = 10^{-2}$).

8.3.1 La méthode

La méthode utilisée est inspirée de Laskar 1990 [121] et consiste à visualiser l'évolution des différents arguments susceptibles d'être résonants. Ces arguments sont identifiés numériquement par analyse en fréquences.

J'ai réalisé des simulations numériques du système Ganymède-Callisto dans lesquelles j'ai fait varier a_3 en simulant un effet de type dissipation de marée, ceci me permettant de balayer la zone de α où l'inégalité de De Haerdtl peut avoir des effets résonants. Lors de ces simulations, j'ai fait des analyses en fréquences me permettant d'obtenir la phase associée à chaque mode propre significatif dans la dynamique du système, c'est-à-dire $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_7$ et ν_8 , ainsi que la phase associée au plan invariant. J'ai ensuite, par combinaisons linéaires et en utilisant ma 21^{ème} variable $3\lambda_3 - 7\lambda_4$, représenté 46 termes liés à l'inégalité de De Haerdtl. Ces termes sont de la forme $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \sum \beta_i \nu_i$ avec $\sum \beta_i = 4$.

Les simulations numériques ont été réalisées à l'aide de l'intégrateur d'Adams10 car l'algorithme d'analyse en fréquence nécessite un pas constant. Le pas est de 0.1 an, et chaque analyse en fréquence a été réalisée sur 32768 points, soit 3276.8 ans. Les analyses en fréquence sont séparées de 25.6 ans, c'est-à-dire qu'un point de l'intégration numérique est utilisé dans 128 analyses en fréquences.

Ces simulations numériques permettent de représenter l'évolution du rapport des demi-grands axes α au cours du temps. J'ai analysé le comportement irrégulier de α et l'ai comparé au comportement des différents arguments afin d'expliquer, par le comportement de ces arguments, le comportement de α .

8.3.2 Les résultats

La Fig.8.11 représente l'évolution du rapport des demi-grands axes en fonction du temps dans cet algorithme. On constate premièrement un plateau, signe d'une résonance. En dehors de ce plateau, α a un comportement assez irrégulier, il présente d'étroits plateaux ainsi que des sauts.

L'argument responsable du plateau est identifié, il s'agit de $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_4 + 2\nu_0$ (cf. Fig.8.12). Ici une résonance apparemment solide est identifiée, le terme $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_4 + 2\nu_0$ est

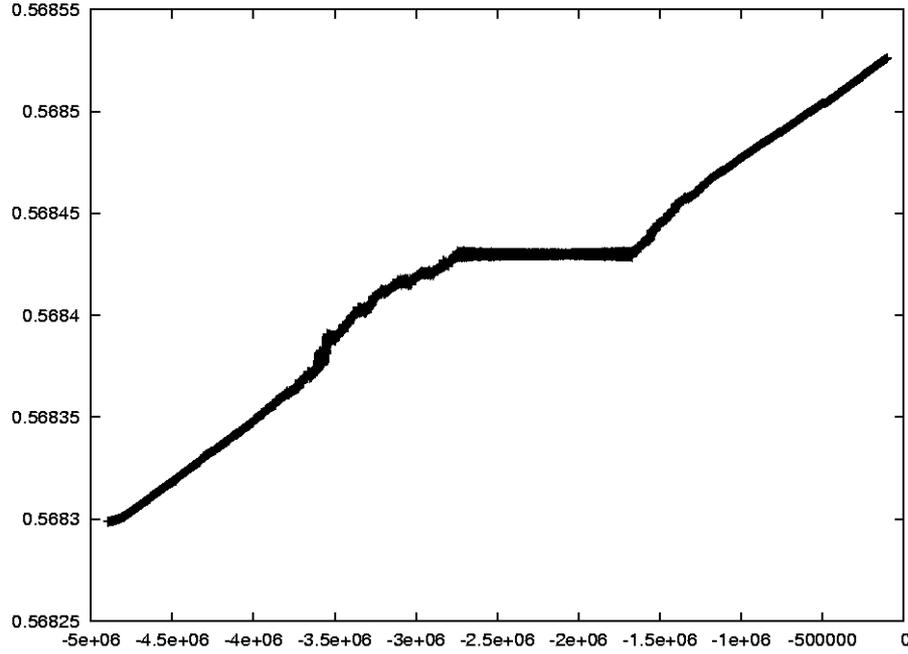


FIG. 8.11 – Évolution de α au cours du temps donnée par l'algorithme qui analyse les fréquences au cours du temps, avec l'intégrateur d'Adams10.

donc candidat à une ancienne résonance entre Ganymède et Callisto. Aucun comportement chaotique n'est identifié au voisinage de cette résonance, néanmoins certains termes semblent être perturbés par cette résonance ou présenter une période de circulation allongée, il s'agit de :

- $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\nu_0$
- $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_2 + 2\nu_3$
- $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\nu_4 + \nu_0$
- $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_4 + 3\nu_0$
- $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\nu_4$

Tous ces termes peuvent ainsi être soupçonnés d'être associés à des résonances proches et sont donc susceptibles de pouvoir être à l'origine de perturbations génératrices de chaos. Notamment, la présence de chaos au moment de la capture en résonance tend à augmenter la probabilité de capture, comme le montre par exemple l'étude de Champenois & Vienne (1999 [35] et [36]) dans le cas Mimas-Téthys.

Cette résonance influe sur les excentricités des satellites (cf. Fig.8.13), notamment les simulations indiquent qu'avant la résonance, l'excentricité de Ganymède était plus élevée, de l'ordre de 7×10^{-3} , alors que celle de Callisto était plus faible avant la résonance qu'après.

Outre cette résonance bien visible, d'autres résonances, bien plus brève, apparaissent dans la représentation de α . Ainsi, la Figure 8.14 montre une zone où α mais en fait le système hésite entre 2 résonances d'arguments respectifs $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\nu_8$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_7 + 3\nu_0$. On parle ici de chaos stable car le système passe aléatoirement d'une résonance à l'autre en gardant le confinement des demi-grands axes, jusqu'à ce que le forçage sur les variations de a_3 rompe cet équilibre. On a ici un cas de diffusion de Chirikov par chevauchement de ces 2

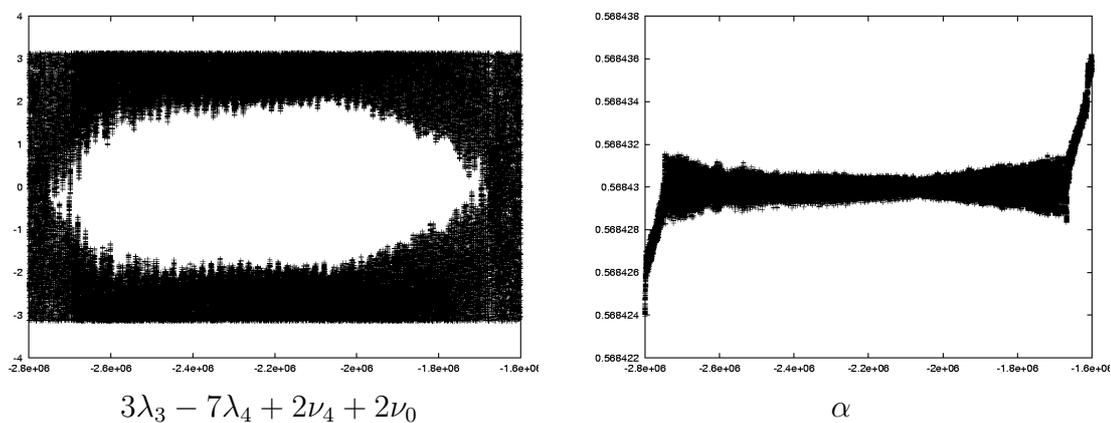


FIG. 8.12 – Résonance d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_4 + 2\nu_0$ (à gauche) et rapport des demi-grands axes α en fonction du temps.

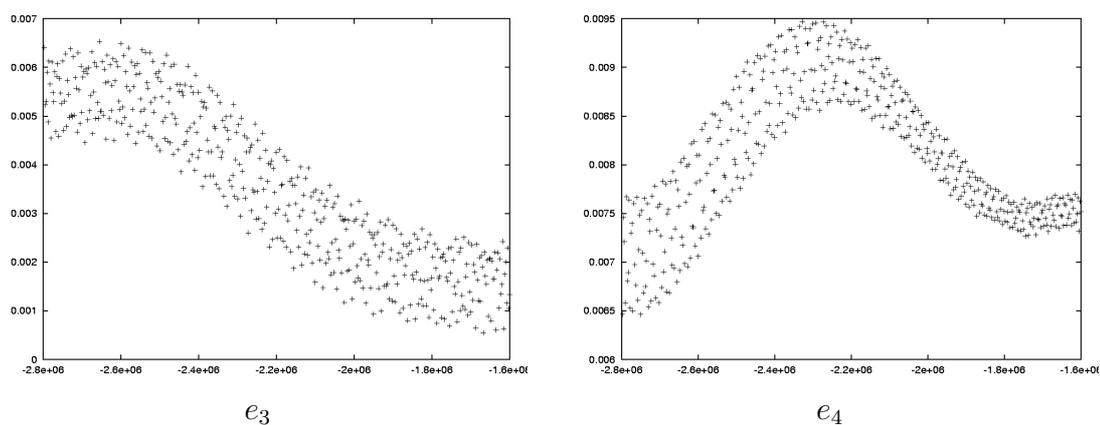


FIG. 8.13 – Excentricités des satellites pendant la durée de la résonance.

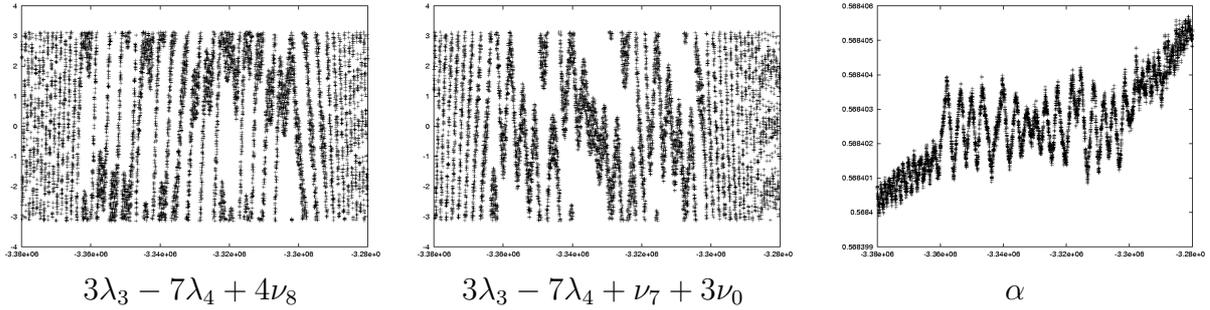


FIG. 8.14 – Chevauchement de 2 résonances. La résonance principale semble être d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\nu_8$ que l'on voit souvent librer autour de π , et parfois circular. L'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_7 + 3\nu_0$ semble circular si lentement qu'on le voit librer autour d'un point d'équilibre qui circular. Néanmoins certaines librations autour de π semblent être d'amplitude plus importante, comme s'il s'agissait temporairement de résonances.

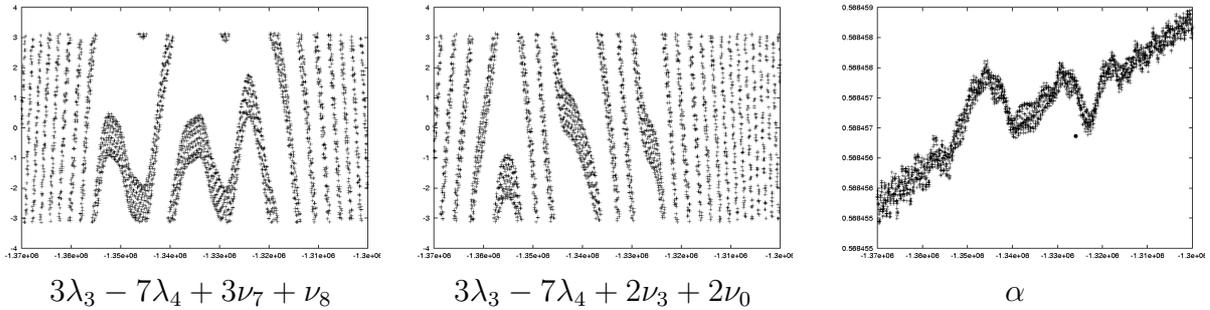


FIG. 8.15 – Chevauchement de 2 résonances. On observe des librations de périodes assez courtes des arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 3\nu_7 + \nu_8$ (librations autour de 0 en $t = -1.352$ et $t = -1.335$ millions d'années) et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_3 + 2\nu_0$ (librations autour de 0 en $t = -1.343$ et $t = -1.325$ millions d'années).

résonances. La Figure 8.15 montre un autre exemple de chevauchement de résonances.

La Figure 8.16 illustre une résonance principale d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_7 + \nu_8$ perturbée par d'autres termes au point parfois de perdre la résonance au profit d'un autre terme. Il est à noter que les résonances associées aux arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_7 + \nu_8$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_4 + 2\nu_8$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_3 + 2\nu_7$ sont localisées presque au même endroit Fig.7.2 et correspondent à une zone de chaos trouvée analytiquement dans le chapitre précédent. On peut également remarquer la perturbation d'un terme faisant intervenir le mode propre ν_2 , associé à Europe, ce qui renforce le soupçon d'un rôle d'Europe dans la dynamique de Ganymède et Callisto avant la capture en résonance laplacienne.

8.4 Intégrations à rebours

J'ai réalisé des intégrations à rebours du système à l'aide de l'intégrateur de Bulirsch-Stoer afin d'essayer de déterminer un probable scénario d'évolution du système. Pour cela, j'ai inclus les dissipations de marée comme précisé plus haut. Cependant, de nombreuses incertitudes persistent sur ces effets. Les premières incertitudes reposent sur les valeurs des

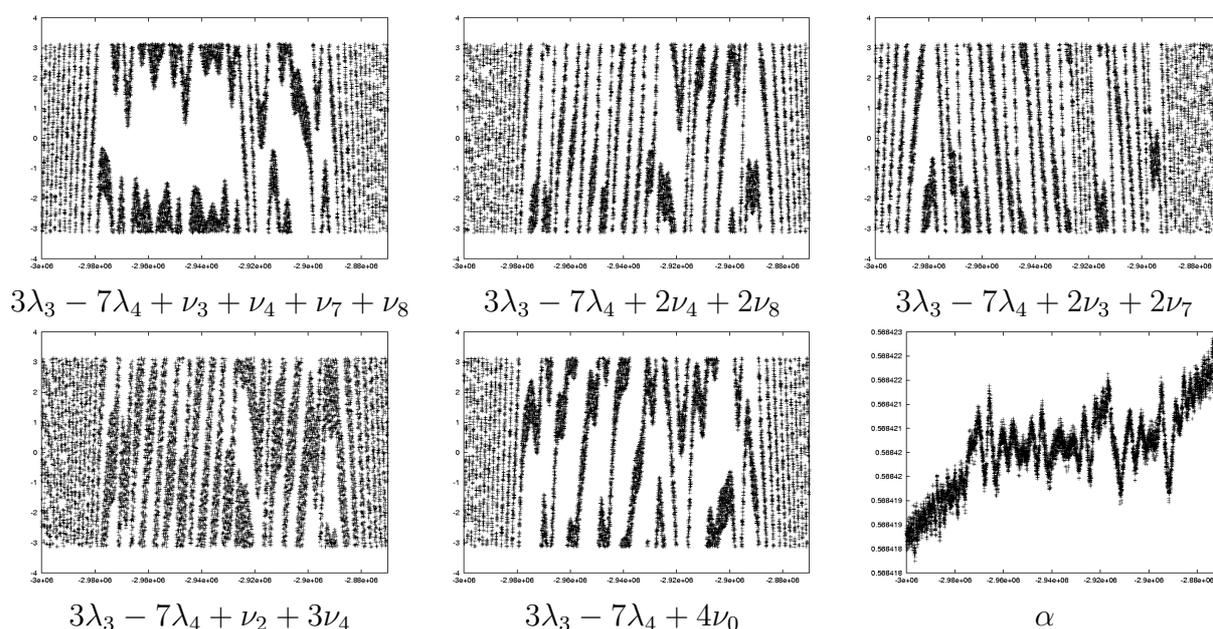


FIG. 8.16 – Une résonance perturbée par 4 termes. Le stationnement de α entre -2.98 et -2.88 millions d'années est principalement dû à la résonance d'argument $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_7 + \nu_8$ qui libre autour de π . Cependant, cet argument circule vers -2.92 millions d'années et dans ce cas c'est $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_4 + 2\nu_8$ qui libre autour de π . On a ici l'alternance d 2 résonances, il y a donc chaos stable. De plus, les arguments $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 2\nu_3 + 2\nu_7$, $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + \nu_2 + 3\nu_4$ et $3\lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\nu_0$ circulent lentement, donc le système se trouve proche de leurs résonances respectives. Ainsi, le système se trouve dans une zone perturbée par 5 résonances.

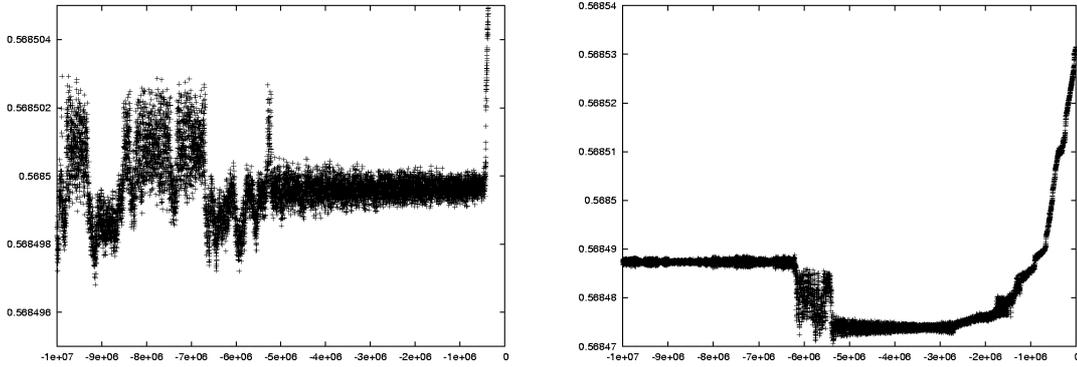


FIG. 8.17 – Évolution de α avec le temps, lorsque l'accélération séculaire de Ganymède est modifiée à partir de $\alpha = 0.5685$ (à gauche) et $\alpha = 0.56849$ (à droite).

paramètres de type géophysique (nombres de Love et facteurs de dissipation), aussi bien sur Jupiter que sur les satellites. Dans les simulations, j'ai donné à $\frac{k_2}{Q}$ la valeur de 10^{-5} pour Jupiter, 5×10^{-3} pour Ganymède et 4×10^{-3} pour Callisto.

Une incertitude existe également sur la persistance ou non de la résonance laplacienne : actuellement, cette résonance accélère Ganymède. Si la capture dans cette résonance date de l'époque où le système traversait l'inégalité de De Haerdtl, alors il faut en tenir compte dans les simulations par une modification de l'accélération séculaire de Ganymède (en fait, une baisse d'un facteur 100 environ). Nous ne savons malheureusement pas à quel moment la capture en résonance laplacienne a eu lieu. Enfin, la présence de chaos impose une certaine prudence quant aux résultats des intégrations numériques. Il est ainsi nécessaire d'utiliser différentes conditions initiales, par exemple sur la phase de $3\lambda_3 - 7\lambda_4$.

Les intégrations à rebours ont été réalisées à l'aide de l'algorithme de Bulirsch-Stoer, plus fiable sur le long terme avec un pas d'intégration qui s'adapte au système. Le gain de cette fiabilité se paie avec l'impossibilité d'utiliser l'algorithme d'analyse en fréquence, le pas n'étant pas constant. Les différences entre ces simulations résident dans l'instant où est modifiée l'accélération séculaire de Ganymède, ainsi que dans la phase de la variable $3\lambda_3 - 7\lambda_4$ dans les conditions initiales. Les autres conditions initiales sont celles répertoriées Tab.8.1.

8.4.1 Plusieurs solutions

Les premières simulations ont été réalisées en modifiant l'accélération séculaire de Ganymède lorsque α atteint pour la première fois les valeurs suivantes : 0.56853, 0.56852, 0.56851, 0.56850, 0.56849, 0.56848, 0.56847, 0.56846, 0.56845, 0.56844, 0.56843, 0.56842, 0.56841, 0.56840, 0.56839, soit 15 simulations. Comme Ganymède s'éloigne de Jupiter avec le temps et que les intégrations sont à rebours, α est décroissant au cours des simulations.

La Figure 8.17 représente 2 simulations numériques où la courbe d'évolution de α indique nettement des captures en résonance. L'image de gauche, où l'accélération séculaire de Ganymède est modifiée lorsque α passe en dessous de 0.5685, montre un phénomène de chaos stable, où le système hésite entre 2 résonances. Celle de droite, où le changement d'accélération séculaire a lieu à $\alpha = 0.56849$, représente une capture en résonance qui fait augmenter

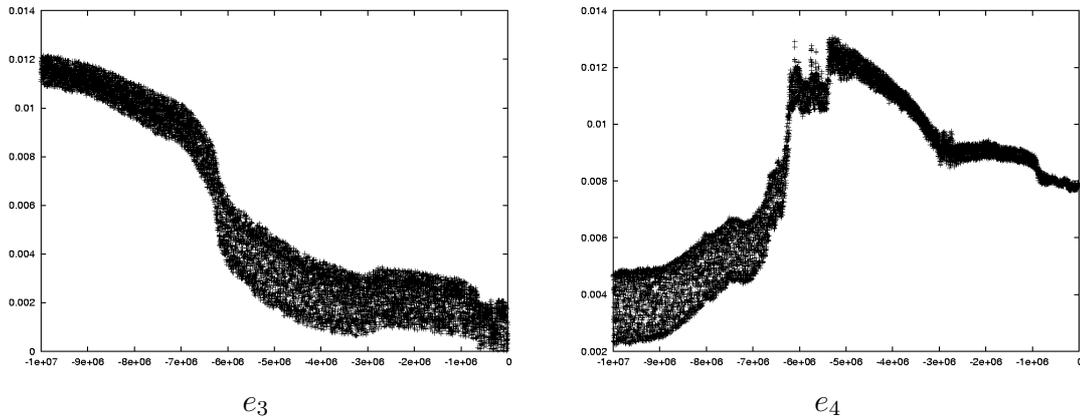


FIG. 8.18 – Évolution des excentricités de Ganymède (à gauche) et Callisto (à droite) avec le temps, lorsque le changement d'accélération séculaire de Ganymède intervient à $\alpha = 0.56849$. Cette figure est à mettre en relation avec la Figure 8.17 dont la partie droite montre l'évolution de α lors de la même simulation.

α jusqu'à ce qu'il atteigne une autre résonance.

La Figure 8.18 indique l'évolution des excentricités de Ganymède et de Callisto lors de cette dernière simulation (changement d'accélération séculaire à $\alpha = 0.56849$). La traversée de résonances indique des excentricités élevées pour Ganymède et Callisto (de l'ordre de 10^{-2}) à une échelle de temps relativement courte (5 millions d'années pour Callisto, 10 millions d'années pour Ganymède) avec pour Ganymède, une forte suspicion d'une excentricité au moins aussi forte dans un passé plus ancien, du fait des marées qui tendent à amortir cette excentricité. Il est enfin à noter qu'une augmentation de l'excentricité peut faire atteindre à Ganymède la valeur e_l (cf. Eq. 4.32) qui est ici 4.8×10^{-3} , donc, dans cette simulation, il est normal de constater que le sens de variation de α change.

D'une façon plus générale, les simulations indiquent une dynamique du système bien plus intéressante lorsque Ganymède est ralenti. Intéressante signifie que les paramètres orbitaux du système sont bien plus sensibles aux différentes résonances, ce qui est logique car une faible vitesse de traversée des zones de résonance favorise les captures, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Sur 15 simulations, 3 indiquent que e_3 a, à un moment, dépassé 9×10^{-3} , et 5 que e_4 a dépassé 9×10^{-3} . Aucune information n'est réellement notable à propos des inclinaisons, elles restent à peu près constantes au cours des simulations.

J'ai également réalisé 12 simulations différentes, à l'aide de conditions initiales différentes sur la variable $3\lambda_3 - 7\lambda_4$, et en ne modifiant l'accélération séculaire de Ganymède qu'à $\alpha = 0.5683$. Ceci a pour effet de traverser la zone de l'inégalité de De Haerdtl en 4 millions d'années. Ces simulations sont à rapprocher de la Figure 8.11 où le même système a été intégré, mais avec l'intégrateur d'Adams10. Aucune de ces simulations n'indique une résonance de durée comparable à celle de la Figure 8.11. 11 de ces simulations indiquent une traversée de la zone de De Haerdtl presque comme une zone régulière, avec parfois une capture qui n'est pas suffisamment stable pour avoir des effets notables sur les excentricités et inclinaisons. La 12^{ème} simulation indique un système instable pour $\alpha < 0.56830$, c'est-à-dire lorsque Ganymède est ralenti, donc le système est plus sensible aux différentes résonances. On peut considérer ce dernier résultat comme peu fiable car, à ce jour, aucun modèle de

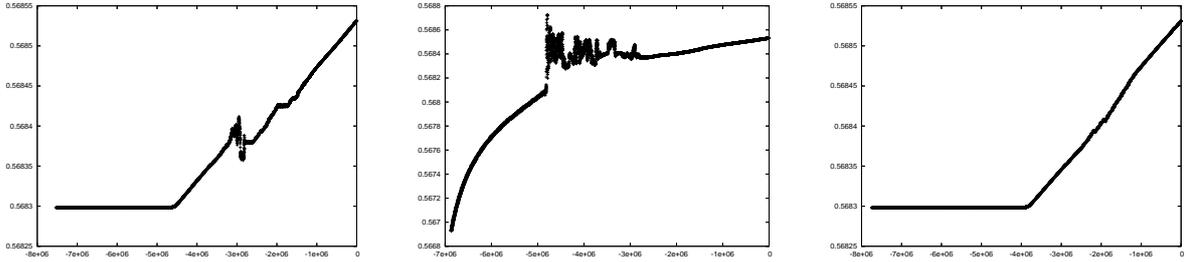


FIG. 8.19 – Évolution de α en fonction du temps lorsque le changement d'accélération séculaire intervient à $\alpha = 0.56830$, pour différentes phases initiales de $3\lambda_3 - 7\lambda_4$.

formation du système jovien n'accrédite la thèse que Ganymède et Callisto aient été capturés. De plus, lorsque les demi-grands axes de Ganymède et Callisto s'écartent autant de leurs valeurs actuelles, alors les hypothèses utilisées pour construire le système ne sont plus valables. Notamment, les termes liés à l'inégalité de De Haerdtl ne sont plus vraiment à longue période, et d'autres termes, devenant à longue période, ne sont plus moyennisables et sont donc à prendre en compte. Les écarts entre les simulations numériques de systèmes proches, ou d'un même système avec des intégrateurs différents, sont indicateurs de chaos.

8.4.2 Implications planétologiques

Il serait intéressant de pouvoir expliquer la structure interne de Ganymède, qui découle d'une différenciation. La différenciation se caractérise notamment par la dissipation d'énergie dans le satellite. Comme nous l'avons vu précédemment, la principale cause de dissipation d'énergie est les marées.

La dissipation due aux marées vérifie

$$\frac{dE}{dt} \propto n^5 e^2 \quad (8.10)$$

on peut donc relier la différenciation d'un corps à son excentricité passée. Nous avons vu dans la section précédente que dans 20% des simulations, l'excentricité de Ganymède dépasse la valeur de 9×10^{-3} . L'excentricité actuelle de Ganymède étant de l'ordre de 2.1×10^{-3} , l'énergie dissipée alors était au moins 18 fois plus importante que maintenant. L'une de ces simulations donne même une excentricité dépassant 0.012, ce qui représente une dissipation d'énergie plus de 32 fois supérieure. Ce résultat est à comparer à la valeur d'excentricité de 7×10^{-3} trouvée par Showman & Malhotra (1997 [179]), où l'inégalité de De Haerdtl n'était pas prise en compte. Ainsi, si la capture en résonance laplacienne est intervenue alors que le système traversait la zone la plus perturbée par l'inégalité de De Haerdtl, alors les perturbations dues à cette inégalité peuvent être la cause de l'actuelle structure interne de Ganymède.

5 simulations donnent une excentricité supérieure à 9×10^{-3} dans l'histoire de Callisto. Néanmoins, le rapport entre les moyens mouvements de Ganymède et de Callisto est de l'ordre de 2.3, ce qui veut dire qu'à excentricités égales et paramètres géophysiques égaux, Callisto dissipera environ 70 fois moins d'énergie que Ganymède. La faible différenciation de Callisto est ainsi relativement aisément explicable.

8.5 Conclusion

Cette étude a permis de prouver que la récente traversée de la zone des résonances liées aux termes de l'inégalité de De Haerdtl a été chaotique si les excentricités de Ganymède et Callisto étaient alors au moins égales à celles qu'elles sont maintenant, ce qui est probable d'après les intégrations numériques à rebours. La traversée de cette zone peut expliquer l'actuelle différenciation de Ganymède du fait d'une excentricité e_3 alors plus élevée.

Ce chaos est dû à la diffusion de Chirikov, qui résulte du recouvrement de plusieurs résonances, certains de ces recouvrements sont clairement identifiés à l'aide de résonances. Cependant, rien n'indique qu'une de ces résonances a pu être maintenue suffisamment longtemps pour expliquer l'actuelle quasi-commensurabilité 7 : 3 entre les moyens mouvements de Ganymède et Callisto.

Ceci établit que l'inégalité de De Haerdtl a joué un rôle important dans la dynamique passée du système des satellites galiléens, et qu'elle doit être prise en compte dans les scénarii d'évolution orbitale, notamment pour expliquer la capture en résonance laplacienne.

Chapitre 9

Signature observationnelle des effets de marées

Introduction

Comme nous l'avons vu, les effets de marée influent sur l'histoire dynamique du système, par exemple sur les probabilités de capture dans des résonances. Leur connaissance permet également de déterminer si une zone chaotique a été traversée par un système ou encore si elle sera traversée.

Mais la détermination de ces effets n'est pas aisée. Ainsi, dans les systèmes de satellites de Jupiter et de Saturne, ils n'ont pour l'instant pu être mesurés avec fiabilité. Nous verrons dans ce chapitre pourquoi leur détermination est si difficile et que l'amélioration des modèles, notamment des éphémérides, peut espérer une détermination pour certains satellites dans un avenir proche.

9.1 Quantification des effets des marées

La grandeur dynamique la plus facilement et précisément mesurable est le moyen mouvement moyen n_i ¹, directement relié au demi-grand axe par la troisième loi de Kepler ².

