Le calcul des dates de Pâques.

P. ROCHER, © INSTITUT DE MECANIQUE CELESTE ET DE CALCUL DES EPHEMERIDES – OBSERVATOIRE DE PARIS

Le 3 septembre 2014

Les différentes « Pâque(s) »

On distingue deux Pâques : la Pâque israélite (sans s) et les Pâques chrétiennes (avec un s). Ces deux fêtes sont des fêtes religieuses. En ancien français et en moyen français, les fêtes juive et chrétienne étaient désignées indifféremment par *Pasque* ou *Pasques* ; c'est seulement après le XVe siècle que la distinction sémantique a été marquée par la graphie, *Pasque* désignant la fête juive et *Pasques* la fête chrétienne.

La Pâque israélite

La Pâque israélite *Pessa'h* (פסח ce qui signifie passage, en anglais *Passover*) commémore la sortie d'Égypte, elle a lieu à date fixe dans le calendrier hébraïque (le 15 du mois de nisan — milieu du mois lunaire) et dure 8 jours (7 jours en Israël). À cette occasion les Israélites mangent du pain azyme (sans levain) en souvenir de la précipitation qui caractérisa l'évasion du peuple juif, qui n'avait pas eu le temps de faire lever la pâte ; d'où son nom de fête des Azymes. Cette fête a également un aspect agricole : lorsque les Hébreux s'installèrent en Eretz, ils apportèrent le deuxième jour de *Pessa'h* une offrande d'orge hivernale, qui à cette période était généralement mûre. Cette offrande l'*Omer* (l'*omer* est une mesure d'orge torréfiée) était apportée devant le peuple qui pouvait manger le grain nouveau. C'est en souvenir de cela que les Israélites comptent maintenant l'*Omer* durant 49 jours, à partir du second soir de *Pessa'h*, jusqu'à *Shavouoth* (Pentecôte ou Fête des Semaines). Comme on le voit, ces fêtes sont intimement liées à la fois à la lunaison et au cycle naturel des saisons d'où la nature luni-solaire du calendrier hébraïque. La détermination de la fête de *Pessa'h* ne demande aucun calcul. Cette fête comme toutes les autres fêtes hébraïques est fixe dans le calendrier. Il suffit de pouvoir calculer à l'avance le calendrier hébraïque. Ce calcul n'est possible que depuis le milieu du quatrième siècle chrétien en 359, date à laquelle le patriarche Hillel II décida d'introduire un calendrier fixe basé uniquement sur le calcul astronomique (lunaison moyenne et année tropique moyenne) et de ne plus avoir recours à l'observation. Ce calendrier est toujours en usage de nos jours.

La date de Pâques chrétienne

Selon les Évangiles (Matthieu, Marc et Luc) le Christ et les apôtres se réunirent le soir du 14 nisan (jeudi), le Christ fut condamné par Ponce Pilate et crucifié le lendemain (vendredi) et ressuscita le surlendemain (dimanche). Depuis le deuxième siècle, les premiers chrétiens commémorèrent différemment ces événements. Certains célébrèrent la passion du Christ le 14 nisan et furent qualifiés de « Quartodécimans », d'autres célébrèrent la résurrection du Christ, soit trois jours après *Pessa'h*, soit le dimanche après *Pessa'h* et d'autres (premières églises des Gaules) célébrèrent cette résurrection à date fixe : le jour de l'équinoxe de printemps des Romains (le 25 mars). On eut donc plusieurs dates différentes pour célébrer Pâques et ces dates (à l'exception du 25 mars) étaient liées à la date de la Pâque juive. Cette pratique changea à la suite du premier concile œcuménique qui se tint à Nicée (aujourd'hui Iznik en Turquie). Ce concile avait été réuni en 325 par l'Empereur Constantin Ier pour éviter un risque de schisme au sein de l'église chrétienne suite à l'apparition de l'arianisme dans l'église d'Alexandrie. C'est au cours de ce concile que les prélats auraient décidé de fixer la date de Pâques *au premier dimanche qui suit le 14e jour de la Lune qui atteint cet âge à l'équinoxe de printemps ou immédiatement après*, l'équinoxe de printemps étant fixé au XII des Calendes d’avril (21 mars). En réalité, aucun texte conservé de ce concile ne donne cette définition. Les seules sources qui nous soient parvenues de ce concile sont : le *Symbole de la Foi*, les 20 canons du concile, une liste vraisemblablement incomplète des membres du concile et une lettre synodale (lettre circulaire épiscopale) adressée à l'Église d'Alexandrie. Dans cette lettre on apprend que « *Nous vous annonçons la bonne nouvelle de l'accord réalisé sur la sainte Pâque, parce que grâce à vos prières cette question aussi a été réglée : tous les frères de l'Orient, qui auparavant célébraient avec les Juifs, seront fidèles à célébrer désormais la Pâque en accord avec les Romains, avec vous et avec nous tous qui le faisions depuis le début avec vous* ». Il existe également une lettre encyclique de Constantin aux Églises qui mentionne la solution retenue pour la date de Pâques : "*La Pâques Chrétienne doit être célébrée le même jour par tous; et pour le calcul de la date, il ne faut faire aucune référence aux Juifs. Ce serait humiliant et de plus il est possible pour eux d'avoir deux Pâque en une même année. En conséquence, les Églises doivent se conforter aux pratiques suivies par Rome, l'Afrique, l'Italie, l'Égypte, l'Espagne, les Gaules, la Brittonie, la Lybie, la Grèce, l'Asie, le Pont et la Cilicie.*" À ces documents, il convient d’ajouter deux passages des écrits de St Athanase, témoin oculaire.

Supprimant le recours direct au calendrier hébraïque, la date de Pâques chrétienne n’en reste pas moins tributaire du cycle lunaire (si l’on prend comme âge de la Lune le quantième du mois lunaire, l’âge de la nouvelle Lune est 1, à l’époque on estimait que la pleine Lune était le 15^{e} jour de la Lune, le 14^{e} jour de la Lune était donc la veille de la pleine Lune,), du cycle solaire (pour l’équinoxe de printemps) et d’un cycle hebdomadaire avec le jour de la semaine (dimanche). Les chrétiens vont devoir établir un calendrier luni-solaire qui ne va servir qu’à la détermination de la date de Pâques. Le calcul de la date de Pâques est un problème de concordance entre ce calendrier luni-solaire et le calendrier julien. Ce problème se résout en trois temps : trouver les débuts des mois lunaires proches de l’équinoxe de printemps, regarder si le 14^{e} jour de ce mois tombe le 21 mars ou après et trouver le premier dimanche qui lui succède.

Les prélats quittèrent le concile avec une définition commune de la date de Pâques, mais sans une méthode unique pour la calculer. Chaque église utilisa une solution particulière, les différences provenant de l’élaboration des tables lunaires pour construire le calendrier luni-solaire.

Les Alexandrins utilisèrent le cycle de Méton (19 ans ou 235 lunaisons) dans les tables de l’évêque d’Alexandrie Théophile (370 - 444) (tables allant de 380 à 480) puis dans les tables de son successeur Cyrille d'Alexandrie (376 - 444) (tables allant de 436 à 531).

