

La Connaissance des temps : un journal scientifique publié depuis 1679

Épisode 24 - La mécanique céleste et les mathématiques au XIX^e siècle

Les additions à la Connaissance des temps contiennent de nombreuses contributions de savants à la résolution de problèmes divers de mécanique céleste et de mathématique.

En mécanique céleste sont étudiés le problème des trois corps, les équations du mouvement des points matériels, la théorie des perturbations. Les sujets abordés en mathématiques dans la CDT sont le calcul des probabilités, la trigonométrie, la rotation des corps solides, les méthodes d'interpolation. Ces sujets sont directement liés à une utilisation en mécanique céleste.

1 Mécanique céleste

1.1 Le problème des trois corps et l'étude du mouvement des points matériels

La construction des éphémérides repose sur la meilleure connaissance du mouvement de trois corps (trois points matériels massifs) dans l'espace. Le cas de deux corps en mouvement est très simple, mais se complique dès l'apparition d'un corps supplémentaire, ce qui est bien évidemment le cas dans le Système solaire.

Dans les additions à la CDT, c'est essentiellement Liouville qui traite de ces sujets. Liouville est un mathématicien qui s'intéresse à la mécanique, application des mathématiques. Il est membre du Bureau des longitudes et, à ce titre, il s'intéresse à la fabrication des éphémérides ce qui va l'amener à publier des articles dans la CDT.

Dans les additions à la CDT pour 1845, il publie *Sur un cas particulier du problème des trois corps* (p. 3-17) dans lequel il étudie le problème de trois masses rangées en ligne droite. Partant du théorème dû à Laplace qui prouve que, dans certaines conditions de masses, de distances et de vitesses initiales, les trois corps restent en ligne droite, il résout le problème « Trois masses étant placées non plus rigoureusement, mais à très peu près dans les conditions énoncées par Laplace, on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état particulier de mouvement ou si elle tendra au contraire à l'en écarter de plus en plus ».

Ces mêmes additions contiennent, p. 18-33, un mémoire de Chasles *Théorèmes généraux sur l'attraction des corps*, suivi, p. 34-36, d'une *Note à l'occasion du mémoire de M. Chasles* publiée par Liouville.

Liouville publie dans les additions à la CDT pour 1849, p. 255-256, *Théorème concernant l'intégration des équations du mouvement d'un point libre*. Il conclut que son analyse « nous paraît à la fois simple et générale. Elle renferme, par exemple, comme cas très-particulier, tout ce qu'Euler et Lagrange ont obtenu relativement au mobile soumis à l'attraction de deux ou de trois centres fixes ».

Dans les additions à la CDT pour 1850, p. 3-40, Liouville

publie *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels*. Il applique la même analyse que dans son mémoire de l'année précédente « aux équations du mouvement d'un nombre quelconque de points m, m', m'', \dots que d'abord je supposerai libres aussi ».

Liouville, dans les additions à la CDT pour 1859, p. 1-22, publie une note *Développements sur un Chapitre de la Mécanique de Poisson*. Dans cette note écrite, en fait, bien antérieurement, peu après la mort de Poisson, il développe une idée de ce dernier, « Il s'agissait d'étendre à un système quelconque de points matériels, ou le principe des aires ait lieu, certaines transformations analytiques, que les équations fournies par ce principe admettent toujours, et que Poisson a données dans sa Mécanique pour le seul cas d'un système de forme invariable ».

Dans une autre note, *Sur un problème de mécanique*, publiée dans les additions à la CDT pour 1860, p. 32-35, Liouville étudie le problème suivant « trois points matériels m, m', m'' entre lesquels s'exercent des attractions réciproques exprimées par des fonctions quelconques des distances ; et admettons, de plus, que les deux points m' et m'' soient assujettis à rester à des distances constantes du point m ». Il montre que « quand le mouvement des trois points m, m', m'' s'effectue dans un plan, les équations différentielles qui le déterminent s'intègrent par de simples quadratures ».