À l'aide de l'équation 4.6 et de la troisième loi de Kepler, on obtient :

$$\frac{\dot{n}_i}{n_i} = -\frac{9}{2} \frac{k_2^p m_i}{Q_p m_p} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 n_i \left[1 + \frac{51}{4} e_i^2 \right] + \frac{63}{2} \frac{k_2^i m_p}{Q_i m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 n_i e_i^2 \quad (9.1)$$

Toutes les valeurs de l'équation 9.1 sont bien connues à l'exception des facteurs de dissipation et des nombres de Love. Une variation de moyen mouvement moyen entraîne un décalage sur la longitude moyenne du satellite, décalage que l'on espère mesurable.

On peut également tenter d'estimer les effets des marées sur l'excentricité. J'ai posé τ défini par :

¹on peut obtenir une détermination précise de n_i , il suffit de déterminer le nombre de révolutions pendant un intervalle de temps suffisamment long

² $n_i^2 a_i^3 = Gm_p$, où G est la constante gravitationnelle

satellite	A_i (an ⁻¹)	B_i (an ⁻¹)
Io	1.302×10^{-5}	2.204×10^{-8}
Europe	3.417×10^{-7}	5.735×10^{-9}
Ganymède	5.074×10^{-8}	5.135×10^{-11}
Callisto	9.390×10^{-10}	1.285×10^{-11}

TAB. 9.1 – Valeurs des coefficients A_i et B_i , exprimées à l’aide des valeurs de la Table 9.2

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e}{\tau} \quad (9.2)$$

autrement dit, à l’aide de l’équation 4.7 (donc dans le cas du problème quasi-plan, ce qui est une bonne approximation pour les satellites galiléens et pour les satellites S-1 à S-7) :

$$\frac{1}{\tau} = n_i \left[\frac{21}{2} \frac{k_2^i}{Q_i} \frac{m_p}{m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 - \frac{57}{8} \frac{k_2^p}{Q_p} \frac{m_i}{m_p} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 \right] \quad (9.3)$$

La prépondérance de $\frac{m_p}{m_i}$ devant $\frac{m_i}{m_p}$ permet même d’écrire :

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{21}{2} n_i \frac{k_2^i}{Q_i} \frac{m_p}{m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 \quad (9.4)$$

9.1.1 Cas des satellites galiléens

Si on voulait évaluer les accélérations séculaires des satellites galiléens uniquement avec l’équation 9.1, on obtiendrait pour chaque satellite une formule de la forme :

$$\frac{\dot{n}_i}{n_i} = -\frac{A_i}{Q_p} + B_i \frac{k_2^1}{Q_1} \quad (9.5)$$

les coefficients A_i et B_i sont évalués Tab.9.1.

La Figure 9.1 représente les accélérations séculaires théoriques des satellites galiléens d’après la formule 9.5 et la Table 9.1. On constate que les valeurs concernant Io sont de plusieurs ordres de grandeur supérieures à celles concernant Europe et Ganymède. Or, la présence de la résonance laplacienne entre Io, Europe et Ganymède induit des échanges d’énergie qui font que l’accélération séculaire d’Io force les accélérations d’Europe et Ganymède. Yoder [209] a suggéré que les commensurabilités 2 : 1 entre Io et Europe et Europe et Ganymède étaient maintenues du fait de l’action des marées d’Io transmises aux 2 autres satellites par la résonance laplacienne, ce qui donne $\dot{n}_2 = \frac{\dot{n}_1}{2}$ et $\dot{n}_3 = \frac{\dot{n}_1}{4}$. Aksnes et Franklin [3], quant à eux, proposent de considérer que le moment cinétique total de Io+Europe+Ganymède est constant, ce qui donne $\dot{n}_1 = 4\dot{n}_2 = -8\dot{n}_3$.

La Figure 9.2 donne les écarts en longitudes des quatre satellites galiléens entre 2 simulations numériques avec ou sans dissipation de marée, à partir du système d’équations utilisé par Lainey [111] pour construire les éphémérides L1, avec 3 valeurs différentes de dissipation dans Jupiter. On constate qu’en valeur absolue, l’accélération séculaire d’Io est la plus forte, tandis que celles d’Europe et Ganymède sont du même ordre de grandeur, et de l’ordre de 2 fois plus faibles que celle d’Io. Ceci confirme l’hypothèse qu’Io accélère Europe

quantité	valeur	source
e_1	0.00411	Burns 1986 [29]
e_2	0.0102	Burns 1986 [29]
e_3	0.0021	Burns 1986 [29]
e_4	0.007	Burns 1986 [29]
γ_1	3.176×10^{-4}	Lieske 1998 [135]
γ_2	4.051×10^{-3}	Lieske 1998 [135]
γ_3	1.619×10^{-3}	Lieske 1998 [135]
γ_4	2.206×10^{-3}	Lieske 1998 [135]
R_1 (km)	$1829.4 \times 1819.3 \times 1815.7$ (1821.46)	UAI 2000 [176]
R_2 (km)	$1564.13 \times 1561.23 \times 1560.93$ (1562.09)	UAI 2000 [176]
R_3 (km)	$2632.4 \times 2632.29 \times 2632.35$ (2632.345)	UAI 2000 [176]
R_4 (km)	$2409.4 \times 2409.2 \times 2409.3$ (2409.3)	UAI 2000 [176]
R_p (km)	69911	UAI 2000 [176]
a_1 ($\times 10^3$ km)	421.7692	Lieske 1998 [135]
a_2 ($\times 10^3$ km)	671.0785	Lieske 1998 [135]
a_3 ($\times 10^3$ km)	1070.4275	Lieske 1998 [135]
a_4 ($\times 10^3$ km)	1882.7586	Lieske 1998 [135]
m_1 ($\times 10^{-5} m_p$)	4.70446	Anderson et al 1996 [5]
m_2 ($\times 10^{-5} m_p$)	2.52341	Anderson et al 1996 [5]
m_3 ($\times 10^{-5} m_p$)	7.80431	Campbell & Synnott 1985 [31]
m_4 ($\times 10^{-5} m_p$)	5.66832	Campbell & Synnott 1985 [31]
k_2^p	0.379	Gavrilov & Zharkov 1977 [74]
n_1 ($rad.j^{-1}$)	3.55039669361	
n_2 ($rad.j^{-1}$)	1.76898621924	
n_3 ($rad.j^{-1}$)	0.878132432119	
n_4 ($rad.j^{-1}$)	0.376443069622	

TAB. 9.2 – Valeurs utilisées dans les calculs pour les satellites galiléens. Les valeurs des moyen-mouvements moyens sont déduites des autres valeurs par la troisième loi de Kepler.

satellites	$\frac{k_i^2}{Q_i}$	$\tau(\times 10^6 \text{ans})$	-10^6 ans	-10^8 ans	-10^9 ans
J-1 Io	0.05	0.046	> 1	> 1	> 1
J-1 Io	0.025	0.092	> 1	> 1	> 1
J-2 Europe	0.0015	36.29	0.0105	0.16	> 1
J-2 Europe	0.02	2.721	0.0147	> 1	> 1
J-3 Ganymède	0.003	85.89	0.0021	0.0067	> 1
J-4 Callisto	0.003	381.4	0.007	0.0091	0.096

TAB. 9.3 – Amortissement de l'excentricité des satellites galiléens. Les trois dernières colonnes représentent les excentricités des satellites galiléens il y a 1 million, 100 millions et 1 milliard d'années, en supposant que le rapport $\frac{k_i^2}{Q_i}$ est resté constant.

et Ganymède en valeur absolue. Par contre, Callisto ne semble pas accéléré, son accélération séculaire paraît même négligeable par rapport à celles des autres satellites galiléens.

La table 9.3 donne des valeurs pour τ pour les 4 satellites galiléens, on constate notamment que l'excentricité d'Io est fortement amortie, on sait qu'elle est forcée par la résonance laplacienne. Par contre, les excentricités de Ganymède et Callisto n'ont pas été significativement amorties pendant le dernier million d'années, l'excentricité de Callisto a même été peu amortie pendant les 100 derniers millions d'années. Les valeurs indiquées dans cette Table ont été obtenues avec l'hypothèse que la dissipation des satellites est restée constante depuis un million, 100 millions ou 1 milliards d'années. La constance de la dissipation dépend de l'histoire de la différenciation de chaque satellite. En effet, un corps primordial, non différencié, dissipe très peu. Callisto étant peu différencié sa dissipation est peut-être restée constante depuis l'origine, ce n'est probablement pas le cas des autres satellites.

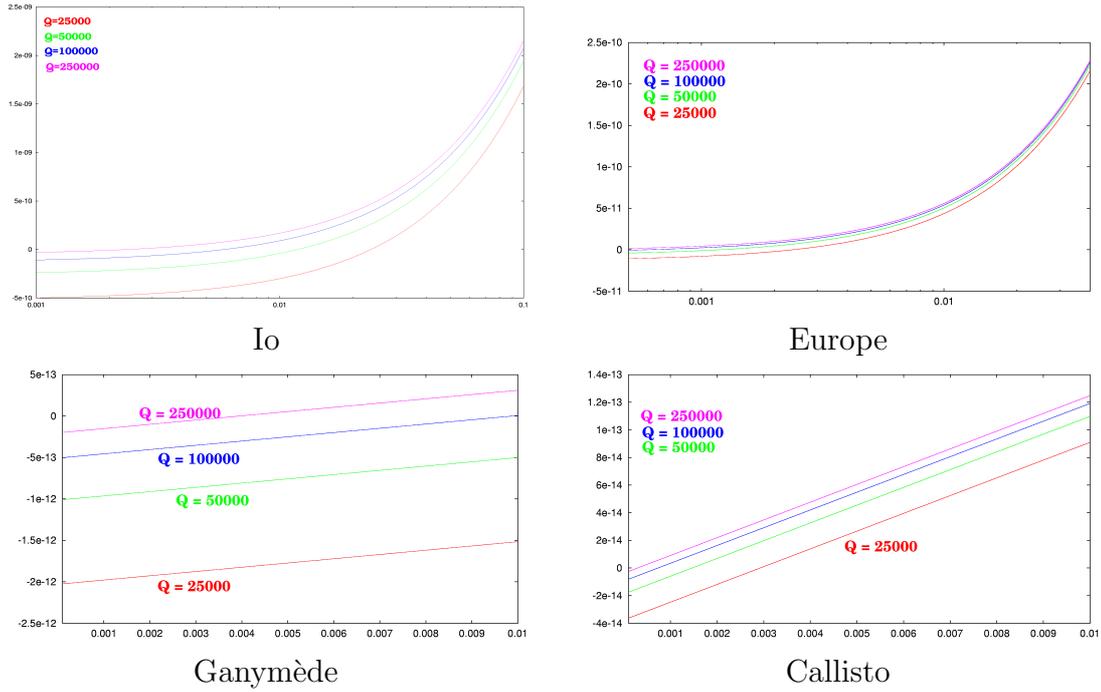


FIG. 9.1 – Accélérations séculaires théoriques des satellites galiléens $\frac{\dot{n}_i}{n_i}$ en an^{-1} en fonction de $\frac{k_i^i}{Q_i}$, en utilisant les valeurs des coefficients A_i et B_i . Dans le cas d'Europe, Tobie [195] donne 2 ordres de grandeur possible de $\frac{k_2^2}{Q_2}$ selon qu'il y ait de la dissipation dans le manteau ou non. S'il y en a, alors $\frac{k_2^2}{Q_2} \approx 0.015 - 0.030$, dans ce cas le bourrelet de la planète a un très faible impact et Europe accélère avec $\frac{\dot{n}_2}{n_2}$ de l'ordre de 10^{-10} alors que si le manteau est peu dissipatif (hypothèse la plus probable) alors les effets des 2 bourrelets se compensent à peu près, et il est très difficile de dire si Europe ralentit ou accélère. Dans le cas de Callisto, l'échelle pour $\frac{k_4^4}{Q_4}$ est choisie d'après Tobie [195] qui estime que ce facteur est inférieur à 0.006. On peut donc estimer qu'il y a incertitude sur le signe de l'accélération séculaire de Callisto, et que sa norme est de l'ordre de 2×10^{-14} . Pour Europe et Ganymède, ces courbes ne sont valables qu'avant la capture en résonance laplacienne, qui force leurs accélérations séculaires par échanges d'énergie avec Io.

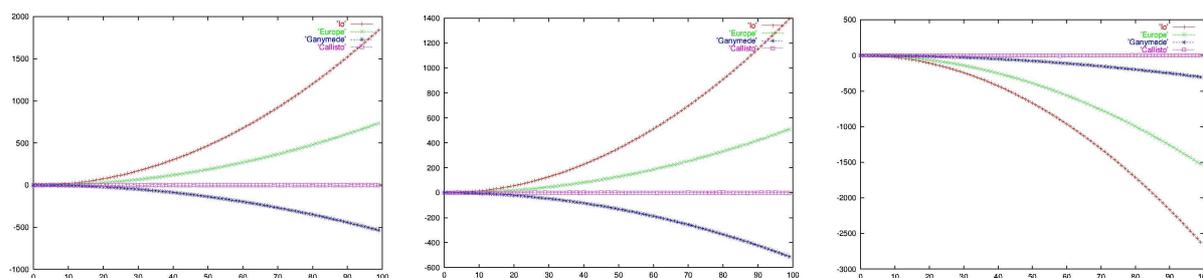


FIG. 9.2 – Simulations d'accélération séculaires dans les galiléens par Lainey [110] & Tobie [195]. Ces courbes représentent la différence en longitudes sur un siècle entre 2 simulations numériques avec ou sans dissipation de marée. De gauche à droite, le rapport $\frac{k_2^p}{Q_p}$ vaut successivement 0, 5×10^{-6} et 5×10^{-5} et on a à chaque fois $\frac{k_2^1}{Q_1} = 0.025$, $\frac{k_2^2}{Q_2} = 0.01$, $\frac{k_2^3}{Q_3} = 0.005$ et $\frac{k_2^4}{Q_4} = 0.005$.

quantité	valeur	source
R_1 (km)	$209.1 \times 196.2 \times 191.4$ (198.6)	UAI 2000 [176]
R_2 (km)	$256.3 \times 247.3 \times 244.6$ (249.4)	UAI 2000 [176]
R_3 (km)	$535.6 \times 528.2 \times 525.8$ (529.8)	UAI 2000 [176]
R_4 (km)	560	UAI 2000 [176]
R_5 (km)	764	UAI 2000 [176]
R_6 (km)	2575	UAI 2000 [176]
R_7 (km)	$164 \times 130 \times 107$ (133)	UAI 2000 [176]
R_8 (km)	718	UAI 2000 [176]
R_p (km)	58232	UAI 2000 [176]
m_1 ($\times 10^{-6} m_p$)	0.0634	TASS1.6 [203]
m_2 ($\times 10^{-6} m_p$)	0.069	TASS1.6 [203]
m_3 ($\times 10^{-6} m_p$)	1.060	TASS1.6 [203]
m_4 ($\times 10^{-6} m_p$)	1.963	TASS1.6 [203]
m_5 ($\times 10^{-6} m_p$)	4.32	TASS1.6 [203]
m_6 ($\times 10^{-6} m_p$)	236.638	Campbell & Anderson 1989 [32]
m_7 ($\times 10^{-6} m_p$)	0.0263	Dobrovolskis & Lissauer 2004 [51]
m_8 ($\times 10^{-6} m_p$)	3.1	TASS1.6 [203]
k_2^p	0.341	Gavrilov & Zharkov 1977 [74]

TAB. 9.4 – Paramètres physiques utilisés dans les calculs pour les satellites Saturniens. Lorsque le satellite est considéré comme un corps triaxial, le rayon moyen est entre parenthèses.

9.1.2 Cas des satellites de Saturne

De la même façon qu'en 9.1.1 on peut estimer les accélérations séculaires des satellites saturniens hors résonances, en sachant que l'on a $Q_p > 14000$ (Gavrilov & Zharkov 1977 [74]). La Table 9.6 donne les valeurs des coefficients A_i et B_i de l'équation 9.5 estimées à l'aide des valeurs des paramètres physiques données Tab.9.5, et les accélérations séculaires sont représentées Fig.9.3 à 9.7. Dans le cas de Mimas (cf. Fig.9.3) on constate que la fonction de dissipation de la planète influe très peu (probablement car Mimas n'est pas suffisamment massif pour soulever un bourrelet significatif sur Saturne) et que les effets géophysiques laissent croire à une probable accélération de Mimas, à moins d'une dissipation très faible dans ce corps. Une très faible dissipation serait compatible avec l'excentricité significative de Mimas, qui n'aurait pratiquement pas été amortie (cf. Peale 1980 [158]).

Dans le cas d'Encelade (Fig.9.5) il semble, par des arguments théoriques sur les marées, difficile de déterminer si on a une accélération ou une décélération, cela dépend de la dissipation dans ce satellite, qui devrait être significative du fait d'un volcanisme de glace (cf. Poirier 1983 [162]). N'oublions pas que cet effet n'est qu'une contribution à l'accélération séculaire d'Encelade, qui est en outre forcée par la résonance avec Dioné.

L'accélération séculaire de Téthys est exprimée pour deux valeurs de l'excentricité e_3 , pour l'excentricité maximale ($e_3 = 10^{-3}$) possible d'après TASS1.6 [203] et pour l'excentricité la plus probable $e_3 = 2.35 \times 10^{-4}$. Cette accélération semble dominée par les effets du bourrelet sur Saturne (cf. Fig.9.4), il faut dire que Téthys est plus massif que les satellites étudiés précédemment (Mimas et Encelade) et que son excentricité est très faible. Dans ce cas, la

quantité	valeur	source
e_1	0.01 – 0.02	TASS1.6 [203]
e_2	0.0048	TASS1.6 [203]
e_3	< 0.001	TASS1.6 [203]
e_4	0.0022	TASS1.6 [203]
e_5	0.00095	TASS1.6 [203]
e_6	0.0289	TASS1.6 [203]
e_7	0.1	TASS1.7 [62]
e_8	0.029	TASS1.6 [203]
γ_1	0.009 – 0.014	TASS1.6 [203]
γ_2	0.00013	TASS1.6 [203]
γ_3	0.006 – 0.009	TASS1.6 [203]
γ_4	0.00015	TASS1.6 [203]
γ_5	0.003	TASS1.6 [203]
γ_6	0.004 – 0.007	TASS1.6 [203]
γ_7	0 – 0.01	TASS1.7 [62]
γ_8	0.1 – 0.15	TASS1.6 [203]
a_1 (km)	184735.9	
a_2 (km)	237413.3	
a_3 (km)	294171.5	
a_4 (km)	377024.3	
a_5 (km)	526793.0	
a_6 (km)	1221728.7	
a_7 (km)	1482337.1	
a_8 (km)	3559387.7	
n_1 ($rad.j^{-1}$)	6.701709780	TASS1.6 [203]
n_2 ($rad.j^{-1}$)	4.599967896	TASS1.6 [203]
n_3 ($rad.j^{-1}$)	3.335122817	TASS1.6 [203]
n_4 ($rad.j^{-1}$)	2.298575815	TASS1.6 [203]
n_5 ($rad.j^{-1}$)	1.391724808	TASS1.6 [203]
n_6 ($rad.j^{-1}$)	0.3940956849	TASS1.6 [203]
n_7 ($rad.j^{-1}$)	0.2948437911	TASS1.7 [62]
n_8 ($rad.j^{-1}$)	0.07924104005	TASS1.6 [203]

TAB. 9.5 – Paramètres dynamiques utilisés dans les calculs pour les satellites Saturniens. Les valeurs des demi-grands axes sont déduites des autres valeurs par la troisième loi de Kepler (la valeur de Campbell & Anderson [32] est utilisée pour la masse de Saturne $GM_{\text{h}} = 37931272 km^3 j^{-2}$). Les valeurs d'excentricité et d'inclinaison viennent des premiers termes des séries de TASS ([203] & [62]).

satellite	e_i	A_i (an ⁻¹)	B_i (an ⁻¹)
Mimas	10^{-2}	7.4324×10^{-7}	1.7464×10^{-7}
Mimas	2×10^{-2}	7.4324×10^{-7}	6.9855×10^{-7}
Encelade	4.8×10^{-3}	1.5797×10^{-7}	2.2607×10^{-8}
Téthys	2.35×10^{-4}	6.0226×10^{-7}	3.7879×10^{-11}
Téthys	10^{-3}	6.0226×10^{-7}	6.8590×10^{-10}
Dioné	2.2×10^{-3}	2.2229×10^{-7}	4.7139×10^{-10}
Rhéa	9.5×10^{-4}	5.5617×10^{-8}	2.1463×10^{-11}
Titan	2.89×10^{-2}	1.2995×10^{-8}	6.6562×10^{-10}
Hypérion	0.1	4.5845×10^{-13}	7.5000×10^{-12}
Japet	2.9×10^{-2}	1.6309×10^{-13}	8.2610×10^{-14}

TAB. 9.6 – Valeurs des coefficients A_i et B_i pour les satellites de Saturne, exprimées à l’aide des valeurs de la Table 9.5

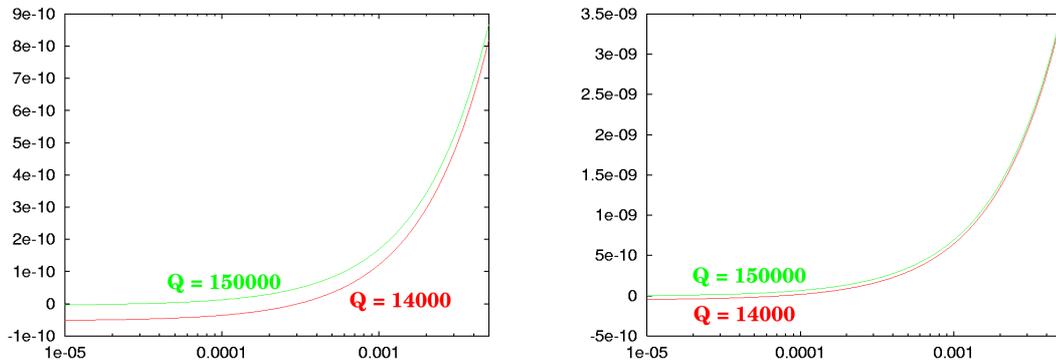


FIG. 9.3 – Accélération séculaire théorique de Mimas hors résonance $\frac{\dot{n}_1}{n_1}$ en fonction de $\frac{k_2^1}{Q_1}$ pour des valeurs extrêmes de Q_p (14000 (en rouge) et 150000 (en vert)), à gauche pour $e_1 = 0.01$ et à droite pour $e_1 = 0.02$.

valeur de la fonction de dissipation de Saturne est capitale, on peut en tout cas dire que les marées ralentissent Téthys, et donc l’éloignent de Saturne.

De façon analogue à Téthys, Dioné et Rhéa sont ralentis par les forces de marées (cf. Fig.9.5 pour Dioné et Fig.9.6 pour Rhéa), on peut ainsi s’attendre respectivement à des décélérations de l’ordre de $10^{-11}.an^{-1}$ et $2 \times 10^{-12}.an^{-1}$ pour ces 2 satellites.

Du fait de sa masse, Titan (cf. Fig.9.6) soulève un bourrelet significatif sur Saturne, la fonction de dissipation de la planète a ainsi une influence significative sur la norme de l’accélération séculaire. Néanmoins, l’excentricité significative de ce corps (2.89×10^{-2}) ainsi que la dissipation qu’il y règne du fait de sa masse, et donc de sa différenciation, permettent au bourrelet soulevé sur le satellite d’avoir un effet encore plus important et donc de faire accélérer Titan. On peut ainsi estimer son accélération séculaire de l’ordre de $10^{-12} - 10^{-13}.an^{-1}$.

La Figure 9.7 représente les accélérations séculaires de Hypérion et Japet. Hypérion a une excentricité importante (de l’ordre de 0.1) qui va faire accélérer ce satellite (si on ne tient pas compte de la résonance avec Titan) malgré la faible dissipation attendue (car Hypérion est peu massique). On peut s’attendre à une accélération séculaire de marée de l’ordre de grandeur de $10^{-16} - 10^{-15}.an^{-1}$. L’accélération séculaire de Japet due aux marées peut être

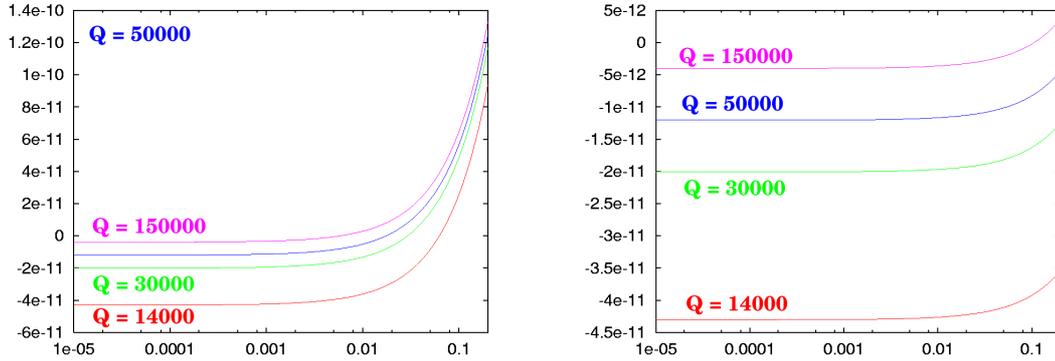


FIG. 9.4 – Accélération séculaire théorique de Téthys hors résonance $\frac{\dot{n}_3}{n_3}$ en fonction de $\frac{k_2^3}{Q_3}$ pour différentes valeurs de Q_p , à gauche pour $e_3 = 0.001$ (valeur maximale) et à droite pour $e_3 = 0.0002$ (valeur la plus probable d'après TASS1.6 [203]).

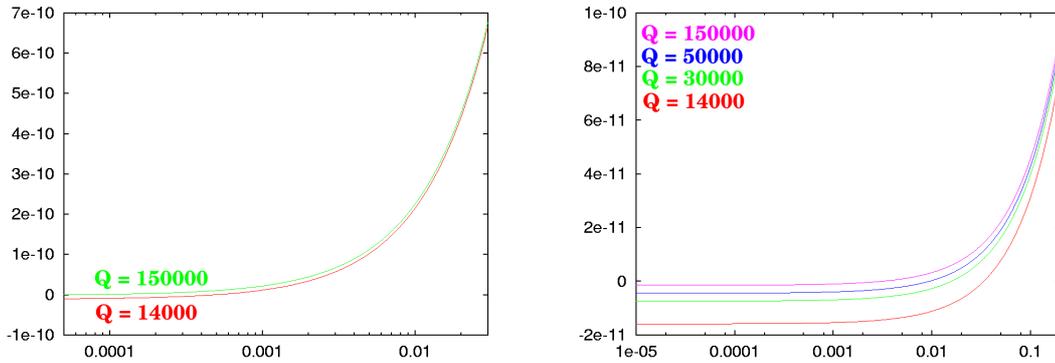


FIG. 9.5 – Accélérations séculaires théoriques d'Encelade et de Dioné hors résonance $\frac{\dot{n}_i}{n_i}$ en fonction de $\frac{k_2^i}{Q_i}$ pour différentes valeurs de Q_p .

estimée à environ $10^{-18}.an^{-1}$, une valeur aussi faible a peu de sens devant différents effets actuellement non pris en compte dans les éphémérides, notamment l'influence gravitationnelle d'Uranus ou encore les effets thermiques dus à la très grande différence d'albedo entre les 2 hémisphères.

Ces estimations ne tiennent pas compte des résonances dans le système Saturnien. En fait il y a 3 résonances : Mimas-Téthys, Encelade-Dioné et Titan-Hypérion. Ces résonances maintiennent les rapports des demi-grands axes constants par le biais d'échanges d'énergie. Ceci peut être expliqué par le raisonnement suivant, inspiré du travail d'Allan (1969 [4]) sur l'évolution en résonance du système Mimas-Téthys.

Si on appelle U le potentiel perturbateur associé au satellite intérieur et U' celui associé au satellite extérieur, les équations de Lagrange donnent notamment :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \quad (9.6)$$

$$\frac{dn'}{dt} = -\frac{3}{a'^2} \frac{\partial U'}{\partial \lambda'} \quad (9.7)$$

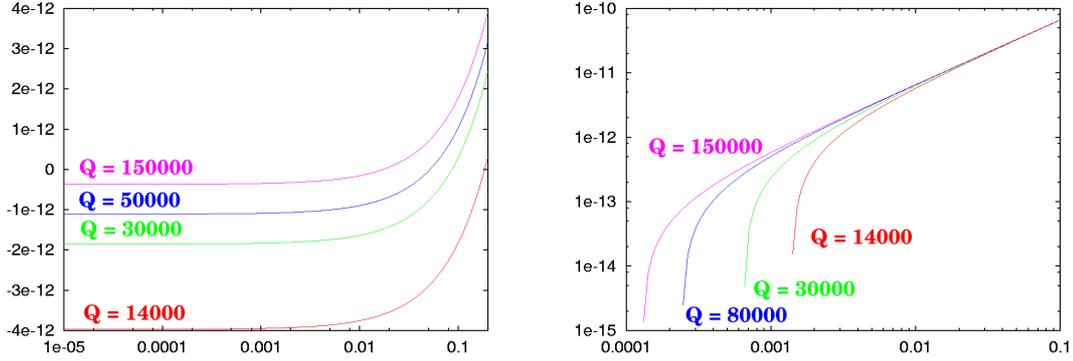


FIG. 9.6 – Accélérations séculaires théoriques de Rhéa et Titan hors résonance $\frac{\dot{n}_i}{n_i}$ en fonction de $\frac{k_i^2}{Q_i}$ pour différentes valeurs de Q_p .

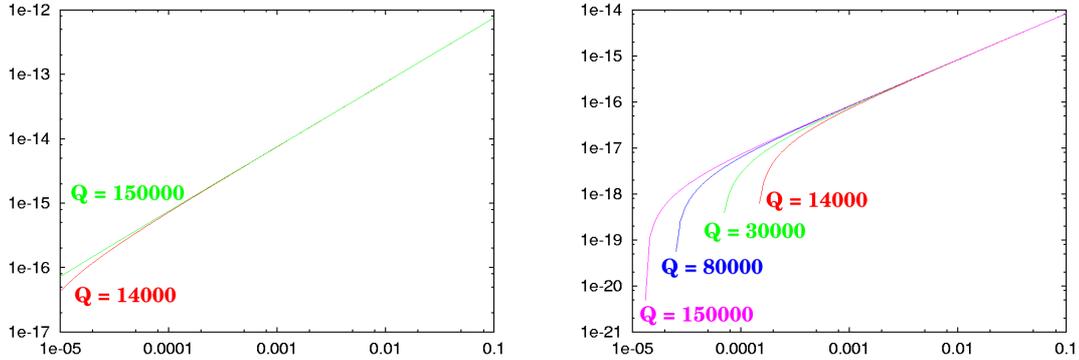


FIG. 9.7 – Accélérations séculaires théoriques de Hyperion (à gauche) et Japet (à droite) hors résonance $\frac{\dot{n}_i}{n_i}$ en fonction de $\frac{k_i^2}{Q_i}$ pour différentes valeurs de Q_p .