À Rome, après avoir utilisé au III^{e} siècle une table pascale élaborée par Saint Hyppolite (217-229) (basée sur un cycle de 16 ans) on utilisa un cycle de 84 ans (4 cycles de Méton de 19 ans plus un cycle octaéride de 8 ans) connu sous le nom de cycle d’Augustalis. Les dates entre lesquelles la date de Pâques pouvait tomber étaient fixées pour la Lune entre le XIV et le XX du mois lunaire et pour le Soleil entre le 25 mars et le 21 avril. En 312 et en 343 ce système subit quelques modifications (on modifia le terme lunaire – XVI et XXII du mois lunaire et le terme solaire – 22 mars et 21 avril). En 343 on fit reculer le début du cycle pascal à l’an 29. À partir de 457, Victorius d’Aquitaine adopta une nouvelle méthode basée sur le cycle alexandrin de 19 ans et sur le cycle dominical (28 ans) créant ainsi le *Computus Pascali* de 532 ans.

L’ensemble des computs fut unifié en 525 par le moine scythe Denys-le-Petit qui prolongea, à la demande du Pape Jean 1er , les tables de Cyrille et créa un nouveau comput (*Libellus de ratione Paschae*) basé sur le cycle de Méton et le cycle dominical. Dans ses tables, Denis-le-Petit utilisa comme origine des dates la naissance du Christ qu’il fixa au 25 décembre de l’an

753 de la fondation de Rome. Il instaura ainsi l'usage de l'ère chrétienne (*Anno Domini*). Il ne faut pas croire que le comput dionysien ait fait l'unanimité, de nombreux régions et pays tardèrent à l'adopter, ce fut le cas notamment en Gaule ou dans les pays celtiques (Bretons et Irlandais) qui firent de l'obstruction jusqu'au synode de Withby (664). Le monastère de Iona (au large de l'Écosse) garda un comput celtique jusqu'en 716. On peut estimer que la computation dionysienne ne sera totalement acceptée par l'ensemble de la chrétienté qu'à la fin du VIII^e siècle, où le comput pascal et l'usage de l'ère chrétienne furent popularisés par les écrits de Bédé-le-Vénérable (*De temporum ratione*, vers 725).

L'élaboration de la date de Pâques à partir du comput dionysien.

Notations et formulaires.

Dans la suite de cet article nous allons noter le millésime d'une année *a*, ce millésime peut également se développer de la manière suivante : $a = 100s + m$, on notera $\lfloor x / y \rfloor$ la division entière de *x* par *y*. Le reste de la division entière d'un entier *a* par un entier *b* sera noté $a \bmod b$ (a modulo b).

Avec ces notations on a : $s = \lfloor a/100 \rfloor$, $m = a \bmod 100$

Les formules donnant les éléments des computs ne seront pas démontrées, leur démonstration est simple et rapide si l'on utilise le formalisme élaboré par Albert Troesch dans son article *Droites discrètes et calendriers* (1992).

Le comput dionysien porte également le nom de comput julien. Comme nous l'avons déjà signalé, ce comput est basé sur deux cycles. Un cycle luni-solaire, le cycle de Méton, qui traduit que 235 lunaisons moyennes correspondent à environ 19 années tropiques moyennes. Un cycle dominical (appelé également cycle solaire) qui traduit avec quelle période les dimanches tombent les mêmes jours dans l'année. Ce cycle est égal à 28, le produit du nombre de jours de la semaine (7) par le cycle des années bissextiles du calendrier julien (4 ans). Le cycle de 19 ans et le cycle de 28 ans donnent un cycle de 532 ans, au bout duquel la date de Pâques retombe le même jour dans l'année. Le comput est donc un calendrier perpétuel luni-solaire. La Lune du comput n'est donc pas la vraie Lune, mais une Lune fictive qui porte le nom de *Lune ecclésiastique* ou de *Lune pascale*. Les dates limites de Pâques sont le 22 mars et le 25 avril inclus.

Le cycle de Méton du comput dionysien.

Le cycle de Méton du comput contient 235 lunaisons consécutives réparties en 115 lunaisons de 29 jours et 120 lunaisons de 30 jours si l'on ne compte pas les bissextes. Le tableau I donne la répartition de ces lunaisons et constitue le calendrier perpétuel lunaire du comput.

Nbre d'or	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1	23	***21***	23	***21***	21	***19***	19	***17***	16	***15***	14	***13***
2	12	***10***	12	***10***	10	***8***	8	***6***	5	***4***	3	***2***
3	***1***, 31		***1***, 31	***29***	29	***27***	27	***25***	24	***23***	22	***21***
4	20	***18***	20	***18***	18	***16***	16	***14***	13	***12***	11	***10***
5	9	***7***	9	***7***	7	***5***	5	***3***	***2***	2, ***31***	30	***29***
6	28	***26(27)***	28	***26***	26	***24***	24	***22***	21	***20***	19	***18***
7	17	***15***	17	***15***	15	***13***	13	***11***	10	***9***	8	***7***
8	6	***4***	***6***	5	***4***	3	***2***	1, ***30***	29	***28***	27	***26***
9	25	***23***	25	***23***	23	***21***	21	***19***	18	***17***	16	***15***
10	14	***12***	14	***12***	12	***10***	10	***8***	7	***6***	5	***4***
11	***3***	2	***3***	2	***1***, 31	***29***	29	***27***	26	***25***	24	***23***
12	22	***20***	22	***20***	20	***18***	18	***16***	15	***14***	13	***12***
13	11	***9***	11	***9***	9	***7***	7	***5***	4	***3***	2	***1, 31***
14	30	***28(29)***	30	***28***	28	***26***	26	***24***	23	***22***	21	***20***
15	19	***17***	19	***17***	17	***15***	15	***13***	12	***11***	10	***9***
16	8	***6***	8	***6***	6	***4***	4	***2***	***1***	1, ***30***	29	***28***
17	27	***25(26)***	27	***25***	25	***23***	23	***21***	20	***19***	18	***17***
18	16	***14***	16	***14***	14	***12***	12	***10***	9	***8***	7	***6***
19	5	***3***	***5***	4	***3***	2	1, 30	***28***	27	***26***	25	***24***

Tableau I : Calendrier perpétuel lunaire du comput dionysien.

Pour chaque année du cycle de Méton, on donne le début de chaque lunaison. Les mois solaires du calendrier julien pouvant avoir 30 et 31 jours il peut arriver qu'il y ait deux débuts de lunaison dans le même mois calendaire. Les années bissextiles le mois de février comporte un jour supplémentaire (le bissexte), dans ce cas le chiffre du jour entre parenthèses indique le numéro du jour du début de mois lunaire si le bissexte est placé le 29 février, alors que le premier chiffre correspond au numéro du jour avec doublement du 24 février comme cela était l'usage à l'époque. Les numéros en italique rouge correspondent aux débuts des mois lunaires de 30 jours. On remarque que les 3^{e}, 5^{e}, 8^{e}, 11^{e}, 13^{e}, 16^{e} et 19^{e} années du cycle sont embolismiques (13 mois lunaires), ce qui est conforme au cycle de Méton. On constate que la répartition des mois caves (29 jours) et des mois pleins (30 jours) est loin d'être uniforme. De plus lors d'une année bissextile, la lunaison comportant le bissexte a un jour de plus et l'on peut voir apparaître des lunaisons de 31 jours ou quatre lunaisons consécutives de 30 jours (la 11^{e} année du cycle). Ce calendrier perpétuel suit donc mal la lunaison vraie, mais cela n'a pas de conséquence, car on utilise que les débuts de lunaison de mars et d'avril. Le numéro de l'année dans le cycle de 19 ans porte le nom de nombre d'or (première colonne du tableau I). On remarque également qu'on passe d'une ligne à l'autre en décalant les débuts de lunaison de 11 jours (modulo 30) et que les lunaisons de mars sont des mois pleins (30 jours) lorsque le jour de la nouvelle Lune est antérieur au 7 mars, c'est-à-dire lorsque le 14^{e} jour de la Lune est antérieur au 21 mars, dans ce cas le début de la lunaison d'avril de l'année n'est pas décrémenté de 11 jours.

