

**THÈSE D'HABILITATION
À DIRIGER DES RECHERCHES
EN MATHÉMATIQUES**

Présentée par David SAUZIN

**Contribution à la théorie des
perturbations des systèmes hamiltoniens
et à la théorie de la résurgence**

Soutenue le 4 mars 2004

JURY : - Alain CHENCINER
- Adrien DOUADY
- Jean ÉCALLE
- Hakan ELIASSON
- Jean-Pierre RAMIS
- Dmitry TRESCHEV

Remerciements

à Alain Chenciner qui n'a cessé d'être pour moi un interlocuteur précieux depuis la direction de ma thèse de doctorat,

à Adrien Douady, Jean Écalle, Hakan Eliasson, Jean-Pierre Ramis et Dmitry Treschev qui me font l'honneur de faire partie du jury,

à Stefano Marmi, Jean-Pierre Marco et Vassili Gelfreich, co-signataires de certains travaux présentés ici — premiers échantillons de collaborations dont j'espère qu'elles continueront longtemps,

à Pierre Lochak et Laurent Niederman, autres collaborateurs et interlocuteurs essentiels,

à tous les membres de l'équipe *Astronomie et systèmes dynamiques*.

Contribution à la théorie des perturbations des systèmes hamiltoniens et à la théorie de la résurgence

Synthèse des travaux présentés en vue de l'habilitation à diriger des recherches

David Sauzin

Table des matières

1	Introduction	3
2	Écart des variétés invariantes	9
3	Stabilité et instabilité Gevrey	14
4	Séparatrices de l'application de Hénon	19
5	Équation cohomologique	27

1 Introduction

1.1 Je présente ici quatre articles :

- [H1] : “Une nouvelle méthode pour mesurer l'écart des variétés invariantes” (“A new method for measuring the splitting of invariant manifolds,” *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. **34**, p. 159-221, 2001) ;
- [H2] : “Stabilité et instabilité en classe Gevrey pour les systèmes hamiltoniens quasi-convexes presque intégrables,” écrit avec Jean-Pierre Marco (“Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems,” *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. **96**, p. 199–275, 2002) ;
- [H3] : “Somme de Borel et écart des séparatrices de l'application de Hénon,” écrit avec Vassili Gelfreich (“Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map,” *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, t. **51**, 2, p. 513–563, 2001) ;
- [H4] : “Solutions monogènes et quasi-analytiques d'une équation cohomologique,” écrit avec Stefano Marmi (“Quasi-analytic monogenic solutions of a cohomological equation,” *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. **164**, no. 780, 2003, vi+83 pp.).

Les deux premiers articles concernent la théorie des perturbations des systèmes hamiltoniens, les deux derniers sont plus directement centrés sur la théorie de la résurgence ; tous traitent de questions d'asymptotique liées à divers systèmes dynamiques.

1.2 Ces quatre articles s'inscrivent à des degrés divers dans le prolongement de ma thèse de doctorat "Résurgence paramétrique et exponentielle petite de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé" (publiée sous une forme légèrement abrégée aux *Annales de l'Institut Fourier* [A2]). Il s'agissait alors d'étudier le système à deux degrés de liberté engendré par le hamiltonien

$$H(q, \varphi, p, I) = I + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1)(1 + \mu \sin \varphi), \quad (1.1)$$

dont la dépendance particulière en I montre que la variable conjuguée $\varphi \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ peut être identifiée au temps¹, et qui se réduit à un pendule simple d'ouverture $\sqrt{\varepsilon}$ dans les variables $(q, p) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ lorsque le paramètre μ est nul. Pour μ petit, $\mathcal{T} = \{(0, \varphi, 0, 0), \varphi \in \mathbb{T}\}$ est une orbite périodique hyperbolique dont les variétés stable et instable sont des surfaces lagrangiennes proches des séparatrices du pendule non perturbé. Alors qu'elles coïncident si $\mu = 0$, elles sont susceptibles de s'écarter l'une de l'autre en général, et c'est ce phénomène d'écart de séparatrices (*separatrix splitting* en anglais) que l'on voulait analyser avec $\varepsilon > 0$ petit ; il se trouve que ce phénomène est exponentiellement petit par rapport à ε .

Le même problème (aux notations et à quelques détails près) a été posé par Poincaré à la fin du deuxième volume des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, dans un chapitre intitulé *Divergence des séries*. On peut en effet décrire les deux variétés lagrangiennes à l'aide d'une même série de puissances de $\sqrt{\varepsilon}$, fonction génératrice formelle trouvée en résolvant l'équation de Hamilton-Jacobi, dont Poincaré remarque la divergence en examinant le premier ordre en μ ; il observe aussi que les coefficients de cette série croissent grosso modo comme $n!$, c'est-à-dire qu'elle appartient à ce que nous appelons aujourd'hui une *classe de Gevrey*. L'objet de la thèse était de mener à terme l'étude commencée par Poincaré en considérant tous les ordres de perturbation en μ dans l'équation de Hamilton-Jacobi, de prouver que la divergence était de type resommable, plus précisément *résurgent* au sens de la théorie de J. Écalle, et d'en déduire une formule asymptotique pour l'écart des séparatrices (cet objectif n'a été atteint à l'époque qu'au prix d'une simplification un peu artificielle : le remplacement de $\sin \varphi$ par $\exp(i\varphi)$ dans (1.1) ; je pense maintenant disposer des outils nécessaires pour revenir au problème initial).

1.3 Ce bref retour en arrière était destiné à introduire les thèmes essentiels des quatre articles énumérés ci-dessus : écart des séparatrices (pour les trois premiers), asymptotique Gevrey en théorie des perturbations (pour les trois derniers), résurgence (pour les deux derniers).

a) Le premier article est consacré à l'étude de l'écart (exponentiellement petit) des variétés stable et instable pour un système qui est une généralisation directe de (1.1) à $d + 1$ degrés de liberté ($d \geq 2$) :

$$H(q, \varphi, p, I) = \omega \cdot I + \frac{1}{2}\alpha I^2 + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1)(1 + \mu M(q, \varphi)), \quad (1.2)$$

avec des variables $(q, \varphi) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}^d$ et $(p, I) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. L'analogue de \mathcal{T} est le tore $\{(0, \varphi, 0, 0), \varphi \in \mathbb{T}^d\}$, qui porte un flot de Kronecker de fréquence $\omega \in \mathbb{R}^d$, et les

¹Il est en fait équivalent d'étudier le hamiltonien non autonome $\frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1)(1 + \mu \sin t)$.

propriétés arithmétiques de ce vecteur jouent désormais un rôle décisif. Je n’ai pas tenté d’analyser la divergence de la série asymptotique commune aux deux variétés², mais la méthode de Hamilton-Jacobi s’est révélée étonnamment fructueuse ; elle m’a amené à introduire un certain champ de vecteurs sur une partie de l’espace de configurations $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d$, le *champ caractéristique* de la paire de variétés considérées, dont l’analyse livre des informations qualitatives et quantitatives sur l’écart des variétés invariantes.

Le hamiltonien (1.2) avait été introduit par P. Lochak sous le nom de système d’Arnold généralisé, parce que, dans sa note fameuse de 1964 sur l’instabilité des systèmes hamiltoniens presque intégrables, Arnold avait lui-même considéré un exemple à trois degrés de liberté analogue à celui de Poincaré et proposé un mécanisme d’instabilité fondé sur les solutions hétéroclines transverses joignant des tores invariants voisins. C’est là une des motivations principales pour l’étude des “moustaches” de \mathcal{T} : il faut montrer que les variétés invariantes s’écartent effectivement l’une de l’autre pour mettre en place le mécanisme d’Arnold, et la mesure de cet écart se relie à la durée sur laquelle l’instabilité se développe.

Nous verrons cependant que l’étude de l’écart de variétés invariantes est beaucoup plus délicate dans le cas de 3 degrés de liberté ou plus que dans le cas de 2. Il faut renoncer à obtenir un équivalent asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow 0$, et se contenter de rechercher un encadrement. La méthode de Hamilton-Jacobi conduit à une majoration de l’écart dans la plus grande généralité, mais pour le moment nous ne disposons de bornes inférieures que dans des cas particuliers à 3 degrés de liberté.

b) Le deuxième article, écrit en collaboration avec Jean-Pierre Marco (Université Paris 6), traite des systèmes hamiltoniens qui sont obtenus comme (1.2) par perturbation d’un système intégrable écrit en variables actions-angles :

$$H(r, \theta) = h(r) + f(r, \theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^n, \quad r \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

avec f “petite”, $f = \varepsilon F$ par exemple (le hamiltonien (1.2) est un cas particulier, avec $r = (p, I)$ et $\theta = (q, \varphi)$). La problématique est celle du théorème de Nekhorochev sur la stabilité des variables d’action pendant un temps exponentiellement long, et l’on essaie de trouver des exemples exhibant effectivement une instabilité au-delà de cette durée (c’est-à-dire des exemples de “diffusion d’Arnold” avec estimation de la vitesse de dérive).

Le nom de Gevrey apparaît ici à deux niveaux. Premièrement, nous supposons que h et f sont des *fonctions Gevrey*, c’est-à-dire que leurs dérivées successives sont soumises à des bornes du type $n!^\alpha$ pour un certain $\alpha \geq 1$, mais qu’elles ne sont donc pas nécessairement analytiques (sauf si $\alpha = 1$) ; il s’agit donc d’un élargissement du cadre de travail habituel, et nous commençons par étendre le théorème de stabilité de Nekhorochev à cette situation. Deuxièmement, la démonstration, qui est en fait une adaptation de la méthode des orbites périodiques due à P. Lochak, utilise des *séries entières Gevrey*, solutions formelles d’un problème de moyennisation développées en puissances d’un petit paramètre (à coefficients fonctions Gevrey des variables θ_i et r_i) : les coefficients sont bornés par $n!^\alpha$, ces séries sont donc susceptibles de diverger, même si $\alpha = 1$. Ces majorations nous permettent de passer d’une forme normale formelle à une forme normale approchée avec erreur exponentiellement petite.

Cet article est né d’une collaboration avec Michel Herman,³ à qui reviennent l’idée de cette généralisation du théorème de stabilité et une méthode originale de construction d’exemples Gevrey non analytiques exhibant une instabilité des variables d’ac-

²À ce sujet, on pourra cependant consulter [H1], remarque 3.1, p. 177–178.

³Le lecteur trouvera dans l’introduction de [A7] une évocation de notre rencontre avec Michel Herman.

tion (pour un nombre quelconque de degrés de liberté) ; Jean-Pierre Marco et moi avons travaillé avec lui pour améliorer les bornes obtenues et, après sa mort soudaine en novembre 2000, nous avons obtenu des résultats presque optimaux. A posteriori, les meilleurs exemples d'instabilité que nous avons pu construire nous sont apparus comme un cas limite du mécanisme d'Arnold (avec des "tores moustachus" \mathbb{T}^{n-1} dont les intersections homoclines et les intersections hétéroclines *non transverses* se calculent explicitement — c'est ici que le thème de l'écart des séparatrices ressurgit), mais le recours à des fonctions à support compact (Gevrey d'ordre $\alpha > 1$) rend l'approche complètement différente et les calculs beaucoup plus élémentaires (comparer avec [A5]).

c) Le troisième article, écrit en collaboration avec Vassili Gelfreich (Freie Universität Berlin – University of Warwick), nous ramène à la non-intégrabilité dans le cas de deux degrés de liberté, mais pour un système discret cette fois-ci :

$$\mathcal{F} : (u, v) \mapsto (u + v - u^2, v - u^2). \quad (1.4)$$

Cette application symplectique de \mathbb{C}^2 possède un seul point fixe, l'origine, qui est parabolique. Nous montrons cependant l'existence de deux "séparatrices," des courbes invariantes paramétrées $z \mapsto (u^\pm(z), v^\pm(z))$ (avec quatre fonctions entières u^+, u^-, v^+, v^- de la variables complexe z) telles que

$$\mathcal{F}^k(u^\pm(z), v^\pm(z)) = (u^\pm(z+k), v^\pm(z+k)) \xrightarrow[k \rightarrow \pm\infty]{} (0, 0). \quad (1.5)$$

Il s'agit plutôt de "demi-séparatrices" : chacune a sa partie réelle tangente à l'origine au demi-axe $\{u \in \mathbb{R}^-, v = 0\}$.

Les deux courbes partagent le même développement asymptotique ($\tilde{u}(z), \tilde{v}(z)$) en puissances négatives de z , mais dans des secteurs du plan complexe différents ; nous montrons comment les reconstituer à partir de cette unique série divergente, pour laquelle nous menons à terme l'analyse résurgente. Nous obtenons en particulier une formule asymptotique pour l'écart des séparatrices lorsque la partie imaginaire du paramètre z tend vers l'infini.

Cette étude présente un intérêt en elle-même dans le cadre de la dynamique des germes de transformations de deux variables complexes, mais elle est aussi motivée par un problème de dynamique réelle discrète très analogue à celui posé dans ma thèse à propos du système continu (1.1) : le problème de l'évaluation de l'écart des séparatrices se pose en effet pour l'application symplectique

$$F_\varepsilon : (q, p) \mapsto (q_1 = q + \varepsilon p_1, p_1 = p + \varepsilon q(1 - q)),$$

et V. Gelfreich a proposé dans un article antérieur une méthode pour déduire un équivalent asymptotique de l'écart associé à F_ε de la formule que nous prouvons pour \mathcal{F} . Il a développé en détail la méthode en question dans le cas de "l'application standard," qui avait suscité les travaux de Vladimir Lazutkin (dont V. Gelfreich est l'élève) dès les années 1980, et ainsi justifié rigoureusement la formule annoncée par Lazutkin. Dans ces travaux de Lazutkin et Gelfreich, c'est une certaine application "semi-standard" qui apparaît comme problème auxiliaire, et \mathcal{F} est à F_ε ce que l'application semi-standard est à l'application standard. L'application standard est analogue à l'application de premier retour du flot engendré par le pendule perturbé (1.1), alors que F_ε correspond plutôt à la perturbation d'un système intégrable polynomial.

d) Le quatrième article, écrit en collaboration avec Stefano Marmi (Université d'Udine – École Normale Supérieure de Pise), est consacré à l'étude de l'équation

$$f(qz) - f(z) = g(z), \quad (1.6)$$

où $q \in \mathbb{C}$ et $g(z) \in z\mathbb{C}\{z\}$ sont donnés. Il s'agit de "l'équation cohomologique", c'est-à-dire de la linéarisation de l'équation de conjugaison d'un germe de difféomorphisme local de \mathbb{C} à sa partie linéaire $z \mapsto qz$. C'est en fait le plus simple des "problèmes de petits diviseurs"; en effet, si l'on écrit $\sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$ la série de Taylor de g , on voit sur l'expression de la série de Taylor de la solution

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n z^n}{q^n - 1} \quad (1.7)$$

que chaque racine de l'unité Λ provoque une résonance : $q = \Lambda$ est un pôle pour certains coefficients, et si $|q| = 1$, une condition arithmétique sur l'argument de q est nécessaire pour assurer la convergence de la série (1.7). La convergence est revanche garantie dès que $|q| \neq 1$; du point de vue de la théorie des fonctions holomorphes, nous avons donc deux solutions $f^-(q, z)$ et $f^+(q, z)$, respectivement définies dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}_r$ et $\mathbb{E} \times \mathbb{D}_r$, si l'on désigne par \mathbb{D}_r le disque de convergence de g , tandis que

$$\mathbb{D} = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| < 1\}, \quad \mathbb{E} = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| > 1\}.$$

Notre propos est d'examiner la dépendance de ces solutions par rapport à q , en particulier l'asymptotique pour q voisin des racines de l'unité ou d'autres points du cercle unité, et d'essayer de relier ces deux fonctions.