(cf. par exemple Duriez [64]). Lorsque le système est pris dans une résonance isolée d'argument $\phi = p\lambda - (p+q)\lambda' + q_1\varpi + q_2\varpi' + q_3\delta + q_4\delta'$, on peut ne tenir compte que du terme correspondant à cet argument, terme auquel il faut ajouter les dissipations de marée. Ceci donne :

$$\frac{dn}{dt} = 3pn^2\alpha m' e^{|q_1|} e'^{|q_2|} \gamma^{|q_3|} \gamma'^{|q_4|} f(\alpha) \sin \phi + \left(\frac{dn}{dt}\right)_M \quad (9.8)$$

$$\frac{dn'}{dt} = -3(p+q)n'^2 m e^{|q_1|} e'^{|q_2|} \gamma^{|q_3|} \gamma'^{|q_4|} f(\alpha) \sin \phi + \left(\frac{dn'}{dt}\right)_M \quad (9.9)$$

Dans le cas de résonances classiques comme celles qu'on retrouve dans le système de Saturne, l'argument ϕ est en libration, ce qui implique notamment que sa dérivée seconde est nulle en moyenne. En négligeant les dérivées secondes des nœuds et péri-centres qui sont d'ordre 2 des masses, on a :

$\left(\frac{\dot{n}_1}{n_1}\right)_M$	$\left(\frac{\dot{n}_3}{n_3}\right)_M$	$\dot{\alpha}_M(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_1}{n_1}(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_3}{n_3}(an^{-1})$	$\dot{\alpha}(an^{-1})$
-2×10^{-11}	-2×10^{-11}	0	-1.99×10^{-11}	-2×10^{-11}	3.93×10^{-13}
-10^{-12}	-2×10^{-11}	-7.98×10^{-12}	-1.83×10^{-11}	-1.84×10^{-11}	3.61×10^{-13}
10^{-12}	-2×10^{-11}	-8.82×10^{-12}	-1.81×10^{-11}	-1.82×10^{-11}	3.58×10^{-13}

TAB. 9.7 – Accélération séculaires de Mimas et de Téthys, en tenant compte de la résonance. On peut constater que le rapport des demi-grands axes α varie nettement moins vite (environ 25 fois) lorsque la résonance est établie.

$$\ddot{\phi} \approx p\dot{n} - (p+q)\dot{n}' = (3p^2n^2\alpha m' - 3(p+q)^2n'^2m)e^{|q_1|}e^{|q_2|}\gamma^{|q_3|}\gamma'^{|q_4|}f(\alpha)\sin\phi + p\left(\frac{dn}{dt}\right)_M - (p+q)\left(\frac{dn'}{dt}\right)_M \quad (9.10)$$

on déduit de cette équation :

$$e^{|q_1|}e^{|q_2|}\gamma^{|q_3|}\gamma'^{|q_4|}f(\alpha)\sin\phi = \frac{(p+q)\left(\frac{dn'}{dt}\right)_M - p\left(\frac{dn}{dt}\right)_M}{3p^2n^2\alpha m' + 3(p+q)^2n'^2m} \quad (9.11)$$

que l'on injecte dans les équations (9.8) et (9.9) pour obtenir finalement :

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{pn\alpha m'}{p^2n^2\alpha m' + (p+q)^2n'^2m} \left((p+q)\left(\frac{dn'}{dt}\right)_M - p\left(\frac{dn}{dt}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_M \quad (9.12)$$

$$\frac{\dot{n}'}{n'} = \frac{(p+q)n'm}{p^2n^2\alpha m' + (p+q)^2n'^2m} \left(p\left(\frac{dn}{dt}\right)_M - (p+q)\left(\frac{dn'}{dt}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}'}{n'}\right)_M \quad (9.13)$$

- Mimas-Téthys Mimas et Téthys sont pris dans une résonance d'argument $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \Omega_1 + \Omega_3$, on a donc $p = 2$, $q = 2$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0$ et $q_4 = 1$, les équations (9.12) et (9.13) deviennent :

$$\frac{\dot{n}_1}{n_1} = \frac{n_1\alpha m_3}{n_1^2\alpha m_3 + 4n_3^2m_1} \left(2n_3\left(\frac{\dot{n}_3}{n_3}\right)_M - n_1\left(\frac{\dot{n}_1}{n_1}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_1}{n_1}\right)_M \quad (9.14)$$

$$\frac{\dot{n}_3}{n_3} = 2\frac{n_3m_1}{n_1^2\alpha m_3 + 4n_3^2m_1} \left(n_1\left(\frac{\dot{n}_1}{n_1}\right)_M - 2n_3\left(\frac{\dot{n}_3}{n_3}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_3}{n_3}\right)_M \quad (9.15)$$

Ainsi, les accélérations séculaires attendues pour Mimas et Téthys sont liées entre elles, par transfert d'énergie entre ces 2 corps. La Table 9.7 donne quelques valeurs plausibles, dépendant de la dissipation dans Mimas, qui a une importance capitale et qui est pourtant très mal connue.

On constate que les rapports $\frac{\dot{n}}{n}$ sont proches mais pas rigoureusement identiques, et que c'est l'accélération séculaire de Téthys qui va décider de celle de Mimas. Ceci est dû au rapport des masses de ces deux satellites, Téthys étant environ 17 fois plus massif que Mimas.

$\left(\frac{\dot{n}_2}{n_2}\right)_M$	$\left(\frac{\dot{n}_4}{n_4}\right)_M$	$\dot{\alpha}_M(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_2}{n_2}(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_4}{n_4}(an^{-1})$	$\dot{\alpha}(an^{-1})$
-2×10^{-11}	-10^{-11}	4.20×10^{-12}	-1.05×10^{-11}	-1.05×10^{-11}	2.71×10^{-15}
10^{-11}	-10^{-11}	-8.40×10^{-12}	-8.94×10^{-12}	-8.94×10^{-12}	2.3×10^{-15}

TAB. 9.8 – Accélérations séculaires d'Encelade et Dioné

Cette accélération serait directement reliée au facteur de dissipation dans Saturne par le biais de l'équation 9.5 et en tenant compte que l'excentricité de Téthys est très faible, plus précisément on aurait :

$$Q_p \approx -\frac{9}{2}k_2^p \frac{m_3 n_3^2}{m_p \dot{n}_3} \quad (9.16)$$

Ainsi, la détection de l'accélération séculaire de Mimas et/ou de Téthys permettrait de connaître la dissipation dans Saturne.

- Encelade-Dioné Dans ce cas, l'argument résonant est $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$, les équations (9.12) et (9.13) deviennent ainsi :

$$\frac{\dot{n}_2}{n_2} = \frac{n_2 \alpha m_4}{n_2^2 \alpha m_4 - 4n_4^2 m_2} \left(2n_4 \left(\frac{\dot{n}_4}{n_4}\right)_M - n_2 \left(\frac{\dot{n}_2}{n_2}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_2}{n_2}\right)_M \quad (9.17)$$

$$\frac{\dot{n}_4}{n_4} = 2 \frac{n_4 m_2}{n_2^2 \alpha m_4 - 4n_4^2 m_2} \left(n_2 \left(\frac{\dot{n}_2}{n_2}\right)_M - 2n_4 \left(\frac{\dot{n}_4}{n_4}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_4}{n_4}\right)_M \quad (9.18)$$

Ce cas est assez similaire à celui de la résonance Mimas-Téthys dans le sens où le satellite extérieur est beaucoup plus massif que le satellite intérieur (le rapport des masses vaut environ 28.5) et où il y a facteur 2 entre les moyens-mouvements moyens (l'argument résonant est $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$). Là aussi on constate que l'accélération séculaire des 2 corps en résonance est celle du plus massif hors résonance.

- Titan-Hypérion Ces 2 satellites sont dans une résonance d'argument $4\lambda_6 - 3\lambda_7 - \varpi_6$ et leur rapport des masses est de l'ordre de 9000, on peut donc pratiquement dire que Hypérion n'influe pas sur les mouvements de Titan, et que l'accélération séculaire de Titan force celle de Hypérion de façon à avoir

$$4\dot{n}_6 = 3\dot{n}_7$$

ce qui donne

$$\frac{\dot{n}_6}{n_6} = \frac{\dot{n}_7}{n_7}$$

Les formules (9.19) et (9.20) ainsi que la Table 9.9 le prouvent

$$\frac{\dot{n}_6}{n_6} = \frac{3n_6 \alpha m_7}{9n_6^2 \alpha m_7 + 16n_7^2 m_6} \left(4n_7 \left(\frac{\dot{n}_7}{n_7}\right)_M - 3n_6 \left(\frac{\dot{n}_6}{n_6}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_6}{n_6}\right)_M \quad (9.19)$$

$$\frac{\dot{n}_7}{n_7} = \frac{4n_7 m_6}{9n_6^2 \alpha m_7 + 16n_7^2 m_6} \left(3n_6 \left(\frac{\dot{n}_6}{n_6}\right)_M - 4n_7 \left(\frac{\dot{n}_7}{n_7}\right)_M \right) + \left(\frac{\dot{n}_7}{n_7}\right)_M \quad (9.20)$$

$\left(\frac{\dot{n}_6}{n_6}\right)_M$	$\left(\frac{\dot{n}_7}{n_7}\right)_M$	$\dot{\alpha}_M(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_6}{n_6}(an^{-1})$	$\frac{\dot{n}_7}{n_7}(an^{-1})$	$\dot{\alpha}(an^{-1})$
10^{-12}	10^{-15}	-5.50×10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	-1.36×10^{-15}
10^{-13}	10^{-15}	-5.45×10^{-14}	10^{-13}	10^{-13}	-1.36×10^{-16}
10^{-12}	10^{-16}	-5.50×10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	-1.36×10^{-15}
10^{-13}	10^{-16}	-5.50×10^{-14}	10^{-13}	10^{-13}	-1.36×10^{-16}

TAB. 9.9 – Accélérations séculaires de Titan et Hypérior

satellites	$\frac{\dot{n}}{n}(an^{-1})$
Mimas	-2×10^{-11}
Encelade	-10^{-11}
Téthys	-2×10^{-11}
Dioné	-10^{-11}
Rhéea	-10^{-13}
Titan	5×10^{-13}
Hypérior	5×10^{-13}
Japet	(trop faible)

TAB. 9.10 – Accélérations séculaires estimées des Saturniens

Il est intéressant de noter que le bourrelet soulevé par la planète sur Titan a une influence assez importante (Titan se rapproche de Saturne), donc une connaissance de l'accélération séculaire de Titan (qui est toutefois très faible) pourrait nous renseigner sur sa structure interne.

Les accélérations séculaires estimées des satellites de Saturne sont rassemblées Tab.9.10.

Une étude de l'amortissement de l'excentricité paraît plus délicate que précédemment car l'équation 9.4 suppose que l'inclinaison et l'obliquité du satellite influent très peu, ce qui n'est pas nécessairement évident dans les cas de Mimas, Téthys et surtout Japet. Néanmoins je propose des estimations des τ (Table 9.11). Les temps d'amortissement semblent assez importants (les plus faibles de l'ordre du milliard d'années), ceci est dû à la faible différenciation des satellites qui entraîne peu de dissipation. Une très faible dissipation peut expliquer l'excentricité significative de Mimas, sans cependant exclure l'hypothèse d'une ancienne résonance qui aurait forcé cette excentricité, avant la capture dans l'actuelle résonance avec Téthys. La très faible excentricité de Téthys peut laisser penser à une certaine dissipation dans ce satellite. Cette excentricité est très mal connue, elle est peut-être encore plus faible. On peut aussi espérer avoir une dissipation significative dans Titan, mais ce corps est si éloigné de Saturne que les effets de marée sont actuellement impossibles à détecter par les observations. Il est également à noter que les excentricités d'Encelade, Rhéea et Hypérior sont forcées par Dioné et Titan, par conséquent les équations de marées ne permettent pas de représenter leurs évolutions au cours du temps. Enfin, cette table confirme la très faible influence des marées sur Hypérior et Japet.

satellites	e_i	$\frac{k_2^i}{Q_i}$	$\tau(\times 10^6)\text{ans}$	-10^6ans	-10^8ans	-10^9ans
S-1 Mimas	0.015	10^{-5}	17.2	0.0159	> 1	> 1
S-1 Mimas	0.015	5×10^{-4}	3.44	0.020	> 1	> 1
S-2 Encelade	0.0048	5×10^{-5}	61.1	0.00488	0.0247	> 1
S-2 Encelade	0.0048	5×10^{-4}	6.11	0.00565	> 1	> 1
S-3 Téthys	0.000235	5×10^{-5}	87.5	0.000238	0.000737	> 1
S-3 Téthys	0.000235	5×10^{-4}	8.75	0.000265	> 1	> 1
S-3 Téthys	0.000235	10^{-3}	4.37	0.000295	> 1	> 1
S-4 Dioné	0.0022	5×10^{-5}	616	0.0022	0.00259	0.0112
S-4 Dioné	0.0022	5×10^{-4}	61.6	0.00224	0.0112	> 1
S-5 Rhéa	0.00095	5×10^{-5}	2520	0.00095	0.000988	0.00141
S-5 Rhéa	0.00095	5×10^{-4}	252	0.000954	0.00141	0.0502
S-6 Titan	0.0289	10^{-4}	37700	0.0289	0.0292	0.0319
S-6 Titan	0.0289	10^{-3}	377	0.0289	0.0319	0.0786
S-6 Titan	0.0289	10^{-2}	377	0.0292	0.0786	> 1
S-7 Hypérion	0.1	5×10^{-5}	8×10^7	0.1	0.1	0.1
S-7 Hypérion	0.1	5×10^{-4}	8×10^6	0.1	0.1	0.1
S-8 Japet	0.029	5×10^{-5}	6.1×10^8	0.029	0.029	0.029
S-8 Japet	0.029	5×10^{-4}	6.1×10^7	0.029	0.029	0.029

TAB. 9.11 – Amortissement de l'excentricité des satellites de Saturne. Les 3 dernières colonnes indiquent les valeurs des excentricités des satellites dans le passé, à l'aide de la valeur donnée pour τ .

9.2 Détermination observationnelle des effets de marée

L'objet de cette section est de tenter de faire le lien entre théorie et observation, afin d'explicitier pourquoi les effets de marée sont aussi mal évalués dans les systèmes jovien et saturnien, et donne des pistes pour une prochaine détection fiable.

9.2.1 État de l'art

Des accélérations séculaires des 4 satellites galiléens ainsi que de Mimas ont déjà été publiées, nous allons analyser ces résultats pour estimer leur fiabilité.

Cas des satellites galiléens

Différents auteurs ont tenté de déterminer les accélérations séculaires des satellites galiléens (cf. Table 9.12) en incluant cette accélération à une théorie dynamique et parfois aussi en incluant des observations anciennes. L'utilisation d'observations anciennes nécessite une interprétation de la référence temporelle utilisée à l'époque en tenant compte notamment des variations du spin de la Terre. On constate que la plupart des auteurs trouvent une accélération séculaire positive pour Io, leurs valeurs sont de l'ordre de grandeur de $10^{-10}.an^{-1}$ y compris pour Callisto pour lequel on attend une accélération de l'ordre de $2 \times 10^{-14}.an^{-1}$ (cf. Figure 9.1), ce qui semble peu crédible et permet d'avoir une idée de la limite de détection d'une accélération séculaire.

On peut noter les valeurs différentes obtenues par Lieske (1987 [134]). Ces valeurs ont été obtenues à l'aide d'observations modernes mais aussi de 16000 éclipses de satellites par Jupiter observées depuis 1652. Il a évalué l'écart entre le temps universel et le temps des éphémérides en se basant sur la valeur de $-25''.3$ par siècle carré pour l'accélération séculaire de la Lune, cette valeur est issue des tirs laser.

La Table 9.13 donne les estimations des facteurs de dissipation dans Io et Callisto à partir des valeurs d'accélération trouvées par les différents auteurs, de la formule 9.5 et de la Table 9.1.

Les valeurs de dissipation trouvées pour Io (cf. Table 9.13) semblent compatibles avec la présence de volcans à sa surface (Q_1 "pas trop élevé"), à l'exception des valeurs déduites de Goldstein & Jacobs 1986 [78], et éventuellement de celles de Lieske [134], ceci en supposant $k_2^1 = 0.25$, ce qui correspondrait à un satellite de glace. Si on considère que k_2^1 peut être jusqu'à 5 fois plus élevé pour atteindre la valeur du k_{2s} d'Io (à savoir 1.29), alors il faut multiplier l'estimation de Q_1 par le même facteur. Dans le cas de Callisto, l'estimation de Q_4 par Goldstein [79] est irréaliste, on peut donc penser que l'accélération séculaire est noyée dans le bruit. La figure 9.2 représente des simulations numériques faites par Valéry Lainey où les effets de marée sont introduits, ces simulations confirment l'effet d'entraînement qu'a l'accélération séculaire d'Io sur Europe et Callisto, par contre Callisto semble ne pas être affecté.

Lainey & Tobie (2005 [113]) ont réalisé des simulations numériques en ajoutant les équations de marée au système d'équations utilisé pour construire les éphémérides de Lainey (2004 [111]), avec différentes valeurs de dissipation dans Io, et ont analysé les résidus obtenus (cf. Tab.9.14). Il s'avère que pour $\frac{k_2^1}{Q_1}$ inférieur à 0.05 les résidus d'Io diminuent, ce qui semble donner une contrainte sur la dissipation dans Io. Il est à noter que les résidus

source	J1	J2	J3	J4
de Sitter 1928 [44]	25	27	-16	
Brouwer & Clemence 1961 [26]	32	27	16	
Goldstein & Jacobs 1986 [78]	-46±9.2			
Greenberg 1986 [84]	32±8	-16±4.5	-16±4.5	
Lieske 1987 [134]	-0.74±0.87	-0.82±0.97	-0.98±1.53	
Goldstein 1995 [79]	70±6	50±1	28±8	-49±9
Goldstein 1995 [80]	45.4±9.5			
Vasundhara et al. 1996 [198] /G5	24.6±7.3	-12.7±8.4	-0.22±10.7	
Vasundhara et al. 1996 [198] /I32	22.7±7.9	-6.1±9.3	10.6±10.6	
Aksnes & Franklin 2001 [3]	36±10			

TAB. 9.12 – Accélérations séculaires observées des satellites galiléens en $\frac{\dot{a}}{a} \times 10^{-11} .an^{-1}$. Dans le cas d’Io, une accélération séculaire relative de $35 \times 10^{-11} .an^{-1}$ revient à une diminution du demi-grand axe de l’ordre de 10 cm par an. Les 2 valeurs de Vasundhara et al. sont issues de l’ajout d’effets de marées à 2 modèles différents, tous deux issus de la théorie de Sampson-Lieske. Le premier est la théorie G5 d’Arlot (1982 [8]), l’autre est I32, qui résulte d’un ajustement de Sampson-Lieske à l’aide non seulement des observations incluses dans G5, mais aussi d’observations photographiques faites par Pascu entre 1986 et 1990. Enfin, la valeur d’Aksnes & Franklin a été déterminée uniquement à l’aide de phénomènes mutuels, 511 observations photométriques datant de 1973, 1979, 1985, 1991 et 1997, et 9 observations astrométriques faites par Innes (1909 [93] et 1915 [94]) à l’occasion d’occultations de 1908 et 1914. Ils ont d’abord ajusté certaines constantes de la théorie de Sampson-Lieske avec ces observations, puis ont ajusté les autres constantes ainsi qu’une accélération séculaire d’Io.

source	Q_1	Q_4
de Sitter 1928 [44]	10.80 (17.49)	
Brouwer & Clemence 1961 [26]	9.49 (14.31)	
Goldstein & Jacobs 1986 [78]	-13.95 (-27.6)	
Greenberg 1986 [84]	9.49 (14.31)	
Lieske 1987 [134]	21.78 (95.49)	
Goldstein 1995 [79]	5.74 (7.20)	-0.007 (-0.007)
Goldstein 1995 [80]	7.71 (10.61)	
Vasundhara 1996 [198]/G5	10.88 (17.71)	
Vasundhara 1996 [198]/I32	11.30 (18.86)	
Aksnes & Franklin 2001 [3]	8.88 (12.96)	

TAB. 9.13 – Estimations des Q_i des satellites galiléens à partir des accélérations séculaires observées avec $k_2^i = 0.25$, en gras pour $Q_p = 50000$ et entre parenthèses pour $Q_p = 200000$.

$\frac{k_2^1}{Q_1}$	$\frac{\eta_+}{Q\eta_+}$	rms en α (mas)	rms en δ (mas)
0	0	-1.59	4.07
0.075	0	2.70	-0.31
0.05	0	1.80	-0.21
0.015	0	0.54	-0.06
0.015	3×10^{-6}	0.44	-0.04

TAB. 9.14 – Influence de la dissipation dans Io et Jupiter sur les résidus d’Io, Table issue de Lainey et Tobie (2005 [113]). Ici α désigne l’ascension droite, et δ la déclinaison.

source	$\frac{\dot{n}_1}{n_1} (\times 10^{-9} . an^{-1})$
Kozai 1957 [108]	1.99 ± 0.85
Dourneau 1987 [54]	1.47 ± 0.4
Vienne 1995	rien

TAB. 9.15 – Accélération séculaires observées de Mimas

des autres satellites diminuent également, notamment ceux de Callisto, qui ne devraient en principe pas être affectés par l’accélération séculaire d’Io. Ils en concluent que la contribution des marées dans les résidus est inférieure à 20%.

L’approche de Lainey et Tobie semble prometteuse, ils promettent en conclusion de publier les prochaines éphémérides des satellites galiléens en ajustant la dissipation dans Io. Nous saurons dans les années à venir si la contrainte obtenue sur $\frac{k_2^1}{Q_1}$ est fiable en examinant les valeurs données par les prochains ajustements d’éphémérides, notamment en regardant si elles sont compatibles entre elles ou contradictoires.

Cas des satellites de Saturne

Kozai (1957 [108]) et Dourneau (1987 [54]) ont tenté de déterminer une accélération séculaire de Mimas (cf. Tab. 9.15). Leurs résultats respectifs sont proches et d’un ordre de grandeur difficilement compatible avec les paramètres géophysiques (cf. Tab. 9.10). En fait cette détermination supposait une orbite circulaire pour Téthys et ainsi négligeait des termes à longue période faisant intervenir le péricentre ϖ_3 . Or Vienne et al. (1992 [202]) ont montré que ces termes pouvaient être confondus avec une accélération séculaire (cf. Fig.9.8). Une accélération séculaire observée ne pourra ainsi être bien déterminée tant que l’excentricité de Téthys ne sera pas mieux connue.

9.2.2 La précision des observations

Nous disposons de catalogues d’observations astrométriques de satellites de Jupiter et de Saturne depuis la fin du dix-neuvième siècle. Les premières observations étaient à la vis micrométrique, puis étaient issues de plaques photographiques, ensuite d’images CCD. Depuis les années 1970 les observations de phénomènes mutuels (cf. chap.10) permettent une meilleure précision astrométrique car il s’agit d’observations photométriques dont on extrait une grandeur géométrique. Or, la mesure d’une grandeur photométrique est plus aisée que

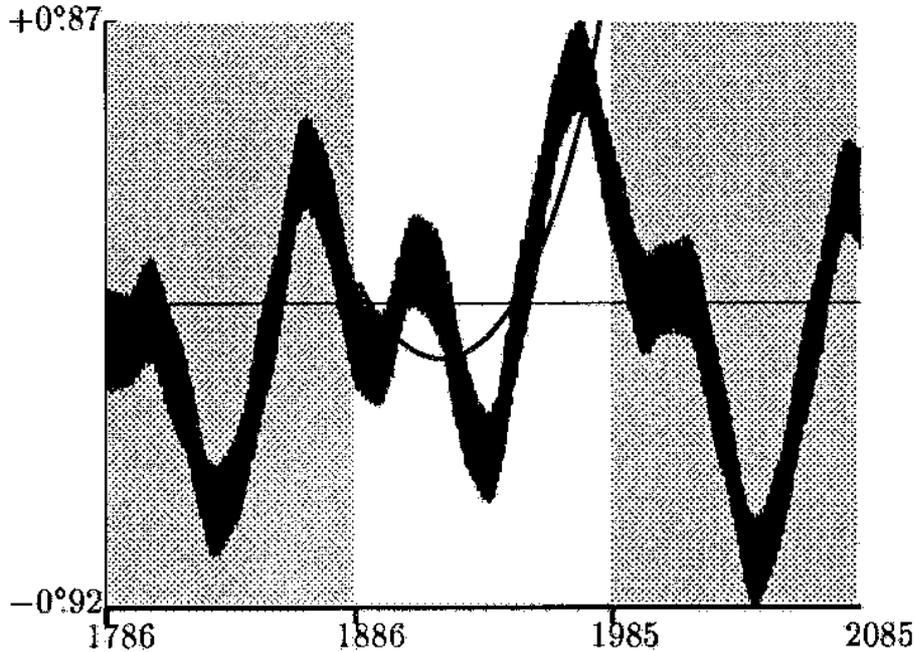


FIG. 9.8 – Risque de confusion entre les termes à longue période, d’amplitude mal connue (car liée à l’excentricité de Téthys) et une accélération séculaire de Mimas. Ici une parabole est ajustée sur ces termes, et donne une accélération comparable à celle de Kozai [108] et Dourneau [54] (issu de Vienne et al. 1992 [202]).

celle d’une grandeur géométrique. Enfin, les observations spatiales depuis le Hubble Space Telescope permettent de très bonnes observations astrométriques du fait de l’absence de turbulence atmosphérique.

La Table 9.16 donne une approximation de la précision des observations astrométriques des satellites galiléens et des principaux satellites de Saturne. Les observations du HST ne sont pas ici signalées, mais elles ont une précision de l’ordre de celle des meilleurs phénomènes mutuels (environ 30 mas). On constate que ces derniers représentent une avancée dans la précision des observations, et sont donc très utiles pour ajuster les modèles.

9.2.3 La détermination des accélérations séculaires

Cette partie a pour but d’estimer la capacité des observations actuelles à nous renseigner sur les accélérations séculaires des principaux satellites de Jupiter et de Saturne. Soit p la précision moyenne des observations astrométriques d’un satellite donné, et soit $\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_M$ sa variation relative séculaire de moyen mouvement moyen. Le temps t nécessaire pour observer une accélération séculaire avec une précision acceptable est atteint lorsque sa déviation en longitude moyenne $\Delta\lambda$ est de l’ordre de grandeur de la précision des observations p .

Un simple calcul d’intégrale permet d’exprimer $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{t^2}{2} a \left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_M n \quad (9.21)$$

quant à la période d’observations nécessaire pour détecter l’accélération de marée, on la

satellite	observations classiques		phénomènes mutuels	
J-1 Io	100 mas	380 km	30 mas	115 km
J-2 Europe	100 mas	380 km	30 mas	115 km
J-3 Ganymède	100 mas	380 km	30 mas	115 km
J-4 Callisto	100 mas	380 km	30 mas	115 km
S-1 Mimas	130 mas	910 km	37 mas	259 km
S-2 Encelade	100 mas	700 km	29 mas	203 km
S-3 Téthys	70 mas	490 km	23 mas	161 km
S-4 Dioné	70 mas	490 km	23 mas	161 km
S-5 Rhéa	70 mas	490 km	28 mas	196 km
S-6 Titan	70 mas	490 km	48 mas	336 km
S-7 Hypérion	120 mas	840 km		
S-8 Japet	120 mas	840 km		

TAB. 9.16 – Précision moyenne des observations

satellite	$\left(\frac{n}{n}\right)_M$ estimé	déviations séculaire (km/siècle ²)	t estimé (ans)
Io	-2×10^{-10}	5.5×10^2	65
Europe	-10^{-10}	2.2×10^2	103
Ganymède	-5×10^{-11}	86	163
Callisto	-2×10^{-14}	2.6×10^{-2}	9.4×10^3

TAB. 9.17 – Evaluation des possibilités de détecter les accélérations de marées dans le cas des satellites galiléens.

déduit de l'équation précédente :

$$t = 2 \sqrt{\frac{p}{a \left(\frac{n}{n}\right)_M n}} \quad (9.22)$$

Les Tables 9.17 et 9.18 donnent une estimation du temps nécessaire pour que la déviation de marée en longitude moyenne atteigne la précision moyenne d'une observation de phénomène mutuel. On peut considérer ce résultat comme une majoration de l'intervalle de temps d'observations nécessaire à détecter les marées. Il faudrait tenir compte aussi du nombre d'observations, qui tend à améliorer la précision globale.

satellite	$\left(\frac{n}{n}\right)_M$ estimé	déviations séculaire (km/siècle ²)	t estimé (ans)
Mimas	-2×10^{-11}	45	338
Encelade	-10^{-11}	20	451
Téthys	-2×10^{-11}	36	300
Dioné	-10^{-11}	16	451
Rhéa	-10^{-13}	13×10^{-2}	5.4×10^3
Titan	5×10^{-13}	44×10^{-2}	3.9×10^3

TAB. 9.18 – Evaluation des possibilités de détecter les accélérations de marées dans le cas des principaux satellites de Saturne.

Ces 2 tables confirment que, dans le cas des satellites galiléens, c'est l'accélération séculaire d'Io qui est la plus facile à détecter. Le résultat est particulièrement intéressant dans le cas des satellites de Saturne car l'accélération de marée la plus facilement détectable ne semble pas être celle de Mimas mais celle de Téthys.

Ainsi, il serait intéressant de chercher à déterminer une accélération séculaire de Téthys. La résonance Mimas-Téthys donne une contrainte supplémentaire : les accélérations séculaires de ces 2 satellites sont égales. Par conséquent, une tentative de détermination simultanée de ces 2 accélérations séculaires pourrait permettre de valider les résultats si 2 accélérations séculaires proches sont détectées. Inversement, on pourrait essayer de détecter ces accélérations séculaires en les imposant d'être égales et en examinant les barres d'erreur.

Conclusion

Les effets de marées sur les satellites de Jupiter et de Saturne sont difficiles à observer car leur signature observationnelle est petite, à peine de l'ordre de la précision des observations. Néanmoins, l'accumulation des observations, et notamment des observations précises comme les phénomènes mutuels ou celles issues des observatoires spatiaux, peut laisser présager une prochaine détection pour Io et Téthys.

L'approche de Lainey et Tobie pour évaluer la dissipation dans Io en analysant les résidus semble donner de bons résultats sous la forme d'une borne supérieure sur la dissipation dans Io, il serait intéressant de faire le même travail sur les satellites de Saturne.

Chapitre 10

Les phénomènes mutuels

Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent l'intérêt astrométrique des observations de phénomènes mutuels. Je présente ici une méthode de réduction de phénomènes que j'ai mise au point et utilisée pour réduire des observations de satellites galiléens et saturniens. J'ai d'ailleurs participé à la réalisation de certaines de ces observations dans le cadre de la campagne PHEMU03.

10.1 Le contexte

10.1.1 Le principe

On appelle occultation le passage d'un objet entre un autre objet et un observateur, concrètement les deux objets concernés sont dans le champ de vision de l'observateur, mais l'un des deux est masqué, entièrement ou en partie, par l'autre. Une "éclipse de Soleil" est donc une occultation. Dans le cas de phénomènes mutuels, un satellite cache un autre.