À l'aide de ce calendrier perpétuel, il est facile de déterminer quel est le 14^{e} jour de la Lune qui tombe le 21 mars ou après. Il suffit d'ajouter 13 aux débuts des mois lunaires commençant en mars ou éventuellement en avril et de regarder si on tombe avant ou après le 21 mars. On obtient ainsi le tableau suivant :

Nbre d'or	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Date	5 avril	25 mars	13 avril	2 avril	22 mars	10 avril	30 mars	18 avril	7 avril	27 mars
Nbre d'or	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Date	15 avril	4 avril	24 mars	12 avril	1 avril	21 mars	9 avril	29 mars	17 avril	

Tableau II :Dates des pleines Lunes pascales postérieures ou égales au 21 mars.

Il ne reste plus qu'à déterminer la date du premier dimanche suivant.

La Lettre dominicale.

Le système des lettres dominicales est en tout point identique au système des lettres nondinales utilisées par les Romains, la seule différence est la longueur du cycle. Les Romains utilisaient un cycle de huit jours et nous utilisons le cycle de sept jours liés à la semaine. Le principe est d'attribuer une lettre unique à chaque jour du calendrier. Pour cela on attribue une lettre différente à chaque jour de l'année avec un cycle de sept lettres (A,B,C,D,E,F,G) en commençant avec la lettre A pour le premier janvier. Les 365 jours d'une année commune contiennent 52 cycles de 7 lettres plus une lettre, donc le premier janvier et le 31 décembre ont la même lettre : A. Il se pose un problème pour les années bissextiles, si l'on désire que les jours suivants le bissexte conservent la même lettre que dans les années communes, on doit donner au jour du bissexte la même lettre que le jour précédant.

Mois	février						mars
Année commune	24	25	26	27	28		1
	F	G	A	B	C		D
Année bissextile bissexte 24bis	24	24bis	25	26	27	28	1
	F	F	G	A	B	C	D
Année bissextile bissexte 29	24	25	26	27	28	29	1
	F	G	A	B	C	C	D

Tableau III. Lettres dominicales au voisinage du bissexte.

Dans le tableau III, la première ligne donne la correspondance entre le quantième du jour et la lettre dominicale pour une année commune, la seconde ligne donne la correspondance pour une année bissextile avec le bissexte au 24bis et la dernière ligne donne la correspondance pour une année bissextile avec le bissexte au 29 février.

Pour une année donnée, la lettre dominicale est la lettre qui correspond au dimanche, si l'année est commune on voit qu'une seule lettre est nécessaire, tous les dimanches de l'année correspondent à cette même lettre. Pour les années bissextiles, on doit utiliser deux lettres, une première lettre pour désigner les dimanches entre le 1er janvier et la veille du bissexte, puis une seconde lettre pour désigner les dimanches sur la période s'étendant du jour du bissexte à la fin de l'année. Si on respecte cette définition, l'emploi du bissexte au 24bis ou au 29 février ne pose aucun problème. Pour la détermination du dimanche de Pâques, nous n'avons besoin que de connaître la seconde lettre dominicale pour les années bissextiles, la date de Pâques étant postérieure au bissexte.

Maintenant, voyons comment utiliser ce système. Les calendriers, dès l'époque carolingienne, comportaient les lettres dominicales et les nombres d'or, le tableau IV représente un calendrier liturgique restreint à la période allant du 21 mars au 25 avril, on a fait figurer les nombres d'or associés aux veilles des jours de pleine Lune et les lettres dominicales.

jour	Lj	n	jour	Lj	n	jour	Lj	n	jour	Lj	n	jour	Lj
21 mars	C	16	29 mars	D	18	6 avril	E		14 avril	F		22 avril	G
22 mars	D	5	30 mars	E	7	7 avril	F	9	15 avril	G		23 avril	A
23 mars	E		31 mars	F		8 avril	G		16 avril	A		24 avril	B
24 mars	F	13	1 avril	G	15	9 avril	A	17	17 avril	B	19	25 avril	C
25 mars	G	2	2 avril	A	4	10 avril	B	6	18 avril	C	8		
26 mars	A		3 avril	B		11 avril	C	11	19 avril	D			
27 mars	B	10	4 avril	C	12	12 avril	D	14	20 avril	E			
28 mars	C		5 avril	D	1	13 avril	E	3	21 avril	F			

Tableau IV : Calendrier limité à la période du 21 mars au 25 avril.

À l'aide du calendrier du tableau IV il est très facile de déterminer le dimanche de Pâques connaissant le nombre d'or (colonnes *n*) et la lettre dominicale de l'année (colonnes *Lj*).

Par exemple en 1401 le nombre d'or est 15 et la lettre dominicale est B alors le 14e jour de la pleine Lune est le 1er avril et le jour suivant possédant la lettre B est le 3 avril donc Pâques tombe le 3 avril en 1401. Attention, on doit toujours prendre le dimanche ***suivant*** le 14e jour de la Lune, ainsi si ce jour tombe un dimanche, ce n'est pas ce jour qui est le dimanche de Pâques, mais le dimanche suivant : par exemple si le nombre d'or est 8 et si la lettre dominicale est C, le 14e jour de la Lune est le 18 avril, c'est un dimanche (lettre dominicale C) mais le dimanche de Pâques est le suivant : 25 avril.

Il ne reste plus qu'à trouver une méthode pour calculer le nombre d'or et la lettre dominicale d'une année quelconque. C'est une chose très simple si l'on connaît l'origine des deux cycles. Denys-le-Petit a fait débuter son cycle en l'an 532 de l'ère chrétienne, le nombre d'or est le reste de la division euclidienne du millésime de l'année *a* moins 532 par 19 ($a - 532$ modulo 19) auquel on ajoute un, comme 532 est un multiple de 19, c'est aussi le reste de la division euclidienne du millésime *a* par 19, plus un :

$$n = (a \mod 19) + 1$$

La lettre dominicale s'obtient également facilement, en remarquant que cette lettre régresse d'une unité par année commune et de deux unités par année bissextile (365 modulo 7 = 1 et 366 modulo 7 = 2). Si on associe la suite (0,1,2,3,4,5,6) à la suite (A,B,C,D,E,F,G), le chiffre correspondant à la lettre dominicale d'une année *a* (ou la seconde lettre d'une année bissextile) s'obtient par la formule suivante :

$$L_j = \left(2 - \lfloor 5a/4 \rfloor\right) \mod 7$$

Remarque : le comput ecclésiastique comportait d'autres éléments qui ne servaient pas au calcul de la date de Pâques. Ces éléments étaient le cycle solaire, l'indiction romaine, les concurrents, les réguliers (réguliers solaires, réguliers annuels et réguliers lunaires), la lettre du Martyrologe et l'épacte (l'âge de la Lune au 22 mars). De nos jours cette épacte est nommée *épacte ancienne* pour ne pas être confondue avec l'épacte julienne ou l'épacte grégorienne.

Imperfections du comput dionysien.

Sa première imperfection est celle du calendrier julien. La valeur moyenne de l'année calendaire julienne est de 365,25 jours alors que l'année tropique moyenne est de 365,2420684 jours (en l'an I) et que l'écart moyen entre les équinoxes de printemps est de 365,242138 jours (en l'an I), l'équinoxe de printemps dérive dans ce calendrier d'environ un jour en 128 années (juliennes), chose que les computistes auraient pu remarquer, en effet l'équinoxe de printemps était passé du 25 mars au 21 mars entre l'époque de l'élaboration du calendrier julien par Jules César et la date du concile de Nicée.