On peut facilement déterminer des fonctions a_Λ dépendant linéairement de g , indexées par l'ensemble \mathcal{R} des racines de l'unité, telles que

$$f^\pm(q, z) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{R}} \frac{a_\Lambda(z)}{q - \Lambda}. \quad (1.8)$$

Cette formule rappelle bien sûr la définition d'une fonction méromorphe par une série de parties polaires. Pour chaque résonance Λ , on vérifie que $(q - \Lambda)f^\pm(q, z)$ tend effectivement vers le "résidu" $a_\Lambda(z)$ lorsque q tend vers Λ *non tangentiellement au cercle unité* (uniformément en z), et il y a même une "série de Laurent" associée à Λ : un développement asymptotique en puissances de $q - \Lambda$, valable à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité. Mais cette série asymptotique ne saurait converger, en raison des racines de l'unité arbitrairement proches de Λ qui sont autant de singularités et qui conduisent à regarder le cercle unité comme une frontière naturelle. Un des résultats de l'article est la description complète de la structure résurgente de cette série, dont f^+ et f^- sont les deux resommées naturelles; il y a ici une certaine analogie avec le problème de résurgence paramétrique évoqué plus haut à propos du pendule rapidement forcé, mais le caractère linéaire de l'équation (1.6) facilite les choses.

Nous étudions également les séries asymptotiques associées aux points du cercle unité satisfaisant une condition diophantienne : nous montrons leur caractère Gevrey (d'un ordre dépendant de l'exposant dans la condition diophantienne), et répondons de diverses manières à la question de la quasi-analyticité (peut-on retrouver la fonction f^\pm à partir de son développement asymptotique en un point donné?). Et une grande partie de l'article est consacrée à l'étude du caractère monogène de la solution, au sens de la théorie de Borel, dans la lignée de certains travaux de Michel Herman sur les difféomorphismes du cercle (pour lesquels la linéarisation de l'équation de conjugaison à une rotation conduit à l'équation (1.6) écrite dans des variables logarithmiques).

1.4 Les articles présentés ici en vue de l'habilitation ne correspondent pas à mes travaux les plus récents — la rédaction de [H2], qui est le plus récent des quatre, remonte déjà à 2001 —, mais j'ai préféré maintenir la liste que j'avais arrêtée il y a

deux ans, pensant qu'il était intéressant de proposer une synthèse de mes dernières occupations d'alors.

Depuis, en collaboration avec Pierre Lochak et Jean-Pierre Marco, nous avons publié l'article [A5], avec lequel [H1] a une relation étroite (le chapitre 3 de [A5] donne en particulier un résumé détaillé de [H1] et des variantes). On trouvera aussi dans [R1] un bref résumé (en anglais) de [H1]. J'ai écrit avec Carme Olivé et Tere Seara l'article [A6] qui reprend les méthodes de [H3] (en améliorant certains points) pour les appliquer à une équation de Hamilton-Jacobi (qui a d'ailleurs un rapport étroit avec le pendule perturbé (1.1)); on trouvera dans [R2] un résumé et une comparaison de ces deux études résurgentes. Quant à [H2], j'en ai donné un résumé (toujours en anglais) dans [R3], indiquant les résultats et les méthodes employées, et avec Jean-Pierre Marco, nous avons récemment donné une suite à ce travail : dans [A7], nous avons étendu la méthode de Michel Herman pour obtenir des exemples de perturbations Gevrey de systèmes intégrables qui exhibent de façon encore plus frappante leur instabilité.

Les quatre articles proprement dits sont trop longs pour être résumés fidèlement (leur longueur tient en partie au désir de donner au lecteur suffisamment de détails, tout en l'initiant à des concepts qui peuvent ne pas lui être familiers : théorie des fonctions résurgentes et calcul étranger, théorie des fonctions monogènes). Nous venons de les survoler en essayant de dégager les parentés qui existent entre eux, nous passerons maintenant en revue les résultats contenus dans chaque article.

2 Écart des variétés invariantes

2.1 Dans le premier article [H1], on étudie le modèle d'Arnold généralisé (1.2) avec une perturbation

$$F(q, \varphi) = (\cos q - 1)M(q, \varphi)$$

réelle analytique sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d$, un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^d$, une matrice diagonale réelle $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ (la notation αI^2 signifie $\sum \alpha_j I_j^2$). Rappelons que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'espace des phases est $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, fibré cotangent de l'espace de configuration $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^d$.

Le champ de vecteurs associé s'écrit

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \mu \varepsilon \partial_q F \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_j = \omega_j + \alpha_j I_j \\ \dot{I}_j = -\mu \varepsilon \partial_{\varphi_j} F. \end{cases}$$

Si $\varepsilon = 0$, le système est complètement intégrable avec $(\dot{q}, \dot{\varphi}) = (p, \omega + \alpha I)$. Nous nous intéressons à des valeurs de (p, I) voisines de $(0, 0)$, donc à une région résonante de l'espace de phases (les vecteurs fréquences correspondants sont voisins de $(0, \omega)$, qui est simplement résonant si ω est non résonant).

Un premier travail consiste à montrer que le tore invariant $\mathcal{T} = \{(0, \varphi, 0, 0), \varphi \in \mathbb{T}^d\}$ est partiellement hyperbolique, c'est-à-dire qu'il possède des variétés stable et instable. On définit par exemple la variété instable en fixant $q_1 \in]\pi, 2\pi[$ et en considérant

$$\mathcal{W}^- = \{ M \in T^*C \mid \text{dist}(\phi^{tH}(M), \mathcal{T}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \},$$

où $C =]-q_1, q_1[\times \mathbb{T}^d$, et ϕ^{tH} désigne le flot au temps t engendré par le hamiltonien H . Il est démontré dans la section 5 de l'article que, pour $|\mu|$ assez petit et $\varepsilon > 0$ quelconque, \mathcal{W}^- est une sous-variété analytique de T^*C . Comme elle est lagrangienne exacte et qu'elle se projette bien sur C , on peut l'écrire comme le graphe de la différentielle d'une fonction génératrice S^- :

$$\mathcal{W}^- = \{(q, \varphi, \partial_q S^-(q, \varphi), \partial_\varphi S^-(q, \varphi)), (q, \varphi) \in C\}.$$

De même, en posant $C' =]2\pi - q_1, 2\pi + q_1[\times \mathbb{T}^d$, on trouve une variété stable

$$\mathcal{W}^+ = \{ M \in T^*C' \mid \text{dist}(\phi^{tH}(M), \mathcal{T}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \},$$

graphe lagrangien exact associé à une fonction S^+ analytique sur $C' \times \mathbb{T}^d$.

Les fonctions génératrices S^+ et S^- qui apparaissent sont solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H(q, \varphi, \partial_q S^\pm, \partial_\varphi S^\pm) = 0. \tag{2.1}$$

Elles sont uniquement déterminées par les conditions $S^\pm = S_0 + O(\mu)$, avec $S_0 = 4\varepsilon^{1/2}(\cos \frac{q}{2} - 1)$, et $S^- - S_0$ nulle sur $\{q = 0\} \times \mathbb{T}^d$ de même que sa différentielle (resp. $S^+ - S_0$ nulle sur $\{q = 2\pi\} \times \mathbb{T}^d$ de même que sa différentielle). Ces fonctions dépendent analytiquement de μ (dans un voisinage de 0 ne dépendant que de q_1), ainsi que de ε à condition de se restreindre à \mathbb{R}^{**} (ou à un secteur bissecté par \mathbb{R}^{**} d'ouverture assez petite).

2.2 Mesurer l'écart des variétés invariantes, c'est donc évaluer la différence $\Delta S = S^+ - S^-$ sur $]q'_1, q_1[$, avec $q'_1 = 2\pi - q_1$, ou plutôt sa différentielle : les points critiques de cette fonction se relèvent en des intersections de \mathcal{W}^+ et \mathcal{W}^- , en lesquels les espaces tangents à ces variétés sont déterminés par les dérivées partielles d'ordre 2 de ΔS . Voici le premier résultat contenu dans l'article à ce sujet :

Théorème 2.1 *Si ω satisfait une condition diophantienne*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad |k \cdot \omega| \geq \gamma |k|^{1-\tau} \quad (2.2)$$

pour un certain τ (nécessairement $\geq d$) et un certain $\gamma > 0$, il existe $\mu_0, C, w > 0$ tels que

$$|d(\Delta S)|, |d^2(\Delta S)| \leq C \varepsilon^{1/2} |\mu| \exp\left(-w \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\tau}}\right) \quad (2.3)$$

pour $q \in]q'_1, q_1[$, $\varphi \in \mathbb{T}^d$, $\varepsilon > 0$, $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$.

Nous verrons plus loin comment les propriétés arithmétiques de ω interviennent ; notons tout de suite que l'élément le plus important de la majoration (2.3) est l'exposant $1/2\tau$ de $1/\varepsilon$, dont la valeur maximale $1/2d$ doit être reliée au théorème de Nekhorochev. En effet, ce théorème garantit une certaine stabilité des variables d'action p et I et une incidence relativement faible de la non-intégrabilité sur des intervalles de temps exponentiellement longs devant $1/\varepsilon$; l'exposant qui intervient alors est $1/2(d+1)$ en général (puisque $d+1$ est le nombre de degrés de liberté), mais cet exposant atteint précisément $1/2d$ dans les régions résonantes — cf. la section 3 ci-dessous.

Pour aller plus loin, il est commode d'introduire une nouvelle variable :

$$u = \log \tan q/4 \Leftrightarrow q = q_0(u) := \arctan e^u$$

(la fonction $t \mapsto q_0(\varepsilon^{1/2}t)$ n'est autre que la paramétrisation temporelle de la séparatrice du pendule non perturbé, engendrée par S_0). Nous indiquerons par un tilde ce changement de variable ; par exemple la fonction

$$\tilde{F}(u, \varphi) = F(q_0(u), \varphi)$$

est analytique sur \mathbb{R} , décroît exponentiellement lorsque u tend vers $\pm\infty$ (ce qui correspond à q tendant vers 0 ou 2π). Nous supposons désormais que F se prolonge analytiquement à $(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{T}_{h_0}^d$, où $\mathbb{T}_{h_0}^d = \{\varphi \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^d \mid |\Im m \varphi_j| < h_0\}$ désigne la bande d'analyticité par rapport aux angles φ_j . Notre changement de variable est susceptible de faire apparaître des singularités sur l'axe imaginaire, les premières étant situées en $i\pi/2$ et $-i\pi/2$; la fonction \tilde{F} se prolonge donc analytiquement à $\mathcal{C} \times \mathbb{T}_{h_0}^d$, avec $\mathcal{C} = \mathbb{C} \setminus \pm \frac{i\pi}{2}[1, +\infty[$. On peut alors mesurer la taille de la perturbation F par la fonction $A(\delta) = \sup e^{2|\Re e u|} |\tilde{F}(u, \varphi)|$, où le supremum est pris sur les valeurs de (u, φ) telles que $\text{dist}(u, \pm \frac{i\pi}{2}[1, +\infty[) \geq \delta$ et $\varphi \in \overline{\mathbb{T}_{h_0-\delta}^d}$. Dans les exemples typiques, $A(\delta)$ se comporte comme une puissance négative de δ pour $\delta > 0$ petit.

Avec ces conventions, l'approximation au premier ordre en μ de ΔS , dite "approximation de Poincaré-Melnikov", est

$$\Delta \tilde{S}_1(u, \varphi) = \varepsilon^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(u + \zeta, \varphi + \varepsilon^{-1/2}\zeta\omega) d\zeta.$$

Elle s'obtient en reportant $S = S_0 + \mu S_1 + O(\mu^2)$ dans (2.1) : l'équation pour $S_1(q, \varphi)$ s'écrit alors $\tilde{D}_0 \tilde{S}_1 = -\varepsilon^{1/2} \tilde{F}$ dans les variables (u, φ) , avec $\tilde{D}_0 = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial u} + \omega \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$, et l'on en tire des représentations intégrales de \tilde{S}_1^+ et \tilde{S}_1^- .

