Mercator et sa projection

Idées conçues et préconçues...

En sortant du Moyen-Age, la navigation, jusque là affaire d'explorateurs intrépides ou d'aventuriers inconscients, est devenue une entreprise politique à forte plus-value commerciale. L'armateur – prince ou riche marchand – voulait que ses bateaux prennent les routes les plus courtes et arrivent à bon port à coup sûr.
Gerhard Kremer est né en 1512 à Rupelmonde, près d'Anvers. Comme beaucoup de scientifiques de son époque, il a latinisé son nom, Kremer (« marchand » en flamand) devenant Mercator. Mathématicien, géographe, fabriquant de globes, il a vite compris le besoin des navigateurs : approcher l'orthodromie par une suite de loxodromies. Expliquons-nous !

Le chemin le plus court entre deux points A et B à la surface d'une sphère, appelé *orthodromie*, est le grand cercle qui passe par A et B, i.e. l'intersection de la sphère avec le plan qui contient A, B et le centre de la sphère. On sait que l'orthodromie qui relie Paris à Tokyo passe près du pôle nord – comme on le voit sur un globe – et non pas sur l'Inde – comme on le croirait en regardant une mappemonde –.

Projections cartographiques jusqu'à la Renaissance.

On ne parle de projection que si on admet que la Terre est ronde... Au Moyen-Age, à la suite des croisades, l'Europe a pris connaissance de la *Géographie* de Ptolémée, traduite du grec à l'arabe, puis de l'arabe au latin. Ptolémée recommande une projection assez compliquée, qui conserve les surfaces. C'est sous cette projection qu'on voit aujourd'hui les cartes de Ptolémée, faites au XVe siècle.

C'est à cette époque que nait véritablement la cartographie. La première projection vraiment novatrice est celle d'Oronce Fine, en 1530. Premier titulaire de la chaire de mathématiques au Collège de France qui vient d'être créé, Fine invente une projection en forme de cœur qui conserve les surfaces, comme on le voit sur la Figure 1 . À partir de cette époque, de nombreuses projections vont voir le jour. Elles vont être dominées par la personnalité écrasante de Mercator dans ce domaine.

Cartes à l'usage de la navigation

A la Renaissance, les navigateurs, convaincus depuis un siècle que la Terre était ronde, savaient évaluer le tracé de l'orthodromie. Mais pour la suivre, quand on pilote un bateau, c'est une autre affaire ! Ce que sait faire un bon marin, c'est garder un cap constant : la trajectoire du bateau fait toujours le même angle avec la direction du nord. Cette route à cap constant s'appelle la *loxodromie*. Le travail du navigateur était donc d'abord d'établir l'orthodromie entre les deux points représentant le départ et l'arrivée de sa nef, puis de couper cette ligne en quelques segments continus et, sur chaque segment, de remplacer l'orthodromie par la loxodromie correspondante : le chemin était légèrement allongé, mais il était plus aisé de le suivre correctement.

Mercator compris vite l'intérêt scientifique, mais surtout commercial (il était aussi éditeur de cartes) à établir des cartes à l'usage de la navigation, *ad usum navigantium*, comme il note sur ses cartes. Pour qu'elles aient un grand intérêt pour les armateurs, il fallait que ces cartes soient en projection conforme, c'est-à-dire qu'elles conservent les angles : un cap maintenu à 30 degrés nord-ouest en bateau est une ligne qui fait, sur une carte conforme, un angle de 30 degrés avec le nord, vers l'ouest.

FIGURE 1 – Représentation de la Terre entière avec la projection d'Oronce Fine (1530). On a superposé le contour des continents avec la même projection (logiciel Atlas). Si on compare avec le tracé original de Fine, on constate que les latitudes des différents points du globe sont exactes, mais les longitudes sont dilatées.
© *MC(LMD)*

La projection stéréographique, connue depuis l'antiquité grecque, est conforme, mais elle n'est pas pratique pour les cartes marines. Les marins veulent des cartes où les méridiens sont parallèles sur la carte, ce qui facilite la lecture des longitudes. Ces projections sont dites cylindriques.
Mercator s'est donc attelé au problème suivant : créer une projection cylindrique conforme.

