Détermination de la distance d'un satellite artificiel par la mesure de sa vitesse angulaire apparente

Pascal Descamps – IMCCE – Observatoire de Paris

Il arrive fréquemment que l'on observe dans le ciel nocturne le passage rapide d'un objet lumineux sur fond d'étoiles semblant surgir de nulle part puis disparaissant comme par magie. C'est la signature d'un satellite artificiel tournant autour de la Terre, sortant de l'ombre de la Terre pour passer brièvement dans la lumière solaire qui alors l'éclaire et nous permet de le voir. Son mouvement est discernable, plus ou moins rapide. Cela provient du fait qu'il se trouve plus ou moins loin de la Terre. En effet, plus il sera proche de la Terre plus son mouvement orbital sera rapide, en d'autres termes sa période de révolution autour de la Terre sera plus courte. Inversement, plus il sera éloigné et plus son mouvement orbital sera lent. Ce que nous percevons depuis notre position d'observateur terrestre n'est pas son mouvement réel mais son mouvement apparent. Ce mouvement apparent va donc principalement dépendre de sa distance. C'est ce principe qui est ici développé mathématiquement qui peut faire l'objet d'un travail en classe à la fois théorique – par la mise en œuvre de la troisième loi de Kepler et l'utilisation de la règle des sinus – et observationnel à l'aide d'un simple APN.

1. Résolution du problème simplifié pour des observations proches du zénith

Imaginons que pendant un intervalle de temps ΔT nous puissions mesurer l'angle apparent parcouru sur le ciel, soit θ_0. Désignons par θ_c l'angle apparent parcouru pendant le même intervalle de temps mais vu depuis le centre de la Terre (figure 1). Nous obtenons alors les vitesses angulaires apparentes suivantes :

$$\omega_O = \frac{\theta_O}{\Delta T}$$
$$\omega_C = \frac{\theta_C}{\Delta T} \qquad (1.1)$$

Soit d la distance du satellite à l'observateur, c'est la quantité que l'on cherche à déterminer par la mesure. Soit R_T le rayon moyen de la Terre et r la distance du satellite au centre de la Terre. L'équation fondamentale qui va nous permettre de résoudre le problème provient de la troisième loi de

Kepler qui régit le mouvement des corps célestes. Elle s'écrit de la façon suivante dans le cas où l'on néglige la masse du satellite artificielle devant celle de la Terre M_T :

$$\omega_C^2 r^3 = GM_T \tag{1.2}$$

Où G est la constante de la gravitation universelle.