Sous les mêmes hypothèses que précédemment (y compris la condition diophantienne (2.2)), nous disposons de majorations plus fines de l'écart des variétés invariantes :

Théorème 2.2 *Il existe $\nu, b, \varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $(r_0, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ vérifiant $1 \leq r_0 + |r| \leq 2$,*

$$\begin{aligned} |\partial_q^{r_0} \partial_\varphi^r \Delta S_1| &\leq b^{-1} A(\varepsilon^{\frac{1}{2\tau}}) \varepsilon^{-\frac{r_0+|r|+d-\tau}{2\tau}} \exp(-w_* \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\tau}}), \\ |\partial_q^{r_0} \partial_\varphi^r (\Delta S - \mu \Delta S_1)| &\leq b^{-1} \mu^2 A(\varepsilon^{\frac{1}{2\tau}})^2 \varepsilon^{-\frac{r_0+|r|+3d+3-\tau}{2\tau}} \exp(-w_* \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\tau}}), \end{aligned}$$

où $w_* = \nu \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}} h_0^{\frac{\tau-1}{\tau}}$, pourvu que

$$(q, \varphi) \in]q'_1, q_1[\times \mathbb{T}^d, \quad \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \quad |\mu| \leq b A(\varepsilon^{\frac{1}{2\tau}})^{-1} \varepsilon^{\frac{d+2}{2\tau}}.$$

Le $\frac{\pi}{2}$ qui apparaît dans la définition de w_* est exactement la distance de l'axe réel aux premières singularités rencontrées quand on suit le prolongement analytique par rapport à u de q_0 (et par conséquent de \tilde{F} ou \tilde{S}^\pm). Cette largeur de bande d'analyticité intervenait déjà dans le cas à 2 degrés de liberté (1.1), qui correspond à $d = 1$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\tau = 1$, $\nu = 1$. Le phénomène nouveau pour $d \geq 2$, déjà discuté par P. Lochak à propos de l'approximation de Poincaré-Melnikov [Lo90], est le rôle déterminant joué par l'arithmétique de ω et la largeur de bande d'analyticité h_0 dans les majorations de l'écart. La méthode de Hamilton-Jacobi rend ce phénomène parfaitement clair.

2.3 Pour atteindre les résultats indiqués, on montre en fait qu'il existe un changement de coordonnées f proche de l'identité, défini sur $]q'_1, q_1[\times \mathbb{T}^d$ et tel que $\Delta S \circ f$ s'écrive $\mu \Delta S_1 + \Xi$, avec une fonction $\Xi(q, \varphi)$ dont le k -ième coefficient de Fourier par rapport à φ ($k \in \mathbb{Z}^d$) est majoré par

$$\text{const } |\mu|^2 e^{-\rho \varepsilon^{-1/2} |k \cdot \omega| - h |k|},$$

pour $\rho > 0$ arbitrairement proche de $\pi/2$ et $h > 0$ arbitrairement proche de h_0 . (En fait, plus que Ξ , ce sont ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qui nous intéressent, et leurs coefficients de Fourier satisfont des inégalités analogues.)

Notre méthode utilise un outil géométrique nouveau, le "champ caractéristique"

$$D = \frac{1}{2} \partial_q (S^+ + S^-) \frac{\partial}{\partial q} + \left(\omega + \frac{1}{2} \alpha \partial_\varphi (S^+ + S^-) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

de la paire de solutions (S^-, S^+) de l'équation de Hamilton-Jacobi (2.1), et un outil analytique (le lemme 2.1 ci-dessous) qui généralise un lemme déjà employé par Lazutkin (et précédemment par Slutskin, ainsi que me l'a signalé A. I. Neishtadt).

Le champ D annule la fonction ΔS , d'après un calcul immédiat qui utilise la dépendance quadratique de H par rapport aux actions p et I_j (si cette dépendance avait été plus générale, on aurait encore pu définir un champ de vecteurs possédant cette propriété d'après la formule de accroissements finis). Ce champ est connu avec autant de précision que les fonctions S^- et S^+ elles-mêmes; en particulier, il dépend analytiquement de μ , et pour $\mu = 0$ il se réduit à

$$D_0 = \frac{dS_0}{dq} \frac{\partial}{\partial q} + \omega \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

ce qui donne le champ à coefficients constants $\tilde{D}_0 = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial u} + \omega \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$ introduit plus haut quand on utilise la variable u . Pour $|\mu|$ assez petit, D reste transverse à toute section $\Sigma = \{q = q_*\} \times \mathbb{T}^d$ de l'espace de configuration ($q_* \in]q'_1, q_1[$); la fonction ΔS

est donc déterminée par sa restriction à Σ , et possède donc au moins $d + 1$ points critiques, d'où l'existence d'au moins $d + 1$ orbites homoclines.

Comme on a pris soin dans la preuve de l'existence de S^- et S^+ d'obtenir les domaines d'analyticité les plus grands possibles, la relation $\tilde{D}\Delta\tilde{S} = 0$ est valable dans $\mathcal{D} \times \mathbb{T}_{h_1}^d$, avec $h_1 > 0$ arbitrairement proche de h_0 , et \mathcal{D} losange de sommets u_1 (défini par $q_1 = q_0(u_1)$), $i\rho_1$ (avec $\rho_1 > 0$ arbitrairement proche de $\pi/2$), $-u_1$ et $-i\rho_1$. Cette relation vaut pour $|\mu|$ assez petit et $\varepsilon > 0$ quelconque. Au premier ordre en μ , on trouve $\tilde{D}_0\Delta\tilde{S}_1 = 0$, ce qui permet d'appliquer à l'approximation de Poincaré-Melnikov le lemme évoqué ci-dessus :

Lemme 2.1 *Si une fonction $\tilde{\chi}(u, \varphi)$ analytique dans $]-i\rho_1, i\rho_1[\times \mathbb{T}_{h_1}^d$ vérifie $\tilde{D}_0\tilde{\chi} = 0$ (pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé), elle se prolonge nécessairement à $\{| \Im m u | < \rho_1 \} \times \mathbb{T}_{h_1}^d$ et ses coefficients de Fourier par rapport à φ satisfont les inégalités*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall u \in \mathbb{R}, \quad |\tilde{\chi}_k(u)| \leq \left(\sup_{[-i\rho, i\rho] \times \mathbb{T}_h^d} |\tilde{\chi}| \right) e^{-\rho\varepsilon^{-1/2}|k \cdot \omega| - h|k|} \quad (2.4)$$

dès que $0 < \rho < \rho_1$ et $0 < h < h_1$.

Cette conséquence élémentaire des inégalités de Cauchy pour les coefficients de Fourier d'une fonction analytique est une adaptation au cas quasi-périodique d'un lemme utilisé par Lazutkin; on en trouve déjà un cas particulier avec $d = 2$ dans l'article d'A. Delshams, V. G. Gelfreich, À. Jorba et T. M. Seara [DGJS97]. C'est d'ailleurs lors de discussions avec A. Delshams à Barcelone en mai 1998 que l'idée est venue de l'utiliser en conjonction avec l'équation de Hamilton-Jacobi.

Pour en déduire des majorations des dérivées partielles de ΔS , il suffit d'observer que le champ de vecteurs D peut être conjugué à D_0 par une transformation $O(\mu)$ -proche de l'identité, de la forme $f = \text{Id} + \mu\mathcal{U}$. Il s'agit là d'un travail technique relégué dans la section 6 de l'article (qui utilise comme la section 5 une méthode de point fixe dans des espaces de Banach appropriés); là encore il faut veiller à définir une transformation analytique dans un domaine complexe assez grand : on montre que \tilde{f} est analytique dans un domaine du type $\mathcal{D} \times \mathbb{T}_{h_1}^d$ en utilisant la variable u . Les coefficients de Fourier de $\Delta\tilde{S} \circ \tilde{f}$ d'indice $k \neq 0$ sont donc exponentiellement petits, de même que ceux de $\Delta\tilde{S} \circ \tilde{f} - \mu\Delta\tilde{S}_1$.

Mais pour borner les fonctions elles-mêmes et pas seulement leurs coefficients de Fourier, il faut encore contrôler des sommes d'exponentielles comme celles qui apparaissent dans la majoration (2.4). Le problème est que ces exponentielles renferment le coefficient $\rho|k \cdot \omega|$ de taille très variable, éventuellement très petite si $|k|$ est assez grand. C'est ici que la condition diophantienne satisfaite par ω permet de conclure, car on peut vérifier que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-\rho\varepsilon^{-1/2}|k \cdot \omega| - h|k|} \leq \frac{c}{\sigma^d} \exp(-w(\delta, \sigma) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\tau}}), \quad \text{si } \rho = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad h = h_0 - \sigma,$$

avec $w(\delta, \sigma) = \nu \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)^{\frac{1}{\tau}} (h_0 - 2\sigma)^{\frac{\tau-1}{\tau}}$ et $c > 0$ ne dépendant que de la dimension. Le nombre $w(\delta, \sigma)$ est d'autant plus grand que δ et σ sont petits; on atteint $w_* = w(0, 0)$ en choisissant $\delta = \sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2\tau}}$ car alors $w(\delta, \sigma)\varepsilon^{-\frac{1}{2\tau}} \geq w_*\varepsilon^{-\frac{1}{2\tau}} - \text{const}$.

2.4 La stratégie naturelle pour obtenir une borne inférieure de l'écart des variétés invariantes est d'essayer de minorer l'approximation de Poincaré-Melnikov, puis de montrer qu'elle a une part prépondérante dans cet écart, c'est-à-dire que ΔS s'écrit

$\mu\Delta S_1 + \chi$ avec un reste χ négligeable devant $\mu\Delta S_1$. Bien que les majorations indiquées jusqu'ici ne soient pas suffisantes pour cela, la méthode que nous venons d'esquisser est susceptible d'être affinée, au moins si $d = 2$.

On peut en effet utiliser alors le développement en fraction continue du rapport des deux composantes de ω pour optimiser la majoration de la somme d'exponentielles. Le cas le plus simple se présente lorsque ce rapport est un nombre algébrique de degré 2 (on alors $\tau = 2$). La section 4 de l'article reprend les calculs effectués pour $\omega = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ dans l'article [DGJS97] précité, qui fait apparaître à la place du nombre w_* défini dans le théorème 2.2 ci-dessus une certaine fonction périodique W de $\log \varepsilon$; le théorème est alors valable avec cette seule modification.

Cela permet d'atteindre notre objectif, à condition d'exclure la possibilité que l'approximation de Poincaré-Melnikov soit "anormalement petite". Nous devons par exemple exclure le cas où F serait un polynôme trigonométrique par rapport à φ , puisqu'alors ΔS_1 et ses dérivées seraient bornées par $\exp(-\text{const } \varepsilon^{-1/2})$. Mais si au contraire on suppose $F(q, \varphi) = (\cos q - 1)M(\varphi_1, \varphi_2)$, les coefficients de Fourier de M vérifiant $a e^{-h_0|k|} \leq |M_k| \leq K e^{-h_0|k|}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$ (avec des constantes $a, K > 0$), on peut montrer que l'approximation de Poincaré-Melnikov est effectivement prépondérante.

On montre en effet qu'alors

$$\max_{\varphi \in \mathbb{T}^2} |\partial_q^{r_0} \partial_\varphi^r \Delta S_1(q, \varphi)| \geq b \varepsilon^{-\frac{r_0 + |r| - 1}{4}} \exp(-W(\log \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}).$$

Dans notre variante du théorème 2.2 où la fonction W remplace le nombre w_* , nous disposons donc d'un encadrement de $\mu\Delta S_1$ qui fait apparaître comme négligeable le reste $\chi = \Delta - \mu\Delta S_1$ de l'écart, au moins pour $|\mu| \leq \text{const } \varepsilon^{7/2}$ (puisque $A(\delta) \leq \text{const } \delta^{-4}$ pour les fonctions F considérées ici).

En travaillant un peu plus, on prouve que, pour chaque $q_* \in]q'_1, q_1[$, la fonction $\Delta S(q_*, \cdot)$ est une fonction de Morse sur \mathbb{T}^2 , qui possède exactement quatre points critiques, et que son hessien en chacun de ces points est encadré par des nombres de la forme

$$\text{const } |\mu|^2 \varepsilon^{1/2} \exp(-s_*(\log \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}),$$

où s_* est une certaine fonction périodique (strictement supérieure à $2W$); mais il faut pour cela exclure certaines valeurs de ε .

3 Stabilité et instabilité Gevrey

3.1 Les estimations de Nekhorochev ont été évoquées succinctement à propos du premier article; elles font l’objet du deuxième article, [H2], qui se place d’emblée dans le cadre plus général des hamiltoniens proches de l’intégrable, c’est-à-dire de la forme (1.3). Le théorème classique vaut pour les hamiltoniens analytiques dont la partie intégrable h satisfait la condition dite de raideur (une certaine propriété, générique, de transversalité) et affirme que, pour toute solution du champ hamiltonien X_H , les variables d’action r_j restent ε^b -proches de leur valeur initiale au moins pendant un temps de l’ordre de $\exp(\text{const} (\frac{1}{\varepsilon})^a)$. Les nombres a et b qui apparaissent dans cet énoncé sont appelés exposants de stabilité et sont indépendants de la perturbation f ; on les voudrait les plus grands possibles, puisque cela correspondrait à un résultat de stabilité le plus fort possible. C’est surtout l’exposant a relatif au temps qui va nous intéresser.

Quand la partie intégrable h du hamiltonien est quasi-convexe (c’est-à-dire que ses niveaux sont des hypersurfaces strictement convexes de \mathbb{R}^n — condition (3.1) ci-dessous), la théorème de Nekhorochev est valable avec des exposants aussi grands que $a = b = \frac{1}{2n}$, d’après [LN92] ou [Pö93]. Mais on dispose alors d’un résultat meilleur encore dans les régions résonantes : on appelle surface résonante la région de l’espace des actions définie par un ensemble de relations linéaires à coefficients entiers imposées au vecteur fréquence, soit

$$S_{\mathcal{M}} = \{ r \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in \mathcal{M}, \langle k, \nabla h(r) \rangle = 0 \},$$

où \mathcal{M} est un sous-module de rang m de \mathbb{Z}^n ($1 \leq m \leq n - 1$; on parlera alors de résonance de multiplicité m); d’après les auteurs précédents, le théorème de Nekhorochev vaut pour les solutions passant à une distance $\leq \sigma\sqrt{\varepsilon}$ de $S_{\mathcal{M}}$ avec des exposants $a = a_m$ et $b = b_m$, qui peuvent être choisis tous deux aussi grands que $\frac{1}{2(n-m)}$ (le nombre σ est arbitraire; naturellement, les diverses constantes intervenant dans l’énoncé précis de stabilité en dépendront et elles dépendront aussi de \mathcal{M}).