La projection de Mercator

Sur le globe, les méridiens se rapprochent à mesure qu'on s'approche des pôles (la distance représentée par un degré en longitude, qui est de 111 km à l'équateur, n'est plus que de 78 km à la latitude de 45° et est 0 km au pôle). Par contre, un degré de latitude est toujours équivalent à 111 km (la Terre étant considérée comme une sphère et non un ellipsoïde).

Mercator a donc l'idée suivante : si l'on veut que les angles soient conservés, en gardant les méridiens équidistants sur la carte, il faut espacer de plus en plus les latitudes à mesure que l'on va vers les pôles. Et, à la limite, les pôles, nord et sud, seront repoussés à l'infini. Mercator calcule donc cet espacement des latitudes et trouve la fonction qui relie la latitude φ avec sa position, sa distance par rapport à l'équateur sur la carte, notée L. Cette fonction $L(\varphi)$ est appelée *fonction de Mercator* ou fonction des latitudes croissantes.

L'enjeu commercial était énorme. C'est pourquoi Mercator n'a jamais donné « sa » formule. On ne sait pas exactement comment il l'a calculée, mais on en a une idée, comme on l'évoque ci-après : avec les notations d'aujourd'hui, le problème de Mercator se résout rapidement.

Si on note par $\Delta\lambda$ l'écart entre deux méridiens à l'équateur, il est égal à $\Delta\lambda.\cos\varphi$ à la latitude φ. Avec un petit dessin, on voit facilement que, si on veut garder les méridiens parallèles entre eux, il faut que les latitudes s'éloignent comme $(1/\cos\varphi)$ pour que la projection reste conforme. Finalement, $L(\varphi)$ s'obtient par intégration de $(1/\cos\varphi)$, fonction qu'on appelait autrefois sécante, ou $\sec\varphi$, entre l'équateur (latitude $\varphi = 0$) et la latitude cherchée φ.

Cette primitive, qui fait intervenir logarithme et tangente, fut un classique des classes de terminale :

$$L(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{du}}{\cos u} = \log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Mercator ne connaissait ni la notion d'intégration ou de primitive, ni les logarithmes. Et pour cause ! Il aurait été en avance sur son temps, comme le montre le Tableau 1, tiré de Jean Lefort (*L'aventure cartographique*. Ed. Belin, 2004). Mercator connaissait par contre la fonction cosinus et il a donc réalisé une intégration en ajoutant numériquement les valeurs successives de $(1/\cos\varphi)$, en partant de l'équateur. D'après la précision des résultats, il apparaît qu'il a pris un pas de cinq degrés.

La réussite scientifique et commerciale de Mercator fut manifeste. Il établit un recueil de cartes, qu'il appela « Atlas », pour lesquelles il utilise la projection stéréographique et sa nouvelle projection. Son fils Romuald continua l'entreprise. Il s'agit là d'une double réussite : une réussite commerciale – la visite du musée Plantin-Moretus à Anvers permet de s'en convaincre –, et une réussite scientifique : la projection de Mercator est toujours utilisée, et pour longtemps encore.

Deux fausses idées très répandues

Pour terminer cette ode à Mercator, nous voudrions insister sur deux fausses idées très répandues à propos de sa projection : (i) sa construction, (ii) son côté politiquement incorrect !

On trouve par exemple dans *Cartes et figures de la Terre* (page 235. Catalogue d'exposition. Centre Pompidou, 1980) : « Sa construction est très simple : imaginons un globe éclairé par une lampe située en son centre et enserrée dans un cylindre qui lui est tangent à l'équateur. La projection des rayons sur ce cylindre une fois déroulé donne la projection de Mercator » C'est évidemment une énorme bêtise, une fausse idée à propos de la projection cylindrique. Par quel miracle une telle construction conduirait-elle à une projection conforme ? Pauvre Mercator ! La projection obtenue par simple projection existe : c'est la projection dite développée. Elle n'a aucune propriété, aucun intérêt, et ne sert à rien si ce n'est à montrer que ce n'est pas la projection de Mercator. Nous avons calculé la surface sur laquelle il faudrait projeter un rayon issu du centre de la sphère pour obtenir $L(\varphi)$: comme le montre la Figure 2 , il est clair que cette surface n'est pas un cylindre.