On notera également un article de Villarceau, dans les additions à la CDT pour 1852, p. 76-85, *Détermination de l'intensité des forces centrales, dans une section conique dont les foyers ne coïncident pas avec le centre des forces*.

La plupart de ces articles restent valables aujourd'hui. La mécanique céleste repose toujours sur les mêmes théories mathématiques, seules les méthodes de résolution et une meilleure connaissance des systèmes ont permis de grands progrès.

1.2 Théorie des perturbations

Le problème du mouvement de deux corps a une solution analytique. Ce n'est pas le cas du problème de trois corps ou plus. Ainsi, on a considéré que l'on avait des mouvements à deux corps perturbés par des corps supplémentaires. Améliorer la connaissance de ces perturbations est essentiel pour améliorer les éphémérides.

On trouve dans les additions à la CDT pour 1847, p. 3-167, une traduction de l'allemand, par Victor Mauvais, d'un mémoire de Hansen *Sur la détermination des perturbations absolues dans des ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques*. Il s'agit, en fait, de la *Première partie*, contenant comme exemple, le calcul des perturbations absolues de la comète de Encke produites par Saturne. Après une introduction (p. 3-10), le mémoire contient six paragraphes :

- I. *Considérations générales sur le développement des perturbations dans le cas des grandes excentricités et des grandes inclinaisons* (p. 11-16) ;
- II. *Développement de la fonction perturbatrice dans le cas où $r < r'$* (p. 16-69) ;
- III. *Du choix des coordonnées convenables* (p. 69-87) ;
- IV. *Intégration des différentielles du paragraphe précédent* (p.87-139) ;
- V. *Réunion des perturbations absolues de la comète de Encke, produites par Saturne, et leur comparaison avec les perturbations relatives* (p. 139-150) ;
- VI. *Développement des perturbations qui proviennent de la réaction de la planète sur le Soleil* (p. 151-167).

On voit dans ce mémoire comment chaque perturbation d'un corps est étudiée individuellement avec des méthodes spécifiques dans chaque cas particulier.

2 Mathématiques

2.1 Calcul des probabilités

Laplace et Poisson se sont beaucoup intéressés au calcul des probabilités et ont publié plusieurs articles sur ce sujet dans les additions à la CDT. La notion de probabilité dépasse la mécanique céleste, mais elle est très liée à la notion d'erreurs que l'on veut éviter, mais qui sont inévitables ! Elle devient donc un outil essentiel pour passer des théories aux éphémérides. Ainsi on verra comment l'augmentation du nombre d'observations permet d'avoir une probabilité d'erreur plus faible.

Les additions à la CDT pour 1815, p. 215-221, donnent un compte rendu de la « *théorie analytique des probabilités* » de Laplace. On y indique que Laplace considère que sa recherche « *mérite l'attention des géomètres* » par l'analyse qu'elle exige, ..., intéresse les observateurs, en leur indiquant les milieux qu'ils doivent choisir entre les résultats de leurs observations, et la probabilité des erreurs qu'ils ont encore à craindre ... et mérite l'attention des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes qui nous paraissent entièrement livrées au hasard ».

Laplace publie deux mémoires dans les additions à la CDT pour 1818.

- Dans le premier, *Sur l'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle*, (p. 361-377), il applique la méthode exposée dans sa théorie analytique des probabilités aux valeurs des masses de Jupiter, Saturne et Uranus. Concernant la masse de Saturne, égale, selon Bouvard, « à la 3512ème partie de celle du soleil », il affirme « *qu'après un siècle* de nouvelles observations ajoutées aux précédentes, et discutées de la même manière, le nouveau résultat ne différera pas d'un centième, de celui de M. Bouvard ». Bouvard avait estimé les masses de Jupiter et Uranus, en masse solaire, respectivement à 1/1071 et 1/17918. Pour la masse de Jupiter Laplace écrit « il y a neuf cent à parier contre un, que son erreur n'est pas d'un cent cinquantième » et , pour celle d'Uranus « *il y a deux cent treize à parier* contre un, que l'erreur ... n'est pas un cinquième ». Si l'on compare aux masses réelles des trois planètes (en masse solaire : 1/1047,35, 1/3497,9 et 1/22903), on constate que les conclusions de Laplace sont justes en ce qui concerne la masse de Saturne, mais trop optimistes pour les deux autres ;
- Dans le deuxième, *Sur le Calcul des Probabilités, appliqué à la Philosophie naturelle* (p. 378-381), il apporte des précisions sur les formules de sa théorie des probabilités.