On appelle éclipse le passage d'un satellite dans un cône d'ombre ou de pénombre. Dans le cas présent, il s'agit de l'ombre ou la pénombre d'un autre satellite, il y a donc plus ou moins alignement entre deux satellites et le Soleil (cf. 10.3). On peut également étudier des passages de satellites dans l'ombre de la planète, mais ce n'est pas le propos ici.

L'observation d'un phénomène mutuel consiste à enregistrer l'évolution du flux lumineux issu des 2 satellites concernés pendant le phénomène, il s'agit donc d'une observation photométrique.

10.1.2 Historique des phénomènes mutuels

Les phénomènes mutuels ne peuvent pas être observés n'importe quand. En effet, les orbites des principaux satellites des planètes sont à peu près coplanaires, ce qui permet d'observer des occultations et éclipses lorsque le Soleil et la Terre ont une élévation faible dans le plan équatorial de la planète. Ce plan est traversé 2 fois par révolution de la planète, c'est-à-dire en moyenne tous les 6 ans pour Jupiter, tous les 15 ans pour Saturne, tous les 42 ans pour Uranus et tous les 82 ans pour Neptune.

Les premières observations photométriques de phénomènes mutuels datent de 1973, elles ont été notamment faites par Nakamura (1974 [148]) d'après les prédictions de Brinkmann et Millis (1973 [25]) et concernaient les satellites galiléens de Jupiter. Cependant, des observations astrométriques d'occultations avaient été réalisées dès 1908 par Innes (1909 [93]), toujours pour des satellites galiléens.

Les premières observations de phénomènes mutuels de satellites de Saturne datent de 1979 d'après les prédictions d'Aksnes (1978 [1]) issues des éphémérides de Sinclair. Des observations ont été réalisées notamment par Soma & Nakamura (1982 [186]) au Japon et Dourneau (1982 [53]) à Bordeaux. Le plan des satellites (et des anneaux) n'est traversé par la Terre que tous les 15 ans environ.

Depuis 1979, des campagnes d'observation des phénomènes mutuels des satellites galiléens et des principaux satellites de Saturne sont systématiquement organisées par l'IMCCE lors de la traversée de l'écliptique par le plan des orbites, avec un succès grandissant. En effet, la campagne de 1979 a permis d'obtenir 22 courbes (cf. Arlot et al. [9]), celle de 1985 166 courbes provenant de 28 sites d'observation (Arlot et al. 1992 [10]), celle de 1991 374 courbes issues de 56 sites (cf. Arlot 1997 [12]), celle de 1997 275 courbes issues de 42 sites (cf. Arlot et al. 2005 [14]) et celle de 2003 337 courbes issues de 34 sites (C. Ruatti, communication privée).

La campagne d'observations de phénomènes de satellites de Saturne PHESAT95 a permis de collecter 66 observations issues de 17 sites (cf. Thuillot et al. 2001 [192]), concernant les satellites S-1 Mimas à S-6 Titan.

10.2 La méthode de réduction

L'objet de cette section est de décrire la méthode de réduction astrométrique des phénomènes mutuels que j'ai utilisée, afin de les rendre utilisables pour l'amélioration des éphémérides. Pour cela, un phénomène doit être exprimé sous forme d'une date et de coordonnées différentielles ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$) entre les 2 satellites.

La méthode de réduction consiste à modéliser un phénomène théorique à l'aide d'éphémérides, puis à ajuster ce phénomène théorique sur l'observation.

10.2.1 Principe de la modélisation

La figure 10.1 fait apparaître deux quantités observables directement rattachables à des quantités astrométriques : l'instant du minimum de lumière et la chute en flux. L'instant du minimum de lumière peut être rattaché à l'instant du minimum de distance entre les satellites¹, tandis que la chute en flux peut être rattachée au paramètre d'impact.

Pour comprendre ce que représentent ces quantités, il convient de considérer un repère orthonormé $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ direct centré sur le satellite occulté ou éclipsé (cf. figure 10.1). \vec{z} est un vecteur colinéaire au vecteur qui relie le lieu d'observation au satellite occulté (ou le centre du Soleil au satellite éclipsé), \vec{x} est colinéaire à la projection du vecteur vitesse de l'occulteur par rapport à l'occulté (vitesse considérée comme constante pendant le phénomène qui dure

¹ils diffèrent en fait généralement de quelques secondes, cet écart venant tout d'abord d'une anisotropie dans la diffusion de la lumière par la surface du satellite, et ensuite d'un écart entre le photocentre du satellite et son centre géométrique

quelques minutes), et \vec{y} complète le trièdre. L'instant du minimum de distance² correspond au moment où l'abscisse du centre du satellite occulteur (ou éclipseur) est nulle, et le paramètre d'impact à l'ordonnée de l'occulteur ou éclipseur à cet instant (cf. par exemple Devyatkin 2001 [50]).

Le premier satellite est considéré comme se déplaçant avec un mouvement rectiligne uniforme (donc à vitesse constante) dans ce repère. On peut rattacher le paramètre d'impact à la chute en flux en se rappelant que la surface du deuxième satellite masquée de l'observateur terrestre par le premier ne renvoie pas vers la Terre la lumière reçue du Soleil. On peut en première approximation considérer la chute en flux comme proportionnelle à la surface occultée, du moins dans le cadre de la prédiction des phénomènes. Cette surface occultée dépend bien évidemment du paramètre d'impact. Enfin, la vitesse de déplacement du premier satellite peut être rattachée à la durée du phénomène. Dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les occultations et les éclipses se modélisent de façon identique en considérant qu'une éclipse est une occultation vue du Soleil. On travaille donc, avec les éclipses, dans un repère héliocentrique, alors que dans le cas des occultations on travaille dans un repère topocentrique³.

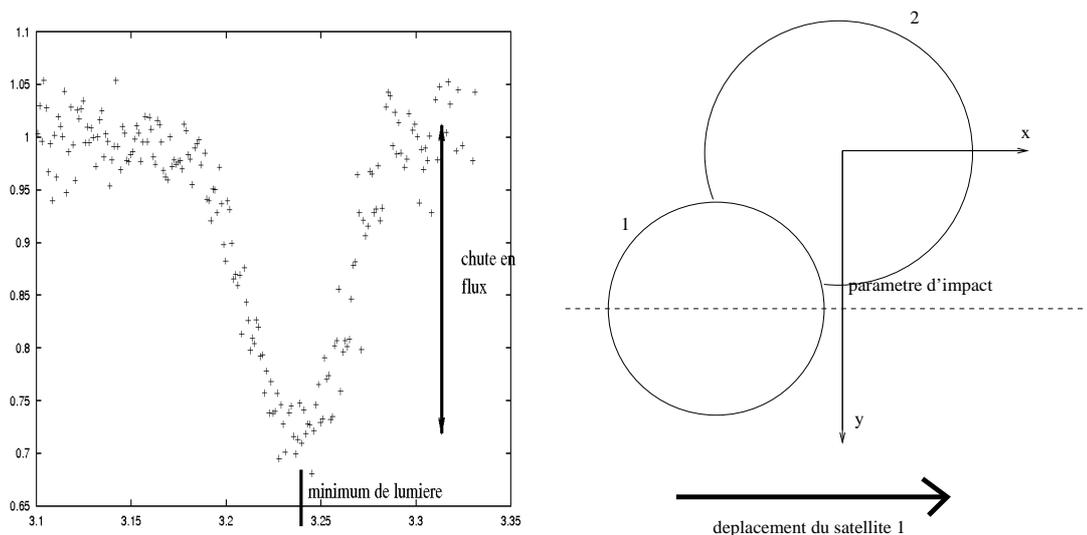


FIG. 10.1 – À gauche : courbe de lumière observée au Pic-du-Midi de l'occultation de S-3 Téthys par S-4 Dioné le 21 septembre 1995 avec indication des paramètres observables, à droite : représentation des paramètres astrométriques

10.2.2 Le calcul du temps de lumière

Dans le cas d'une occultation, l'observation donne la position des satellites au moment où leur surface a réfléchi la lumière enregistrée par l'observateur et non pas au moment où l'observateur a enregistré la lumière. Il faut donc réaliser une correction de temps-lumière liée à la distance entre les 2 corps observés et l'observateur.

²appelé aussi midtime

³la correction topocentrique par rapport à un repère géocentrique a un effet si faible (de l'ordre du millionième de seconde d'arc) dans le cas des coordonnées différentielles de satellites que ceci est équivalent à un travail dans un repère géocentrique

Dans le cas d'une éclipse, cette correction est un peu plus complexe. En effet, le satellite éclipsé est éclipsé par le cône d'ombre correspondant non pas au moment où ce satellite a réfléchi la lumière incidente, mais au moment où le premier satellite a réfléchi cette lumière. Ainsi, le temps-lumière associé au satellite éclipsé est supérieur à celui associé au satellite éclipsé, alors que c'est ce dernier qui est situé le plus loin de l'observateur.

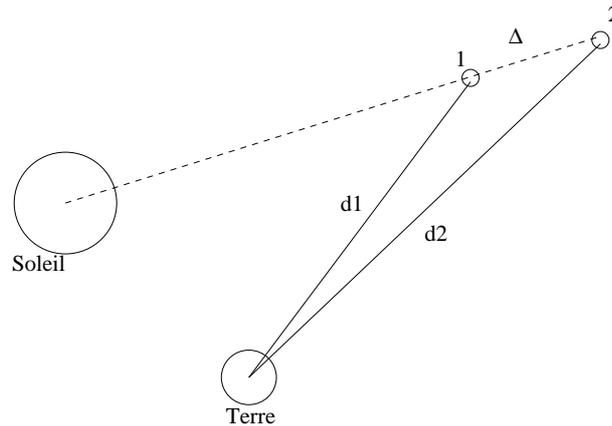


FIG. 10.2 – Correction du temps-lumière pour une éclipse. La correction de temps-lumière à effectuer pour le satellite éclipsé (2) est t_{d2} alors que celle à effectuer pour le satellite éclipsé (1) est $t_{d1} + t_{\Delta}$ et non pas t_{d1} , car il faut considérer le trajet d'un photon qui part du Soleil, arrive au niveau du satellite 1, puis est réfléchi par le satellite 2 avant d'être renvoyé vers la Terre.

10.2.3 Modélisation de la lumière incidente

Dans le cas d'une occultation, la lumière incidente sur la surface du satellite avant diffusion par la surface vient de l'intégralité du disque solaire visible depuis le satellite. La modélisation de cette lumière incidente ne pose aucune difficulté puisqu'elle est la même pour tout élément de surface visible par l'observateur. Comme le flux observé est normalisé, il suffit de donner au flux solaire incident une valeur constante arbitraire.

Par contre, dans le cas d'une éclipse, une partie du satellite éclipsé se trouve dans une zone de pénombre (cf. Fig.10.3). C'est une zone où la lumière incidente est issue d'un disque solaire en partie masqué par le satellite éclipsé⁴. Or, le disque solaire n'émet pas une lumière uniforme, il présente un assombrissement au niveau des limbes.

J'ai modélisé cet assombrissement de limbe à l'aide de la formule empirique de Hestroffer & Magnan (1998 [91]) :

$$I(\mu) = \mu^{\alpha} \tag{10.1}$$

⁴un observateur placé dans la pénombre verrait une occultation partielle du Soleil

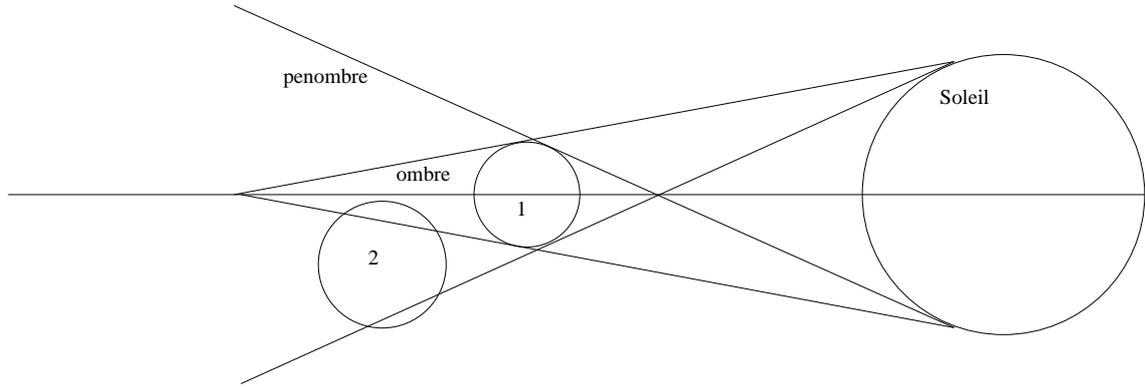


FIG. 10.3 – Représentation d'une éclipse

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha \sim -0.023 + 0.292\lambda^{-1} \text{ si } \lambda \lesssim 2.4\mu\text{m}^{-1} \\ \alpha \sim -0.507 + 0.441\lambda^{-1} \text{ si } \lambda \gtrsim 2.8\mu\text{m}^{-1} \\ \lambda \text{ longueur d'onde}(\mu\text{m}) \\ \mu = \sqrt{1 - r^2} \\ r \text{ distance au centre du Soleil, } R_{\odot} = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$i_{\odot} = 1 - \frac{1}{2R_{\odot}^2} \left[\left(1 - \frac{r}{R_{\odot}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} (r - R_{\odot})(2(r + R_{\odot}) + \alpha r) \right]_{r'_0}^{r'_1} \quad (10.2)$$

$$+ \frac{\alpha^2 + 6\alpha + 8}{8\pi R_{\odot}^2} \int_{r'_1}^{r'_2} r \left(1 - \frac{r}{R_{\odot}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(R_1, r, R) dr \quad (10.3)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} R_1 \text{ rayon du premier satellite (éclipseur)} \\ r'_0 = \min[R'_{\odot}, \max(0, R - R_1)] \\ r'_1 = \min[R'_{\odot}, \max(r'_0, R_1 - R)] \\ r'_2 = \min(R'_{\odot}, R + R_1) \\ R \text{ distance entre le second satellite et} \\ \text{le centre de la zone de pénombre} \end{cases}$$

R'_{\odot} est le rayon du Soleil vu du satellite éclipsé comme s'il était à la même distance que le satellite éclipsé, et Ψ est défini par :

$$\Psi(R_1, r, R) = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right) \quad (10.4)$$

avec

$$a = \frac{r^2 + R^2 - R_1^2}{2R} \quad (10.5)$$

10.2.4 Modélisation de la lumière diffusée

En pratique, la luminosité du satellite n'est pas uniforme, premièrement à cause de l'angle de phase dont la première conséquence est qu'un observateur non situé sur le Soleil ne voit pas un disque mais un disque amputé d'un croissant ⁵, deuxièmement à cause des effets de surface, en d'autres termes de la diffusion des rayons lumineux par les grains de poussière qui constituent le régolithe. Ainsi, le photocentre du satellite observé ne correspond pas au centre géométrique du disque projeté du satellite sur la sphère céleste.

Pour pallier ce problème, on représente le satellite comme une sphère découpée en éléments de surface dont la taille permet un compromis "acceptable" entre précision et temps de calcul, on considère uniforme l'intensité lumineuse diffusée par un élément de surface, et on intègre cette luminosité sur toute la surface visible du satellite (cf. Fig.10.4).

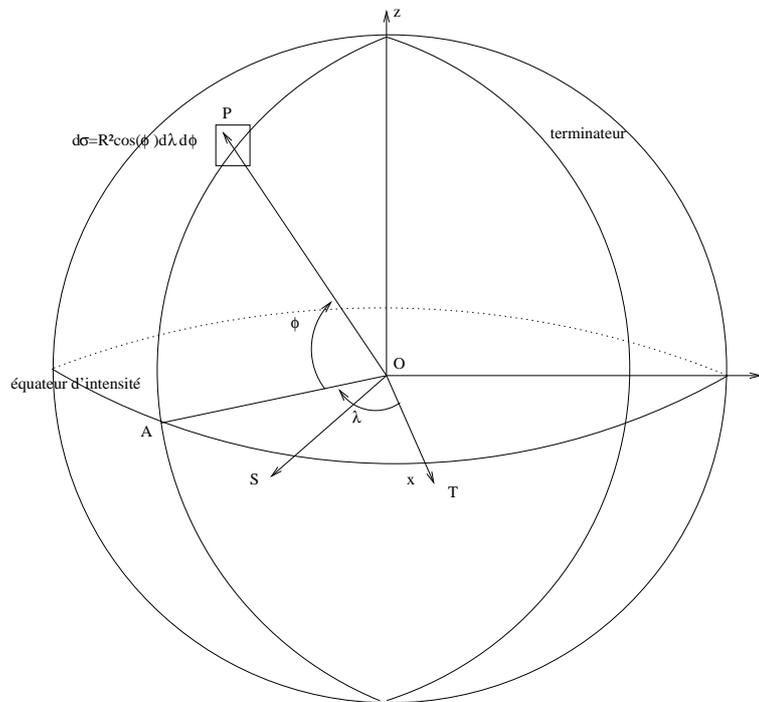


FIG. 10.4 – Repérage de la surface d'un satellite, afin de préparer la quadrature numérique). \vec{OS} pointe vers le centre du Soleil alors que \vec{OT} pointe vers l'observateur.

Sur chaque facette visible depuis le point d'observation, on définit :

$$I(i, e, \alpha) = \frac{F}{4 \cos(e)} S(i, e, \alpha, p_j) \quad (10.6)$$

⁵dans le cas des satellites de Saturne, l'angle de phase maximum possible est de l'ordre de 6° , c'est environ le double pour les satellites de Jupiter

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \pi F \quad \text{flux solaire incident} \\ i \quad \text{angle d'incidence } \widehat{\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OP}} \\ \alpha \quad \text{angle de phase } \widehat{\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT}} \\ e \quad \text{angle d'émergence } \widehat{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP}} \\ p_j \quad \text{paramètres physiques dépendant du satellite} \\ S \quad \text{fonction de diffusion du milieu} \\ I \quad \text{intensité de la lumière diffusée par la facette} \end{array} \right.$$

$\cos(e)$ n'est pas intégré à S pour pouvoir garantir $S(i, e, \alpha, p_j) = S(e, i, \alpha, p_j)$ (la fonction de diffusion demeure inchangée lorsque les directions d'incidence et d'émergence sont inversées).

Pour une radiation monochromatique, l'énergie émise par la sphère de surface Σ dans un cône d'angle solide $d\omega$ est obtenue par la formule

$$E_\omega = \int_{\Sigma} I \cos(e) d\sigma d\omega \quad (10.7)$$

où $\cos(e)d\sigma$ est l'élément de surface projeté dans la direction d'observation. Soit da un élément de surface du détecteur (photomètre) et Δ la distance entre le détecteur et le satellite observé, on a $d\omega = \frac{da}{\Delta^2}$, donc l'énergie reçue par un élément de surface du photomètre est

$$E = \frac{1}{\Delta^2} \int_{\Sigma} I \cos(e) d\sigma \quad (10.8)$$

Plusieurs lois de diffusion sont utilisées en physique (pas uniquement en photométrie planétaire), elles consistent à donner une certaine expression de la loi de diffusion S (ou du rapport $\frac{I}{F}$, ce qui revient au même). Avant d'introduire ces lois il est préférable de définir 2 grandeurs que plusieurs lois utilisent :

– l'albedo géométrique

L'albedo géométrique p est le rapport de la luminance moyenne du corps à la phase pleine ($\alpha=0$) à celle d'un diffuseur parfait de même diamètre éclairé à l'incidence normale et à la même distance du Soleil et de l'observateur. En d'autres termes :

$$p = \frac{\int_{\Sigma} I(i, i, 0) \cos(e) d\sigma}{\pi R^2 F} \quad (10.9)$$

– la fonction de phase

La fonction de phase intégrale $\Phi(\alpha)$ est le rapport de la brillance du corps à une certaine phase α à la brillance du même corps à phase pleine. Ceci donne mathématiquement, avec les notations de la figure 10.4 :

$$\Phi(\alpha) = \frac{\int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} I(i, e, \alpha) \cos(\lambda) \cos^2(\phi) d\lambda d\phi}{\int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I(i, e, 0) \cos(\lambda) \cos^2(\phi) d\lambda d\phi} \quad (10.10)$$

Concrètement, la fonction de phase donne la répartition du flux émergent en fonction de l'angle de diffusion.

Ces deux quantités sont utilisées dans l'expression de la loi de diffusion utilisée pour modéliser la lumière émergente de la surface du satellite. Voici quelques-unes de ces lois :

- la loi de Lambert

La loi de Lambert est la loi la plus simple qui existe, elle consiste à considérer la loi de diffusion constante, rendant ainsi l'intensité I dépendante uniquement de l'angle d'incidence (et pas de la direction d'observation). Elle s'exprime ainsi :

$$\frac{I}{F}(i, e, \alpha) = \cos(i) \quad (10.11)$$

Cette loi donne de bons résultats dans le cas de corps très brillants ou à atmosphère (comme Titan), dans les autres cas elle peut servir de référence afin de tester la validité d'autres lois.

- la loi de Lommel-Seeliger

En réalité la lumière traverse toujours un peu la surface du satellite (en y étant atténuée exponentiellement), chaque élément de volume recevant de la lumière devient une source secondaire qui diffuse elle aussi de la lumière également exponentiellement atténuée en traversant les couches du satellite qui séparent la source secondaire de la surface. Dans le cas d'une diffusion isotrope, on obtient la loi de Lommel-Seeliger :

$$\frac{I}{F}(i, e, \alpha) = \frac{\cos(i)}{\cos(i) + \cos(e)} \quad (10.12)$$

Cette loi a fait l'objet d'une généralisation par Veverka, généralisation également connue sous le nom de loi de Hapke-Irvine :

$$\frac{I}{F}(i, e, \alpha) = \frac{\cos(i)}{\cos(i) + \cos(e)} f(\alpha) \quad (10.13)$$

La fonction f est le produit de la fonction de phase par la fonction d'ombrage de la surface, fonction qui tient compte de l'effet d'opposition ou excès de lumière au voisinage immédiat de la phase pleine.

La loi de Hapke-Irvine a été généralisée par Buratti & Veverka (1983 [27]) qui ont introduit un paramètre A représentant le rapport entre les différents effets présentés ci-dessus, cela donne finalement :

$$\frac{I}{F}(i, e, \alpha) = A \frac{\cos(i)}{\cos(i) + \cos(e)} f(\alpha) + (1 - A) \cos(i) \quad (10.14)$$

- la loi de Minnaert (Minnaert 1961 [141])

Il s'agit d'une loi totalement empirique à 2 paramètres B_0 et k :

$$\frac{I}{F}(i, e, \alpha) = B_0(\alpha) (\cos(i))^{k(\alpha)} (\cos(e))^{k(\alpha)-1} \quad (10.15)$$

Les paramètres B_0 et k dépendent de α mais, dans le cas d'un phénomène mutuel (qui dure moins d'une heure), la phase varie si peu que B_0 et k peuvent être considérés comme constants tout le long de l'observation. k est le paramètre d'assombrissement de limbe.

D'autres lois de diffusion existent, comme les lois de Hapke. Plus de détails sur les lois de diffusion se trouvent dans la thèse de P.Descamps (1992 [47]).

10.2.5 Ajustement du modèle aux observations

Cette modélisation théorique du phénomène mutuel dépend de différents paramètres : dimensions des satellites, paramètre d'impact, vitesse relative des satellites projetée sur la sphère céleste, instant du minimum de distance, paramètres photométriques. . .

Les dimensions des satellites sont considérées comme suffisamment bien connues grâce aux sondes spatiales. Le paramètre d'impact, l'instant du minimum de distance, la vitesse relative des satellites, l'albedo géométrique et le coefficient d'assombrissement de limbe sont totalement décorrélés sur une observation théorique, c'est-à-dire non bruitée. Le bruit a notamment pour effet de corrélérer ces paramètres entre eux, ce qui pose la question de l'opportunité d'ajuster ou non certains paramètres, selon la précision avec laquelle ils sont connus a priori.

Le paramètre d'impact et l'instant du minimum de distance doivent être ajustés. En effet, de l'instant du minimum de distance viendra la date de l'observation, et du paramètre d'impact viendra la position d'un satellite par rapport à l'autre. La vitesse relative des satellites est connue avec une très bonne précision car les éphémérides ont une excellente précision sur les moyens mouvements (de l'ordre de 0.1%). Ainsi, sur une observation significativement bruitée, il ne faut pas ajuster la vitesse relative, l'algorithme risquant de donner une valeur de vitesse nettement en dehors de l'intervalle de confiance donné par les éphémérides, et ainsi de fausser les valeurs des autres paramètres (corrélés à la vitesse car l'observation est bruitée). Dans le cas d'une observation très peu bruitée, l'ajustement de la vitesse relative, qui variera très peu, peut permettre d'avoir une meilleure estimation des paramètres photométriques, eux-mêmes ajustés.

10.2.6 Présentation des résultats

Les résultats se présentent sous la forme d'une date, et de 2 coordonnées différentielles ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$), ainsi que du type de repère (héliocentrique pour une éclipse, topocentrique pour une occultation) et du lieu d'observation.

La date est l'instant du minimum de distance UTC. Les 2 coordonnées différentielles sur la sphère céleste viennent du paramètre d'impact, l'angle de position p (direction de la trajectoire relative des 2 satellites, cf. Fig.10.5) étant connu à π près par les éphémérides. Lorsque le paramètre d'impact est suffisamment important, les résidus permettent de déterminer quelle valeur de p est la bonne. Mais lorsque le paramètre d'impact est faible, le doute subsiste, notamment pour les satellites de Saturne dont les éphémérides sont moins précises que pour les satellites galiléens⁶.

10.3 Les observations

Cette section décrit les campagnes d'observations auxquelles j'ai participé, en tant qu'observateur et/ou en tant que réducteur d'observations, et en présente les résultats.

⁶Dans leur réduction de phénomènes mutuels de la campagne PHESAT80, Aksnes et al. (1984 [2]) avaient donné 2 positions pour certains phénomènes où ils trouvaient un faible paramètre d'impact. Lorsque le catalogue de Strugnell et Taylor est sorti (1990 [190]), une seule position subsistait pour ces observations, celle qui a les plus faibles résidus avec les éphémérides de Harper & Taylor.

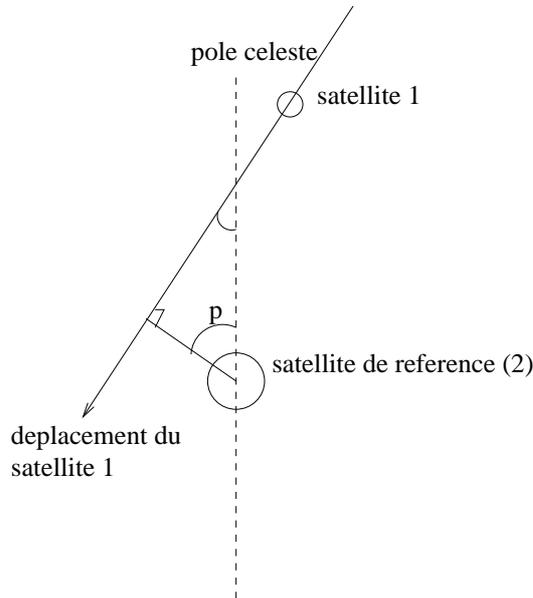


FIG. 10.5 – Cette figure représente l’angle de position p entre les 2 satellites au moment du minimum de distance, cet angle est connu car il complète un triangle rectangle dont l’un des angles non droits est connu (angle que fait le vecteur vitesse avec l’origine des angles).

10.3.1 La campagne PHESAT95

Dans la période 1995-1996, le Soleil une fois et la Terre par 2 fois ont eu une élévation nulle dans le plan des anneaux de Saturne, ce qui rendait la période propice à l’observation de phénomènes mutuels. Les calculs d’Arlot (1993 [11]) à l’aide de la théorie de Dourneau (1993 [55]) ont notamment conduit à la prédiction de 182 phénomènes mutuels jugés observables dans de bonnes conditions entre janvier 1995 et septembre 1996, en tenant notamment compte de la phase de la Lune ou encore des séparations angulaires de Saturne avec le Soleil et la Lune.

Ces prédictions ont débouché sur la campagne PHESAT95 et la publication de 66 courbes de lumière représentant 43 phénomènes différents observés depuis 16 sites (cf. Tab.10.1). Il est à noter que Bordeaux, l’Observatoire de Haute-Provence, l’Observatoire du Pic-du-Midi, Itajubá, les observatoires du Kazakhstan, Stuttgart, Chelmsford et Meudon ont utilisé un récepteur CCD, donc on pu éliminer le bruit de façon beaucoup plus efficace que les autres observatoires⁷ qui avaient pour récepteur un photomètre (cf. figure 10.6).

J’ai procédé à une réduction astrométrique de la totalité de cette campagne, ainsi que d’observations de la campagne PHESAT80 observées par Soma & Nakamura au Japon (1982 [186]), ce sont les seules observations de PHESAT80 que j’ai pu obtenir.

Les valeurs des paramètres photométriques des 5 premiers satellites relatifs à la loi de Buratti-Veverka (Eq. 10.14) sont bien connues (cf. Buratti & Veverka 1984 [28] et Tab.10.2), aussi c’est cette loi que j’ai utilisée pour modéliser la photométrie de ces satellites. Titan ayant une atmosphère, j’ai utilisé pour ce dernier la loi de Lambert (Eq. 10.11) avec des

⁷par exemple, avec la présence d’un satellite de référence dans le champ pour compenser les effets de la variation de la transparence de l’atmosphère

observatoire	code UAI	récepteur
OHP	511	CCD
Catane	156	photomètre
Pic du Midi	586	CCD
ESO, La Silla	262	photomètre
Crimée	95	photomètre
CERGA	non répertorié	CCD
Bucarest	73	photomètre
Bordeaux	999	CCD
Itajubá (Brésil)	874	CCD
Charlottesville	780	CCD
Kazakhstan	non répertorié	CCD
Chelmsford	non répertorié	CCD
Lumezzane(Italie)	130	photomètre
Meudon	5	CCD
Stuttgart	25	CCD

TAB. 10.1 – Observatoires impliqués dans PHESAT95

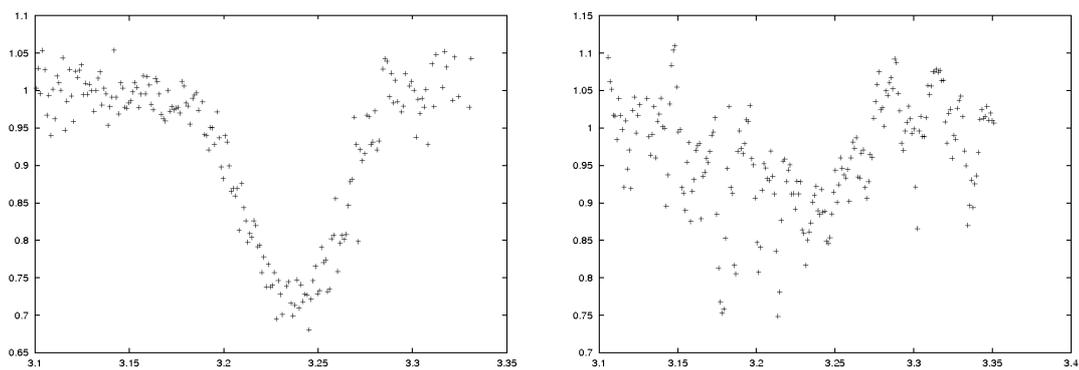


FIG. 10.6 – observations du même phénomène (Dioné occulte Téthys le 21 septembre 1995). À gauche : au Pic-du-Midi avec un récepteur CCD dans de très bonnes conditions climatiques, à droite : à l'ESO avec un photomètre dans des conditions difficiles. L'axe des abscisses représente l'heure décimale UTC et l'axe des ordonnées le flux normalisé.

satellite	A	f(0)	B	C
S-1 Mimas	0.7	1.1	-0.86	0.19
S-2 Encelade	0.4	2.4	-0.51	-0.17
S-3 Téthys	0.7	1.45	-0.95	0.20
S-4 Dioné	1.0	1.0	-1.24	0.50
S-5 Rhéa	0.95	1.1	-1.33	0.54

TAB. 10.2 – Valeurs des paramètres photométriques utilisées pour les 5 premiers satellites, issues de Buratti & Veverka (1984 [28]) d’après les données des sondes Voyager. La fonction f s’écrit sous forme polynomiale : $f(\alpha) = f(0) + B\alpha + C\alpha^2$ et est à utiliser dans la formule 10.14.

valeurs d’albedo issues de Neff et al. (1984 [149]), dépendant de la longueur d’onde.