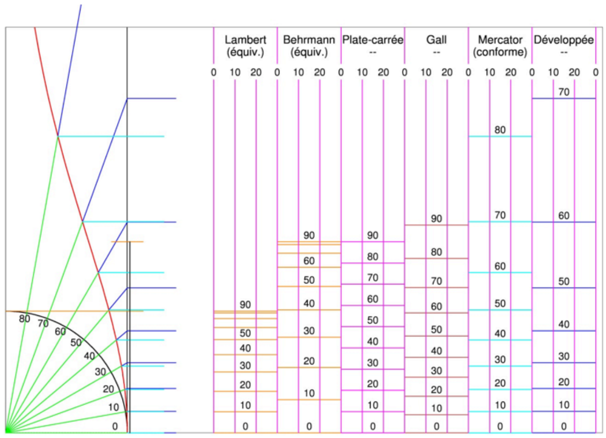

FIGURE 2 – La projection de Mercator. Dans le coin bas gauche, le centre de la sphère (seul un quart de sphère est représenté), avec graduation des latitudes de 10° en 10°. Le cylindre tangent à la sphère est dessiné. Entre le cylindre et la sphère, la surface (représentée par une courbe rouge) sur laquelle la projection de rayons donne les latitudes de la projection de Mercator. La projection sur le cylindre donne la projection développée. L'intersection des rayons avec la sphère, projetée sur le cylindre, donne la projection cylindrique équivalente de Lambert. On a noté de plus trois autres projections cylindriques. © *MC(LMD)*

On trouve même certains propos politiques évoquant la projection de Mercator, comme s'il pouvait y avoir une quelconque volonté impérialiste dans l'utilisation d'une projection ou d'une autre, répandue certes pour les raisons évoquées ci-dessus. On trouve par exemple dans la préface de *L'état du Monde* (Edition 1982, Maspero) par Jean Chesneaux : « Toute projection déforme inévitablement. Aucune n'est innocente. La projection classique de nos vieux atlas scolaires est celle de Mercator, basée sur un quadrillage factice. [...] Les zones tempérées (= blanches) tiennent une place disproportionnée. [...] Cette image idéologique sournoise ... ».

On peut également citer le Programme des Nations Unies pour le Développement (PNUD), cité dans *Les arpenteurs de la Terre*, Courrier de l'Unesco, juin 1991, et qui mentionne : « Au XVIe siècle, à une époque où l'Europe étendait ses empires coloniaux, on ne s'inquiétait pas des déformations de la carte de Mercator. Pourtant, aujourd'hui encore et bien que le colonialisme appartienne largement au passé, la carte de Mercator garde toujours une grande partie de son influence. » A lire ceci, il semble que la projection de Mercator, seule projection cylindrique à être conforme, est devenue infréquentable ! Tout cela nous paraît aussi ridicule que de dire que les logarithmes sont colonialistes et les tangentes racistes !

Pour plus de précisions, on pourra consulter :

- Michel Capderou, *Satellites – de Kepler au GPS*, Springer, 2012.
- Michel Capderou,*Handbook of satellite orbits*, Springer, 2014.
- Le logiciel de cartographie `Atlas` et le logiciel d'orbitographie `Ixion` ont été développés par Michel Capderou, au LMD/CNRS (Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Polytechnique). `Atlas` est intégré à `Ixion` et est consultable sur le site suivant : `http://climserv.ipsl.polytechnique.fr/ixion/index.php` . Le logiciel `Atlas` propose environ 150 projections, classées par type. On peut les tracer sous tous les aspects (direct, transverse, oblique), en choisissant le centre de projection et le centre de zoom.