L’exposant a_m sera déclaré optimal, pour un hamiltonien intégrable h donné, si l’on peut exhiber un exemple de perturbation arbitrairement petite, c’est-à-dire une suite $(f_j)_{j \geq 1}$ tendant vers 0, de sorte que le champ hamiltonien associé X_{h+f_j} possède au moins une solution $(\theta(t), r(t))$ presque m -résonante qui développe une instabilité sensible ($r(t)$ subit une variation non négligeable par rapport à $\varepsilon_j = \|f_j\|$, disons d’ordre 1) en un temps qui n’excède pas $\exp(\text{const} (\frac{1}{\varepsilon_j})^{a_m})$. Un tel système instable peut être considéré comme un exemple de “diffusion d’Arnold”, en référence à [Arn64] ou [AA67], où est évoquée une telle dérive des variables d’action pour certaines solutions. Bien entendu, le problème ne se pose que si $n \geq 3$, sans quoi la théorie KAM garantit la stabilité perpétuelle de toutes les solutions.

L’article [H2] se compose de deux parties. La première généralise le résultat de stabilité précédent dans la “catégorie Gevrey- α ”, pour tout $\alpha \geq 1$ (la catégorie analytique correspond exactement à $\alpha = 1$); les exposants obtenus sont $a_m = \frac{1}{2(n-m)\alpha}$ et $b_m = \frac{1}{2(n-m)}$. La seconde montre l’optimalité des exposants a_m obtenus avec $2 \leq m \leq n - 1$, dans toutes les classes Gevrey non analytiques, c’est-à-dire pour $\alpha > 1$.

On discernera un rapport profond entre les deux articles [H2] et [H1] : ils présentent la même dualité, avec d’un côté des temps de stabilité exponentiellement longs (resp. des bornes supérieures exponentiellement petites de l’écart des variétés invariantes) pour des perturbations assez générales, et de l’autre la recherche d’exemples de perturbation donnant lieu à des temps d’instabilité aussi courts que possible (resp. des bornes

inférieures aussi grandes que possible). Le “système d’Arnold” et sa généralisation (1.2) ont d’ailleurs été introduits précisément dans le but de mettre en évidence des orbites de dérive à partir de l’existence d’intersections homoclines transverses pour tous les tores d’une “chaîne de transition”, par la méthode dite “géométrique” inspirée de [Arn64]; et il semble que le temps nécessaire pour obtenir une dérive d’ordre 1 soit en raison inverse de la mesure de l’écart des variétés invariantes.

En fait, dans [H2], nous n’avons pas cherché à résoudre les problèmes que pose la mise en œuvre du mécanisme d’Arnold dans des systèmes plus généraux⁴ ou à plus de degrés de liberté que celui considéré dans [Arn64]; la contribution de cet article à la théorie de la diffusion d’Arnold est plutôt de proposer, dans un cadre différent (hamiltoniens non analytiques) une autre stratégie pour obtenir l’instabilité sur un intervalle de temps exponentiel le plus court possible, et ce pour un nombre quelconque ≥ 3 de degrés de liberté. Mais cela n’empêchera pas d’observer a posteriori un lien entre nos exemples et le mécanisme d’Arnold.

Dans le cas analytique ($\alpha = 1$), la question de l’optimalité des exposants a_m , telle que nous l’avons formulée, peut être considérée comme résolue pour $n = 3$ ou 4 et $m \geq 2$ grâce aux résultats d’Ugo Bessi [Be96, Be97], qui utilisent d’ailleurs le système d’Arnold et font appel à des techniques plus variationnelles que géométriques.

3.2 Soient $n \geq 2$ un entier et $R > 0$ un réel. Nous notons \mathbb{T} le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} , B_R la boule ouverte de \mathbb{R}^n centrée à l’origine et de rayon R , et K le compact $\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R$.

Des réels $\alpha \geq 1$ et $L > 0$ étant donnés, nous dirons qu’une fonction $\varphi = \varphi(\theta, r)$ de classe C^∞ sur K est Gevrey- (α, L) , et nous écrirons $\varphi \in G^{\alpha, L}(K)$, si le nombre

$$\|\varphi\|_{\alpha, L} := \sum_{k \in \mathbb{N}^{2n}} \frac{L^{|k|\alpha}}{k!^\alpha} \|\partial^k \varphi\|_{C^0(K)}$$

est fini. Nous avons eu recours aux notations usuelles pour les multi-entiers : $|k| = k_1 + \dots + k_{2n}$, $k! = k_1! \dots k_{2n}!$, $\partial^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_{2n}}^{k_{2n}}$ avec $(x_1, \dots, x_{2n}) = (\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n)$. L’espace $G^\alpha(K)$ des fonctions Gevrey- α est défini comme l’union des espaces $G^{\alpha, L}(K)$ pour tous les $L > 0$.

L’espace des fonctions réelles analytiques sur K coïncide avec $G^1(K)$: si $\varphi \in G^{1, L}(K)$, le nombre L indique la taille d’un domaine complexe $K_L = \{z \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^n \mid \text{dist}_\infty(z, K) < L\}$, dans lequel φ admet un prolongement analytique (le symbole ∞ en indice signale qu’il s’agit de la distance associée à la norme du supremum des coordonnées), de plus $\|\tilde{\varphi}\|_{C^0(\overline{K}_L)} \leq \|\varphi\|_{1, L}$; inversement, si $\tilde{\varphi}$ est une fonction holomorphe dans \overline{K}_L dont la restriction à K est à valeurs réelles, les inégalités de Cauchy montrent que $\|\varphi\|_{1, \lambda} \leq e^{\lambda/L} \|\tilde{\varphi}\|_{C^0(\overline{K}_L)}$ pour tout $\lambda < L$. Il n’y a donc guère de différence entre $\|\cdot\|_{1, L}$ et les normes analytiques habituelles.

Si $\alpha > 1$, il est facile d’exhiber des fonctions Gevrey- α qui ne soient pas analytiques. Par exemple, se limitant à une variable, on peut poser $\alpha = 1 + \frac{1}{p}$ et utiliser les fonctions $\varphi_c \in G^\alpha([-1, 1])$ définies, pour $c > 0$ quelconque, par $\varphi_c(x) = \exp(-c/x^p)$ si $x > 0$ et $\varphi_c(x) = 0$ si $x \leq 0$, pour construire une fonction-plateau appartenant à $G^{\alpha, L}$, s’annulant à l’extérieur d’un intervalle I donné et valant identiquement 1 sur un sous-intervalle donné de I .

Les fonctions Gevrey ont été utilisées largement en théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi en rapport avec des problèmes de systèmes dynamiques. La définition des normes $\|\cdot\|_{\alpha, L}$ ne semble pas classique, mais elle présente le grand

⁴En particulier, nous ne traitons pas la difficile question de la généricité de l’instabilité hamiltonienne soulevée par Arnold, objet des travaux récents de John Mather; notre but est ici d’atteindre des exemples optimaux plutôt que des résultats génériques.

intérêt de faire des espaces $G^{\alpha,L}(K)$ des algèbres de Banach, dans lesquelles on a l'inégalité pour le produit

$$\forall \varphi, \psi \in G^{\alpha,L}(K), \quad \|\varphi\psi\|_{\alpha,L} \leq \|\varphi\|_{\alpha,L} \|\psi\|_{\alpha,L},$$

mais aussi des inégalités de la forme $\|\varphi \circ u\|_{\alpha,L_1} \leq \|\varphi\|_{\alpha,L}$, moyennant des hypothèses adéquates sur une application u d'un compact K_1 à valeurs dans K , dont les $2n$ composantes sont supposées Gevrey- (α, L_1) . Le lecteur trouvera dans l'appendice de [H2] les démonstrations de ces résultats, qui sont précieux dans un contexte non linéaire comme le nôtre.

Quant aux inégalités de Cauchy, d'usage constant lorsque l'on travaille avec les fonctions analytiques, elles admettent une généralisation immédiate :

$$\forall j \geq 0, \quad \sum_{|m|=j} \|\partial^m \varphi\|_{\alpha,L-\lambda} \leq j! \lambda^{-j\alpha} \|\varphi\|_{\alpha,L}$$

dès que $\varphi \in G^{\alpha,L}(K)$ et $0 < \lambda < L$.

Nous pouvons maintenant donner l'énoncé du premier résultat de [H2] :

Théorème 3.1 *Soient*

$$a = \frac{1}{2n\alpha}, \quad b = \frac{1}{2n}.$$

Soient $E, \varpi, m > 0$ des réels et $h \in G^{\alpha,L}(\overline{B}_R)$ une fonction vérifiant $\|h\|_{\alpha,L} \leq E$ et, pour tout $r \in \overline{B}_R$,

$$\varpi \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\partial_{r_i} h(r)| \quad \text{et, pour tout } v \in (\nabla h(r))^\perp, \quad m\|v\|^2 \leq \langle \nabla^2 h(r)v, v \rangle. \quad (3.1)$$

Pour tout $R_0 \in]0, R[$, il existe des réels $\varepsilon_, c, C_1, C_2 > 0$, qui ne dépendent que de n, α, R, R_0, L, E et ϖ, m , tels que, pour tout hamiltonien $H \in G^{\alpha,L}(\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R)$ vérifiant*

$$\varepsilon := \|H - h\|_{\alpha,L} \leq \varepsilon_*,$$

une condition initiale quelconque $(\theta_0, r_0) \in \mathbb{T}^n \times \overline{B}_{R_0}$ donne naissance à une solution $(\theta(t), r(t))$, définie au moins pour $|t| \leq C_1 \exp((\frac{c}{\varepsilon})^a)$ et satisfaisant $\|r(t) - r_0\| \leq C_2 \varepsilon^b$ dans cet intervalle de temps.

De plus, ainsi que nous l'avons annoncé, le résultat peut être renforcé si la condition initiale est supposée presque résonante : *étant donnés un entier m entre 1 et $n - 1$,*

$$a_m = \frac{1}{2(n-m)\alpha}, \quad b_m = \frac{1}{2(n-m)}, \quad (3.2)$$

un sous-module \mathcal{M} de rang m de \mathbb{Z}^n et un réel $\sigma > 0$, il existe $\varepsilon_, c, C_1, C_2 > 0$ tels que, pour tout $H \in G^{\alpha,L}(\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R)$ vérifiant $\varepsilon := \|H - h\|_{\alpha,L} \leq \varepsilon_*$, les conditions initiales $(\theta_0, r_0) \in \mathbb{T}^n \times \overline{B}_{R_0}$ vérifiant $\text{dist}(r_0, S_{\mathcal{M}}) \leq \sigma \varepsilon^{1/2}$ donnent naissance à des solutions $(\theta(t), r(t))$, définies au moins pour $|t| \leq C_1 \exp((\frac{c}{\varepsilon})^{a_m})$ et satisfaisant $\|r(t) - r_0\| \leq C_2 \varepsilon^{b_m}$ dans cet intervalle de temps.*

Ce résultat amélioré au voisinage des surfaces résonantes peut surprendre, dans la mesure où les résonances sont souvent vues comme des obstructions à la stabilité, à travers notamment les problèmes de petits dénominateurs (*cf.* par exemple la section 5), mais il ne s'agit pourtant que d'un sous-produit naturel de la méthode des orbites périodiques, due à P. Lochak, que nous avons reprise en l'adaptant au cadre Gevrey.

Nous allons voir que ce n'est pas un artefact de la méthode et que, pour $\alpha > 1$ et $n \geq 3$, il y a vraiment une stabilité accrue au voisinage des résonances, du moins en ce qui concerne les multiplicités ≥ 2 .

Nous ne donnerons pas davantage d'explication sur la preuve de ce théorème, qui est donnée en détail dans la section 2 de [H2], et dont les grandes lignes sont indiquées dans [R3].

3.3 Nous supposons désormais $n \geq 3$ et $\alpha > 1$ et considérons la fonction quasi-convexe la plus élémentaire qui soit :

$$h(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n.$$

Théorème 3.2 Soient $a^* = \frac{1}{2(n-2)\alpha}$, $L > 0$ et $R > 1$. Il existe une suite $(f_j)_{j \geq 0}$ dans $G^{\alpha,L}(\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R)$, pour laquelle $\varepsilon_j = \|f_j\|_{\alpha,L} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, et une suite strictement croissante d'entiers $(\tau_j)_{j \geq 0}$ telles que, pour chaque $j \geq 0$, le système hamiltonien engendré par

$$\mathcal{H}_j(\theta, r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n + f_j(\theta, r)$$

admet une solution $(\theta(t), r(t))$ définie dans $[0, \tau_j]$ et satisfaisant

$$r_1(0) = 0, \quad r_1(\tau_j) = 1, \quad 0 < r_2(t) \leq 3\sqrt{\varepsilon_j}. \quad (3.3)$$

Il existe de plus des constantes $C_1 < C_2$, ne dépendant que de n, α, L et R , telles que le temps de dérive τ_j vérifie les inégalités

$$\frac{C_1}{\varepsilon_j^2} \exp\left(C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{a^*}\right) \leq \tau_j \leq \frac{C_2}{\varepsilon_j^2} \exp\left(C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{a^*}\right)$$

pour chaque j .

La forme de l'application fréquence, $\nabla h(r) = (r_1, \dots, r_{n-1}, 1)$, montre que l'hyper-surface $\{r_2 = 0\}$, dont notre solution instable reste voisine, doit être vue comme une résonance simple et que, pour chaque rationnel p/q , la condition $r_1 = p/q$ définit une résonance indépendante. En particulier, la condition initiale est $\sqrt{\varepsilon_j}$ -proche de la résonance double $\{r_1 = r_2 = 0\}$. L'exposant a^* obtenu dans l'estimation du temps de dérive était donc le plus petit possible pour une telle solution.

Pour $m \geq 3$, on déduit très facilement de l'énoncé précédent, en ajoutant à \mathcal{H}_j $m - 2$ degrés de liberté supplémentaires qui n'interagissent pas avec les premiers, des exemples de solutions instables dont la condition initiale est presque m -résonante et dont l'exposant d'instabilité vaut $a^* = \frac{1}{2(n-m)\alpha}$.

En d'autres termes, l'exposant a_m obtenu en (3.2) est optimal pour $m \geq 2$, $\alpha > 1$ and $n \geq 3$.

Il est un peu dommage de se limiter à la partie compacte $\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R$ de l'espace de phase $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, alors qu'en fait nos hamiltoniens \mathcal{H}_j sont de classe C^∞ dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tout entier et y définissent des champs de vecteurs *complets*, et que les solutions instables décrites dans le théorème peuvent être décrites au moins aussi bien sur tout \mathbb{R} . Seul nous y a contraints le désir de ne pas sortir du cadre des espaces de Banach $G^{\alpha,L}(K)$ et de définir ε_j en utilisant les normes $\|\cdot\|_{\alpha,L}$.