J’ai ainsi réduit les 70 courbes que j’avais à ma disposition. L’examen visuel des observations et des ajustements réalisés m’a incité à répartir ces observations en 3 groupes : les meilleures (18 observations), les bonnes (32), et les autres, que je ne juge pas suffisamment fiables pour pouvoir être utilisées car trop bruitées. J’ai sur les 18 meilleures observations des résidus moyens de 8 mas en ascension droite et 25 mas en déclinaison, ce qui donne une précision d’environ 30 mas (cf. Tab.10.3 pour ces meilleures observations, les autres se trouvent dans Noyelles et al. 2003 [152]).

Dans ces 18 observations, Téthys apparaît 13 fois, Dioné 11, Rhéa 7, Mimas et Titan 2 fois et Encelade seulement 1 fois. Ceci s’explique par la spécificité des phénomènes mutuels qui rend aisées sur les observations des 3 premiers satellites cités, et difficiles les observations des 3 autres. En effet, l’observation d’une occultation se base sur la variation du flux lumineux total en présence de 2 satellites. Pour que la variation de flux soit significative, il faut que ces 2 satellites aient des magnitudes comparables, ce qui est le cas Téthys, Dioné et Rhéa. Mimas et Encelade ont des magnitudes comparables également, mais leur observation photométrique est gênée par la présence du halo des anneaux de Saturne, même lorsque ceux-ci sont vus par la tranche⁸. Titan est nettement plus lumineux que les autres, une occultation de Titan par un autre satellite donne une chute en flux noyée dans le bruit. La seule observation de Titan dans la Table 10.3 est une éclipse de Mimas par Titan où Titan n’a pas été observé directement, seul le flux lumineux de Mimas était inclus dans les mesures.

10.3.2 La campagne PHEMU03

La campagne PHEMU03 concerne l’observation de phénomènes mutuels de satellites galiléens entre octobre 2002 et septembre 2003 (cf. les prédictions d’Arlot 2002 [13]). Une telle campagne a lieu tous les 6 ans depuis 1979, à chaque fois que la Terre et le Soleil traversent le plan équatorial de Jupiter. J’ai participé à cette campagne en observant des phénomènes mutuels à l’Observatoire de Lille et en les réduisant, ainsi que des phénomènes observés à Bordeaux.

⁸ce qui est le cas pendant les phénomènes mutuels

année	m	jour(utc)	obs	obj	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	f	o-c1	o-c2
1980	3	15.7420244	387	43	0.0020605	-0.0307932	2	0.009	-0.025
1980	4	23.6744225	387	43	-0.0047360	0.0605969	1	0.011	0.028
1995	7	28.3909847	262	43	-0.0076174	-0.1103055	2	-0.001	-0.029
1995	8	6.8991552	95	54	0.0122938	0.1484112	1	-0.002	0.006
1995	8	8.0691440	cer	31	-0.0065325	-0.0699697	2	0.012	0.022
1995	9	3.3296580	780	34	0.0036674	0.0542074	1	-0.009	-0.011
1995	9	3.3297125	262	34	0.0053785	0.0794507	1	0.000	0.014
1995	9	21.1348786	586	43	0.0045728	0.0738128	1	-0.013	-0.005
1995	9	24.0527954	262	35	-0.0037445	-0.0557805	2	0.002	-0.051
1995	9	24.0528009	che	35	0.0000000	-0.0000001	2	0.006	0.004
1995	9	24.0527152	999	35	-0.0019089	-0.0289372	2	-0.005	-0.024
1995	9	24.0526616	cer	35	0.0131188	-0.0915487	2	0.004	-0.086
1995	10	25.8208749	511	61	-0.0189449	-0.2293311	2	-0.037	0.052
1995	10	30.0958742	262	35	0.0060697	0.0873481	2	0.008	-0.004
1995	11	3.8191646	999	43	0.0020725	0.0303100	2	-0.003	-0.019
1995	11	14.7974334	511	42	-0.0024262	-0.0302364	2	-0.011	-0.001
1995	11	18.8507562	5	54	-0.0048126	-0.0574794	2	0.004	-0.006
1996	2	6.7443165	25	45	0.0100153	0.1213623	1	0.013	0.071

TAB. 10.3 – Les meilleures observations de PHESAT95, issues de Noyelles et al. (2003 [152]). "m" désigne le mois, "obj" les satellites impliqués, le deuxième servant de référence à l'observation, et "f" le type de repère utilisé : "1" pour géocentrique (occultation), "2" pour héliocentrique. Les "o-c" désignent les résidus par rapport à la théorie TASS1.6.

Les Observations de Lille

L'Observatoire de Lille possède une lunette de 32.5 cm de diamètre ⁹ et de 6 m de focale, qui appartenait autrefois à Robert Jonckheere, à l'origine de l'astronomie professionnelle dans le Nord de la France. Cet instrument a dans le passé permis la réalisation de catalogues d'étoiles doubles (cf. par exemple Jonckheere 1911 [101]). Les caractéristiques de notre matériel sont énoncées Table 10.4.

diamètre	32.5cm
focale	6m
longitude	0h 12m 17s E
latitude	50° 36' 57" N
altitude	32m
récepteur	caméra CCD Hisis 22 14 bits
champ	52.8"×52.8"

TAB. 10.4 – Caractéristiques du matériel d'observation utilisé à Lille

D'un point de vue informatique, nous avons utilisé le logiciel MiPS (the Microcomputer Image Processing System) et son dérivé WinMiPS pour acquérir les images et les réduire d'un point de vue photométrique.

Nous avons observé 13 phénomènes (3 occultations et 10 éclipses) entre le 3 février et le 19 avril 2003, ils sont présentés Table 10.5. Les flux enregistrés impliquent les 2 satellites cités dans le cas des occultations, et uniquement le deuxième satellite dans le cas des éclipses.

phénomène	date	minimum de lumière	chute en flux	nombre de mesures	temps de pose
J2 occ J3	03/02/2003	23h30min50s	23.3%	120	0.5s
J4 ecl J3	18/02/2003	20h48min22s	39.5%	99	1s
J4 occ J1	19/02/2003	20h31min11s	52%	393	0.1s
J4 ecl J1	19/02/2003	22h15min25s	37%	154	1s
J4 ecl J2	09/03/2003	22h04min25s	25.6%	432	0.8s
J3 ecl J4	15/03/2003	22h14min25s	66.8%	419	0.5s
J2 ecl J3	18/03/2003	20h46min46s	35.1%	198	0.5s
J1 ecl J3	24/03/2003	22h01min31s	13.3%	353	0.5s
J1 ecl J3	25/03/2003	20h08min12s	11.2%	188	0.5s
J2 occ J3	25/03/2003	20h47min43s	35.3%	399	0.5s
J2 ecl J3	26/03/2003	00h09min14s	30.7%	300	1s
J2 ecl J1	26/03/2003	20h40min35s	12%	311	0.5s
J3 ecl J2	19/04/2003	00h17min38s	16%	270	0.5s

TAB. 10.5 – Les phénomènes observés

L'obtention de courbes de lumière à partir des observations des phénomènes mutuels a nécessité une réduction photométrique des images obtenues. La première étape a consisté à évaluer le courant d'obscurité de la caméra en prenant des images obturateur fermé, de même

⁹les lentilles font 35 cm de diamètre mais l'instrument est diaphragmé à 32.5 cm

temps de pose que les images du phénomène. Ensuite, sur chaque image dont le noir était soustrait, nous avons évalué la luminosité du fond de ciel grâce à la fonction BG (background) de MiPS. Enfin, nous avons intégré le flux lumineux du ou des satellites impliqués grâce à une photométrie d'ouverture, en soustrayant le fond de ciel. Il a parfois été nécessaire de faire un "redressement" des courbes pour tenir compte de la variation de la transparence du ciel. Enfin, nous avons normalisé le flux lumineux de façon à ce qu'il soit unitaire en dehors du phénomène.

Les phénomènes mutuels observés à Lille ont été modélisés à partir de la théorie E5 (cf. Lieske 1998 [135]) pour les conditions initiales des paramètres dynamiques, et de la loi de Minnaert (cf. Minnaert 1961 [141]) pour la diffusion de la lumière par la surface des satellites. Les paramètres photométriques ainsi que l'instant du minimum de distance, le paramètre d'impact et la vitesse relative des satellites ont été ajustés.

Cette section indique de façon exhaustive les différents résultats numériques obtenus à l'issue des ajustements. La table 10.6 indique les paramètres après ajustement ainsi que l'angle de séparation à l'instant du minimum de distance observé et le résidu obtenu par rapport à E5, et les tables 10.8 à 10.20 les coefficients de corrélation entre les différents paramètres.

phén.	date	minimum de distance h m s	paramètre d'impact km	vitesse relative km/s	p1	k1	p2	k2	angle de phase degrés	angle de séparation arcsec	résidu arcsec
2o3	03/02	23 30 58 ±0.06s	1075.6 ±2cm	10.422 ±9m/s	0.629 ±5×10 ⁻⁵	0.58	0.407 ±5×10 ⁻⁵	0.498 ±5×10 ⁻⁵	0.38	0.343	0.001
4e3	18/02	20 48 27 ±5s	2157.4 ±1m	11.476 ±53			0.397 ±0.002	0.491 ±0.04	3.44	0.560	-0.057
4o1	19/02	20 30 41 ±6s	1567.4 ±91cm	22.311 ±0.6	0.16 ±0.08	0.5 ±0.25	0.667 ±0.01	0.460 ±0.01	3.64	0.495	0.097
4e1	19/02	22 15 28 ±5s	2355.8 ±2m	20.313 ±93				0.486 ±0.014	3.65	0.612	-0.004
4e2	09/03	22 05 07 ±2s	3058.2 ±55cm	12.987 ±23				0.657 ±0.002	6.87	0.794	-0.030
3e4	15/03	22 14 11 ±9s	1215.7 ±3m	10.938 ±141				0.521 ±0.011	7.76	0.315	-0.052
2e3	18/03	20 46 56 ±4s	844.3 ±2m	16.935 ±64			0.403 ±0.004	0.514 ±0.005	8.15	0.219	-0.013
1e3	24/03	22 02 08 ±2s	3118.2 ±44cm	9.417 ±18			0.405 ±0.001	0.522 ±0.001	8.88	0.807	-0.013
1e3	25/03	20 08 26 ±1s	3302.8 ±21cm	11.848 ±4c			0.393 ±0.003	0.474 ±0.003	8.99	0.855	0.011
2o3	25/03	20 48 24 ±1h	1137.0 ±9cm	15.203 ±∞	0.537 ±0.004	0.583 ±0.13	0.467 ±0.003	0.718 ±0.002	8.99	0.391	-0.414
2e3	26/03	00 09 28 ±2s	1206.2 ±64cm	17.866 ±25			0.395 ±0.002	0.478 ±0.002	9.00	0.312	-0.043
2e1	26/03	20 40 40 ±2s	2484.7 ±45cm	20.678 ±19			0.614 ±0.002	0.513 ±0.002	9.10	0.643	0.021
3e2	19/04	00 17 47 ±5s	3450.5 ±2m	20.314 ±69			0.632 ±0.007	0.619 ±0.008	10.68	0.893	-0.012

TAB. 10.6 – Ajustement des observations de Lille

an	m	jour	tt-utc	sat	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	repère	o-c1	o-c2
2003	2	3.9798391	64.184	23	0.1090430	0.3249102	1	0.000	0.001
2003	2	18.8669836	64.184	43	-0.1833953	-0.5296350	2	0.002	0.084
2003	2	19.8546397	64.184	41	-0.1516133	-0.4712479	1	-0.147	-0.059
2003	2	19.9274046	64.184	41	-0.1992121	-0.5788543	2	0.038	0.011
2003	3	9.9202235	64.184	42	0.2591142	0.7502875	2	0.025	-0.035
2003	3	15.9265149	64.184	34	0.1059543	0.2965407	2	-0.086	0.005
2003	3	18.8659303	64.184	23	0.0728196	0.2061449	2	0.011	-0.015
2003	3	24.9181539	64.184	13	-0.2716058	-0.7597310	2	0.047	-0.010
2003	3	25.8391940	64.184	13	-0.2886607	-0.8043830	2	-0.048	0.007
2003	3	25.8669444	64.184	23	-0.1132137	-0.3742508	1	0.190	0.372
2003	3	26.0065686	64.184	23	0.1048103	0.2941250	2	-0.004	-0.041
2003	3	26.8615714	64.184	21	-0.2145462	-0.6064587	2	-0.026	-0.017
2003	4	19.0123483	64.184	32	-0.3049008	-0.8389170	2	-0.015	0.011

TAB. 10.7 – Résidus obtenus à l’aide des éphémérides de Lainey et al. (Lainey, Arlot & Vienne 2004 [112]). La référence est prise par rapport au second satellite. Le repère 2 est héliocentrique (éclipses), le repère "1" est géocentrique. L’observation de l’occultation du 25 mars est jugée peu fiable (les explications sont dans le texte).

Les résidus sont donnés Tab. 10.7 avec la théorie de Lainey L1-1, on constate un résidu moyen de 38 mas en ascension droite et 25 mas en déclinaison, contre 45 et 23 mas avec la théorie de Lieske E5, donc la théorie L1-1 semble légèrement meilleure sur ces phénomènes mutuels.

Les différentes matrices de corrélation montrent que l’instant du minimum de distance est bien décorrélé du paramètre d’impact, par contre la vitesse relative des 2 satellites a des coefficients de corrélation significatifs avec l’albedo géométrique et le paramètre d’impact.

L’occultation du 25 mars est à éliminer car le ciel était assez nuageux, la courbe est bruitée et la réduction donne des résidus anormalement élevés. De plus, le paramètre d’assombrissement de limbe calculé pour Ganymède est très différent des autres valeurs trouvées lors d’autres phénomènes.

	tmin	imp	vit	p_2	p_3	k_3
tmin	100	0.03	0.02	0.003	0	0.005
imp	0.03	100	0.03	0.01	0	0.01
vit	0.02	0.03	100	0.008	0	0.008
p_2	0.003	0.01	0.008	100	0	0.1
p_3	0.006	0.02	0.02	0.198	100	100.1
k_3	0.001	0.01	0.007	0.1	0.1	100

TAB. 10.8 – Ajustement de 2o3 le 03/02 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_3	k_3
tmin	100	0.42	2.1	1.99	2.3
imp	0.42	100	4.58	6.23	5.54
vit	2.1	4.58	100	6.99	7.45
p_3	1.99	6.23	6.99	100	7.95
k_3	2.3	5.54	7.45	7.95	100

TAB. 10.9 – Ajustement de 4e3 le 18/02 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_4	k_4	p_1	k_1
tmin	100	34	67	1.33	1.33	2.17	0.13
imp	34	100	35.3	4.1	4.1	6.8	0.38
vit	67	35.3	100	0.13	0.13	0.41	1.29
p_4	1.33	4.1	0.13	100	38	31.2	30.9
k_4	1.33	4.1	0.13	38	100	31.2	30.9
p_1	2.17	6.8	0.41	31.2	31.2	100	30.4
k_1	0.13	0.38	1.29	30.9	30.9	30.4	100

TAB. 10.10 – Ajustement de 4o1 le 19/02 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	k_1
tmin	100	4.59	4.91	1.22
imp	4.59	100	20.6	33.7
vit	4.91	20.6	100	59.9
k_1	1.22	33.7	59.9	100

TAB. 10.11 – Ajustement de 4e1 le 19/02 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	k_2
tmin	100	0.65	2.94	0.14
imp	0.65	100	25.3	13.2
vit	2.94	25.3	100	15.7
k_2	0.14	13.2	15.7	100

TAB. 10.12 – Ajustement de 4e2 le 09/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_4	k_4
tmin	100	1.21	4.34	0.41	0.53
imp	1.21	100	42.5	14.7	19.7
vit	4.34	42.5	100	10.4	29.6
p_4	0.41	14.7	10.4	100	86.3
k_4	0.53	19.7	29.6	86.3	100

TAB. 10.13 – Ajustement de 3e4 le 15/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_3	k_3
tmin	100	2.7	10.2	0.79	3.8
imp	2.7	100	45.4	19.3	34.8
vit	10.2	45.4	100	3.49	13.8
p_3	0.79	19.3	3.49	100	83.6
k_3	3.8	34.8	13.8	83.6	100

TAB. 10.14 – Ajustement de 2e3 le 18/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_3	k_3
tmin	100	0.07	4.52	0.5	0.71
imp	0.07	100	24.1	9.34	14.9
vit	4.52	24.1	100	9.26	16.8
p_3	0.5	9.34	9.26	100	42.6
k_3	0.71	14.9	16.8	42.6	100

TAB. 10.15 – Ajustement de 1e3 le 24/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_3	k_3
tmin	100	49.9	0.66	1.82	0.93
imp	49.9	100	1.18	1.46	0.46
vit	0.66	1.18	100	15.9	22.9
p_3	1.82	1.46	15.9	100	43.3
k_3	0.93	0.46	22.9	43.3	100

TAB. 10.16 – Ajustement de 1e3 le 25/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_2	k_2	p_3	k_3
tmin	100	1.67	0.87	1.52	1.52	0.21	2.12
imp	1.67	100	0.2	0.72	0.72	0.24	1.11
vit	0.87	0.2	100	6.46	6.46	8.19	3.62
p_2	1.52	0.72	6.46	100	24.8	24.6	24.5
k_2	1.52	0.72	6.46	24.8	100	24.6	24.5
p_3	0.21	0.24	8.19	24.6	24.6	100	23.2
k_3	2.12	1.11	3.62	24.5	24.5	23.2	100

TAB. 10.17 – Ajustement de 2o3 le 25/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	p_3	k_3
tmin	100	2.77	6.35	0.28	0.63
imp	2.77	100	27.8	3.64	15.6
vit	6.35	27.8	100	6.07	13.7
p_3	0.28	3.64	6.07	100	45
k_3	0.63	15.6	13.7	45	100

TAB. 10.18 – Ajustement de 2e3 le 26/03 : matrice de corrélation

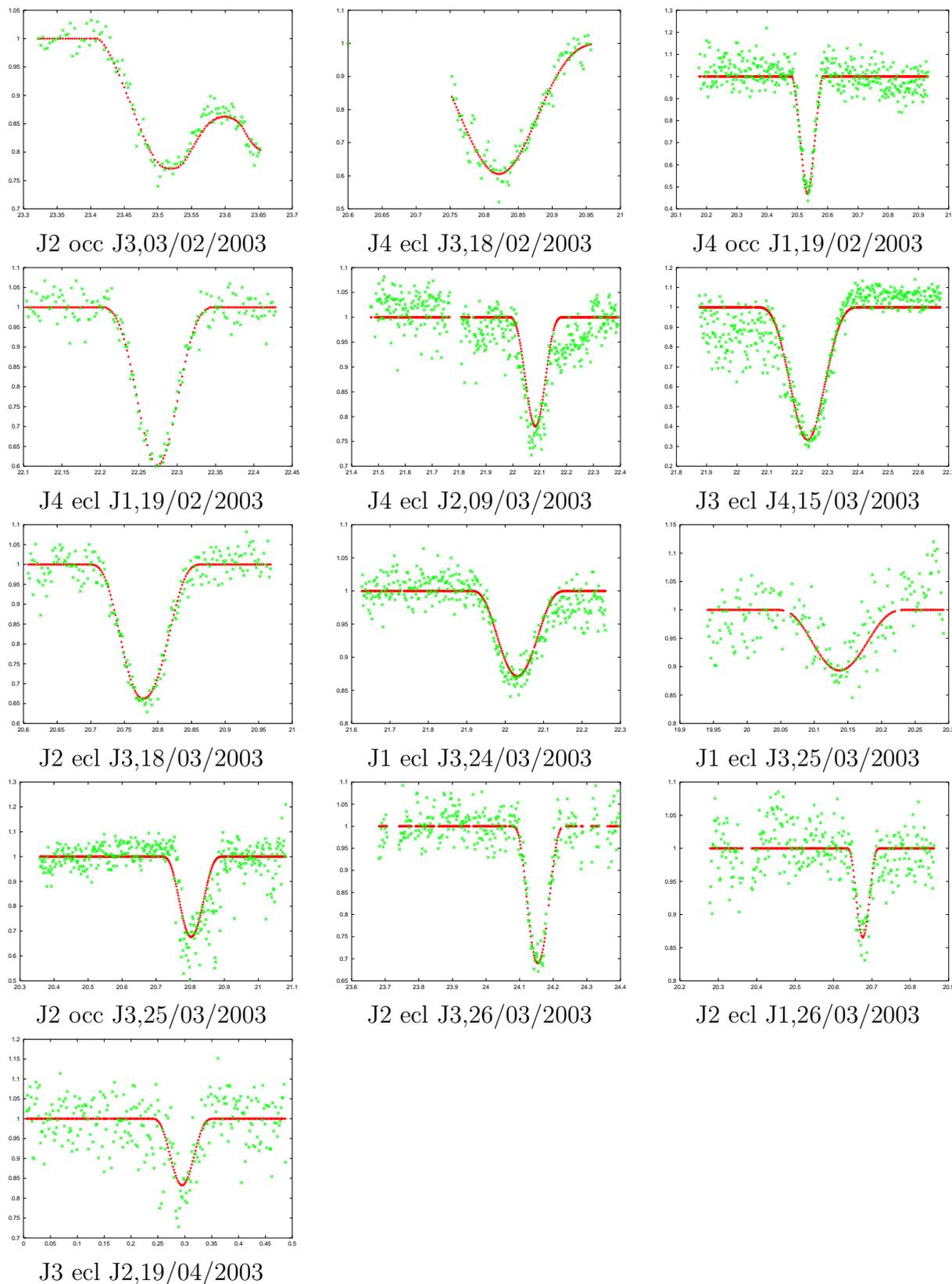


FIG. 10.7 – Les courbes de lumière et les modèles ajustés. Les heures UTC sont en abscisse et les flux relatifs en ordonnée.

	tmin	imp	vit	p_1	k_1
tmin	100	0.69	3.72	0.24	0.51
imp	0.69	100	28.1	4.24	10.8
vit	3.72	28.1	100	4.18	12.7
p_1	0.24	4.24	4.18	100	46.6
k_1	0.51	10.8	12.7	46.6	100

TAB. 10.19 – Ajustement de 2e1 le 26/03 : matrice de corrélation

	tmin	imp	vit	k_2
min	100	3.45	7.8	1.63
imp	3.45	100	42.2	18.9
vit	7.8	42.2	100	27.7
k_2	1.63	18.9	27.7	100

TAB. 10.20 – Ajustement de 3e2 le 19/04 : matrice de corrélation

Les observations de Bordeaux

J'ai réduit également, en collaboration avec Gérard Dourneau [56], 11 phénomènes mutuels observés à l'Observatoire de Bordeaux pendant la campagne PHEMU03 avec la même méthode que pour réduire les phénomènes observés à Lille, à la différence près que je me suis basé sur L1-1 et non plus sur E5. La Table 10.21 donne les valeurs des différents paramètres obtenues après ajustement, et la Table 10.22 les résidus de ces observations avec la théorie L1-1.

On observe un résidu moyen de 40 mas en ascension droite et 55 mas en déclinaison. La figure 10.8 donne les courbes de lumière ainsi que les modèles ajustés.

phénomène	p_1	k_1	p_2	k_2	param. impact	phase (°)	chute en flux
2e1061				0.498	1106km	-5.33	49.9%
4e3182				0.486	1947km	3.44	43.5%
1e4282				0.508	4.2km	5.19	48.6%
4e2093				0.586	3105km	6.87	21%
3e4153				0.511	1348km	7.76	64.2%
2e3183				0.509	16km	8.15	35.5%
1e3243				0.504	3171km	8.88	12.2%
1e3253				0.498	3090km	8.99	13.2%
2o3253	0.617	0.578	0.401	0.498	2710km	8.99	9.4%
2e1024				0.485	1909km	9.76	27%
3e1054				0.531	2471km	9.93	45.8%

TAB. 10.21 – Paramètres issus des observations de phénomènes mutuels à Bordeaux en 2003.

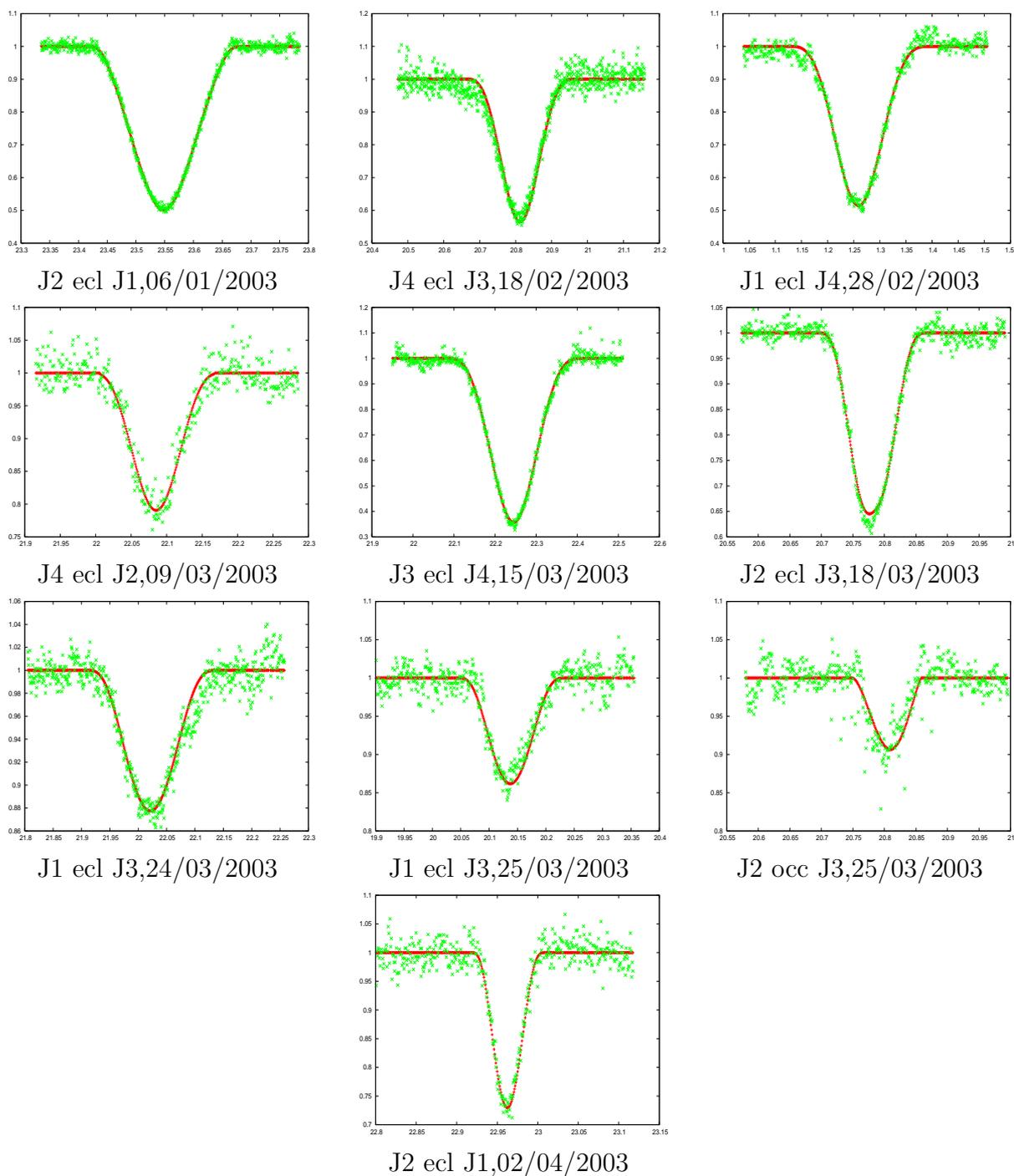


FIG. 10.8 – Les courbes de lumière de Bordeaux et les modèles ajustés. Les heures UTC sont en abscisse et les flux relatifs en ordonnée.

an	m	jour	tt-utc	obs	sat	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	f	o-c1	o-c2
2003	1	6.9812967	64.184	999	21	0.0879665	0.2739420	2	0.032	-0.053
2003	2	18.8672536	64.184	999	43	-0.1657391	-0.4780172	2	0.084	0.113
2003	2	28.0525667	64.184	999	14	-0.0003617	-0.0010376	2	0.033	0.087
2003	3	9.9202739	64.184	999	42	0.2630098	0.7617281	2	0.043	-0.028
2003	3	15.9270122	64.184	999	34	0.1169731	0.3291249	2	0.045	-0.005
2003	3	18.8659418	64.184	999	23	0.0013799	0.0039068	2	-0.056	-0.218
2003	3	24.9177134	64.184	999	13	-0.2759206	-0.7726098	2	-0.047	0.009
2003	3	25.8391832	64.184	999	13	-0.2700470	-0.7525285	2	-0.033	0.060
2003	3	25.8666813	64.184	999	23	-0.2295624	-0.7590757	1	-0.024	0.017
2003	4	2.9568291	64.184	999	21	-0.1662801	-0.4653542	2	0.021	-0.005
2003	4	5.0362539	64.184	999	31	-0.2183075	-0.6014660	2	0.020	0.004

TAB. 10.22 – Résidus obtenus à l’aide des éphémérides de Lainey et al. (Lainey, Arlot & Vienne 2004). La référence est prise par rapport au second satellite. Le repère 2 est héliocentrique (éclipses), le repère "1" est géocentrique.

10.4 Conclusion

Les phénomènes mutuels sont les observations terrestres les plus précises pour l’astrométrie des satellites naturels de Jupiter et de Saturne. Ainsi, il est important de continuer à les observer à chaque opportunité, soit tous les 6 ans pour les satellites galiléens et tous les 15 ans pour les principaux satellites de Saturne. De même, dès 2006 et jusqu’en 2010 seront observables des phénomènes mutuels de satellites d’Uranus (cf. Christou 2005 [38]), l’IMCCE est d’ailleurs en train de développer une nouvelle théorie dynamique de ces satellites afin d’affiner leurs prédictions (cf. Arlot et al. 2005 [15]).