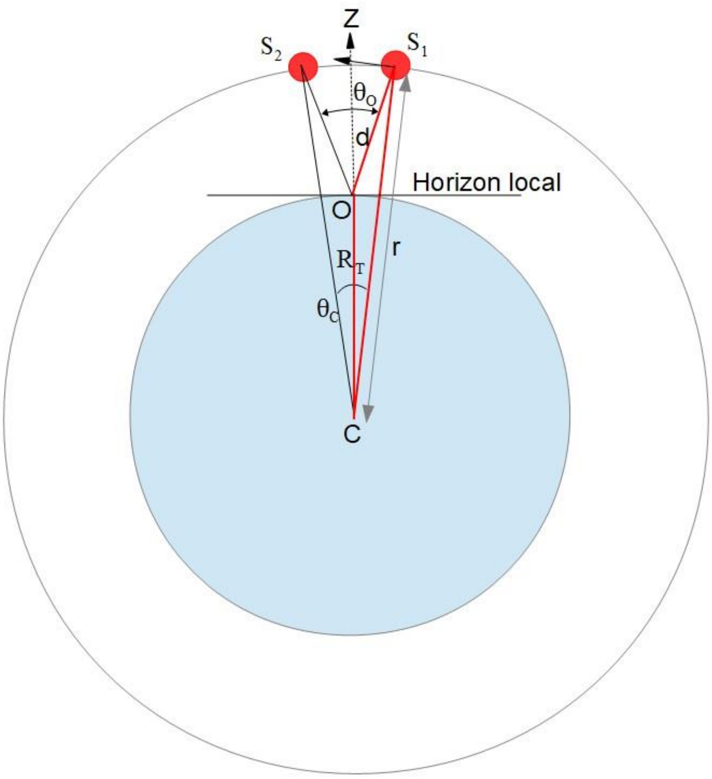

Fig.1 : Géométrie simplifiée du déplacement d'un satellite artificiel entre deux positions S_1 et S_2.

Considérons tout d'abord le triangle OCS_1. Dans ce triangle nous pouvons écrire la règle des sinus :

$$\frac{\sin\theta_C/2}{d} = \frac{\sin\theta_O/2}{r} \tag{1.3}$$

Nous supposerons maintenant que les angles parcourus durant l'intervalle de temps ΔT sont petits, de sorte que l'on ait $\theta_C \ll 1$ et $\theta_O \ll 1$. L'équation (1.3) peut alors s'écrire :

$$\frac{\theta_C}{d} \approx \frac{\theta_O}{r} \tag{1.4}$$

À partir des relations (1.1) et (1.4) nous pouvons écrire la vitesse longitudinale *v* du satellite le long de son orbite :

$$v = r\omega_C = r\,\frac{\theta_C}{\Delta T} \approx d\,\frac{\theta_O}{\Delta T} = d\,\omega_O \tag{1.5}$$

Injectons cette relation dans l'équation de Kepler (1.2) de façon à faire apparaître la distance *d* que l'on cherche à déterminer, on obtient ainsi :

$$\omega_O^2 d^2 r = GM_T \tag{1.6}$$

Si l'on observe le mouvement du satellite au voisinage du zénith, on a l'approximation $r \sim R_T + d$. L'équation (1.6) devient alors :

$$\left(R_T + d\right) d^2 \omega_O^2 = GM_T \tag{1.7}$$

Qui est l'équation fondamentale en *d* qu'il nous faut résoudre à partir de la connaissance de la vitesse angulaire ω_O obtenue par l'observation. Pour sa résolution, nous allons faire l'hypothèse supplémentaire $d \ll R_T$, ce qui est généralement le cas pour les satellites artificiels de la Terre qui sont situés tout au plus à 1000km d'altitude pour un rayon terrestre R_T = 6371km. L'équation (1.7) peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$R_T d^2 \omega_O^2 = \frac{GM_T}{\left(1 + \dfrac{d}{R_T}\right)} \approx GM_T \left(1 - \frac{d}{R_T}\right) \tag{1.8}$$

Appelons *V* la quantité suivante qui est équivalente à une vitesse : $V = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T}}$

Avec G = 6.67408 10^{-11} $m^3 kg^{-1} s^{-2}$, M_T = 5.97342 10^{24} kg, on obtient V = 7.9105 km/s. L'équation (1.8) peut alors s'écrire sous la forme d'une équation du second degré :

$$d^2 + \frac{V^2}{R_T \omega_O^2} d - \frac{V^2}{\omega_O^2} = 0 \tag{1.9}$$

Dont le déterminant vaut $\Delta = \frac{4V^2}{\omega_O^2}\left[1+\frac{V^2}{4R_T^2\omega_O^2}\right]$

Le second terme de l'expression entre crochets est lui-même petit devant 1. La seule solution acceptable de cette équation est :

$$d = -\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2}+\frac{V}{\omega_O}\sqrt{1+\frac{V^2}{4R_T^2\omega_O^2}} \approx -\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2}+\frac{V}{\omega_O}\left(1+\frac{V^2}{8R_T^2\omega_O^2}\right) \tag{1.10}$$

D'où l'on tire l'expression approchée de la solution finale pour la distance *d* :

$$d \approx \frac{V}{\omega_O}-\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2}+\frac{V^3}{8R_T^2\omega_O^3} \tag{1.11}$$