Mais nous avons été amenés dans [A7] à définir un espace métrique $\mathcal{G}^{\alpha,L}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ qui permet d'éviter cet inconvénient. On peut en effet considérer l'intersection des

espaces $G^{\alpha, L_\nu}(K_\nu)$, où les compacts $K_\nu = \mathbb{T}^n \times \overline{B}_{3^\nu}$ recouvrent $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et $L_\nu = 3^{-\nu+1}L$ pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, munie de la distance induite par les semi-normes $\|\cdot\|_{\alpha, L_\nu, K_\nu}$ correspondantes. Le théorème précédent est alors encore vrai si l'on remplace $f_j \in G^{\alpha, L}(\mathbb{T}^n \times \overline{B}_R)$ par $\mathcal{H}_j \in \mathcal{G}^{\alpha, L}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon_j = \|f_j\|_{\alpha, L}$ par la distance Gevrey- (α, L) entre \mathcal{H}_j et h . Et il est alors possible de préciser l'énoncé :

Le champ hamiltonien $X_{\mathcal{H}_j}$ est complet et, si l'on note Φ^t son flot et que l'on pose $q_j = \sqrt{\tau_j}$, on peut affirmer que l'action de Φ^{kq_j} sur la condition initiale $(\theta(0), r(0))$ de la solution instable coïncide pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec celle de la translation de pas k/q_j le long de l'axe des r_1 .

Notre solution instable correspond donc à un point errant, dérivant entre $-\infty$ et $+\infty$ le long de l'axe des r_1 en "sautant" de $1/q_j$ chaque fois qu'un temps q_j s'est écoulé.

Le récent article [A7] propose deux généralisations de cette construction : on peut remplacer le point errant par un *ouvert* errant, transporté par une dynamique Gevrey presque intégrable à peu près de la même façon que ce que nous venons de décrire ; on peut aussi s'en tenir à des points et remplacer la succession de translations ascendantes de pas $1/q_j$ par une suite de translations tantôt ascendantes tantôt descendantes de même pas, effectuées dans un ordre arbitraire, toujours aux instants multiples de q_j , c'est-à-dire trouver une dynamique Gevrey presque intégrable qui contient une marche aléatoire le long de l'axe des r_1 . Malheureusement, dans les deux cas, l'estimation de q_j (et donc de la vitesse moyenne de dérive) est moins bonne que dans le théorème 3.2, puisque qu'elle est gouvernée par l'exposant $\frac{1}{2(n-m)(\alpha-1)}$ au lieu de a_m .

En ce qui concerne les démonstrations, nous nous bornerons ici à signaler que nos flots hamiltoniens instables sont obtenus par "suspension" à partir de systèmes dynamiques discrets : toute la construction se fait avec des applications symplectiques de l'anneau $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (d'ailleurs, les fonctions f_j obtenues à la fin ne dépendent pas de la dernière variable d'action, r_n ; le système engendré par \mathcal{H}_j est donc équivalent à un système hamiltonien non autonome de $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ dépendant périodiquement du temps). Les détails sont donnés dans la section 3 de [H2] ; une démonstration abrégée pour $n = 3$ se trouve dans [R3].

4 Séparatrices de l'application de Hénon

4.1 Laissons le formalisme hamiltonien et passons à l'article [H3], consacré à l'application symplectique (1.4). Il s'agit d'un cas particulier de l'application de Hénon, avec un point fixe parabolique à l'origine ; motivés par les questions d'écart de séparatrices dans le contexte hamiltonien, nous nous intéressons ici à des courbes paramétrées analogues aux variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique, qui vérifient (1.5).

Nous pouvons reformuler (1.5) en disant que nous recherchons des courbes paramétrées $(u(z), v(z))$ qui

- i) soient invariantes par \mathcal{F} ,
- ii) vérifient la condition asymptotique $(u(z), v(z)) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0$,

et que nous renforçons la première condition en demandant que ces courbes soient "bien paramétrées", au sens où

$$\mathcal{F}(u(z), v(z)) = (u(z+1), v(z+1)). \quad (4.1)$$

La forme particulière de \mathcal{F} entraîne l'équivalence entre l'équation (ou plutôt le système d'équations) (4.1) et l'équation aux différences du second ordre

$$u(z+1) - 2u(z) + u(z-1) = -u^2(z), \quad (4.2)$$

pourvu qu'on lui adjoigne l'équation $v(z) = u(z) - u(z-1)$. En d'autres termes, nous pouvons oublier la deuxième composante et nous concentrer sur la recherche des solutions $u(z)$ de (4.2).

4.2 Cet article est l'occasion de contribuer à la théorie de la résurgence, en étudiant l'équation aux différences (4.2) dans l'esprit de [Eca81, Eca85].

Nous nous intéressons donc aux solutions formelles du problème et essayons de lire dans le "plan de Borel" des informations sur les solutions exactes que l'on peut obtenir par resommation. Nous notons $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ l'anneau des séries formelles et \mathcal{B} la transformation de Borel formelle, définie sur son idéal maximal $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ par

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \quad \mapsto \quad \mathcal{B}(\tilde{\varphi})(\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Appliquée à une série convergente, \mathcal{B} donne la série de Taylor d'une fonction entière d'ordre 1, mais nous aurons le plus souvent affaire à des séries formelles dont l'image est une série $\hat{\varphi}(\zeta)$ qui possède un rayon de convergence non nul mais fini — la série initiale $\tilde{\varphi}(z)$ sera donc divergente (et Gevrey d'ordre 1).

Théorème 4.1 *L'équation (4.2) admet une unique solution formelle paire non nulle*

$$\tilde{u}_0(z) = -6z^{-2} + \frac{15}{2}z^{-4} - \frac{663}{40}z^{-6} + \dots, \quad (4.3)$$

dont toutes les solutions formelles non nulles se déduisent par translation de la variable z (elles s'écrivent $\tilde{u}_0(z+a)$, avec $a \in \mathbb{C}$). Les coefficients de \tilde{u}_0 forment une suite alternée de nombres rationnels.

La transformée de Borel formelle $\hat{u}_0(\zeta)$ possède un rayon de convergence non nul et définit un germe analytique en 0, qui se prolonge analytiquement le long de tout chemin issu de 0 et évitant $2\pi i\mathbb{Z}$.

La fonction holomorphe obtenue (encore notée \hat{u}_0) tend vers 0 exponentiellement vite le long des demi-droites non verticales évitant $2\pi i\mathbb{Z}$; on a même, pour tous $c > 0$ et $\theta_0 \in]0, \pi/2[$, $\hat{u}_0(\zeta) = O(e^{-c|\zeta|})$ uniformément dans les secteurs $\{|\arg \zeta| \leq \theta_0\}$ et $\{|\arg \zeta - \pi| \leq \theta_0\}$.

Nous verrons que les points de $2\pi i\mathbb{Z}$ sont effectivement des points singuliers de \hat{u}_0 et que \tilde{u}_0 est donc divergente. Le “calcul étranger”, qui repose sur les opérateurs Δ_ω introduits par Jean Écalle, a précisément pour objet l’analyse de telles singularités dans le plan de Borel (c’est-à-dire le plan de la variable complexe ζ).

La démonstration du théorème est assez longue et technique — en dehors bien sûr des premières assertions sur les solutions formelles (que l’on vérifie directement par substitution dans (4.2)) —, mais il n’est pas difficile de comprendre l’origine des singularités situées sur $2\pi i\mathbb{Z}$. Ces points sont effet les zéros de la fonction

$$\alpha(\zeta) = 4 \sinh^2 \frac{\zeta}{2},$$

et la série formelle $\hat{u}_0(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ est l’unique solution impaire non nulle de l’équation

$$\alpha(\zeta)\hat{u}(\zeta) = -\hat{u}^{*2}(\zeta). \quad (4.4)$$

Cette dernière équation fait intervenir le carré de convolution de l’inconnue \hat{u} , la convolution étant définie par

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\zeta) = \int_0^\zeta \hat{\varphi}(\zeta_1)\hat{\psi}(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1 \quad (4.5)$$

(formule à interpréter dans $\mathbb{C}[[\zeta]]$ ou dans $\mathbb{C}\{\zeta\}$ selon les cas). La convolution est l’image par \mathcal{B} de la multiplication des séries formelles, tandis que l’opérateur de translation $\tilde{u}(z) \mapsto \tilde{u}(z+1)$ se transforme en multiplication de $\hat{u}(\zeta)$ par $e^{-\zeta}$, d’où l’apparition du facteur $e^{-\zeta} - 2 + e^\zeta = \alpha(\zeta)$.

Pour résoudre (4.4), on peut utiliser une méthode perturbative pour faire apparaître \hat{u}_0 comme la limite d’une suite de séries formelles convergentes $\hat{u}_0^{(n)}$, qui possèdent chacune les propriétés de prolongement analytique et de décroissance voulues : on passe en effet de $\hat{u}_0^{(n)}$ à $\hat{u}_0^{(n+1)}$ par une fonctionnelle qui fait intervenir la division par α et la convolution.

La convergence de cette méthode perturbative suppose un travail d’analyse, mais le problème le plus sérieux est posé par la nécessité de contrôler le prolongement analytique des produits de convolution. On a recours pour cela aux chemins “symétriquement contractiles” d’Écalle. Le lecteur pourra se reporter à la section 3 de l’article, et particulièrement à la sous-section 3.3. Il y constatera que le résultat de prolongement analytique énoncé dans le théorème 4.1 n’est pas obtenu en une seule fois. Convenons d’appeler \mathcal{R} la surface de Riemann obtenue comme ensemble des classes d’homotopie de chemins issus de 0 et tracés sur $\mathbb{C} - 2\pi i\mathbb{Z}$, c’est-à-dire un peu plus que le revêtement universel de $\mathbb{C} - 2\pi i\mathbb{Z}$: on a une infinité dénombrable de “demi-feuillets” se projetant sur les demi-plans $\{\Re e \zeta > 0\}$ ou $\{\Re e \zeta < 0\}$, mais l’un des demi-feuillets gauches a été raccordé à l’un des demi-feuillets droits par un disque centré en 0, si bien que \mathcal{R} est munie d’un “feuille principal” $\mathcal{R}^{(0)}$ qui s’identifie au plan coupé $\mathbb{C} - (-2\pi i [1, +\infty[\cup 2\pi i [1, +\infty[)$. La première étape consiste à établir la convergence de \hat{u}_0 en 0 et à montrer que ce germe se prolonge analytiquement dans $\mathcal{R}^{(0)}$ (qui sera donc son étoile d’holomorphie). Dans une deuxième étape (qui fait précisément l’objet de la sous-section 3.3 de l’article), on suit le prolongement analytique dans la partie $\mathcal{R}^{(1)}$ de \mathcal{R} obtenue à partir de $\mathcal{R}^{(0)}$ en traversant *au plus une fois*

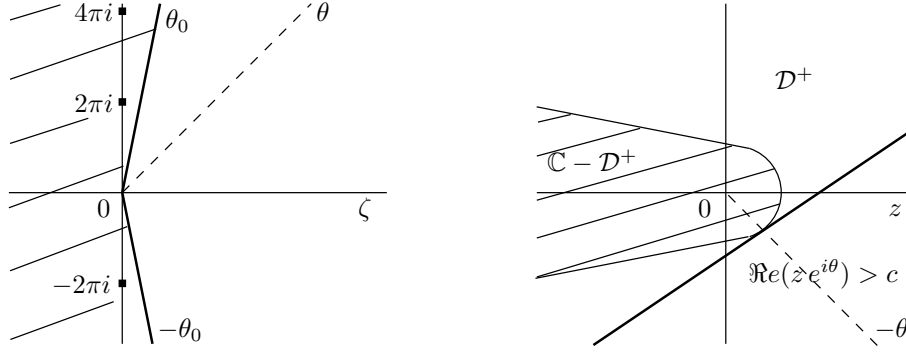


FIG. 1 – La transformation de Laplace dans les directions $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ conduit à une asymptotique valable dans un domaine \mathcal{D}^+ .

l'une des coupures $]-2\pi i(k+1), -2\pi ik[$ ou $]2\pi ik, 2\pi i(k+1)[$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. On s'arrête donc aux demi-feuillets contigus au feuillet principal, remettant à plus tard la fin de la démonstration (on attendra de disposer des relations de résurgence décrites plus loin pour explorer les autres demi-feuillets de \mathcal{R}).

4.3 Avant de poursuivre par l'analyse des singularités de \hat{u}_0 et les relations de résurgence, mentionnons une première conséquence pour le problème initial :

Corollaire 4.1 *Les formules*

$$u^+(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{u}_0(\zeta) d\zeta, \quad u^-(z) = \int_0^{-\infty} e^{-z\zeta} \hat{u}_0(\zeta) d\zeta, \quad (4.6)$$

définissent des fonctions entières solutions de (4.2). La série formelle \tilde{u}_0 en est le développement asymptotique pour $z \in \mathcal{D}^+$ ou $z \in \mathcal{D}^-$, l'ensemble \mathcal{D}^\pm étant défini comme l'extérieur d'un secteur ouvert bissecté par \mathbb{R}^\mp et contenant 0. En particulier,

$$\lim_{\Re z \rightarrow \pm\infty} u^\pm(z) = 0.$$

Nous avons utilisé là une propriété classique de la transformation de Borel-Laplace. Les intégrales de Laplace (4.6) convergent pour tout z et définissent des fonctions entières, en vertu de la dernière assertion du théorème 4.1. Mais, s'agissant par exemple de la fonction u^+ , on peut aussi la définir par une intégrale de Laplace sur $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$, avec n'importe quel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, grâce au théorème de Cauchy ; cette écriture de $u^+(z)$ fait apparaître $\tilde{u}_0(z)$ comme son développement asymptotique dans le demi-plan

$$\{ \Re(z e^{i\theta}) > c \},$$

où c est réel > 0 quelconque, et on obtient des estimations asymptotiques uniformes dans un domaine \mathcal{D}^+ en faisant varier θ entre deux valeurs arbitraires $-\theta_0$ et θ_0 (voir la figure 1 et consulter par exemple [CNP93], [Mal95] ou [Ra93]).

