

# La Connaissance des temps : un journal scientifique publié depuis 1679

## Épisode 21 - la mécanique céleste après 1819 : le mouvement des planètes et des satellites

Après les textes sur le mouvement de la Lune décrits dans l'épisode précédent, nous allons ici présenter les articles sur le mouvement des planètes et des satellites contenus dans les additions aux CDT après 1819. Nous étudierons d'abord les textes sur la grande inégalité Jupiter-Saturne puis ceux sur diverses autres inégalités. Nous présenterons ensuite des problèmes de mécanique céleste concernant le mouvement des planètes et des satellites abordés par plusieurs astronomes et décrirons enfin les travaux de Le Verrier qui aboutiront à la construction de théories analytiques du mouvement des planètes.

### 1 La grande inégalité Jupiter-Saturne

La grande inégalité Jupiter-Saturne est l'argument de plus longue période donnant des contributions significatives dans le mouvement de Jupiter et Saturne. Comme nous l'avons vu dans l'épisode 19, Laplace a montré que c'était l'argument  $2\lambda_J - 5\lambda_S$ ,  $2\lambda_J$  et  $\lambda_S$  désignant les longitudes moyennes de Jupiter et Saturne. Revenons sur cette grande inégalité à travers plusieurs articles des additions à la CDT. :

- Dans la CDT pour 1821, Laplace publie dans les additions, p. 266-271, l'article *Sur l'influence de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, dans le mouvement des corps du système solaire*. Il écrit « Cette grande inégalité, dont la période est de neuf siècles, et qui s'élève à un tiers de degré sexagésimal pour Jupiter et à quatre cinquièmes de degré pour Saturne, se répand par l'action de ces deux grands corps, sur tout le système solaire ». Il montre que l'influence de cette inégalité est surtout sensible sur le mouvement des satellites de Jupiter ;
- Dans la CDT pour 1829, p. 236-233, Laplace publie *mémoire sur les deux grandes inégalités de Jupiter et Saturne*, où, comparant ses résultats à ceux de Plana, il conclut que « les valeurs déterminées par ce savant géomètre ont besoin de correction » ;
- La troisième partie du mémoire de Poisson *sur divers points de la mécanique céleste*, publiée dans les additions à la CDT pour 1831, p. 40-48, intitulée *Sur les inégalités à longue période résultantes de l'action mutuelle de Saturne et Jupiter*, confirme les imperfections des calculs de Plana ;
- Les additions à la CDT pour 1832, p. 22-24, contiennent un *Rapport fait à l'Académie sur un Mémoire de M. G. de Pontécoulant, présenté le 16 février 1829, et relatif à la partie des inégalités à longues périodes, résultant de l'action mutuelle de Jupiter et de la Terre, qui dépend du carré de la fonction perturbatrice*, par Bouvard et Poisson. Laplace avait montré que des « altérations sensibles dans les mouvements de la Terre et de Jupiter »

étaient dues à la grande inégalité. Recalculant ces perturbations, il avait trouvé des résultats différents de ceux de Plana. Dans son mémoire, Pontécoulant compare les résultats de Laplace et Plana et trouve des erreurs chez Plana. Les rapporteurs proposent à l'Académie d'approuver le mémoire. Dans ces mêmes additions, p.94-98, Poisson complète la troisième partie de son mémoire publié dans la CDT de l'année précédente dans *Addition à ce Mémoire* dans laquelle il calcule les termes du second ordre relatifs à la grande inégalité ;

- Pontécoulant présente, dans les additions à la CDT pour 1833, p. 86-103, *mémoire sur la partie des deux grandes inégalités de Jupiter et Saturne qui dépend du carré des forces perturbatrices*. Il corrige les erreurs commises par Laplace et Plana et conclut que « les valeurs numériques que nous avons trouvées...ont toute la précision que peuvent exiger les besoins de l'Astronomie ».

### 2 Autres inégalités

On trouve dans les additions à la CDT, trois articles sur d'autres inégalités :

- La CDT pour 1829, p. 249, contient une note de Laplace *Sur l'inégalité de Mercure à longue période, dont l'argument est le moyen mouvement de Mercure, moins celui de la Terre*, dans laquelle il réfute des objections que Plana avait fait contre sa méthode de calcul « objections qu'il résoudra de lui-même, s'il prend la peine de revoir son analyse et la mienne » ;
- Dans les additions à la CDT pour 1836, Pontécoulant publie, p. 66-78, une *note sur une inégalité à longue période qui paraît exister dans le mouvement de la Terre* où il confirme que, comme l'avait indiqué Airy, « le mouvement de la Terre est affecté par l'action de Vénus d'une inégalité à longue période qui peut atteindre 2" dans son maximum » ;
- Delaunay publie, dans les additions à la CDT pour 1845, p. 37-47, l'article *calcul de deux inégalités d'Uranus qui sont de l'ordre du carré de la force*

*perturbatrice* où il recalcule des inégalités découvertes par Hansen.