La seconde imperfection provient du cycle de Méton. Le cycle de Méton du comput comporte 235 lunaisons ce qui correspond à 6939,68838 jours (si on prend une lunaison moyenne de 29,530588853 jours) et comme 19 années juliennes font 6939,75 jours, l'écart est de 0,06162 jour moyen (1h 28min) soit une dérive de la lunaison par rapport au calendrier julien d'un jour en 308 ans environ.

La première dérive n'est observable que par les astronomes qui mesurent l'équinoxe de printemps, la seconde n'est visible que si l'on compare le calendrier lunaire du comput avec la lunaison moyenne, au bout de dix siècles l'écart devient énorme (trois jours). Cela se répercute sur la date de Pâques qui parfois se trouve décalée d'un mois sur la réalité astronomique lorsque la nouvelle Lune pascale avoisine le 21 mars.

Ces imperfections seront signalées par de nombreux computistes au fil des années. Mais il faudra attendre la fin du XVIe pour voir apparaître une réforme du comput de la date de Pâques.

La réforme grégorienne et le nouveau comput.

La réforme grégorienne de 1582 est avant tout une réforme du comput pascal. Elle va aboutir à une modification du calendrier solaire avec l'abandon du calendrier julien et l'adoption du calendrier grégorien et avec une suppression de 10 jours au cours de l'année 1582. Cette nouveauté marqua beaucoup plus le public que la réforme pascale elle-même et cela reste vrai de nos jours.

Le problème du calendrier solaire fut réglé simplement, on supprima les dix jours de décalage constatés entre l'équinoxe de 1582 et le 21 mars afin de ramener l'équinoxe à sa date du concile de Nicée et non pas à l'équinoxe du début de l'ère chrétienne (pour cela il eût fallu supprimer 12 jours). On corrigea le calendrier julien en supprimant 3 années bissextiles sur une période de quatre siècles en gardant la règle de divisibilité par quatre du millésime, mais en rendant communes les années dont le millésime est un multiple de 100 sans l'être de 400.

Le problème luni-solaire fut beaucoup plus complexe à traiter. Il fallait construire une nouvelle Lune ecclésiastique qui dérivait moins et qui tenait compte du nouveau calendrier solaire. Pour cela on introduisit un nouvel élément qui se substitua au nombre d'or : l'épacte.

L'épacte julienne.

Les Grecs pour faciliter les calculs calendaires appelaient épactes (ou jours additionnels) le nombre de jours qu'il convenait d'ajouter à une année lunaire pour atteindre le début de l'année solaire. Cette notion va être reprise par les computistes. Si l'on définit l'âge de la Lune comme le quantième du mois lunaire, il varie donc de 1 à 30. L'épacte julienne d'une année est l'âge de la Lune du comput au 31 décembre de l'année précédente (c'est aussi l'âge de la Lune au premier janvier moins un). Pour avoir la valeur de l'épacte julienne Ej en fonction du nombre d'or n, il suffit donc de prendre la date du début de la lunaison de décembre de l'année n-1 et de la soustraire à 32.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
NL déc.	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	31	20	9	28	17	6	24
Ej	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26

Tableau V : Correspondance entre le nombre d'or et les épactes juliennes.

On s'aperçoit que ces nombres sont en progression arithmétique de raison 11 modulo 30. C'est-à-dire que chaque épacte se déduit de la précédente en ajoutant 11 et en soustrayant 30 lorsque le résultat est supérieur ou égal à 30. Sauf entre la dernière et la première épacte du cycle où il faut ajouter 12. Ce chiffre 11 est normal, c'est le nombre de jours (10,88j) qui sépare 12 lunaisons (354,367 jours) et 365,25 jours.

Comme on le voit, le système de l'épacte julienne est en tout point semblable au système du nombre d'or. On passe du nombre d'or *n* à l'épacte julienne *Ej* par la formule suivante :

$$Ej = (11n - 3) \mod 30$$
$$Ej = (11(a \mod 19) + 11 - 3) \mod 30$$
$$Ej = (11(a \mod 19) + 8) \mod 30$$

On remarque également que l'épacte ne peut prendre que 19 valeurs, or en réalité la pleine Lune peut tomber n'importe quel jour. Cette limitation traduit bien l'imperfection du calendrier lunaire du comput dionysien. Il faut donc modifier ce calendrier lunaire et permettre à la nouvelle Lune, donc à l'épacte, d'avoir 30 valeurs différentes. C'est ce que va proposer Aloisio Lilius aux membres de la commission réunie par le Pape Grégoire XIII pour réaliser la réforme du comput.

L'épacte grégorienne.

Dans le comput grégorien, la notion d'épacte va donc légèrement changer, on va conserver le cycle de 19 ans, mais il va y avoir des sauts d'épactes.

Pour tenir compte de la suppression des années bissextiles du calendrier grégorien par rapport au calendrier julien, on introduit un saut négatif d'épacte appelé *métemptose* (ou équation solaire ES), il a lieu chaque fois qu'on supprime une année bissextile, donc tous les millésimes multiples de 100 sans l'être de 400 : par exemple 1700, 1800, 1900, 2100, 2200… On vérifiera sans peine que le nombre de sauts d'épactes dus à l'équation solaire depuis l'adoption du comput grégorien s'obtient avec la formule suivante :

$$ES = \lfloor (3s - 45)/4 \rfloor$$

Pour compenser la dérive lunaire on va ajouter 8 jours sur une période de 25 siècles, un jour tous les trois siècles durant 21 siècles puis un jour quatre siècles plus tard pour terminer la période et atteindre 25 siècles. Ce saut positif porte le nom de *proemptose* (ou équation lunaire EL). Le cycle lunaire commençant en 1800, les premières *proemptoses* ont lieu en 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900 et le suivant en 4300. Le nombre de sauts d'épactes dus à l'équation lunaire depuis l'adoption du comput grégorien est donné par :

$$EL = \lfloor (8s - 112)/25 \rfloor$$

Pour tenir compte de ces sauts, l'épacte grégorienne prend une nouvelle définition, c'est l'âge de la Lune le premier janvier moins un, attention en raison des sauts d'épactes ce n'est plus forcément l'âge de la Lune au 31 décembre.

Le calendrier lunaire perpétuel grégorien.

Le nouveau calendrier perpétuel va corriger la dérive lunaire. Il va reprendre l'idée du cycle de Méton de 19 ans, on a donc toujours un nombre d'or qui indique le numéro de l'année dans ce cycle de 19 ans auquel va correspondre un cycle d'épacte. Ce cycle d'épacte ne sera plus constant il va varier pour compenser la dérive lunaire et la suppression des trois années bissextiles en quatre siècles du nouveau calendrier solaire.

Il y a deux façons de présenter ce calendrier : tabuler chaque jour de l'année et indiquer quels débuts de mois (épactes) tombent chaque jour de l'année (méthode utilisée par les computistes) ou bien tabuler la liste des épactes et lui associer les dates des débuts de lunaisons comme nous l'avons fait pour le calendrier lunaire dionysien. C'est cette seconde option que nous avons prise. En faisant cela nous allons faire disparaître une épacte numéro ***19*** dans le calendrier original de Lilius publié par Clavius en 1577, cette épacte qui n'apparaît qu’au 31 décembre n’a pas d’incidence sur le calcul de la date de Pâques, mais doit être prise en compte dans l’étude du calendrier lunaire perpétuel.