On trouve un autre article de Laplace dans les additions à la CDT pour 1822, p. 346-348, *Application du Calcul des Probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne de France*. Il estime l'erreur sur l'arc mesuré de Perpignan à Formentera à $\pm 8m,0937$ et montre « *combien l'introduction* du cercle répétiteur dans les opérations géodésiques, a été avantageuse ».

Dans les additions à la CDT pour 1827, p. 273-302, Poisson publie *Sur la Probabilité des résultats moyens des Observations* article dans lequel il développe « quelques points » de la théorie de Laplace.

Poisson complète son mémoire de 1827 dans les additions à la CDT pour 1832, p. 3-22, dans le mémoire *Suite du Mémoire sur la probabilité du résultat moyen des observations, inséré dans la Connaissance des Temps de l'année 1827*. Dans cet article, il « se propose d'ajouter quelques nouveaux développements à la partie de ce Mémoire qui est relative à la probabilité du milieu arithmétique entre les résultats d'un très grand nombre d'observations ».

2.2 Trigonométrie

La trigonométrie joue un rôle important dans les calculs géodésiques : l'astronome et le géomètre mesurent des angles et doivent travailler sur une sphère. Les formules trigonométriques sont donc essentielles. Elle fait l'objet de plusieurs articles des additions à la CDT.

Dans les additions à la CDT pour 1820, Delambre publie, p. 343-356, *Nouvelles Formules trigonométriques de M. Mollweide*, article dans lequel il aborde le problème de

la résolution d'un triangle sphérique. Il démontre les formules que Mollweide avait données sans démonstration.

Le mathématicien français Louis Puissant va, dans les années 1830, publier plusieurs articles sur la trigonométrie dans les additions à la CDT.

Dans les additions à la CDT pour 1832, p. 34-48, Il publie une note *Sur la Trigonométrie sphéroïdique, dans laquelle on détermine généralement la plus courte distance de deux points donnés sur la Terre par leur latitude et leur longitude*.

Cette note fait l'objet, dans les additions à la CDT pour 1833, p. 77-85, d'une suite intitulée *Suite de la Note sur la Trigonométrie sphéroïdique, insérée dans la Connaissance des tems pour 1832* dans lequel il résout de deux manières différentes le problème suivant « Étant donnés, dans un triangle sphéroïdique formé par deux méridiens et un arc de plus courte distance, 1) la longueur s de cet arc, 2). l'angle VH qu'il fait avec l'un des méridiens, 3) l'angle φ de ces deux méridiens, trouver les deux autres parties de ce triangle ».

Enfin, dans les additions à la CDT pour 1834, p. 3-15, Puissant publie *Application du calcul des probabilités à la Mesure de la précision d'un grand Nivellement trigonométrique*, article dans lequel, considérant les travaux géodésiques relatifs à la nouvelle carte de France, il indique « pour avoir une juste idée de la précision de pareilles mesures, déduites d'un grand nombre d'observations angulaires, il ne suffit pas de remarquer leur accord plus ou moins parfait, il faut, de plus, évaluer, par l'analyse des probabilités, l'étendue des erreurs dont elles sont susceptibles ».

Cet article de géodésie rappelle bien que l'astronomie et

la mécanique céleste sont là pour permettre la mesure de l'espace, mais aussi celle de la Terre.