Compte-tenu des approximations faites et de la précision de la mesure sur la vitesse angulaire, on peut se restreindre aux deux premiers termes, de sorte que la valeur de la distance s'exprime très simplement au moyen du formulaire suivant :

$$d \approx \frac{V}{\omega_O}-\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2}=\frac{7.9105}{\omega_O}-\frac{0.00491}{\omega_O^2} \tag{1.12}$$

Expression dans laquelle ω_O est exprimé en radians par seconde. La valeur de *d* est alors obtenue directement en kilomètres. On retrouve le fait qu'au premier ordre la distance *d* est inversement proportionnelle à la distance angulaire apparente ω_O. Rappelons les deux conditions ou hypothèses pour lesquelles cette expression de *d* est valable :

- Observation de la vitesse angulaire autour du zénith ;
- Distance du satellite artificiel petite devant le rayon terrestre.

2. Cas d'une observation éloignée du zénith

Considérons maintenant, comme sur la figure 2, que l'observation du mouvement apparent du satellite artificiel se fait loin du zénith, à une distance zénithale *z*. La vitesse apparente observée n'est plus la vitesse longitudinale du satellite le long de son orbite mais la vitesse projetée v_p dans le plan orthogonal à la ligne de visée qui fait un angle β avec la vitesse longitudinale telle que $v_p = v\cos\beta$.

La relation (1.5) se modifie pour devenir $v = r\omega_C = d\,\dfrac{\omega_O}{\cos\beta}$. Il suffit donc substituer ω_O par $\omega_O/\cos\beta$ dans les équations du problème simplifié. On écrit alors la règle des sinus dans le triangle COS_1 :

$$\frac{\sin\beta}{R_T} = \frac{\sin z}{r} = \frac{\sin z}{R_T + h} \tag{1.13}$$

De la même façon que précédemment, nous pouvons légitimement supposer que $h \ll R_T$ de sorte qu'avec une très bonne approximation on a $\beta \approx z$. Cependant *d* n'est plus nécessairement petit devant R_T. Une relation peut être obtenue entre les distances *h* et *d* :

$$R_T^2 = \left(R_T + h\right)^2 + d^2 - 2h\left(R_T + h\right)\cos\beta \tag{1.14}$$

On retrouve le fait que près du zénith, $\beta \approx 0$, on a d = h. Cette équation peut s'écrire sous la forme d'une équation du second degré :

$$\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 - 2\frac{h}{R_T}\left(1 + \frac{d}{R_T}\right)\cos\beta + \frac{d}{R_T}\left(2 + \frac{d}{R_T}\right) = 0 \tag{1.15}$$

Avec

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2}} \approx \sqrt{1 - \sin^2 z\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right)} = \sqrt{\cos^2 z + 2\sin^2 z\,\frac{h}{R_T}} \approx \cos z\left(1 + \tan^2 z\,\frac{h}{R_T}\right) \tag{1.16}$$

L'équation (1.16) peut finalement s'écrire après simplification obtenue en considérant que $h \ll R_T$:

$$\left(\frac{d}{R_T}\right)^2 - 2\frac{d}{R_T}\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)\cos z\left(1 + \tan^2 z\,\frac{h}{R_T}\right) + 2\frac{h}{R_T} = 0 \tag{1.17}$$