### 3 Problèmes de mécanique céleste liés au mouvement des planètes et des satellites

Pendant la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, plusieurs problèmes de mécanique céleste sont abordés dans la CDT : développement de la distance mutuelle de deux planètes, de la fonction perturbatrice et de leurs coordonnées, intégration des équations du mouvement, stabilité du Système solaire, action des étoiles sur le Système solaire, mouvement des satellites.

#### 3.1 Développement de la distance mutuelle de deux planètes, de la fonction perturbatrice et des coordonnées

Dans la CDT pour 1825, Poisson présente, p. 379-385, un article *sur une nouvelle manière d'exprimer les coordonnées des planètes dans le mouvement elliptique*.

Dans la CDT pour 1828, Laplace publie, p. 311-321, *Sur le développement en série du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes, et sur le développement du rayon vecteur elliptique*. Il écrit que le développement du rayon vecteur elliptique « peut se rapporter aux puissances de l'excentricité ; il peut être fait en cosinus de l'anomalie moyenne et de ses multiples » et explique qu'il va « considérer sa convergence sous ces deux rapports ».

Dans les additions à la CDT pour 1836, on trouve un premier article de Poisson *sur le développement des coordonnées d'une planète dans son mouvement elliptique, et de la fonction perturbatrice de ce mouvement*, p. 3-31 dans lequel il recalcule d'une manière plus simple les formules qu'il avait présentées dans les additions à la CDT pour 1825, puis applique ses méthodes de calcul « à la fonction perturbatrice du mouvement elliptique ».

#### 3.2 Intégration des équations

Les additions de la CDT pour 1831 contiennent, p. 23-49, un mémoire de Poisson, *mémoire sur plusieurs points de la mécanique céleste*. Dans la première partie de ce mémoire, il aborde le problème de la détermination « des constantes arbitraires introduites par les approximations successives, dans les expressions des coordonnées planétaires ».

Dans les additions à la CDT pour 1832, Pontécoulant rectifie, p. 93-94, une erreur commise par Poisson dans la première partie de son mémoire publié dans la CDT précédente, dans une note « relative au Mémoire sur plusieurs points de la Mécanique céleste, inséré dans la Connaissance des tems de 1831 ».

Pontécoulant, dans les additions à la CDT pour 1837, p. 40-92, présente un *mémoire sur une méthode nouvelle pour la détermination des perturbations planétaires* dans lequel il discute les travaux de Hansen.

Dans les additions à la CDT pour 1852, Villarceau publie, p. 85-193, une *Méthode pour calculer les éléments des planètes, ou, plus généralement, des astres dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, fondée sur l'emploi des dérivées relatives au temps, des trois premiers ordres de la longitude géocentrique et du premier ordre de la latitude*. Il expose la « méthode d'interpolation de M. Cauchy » (p. 129), donne un « Tableau synoptique des formules tirées de la méthode d'interpolation de M. Cauchy » (p. 141), puis un « Résumé des formules propres à la détermination des orbites des planètes » (p. 143).

Perrey, professeur à la faculté des Sciences de Dijon, publie, dans les additions à la CDT pour 1853, p. 1-41, *Sur la détermination de l'orbite des planètes et des comètes*, article dans lequel il reprend, en la simplifiant, une méthode due à Cauchy.

#### 3.3 Stabilité du Système solaire

Le deuxième article publié par Poisson dans les additions à la CDT pour 1836, p. 31-34, s'intitule *sur la stabilité du système planétaire*. Il affirme « Pour la stabilité du système planétaire il est nécessaire et il suffit que chacun des trois éléments  $a$ ,  $e$ ,  $\gamma$ , ne puissent croître indéfiniment ». Il conclut à la stabilité d'un système planétaire dans le cas où les planètes tournent dans le même sens autour du corps central, ce qui est le cas de notre Système solaire.