E_G	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
8	23	***21***	23	***21***	21	***19***	19	***17***	16	***15***	14	***13*** [13]
19	12	***10***	12	***10***	10	***8***	8	***6***	5	***4***	3	***2*** [2, ***31***]
0	***1 ,*** 31		***1,*** 31	***29***	29	***27***	27	***25***	24	***23***	22	***21*** [21]
11	20	***18***	20	***18***	18	***16***	16	***14***	13	***12***	11	***10*** [10]
22	9	***7***	9	***7***	7	***5***	5	***3***	2	***1,*** 31	***29***	***29*** [29]
3	28	***26(27)***	28	***26***	26	***24***	24	***22***	21	***20***	19	***18*** [18]
14	17	***15***	17	***15***	15	***13***	13	***11***	10	***9***	8	***7*** [7]
25	***6***	5	***6***	5	***4***	3	***2***	1, ***30***	29	***28***	27	***26*** [26]
XXV	6	***4***	6	***4***	4	***2***	2, ***31***	30	***28***	28	***26***	***26*** [26]
6	25	***23***	25	***23***	23	***21***	21	***19***	18	***17***	16	***15*** [15]
17	14	***12***	14	***12***	12	***10***	10	***8***	7	***6***	5	***4*** [4]
28	***3***	2	***3***	2	***1,*** 31	***29***	29	***27***	26	***25***	24	***23*** [23]
9	22	***20***	22	***20***	20	***18***	18	***16***	15	***14***	13	***12*** [12]
20	11	***9***	11	***9***	9	***7***	7	***5***	4	***3***	2	***1, 31*** [***1***,31]
1	30	***28(29)***	30	***28***	28	***26***	26	***24***	23	***22***	21	***20*** [20]
12	19	***17***	19	***17***	17	***15***	15	***13***	12	***11***	10	***9*** [9]
E_G	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
23	8	***6***	8	***6***	6	***4***	4	***2***	1, ***30***	30	***28***	***28*** [28]
4	27	***25(26)***	27	***25***	25	***23***	23	***21***	20	***19***	18	***17*** [17]
15	16	***14***	16	***14***	14	***12***	12	***10***	9	***8***	7	***6*** [6]
26	***5***	4	***5***	4	***3***	2	***1,*** 31	***29***	28	***27***	26	***25*** [25]
7	24	***22***	24	***22***	22	***20***	20	***18***	17	***16***	15	***14*** [14]
18	13	***11***	13	***11***	11	***9***	9	***7***	6	***5***	4	***3*** [3]
29	***2***	1	***2***	1, ***30***	30	***28***	28	***26***	25	***24***	23	***22*** [22]
10	21	***19***	21	***19***	19	***17***	17	***15***	14	***13***	12	***11*** [11]
21	10	***8***	10	***8***	8	***6***	6	***4***	3	***2***	1,***30***	***30*** [30]
2	29	***27(28)***	29	***27***	27	***25***	25	***23***	22	***21***	20	***19*** [19]
13	18	***16***	18	***16***	16	***14***	14	***12***	11	***10***	9	***8*** [8]
24	7	***5***	7	***5***	5	***3***	3	***1,*** 31	***29***	29	***27***	***27*** [27]
5	26	***24(25)***	26	***24***	24	***22***	22	***20***	19	***18***	17	***16*** [16]
16	15	***13***	15	***13***	13	***11***	11	***9***	8	***7***	6	***5*** [5]
27	***4***	3	***4***	3	***2***	1,***30***	30	***28***	27	***26***	25	***24*** [24]

Tableau VI : Calendrier lunaire perpétuel du comput grégorien.

Comment est construit ce calendrier ? La colonne des épactes, à l’exception de l’épacte XXV est construite de la manière suivante : on commence à l’épacte 8 et l’on passe d’une ligne à l’autre en ajoutant 11 (modulo 30).

Chaque ligne est obtenue en ajoutant à la date de la nouvelle Lune 29 ou 30 en fonction de la longueur du mois lunaire, les débuts des mois de 29 jours sont en noir et les débuts de mois de 30 jours sont en italique rouge. On constate de nouveau la possibilité de quatre mois consécutifs de 30 jours (épacte 26) et des mois lunaires de 31 jours en février (les années bissextiles). Donc de nouveau ce calendrier n’est pas un très bon calendrier lunaire et il faut limiter son usage au calcul de la date de Pâques. On remarquera que les colonnes de janvier et de mars sont identiques, l’épacte attribuée au premier janvier et l’épacte attribuée au premier mars étant les mêmes dans le calendrier lunaire de Clavius.

Quelles sont les nouveautés de ce calendrier ?

Dans un premier temps, comme pour le calendrier solaire, il faut corriger le décalage lunaire accumulé depuis le concile de Nicée. Ce décalage est de 4 jours ((1582 – 325)/400), mais la correction de Clavius ne sera que de trois jours afin de replacer la nouvelle Lune de mars de l'épacte 8 (correspond au nombre d'or 1 du comput dionysien) au 23 mars, date qu'elle avait à chaque début de cycle de Méton à l'époque du concile de Nicée. En l'an 1582, le nombre d'or est de 6, l'épacte julienne est égale à 3, on doit donc lui ajouter 3 unités pour la corriger de cette erreur puis lui retrancher les 10 jours supprimés à l'année 1582 pour replacer l'équinoxe de printemps au 21 mars. L'épacte grégorienne pour 1582 est donc égale à 3+3 – 10 = – 4 mod 30 = 26.

Les règles des sauts d'épactes sont les suivantes :

En plus des *métemposes* et des *proemptoses* à la fin des cycles du nombre d'or on a un saut d'épacte de +1 comme dans le cycle dionysien, c'est-à-dire que la différence entre l'épacte du nombre d'or 19 et l'épacte du nombre d'or 1 est de 12. Comme le cycle de 19 épactes évolue, chaque épacte peut devenir, à une époque donnée, la dernière du cycle, c'est pourquoi dans le calendrier perpétuel le dernier mois lunaire de décembre n'a que 29 jours (valeurs indiquées entre crochets dans le calendrier) lorsque cette épacte est la 19^{e} du cycle des nombres d'or.

De plus pour régulariser la répartition des nouvelles Lunes on a introduit une épacte 25 bis que l'on note XXV que l'on doit utiliser en place de l'épacte 25 lorsque le nombre d'or de l'année correspondante est supérieur à 11.

Années	*métempose*	*proemptose*	saut
1700	–1	0	–1
1800	–1	+1	0
1900	–1	0	–1
2000	0	0	0
2100	–1	+1	0
2200	–1	0	–1
2300	–1	0	–1
2400	0	+1	+1
2500	–1	0	–1
2600	–1	0	–1
2700	–1	+1	0
2800	0	0	0
2900	–1	0	–1
3000	–1	+1	0
3100	–1	0	–1
3200	0	0	0
3300	–1	+1	0
3400	–1	0	–1
3500	–1	0	–1
3600	0	+1	+1
3700	–1	0	–1
3800	–1	0	–1
3900	–1	+1	0
4000	0	0	0
4100	–1	0	–1
4200	–1	0	–1
4300	–1	+1	0
4400	0	0	0
4500	–1	0	–1

Tableau VII : Liste des sauts d'épactes jusqu'en 4500

Validité\n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1582 à 1699	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19
1700 à 1899	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18
1900 à 2199	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	0	11	22	3	14	XXV	6	17
2200 à 2299	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16
2300 à 2399	27	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15
2400 à 2499	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16
2500 à 2599	27	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15
2600 à 2899	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	0	11	22	3	14
2900 à 3099	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13
3100 à 3399	24	5	16	27	8	19	0	11	22	3	14	XXV	6	17	28	9	20	1	12
3400 à 3499	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	0	11
3500 à 3599	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10
3600 à 3699	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	0	11
3700 à 3799	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10
3800 à 4099	21	2	13	24	5	16	27	8	19	0	11	22	3	14	XXV	6	17	28	9
4100 à 4199	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8
4200 à 4499	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7

Tableau VIII : Épactes grégoriennes de 1582 à 4499.