Ce document fait partie de la Lettre d'Information de juillet 2016 de l'IMCCE. Il est inspiré d'une série de conférences donnée au printemps 2016 par Michel Capderou (LMD / Ecole Polytechnique). Voir `http://www.imcce.fr` pour l'accès aux archives et la gestion des abonnements.

TABLE 1 – Chronologie relative à la fonction de Mercator. (d'après Jean Lefort).

1569	Mercator	Résolution graphique et sommation de $(1/\cos\varphi)$ avec un pas de 5°.
1599	Wright	*Certaine errors in navigation*. Sommation de $(1/\cos\varphi)$ avec un pas de $1'$.
1610	Neper	Invention des logarithmes.
1645	Bond	Etablit la similitude entre les résultats de Wright et les tables de Neper.
1668	Gregory	Début du calcul infinitésimal, et démonstration rigoureuse du calcul de la fonction de Mercator.

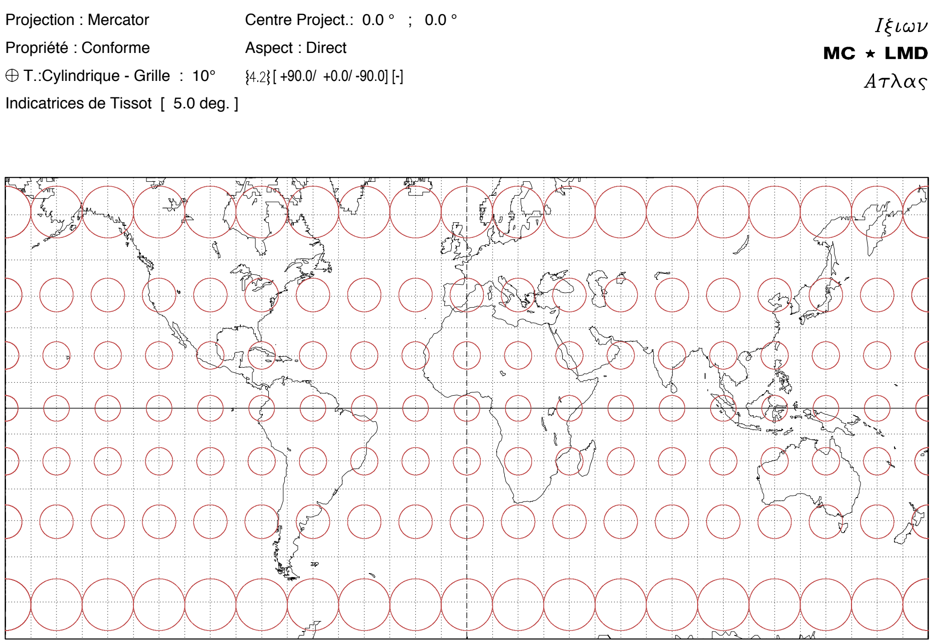

FIGURE 3 – La projection de Mercator, réalisée avec le logiciel Atlas. En 1881, le polytechnicien N. Tissot, géodésien et astronome, invente l'*indicatrice* qui porte son nom. On trace un cercle infinitésimal sur la sphère, et on le représente sur une carte, avec la projection choisie. Tissot démontre que ce cercle devient une ellipse, de demi-axes (perpendiculaires) a et b. Si $a = b$ pour tout point de la carte (c'est-à-dire que l'ellipse est partout un cercle), la projection est conforme ; les cercles, selon l'endroit où ils se trouvent, sont de tailles différentes. Si le produit $a.b$ est constant (toutes les ellipses ont même surface), la projection est équivalente ; les ellipses, quel que soit l'endroit où elles se trouvent, ne sont pas des cercles (sauf peut-être en un nombre fini de points). L'indicatrice de Tissot est ici représentée pour la projection de Mercator avec un pas de cinq degrés. © *MC(LMD)*