#### 3.4 Action des étoiles sur le Système solaire

La CDT pour 1829 contient, p. 249-251, un article de Laplace, *De l'action des étoiles sur le système planétaire*, dans lequel il montre que seul un effet en latitude est possible et que « Cette variation en latitude est l'effet le plus sensible de l'action des étoiles sur le système planétaire. Mais il est visible que par rapport aux planètes les plus éloignées du Soleil, où cet effet est le plus grand, il ne pourra devenir sensible qu'après un grand nombre de siècles ».

#### 3.5 Mouvement des satellites

On trouve dans les additions à la CDT deux articles concernant le mouvement des satellites :

- Dans la CDT pour 1829, Laplace publie, p. 245- 249, *Sur les mouvements de l'Orbite du dernier satellite de Saturne*. Il note que l'analyse de Plana qui avait obtenu, sur ce sujet, des résultats différents des siens, « n'est pas entièrement exacte » et retrouve, par une autre méthode, les résultats qu'il avait publiés dans le quatrième volume de sa Mécanique céleste ;
- La deuxième partie du mémoire de Poisson *sur divers points de la mécanique céleste*, publiée dans les additions à la CDT pour 1831, p. 36- 40, sous le titre *Sur les déplacements du plan de l'orbite d'un satellite, dus à la non-sphéricité de la planète*, exa-

mine les différences entre les résultats de Laplace et Plana et conclut à l'avantage de Laplace.

## 4 Les travaux de Le Verrier

Les travaux de Le Verrier font l'objet de plusieurs articles dans les additions à la CDT. Ils concernent d'abord les variations séculaires des éléments des planètes puis l'élaboration des théories analytiques.

### 4.1 Variations séculaires des éléments des planètes

Le premier article de Le Verrier paru dans la CDT est un *mémoire sur les variations séculaires des éléments des orbites pour les sept planètes principales*, publié dans les additions à la CDT pour 1843, p. 3-66, mémoire qu'il termine en « **donnant une Table** de la marche des éléments des orbites de Mercure, la Terre, Vénus et Mars, pendant 200 000 ans ».

La figure 1 donne les variations de l'excentricité de la Terre de 110 000 ans avant le 1 janvier 1800 jusqu'à 200 000 ans après le 1er janvier 1800.

Les additions à la CDT pour 1844 contiennent deux textes de Le Verrier :

- Dans le premier, *mémoire sur la détermination des inégalités séculaires des planètes*, p. 28-109, il calcule ces inégalités séculaires en tenant compte des termes jusqu'au troisième degré en excentricité et inclinaison ;
- Le second est une *Addition au précédent Mémoire*, p. 109-110, où il étudie l'action de Vénus sur l'obliquité de Mercure.

### 4.2 Construction de théories analytiques du mouvement des planètes

Dans les additions à la CDT pour 1848, p. 3-165, Le Verrier publie sa *théorie du mouvement de Mercure*. Cet article est divisé en trois parties :

- La première partie, p. 4-64, s'intitule *Considérations sur la théorie de Mercure. Calcul des perturbations du mouvement héliocentrique*. Il calcule d'abord des « **éléments provisoires** de l'orbite » ainsi que le diamètre et la masse de la planète puis détermine « **les inégalités** des éléments et des coordonnées elliptiques par la méthode de la variation des

constantes arbitraires ». Il donne ensuite les « **variations séculaires** des éléments de l'orbite ». Il calcule les « **variations périodiques** des éléments de l'orbite et des coordonnées héliocentriques, produites par Vénus » puis les « **perturbations** produites par la Terre » et les « **perturbations** produites par Mars, Jupiter, Saturne et Uranus ». Il donne enfin un « **Résumé** des expressions provisoires des éléments elliptiques et des perturbations » ;

- La **deuxième partie**, p. 65-119, comprend la comparaison de la théorie aux observations et la détermination des éléments du mouvement elliptique ;
- La **troisième partie**, p. 119-165, donne les tables du mouvement elliptique où les coordonnées sont exprimées soit en fonction de l'anomalie moyenne (**ancienne forme**), soit, ce qui est beaucoup plus pratique, directement en fonction du temps (**nouvelle forme**), ainsi que des « **tables** des perturbations du mouvement héliocentrique ».

Dans les additions à la CDT pour 1849, Le Verrier publie, p. 1-254, *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel (dite Uranus)*, article fondamental où il présente les calculs qui ont conduit à la découverte de Neptune, et que nous avons décrit en détail dans l'épisode 3 de ce feuillet. Rappelons simplement qu'incité par Arago à résoudre le problème des écarts entre les positions d'Uranus données par les tables de Bouvard et les observations, Le Verrier les explique par la présence d'une planète perturbatrice dont il donne une position suffisamment bonne pour que Gallé la découvre le 23 septembre 1846. Adams avait résolu le problème peu avant Le Verrier mais ses résultats ne seront publiés qu'après la découverte de la planète. Cette nouvelle planète sera appelée Neptune au grand dam de Le Verrier qui aurait voulu l'appeler Le Verrier !