Le tableau VII donne la succession des sauts d'épactes jusqu'en 4500. Le tableau VIII donne les épactes correspondant au nombre d'or pour chaque période comprise entre deux sauts d'épactes, on passe d'une ligne à l'autre en ajoutant ou en retranchant 1 aux épactes en fonction de la valeur du saut d'épacte. Sur une même ligne, on passe d'une colonne à la suivante en ajoutant 11 (modulo 30) et l'on passe de la dernière colonne à la première en ajoutant 12 (modulo 30). On peut également construire, à partir des formules précédentes une formule donnant l'épacte grégorienne en fonction de l'épacte julienne.

$$E_G = \left(E_J - 10 + 3 - ES + EL\right) \bmod 30$$

$$E_G = \left(E_J - 7 - ES + EL\right) \bmod 30$$

$$\text{avec} \quad Ej = \left(11\left(a \mod 19\right) + 8\right) \bmod 30$$

$$E_G = \left(1 + 11\left(a \bmod 19\right) - \left\lfloor \left(3s - 45\right)/4 \right\rfloor + \left\lfloor \left(8s - 112\right)/25 \right\rfloor\right) \bmod 30$$

Il ne reste plus qu'à construire un tableau identique au tableau IV en remplaçant le nombre d'or n par l'épacte E_G. À chaque jour compris entre le 21 mars et le 25 avril on associe le ou les épactes qui y amènent le 14^e jour de la Lune, il suffit comme pour le calendrier lunaire dionysien d'ajouter 13 au jour de la nouvelle Lune de mars (ou d'avril) et de garder les dates postérieures ou égales au 21 mars.

jour	L_G	E_G	jour	L_G	E_G	jour	L_G	E_G	jour	L_G	E_G	jour	L_G
21 mars	C	23	29 mars	D	15	6 avril	E	7	14 avril	F	29	22 avril	G
22 mars	D	22	30 mars	E	14	7 avril	F	6	15 avril	G	28	23 avril	A
23 mars	E	21	31 mars	F	13	8 avril	G	5	16 avril	A	27	24 avril	B
24 mars	F	20	1 avril	G	12	9 avril	A	4	17 avril	B	26,xxv	25 avril	C
25 mars	G	19	2 avril	A	11	10 avril	B	3	18 avril	C	25,24		
26 mars	A	18	3 avril	B	10	11 avril	C	2	19 avril	D			
27 mars	B	17	4 avril	C	9	12 avril	D	1	20 avril	E			
28 mars	C	16	5 avril	D	8	13 avril	E	0	21 avril	F			

Tableau IX : Calendrier limité à la période du 21 mars au 25 avril.

On constate que les épactes se succèdent régulièrement du 21 mars au 18 avril en décrémentant de 1 d'une épacte à la suivante et l'on comprend comment le calendrier a été construit. Normalement l'épacte 24 devrait tomber le 19 avril mais cela pourrait amener le jour de Pâques au 26 avril donc à l'extérieur de l'intervalle de définition, c'est pourquoi les computistes ont déplacé l'épacte d'un jour ; mais en faisant cela il y a deux épactes le 18 avril, ce qui crée une plus grande proportion de 14^{e} jour de la Lune ce jour, cette plus grande proportion est pondérée en ajoutant une épacte 25 bis (XXV) dont le 14^{e} jour de la Lune tombe le 17 avril (lorsque le nombre d'or est supérieur à 11).

La lettre dominicale grégorienne.

L'indice L_G de la lettre dominicale grégorienne doit tenir compte des suppressions des bissextes du calendrier grégorien, la formule est un peu plus complexe. Il convient d'ajouter à l'indice de la lettre dominicale julienne l'écart en jours (modulo 7) entre les deux calendriers. Cet écart r peut s'écrire :

$$r = ES + 10 = \lfloor (3s - 45)/4 \rfloor + 10 = \lfloor (3s-5)/4 \rfloor$$

et

$$L_G = \left(2 - \lfloor 5a/4 \rfloor + \lfloor (3s-5)/4 \rfloor\right) \bmod 7$$

$$L_G = \left(\lfloor (3s+3)/4 \rfloor - \lfloor 5a/4 \rfloor\right) \bmod 7$$

et si l'on remplace a par $100s + m$ on obtient après simplification:

$$L_G = \left(\lfloor (7s+3)/4 \rfloor - \lfloor 5m/4 \rfloor\right) \bmod 7$$

On utilise ces tableaux d'une manière identique au comput dionysien. Par exemple en 2006, le nombre d'or est de 12 et L_G = 0, donc la lettre dominicale est *A*. Dans le tableau VIII au nombre d'or 12 correspond pour la période 1900 à 2199 l'épacte 0 et en utilisant le tableau IX on trouve que la veille de la pleine Lune pascale correspondante tombe le 13 avril et que le jour suivant ayant la lettre dominicale *A* est le 16 avril, donc Pâques tombe le 16 avril en 2006. Si l'on compare avec la Lune vraie on constate que la pleine Lune est le 13 avril 2006 (et non le 14) et si l'on compare les dates des nouvelles Lunes vraies de l'année 2006 avec les dates des nouvelles lunes pascales correspondant à l'épacte 0 on constate une mauvaise correspondance, les écarts sont de un ou deux jours ! Il faut donc éviter d'utiliser la Lune du comput grégorien pour calculer les lunaisons vraies.

E_G	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
* ou 0	***1 ,*** 31		***1,*** 31	***29***	29	***27***	27	***25***	24	***23***	22	***21*** [21]
NL vraies	29	28	29	27	27	25	25	23	22	22	20	20

Tableau X : Comparaison des nouvelles Lunes pascales et des nouvelles Lunes vraies en 2006.

Il est facile de trouver une formule donnant le jour de Pâques à partir de l'épacte et de l'indice de la lettre dominicale de l'année. Le tableau IX met en évidence deux exceptions, l'épacte xxv se comporte comme l'épacte 26 et l'épacte 24 se comporte comme l'épacte 25. Nous allons numéroter autrement les épactes pour avoir une série continue du 18 avril au 21 mars, il suffit de numéroter négativement les épactes postérieures au 13 avril en posant $E_G^* = E_G$ si $E_G < 24$ et $E_G^* = E_G - 30$ si $E_G \geq 24$. Nous allons numéroter les jours en quantième Q de mars, en utilisant cette notation le lendemain du 14^{e} jour de la pleine Lune pascale d'épacte E_G a pour quantième $Q_P = 45 - E_G^*$. Il ne reste plus qu'à ajouter le décalage constant (modulo 7) x entre le cycle des épactes et le cycle des indices de la lettre dominicale. Supposons que le dimanche soit le lendemain du 14^{e} jour de la Lune pascale, alors le décalage x doit vérifier l'équation suivante :

$$\left(E_G^* + L_G + x\right) \bmod 7 = 1$$

Il suffit de résoudre cette équation pour une épacte quelconque, par exemple la première rencontrée $E_G = E_G^* = 23$, la lettre dominicale du lendemain est D, donc $L_G = 4$, donc on a :

$$\left(23 + 4 + x\right) \bmod 7 = 1$$
$$x = 2$$

Donc le quantième Q_P de mars du dimanche de Pâques est donné par :

$$Q_P = Q + \left(E_G^* + L_G + 2\right) \bmod 7$$
$$Q_P = 45 - E_G^* + \left(E_G^* + L_G + 2\right) \bmod 7$$

avec

$$E_G^* = 26 \text{ si } E_G = \text{ XXV c'est-à-dire } E_G = 25 \text{ et } n > 11$$
$$E_G^* = 25 \text{ si } E_G = 24$$
$$\text{sinon } E_G^* = E_G$$
$$E_G^* = E_G^* - 30 \text{ si } E_G^* > 23$$

Les deux premières conditions permettent de gérer les deux exceptions.