En posant $v^\pm(z) = u^\pm(z) - u^\pm(z-1)$, nous obtenons donc deux courbes invariantes bien paramétrées satisfaisant (1.5), dont les composantes admettent le même développement asymptotique dans les deux composantes connexes de $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$, en particulier pour $\Im m z \rightarrow -\infty$ et pour $\Im m z \rightarrow +\infty$. L'analyse des singularités de $\hat{u}_0(\zeta)$ nous permettra de mesurer "l'ambiguïté de resommation", c'est-à-dire de comparer les deux solutions du problème.

4.4 Les “fonctions résurgentes” qui interviennent dans notre contexte peuvent être définies, dans un premier temps tout au moins, comme les séries formelles $\tilde{\varphi}(z)$ dont la transformée de Borel converge en 0 et jouit de la propriété de prolongement analytique décrite dans le théorème 4.1, c’est-à-dire que le germe analytique $\hat{\varphi}(\zeta)$ obtenu se prolonge en une fonction holomorphe sur la surface de Riemann \mathcal{R} définie plus haut. Une telle fonction résurgente pourra donc être indifféremment envisagée dans le “modèle formel,” comme un élément $\tilde{\varphi}$ de $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, ou dans le “modèle convolutif,” à travers le germe $\hat{\varphi}$, appelé “mineur” de la fonction résurgente.

Mais il est nécessaire d’accepter une définition un peu plus générale, qui repose sur la notion de “majeur”. On désigne ainsi un germe de fonction holomorphe $\check{\varphi}(\zeta)$ défini près de 0 sur la surface de Riemann du logarithme, disons dans un secteur de la forme $\{r e^{i\theta}; 0 < r < r_0, \theta_0 - 2\pi - \varpi < \theta < \theta_0 + \varpi\}$ (nous resterons un peu vagues dans notre résumé et renvoyons le lecteur à [Eca85], [CNP93], ou à la section 2.4.1 de [A6]). Une singularité est définie comme une classe d’équivalence de majeurs modulo l’espace $\mathbb{C}\{\zeta\}$ des germes réguliers en 0; on utilisera la notation $\check{\varphi} = \text{sing}(\check{\varphi})$. L’application $\check{\varphi}(\zeta) \mapsto \hat{\varphi}(\zeta) = \check{\varphi}(\zeta) - \check{\varphi}(e^{-2\pi i}\zeta)$ passe au quotient par $\mathbb{C}\{\zeta\}$ et le germe $\hat{\varphi}$ obtenu, qui ne dépend donc que de la singularité $\check{\varphi}$, est appelé son mineur.

Une singularité est dite *simplement ramifiée* si elle admet un majeur de la forme

$$\check{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n n! A_n}{2\pi i \zeta^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \hat{\varphi}(\zeta) \log \zeta + \hat{r}(\zeta),$$

avec des nombres complexes A_0, \dots, A_{n_0} et des germes $\hat{\varphi}, \hat{r} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$. Nous utiliserons alors les notations

$$\check{\varphi} = \sum_{n=0}^{n_0} A_n \delta^{(n)} + {}^b\hat{\varphi}, \quad \delta^{(n)} = \text{sing} \left(\frac{(-1)^n n!}{2\pi i \zeta^{n+1}} \right), \quad {}^b\hat{\varphi} = \text{sing} \left(\frac{1}{2\pi i} \hat{\varphi}(\zeta) \log \zeta \right),$$

et étendrons l’isomorphisme de Borel-Laplace en déclarant que

$$\tilde{\varphi} = \sum_{n=0}^{n_0} A_n z^n + \mathcal{B}^{-1} \hat{\varphi}$$

est l’antécédent de $\check{\varphi}$ par \mathcal{B} . Nous mettons ainsi en correspondance l’espace $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$ des séries formelles contenant une partie polynomiale en z avec l’espace des singularités simplement ramifiées, d’une manière qui est compatible avec la définition antérieure de \mathcal{B} : le cas où $\tilde{\varphi} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, seul considéré jusque-là, correspondait en effet à une singularité déterminée par un mineur régulier à l’origine, $\check{\varphi} = {}^b\hat{\varphi}$.

Il existe bien sûr des singularités qui ne sont pas simplement ramifiées (on peut d’ailleurs continuer d’étendre l’isomorphisme de Borel-Laplace dans une certaine mesure, en admettant des “transséries” dans le modèle formel), mais nous n’en rencontrerons pas dans notre étude de l’équation (4.2). On peut définir la convolution des singularités simplement ramifiées comme l’image par \mathcal{B} de la multiplication des séries formelles dans $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$, mais on peut aussi définir en toute généralité, à l’aide d’intégrales faisant intervenir les majeurs, une convolution dans tout l’espace des singularités, toujours de façon compatible avec ce qui précède. Nous parlerons donc de l’algèbre des singularités et de la sous-algèbre des singularités simplement ramifiées.

L’espace des fonctions résurgentes associé à $2\pi i\mathbb{Z}$ peut maintenant être défini comme l’ensemble des singularités dont le mineur se prolonge analytiquement au revêtement universel de $\mathbb{C} - 2\pi i\mathbb{Z}$. Il se trouve que cet espace est stable pour la loi de

convolution que nous venons d'évoquer ; il constitue donc une sous-algèbre de l'algèbre des singularités, c'est le *modèle convolutif de l'algèbre des fonctions résurgentes*.

Illustrons ces définitions sur le cas de la singularité qui apparaît lorsque l'on suit le prolongement analytique de \hat{u}_0 le long de $i\mathbb{R}^+$ (il va de soi que ce qui se passe dans la direction de $i\mathbb{R}^-$ s'en déduit par symétrie, puisque \hat{u}_0 est une fonction réelle analytique). Comme \hat{u}_0 est holomorphe sur $\mathcal{R}^{(1)}$, nous pouvons définir un majeur par la formule

$$\check{v}(\zeta) = \hat{u}_0(2\pi i + \zeta) \quad \text{pour } \zeta \notin i\mathbb{R}^+, \quad (4.7)$$

en convenant d'utiliser la détermination principale de \hat{u}_0 , c'est-à-dire que " $2\pi i + \zeta$ " désigne le point de \mathcal{R} défini par la classe d'homotopie du segment $[0, 2\pi i + \zeta]$; le mineur correspondant, $\hat{v}(\zeta)$, est défini par la monodromie de \hat{u}_0 en $2\pi i$.

Nous avons donc à notre disposition deux singularités,

$$\check{u}_0 = \flat\hat{u}_0, \quad \check{v} = \text{sing}(\hat{u}_0(2\pi i + \zeta)),$$

dont nous savons déjà que la première est simplement ramifiée. Nous allons voir que c'est aussi le cas de la seconde. L'opérateur qui nous a fait passé de l'une à l'autre est noté $\Delta_{2\pi i}$ en théorie de la résurgence. Plus généralement, si $\check{\varphi}$ est une fonction résurgente, on pose

$$\Delta_{2\pi i}\check{\varphi} = \text{sing}(\hat{\varphi}(2\pi i + \zeta)),$$

avec les mêmes conventions que précédemment et en désignant bien sûr par $\hat{\varphi}$ le mineur de $\check{\varphi}$. L'opérateur $\Delta_{2\pi i}$ est une dérivation de l'algèbre des fonctions résurgentes, c'est-à-dire qu'il satisfait la règle de Leibniz pour la convolution. En fait, il n'est pas nécessaire qu'une singularité soit une fonction résurgente pour qu'on puisse lui appliquer $\Delta_{2\pi i}$: il suffit pour cela que son mineur se prolonge analytiquement le long de $]0, 2\pi i[$ et autour de $2\pi i$.

Théorème 4.2 *L'équation linéarisée*

$$\check{\varphi}(z+1) - 2\check{\varphi}(z) + \check{\varphi}(z-1) = -2\check{u}_0\check{\varphi} \quad (4.8)$$

admet deux solutions particulières dans $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$, dont la première est $\check{\varphi}_1 = \partial_z\check{u}_0$ et la seconde est l'unique solution paire $\check{\varphi}_2(z)$ commençant par $\frac{1}{84}z^4$:

$$\check{\varphi}_1 = \frac{d\check{u}_0}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^{2k+1}}, \quad \check{\varphi}_2 = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{d_k}{z^{2k}} = \frac{1}{84}z^4 + \frac{17}{840}z^2 - \frac{17}{2240} + O(z^{-2}).$$

La singularité $\check{v} = \Delta_{2\pi i}\check{u}_0$ représentée par le majeur $\check{v}(\zeta)$ défini en (4.7) ci-dessus est simplement ramifiée ; c'est l'image par \mathcal{B} d'une série $\check{v}(z)$ qui est combinaison linéaire de $\check{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2$:

$$\check{v} = \mu\check{\varphi}_1 + \Theta\check{\varphi}_2,$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\Theta \in i\mathbb{R}^{*-}$. De façon équivalente, on peut écrire la détermination principale de \hat{u}_0 au voisinage de $2\pi i$ sous la forme

$$\hat{u}_0(2\pi i + \zeta) = \frac{\Theta}{2\pi i} \left(\frac{4!d_{-2}}{\zeta^5} + \frac{2!d_{-1}}{\zeta^3} + \frac{d_0}{\zeta} \right) + \frac{1}{2\pi i} \hat{h}(\zeta) \log \zeta + \hat{r}(\zeta), \quad (4.9)$$

pour $\zeta \notin i\mathbb{R}^+$ de module assez petit, avec

$$\hat{h}(\zeta) = \mu \sum_{k \geq 1} b_k \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} + \Theta \sum_{k \geq 1} d_k \frac{\zeta^{2k-1}}{(2k-1)!} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$$

et $\hat{r}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$.

La première assertion ne présente pas de difficulté : $\tilde{\varphi}_1 = \partial_z \tilde{u}_0$ est évidemment solution de l'équation obtenue en linéarisant (4.2) autour de sa solution \tilde{u}_0 , et on trouve aisément une solution indépendante de la forme indiquée par substitution directe dans (4.8). Le choix $d_{-2} = \frac{1}{84}$, qui aura peut-être étonné le lecteur, est seulement motivé par le désir d'avoir un “wronskien discret” égal à 1 :

$$\mathcal{W}_{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2}(z) := \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1(z-1) & \tilde{\varphi}_2(z-1) \\ \tilde{\varphi}_1(z) & \tilde{\varphi}_2(z) \end{vmatrix} = 1.$$

Il y a en effet pour les équations aux différences linéaires une théorie analogue à celle des équations différentielles linéaires, et cela permet aussi de trouver $\tilde{\varphi}_2$ sous la forme $\tilde{\psi}\tilde{\varphi}_1$ en ne recourant qu'à une “quadrature” :

$$\tilde{\psi}(z+1) - \tilde{\psi}(z) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_1(z)\tilde{\varphi}_1(z+1)}.$$

Il en résulte que les mineurs correspondants, $\hat{\varphi}_1(\zeta) = -\zeta\hat{u}_0(\zeta)$ et $\hat{\varphi}_2(\zeta) = d_1\zeta + d_2\frac{\zeta^3}{3!} + \dots$, satisfont les mêmes propriétés de convergence et de prolongement analytique que $\hat{u}_0(\zeta)$ (on peut vérifier que $\hat{\psi}(\zeta)$ et donc $\hat{\varphi}_2(\zeta)$ héritent cette propriété de $\hat{\varphi}_1(\zeta)$). Nous pouvons donc légitimement considérer les singularités simplement ramifiées $\check{\varphi}_1 = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2 = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\varphi}_2$.

Il nous faut maintenant expliquer la relation entre $\check{v} = \text{sing}(\hat{u}_0(2\pi i + \zeta))$ et ces singularités $\check{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2$. Il y a ici une amélioration possible par rapport au raisonnement contenu dans l'article [H3], si l'on s'inspire de l'article [A6] écrit par la suite et que l'on exploite plus pleinement le formalisme des singularités, dont nous espérons que le lecteur aura eu un aperçu suffisant pour apprécier cette amélioration.

La méthode adoptée dans [H3] requiert en effet à ce stade une vérification un peu fastidieuse, pour assurer que \check{v} est une singularité simplement ramifiée,⁵ ce qui permet de considérer $\tilde{v} = \mathcal{B}^{-1}\check{v} \in \mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$. Comme $\Delta_{2\pi i}$ est une dérivation qui commute avec les translations de pas entier, \tilde{v} satisfait également l'équation (4.8). Or il est facile de vérifier que les solutions formelles de (4.8) sont les combinaisons linéaires $c_1\tilde{\varphi}_1 + c_2\tilde{\varphi}_2$ ($c_1 = \mathcal{W}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1}$ et $c_2 = \mathcal{W}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_2}$ doivent être des constantes), d'où la conclusion.

Mais en fait, sans savoir que la singularité \check{v} est simplement ramifiée, on peut affirmer qu'elle est solution de l'équation

$$\alpha(\zeta)\check{v} = -2\check{u}_0 * \check{v}, \quad (4.10)$$

parce que $\check{u}_0 = {}^b\hat{u}_0$ est elle-même solution de l'équation $\alpha(\zeta)\check{u}_0 = -(\check{u}_0)^{*2}$ (la multiplication d'une singularité par un germe régulier comme $\alpha(\zeta)$ est définie en multipliant α par n'importe quel majeur représentant la singularité) et que l'on peut appliquer $\Delta_{2\pi i}$ à cette équation (il se trouve que cet opérateur commute avec la multiplication par α). Et l'ensemble des singularités solutions de (4.10) est déterminé sans plus de peine que l'ensemble des solutions de l'équation (4.8) correspondante dans $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$: les solutions sont les combinaisons linéaires de $\check{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2$, elles sont *nécessairement* simplement ramifiées, ce qui nous dispense de la vérification contenue dans la section 4.1 de [H3].

La relation $\Delta_{2\pi i}\check{u}_0 = \mu\check{\varphi}_1 + \Theta\check{\varphi}_2$ obtenue est la première des “relations de résurgence” que l'on peut écrire. Les autres supposent que l'on définissent toutes les dérivations étrangères $\Delta_{2\pi im}$, avec $m \in \mathbb{Z}^*$, et les autres composantes $\tilde{u}_n(z)$ de “l'intégrale formelle” $\tilde{u}(z, b) = \sum_{n \geq 0} b^n \tilde{u}_n(z)$ (la série \tilde{u}_1 est proportionnelle à $\check{\varphi}_2$ et les autres

⁵Il y a d'ailleurs à cet endroit de l'article une petite erreur facile à corriger — cf. [A6], note en bas de page au début de la section 2.4.