Le Verrier va ensuite construire des théories analytiques du mouvement des planètes mais ces travaux ne feront pas l'objet d'articles dans la CDT.

## 5 Conclusion

Comme pour la Lune, la CDT montre les progrès réalisés par la mécanique céleste au cours du XIX<sup>e</sup> siècle sur l'étude du mouvement des planètes et de leurs satellites. Les théories analytiques de Le Verrier puis celles de son collaborateur Gaillot vont être la source des éphémérides planétaires publiées dans la CDT jusqu'en 1984, année à partir de laquelle elles seront remplacées par des théories construites au Bureau des longitudes.

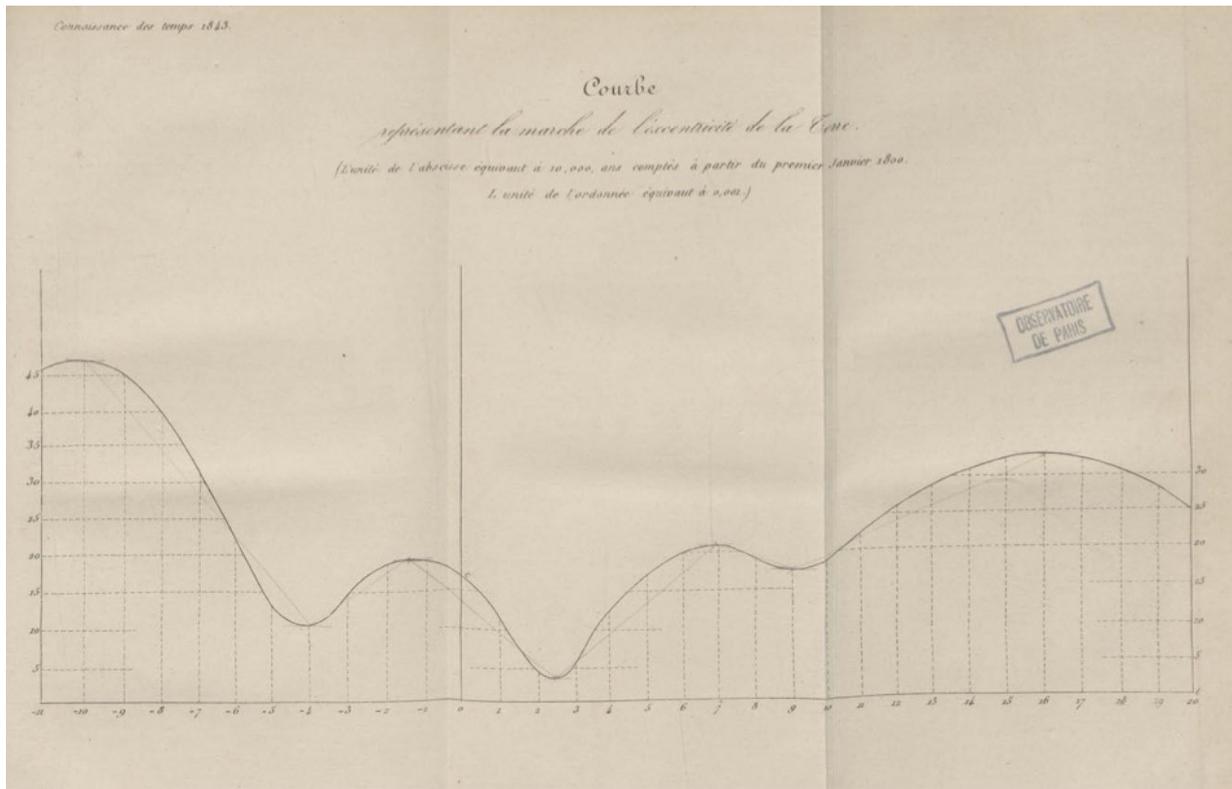


FIGURE 1 – Variation de l'excentricité de l'orbite de la Terre de -110 000 ans à +200 000 ans autour du 1 janvier 1800. L'unité de l'abscisse correspond à 10 000 ans, celle de l'ordonnée à 0,001 (courbe publiée dans la CDT pour 1843)