Parallèlement aux futures observations, les observations archivées pourront être re-réduites à l’aide de l’avancée de nos connaissances sur la photométrie et la dynamique des différents satellites, comme j’ai fait sur les phénomènes de satellites de Saturne observés en 1980. Vasundhara (2002 [199]) a amélioré les résidus des phénomènes des satellites galiléens observés en Inde grâce à l’utilisation de cartes d’albedo obtenues grâce à la sonde Galileo (cf. par exemple Geissler 1999 [75]). Nous espérons que la mission Cassini débouchera sur la publication de cartes d’albedo de satellites de Saturne.

Inversement, de bons phénomènes mutuels peuvent peut-être permettre d’obtenir des indications sur la photométrie de satellites, il serait intéressant de faire de tels tests sur des satellites dont la photométrie est actuellement bien connue afin de valider cette piste.

Chapitre 11

Conclusion et perspectives

Nous avons vu, dans cette thèse, que les équations donnant les variations des éléments orbitaux dues aux marées ne doivent pas être développées au delà du degré 2 en excentricité, car un développement de degré supérieur nécessiterait la connaissance de paramètres géophysiques très difficiles à déterminer. De même, lorsque les inclinaisons et les obliquités des satellites sont faibles, il est préférable de ne pas tenir compte des effets des marées sur ces quantités. Ces derniers sont petits et les négliger permet de mieux appréhender la question de l'amortissement de l'excentricité.

La connaissance de ces marées est fondamentale dans l'étude de la dynamique d'un système de satellites naturels à long terme, par exemple elles influent sur les probabilités de capture dans les résonances isolées. Nous l'avons vu lors d'une exploration analytique de l'inégalité de De Haerdtl, où des essais numériques montraient qu'une baisse de la dissipation augmentait la probabilité de capture. Nous pourrons, dans un proche avenir, étudier l'influence de l'intensité de la dissipation sur la probabilité de capture dans des résonances de caractéristique supérieure à 1, comme cela a déjà été fait dans des résonances de caractéristique 1 par Gomes (1997 [81]).

Une étude numérique de l'inégalité de De Haerdtl a révélé la richesse des perturbations induites par cette inégalité, notamment la présence de chaos dont certains des termes responsables ont été identifiés. Cependant, le doute demeure sur la cause de l'existence de cette inégalité : est-ce un hasard ou résulte-t-elle d'une ancienne résonance récemment rompue ? Les prochains scénarii d'évolution orbitale du système des satellites galiléens permettront sans doute de répondre à cette question. En outre, cette étude peut servir de point de départ à toute autre étude sur la dynamique d'un système d'exo-planètes comportant une grande inégalité de degré élevé.

D'un point de vue observationnel, la signature des marées est petite, mais néanmoins probablement détectable par exemple dans le cas d'Io où l'ajout d'une accélération de marée dans les éphémérides permet de diminuer les résidus. Dans le cas de satellites de Saturne, la première détection fiable d'accélération de marée viendra probablement de Téthys. L'accumulation d'observations précises comme celles issues de phénomènes mutuels aidera à cette détection.

Annexe A

Éléments d'une orbite képlérienne

Introduction

Le mouvement d'un système isolé de 2 corps est dit képlérien, il peut être décrit par 2 ellipses fixes ayant toutes deux parmi leurs foyers le centre de gravité commun aux 2 corps. Dans le cas d'un système de type planétaire, à n corps (avec n petit, généralement inférieur à 10) avec un corps bien plus massif que les autres (le corps central), on peut considérer les orbites comme des ellipses perturbées, c'est-à-dire qu'à l'instant t_1 l'orbite du corps i est une ellipse dont on donne les éléments à cette date, et à l'instant t_2 l'orbite du corps i est une autre ellipse, avec des éléments orbitaux différents. Par conséquent, dans ce type de mouvement, les orbites peuvent se décrire par des éléments elliptiques fonctions du temps. L'objet de cette annexe est de préciser les définitions de ces éléments elliptiques, dans plusieurs systèmes de coordonnées.

A.1 Les éléments osculateurs

Les éléments osculateurs se rapportent à l'ellipse osculatrice, c'est-à-dire l'ellipse qui tangente l'orbite à l'instant t , elle est calculée à partir de la position et de la vitesse du corps à cet instant. Si, à l'instant t , on supprimait toutes les perturbations alors le corps resterait sur cette ellipse. Dans ce cas, les éléments d'orbite choisis sont souvent pris dans les ensembles suivants :

$$(a, e, i, \delta\Omega, \omega, t_p) \tag{A.1}$$

ou

$$(a, e, i, \delta\Omega, \varpi, \lambda_0 \text{ à } t = t_0) \tag{A.2}$$

a et e sont définis comme le demi grand-axe et l'excentricité de l'ellipse. t_p désigne l'instant de passage au péricentre de l'ellipse. i , $\delta\Omega$, ω , ϖ et λ_0 sont des angles, que la Fig. A.1 aide à définir. Soit $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le trièdre normé définissant le repère de référence de centre O. Soit (\vec{i}, \vec{j}) le repère associé au plan de l'ellipse osculatrice, et \vec{k} le vecteur qui complète le trièdre (on a ainsi $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$). i est l'inclinaison de l'orbite, c'est l'angle entre les vecteurs \vec{k}_0 et \vec{k} , c'est également l'angle entre les plans (\vec{i}_0, \vec{j}_0) et (\vec{i}, \vec{j}) . i est compris entre 0 et 180 degrés,

les valeurs de i supérieures à 90 degrés caractérisent une orbite rétrograde. Soit N le nœud ascendant de l'orbite, c'est-à-dire le point de l'orbite appartenant au plan de référence tel que le corps ait une coordonnée sur k_0 négative avant de rencontrer ce point et positive ensuite. On définit \vec{n} le vecteur unitaire tel que $O\vec{N} = ||O\vec{N}||\vec{n}$. Ω est l'angle (\vec{i}_0, \vec{n}) , c'est la longitude du nœud ascendant, on l'appelle souvent tout simplement "nœud ascendant" par abus de langage. Soit \vec{u}_0 le vecteur unitaire définissant la direction entre O et le péricentre de l'orbite. ω est l'angle entre (\vec{n}, \vec{u}_0) , c'est l'argument du péricentre. On a $\varpi = \omega + \Omega$, c'est la longitude du péricentre. Enfin, λ_0 est la longitude moyenne λ à l'instant $t = 0$. λ est défini tel que $\dot{\lambda} = n$ avec n moyen mouvement relié au demi grand-axe par la troisième loi de Képler et $\lambda = 0$ lorsque le corps est à l'apocentre.

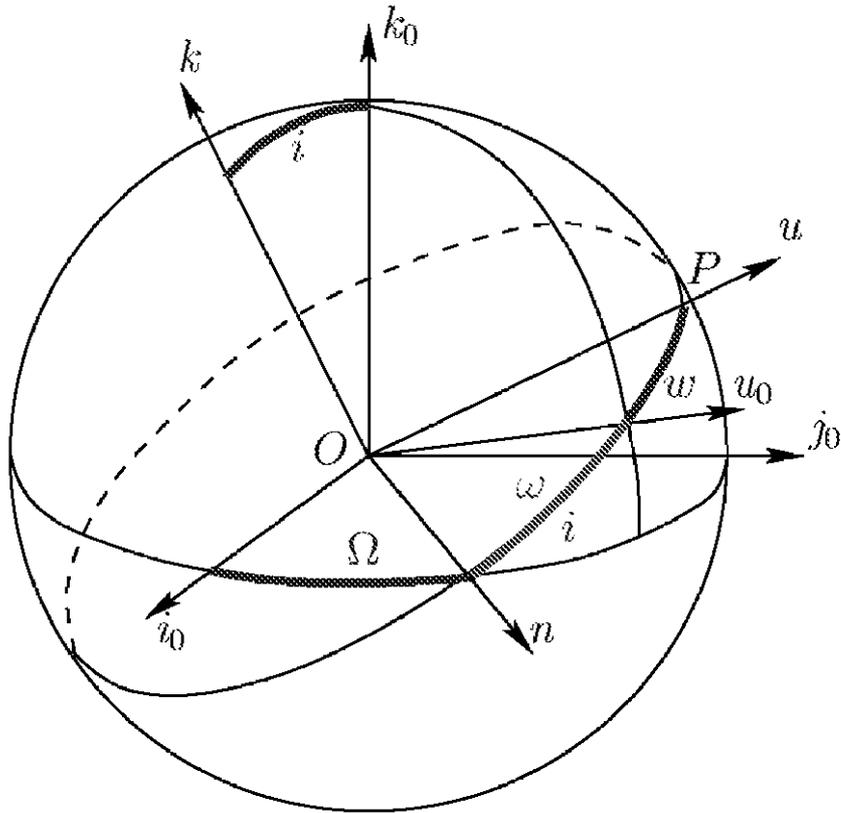


FIG. A.1 – Définition des éléments de l'ellipse osculatrice, illustration issue du cours de mécanique céleste de L. Duriez [64]

Dans le cas où e et i sont faibles, ce qui est courant dans les problèmes planétaires, les angles ω , ϖ et Ω sont mal déterminés. Dans ce cas il convient d'utiliser les variables suivantes :

$$h = e \cos \varpi \quad (\text{A.3})$$

$$k = e \sin \varpi \quad (\text{A.4})$$

$$p = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \quad (\text{A.5})$$

$$q = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \quad (\text{A.6})$$

On peut aussi utiliser les variables complexes z et ζ définies ainsi :

$$z = h + \sqrt{-1}k = e \exp(\sqrt{-1}\varpi) \quad (\text{A.7})$$

$$\zeta = p + \sqrt{-1}q = \sin \frac{i}{2} \exp(\sqrt{-1}\Omega) \quad (\text{A.8})$$

On note également $\gamma = \sin \frac{i}{2}$.

Il est également important de préciser le centre de l'orbite, le repère peut par exemple être héliocentrique, c'est-à-dire, dans le cas du système solaire, une planète est repérée par l'ellipse osculatrice dont le Soleil est un foyer, ou alors barycentrique, dans ce cas le barycentre du système est un foyer. Dans le cas d'un système de satellites, l'équivalent du repère héliocentrique est le repère planétocentrique.

A.2 Les coordonnées de Jacobi

Il s'agit d'un système de coordonnées où les ellipses n'ont pas le même centre. Considérons un système de $(n+1)$ corps numérotés de 0 à n , 0 désignons le corps central. L'ellipse osculatrice du corps 1 a pour centre le centre de masse du corps 0, celle du corps 2 le centre de masse du système $\{0 + 1\}$, celle du corps 3 le centre de masse du système $\{0 + 1 + 2\}$, et ainsi de suite ...

Ce changement de centre a l'intérêt, dans le cas d'un système à 2 corps, de permettre d'écrire un potentiel perturbateur commun aux corps 1 et 2. Cette considération est à la base du Second Modèle Fondamental de la Résonance (cf. Henrard & Lemaître 1983 [88]). On y associe les variables canoniques jacobienues définies ainsi, pour chaque corps à l'exception du corps central :

$$L_i = M_{Ji} \sqrt{\mu_i a_i} \quad (\text{A.9})$$

$$P_i = L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2}) \quad (\text{A.10})$$

$$P_{n+i} = 2L_i \sqrt{1 - e_i^2} \gamma_i^2 \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda_i \quad (\text{A.12})$$

$$p_i = -\varpi_i \quad (\text{A.13})$$

$$p_{n+i} = -\delta \mathcal{L}_i \quad (\text{A.14})$$

avec

$$M_{J_i} = \frac{M_i \sum_{k=0}^{i-1} M_k}{\sum_{k=0}^i M_k} \quad (\text{A.15})$$

et

$$\mu_i = \frac{GM_0 M_i}{M_{J_i}} \quad (\text{A.16})$$

Les masses M_{J_i} sont distinctes des M_i mais proches, la différence vient du changement de coordonnées et est d'ordre 1 des masses. Par conséquent, selon la précision souhaitée, on peut parfois assimiler les M_{J_i} aux M_i .

A.3 Autres systèmes de coordonnées

Je donne ici d'autres systèmes classiques de variables canoniques. Je n'ai pas utilisé ces coordonnées dans mon travail de thèse, je ne les donne que pour information.

A.3.1 Les variables de Delaunay

Les voici

$$l = n(t - t_p) \quad (\text{A.17})$$

$$g = \omega \quad (\text{A.18})$$

$$\theta = \varrho \quad (\text{A.19})$$

$$L = \sqrt{\mu a} \quad (\text{A.20})$$

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \quad (\text{A.21})$$

$$\Theta = G \cos i \quad (\text{A.22})$$

avec $\mu = n^2 a^3$ et t_p est l'instant de passage au péricentre. Ces variables ont, comme les variables de Jacobi, l'inconvénient d'être singulières lorsque les excentricités et inclinaisons sont faibles, ce qui entraîne une mauvaise détermination des variables g et θ . C'est pourquoi Poincaré (1892 [160]) a proposé un autre système de variables canoniques dans ses *Méthodes Nouvelles*.

A.3.2 Les variables de Poincaré

Les voici, définies à partir des éléments de Delaunay :

$$\Lambda = L \tag{A.23}$$

$$\xi = \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \theta) \tag{A.24}$$

$$p = \sqrt{2(G - \Theta)} \cos \theta \tag{A.25}$$

$$\lambda = l + g + \theta \tag{A.26}$$

$$\eta = -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \theta) \tag{A.27}$$

$$q = -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin \theta \tag{A.28}$$

Conclusion

Il est important de préciser que tous ces systèmes de coordonnées sont strictement équivalents, ils décrivent tous un mobile sur une ellipse. De plus, ces systèmes ont la particularité d'avoir 5 variables décrivant complètement l'ellipse osculatrice, et une variable indiquant la position du mobile sur l'ellipse. Le lecteur pourra trouver plus de précisions dans le cours de mécanique céleste de L. Duriez [64].

Annexe B

Les éléments propres

Introduction

L'objet de cette annexe est de définir la notion d'éléments propres, largement utilisée au cours de ce travail de thèse.

B.1 Définitions

Soit un système de type planétaire de $n+1$ corps, typiquement le système solaire ou le système de Jupiter et des satellites galiléens, dont on veut étudier la dynamique. L'indice 0 se rapporte au corps central et les autres corps sont numérotés de 1 à n . Définissons pour chaque corps, à l'exception du corps central :

- a : demi-grand-axe
- e : excentricité (supposée petite)
- i : inclinaison (supposée petite)
- Ω : longitude du nœud ascendant
- ϖ : longitude du périhélie
- λ : longitude moyenne
- $z = e \exp(\sqrt{-1}\varpi)$
- $\zeta = \sin \frac{i}{2} \exp(\sqrt{-1}\Omega) = \gamma \exp(\sqrt{-1}\delta\Omega)$

Utilisons pour chacun de ces corps le jeu de variables (a, λ, z, ζ) et regroupons ces variables associées aux n corps distincts du corps central dans un unique vecteur V .

Lorsqu'on se limite aux termes séculaires, le système à résoudre, dit système de Laplace-Lagrange, est de la forme :

$$\frac{dV}{dt} = \Lambda(V, t) \quad (\text{B.1})$$

On peut décomposer V de la sorte

$$V = V_0 + \Delta V(V_0, t) \quad (\text{B.2})$$

où V_0 est la partie séculaire de V (indépendante des longitudes moyennes) et $\Delta V(V_0, t)$ la partie à courte période, supposée d'amplitude bien plus faible. De même, on peut décomposer $\Lambda(V, t)$ de la façon suivante :

$$\Lambda(V, t) = \langle \Lambda(V, t) \rangle + \{\Lambda(V, t)\} \quad (\text{B.3})$$

où $\langle \Lambda(V, t) \rangle$ désigne la partie séculaire ou critique de $\Lambda(V, t)$ et $\{\Lambda(V, t)\}$ la partie à courtes périodes. On a, au second ordre des masses (Duriez 1979 [58]) :

$$\frac{dV_0}{dt} = \langle \Lambda(V_0, t) \rangle + \left\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \Delta_1 V(V_0, t) \right\rangle \quad (\text{B.4})$$

où $\Delta_1 V(V_0, t)$ est la solution à courtes périodes d'ordre 1 des masses, c'est-à-dire une solution de

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial t} = \{\Lambda(V_0, t)\}$$

Le système (B.4) est constitué non pas de $4n$ mais de $2n$ équations, où seules les variables z et ζ interviennent. En effet, comme il s'agit de termes séculaires, les longitudes moyennes n'interviennent pas. De plus, la dérivée du demi-grand-axe n'admet pas de termes séculaires jusqu'à l'ordre 2 des masses inclus (théorème de Poisson, cf. Tisserand 1889 [193] pour une démonstration en variables de Jacobi, et Duriez 1978 [57] pour une démonstration en variables héliocentriques). Ainsi, le système (B.4) devient

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{-1} \left(A\alpha + \sum_{i=1}^j \Phi_{2i+1}(\alpha, \bar{\alpha}) \right) \quad (\text{B.5})$$

s'il est développé au degré $2j+1$ en excentricités/inclinaisons avec $\alpha = (z_1, \dots, z_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ et Φ_i une fonction de degré i en α . Les excentricités et inclinaisons étant supposées petites, le système (B.5) est proche du système séculaire linéaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{-1} A\alpha \quad (\text{B.6})$$

Ce système (B.6) est diagonalisable par le changement de variables linéaire

$$\alpha = S\beta$$

où S est la matrice des vecteurs propres de A .

On a finalement le système diagonal suivant :

$$\frac{d\beta}{dt} = \sqrt{-1} C\beta \quad (\text{B.7})$$

où C est une matrice diagonale. β est un vecteur de dimension $2n$ noté ainsi : $\beta = (z_1^\bullet, \dots, z_n^\bullet, \zeta_1^\bullet, \dots, \zeta_n^\bullet)$ avec $z_j^\bullet = e_j^\bullet \exp(\sqrt{-1}\varpi_j^\bullet)$ et $\zeta_j^\bullet = \gamma_j^\bullet \exp(\sqrt{-1}\Omega_j^\bullet)$. Les éléments de β sont appelés modes propres du système séculaire (cf. Laskar 1987 [119]).

B.2 Aspects pratiques

Lorsque l'on étudie la dynamique d'un système planétaire dont la principale perturbation est l'aplatissement de la planète, comme c'est le cas par exemple du système des 4 premiers

satellites de Saturne Mimas, Encelade, Téthys et Dioné, alors la matrice A du système linéaire (B.6) est quasi-diagonale (cf. par exemple Duriez & Vienne 1991 [61]). Dans ce cas, on peut assimiler les nœuds et péri-centres aux éléments propres du système. Par contre, lorsque les masses des différents corps sont suffisamment importantes pour que leurs effets soient comparables à ceux de l'aplatissement du corps central, comme c'est le cas par exemple des satellites galiléens, alors une description de la dynamique du système à l'aide des vitesses des nœuds et péri-centres n'a pas vraiment de sens. Dans un pareil cas, le couplage entre les différents corps est tel que la dynamique séculaire du système est composée de rotations uniformes et indépendantes des modes propres. Il en résulte, par exemple, que les variables z_i et ζ_i ont des modules variables (ainsi, les excentricités des différents corps présentent des fluctuations significatives autour d'une valeur moyenne). Pour la même raison, une valeur moyenne de la vitesse d'un nœud ou d'un péri-centre ne présente qu'un intérêt très limité.

Les vitesses associées aux modes propres sont appelées fréquences propres. Ces fréquences sont caractéristiques du système et leur détection très précise est facile à l'aide d'une analyse en fréquences. L'analyse en fréquences donne un ensemble de fréquences aisées à identifier car les valeurs des fréquences propres peuvent être au préalable évaluées grossièrement à l'aide des équations des perturbations par l'aplatissement du corps central et par les autres corps, développées à l'ordre 1 des masses et au degré 1 des excentricités/inclinaisons. Cette évaluation grossière est suffisante pour identifier les fréquences propres données par l'analyse en fréquences qui, elle, est précise.

Les résonances sont issues de commensurabilités entre les longitudes moyennes et les éléments propres, et non pas les vitesses des nœuds et péri-centres. Ainsi, pour identifier un terme résonant, il faut examiner les différentes combinaisons linéaires entre les longitudes moyennes et les éléments propres (l'algorithme d'analyse en fréquences donne les phases de ces éléments). C'est ainsi que Laskar (1990 [121]) a identifié des résonances responsables de chaos dans le système solaire.

Il est finalement à noter que les fréquences propres, même combinées avec les longitudes moyennes, ne suffisent généralement pas à décrire la dynamique à longues périodes d'un système planétaire. En effet, des fréquences résonantes peuvent intervenir dans cette description.

Conclusion

Dans le cadre de mon travail, la distinction entre éléments propres et nœuds et péri-centres s'est avérée fondamentale dans l'identification des phénomènes chaotiques au sein de l'inégalité de De Haerdtl. Ceci est dû aux fortes perturbations mutuelles des satellites galiléens.

Annexe C

Les intégrateurs numériques

Introduction

L'objet de cette annexe est de présenter succinctement l'intégration numérique de systèmes différentiels telle qu'elle a été utilisée lors de ce travail de thèse. La théorie mathématique justifiant les résultats énoncés n'est pas détaillée ici, le lecteur intéressé pourra par exemple se référer au cours de C. Brezinski [24].

C.1 Le problème de Cauchy

Soit $[a; b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} , f une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ et x un élément de \mathbb{R}^k . Le système différentiel d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{C.1}$$

accompagné d'une condition initiale (par exemple $x(t_0) = x_0$) est appelé problème de Cauchy.

Lorsque f est lipschitzienne, c'est-à-dire lorsqu'il existe $L > 0 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\| \tag{C.2}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ où $\| \cdot \|$ désigne une norme sur \mathbb{R}^k , alors le problème de Cauchy admet une et une seule solution sur $[a; b]$, quelque soit la condition initiale.

En pratique, on considérera toujours que cette condition est vérifiée. Néanmoins, afin de ne pas la mettre en défaut, ce qui de toute façon entraînerait des artefacts numériques aisément détectables, on évitera d'utiliser des variables comportant des singularités. Par exemple, dans le problème des 3 corps, la dérivée temporelle d'un péricentre $\dot{\varpi}$ a une partie principale en l'inverse de l'excentricité. On préférera alors éviter le jeu de variables (e, ϖ) .

La solution du problème de Cauchy n'est que trop rarement exprimable analytiquement. Par conséquent, on cherche à l'approximer numériquement le plus finement possible. Les différentes méthodes numériques d'approximation de la solution consistent toutes à exprimer des valeurs approchées de x en un nombre fini de points sur $[a; b]$ au moyen d'une suite récurrente. Dans la suite, on appellera x_n la valeur approchée de $x(t_n)$

C.2 Les intégrateurs à pas séparés

Ces intégrateurs sont de la forme

$$x_{n+1} = x_n + h_n \phi(t_n, x_n, h_n) \quad (\text{C.3})$$

où (x_0, t_0) est la condition initiale du problème de Cauchy et $x_{n+1} = x_n + h_n$. $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite réelle de pas d'intégration.

Si l'équation C.3 vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{h} (x(t_{n+1}) - x_{n+1}) - \phi(t_n, x(t_n), h) \right| = 0 \quad (\text{C.4})$$

alors elle est dite consistante avec l'équation différentielle (C.1). La consistance (C.4) est vérifiée si et seulement si on a

$$\phi(t, x, 0) = f(x, y) \quad (\text{C.5})$$

pour tout $t \in [a; b]$ et $x \in \mathbb{R}^k$, ce qui revient tout simplement à dire que ϕ tend vers la dérivée de x lorsque le pas tend vers 0.

Dans les méthodes couramment utilisées, la suite (h_n) est constante (on ne parle d'ailleurs pas de suite de pas d'intégration mais tout simplement du pas de l'intégrateur h) et ϕ dépend de valeurs de f .

Ces méthodes sont connues comme méthodes de Runge-Kutta. Elles définissent ϕ ainsi :

$$\phi(t, x, h) = \sum_{i=1}^r c_i k_i \quad (\text{C.6})$$

où les c_i sont réels et les k_i sont définis ainsi :

$$k_1 = f(t, x) \quad (\text{C.7})$$

$$k_i = f\left(t + \theta_i h, x + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{j-1}\right) \quad (\text{C.8})$$

Il découle de la consistance et de la condition (C.5)

$$\sum_{i=1}^r c_i = 1 \quad (\text{C.9})$$

r est appelé rang de la méthode de Runge-Kutta.

Afin d'optimiser le fonctionnement de l'algorithme, il faut choisir les coefficients c_i , a_{ij} et θ_i de façon à maximiser l'ordre de la méthode. On appelle ordre la quantité p définie par :

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{h} (x(t_{n+1}) - x_{n+1}) - \phi(t_n, x(t_n), h) \right| = O(h^p) \quad (\text{C.10})$$

Il est impossible d'avoir un ordre supérieur au rang. La détermination des coefficients est assez difficile, le principe consiste à utiliser des équations issues des développements en séries de Taylor des fonctions x et f , ainsi que la condition (C.9). Ces équations sont souvent non

linéaires et il y a souvent plus d'équations que de coefficients. Par conséquent, il y a, aux rangs non triviaux, plus de degrés de liberté sur le choix des coefficients.

Citons les cas particuliers classiques.

– $r = 1$

Le cas $r = 1$ consiste à poser

$$\phi(t, x, h) = f(t, x) \quad (\text{C.11})$$

ce qui revient à faire un développement de Taylor d'ordre 1, ou encore à approximer x_{n+1} à l'aide de x_n et de la tangente à la courbe de x en (t_n, x_n) . Cette méthode de Runge-Kutta à l'ordre 1 est connue sous le nom de méthode d'Euler, elle a un grand intérêt pédagogique mais aucun intérêt pratique, les méthodes d'ordre supérieur étant bien plus efficace et pas réellement plus compliquées à implémenter.

– $r = 2$

Dans le cas $r = 2$, les coefficients permettant d'avoir une méthode d'ordre 2 vérifient les équations suivantes :

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_2 \theta_2 = \frac{1}{2}$$

et

$$c_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

Il y a 4 coefficients et 3 équations, donc un degré de liberté. En posant arbitrairement $\theta_2 = \frac{1}{2}$ l'équation générale (C.3) devient

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right) \quad (\text{C.12})$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 ou encore de méthode d'Euler améliorée.

– $r = 4$

Jusqu'au rang 4, il est possible de déterminer les coefficients de façon à ce que l'ordre égale le rang. Au delà de 4, ce n'est plus systématiquement vrai. Ceci explique sans doute que la méthode Runge-Kutta à l'ordre 4 soit très utilisée. Il y a plusieurs degrés de liberté dans le choix des coefficients, en voici un exemple, qui est celui généralement adopté :

$$k_1 = f(t, x)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + h\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + h\frac{k_3}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t + h, x + hk_3)$$

$$\phi(t, x, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Cette méthode est à utiliser avec un pas h égal à $1/200^e$ de la plus petite période du système (F. Joutel, communication privée). J'ai vérifié moi-même ce résultat. La méthode de Runge-Kutta à l'ordre est souvent utilisée dans différents domaines car elle allie performance et simplicité.

Les méthodes exposées ont le principal inconvénient de ne pas permettre un contrôle de l'erreur à chaque itération, et impliquent ainsi un risque de propagation et d'accumulation d'erreur. Lorsque l'utilisateur voudra contrôler l'erreur, il devra donc se tourner vers d'autres méthodes, exposées dans la suite.

C.3 Les algorithmes de prédiction-correction

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit connue jusqu'au rang N . Le principe des méthodes de prédiction-correction est d'abord de faire une évaluation de x_{N+1} à l'aide d'un prédicteur, qui est une formule de récurrence liant x_{N+1} à des valeurs de f et de (x_n) , puis une deuxième évaluation à l'aide d'une autre formule appelée correcteur, et enfin d'affiner la valeur de x_{n+1} en fonction des 2 valeurs trouvées et de l'erreur acceptée par l'utilisateur.

Le prédicteur est issu d'un schéma dit explicite, c'est-à-dire qu'il est de la forme

$$\alpha_1 x_{n+1} + \dots + \alpha_{1-k} x_{1-k} = h[\beta_0 f_n + \dots + \beta_{1-k} f_{1-k}] \quad (\text{C.13})$$

avec

$$\alpha_1 \neq 0$$

et

$$f_i = f(t_i, x_i)$$

Ce qu'il est important de remarquer dans le schéma (C.13) est l'absence de la dérivée de x en t_{n+1} , c'est-à-dire f_{n+1} . C'est cette absence qui va différencier le schéma implicite du schéma explicite. Ainsi, le schéma implicite est de la forme suivante :

$$\alpha_1 x_{n+1} + \dots + \alpha_{1-k} x_{1-k} = h[\beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_{1-k} f_{1-k}] \quad (\text{C.14})$$

avec

$$\beta_1 \neq 0$$

c'est d'une telle forme qu'est issu le correcteur. Ainsi, le principe d'un intégrateur par prédiction-correction est de faire une première estimation de x_{n+1} à l'aide des données déjà calculées, d'évaluer la fonction f en (t_{n+1}, x_{n+1}) et d'utiliser cette valeur de f dans le schéma implicite du correcteur pour trouver une nouvelle estimation de x_{n+1} . Si la différence entre les 2 estimations est inférieure à la barre d'erreur acceptée par l'utilisateur alors l'intégrateur

passer au calcul de x_{n+2} en prenant pour x_{n+1} la valeur trouvée par le correcteur, sinon il réestime x_{n+1} avec la formule du correcteur (C.14) en utilisant la valeur de f en la dernière estimation de x_{n+1} , et ainsi de suite jusqu'à ce que l'écart entre les deux dernières estimations de x_{n+1} soit inférieur à l'erreur.

Les plus utilisées de ces méthodes utilisent les schémas d'Adams. Ces schémas consistent à poser

$$x(t_q) - x(t_j) = \int_{t_j}^{t_q} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (\text{C.15})$$

et de calculer l'intégrale en remplaçant f par une interpolation utilisant des valeurs de f connues car précédemment calculées. On a ainsi un schéma de la forme

$$x(t_q) - x(t_j) = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i-k+1} \quad (\text{C.16})$$

avec

$$\sum_{i=0}^k \beta_i = 1$$

pour garantir la consistance du schéma.

On distingue les schémas explicites de type Adams-Bashforth des schémas implicites de type Adams-Moulton. L'utilisation d'un schéma d'Adams-Bashforth comme prédicteur et d'un schéma d'Adams-Moulton comme correcteur est parfois dénommée "méthode d'Adams-Bashforth-Moulton".