Dont la solution après simplification est :

$$d = \frac{h}{\cos z} \tag{1.18}$$

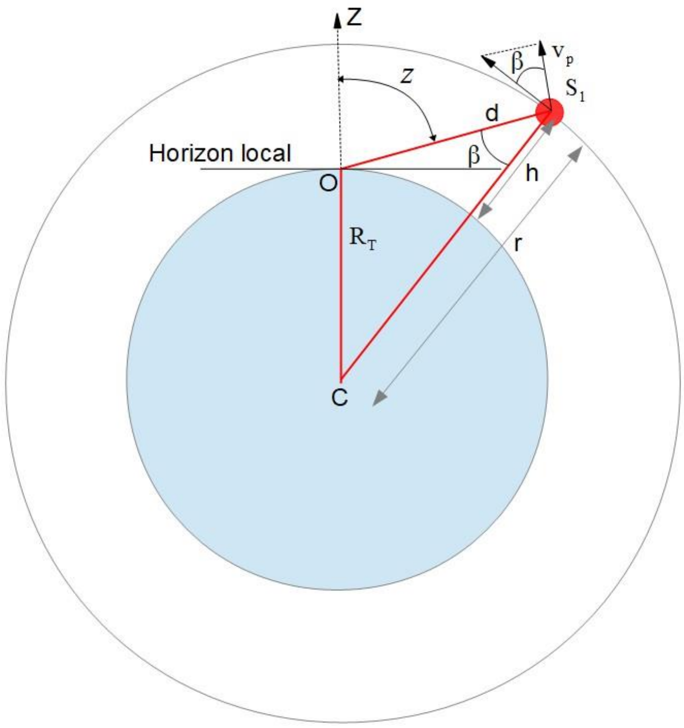

Fig.2 : Géométrie relative à la position d'un satellite artificiel se trouvant à une distance zénithale z.

Si l'on reprend les équations (1.6) et (1.7), on obtient l'équation générale suivante en h :

$$\begin{aligned}&(R_T+h)d^2\left(\frac{\omega_O}{\cos\beta}\right)^2=(R_T+h)\cos^2 z\left(1+\tan^2 z\right)^2 h^2\left(\frac{\omega_O}{\cos\beta}\right)^2=GM_T\\&\left(1+\frac{h}{R_T}\right)\left(\frac{d}{R_T}\right)^2\left(\frac{\omega_O}{\cos\beta}\right)^2=\left(\frac{V}{R_T}\right)^2\end{aligned}\tag{1.19}$$

Dans le cas de l'approximation $h \ll R_T$. On obtient une équation du second degré analogue à l'équation (1.9) :

$$h^2+\frac{V'^2}{R_T}\left(\frac{\cos z}{\omega_O}\right)^2 h-V'^2\left(\frac{\cos z}{\omega_O}\right)^2=0 \tag{1.20}$$

avec V' la quantité telle que $V'=\dfrac{V}{\cos z\left(1+\tan^2 z\right)}=V\cos z$

On obtient donc de façon immédiate la solution suivante pour la distance *h* :

$$h = \frac{V'\cos z}{\omega_O} - \frac{V'^2 \cos^2 z}{2R_T \omega_O^2} + \frac{V'^3 \cos^3 z}{8R_T^2 \omega_O^3} \tag{1.21}$$

Quant à la solution pour la distance recherchée *d*, elle se déduit de l'équation (1.17) :

$$\begin{aligned} d &\approx \frac{1}{\cos z}\left[\frac{V'\cos z}{\omega_O} - \frac{V'^2 \cos^2 z}{2R_T \omega_O^2} + \frac{V'^3 \cos^3 z}{8R_T^2 \omega_O^3}\right] \\ d &\approx \frac{V\cos z}{\omega_O} - \frac{V^2 \cos^3 z}{2R_T \omega_O^2} + \frac{V^3 \cos^5 z}{8R_T^2 \omega_O^3} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ainsi on peut à la fois déterminer la distance du satellite artificiel à l'observateur *d* au moyen de la formule (1.22) et son altitude *h* par la relation (1.18).