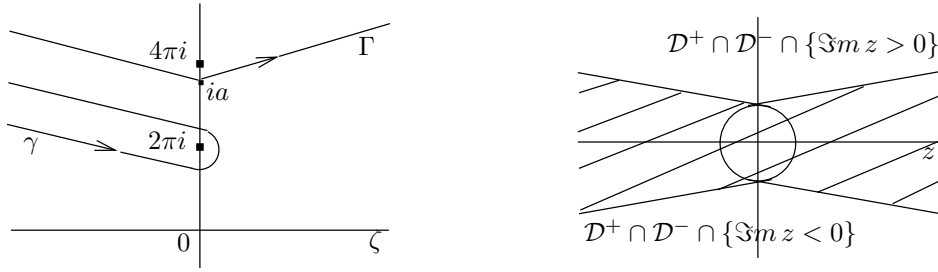


FIG. 2 – On déforme le chemin d’intégration en le faisant monter pour étudier l’asymptotique de $u^+ - u^-$ dans la partie inférieure de $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$.

sont déterminées par récurrence de sorte que $\tilde{u}(z+a, b)$ soit une solution plus générale de (4.2). Un des intérêts qu’il y a à étudier toutes ces séries formelles en même temps est par exemple la possibilité de vérifier simultanément leur caractère résurgent, en utilisant les relations de résurgence pour “propager” l’analyticité d’un feuillet de \mathcal{R} aux feuilletts contigus et atteindre ainsi de proche en proche toute la surface de Riemann à partir de $\mathcal{R}^{(1)}$. C’est ainsi que l’on achève la démonstration du théorème 4.1, tout en en énonçant un résultat beaucoup plus complet (théorème 3 dans [H3]), qui rassemble les relations de résurgence sous une forme compacte : “l’équation du pont.”

4.5 Terminons en revenant brièvement au problème de “l’écart des séparatrices”. Comme \hat{u}_0 est impaire, les solutions de l’équation (4.2) définies dans le corollaire 4.1 sont reliées par $u^-(z) = u^+(-z)$ (ceci correspond, au niveau de l’application de Hénon \mathcal{F} , à l’existence d’une involution qui échange les courbes stable et instable). Évaluer la différence $u^+ - u^-$ revient donc à mesurer le défaut de parité de chacune des solutions, sachant que leur développement asymptotique commun est une série formelle paire.

Corollaire 4.2 *Ces solutions vérifient*

$$u^+ - u^- \sim e^{-2\pi iz} \Delta_{2\pi i} \tilde{u}_0$$

dans $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^- \cap \{\Im m z < 0\}$. En d’autres termes, on a dans ce domaine le développement asymptotique

$$e^{2\pi iz} (u^+ - u^-) \sim \Theta(d_{-2}z^4 + d_{-1}z^2 + d_0) + \tilde{h}(z) = \mu\tilde{\varphi}_1(z) + \Theta\tilde{\varphi}_2(z),$$

dans lequel interviennent les constantes μ et Θ du théorème 4.2, d’où en particulier l’équivalent asymptotique

$$u^+(z) - u^-(z) = e^{-2\pi iz} \frac{z^4}{84} (\Theta + O(z^{-2})).$$

La preuve consiste à utiliser le théorème de Cauchy dans la formule

$$u^+(z) - u^-(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{u}_0(\zeta) d\zeta,$$

si $z \in i\mathbb{R}^-$ par exemple, pour remplacer le chemin d’intégration rectiligne par un chemin γ tournant autour de $2\pi i$, suivi d’un chemin Γ contenu tout entier dans le demi-plan $\{\Im m z \geq a\}$, où a est arbitrairement choisi dans $]2\pi, 4\pi[$: l’intégrale sur γ fait

apparaître la contribution de la singularité de \hat{u}_0 en $2\pi i$, affectée du coefficient exponentiellement petit $e^{-2\pi iz} = e^{-2\pi|\Im m z|}$, tandis que l'intégrale sur Γ est $O(e^{-a|\Im m z|})$, donc négligeable (*cf.* la figure 2).

En travaillant de façon analogue sur les fonctions $v^\pm(z) = u^\pm(z) - u^\pm(z-1)$, on obtient

$$\mathbf{p}^+(z) - \mathbf{p}^-(z) \sim \Theta \mathbf{n}(z) + \mu \frac{d\mathbf{p}}{dz}(z), \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^- \cap \{\Im m z < 0\},$$

avec les notations $\mathbf{p}^\pm(z) = \begin{pmatrix} u^\pm(z) \\ v^\pm(z) \end{pmatrix}$, $\frac{d\mathbf{p}}{dz}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(z) \\ \tilde{\varphi}_1(z) - \tilde{\varphi}_1(z-1) \end{pmatrix}$ pour la composante ‘‘tangentielle’’ formelle, et $\mathbf{n}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_2(z) \\ \tilde{\varphi}_2(z) - \tilde{\varphi}_2(z-1) \end{pmatrix}$ pour la composante ‘‘normale’’ formelle (la valeur du wronskien discret $\mathcal{W}_{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2}$ s’interprète d’ailleurs comme une relation de normalisation $\Omega(\frac{d\mathbf{p}}{dz}, \mathbf{n}) = 1$ pour la 2-forme symplectique standard $\Omega = du \wedge dv$).

On obtient des formules analogues dans $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^- \cap \{\Im m z > 0\}$ en utilisant la dérivation étrangère $\Delta_{-2\pi i}$ ou en exploitant les symétries du problème.

5 Équation cohomologique

5.1 L'étude de l'équation cohomologique (1.6) fait elle aussi apparaître une structure réurgente, quoique d'une nature assez différente de celle de l'équation (4.2) (plus *paramétrique* qu'*équationnelle*) et en fait beaucoup plus facile à analyser en raison du caractère linéaire de l'équation.

Comme cela a été signalé dans l'introduction, étant donnée une fonction g holomorphe dans un disque \mathbb{D}_r et nulle en 0, l'équation admet une solution $f_g^-(q, z)$ holomorphe dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}_r$ et une solution $f_g^+(q, z)$ holomorphe dans $\mathbb{E} \times \mathbb{D}_r$ (nous désignons par \mathbb{D} et \mathbb{E} l'intérieur et l'extérieur du disque unité), toutes deux définies par les formules (1.7) ou (1.8). Les "résidus" a_Λ intervenant dans la seconde formule se calculent à partir du cas $g(z) = z/(1-z)$ grâce au *produit de Hadamard*, que nous notons \odot :

$$\left(A(z) = \sum_{n \geq 1} A_n z^n, B(z) = \sum_{n \geq 1} B_n z^n \right) \mapsto A \odot B(z) = \sum_{n \geq 1} A_n B_n z^n.$$

La fonction $\delta(z) = z/(1-z) = z + z^2 + z^3 + \dots$ est en effet l'unité de ce produit, et l'on peut vérifier que

$$f_g = f_\delta \odot g, \quad f_\delta(q, z) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{R}} \frac{\Lambda}{q - \Lambda} \mathcal{L}_{m(\Lambda)}(z),$$

avec $\mathcal{L}_m(z) = -\frac{1}{m} \log(1 - z^m)$ et en désignant par $m(\Lambda)$ l'ordre d'une racine Λ de l'unité. Par conséquent, $a_\Lambda = \Lambda g \odot \mathcal{L}_{m(\Lambda)}$.

Si nous fixons une racine de l'unité $\Lambda_0 = \exp(2\pi i \frac{m_0}{m_0})$ et laissons q tendre vers Λ_0 *non tangentiellement au cercle unité*, c'est-à-dire en l'astreignant à rester dans un cône dont l'intersection avec \mathbb{S}^1 est réduite à Λ_0 (localement), nous constatons que $\frac{a_{\Lambda_0}}{q - \Lambda_0}$ fournit un équivalent asymptotique de f_g^\pm . Le chapitre 4 de [H4] (particulièrement les sections 4.2 et 4.3) montre que les deux fonctions admettent en fait le même développement asymptotique

$$\frac{a_{\Lambda_0}}{q - \Lambda_0} + \sum_{n \geq 0} A_n (q - \Lambda_0)^n, \quad (5.1)$$

où les A_n sont des fonctions holomorphes de z dépendant de Λ_0 et de g . Il y a mieux : f_g^+ et f_g^- s'obtiennent à partir de cette série par resommation de Borel-Laplace. Mais cette série ne saurait converger pour aucune valeur de q , puisque la singularité présente en Λ_0 n'est pas isolée : toutes les racines de l'unité doivent être vues comme des singularités, ne serait-ce que parce que f_g^\pm n'est pas bornée à leur voisinage ; le cercle unité est en fait une frontière naturelle.

Pour étudier la série (5.1), il est commode d'effectuer le changement de variable $q = \Lambda_0 e^\eta$ et de régulariser nos fonctions en les multipliant par $\eta \sim \frac{q}{\Lambda_0} - 1$. Tous calculs faits, on trouve alors

$$\eta f_g^\pm(\Lambda_0 e^\eta, z) = \frac{1}{\Lambda_0} a_{\Lambda_0}(z) + \int_0^{\pm\infty} e^{-\xi/\eta} \hat{\Psi}^g(\xi, z) d\xi, \quad (5.2)$$

avec

$$\hat{\Psi}^g(\xi, z) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \left(\frac{k}{m_0} - \frac{1}{2} \right) g(\Lambda_0^k z) - \sum_{k=0}^{m_0-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2\pi i \frac{ka}{m_0}}}{2\pi i a} \left[g(\Lambda_0^k z e^{\frac{m_0 \xi}{2\pi i a}}) - g(\Lambda_0^k z) \right]$$

holomorphe pour $|\Im m \xi|$ et $|z|$ assez petits.

Ainsi qu'on l'a vu, il suffit de s'intéresser au cas où $g = \delta$, et c'est alors qu'on affaire à une fonction résurgente, d'un type particulièrement simple puisque la transformée de Borel $\hat{\Psi}^\delta$ est méromorphe en ξ . Ses pôles sont les points

$$\xi_{a,b}(z) = \frac{2\pi a}{m_0} \left(-i \log z + \frac{2\pi b}{m_0} \right), \quad a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z},$$

ils sont simples, et les résidus correspondants valent

$$C_{a,b} = -\frac{1}{m_0} e^{2\pi i a b n'_0 / m_0},$$

où $n'_0 + m_0 \mathbb{Z}$ désigne l'inverse multiplicatif de $n_0 + m_0 \mathbb{Z}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/m_0 \mathbb{Z}$.

Retenons que la formule (5.2) exprime un lien de nature quasi-analytique entre les fonctions f_g^- et f_g^+ : la connaissance du développement asymptotique d'une des fonctions permet de reconstituer les deux fonctions (la donnée de ce développement asymptotique équivaut en effet à celle de la série de Taylor à l'origine de $\hat{\Psi}^g$ par rapport à ξ , par transformation de Borel formelle).

5.2 D'un autre côté, la série de Taylor (1.7) définissant f_g^\pm possède un rayon de convergence non nul (par rapport à z) pour certaines valeurs de q de module 1 : si $q = e^{2\pi i x}$ avec $x \in]0, 1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, et si l'on note $(n_k(x)/m_k(x))_{k \geq 1}$ la suite des réduites obtenues à partir du développement en fraction continue $x = [0; a_1(x), a_2(x), \dots]$, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (1.7) s'écrit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m_{k+1}(x)}{m_k(x)} < \infty.$$

Comme fonctions de q , les fonctions f_g^+ et f_g^- se prolongent donc naturellement à un certain sous-ensemble du cercle unité, et nous pouvons nous poser la question de la régularité de la fonction f_g obtenue. Pour simplifier les énoncés, introduisons les espaces de Banach $B_r = zH^\infty(\mathbb{D}_r)$ (fonctions de z holomorphes et bornées dans \mathbb{D}_r , nulles en 0) : nous supposons $g \in B_{r_1}$ et considérerons f_g comme une fonction de q à valeurs dans B_{r_2} , pour un certain $r_2 \leq r_1$.

Pour toute la suite, nous nous donnons des réels $\alpha, d > 0$ et $\kappa \in]0, 1[$, ainsi qu'une suite réelle $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante et tendant vers 0. Pour chaque j , l'ensemble

$$C_j = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \pmod{\mathbb{Z}} \mid \forall k \geq 0, m_{k+1}(x) \leq \frac{1}{\gamma_j} e^{\alpha m_k(x)} \right\}$$

est constitué de points "suffisamment éloignés" des rationnels, au sens où

$$\bigcap_{n/m} \left\{ x \mid \left| x - \frac{n}{m} \right| \geq \gamma_j \frac{e^{-\alpha m}}{m} \right\} \subset C_j \subset \bigcap_{n/m} \left\{ x \mid \left| x - \frac{n}{m} \right| > \gamma_j \frac{e^{-\alpha m}}{2m} \right\}.$$

On peut vérifier que les C_j sont des ensembles de Cantor (fermés totalement discontinués et parfaits), dont la mesure tend vers 1 pour $j \rightarrow \infty$. Nous allons étudier f_g dans le compact

$$K_j = \{ e^{2\pi i x}, x \in C_{j,\kappa,d} \},$$

où $C_{j,\kappa,d} = \bigcup_{y \in C_j} \{ x \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid \kappa |\Re(\tilde{x} - \tilde{y})| \leq |\Im m \tilde{x}| \leq d \}$, \tilde{x} et \tilde{y} désignant des relevés de x et y dans \mathbb{R} (il s'agit de tracer dans $\mathbb{C} \pmod{\mathbb{Z}}$ les cônes de pente κ dont

les sommets sont les points de C_j : les points x de ces cônes sont suffisamment éloignés des rationnels et les points $q = e^{2\pi i x} \in K_j$ correspondants sont suffisamment éloignés des résonances). La structure des ensembles C_j et K_j est étudiée en détail dans la section 2.3 de [H4].