J'ai souvent utilisé cette méthode à l'ordre 10, en voici les formules ((C.17) est le prédicteur, et (C.18) le correcteur) :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{7257600} & (30277247f_n - 104995189f_{n-1} + 265932680f_{n-2} - \\ & 454661776f_{n-3} + 538363838f_{n-4} - 444772162f_{n-5} + 252618224f_{n-6} - \\ & 94307320f_{n-7} + 20884811f_{n-8} - 2082753f_{n-9}) + O(h^{10}) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{479001600} & (134211265f_{n+1} + 656185652f_n - 890175549f_{n-1} + \\ & 1446205080f_{n-2} - 1823311566f_{n-3} + 1710774528f_{n-4} - 1170597042f_{n-5} + \\ & 567450984f_{n-6} - 184776195f_{n-7} + 36284876f_{n-8} - 3250433f_{n-9} + O(h^{10})) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

L'utilisation de l'intégrateur d'Adams-Bashforth-Moulton nécessite une initialisation à l'aide d'un intégrateur à pas séparés pour connaître les 10 premiers termes. Dans la pratique j'ai utilisé pour cela l'intégrateur de Runge-Kutta à l'ordre 4 sur 100 itérations, avec un pas égal au dixième du pas utilisé avec l'intégrateur d'Adams. Ce pas est d'environ $1/80^e$ de la plus courte période du système.

C.4 L'algorithme de Bulirsch-Stoer

Cet algorithme est basé sur l'extrapolation de Richardson dont le principe est le suivant : la fonction construite \tilde{x} , approximation de x , est une fonction analytique dépendant du pas h vérifiant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{x}(t, h) = x(t) \quad (\text{C.19})$$

On cherche à connaître cette limite, non pas en travaillant directement sur \tilde{x} mais en approximant $\tilde{x}(t, h)$ à l'aide de fonctions simples dépendant de h et en extrapolant cette approximation jusque $h = 0$. Les fonctions simples choisies pour réaliser l'approximation peuvent être par exemple des fonctions polynomiales, mais les résultats semblent meilleurs avec des fonctions rationnelles (cf. Stoer & Bulirsch 1980 [189]).

La fonction \tilde{x} est calculée avec une méthode de point-milieu qui consiste à approximer au mieux $x(t)$ sur $[T, T + h]$ en découpant successivement l'intervalle en deux parties égales et à approximer la fonction par sa tangente sur ce petit intervalle, puis en redécoupant chaque demi-intervalle en 2 en réitérant le processus, jusqu'à obtenir une précision satisfaisante.

Dans cet algorithme dit de Bulirsch-Stoer, l'erreur est contrôlée à chaque itération et le pas adapté en fonction de l'erreur selon une méthode décrite par Deuffhard (1983 [48] et 1985 [49]). On a ainsi un intégrateur à pas variable, ce qui a l'intérêt de limiter le nombre d'itérations (et donc l'erreur numérique) sur les intervalles où la fonction recherchée est lisse, et de diminuer le pas à l'approche de singularités. Cet algorithme est actuellement très utilisé en mécanique céleste.

Conclusion

L'algorithme de Bulirsch-Stoer est le plus efficace des intégrateurs cités dans cette annexe, néanmoins son pas variable le rend incompatible avec l'algorithme d'analyse en fréquences. Par conséquent, j'ai utilisé l'intégrateur d'Adams à l'ordre 10 initialisé à l'aide de l'intégrateur de Runge-Kutta à l'ordre 4 comme décrit plus haut.

J'ai utilisé l'algorithme de Bulirsch-Stoer lorsque je n'avais pas besoin d'analyse en fréquences, à l'aide du code donné dans Numerical Recipes [165] qui laisse le choix à l'utilisateur d'extrapoler à l'aide de fonctions rationnelles ou de fonctions polynômiales. Dans les calculs dont j'avais besoin, l'approximation polynômiale s'est révélée plus efficace et c'est celle-là que j'ai utilisée. Des tests préalables ont été réalisés sur des fonctions sinusoidales, les mouvements à décrire en mécanique céleste étant périodiques.

L'utilisation de 2 intégrateurs numériques réputés efficaces et différents permet de s'assurer qu'une intégration numérique donne le même résultat avec l'un ou l'autre des intégrateurs. Une grande différence dans les résultats peut être le signe d'un comportement chaotique.

Annexe D

L'analyse en fréquences

Introduction

Tout système dynamique en mécanique céleste est descriptible au moyen d'une somme de termes périodiques ou quasi-périodiques, les périodes venant des différentes variables angulaires. Dans les cas où on ne connaît pas de façon explicite les éléments propres sous forme de variables canoniques actions-angles, il faut chercher à les identifier numériquement. La technique qui vient à l'esprit est l'utilisation des séries de Fourier.

Mais cette technique a une faible résolution. En effet, si on veut approximer la fonction complexe f par la fonction \tilde{f} somme d'une série de Fourier sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, on a :

$$\tilde{f} = \sum_{n \in \mathfrak{R}} c_n \exp(in \frac{2\pi}{T} t) \quad (\text{D.1})$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-in \frac{2\pi}{T} t) dt \quad (\text{D.2})$$

Le terme c_1 , de période T , est appelé fondamental, et la fréquence associée, $\frac{1}{T}$, fréquence fondamentale. Ainsi, toutes les fréquences intervenant dans la décomposition (D.1) sont multiples de la fréquence fondamentale qui est par conséquent la résolution fréquentielle de la décomposition. Cette technique a l'avantage de donner une décomposition directement sur une base orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(\bar{t}) dt \quad (\text{D.3})$$

La résolution de la décomposition en séries de Fourier est suffisante dans bon nombre d'applications en physique appliquée, cf. par exemple Reinhardt (2005 [168]) où l'étude de la propagation d'ondes acoustiques de diverses fréquences à travers des matériaux piézo-électriques est réalisée simplement à l'aide d'une Transformée de Fourier Rapide. D'une façon un peu plus générale, en traitement du signal, lorsque l'on souhaite analyser un signal périodique non sinusoïdal dont la période est connue, on choisit la période fondamentale comme la période du signal, ainsi le fondamental est bien connu, quant aux harmoniques, leur

précision importe moins puisqu'elles ont une amplitude inférieure. Par contre, en mécanique céleste, les fonctions à analyser dépendent de périodes généralement non commensurables entre elles car issues de causes indépendantes (perturbations par plusieurs corps différents). Ainsi, la décomposition en séries de Fourier ne convient pas.

D.1 L'algorithme NAFF (1992)

Il s'agit d'une méthode largement utilisée en mécanique céleste pour décomposer les solutions des mouvements des corps célestes en termes périodiques (cf. par exemple Vienne & Duriez 1995 [203] dans le cas des satellites de Saturne ou encore Nesvorný & Ferraz-Mello 1997 [150] pour la détection de chaos dans la dynamique d'astéroïdes). Cette méthode, mise au point par Laskar et al. (1992 [122]) est connue sous le nom de NAFF (Numerical Analysis of the Fundamental Frequency), la fréquence fondamentale dont il est question dans cet acronyme est la principale fréquence caractéristique du système, et non pas la fréquence fondamentale au sens de Fourier définie plus haut. Dans la suite, le vocable "fréquence fondamentale" sera au sens de Fourier, comme depuis le début de ce chapitre.

La première étape d'identification d'une fréquence est de procéder à une Transformée de Fourier rapide et de centrer l'analyse sur le maximum de cette transformée, car ce maximum est en principe proche d'une fréquence caractéristique du système. La détermination d'une fréquence isolée est assez aisée car elle maximise le produit scalaire (D.3) c'est-à-dire que la fonction

$$\phi(\omega) = \langle \exp(i\nu t), \exp(i\omega t) \rangle$$

est maximale pour $\omega = \nu$, plus précisément on a

$$\phi(\omega) = 2 \frac{\sin(\nu - \omega) \frac{T}{2}}{(\nu - \omega) T} \quad (\text{D.4})$$

La norme de ϕ est représentée Fig.D.1, on constate malheureusement des maxima secondaires assez importants susceptibles de gêner une automatisation de la recherche de fréquences (l'algorithme risque de confondre un maximum absolu avec un maximum local). On peut bien sûr travailler avec le carré de cette norme pour rendre les maxima secondaires de seulement 4% du maximum absolu, néanmoins les extrema locaux subsistent. La solution est d'utiliser un autre produit scalaire qui fait intervenir une fonction fenêtre χ :

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(\bar{t}) \chi(t) dt \quad (\text{D.5})$$

La fonction fenêtre se doit d'être positive et de norme unitaire. L'expérience montre que la fenêtre de Hanning (cf. par exemple Blackman & Tukey 1958 [22]) donne de bons résultats, ainsi :

$$\chi(t) = 1 + \cos \pi \frac{2t}{T} \quad (\text{D.6})$$

Dans ce cas, on obtient :

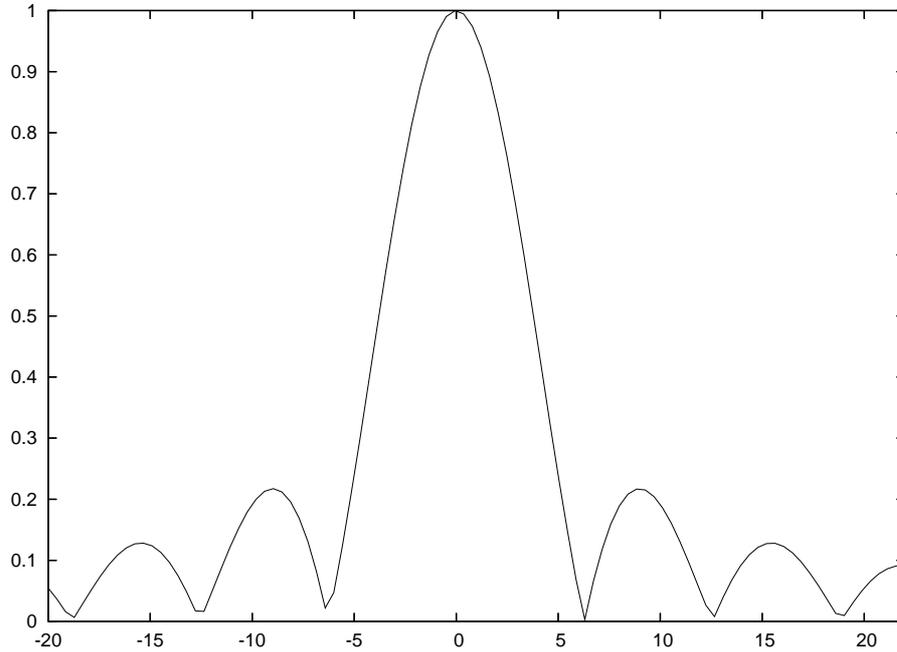


FIG. D.1 – Norme de la fonction ϕ (D.4). Ici le maximum est normalisé et en abscisses est la quantité $x = (\nu - \omega)T$, c'est-à-dire que le maximum correspond à $\nu = \omega$. On voit les maxima secondaires d'amplitude non négligeable (près du quart) par rapport au maximum principal.

$$\Phi_2(\omega) = \langle \exp(i\nu t), \exp(i\omega t) \rangle_2$$

soit

$$\Phi_2 = \frac{\sin(\nu - \omega)\frac{T}{2}}{(\nu - \omega)T} \frac{8\pi^2}{4\pi^2 - (\nu - \omega)^2 T^2} \quad (\text{D.7})$$

On constate (Fig.D.2 et D.3) que l'utilisation d'un fenêtrage de Hanning élargit le lobe principal mais surtout écarte et atténue les lobes secondaires, le risque de se tromper de maximum dans la détermination de la fréquence est donc nettement plus faible et s'avère en pratique automatisable. De plus, le risque de confusion avec une autre fréquence caractéristique qui réhausserait artificiellement un maximum secondaire diminue.

Par maximisation de la norme de la fonction ϕ_2 la fréquence ν_1 est identifiée, par conséquent le vecteur $\exp(-i\nu_1 t)$ est le premier vecteur de la base sur laquelle est projetée la fonction f afin de déterminer l'amplitude complexe associée à ce vecteur. Une fois la contribution de cette fréquence identifiée, elle est soustraite et le processus recommence pour déterminer la fréquence ν_2 . Cependant les vecteurs $\exp(-i\nu_1 t)$ et $\exp(-i\nu_2 t)$ ne sont pas orthogonaux, par conséquent l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est utilisé pour construire un deuxième vecteur orthogonal au premier.

Et ainsi de suite... Le processus s'arrête lorsque la norme de la fonction résiduelle, différence entre f et la somme des termes identifiés, ne diminue plus significativement avec l'identification de nouveaux termes.

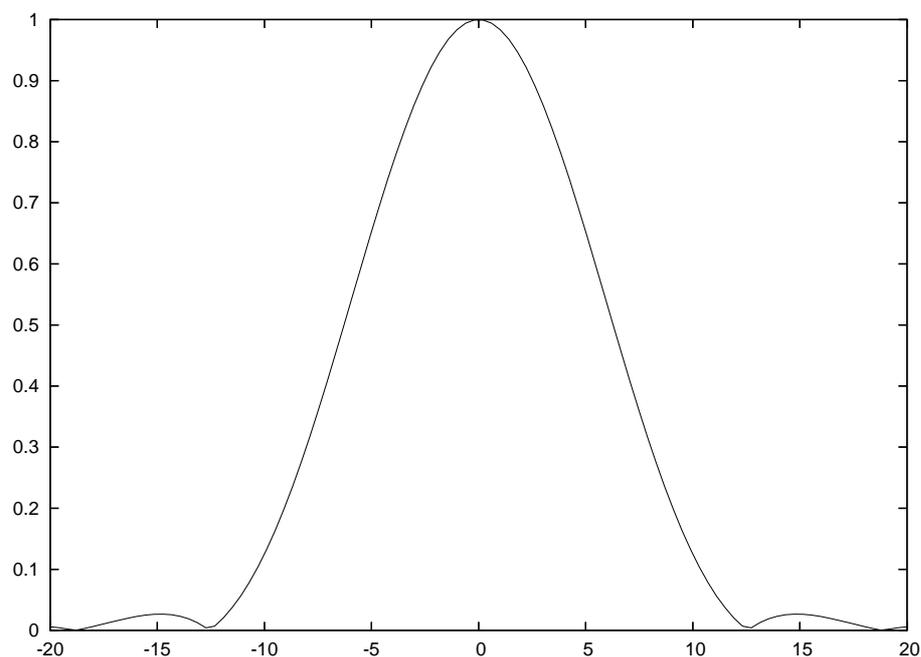


FIG. D.2 – Norme de la fonction ϕ_2 (D.7). Ici le maximum est normalisé et en abscisses est la quantité $x = (\nu - \omega)T$, c'est-à-dire que le maximum correspond à $\nu = \omega$. On remarque que les maxima secondaires ont une amplitude très faible par rapport au maximum absolu (le rapport est d'environ 2.5 %).

D.2 Redétermination des fréquences détectés

La méthode exposée précédemment donne de très bons résultats dans la recherche de résonances isolées. Mais lorsque 2 fréquences sont suffisamment proches l'une de l'autre, leur détermination est gênée par le décalage des maxima de la norme de Φ_2 (D.7). Lorsque l'une de ces 2 fréquences a une amplitude bien plus faible que l'autre, la fréquence la plus forte est déterminée la première sans être réellement perturbée. Elle est ensuite soustraite, et la deuxième fréquence peut être déterminée de façon assez précise. Le pire cas de figure se produit lorsque 2 fréquences proches ont des amplitudes comparables (cf. Fig.D.4).

Champenois & Vienne (1998, voir [34] ou encore [204]) ont fait avancer la résolution de ce problème en redéterminant des fréquences déjà détectées, partant du constat qu'une fréquence mal déterminée entraînait la détermination d'une fréquence très proche et d'amplitude bien plus faible, issue d'un résidu d'une mauvaise soustraction de la fréquence en question. Ils proposent 2 algorithmes : la redétermination terme à terme et la redétermination globale.

- la redétermination globale

Cette méthode consiste à chercher à redéterminer chaque fréquence déjà déterminée. Par exemple, si 10 fréquences sont déterminées lors d'une première analyse, alors l'algorithme cherchera à redéterminer ces fréquences une à une sur la fonction f de départ amputée de tous les termes déjà déterminés, à l'exception de celui que l'on cherche à redéterminer. L'algorithme fait ainsi une deuxième analyse globale de la fonction,

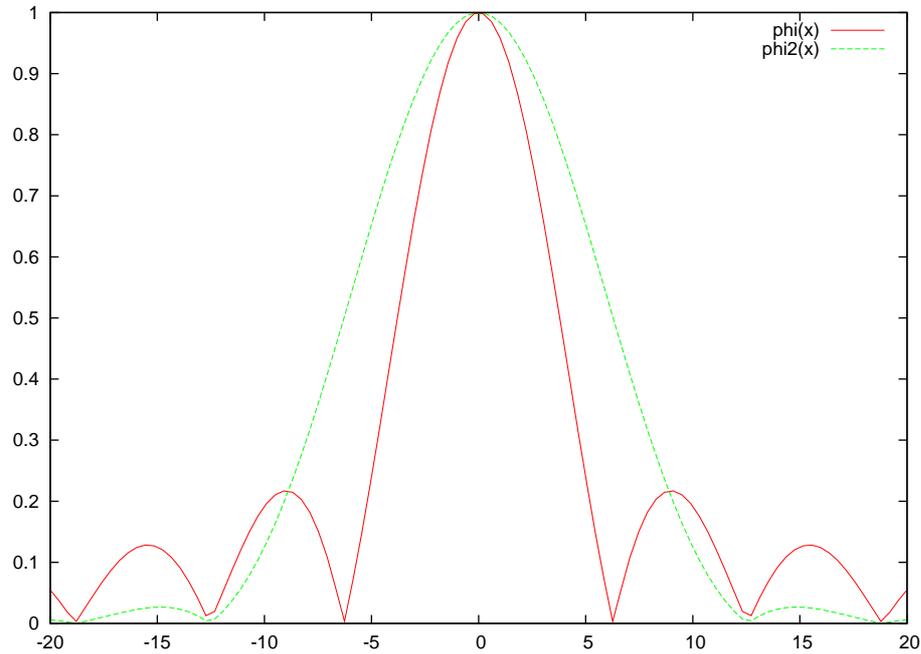


FIG. D.3 – Comparaison des fonctions ϕ (en rouge) et ϕ_2 (en vert). On peut craindre d'être gêné pour la précision de la détermination par le fait que le lobe principal de ϕ_2 soit plus large que celui de ϕ_1 . Le grand intérêt d'utiliser le fenêtrage de Hanning est l'écartement ainsi que la forte atténuation des lobes secondaires.

puis une troisième, etc... jusqu'à ce que le résidu entre la fonction f et la fonction reconstruite ne diminue plus significativement.

- la redétermination terme-à-terme

C'est un algorithme qui évite de redéterminer les termes déjà bien connus. Si la fonction f est composée de 10 fréquences, et que la onzième détermination donne une fréquence très proche d'une fréquence déjà déterminée, alors ces 2 fréquences sont considérées comme un seul terme, et cette fréquence est redéterminée selon le principe exposé au paragraphe précédent (redétermination de la fréquence sur la fonction f amputée des autres termes). L'algorithme s'arrête lorsque le résidu ne diminue plus significativement ou lorsque qu'un même terme est détecté 2 fois de suite.

Ces 2 algorithmes donnent des résultats équivalents. Les Tables D.1 à D.4 donnent quelques exemples de détermination de fréquences proches avec une fréquence fondamentale $\nu_0 = 1$, un intervalle de longueur $T = 2\pi$ et 4212 points (soit un pas $h = \frac{\pi}{2106}$). Ces déterminations ont été réalisées par Sylvain Champenois durant son travail de thèse. On peut constater que l'algorithme arrive à très bien déterminer des fréquences de même amplitude distantes de $1.5\nu_0$ (au bout de plus de 40 itérations), mais lorsque la séparation n'est plus que de ν_0 la détermination devient moins efficace. Lorsque 3 fréquences sont proches, aucune des 3 n'est déterminée avec une précision acceptable.

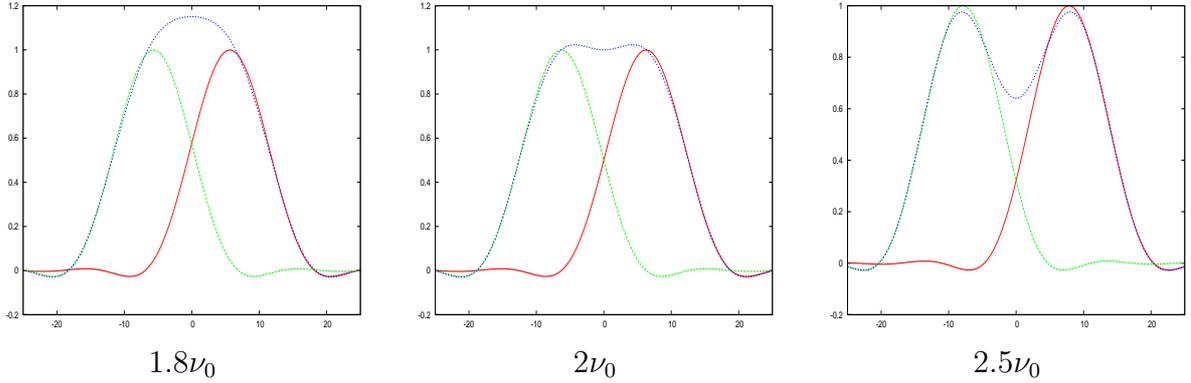


FIG. D.4 – Ces 3 figures représentent les fonctions Φ_2 associées à 2 fréquences proches, séparément et ajoutées, telles que les verrait l'algorithme d'analyse en fréquence. On constate un décalage de chaque maximum vers l'autre fréquence, voire, lorsque les 2 fréquences sont trop proches, la présence d'un maximum unique situé à mi-chemin des 2 fréquences.

$i \setminus \nu$	0	3
0	0.03	0.002
1	2×10^{-4}	2×10^{-5}
2	10^{-6}	10^{-7}
3	p.m.	p.m.

TAB. D.1 – Analyse de $f(t) = 1 + \exp(3i\nu_0 t)$. A chaque itération est donnée la précision de la détermination en fonction de ν_0 . p.m. est la précision machine.

D.3 La détermination de très hautes fréquences

Si on appelle h le pas de l'analyse, l'algorithme NAFF ne permet pas de détecter des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist $\frac{1}{2h}$ (le théorème de Shannon interdit en effet un échantillonnage inférieur à 2 points par période). Lorsqu'une telle fréquence ν est présente dans le système, elle est détectée sous forme de fréquence plus faible par le biais d'un effet stroboscopique qui donne $\nu' = \nu + \frac{k}{h}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $|\nu'| < \frac{1}{2h}$.

Laskar (2004 [124]) propose une méthode de détection de ces très hautes fréquences par une double analyse en fréquences à l'aide de 2 pas très proches h_1 et $h_2 = h_1 + \epsilon$ où ϵ est supposé vérifié la condition $|\nu\epsilon| < \frac{1}{2}$. Ces 2 analyses détectent les fréquences ν_1 et ν_2 vérifiant :

$$\nu_1 = \nu + \frac{k_1}{h_1} \quad (\text{D.8})$$

et

$$\nu_2 = \nu + \frac{k_2}{h_2} \quad (\text{D.9})$$

On a

$$(\nu_2 - \nu_1)h_2 = k_2 - k_1 \frac{h_2}{h_1}$$

$i \setminus \nu$	0	1.5
0	0.3	0.16
10	3×10^{-3}	3×10^{-3}
43	3×10^{-8}	p.m.
44	p.m.	p.m.

TAB. D.2 – Analyse de $f(t) = 1 + \exp(1.5i\nu_0 t)$

$i \setminus \nu$	0	1
0	0.5	0.3
10	0.07	0.07
100	2×10^{-4}	2×10^{-4}
200	5×10^{-7}	5×10^{-7}
218	10^{-7}	10^{-7}

TAB. D.3 – Analyse de $f(t) = 1 + \exp(i\nu_0 t)$

et

$$\nu_2 h_2 - \nu_1 h_1 = \nu \epsilon + k_2 - k_1$$

En appelant $[x]$ l'entier le plus proche de x (c'est-à-dire tel que $|[x] - x| < \frac{1}{2}$) on a, comme k_1 et k_2 sont des entiers :

$$[\nu_2 h_2 - \nu_1 h_1] = k_2 - k_1$$

et donc

$$k_1 = \frac{h_2}{h_1 - h_2} ((\nu_2 - \nu_1)h_2 - [\nu_2 h_2 - \nu_1 h_1]) \quad (\text{D.10})$$

On arrive ainsi à déterminer des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist. Il peut sembler curieux d'utiliser cette ruse au lieu de simplement diminuer le pas. En fait, dans nombre de problèmes de mécanique céleste, le spectre des fréquences se compose de 2 parties : les termes à courte période et ceux à longue période. Pour que les termes à longue période puissent être détectés de façon fiable, l'analyse en fréquences doit être réalisée sur un intervalle de temps égal à plusieurs fois la plus longue période du système. Si en plus le pas h est choisi suffisamment petit pour pouvoir détecter directement les plus courtes périodes, le temps de calcul risque d'être prohibitif ainsi que l'espace mémoire utilisé (car à chaque pas correspond le stockage en mémoire d'une valeur complexe, l'analyse en fréquences nécessitant de connaître l'ensemble des valeurs de la fonction f).

Conclusion

L'algorithme d'analyse en fréquences est depuis une quinzaine d'années largement utilisé, non seulement en dynamique de systèmes planétaires, mais aussi en dynamique galactique (cf. par exemple Wachlin & Ferraz-Mello 1998 [208] ou encore Merritt & Valluri 1999 [138]),

$i \setminus \nu$	0	1.2	1.8
0	0.4	0.04	0.6
65	10^{-4}	0.03	0.03
4000	10^{-3}	0.01	5×10^{-3}

TAB. D.4 – Anayse de $f(t) = 1 + \exp(1.2i\nu_0 t) + \exp(1.8i\nu_0 t)$

en physique atomique (Von Milczewski et al. 1997 [206]) et a aussi des applications dans le domaine des accélérateurs de particules (voir par exemple Steier et al. 2002 [188]).

Dans le cadre de mon étude de l'inégalité de De Haerdtl, je ne m'intéressais qu'aux termes à longue période, je n'ai donc pas eu besoin de corriger l'effet stroboscopique. De plus, je n'étais pas gêné par des fréquences proches, puisque je m'intéressais aux fréquences associées aux nœuds et péricentres des satellites galiléens, fréquences bien séparées les unes des autres. Par contre, un problème s'est présenté à moi en analysant des fonctions réelles (des demi-grands axes) : les fonctions réelles ont la particularité de présenter un spectre parfaitement pair (c'est-à-dire que si le spectre comprend un terme de fréquence ν , il comprend aussi un terme de fréquence $-\nu$ dont l'amplitude est complexe conjuguée, c'est-à-dire notamment de même module). L'algorithme de redétermination terme-à-terme détecte la fréquence de plus grande amplitude, et s'arrête lorsqu'une même fréquence est détectée 2 fois de suite. Or, lorsque doit être détectée une fréquence du spectre d'une fonction réelle, il n'y a pas un mais deux termes de plus forte amplitude. S'ils sont détectés alternativement, il y a boucle sans fin. J'ai donc dû ajouter une condition pour tenir compte du fait que la fonction puisse être réelle, en limitant le nombre de détections.

L'algorithme d'analyse en fréquence peut encore être amélioré pour tenir compte, par exemple, que dans le cas de fonctions réelles, chaque terme est perturbé par le terme de fréquence opposée. Dans la plupart des cas cette perturbation est négligeable mais dans le cas d'une fréquence très faible (donc d'une période très longue) l'algorithme ne détecte qu'un terme constant (de fréquence nulle). Si on sait par hypothèse qu'un terme, de fréquence par exemple $\nu = \frac{\omega_0}{5}$, est perturbé par le terme de fréquence $-\nu$, il est envisageable d'essayer de le détecter. On peut aussi améliorer l'efficacité de l'algorithme en utilisant la symétrie du spectre d'une fonction réelle pour ne déterminer que la moitié des fréquences.

Une méthode alternative à celle de Champenois & Vienne pour détecter des fréquences proches a été publiée par Šidlichovský & Nesvorný (1997 [180]). Il s'agit d'une méthode qui corrige les fréquences de façon analytique sous l'effet des autres termes périodiques. Elle semble donner des résultats acceptables lorsque les fréquences sont distantes d'une fois la fréquence fondamentale.

Annexe E

Le théorème KAM

Le théorème KAM, élaboré par les travaux de Kolmogorov (1954 [106]), Arnold (1963 [16]) et Moser (1962 [145]), est fondamental dans la compréhension de la dynamique de système intégrables et quasi-intégrables, car il donne des résultats sur leur stabilité. En voici l'énoncé :

Soit, en dimension N , un système hamiltonien quasi-intégrable de la forme

$$H(p, q) = H_0(p) + \epsilon H_1(p, q) \quad (\text{E.1})$$

où p et q sont des vecteurs de variables action-angles canoniques ($p \in \mathbb{R}^N, q \in [0 : 2\pi[^N$), soit p_0 un point de l'espace des actions tel que

- $\omega_0 = \text{grad}_p H_0(p_0)$ vérifie la condition diophantienne, à savoir qu'il existe $(\gamma, \tau) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^N$ non nul on ait

$$|k \cdot \omega_0(p_0)| > \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad (\text{E.2})$$

- ce qui signifie concrètement que ω_0 , vecteur des fréquences, ne doit pas être résonant
- le hamiltonien H_0 ne doit pas être localement dégénéré en p_0 , c'est-à-dire que le déterminant de la matrice hessienne (ou le hessien) doit être non nul, ce qui s'écrit mathématiquement ainsi :

$$\det \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) (p_0) \neq 0 \quad (\text{E.3})$$

Alors, si la perturbation n'est pas trop importante (ϵ pas trop élevé) le système admet des tores invariants proches des tores (p_0, ω_0) du système non perturbé H_0 .

Dans la pratique, si on part du hamiltonien H_0 et que l'on augmente peu à peu la perturbation en augmentant ϵ , on observe progressivement la déformation puis la destruction des tores invariants, dits tores KAM. Il est notamment intéressant de situer la destruction du dernier tore KAM, ce qui correspond à la transition de l'ordre vers le chaos.