3. Solution exacte du problème

Il est bien évidemment possible de résoudre numériquement le système composé des équations (1.17) et (1.19) sans commettre aucune approximation simplificatrice. Les inconnues sont la distance *d* et l'altitude réelle du satellite *h* ; les données d'observation sont la distance zénithale z et la vitesse angulaire apparente ω_O. Si l'on se donne une altitude *h* et une distance zénithale z , on peut alors déterminer numériquement les inconnues *d* et ω_O et comparer la distance d ainsi obtenue à la l'approximation donnée par l'équation (1.22) en adoptant la valeur ainsi trouvée de ω_O. La figure 3 permet d'évaluer l'erreur commise entre la solution exacte et la solution approchée de *d* pour différentes valeurs de l'altitude *h* et de l'angle zénithal z .

Les courbes en traits pleins sont les courbes des valeurs exactes calculées par résolution numérique du système d'équation tandis que les courbes en traits pointillés sont calculés à l'aide du formulaire approché (1.22).

On constate que pour des altitudes du satellite inférieures à 800km, l'approximation est bonne ou « acceptable » pour des distances zénithales faibles, inférieures à 20°. L'erreur commise est alors de l'ordre de quelques pourcents. À noter que l'approximation donne des valeurs de distance systématiquement plus petites que la valeur exacte. Si par exemple on considère l'ISS dont l'altitude est d'environ 400km, l'approximation fonctionne très bien jusqu'à des distances zénithales de 40°.