Dès que $g \in B_{r_1}$ et $r_2 < r_1 e^{-\alpha}$, la fonction f_g est bien définie (par la formule (1.7) ou (1.8)) sur chaque compact K_j , à valeurs dans B_{r_2} . Dans la section 2.4 de [H4], il est montré que *cette fonction est monogène au sens de Borel*, pour peu que l'on se restreigne à $r_2 < r_1 e^{-3\alpha}$:

$$f_g \in \mathcal{M}((K_j), B_{r_2}).$$

Cela signifie que $f_g \in \mathcal{C}_{hol}^1(K_j, B_{r_2})$ pour chaque j , avec la définition suivante : Si K est un sous-ensemble fermé de C et B un espace de Banach, une fonction continue $f : C \rightarrow B$ est dite \mathcal{C}^1 -holomorphe, et on écrit $f \in \mathcal{C}_{hol}^1(C, B)$, s'il existe une fonction continue $f^{(1)} : C \rightarrow B$ telle que

$$\begin{aligned} \forall z \in C, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \quad \forall z_1, z_2 \in C, |z_1 - z| < \delta, |z_2 - z| < \delta \\ \Rightarrow \|f(z_2) - f(z_1) - f^{(1)}(z_1)(z_2 - z_1)\| \leq \varepsilon |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

(autrement dit, la fonction f est différentiable au sens de Whitney dans C et y vérifie les équations de Cauchy-Riemann).

L'espace des fonctions monogènes $\mathcal{M}((K_j), B)$ est en fait défini comme la limite projective des espaces de Banach $\mathcal{C}_{hol}^1(K_j, B)$. Les fonctions \mathcal{C}^1 -holomorphes dans un compact partagent certaines propriétés des fonctions holomorphes usuelles; on peut notamment adapter le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy dans ce contexte. L'un des intérêts de la définition de Borel est de permettre d'étudier les points de la frontière naturelle d'une fonction holomorphe : on peut parfois trouver parmi eux des points en lesquels la fonction est \mathcal{C}^1 -holomorphe, ainsi que l'illustre l'exemple des solutions de l'équation cohomologique. L'intention de Borel [Bo17] était apparemment de remplacer la notion classique de prolongement analytique par une notion de "prolongement monogène". Mais pour assurer l'unicité d'un tel prolongement (c'est-à-dire une propriété de quasi-analyticité), Borel était obligé d'imposer des restrictions assez fortes sur le compact considéré (qui ne peuvent pas être vérifiées par des compacts où la solution f_g de l'équation cohomologique serait définie).

5.3 Une fonction \mathcal{C}^1 -holomorphe au sens de Whitney dans un compact n'y est pas nécessairement \mathcal{C}^∞ -holomorphe (cf. la définition 2.2 dans [H4]). Mais dans notre cas,

$$\mathcal{C}_{hol}^1(K_j, B) \subset \mathcal{C}_{hol}^\infty(K_j^*, B)$$

avec des compacts $K_j^* \subset K_j$ qui sont définis dans la section 2.5 de [H4] (la mesure de $K_j^* \cap \mathbb{S}^1$ tend vers 1 pour $j \rightarrow \infty$ et tous les points $e^{2\pi i x}$ tels que $\frac{1}{m_k(x)} \log m_{k+1}(x) \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$ sont dans la réunion des K_j^*).

En particulier, nos fonctions monogènes admettent en chaque point de $K_j^* \cap \mathbb{S}^1$ un développement asymptotique (à savoir leur série de Taylor en ce point). Nous obtenons dans la section 3.2 de [H4] une asymptotique Gevrey en imposant de plus une condition diophantienne à un tel point.

Plus précisément, nous définissons d'une part les *diophantiens d'exposant τ* par

$$\mathbf{CD}_\tau = \{ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall n/m \in \mathbb{Q}, |y - n/m| \geq \gamma m^{-\tau} \}$$

et $\underline{\mathbf{CD}}_\tau = \{ \lambda = e^{2\pi i y}, y \in \mathbf{CD}_\tau \}$ (il est bien connu que τ doit être ≥ 2 et que $\underline{\mathbf{CD}}_\tau$ est de mesure pleine pour $\tau > 2$). D'autre part, étant donné un espace de Banach B , un

point λ du cercle unité et une suite $\{M_n\}_{n \geq 0}$ de réels > 0 , nous définissons la classe de Carleman $\mathcal{C}^-(\lambda, \{M_n\}, B)$ comme l'ensemble des fonctions f à valeurs dans B pour lesquelles il existe un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{D}$ tangent à \mathbb{S}^1 en λ , une série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n Q^n \in B[[Q]]$ et des réels $c_0, c_1 > 0$ tels que

$$\forall N \geq 0, \forall q \in \Delta, \quad \|f(q) - \sum_{0 \leq n \leq N-1} a_n (q - \lambda)^n\| \leq c_0 c_1^N M_N |q - \lambda|^N.$$

Le développement asymptotique $\sum a_n Q^n \in B[[Q]]$ d'une telle fonction est noté $J_\lambda^-(f)$. L'espace $\mathcal{G}_\tau^-(\lambda, B)$ des fonctions holomorphes dans un petit disque intérieur à \mathbb{D} et admettant un développement asymptotique Gevrey- τ en λ est obtenu en choisissant la suite $M_n = \Gamma(1 + n\tau)$. Les espaces $\mathcal{C}^+(\lambda, \{M_n\}, B)$ et $\mathcal{G}_\tau^+(\lambda, B)$ sont définis symétriquement en utilisant des disques $\Delta \subset \mathbb{E}$. On définit enfin $\mathcal{C}(\lambda, \{M_n\}, B)$ comme l'espace des fonctions f pour lesquelles il existe des disques $\Delta^- \subset \mathbb{D}$ et $\Delta^+ \subset \mathbb{E}$ tels que $f|_{\Delta^-} \in \mathcal{C}^-(\lambda, \{M_n\}, B)$, $f|_{\Delta^+} \in \mathcal{C}^+(\lambda, \{M_n\}, B)$ et $J_\lambda^-(f) = J_\lambda^+(f)$, et $\mathcal{G}_\tau(\lambda, B) = \mathcal{C}(\lambda, \{\Gamma(1 + n\tau)\}, B)$.

Notre résultat peut alors s'énoncer ainsi :

$$\text{si } \tau \geq 2 \text{ et } \lambda \in \underline{\text{CD}}_\tau, \quad \mathcal{M}((K_j), B) \subset \mathcal{G}_\tau(\lambda, B).$$

Cela vaut pour toutes les fonctions monogènes associées à la suite (K_j) définie plus haut, donc aussi pour toutes les solutions de l'équation cohomologique.

5.4 Nous disposons donc de développements asymptotiques en de nombreux points du cercle unité pour nos solutions f_g^\pm . Il est naturel de se poser la question de la quasi-analyticité, qui consiste à demander si l'on peut reconstituer les fonctions f_g^+ et f_g^- à partir de la seule donnée de leur développement asymptotique en un point du cercle unité, par exemple un point de $\underline{\text{CD}}_\tau$.

De façon légèrement plus abstraite, un espace de fonctions \mathcal{F} est dit quasi-analytique en un point λ si toute fonction de \mathcal{F} admet un développement asymptotique en λ et si deux fonctions différentes de \mathcal{F} ont des développements asymptotiques différents. Dans le cas des classes de Carleman $\mathcal{C}(\lambda, \{M_n\}, B)$, on dispose du critère de Carleman : la quasi-analyticité équivaut à la divergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\beta_n}$, où $\beta_n = \inf_{n' \geq n} \{M_{n'}^{1/n'}\}$.

On en déduit par exemple que $\mathcal{G}_1(\lambda, B)$ est quasi-analytique en λ , mais que les espaces $\mathcal{G}_\tau(\lambda, B)$ avec $\tau > 1$ ne le sont pas.

Dans les sections 3.3–3.5 de [H4], la question est examinée en détail pour les points $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, avec α irrationnel quadratique (c'est-à-dire algébrique de degré 2). Il est bien connu que nécessairement $\lambda \in \text{CD}_2$; par conséquent la solution fondamentale f_δ appartient à l'espace $\mathcal{G}_2(\lambda, B_r)$ (pour tout $r \in]0, 1[$), qui n'est pas quasi-analytique. Nous montrons qu'en fait *il n'existe pas de classe de Carleman $\mathcal{C}(\lambda, \{M_n\}, B)$ qui soit quasi-analytique en λ et qui contienne f_δ .*

Mais par ailleurs, dans la section 4.4 de [H4], nous utilisons le produit de Hadamard et les particularités de notre problème pour construire *un sous-espace quasi-analytique de $\mathcal{G}_2(\lambda, B)$ qui contient les solutions pour $\lambda \in \underline{\text{CD}}_2$* (mais ce n'est pas une classe de Carleman).

Références

Articles que je présente en vue de l'habilitation

- [H1] D. Sauzin, "A new method for measuring the splitting of invariant manifolds," *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. **34** (2001), 159–221.
- [H2] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems," *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. **96** (2002), 199–275.
- [H3] V. G. Gelfreich, D. Sauzin, "Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map," *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, t. **51**, 2 (2001), 513–563.
- [H4] S. Marmi, D. Sauzin, "Quasi-analytic monogenic solutions of a cohomological equation," *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. **164**, no. 780 (2003), vi+83 pp.

Autres articles que j'ai écrits seul ou en collaboration

- [A1] D. Sauzin, "Caractère Gevrey des solutions formelles d'un problème de moyennisation," *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. **315**, Série I (1992), 991–995.
- [A2] D. Sauzin, "Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé," *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, t. **45**, 2 (1995), 453–511.
- [A3] C. Bonet, D. Sauzin, T. M. Seara, M. València, "Adiabatic invariant of the harmonic oscillator, complex matching and resurgence," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. **29**, 6 (1998), 1335–1360.
- [A4] A. Berretti, S. Marmi, D. Sauzin, "Limit at resonances of linearizations of some complex analytic dynamical systems," *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, Vol. **20**, 4 (2000), 963–990.
- [A5] P. Lochak, J.-P. Marco, D. Sauzin, "On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems," *Memoirs of the American Mathematical Society* **163**, no. 775 (2003), viii+145 pp.
- [A6] C. Olivé, D. Sauzin, T. Seara, "Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation," *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, t. **53**, 4 (2003) [actes du colloque "Singularités, équations différentielles et aspects mathématiques de la physique quantique" en l'honneur de F. Pham, Nice, 1–5 juillet 2002], 1185–1235.
- [A7] J.-P. Marco, D. Sauzin, "Wandering domains and random walks in Gevrey near-integrable systems," à paraître dans *Ergodic Theory & Dynamical Systems en 2004* (volume spécial à la mémoire de M. Herman), 50 pp.

Résumés écrits à l'occasion de rencontres internationales

- [R1] D. Sauzin, "A new method for measuring the splitting of invariant manifolds," *Proceedings of the International Conference on Differential Equations*, Berlin, 1–7 August 1999, edited by B. Fiedler, K. Gröger and J. Sprekels, World Scientific, Vol. 1, 961–966, 2000 (*d'après [H1]*).

- [R2] C. Olivé, D. Sauzin, T. M. Seara, “Two examples of resurgence,” à paraître dans un volume de *Contemporary Mathematics contenant les actes du colloque “Analyzable Functions and Applications,” ICMS, Edinburgh, 17–21 June 2002*, 17 pp. (d’après [H3] et [A6]).
- [R3] D. Sauzin, “Nekoroshev estimates and instability for Gevrey class Hamiltonians,” *Dynamical Systems, Part I : Hamiltonian systems and celestial mechanics — Proceedings Pisa 2002*, Pubblicazioni della classe di scienze, Scuola Normale Superiore, Pisa, Centro di ricerca matematica “Ennio De Giorgi” : Proceedings, 199–217, 2003 (d’après [H2]).

Autres publications

- [JS1] D. Sauzin, “Résurgence et séparatrices,” *Journées scientifiques du service des calculs et de mécanique céleste du Bureau des longitudes 1994*, Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes **S050**, 75–79, avril 1995.
- [JS2] D. Sauzin, “Moyennisation Gevrey,” *Journées scientifiques du service des calculs et de mécanique céleste du Bureau des longitudes 1997*, Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes **S056**, 31–33, octobre 1997.
- [JS3] D. Sauzin, “Séries Gevrey et théorème de Nekhoroshev,” *Journées scientifiques 2000 de l’Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides*, Notes scientifiques et techniques de l’Institut de Mécanique Céleste **S076**, 145–147, juin 2001.
- [JS4] D. Sauzin, “Exemples non analytiques de diffusion d’Arnold,” *Journées scientifiques 2003 de l’Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides*, mai 2003, 5 pp.
- [BSCM] T. M. Seara, D. Sauzin, “Resumació de Borel i teoria de la ressurgència,” *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, Vol. **18**, nùm. 1, 129–151, 2003.

Autres références citées dans le texte

- [Arn64] V. I. Arnold, “Instability of dynamical systems with several degrees of freedom,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156** (1964), 9–12; *Soviet Math. Dokl.* **5** (1964), 581–585.
- [AA67] V. I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [Be96] U. Bessi, “An approach to Arnold’s diffusion through the calculus of variations,” *Nonlinear Anal. TMA* **26** (1996), 1115–1135.
- [Be97] U. Bessi, “Arnold’s example with three rotators,” *Nonlinearity* **10** (1997), 763–781.
- [Bo17] E. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d’une variable complexe*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.
- [CNP93] B. Candelpergher, J. C. Nosmas, and F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1993.

- [DGJS97] A. Delshams, V.G. Gelfreich, À. Jorba and T. M. Seara, *Exponentially small splitting of separatrices under fast quasi-periodic forcing*, Commun. in Math. Phys. **189** (1997), 35–71.
- [Eca81] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes, vol. 2*, Publ. Math. d’Orsay, Paris, 1981.
- [Eca85] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes, vol. 3*, Publ. Math. d’Orsay, Paris, 1985.
- [Lo90] P. Lochak, “Effective speed of Arnold diffusion and small denominators,” *Physics Letters A* **143** (1990), 39–42.
- [LN92] P. Lochak and A.I. Neishtadt, “Estimates in the theorem of N. N. Nekhoroshev for systems with a quasi-convex Hamiltonian,” *Chaos* **2** (1992), 495–499.
- [Mal95] B. Malgrange, “Resommation des séries divergentes,” *Expo. Math.*, **13** (1995), 163–222.
- [Pö93] J. Pöschel, “Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems,” *Math. Z.* **213** (1993), 187–216.
- [Ra93] J.-P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et synthèses, Suppl. au Bull. de la Soc. Math. de France **121** (1993).

David Sauzin
 CNRS – IMCCE (UMR 8028)
Astronomie et systèmes dynamiques
 77 av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris.
 E-mail : sauzin@imcce.fr