Annexe F

Quelques communications

F.1 Publications à comité de lecture

- Noyelles B., Vienne A. & Descamps P., 2003, 'Astrometric reduction of lightcurves observed during the PHESAT95 campaign of Saturnian satellites', A&A, 401, 1159
- Vienne A., Noyelles B. & Amossé A., 2003, 'Observation of 13 mutual events of Jovian satellites performed at Lille Observatory', A&A, 410, 343

F.2 Réunions internationales

- Noyelles B., Lainey V. & Vienne A., 2004, 'Observation and reduction of mutual events in the solar system', IAU Colloquium 196, Transits of Venus : New Views of the Solar System and Galaxy, Preston, UK
- Noyelles B. & Vienne A., 2004, 'The $k:k+4$ resonances in planetary systems', IAU Colloquium 197, Dynamics of Populations in Planetary Systems, Belgrade, Serbie-et-Monténégro
- Noyelles B. & Vienne A., 2005, 'Dynamical history of Ganymede and Callisto', DPS Meeting 37, Cambridge, UK
- Noyelles B. & Vienne A., 2005, 'Stochastic behaviour around the 7:3 inequality between Ganymede and Callisto', CELMEC IV, San Martino al Cimino, Italie

F.3 Communications diverses

- Vienne A., Noyelles B. & Lainey V., 2004, 'Mutual events in the jovian and saturnian systems', Semaine de l'Astrophysique Française
- Noyelles B., 'Phénomènes mutuels de satellites naturels', séminaire donné le 1^{er} juillet 2004 à l'Observatoire de Bordeaux
- Noyelles B., 'Une bien étrange inégalité dans le système des Galiléens', séminaire donné le 23 mai 2005 à l'Observatoire de Paris
- Noyelles B. & Vienne A., 2005, 'Resonance 3 : 7 in the Ganymede-Callisto system', Semaine de l'Astrophysique Française

Bibliographie

- [1] Aksnes K. & Franklin F.A., 1978, 'Mutual phenomena of Saturn's satellites in 1979-1980', *Icarus*, 34, 194
- [2] Aksnes K., Franklin F.A., Millis R. et al., 1984, 'Mutual phenomena of the Galilean and Saturnian satellites in 1973 and 1979/1980', *AJ*, 89, 280
- [3] Aksnes K. & Franklin F.A., 2001, 'Secular Acceleration of Io Derived from Mutual Satellite Events', *AJ*, 122, 2734
- [4] Allan R.R., 1969, 'Evolution of Mimas-Tethys commensurability', *AJ*, 74, 497
- [5] Anderson J.D., Sjogren W.-L. & Schubert G., 1996, 'Galileo gravity results and the internal structure of Io', *Science*, 272, 709
- [6] Anderson J.D., Jacobson R.A., Lau E.L. et al., 2001, 'Io's gravity field and interior structure', *J.Geophys.Res.*, 106, 32963
- [7] Anderson J.D., Johnson T.V., Schubert G. et al., 2005, 'Amalthea's Density Is Less Than That of Water', *Science*, 308, 1291
- [8] Arlot J.-E., 1982, 'New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean Satellites of Jupiter', *A&A*, 107, 305
- [9] Arlot J.-E., Bernard A., Merlin P. et al., 1982, 'The results of the PHEMU79 observations of phenomena common to Galilean satellites of Jupiter in 1979', *A&A*, 111, 151
- [10] Arlot J.-E., Thuillot W., Barroso J. Jr et al., 1992, 'A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter made in 1985 during the PHEMU85 campaign', *A&AS*, 92, 151
- [11] Arlot J.-E. & Thuillot W., 1993, 'Eclipses and mutual events of the first eight Saturnian satellites during the 1993-1996 period', *Icarus*, 105, 427
- [12] Arlot J.-E., Ruatti C., Thuillot W. et al., 1997, 'A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites made in 1991 during the PHEMU91 campaign', *A&AS*, 125, 399
- [13] Arlot J.-E., 2002, 'Predictions of the mutual events of the Galilean Satellites of Jupiter occurring in 2002-2003', *A&A*, 383, 719
- [14] Arlot J.-E., Lainey V. & Thuillot W., 2005, 'Mutual events of the satellites of Uranus calculated with a new dynamical model', *BAAS*, 37, 5813
- [15] Arlot J.-E., Thuillot W., Ruatti C. et al., 2005, 'The PHEMU97 catalogue of observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter', *A&A*, sous presse

- [16] Arnold V.I., 1963, 'Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the conservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian.', *Russian Math. Surv.*, 18, 9
- [17] Astakhov S. A., Burbanks A. B., Wiggins S. & Farrelly D., 2003, 'Chaos-assisted capture of irregular moons', *Nature*, 423, 264
- [18] Barnard E.E., 1892, 'Discovery of a Fifth Satellite of Jupiter', *PASP*, 25, 199
- [19] Bec-Borsenberger A. & Rocher P., 1982, 'A comparison of the observation and ephemeris of Phoebe', *AASS*, 50, 423
- [20] Benettin G., Galgani L., Giorgili A. & Strelczyn J.M., 1980, 'All Lyapunov characteristic exponents are effectively computable', *Meccanica*, March, 21
- [21] Bevilacqua R., Menchi O., Milani A. et al., 1980, 'Resonances and close approaches. I - The Titan-Hyperion case', *Moon and Planets*, 22, 141
- [22] Blackman R.B. & Tukey J.W., 1958, 'The Measurement of Power Spectra', Dover, New-York
- [23] Bois E., Rambaux N., Kiseleva-Eggleton L. & Pilat-Lohinger E., 2003, 'Conditions of Dynamical Stability for the HD 160691 Planetary System', *ApJ*, 598, 1312
- [24] Brezinski C., 'Analyse numérique discrète', Publications du Laboratoire de calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille
- [25] Brinkmann R.T., Millis R.L., 1973, *Sky and Telescope*, 45,93-95
- [26] Brouwer D. & Clemence G.M., 1961, in *Planets and Satellites*, Kuiper and Middlehurst ed., Chicago University Piers, p.88
- [27] Buratti B. & Veverka J., 1983, 'Voyager photometry of Europa', *Icarus*, 55, 93-110
- [28] Buratti B. & Veverka J., 1984, 'Voyager photometry of Rhea, Dione, Tethys, Enceladus and Mimas ', *Icarus*, 58, 254-264
- [29] Burns J.A., 1986, in *Satellites*, Burns and Matthews ed., Arizona, p.1
- [30] Callegari Jr N. & Yokoyama T., 2005, 'Dynamics of Two Satellites in the 2/1 Mean-Motion Resonance : application to the Enceladus-Dione system', *BAAS*, 37, 727
- [31] Campbell J.K. & Synnott S.P., 1985, 'Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data', *AJ*, 1549, 364
- [32] Campbell J.K. & Anderson J.D., 1989, 'Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data', *AJ*, 97, 1485
- [33] Canup R.M. & Ward W.R., 2002, 'Formation of the Galilean Satellites : Conditions of Accretion', *AJ*, 124, 3404
- [34] Champenois S., 1998, 'Dynamique de la résonance entre Mimas et Téthys, premier et troisième satellites de Saturne', Thèse, Observatoire de Paris
- [35] Champenois S. & Vienne A., 1999, 'The Role of Secondary Resonances in the Evolution of the Mimas-Tethys System', *Icarus*, 140, 106
- [36] Champenois S. & Vienne A., 1999, 'Chaos and secondary resonances in the Mimas-Tethys system', *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*, 74, 111

- [37] Chirikov B.V., 1979, 'A universal instability of many-dimensional oscillator systems', *Physics Reports*, 52, 263
- [38] Christou A.A., 2005, 'Mutual events of the uranian satellites 2006-2010', *Icarus*, 178, 171
- [39] Cincotta P.M. & Simó C., 2000, 'Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I', *A&AS*, 147, 205
- [40] Cincotta P.M. & Giordano C.M., 2001, 'Global dynamics through the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO). Preprint de l'Observatoire de la Plata, Argentine
- [41] Colombo G., Franklin F.A. & Shapiro I.I., 1974, 'On the formation of orbit-orbit resonance of Titan and Hyperion', *AJ*, 79, 61
- [42] Consolmagno G., 1981, 'An Io thermal model with intermittent volcanism.' in *Lunar and Planetary science, Vol. XII*, Lunar and Planetary Institute, Houston, 175
- [43] De Haerdtl E., 1892, 'Sur une inégalité du quatrième ordre provenant de l'action mutuelle des deux derniers satellites de Jupiter', *Bull. Astron.*, 9, 2121
- [44] de Sitter W., 1928, *Leiden Annals*, 16, 92
- [45] Dermott S.F., Malhotra R. & Murray C.D., 1988, 'Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems - A chaotic route to melting Miranda?', *Icarus*, 76, 295
- [46] Dermott S.F. & Thomas P.C., 1994, 'The determination of the mass and mean density of Enceladus from its observed shape', *Icarus*, 109, 241
- [47] Descamps P., 1992, 'Étude des effets de surface sur la réduction astrométrique des observations de phénomènes des satellites galiléens de Jupiter', *Thèse, Observatoire de Paris*
- [48] Deuffhard P., 1983, *Numerische Mathematik*, 41, 399
- [49] Deuffhard P., 1985, *SIAM Review*, 27, 505
- [50] Devyatkin A.V. and Miroshnichenko A.S., 'Photometric Observations of Mutual Events in Saturn's System of Regular Satellites in 1995', 2001, *Astronomy Letters*, 27, 193
- [51] Dobrovolskis A.R. & Lissauer J.J., 2004, 'The fate of ejecta from Hyperion', *Icarus*, 169, 462
- [52] Dollfus A., 1967, 'Un nouveau satellite de Saturne', *Compt. Rend. Acad. sci.*, 264, 822
- [53] Dourneau G., 1982, 'Observation of 2 mutual events involving the satellites of Saturn in April 1980', *A&A*, 112,73
- [54] Dourneau G., 1987, 'Observations et études du mouvement des huit premiers satellites de Saturne', *Thèse, Bordeaux*
- [55] Dourneau G., 1993, 'Orbital elements of the eight major satellites of Saturn determined from a fit of their theories of motion to observations from 1886 to 1985', *A&A*, 267, 292
- [56] Dourneau G., Noyelles B. et al., en préparation
- [57] Duriez L., 1978, 'Poisson's theorem in heliocentric variables - Conditions for the application of this theorem concerning the invariability of the major axes of planetary orbits to second order in the masses', *A&A*, 68, 199

- [58] Duriez L., 1979, 'Approche d'une théorie générale planétaire en variables elliptiques héliocentriques', Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille
- [59] Duriez L., 1982, 'General planetary theory extended to the case of resonance and application to the Galilean satellite system of Jupiter', *Celes. Mech.*, 26, 231
- [60] Duriez L., 1990, 'Librations de grande amplitude dans le système de satellites de Saturne', in *Nouveaux développements en planétologie dynamique*, ed. D. Benest, C. Froeschlé & J.M. Petit, Nice, 105
- [61] Duriez L. & Vienne A., 1991, 'A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. I - Equations and method of resolution', *A&A*, 243, 263
- [62] Duriez L. & Vienne A., 1997, 'Theory of motion and ephemerides of Hyperion', *A&A*, 324, 366
- [63] Duriez L., 2000, *Notes Scientifiques et Techniques de l'IMCCE*, S076, 7
- [64] Duriez L., 2002, 'Cours de Mécanique Céleste', USTL
- [65] Emelianov N., 2005, 'The mass of Himalia from the perturbations on other satellites', *A&A*, 438, 33
- [66] Farinella P., Milani A., Nobili A.M. et al., 1983, 'Hyperion - Collisional disruption of a resonant satellite', *Icarus*, 54, 353
- [67] Farinella P., Marzari F. & Matteoli S., 1997, 'The Disruption of Hyperion and the Origin of Titan's Atmosphere', *AJ*, 113, 2312
- [68] Ferraz-Mello S. & Dvorak R., 1987, 'Chaos and secular variations of planar orbits in 2 :1 resonance with Dione', *A&A*, 179, 304
- [69] French R.G., McGhee C.A., Dones L. & Lissauer J.J., 2003, 'Saturn's wayward shepherds : the peregrinations of Prometheus and Pandora', *Icarus*, 162, 143
- [70] Froeschlé C. & Lega E., 2000, 'On the Structure of Symplectic Mappings. The Fast Lyapunov Indicator : a Very Sensitive Tool', *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*, 78, 167
- [71] Froeschlé C., Guzzo M. & Lega E., 2000, 'Graphical evolution of the Arnold web : from order to chaos', *Science*, 289, 2108
- [72] Froeschlé C., Lega E. & Gonczi R., 1997, 'Fast Lyapunov Indicators. Application to Asteroidal Motion', *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*, 67, 41
- [73] Fukushima T., 1990, 'System of astronomical units and constants', *IAU-WGRS/SGAC Circ.* 13
- [74] Gavrilov S.V. & Zharkov V.N., 1977, 'Love numbers of the giant planets', *Icarus*, 32, 443
- [75] Geissler P.E., McEwen A.S., Keszthelyi L. et al., 1999, 'Global Color Variations on Io', *Icarus*
- [76] Gladman B., Kavelaars J.J., Holman M. et al., 2001, 'Discovery of 12 satellites of Saturn exhibiting orbital clustering', *Nature*, 412, 163
- [77] Goldreich P., 1965, 'An explanation of the frequent occurrence of commensurable mean motions in the solar system', *MNRAS*, 130, 159
- [78] Goldstein S.J. & Jacobs K.C., 1986, 'The contraction of Io's orbit', *A&A*, 92, 199

- [79] Goldstein S.J. & Jacobs K.C., 1995, 'On the Evolution of the Galilean Satellites of Jupiter', *AAS*, 27, 1448
- [80] Goldstein S.J. & Jacobs K.C., 1995, 'A Recalculation of the Secular Acceleration of Io', *AJ*, 110, 3054
- [81] Gomes R., 1997, 'A deeper look at resonance trapping', *A&A*, 321, 960
- [82] Goździewski K., Bois E., Maciejewski A.J. & Kiseleva-Eggleton L., 2001, 'Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion', *A&A*, 378, 569
- [83] Greenberg R., 1981, 'Tidal evolution of the Galilean satellites - A linearized theory', *Icarus*, 46, 415
- [84] Greenberg R., Goldstein S.J. & Jacobs K.C., 1986, 'Orbital acceleration and the energy budget in the galilean satellite system', *Nature*, 323, 789
- [85] Harper D. & Taylor D.B., 1993, 'The orbits of the major satellites of Saturn', *A&A*, 268, 326
- [86] Henrard J., 1983, proceedings de The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites, Université de Sao Paulo, 2, 233
- [87] Henrard J., 1983, 'Orbital evolution of the Galilean satellites - Capture into resonance', *Icarus*, 53, 55
- [88] Henrard J. & Lemaître A., 'A second fundamental model for resonance', 1983, *Celest. Mech.*, 30, 197
- [89] Henrard J. & Lemaître A., 1983, 'A mechanism of formation for the Kirkwood gaps', *Icarus*, 55, 482
- [90] Henrard J. & de Vleeschauwer A., 1988, 'Sweeping through a second order resonance', *Celest. Mech.*, 43, 99
- [91] Hestroffer D. & Magnan C., 1998, 'Wavelength dependency of the Solar limb darkening', *A&A*, 333, 338
- [92] Holman M.J. & Murray N.W., 1996, 'Chaos in High-Order Mean Resonances in the Outer Asteroid Belt', *AJ*, 112, 1278
- [93] Innes R.T.A., 1909, 'Jupiter's Galilean satellites, observations of 1908', *MNRAS*, 69, 512
- [94] Innes R.T.A., 1915, *Union Obs. Circ.*, 1, 180
- [95] Jacobson R.A., 2000, 'The Orbits of the Outer Jovian Satellites', *AJ*, 120, 2679
- [96] Jacobson R.A., 2001, 'The Gravity Field of the Jovian System and the Orbits of the Regular Jovian Satellites', *BAAS*, 33, 1039
- [97] Jacobson R. A., 2004, 'The Orbits of the Major Saturnian Satellites and the Gravity Field of Saturn from Spacecraft and Earth-based Observations', *AJ*, 128, 492
- [98] Jacobson R. A., Antreasian P.G., Bordi J.J. et al., 2005, 'The Gravity Field of the Saturnian System and the Orbits of the Major Saturnian Satellites', *BAAS*, 37, 729
- [99] Jarvis K.S., Vilas F., Larson S.M. & Gaffey M.J., 2000, 'Are Hyperion and Phoebe Linked to Iapetus?', *Icarus*, 146, 125
- [100] Jefferys W.H. & Ries L.M., 1979, 'Theory of Mimas and Tethys', *AJ*, 84, 1778

- [101] Jonckheere R., 1911, 'Stars, Double and multiple, Measures d'étoiles doubles à l'Observatoire de Lille', MNRAS, 72, 156
- [102] Karch M. & Dvorak R., 1988, 'New results on the possible chaotic motion of Enceladus', Cel. Mech., 43, 361
- [103] Kargel J.S. & Pozio S., 1996, 'The Volcanic and Tectonic History of Enceladus', Icarus, 119, 385
- [104] Kaula W.M., 1964, 'Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution', Rev. Geophys. Space Phys., 2, 467
- [105] Khurana K.K., Kivelson M.G. & Russell C.T., 1998, Nature, 397, 777
- [106] Kolmogorov A.N., 1954, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98, 527, traduction anglaise dans Lectures Notes in Physics, 93, 51, Springer-Verlag, Berlin
- [107] Kozai Y., 1955, Publ. of the Astr. Soc. of Japan, 7, 176
- [108] Kozai Y., 1957, 'On the astronomical constants of Saturnian satellites System', Ann. Tokyo Astron. Obs., V, 73, 1
- [109] Kuiper G.P., 1944, 'Titan : A satellite with an atmosphere', ApJ, 100, 378
- [110] Lainey V., 2002, 'Théorie Dynamique Des Satellites Galiléens', Thèse, Observatoire de Paris
- [111] Lainey V., Duriez L. & Vienne A., 2004, 'New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. I. Numerical integration of elaborated equations of motion', A&A, 420, 1171
- [112] Lainey V., Arlot J.-E. & Vienne A., 2004, 'New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. II. Fitting the observations', A&A, 427, 371
- [113] Lainey V. & Tobie G., 2005, 'New constraints on Io's and Jupiter's tidal dissipation', Icarus, 179, 485
- [114] Landau L. & Lifchitz E., 1960, 'Mécanique', Éditions en langues étrangères, Moscou
- [115] Laplace P.S., 1788, 'Théorie des satellites de Jupiter', Mém. Acad. roy. sci.
- [116] Laplace P.S., 1795, 'Théorie des satellites de Jupiter', oeuvres complètes de Laplace, tome XI, Gauthier-Villars, Paris
- [117] Larson S.M., Fountain J.W., Smith B.A. & Reitsema H.J., 1981, 'Observations of the Saturn E ring and a new satellite', Icarus, 47, 288
- [118] Laskar J., 1984, 'Théorie générale planétaire : éléments orbitaux des planètes sur 1 million d'années', Thèse, Observatoire de Paris
- [119] Laskar J., 1987, 10th European Regional Astronomy Meeting of the IAU, 95
- [120] Laskar J., 1988, 'Secular evolution of the solar system over 10 million years', A&A, 198, 341
- [121] Laskar J., 1990, 'The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones', Icarus, 88, 266
- [122] Laskar J., Froeschlé C. & Celletti A., 1992, 'The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping.', Physica D, 56, 253

- [123] Laskar J., 1993, 'Frequency analysis for multidimensional systems', *Physica D*, 67, 257
- [124] Laskar J., 2004, *Notes Scientifiques et Techniques de l'IMCCE S081*, 29
- [125] Lazutkin V.F., 1973, *Math. USSR Izis*, 7, 185
- [126] Lecacheux J., Laques P., Vapillon L. et al., 1980, 'A new satellite of Saturn - Dione B', *Icarus*, 43, 111
- [127] Lee M.H. & Peale S.J., 2000, 'The Puzzle of the Titan-Hyperion 4 :3 Orbital Resonance', *BAAS*, 32, 860
- [128] Lega E. & Froeschlé C., 2001, 'On the relationship between Fast Lyapunov Indicator and periodic orbits for symplectic mappings', *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*, 81, 129
- [129] Lemaître A., 1984, 'High-order resonances in the restricted three-body problem', *Celest. Mech.*, 32, 109
- [130] Lieske J.H., 1973, 'On the 3-7 Commensurability between Jupiter's outer Two Galilean Satellites', *A&A*, 27, 59
- [131] Lieske J.H., 1974, 'A Method of Revitalizing Sampson's Theory of the Galilean Satellites', *A&A*, 31, 137
- [132] Lieske J.H., 1977, 'Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites', *A&A*, 56, 333
- [133] Lieske J.H., 1980, 'Improved ephemerides of the Galilean satellites', *A&A*, 82, 340
- [134] Lieske J.H., 1987, 'Galilean satellite evolution - Observational evidence for secular changes in mean motions', *A&A*, 176, 146
- [135] Lieske J.H., 1998, 'Galilean satellite ephemerides E5', *A&AS*, 129, 205
- [136] Malhotra R., 1991, 'Tidal origin of the Laplace resonance and the resurfacing of Ganymede', *Icarus*, 94, 399
- [137] Matthews R.A.J., 1992, 'The darkening of Iapetus and the origin of Hyperion', *Q.J.R.astr.Soc.*, 33, 253
- [138] Merritt D. & Valluri M., 1999, 'Resonant Orbits in Triaxial Galaxies', *AJ*, 118, 1177
- [139] Mignard F., 1980, 'The evolution of the lunar orbit revisited. II', *M&P*, 23, 185
- [140] Milani A. & Nobili A.M., 1992, 'An example of stable chaos in the Solar System', *Nature*, 357, 569
- [141] Minnaert M., 1961, in *Planets and Satellites*, ed. G.P.Kuiper & B.M. Middlehurst (The University of Chicago Press), 213
- [142] Morabito L.A., Synnott S.P., Kupferman P.N. & Collins S.A., 1979, 'Discovery of currently active extraterrestrial volcanism', *Science*, 204, 972
- [143] Morbidelli A., 1994, 'Resonant structure and diffusion in hamiltonian systems' in *Chaos and Diffusion*, D. Benest & C. Froeschlé ed.
- [144] Morbidelli A., 2002, 'Modern Celestial Mechanics, aspects of Solar System dynamics', Taylor & Francis
- [145] Moser J., 1962, 'On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus.', *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys.*, 2, 1
- [146] Munk W.H. & MacDonald G.J.F., 1960, *The Rotation of the Earth*, Cambridge Univ. Press, London

- [147] Musotto S., Varadi F., Moore W. & Schubert G., 2002, 'Numerical Simulations of the Orbits of the Galilean Satellites', *Icarus*, 159, 200
- [148] Nakamura T., 'Observations of mutual phenomena of Galilean satellites', 1, STI(1974)
- [149] Neff J.S. et al., Humm D.C., Bergstrahl J.T. et al., 1984, 'Absolute spectrophotometry of Titan, Uranus, and Neptune 3500-10,500 Å', *Icarus*, 60, 221
- [150] Nesvorný D. & Ferraz-Mello S., 1997, 'Chaotic diffusion in the 2/1 asteroidal resonance. an application of the frequency map analysis', *A&A*, 320, 672
- [151] Nicholson P.D. & Matthews K., 1991, 'Near-infrared observations of the Jovian ring and small satellites', *Icarus*, 93, 331
- [152] Noyelles B., Vienne A. & Descamps P., 2003, 'Astrometric reduction of lightcurves observed during the PHESAT95 campaign of Saturnian satellites', *A&A*, 401, 1159
- [153] Noyelles B. & Vienne A., 2004, 'The $k:k+4$ resonances in planetary systems', IAU Colloquium 197, Dynamics of Populations in Planetary Systems, Belgrade, Serbie-et-Monténégro
- [154] Oberti P. & Vienne A., 2003, 'An upgraded theory for Helene, Telesto, and Calypso', *A&A*, 397, 353
- [155] Oseledec V.I., 1968, 'The multiplicative ergodic theorem : the Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems', *Trans. Mosc. Soc.*, 19, 197
- [156] Peale S.J. & Cassen P., 1978, 'Contribution of tidal dissipation to lunar thermal history', *Icarus*, 36, 245
- [157] Peale S.J., Cassen P. & Reynolds R.T., 1979, 'Melting of Io by tidal dissipation', *Science*, 203, 892
- [158] Peale S.J., Cassen P. & Reynolds R.T., 1980, 'Tidal dissipation, orbital evolution, and the nature of Saturn's inner satellites', *Icarus*, 43, 65
- [159] Peale S.J. & Lee M.H., 2002, 'A Primordial Origin of the Laplace Relation Among the Galilean Satellites', *Science*, 298, 593
- [160] Poincaré H., 1892, 'Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste', ed. Gauthier-Villars et fils
- [161] Poincaré H., 1902, 'Sur les planètes du type d'Hécube', *Bull. Astron.*, 19, 289
- [162] Poirier J.P., Boloh L. & Chambon P., 1983, 'Tidal dissipation in small viscoelastic ice moons - The case of Enceladus', *Icarus*, 55, 218
- [163] Porco C. et al., 2004, 'Satellites and rings of Saturn', IAU Circular 8432, 1
- [164] Poulet F. & Sicardy B., 2001, 'Dynamical evolution of the Prometheus-Pandora system', *MNRAS*, 322, 343
- [165] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. & Flannery B.P., 1994, 'Numerical Recipes in Fortran', Second Edition reprinted with corrections, Cambridge University Press
- [166] Rapaport M., 1973, 'On the Analytical Theory of Saturn's Satellites, Encelade-Dione', *A&A*, 22, 179
- [167] Raulin F., Coll P., Coscia D. et al., 1998, *Adv. Space Res.*, 22, 353

- [168] Reinhardt A., 2005, 'Simulation, Conception et Réalisation de Filtres à Ondes de Volume dans des Couches Minces Piézoélectriques', Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté
- [169] Rocher P. & Chapront J., 1996, 'Observations and ephemerides of the faint satellites of Jupiter', *A&A*, 311, 710
- [170] Sagnier J.-L., 1975, 'A new theory of the motions of the Galilean satellites of Jupiter', *Celes. Mech.*, 12, 19
- [171] Sampson R.A., 1921, 'Theory of the four great satellites of Jupiter', *Mem. Roy. Astron. Soc.*, 63, 1
- [172] Sarlat J.M., 1990, 'Perturbations des éléments orbitaux d'un satellite sous l'effet des marées', rapport de stage de DEA, Observatoire de Paris
- [173] Schubert G., Zhang K., Kivelson M.G. & Anderson J.D., 1996, 'The magnetic field and internal structure of Ganymede', *Nature*, 384, 544
- [174] Schwartz M.P., 1981, 'Clearing the Cassini division', *Icarus*, 48, 339
- [175] Seidelmann P.K., Harrington R.S., Pascu D. et al., 1981, 'Saturn satellite observations and orbits from the 1980 ring plane', *Icarus*, 47
- [176] Seidelmann P.-K., Abalakin V.K., Bursa M. et al, 2002, 'Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites : 2000', *Celes. Mech.*, 82, 83
- [177] Sheppard S.S. & Jewitt D.C., 2003, 'An abundant population of small irregular satellites around Jupiter', *Nature*, 423, 261
- [178] Showalter M.R., 1991, 'Visual detection of 1981 S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap', *Nature*, 351, 709
- [179] Showman A.P. & Malhotra R., 1997, 'Tidal Evolution into the Laplace Resonance and the Resurfacing of Ganymede', *Icarus*, 127, 93
- [180] Šidlichovský M. & Nesvorný D., 1997, 'Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids', *Cel. Mech. & Dyn. Astr.*, 65, 137
- [181] Simon J.-L., Bretagnon P., Chapront J. et al., 1994, 'Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets', *A&A*, 282, 663
- [182] Sinclair A.T., 1972, 'On the origin of the commensurabilities amongst the satellites of Saturn', *MNRAS*, 160, 169
- [183] Sinclair A.T., 1977, 'The orbits of Tethys, Dione, Rhea, Titan and Iapetus', *MNRAS*, 180, 447
- [184] Sinton W.M., Tokunaga A.T., Becklin E.E. et al., 1980, 'Io - Ground-based observations of hot spots', *Science*, 210, 1015
- [185] Sohl F., Spohn T., Breuer D. & Nagel K., 2002, 'Implications from Galileo Observations on the interior structure and chemistry of the Galilean satellites', *Icarus*, 157, 104
- [186] Soma M. and Nakamura T., 1982, *Tokyo Astronomical Bulletin Second Series*, 267, 3039
- [187] Souillart M., 1880, 'Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter', *Mem. Roy. Astron. Soc.*, XLV

- [188] Steier C., Robin D., Nadolski L. et al., 2002, *Phys. Rev. E*, 65, (056506)
- [189] Stoer J. & Bulirsch R., 1980, 'Introduction to Numerical Analysis', Springer Verlag
- [190] Strugnell P.R. & Taylor D.B., 1990, 'A catalogue of ground-based observations of the eight major satellites of Saturn, 1874-1989', *A&AS*, 83, 289
- [191] Synnott S.P., 1980, '1979J2 - Discovery of a previously unknown Jovian satellite', *Science*, 210, 786
- [192] Thuillot W., Arlot J.-E., Ruatti C. et al., 2001, 'The PHESAT95 catalogue of observations of the mutual events of the Saturnian satellites', *A&A*, 371, 343
- [193] Tisserand F., 1889, 'Traité de Mécanique Céleste', 1, 391
- [194] Tittlemore W., 1990, 'Chaotic motion of Europa and Ganymede and the Ganymede-Callisto dichotomy', *Science*, 250, 263
- [195] Tobie G., 2003, 'Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan', Thèse, Université Paris VII
- [196] Tobie G., Grasset O., Lunine J.I. et al., 2005, 'Titan's internal structure inferred from a coupled thermal-orbital model', *Icarus*, 175, 496
- [197] Vachier F., 2004, 'Étude dynamique des satellites proches des planètes et des petites planètes', Thèse, Observatoire de Paris
- [198] Vasundhara R., Arlot J.-E. & Descamps P., 1996, 'New constants for SampsonLieske theory of the Galilean satellites of Jupiter from mutual occultation data', *IAUS*, 172, 145
- [199] Vasundhara R., 2002, 'Astrometry from CCD photometry of mutual events of Jovian satellites from VBO during 1997', *A&A*, 389, 325
- [200] Veillet C., 1981, 'Satellites of Saturn', *IAU circular* 3593, 3608
- [201] Vienne A., 1991, 'Théorie Analytique des Satellites de Saturne', Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille
- [202] Vienne A., Sarlat J.M. & Duriez L., 1992, 'About the secular acceleration of Mimas' in *Chaos, Resonance and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System*, Proceedings of the 152nd Symposium of the IAU, S. Ferraz-Mello (ed.), 219
- [203] Vienne A. & Duriez L., 1995, 'TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites', *A&A*, 297, 588
- [204] Vienne A., 2001, 'Différents aspects de la Dynamique des huit principaux Satellites de Saturne', thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université des Sciences et Techniques de Lille
- [205] Vienne A., Noyelles B. & Amossé A., 2003, 'Observation of 13 mutual events of Jovian satellites performed at Lille Observatory', *A&A*, 410, 343
- [206] Von Milczewski J., Farrelly D. & Uzer T., 1997, *Phys. Rev. Lett.*, 78, 1436
- [207] Vu D.T., 1981, 'Large inequalities and libration terms of satellites I, II, and III of Jupiter', *A&A*, 94, 140
- [208] Wachlin F.C. & Ferraz-Mello S., 1998, 'Frequency map analysis of the orbital structure in elliptical galaxies', *MNRAS*, 298, 1, 22

- [209] Yoder C.F., 1979, 'How tidal heating in Io drives the Galilean orbital resonance locks', *Nature*, 279, 767
- [210] Yoder C.F. & Peale S.J., 1981, 'The tides of Io', *Icarus*, 47, 1
- [211] Yoder C.F., Synnott S.P. & Salo H., 1989, 'Orbits and masses of Saturn's co-orbiting satellites, Janus and Epimetheus', *AJ*, 98, 1875