Si Q_P est inférieur ou égal à 31 alors Pâques tombe le Q_P mars et si Q_P est supérieur à 31 alors Pâques tombe le $Q_P - 31$ avril.

L'usage du formulaire d'Albert Troesch donne tous les éléments des computs (julien et grégorien), il peut se résumer dans le tableau suivant :

<table>
<tr><th>Diviser</th><th>Par</th><th>Quotient</th><th>Reste</th></tr>
<tr><td>L'année a</td><td>100</td><td>s</td><td>m</td></tr>
<tr><td>L'année a</td><td>19</td><td></td><td>N</td></tr>
<tr><td>$5a$</td><td>4</td><td>g</td><td></td></tr>
<tr><td>$2 - g$</td><td>7</td><td></td><td>Lj</td></tr>
<tr><td>$3s - 5$</td><td>4</td><td>r</td><td></td></tr>
<tr><td>$Lj + r$</td><td>7</td><td></td><td>L_G</td></tr>
<tr><td>$11N + 8$</td><td>30</td><td></td><td>Ej</td></tr>
<tr><td>$3s - 45$</td><td>4</td><td>ES</td><td></td></tr>
<tr><td>$8s - 112$</td><td>25</td><td>EL</td><td></td></tr>
<tr><td>$Ej + 23 - ES + EL$</td><td>30</td><td></td><td>E_G</td></tr>
<tr><td colspan="4">Si $E_G = 25$ et $N+1>11$ alors $E_G^* = 26$
Si $E_G = 24$ alors $E_G^* = 25$
Sinon $E_G^* = E_G$
Si $E_G^* > 23$ alors $E_G^* = E_G^* - 30$</td></tr>
<tr><td>$E_G^* + L_G + 2$</td><td>7</td><td></td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="4">$D = 45 - E_G^* + y$
Si $D \leq 31$ Pâques est le D mars
Sinon Pâques est (D – 31) avril</td></tr>
</table>

N+1 est le nombre d'or,

Lj est l'indice de la lettre dominicale julienne.

r est l'écart entre le calendrier grégorien et le calendrier julien.

L_G est l'indice de la lettre dominicale grégorienne.

Ej est l'épacte julienne.

ES est l'équation solaire.

EL est l'équation lunaire.

E_G est l'épacte grégorienne.

Une grande partie des formules donnant la date de Pâques peut se déduire de ces formules, attention si l'indice de la lettre dominicale est compté de 1 à 7 à la place de 0 à 6, la formule donnant la lettre dominicale doit être incrémentée de 1 et la formule donnant le décalage entre le 14e jour de la Lune et le dimanche doit être décrémentée de 1 (x = 1). De même la définition de l'épacte change aussi si l'on prend comme âge de la Lune la partie entière du temps écoulé depuis la nouvelle Lune, le jour de la nouvelle Lune a alors pour âge 0 et non pas 1.

Le calcul de la Pâque julienne.

Les églises orthodoxes ont conservé l'usage du comput dionysien, il est donc utile de donner également une formule donnant le jour de la Pâque orthodoxe. Le formulaire est en tout point identique au formulaire du comput grégorien, sauf les deux exceptions liées à l'épacte 26 et XXV qui ne se présentent jamais. On remplace donc l'épacte grégorienne par l'épacte julienne et la lettre dominicale grégorienne par la lettre dominicale julienne, le résultat est donné dans le calendrier julien. Pour avoir la date dans le calendrier grégorien, il suffit d'ajouter la quantité r. Attention **il ne faut pas utiliser** la lettre dominicale grégorienne pour avoir la date grégorienne de la Pâque julienne.

si $E_j > 23$ alors $E_j^* = E_j - 30$

sinon $E_j^* = E_j$

$Q_P = 45 - E_j^* + \left(E_j^* + L_j + 2\right) \bmod 7$

Si $Q_P \le 31$ alors Pâques est le Q_P mars julien

Sinon Pâques est le $\left(Q_p - 31\right)$ avril julien

Auquel on ajoute la quantité r suivante $r = \lfloor (3s - 5)/4 \rfloor$, r = 13 pour la période actuelle (1901 à 2099 inclus).

Exemple : Pour l'année 2006, on trouve en appliquant le formulaire ci-dessus : s = 20, m = 6, N = 11, n (nombre d'or) = 12, Lj = 1 (lettre dominicale julienne = B), r = 13, L_G = 0 (lettre dominicale grégorienne = A), Ej = 9, ES = 3, EL = 1, E_G = 0, Q_P grégorien = 47 donc la date de Pâques grégorienne est le 16 avril 2006, Q_P julien = 41 donc la date de Pâque julienne est le 10 avril julien donc le 23 avril grégorien. Le tableau suivant détaille le calcul de cet exemple et celui de l'an 2087.

Diviser	Par	Quotient	Reste	Exemple pour 2006	Exemple pour 2087
L'année a	100	*s*	*m*	*s = 20, m = 6*	*S = 20, m = 87*
L'année a	19		*N*	*N=11*	*N = 16*
5 *a*	4	*g*		*g = 2507*	*2608*
2 – *g*	7		*Lj*	*Lj = 1 (B)*	*Lj = 5 (F)*
3*s* – 5	4	*r*		*r = 13*	*r = 13*
Lj + r	7		L_G	L_G *=0 (A)*	L_G *=4 (E)*
11 *N* + 8	30		*Ej*	*Ej = 9*	*Ej =4*
3*s* – 45	4	*ES*		*ES = 3*	*ES = 3*
8*s* – 112	25	*EL*		*EL = 1*	*EL = 1*
Ej + 23 – *ES* + *EL*	30		E_G	E_G *=0*	E_G *=25*
Si $E_G = 25$ *et* $N+1>11$ *alors* $E_G^* = 26$ *Si* $E_G = 24$ *alors* $E_G^* = 25$ *Sinon* $E_G^* = E_G$ *Si* $E_G^* > 23$ *alors* $E_G^* = E_G^* - 30$				$E_G \leq 23$ $E_G^* = E_G = 0$	E_G *=25 et N+1=17>11 =>* $E_G^* = 26$ $E_G^* > 23 \Rightarrow E_G^* = -4$
$E_G^* + L_G + 2$	7		*y*	*y = 2*	*y = 2*
$D = 45 - E_G^* + y$ *Si* $D \leq 31$ *Pâques est le D mars* *Sinon Pâques est (D – 31) avril*				*D = 47* *D = 16 avril*	*D=51* *D=20 avril*

Tableau XI : Exemples du calcul de la date de Pâques.