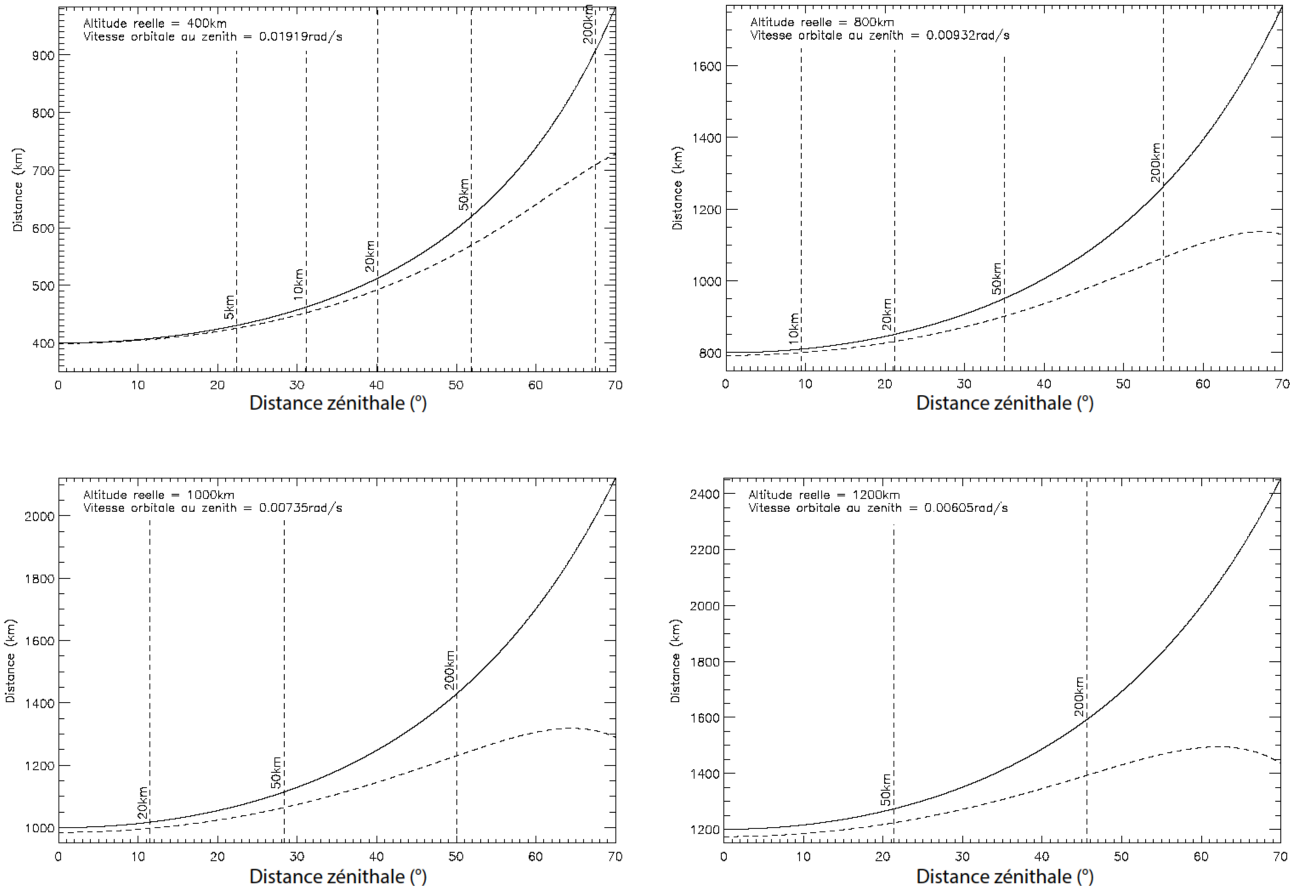

Fig.3 : Comparaison entre la solution exacte (courbe en trait plein) et la solution approchée (courbe en traits pointillés) pour différentes altitudes et différentes vitesses angulaires orbitales d'un satellite artificiel

4. Application

La méthode précédente peut être mise en œuvre à l'aide d'un APN monté sur trépied, orienté vers le zénith, et disposant d'une prise de poses automatique. Le champ doit être au moins de 10-15° pour permettre une mesure de la vitesse angulaire apparente par mesure de la trainée laissée sur l'image (avec un temps de pose de 5 ou 10s). L'acquisition des poses peut être faite durant 30 minutes, il est alors quasi certain qu'un satellite artificiel entrera dans le champ en y laissant une trainée lumineuse.

Il est nécessaire de connaître les caractéristiques de la matrice CCD (nombre de pixels et taille du pixel exprimée en microns) et la focale des objectifs à votre disposition afin d'évaluer le champ global sur le ciel et l'échelle angulaire d'un pixel. Cette échelle est importante car la mesure de la trainée laissée par le satellite se fera en déterminant sa longueur en pixels qui pourra ensuite être convertie en degrés puis en radians, le tout divisé par le temps de pose donnera la vitesse angulaire en radians/s recherchée pour l'application des formulaires.

Fig.4 : Dispositif monté sur trépied

Il sera aussi nécessaire de déterminer l'échelle du pixel du capteur sur le ciel au moyen de la formule suivante dans laquelle p est la taille du pixel en microns et F la focale de l'objectif utilisé en millimètres

$$e = \frac{p}{F.10^3 \tan 1''} = \frac{p}{4{,}84813.10^{-3} F}$$

Par exemple, le senseur CMOS du Nikon D750 comporte 6016x4016 pixels, chaque pixel valant 5.97µm, ce qui fait une surface totale de 35,9 x 24,0 mm. Avec un objectif de 50mm, cela donne une taille du pixel de 24.63" et un champ total de 41.15°x27.48°. Il faut donc lui apposer plutôt un objectif de 200mm pour obtenir un champ sur le ciel de 10.4°x6.9° et un pixel de 6.2". Si l'on fait des poses de 10s, les étoiles risquent donc de « baver » sur plusieurs pixels sauf si l'on est au voisinage du zénith.

Avec un Canon 450d, le pixel est de 5.2µm et sa taille sur le ciel est de 12,6" cela donne donc un champ de 15° x 9,9° pour un capteur 4272 x 2848 pixels faisant 22,2mm x 14,8mm. C'est la solution à préférer même si le pixel est supérieur à 4", la précision sur la mesure de la vitesse angulaire sera de 0.003°/s ce qui est tout-à-fait acceptable.

L'identification du satellite peut ensuite être effectuée à l'aide du site *heavens above* : https://www.heavens-above.com/