Les formulaires donnant la date de Pâques

De nombreux computistes, mathématiciens ou astronomes, cherchèrent la ou les formules permettant de calculer directement la date du jour de Pâques en connaissant uniquement le millésime de l'année. Un des premiers fut Gauss, qui publia la première méthode purement algébrique en 1800, cette solution était erronée pour les dates postérieures à 4199 (erreur dans les Métemposes) il la corrigea quelques années plus tard. De même Delambre publia une solution erronée (il oublia l'épacte XXV) dans le tome III de son *Astronomie théorique et pratique (1814)* qu'il corrigea par la suite dans les additions à la *Connaissance des temps pour 1817* et dans son *Histoire de l'astronomie moderne* (1821). Hélas, comme le signale avec juste raison J. M. Oudin (1946), son Astronomie théorique et pratique eut une forte diffusion de sorte que son erreur fut reproduite dans de nombreux ouvrages notamment le Grand Larousse du XIX^{e} siècle. De nombreux autres auteurs s'intéressèrent au problème, une recherche bibliographique sur le thème du calcul de la date de Pâques donne jusqu'à 272 références. Un des formulaires les plus employés est celui proposé en avril 1876 à la revue *Nature* par un correspondant anonyme de New York, il sera repris par la suite dans le *Butcher's Ecclesistical Calendar* (1877) de Samuel Butcher (évêque de Meath), puis dans la seconde édition de *Practical Astronomy with Your Calculator* de Peter Deffett-Smith, puis dans le *General Astronomy* de Spencer Jones (1922) et dans *The Journal of the British Astronomical Association* (décembre 1977) et enfin dans *l'Astronomical Algorithms* (1991) de Jean Meeus. Ce formulaire est issu des formules de Delambre, il est certes pratique et rapide, mais je lui préfère les formules d'Albert Troesch qui ont le mérite d'utiliser et de faire apparaître les éléments du comput.

Diviser	Par	Quotient	Reste
L'année x	19		*a*
L'année x	100	*b*	*c*
b	4	*d*	*e*
$b + 8$	25	*f*	
$b - f + 1$	3	*g*	
$19\,a + b - d - g + 15$	30		*h*
c	4	*i*	*k*
$32 + 2\,e + 2\,i - h - k$	7		*l*
$a + 11\,h + 22\,l$	451	*m*	
$h + l - 7m + 114$	31	*n*	*p*
n est le numéro du mois (3 : mars ou 4 : avril) *p + 1 est le quantième du jour*			

Le formulaire de la revue *Nature*

Remarques importantes :

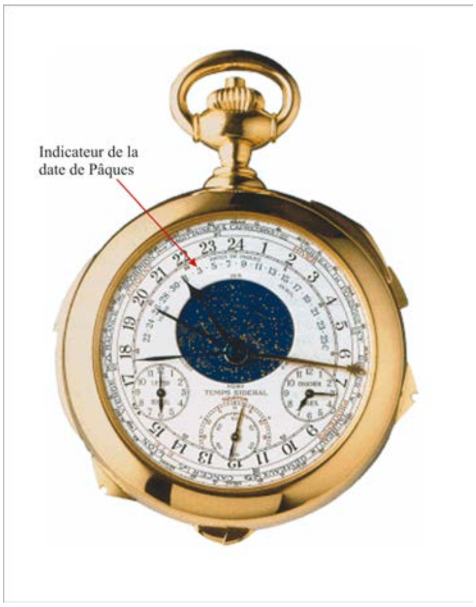
Si l'on désire programmer ces algorithmes, il convient de prendre garde lors de l'utilisation de l'opérateur modulo et de la fonction INT(x) qui donne la partie entière de x. Le résultat de l'opérateur modulo doit être positif et dans certains langages de programmation et sous certain système d'exploitation, la fonction INT(x) est le plus grand entier plus petit ou égal à x, cela peut poser problème pour les valeurs négatives, ainsi INT(-7,83) = -8, car -7 est plus grand que -7,83. Pour d'autres langages, INT(x) est la partie décimale du nombre x et INT(-7,83) = -7. Cette fonction s'appelle TRUNC dans les langages qui utilisent la première définition de la fonction INT.

Cela peut poser problème pour les valeurs négatives. Ainsi, dans le premier cas INT(0.4) = 0 et INT(-0.4) = -1 alors que TRUNC (0.4) = TRUNC(-0.4)=0.

Il convient donc d'être très vigilant avec l'emploi de ces fonctions. Il y a quelques années, avant que le langage C soit normalisé, les fonctions INT n'étaient pas les mêmes dans les compilateurs sous Windows et dans les compilateurs sous Unix !

Les méthodes mécaniques de calcul.

Le calcul pascal étant issu d'un calendrier perpétuel il est possible de construire des systèmes mécaniques permettant de connaître les éléments du comput et la date de Pâques. C'est le cas des nombreuses horloges astronomiques (Strasbourg, Lyon, Copenhague). Cette tradition ne s'est pas perdue, signalons la création par la manufacture Patek Philippe en 1998 pour son 150e anniversaire d'une montre le *Calibre 8*9 (la montre actuellement la plus complexe au monde : 1728 pièces) donnant la date de Pâques. Une came permet d'indiquer la date de Pâques pendant 29 ans, la 30e année (en 2028) l'indicateur de la date de Pâques se trouvera en face de la lettre C indiquant que la came doit être remplacée.



Références bibliographiques

A. Troesch, *Droites discrètes et calendriers*, Institut de Recherche Mathématiques avancée, Université Louis Pasteur et CNRS (URA 01), 1992, AMS Subject classification 68 U 05 (68 R 99 – 68 T 10).

S. Butcher, *The Ecclesiasticcal Calendars :Its Theory and Construction* (Hodges, Foster & Figgis/ Macmillan, Dublin/London, 1877).

J. B. Delambre, « *Du Calendrier* » dans *l'Astronomie théorique et pratique* (Mme Ve Courcier, Paris, 1814), vol. 3, p. 686 - 717.

J. B. Delambre, « *Formules pour calculer la Lettre Dominicale, le Nombre d'Or, L'Épacte et la fête de Pâques, pour une année grégorienne ou julienne quelconque* » Connaissance des tems, ou des mouvements célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1817, p. 307 – 317..

J. B. Delambre, « *Réformation du Calendrier* » dans *l'Histoire de l'Astronomie moderne,* Mme Ve Courcier, Paris, 1821, vol. 1, p. 1 - 84.

J. Levy, *La date de Pâques*, Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1975.

H. Andoyer, *Cours d'astronomie*, 1er partie : Astronomie théorique, Paris, 1923, p. 434 - 447.

P. Couderc, *Le Calendrier,* P.U.F., Paris, 1961.

J. M. Oudin, *Étude sur la date de Pâques*, Bulletin astronomique, XII, 8, Paris, 1946, p. 391 - 410.

C. F. Gauss, « *Berechnung des Osterfestes* », *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd-Und Himmels-Kunde*, 2, 1800, p. 121 – 130.

G. Declercq, *« ANNO DOMINI » Les origines de l'ère chrétienne*, Brepos publishers, Turnhout, Belgium, 2000.

Sur Internet consulter les sites :

Pour une bibliographie complète : http://www.fys.ruu.nl/~vgent/easter/easter_text6a.htm

Pour une traduction des textes constitutifs du calendrier grégorien : le site de Rodolphe Audette http://hermes.ulaval.ca/~sitrau/calgreg/calgreg.html#table

Pour avoir les éléments du comput et les dates de Pâque(s) (Juif, Orthodoxe et Catholique) : http://www.imcce.fr