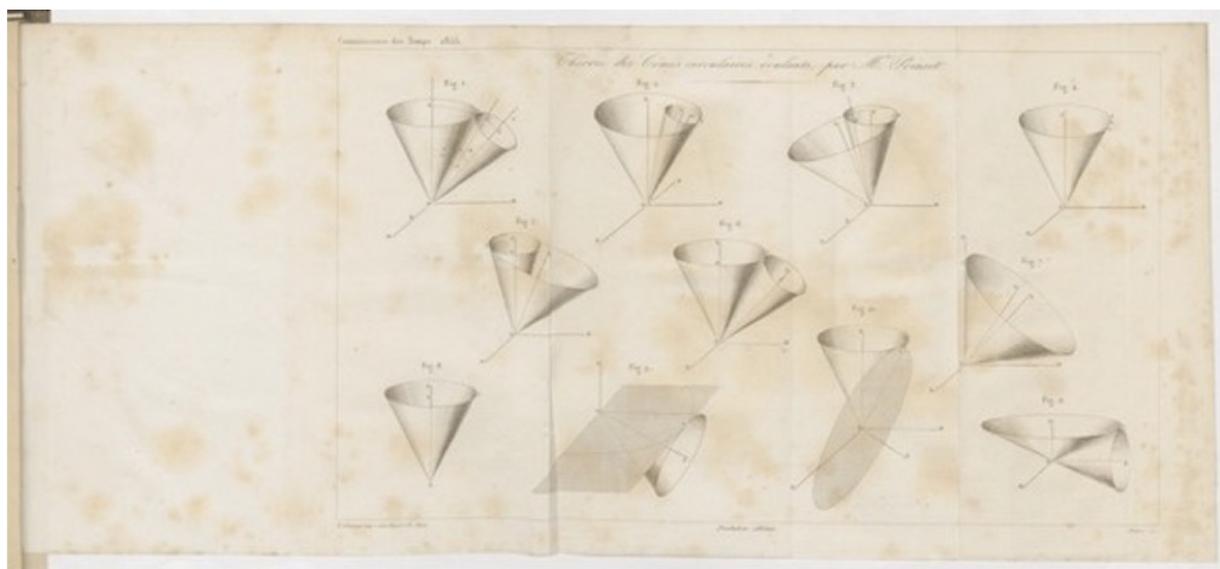
2.3 Rotation des corps solides

On trouve, dans les additions à la CDT, deux articles de Poinsot traitant de la rotation des corps solides.

Dans les additions à la CDT pour 1854, p. 3-134, il publie *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Il divise son article en trois parties : « dans la première après avoir considéré le corps en lui-même, je cherche les forces qui seraient capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps, en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la dynamique ; dans la deuxième partie, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres ; et, dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution ».

Dans les additions de la CDT pour 1855, p. 3-24, il publie *Théorie des cônes circulaires roulants*. Dans cet article il « considère un corps solide de forme et de constitution quelconque, doué de deux axes égaux d'inertie, et qui se meut, autour d'un point pris sur son troisième axe, comme si un cône circulaire décrit du même point autour de cet axe roulait actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône circulaire de même sommet. Je cherche la condition d'un tel mouvement, je veux dire le couple accélérateur étranger qui serait capable de le produire ». La figure 1 illustre cette théorie.

On est là dans la mécanique. Ces articles ont un lien avec la rotation des corps. À l'époque, ce n'était pas encore beaucoup appliqué à la mécanique céleste mais cela le sera ultérieurement.



Source gallica.bnf.fr / Observatoire de Paris

FIGURE 1 – Illustration de la théorie des cônes roulants de Poinsot dans la CDT pour 1855.

2.4 Méthodes d'interpolation

La publication sous forme de tables nécessite pour l'utilisateur d'interpoler les données pour obtenir des po-

sitions à des dates intermédiaires de celles proposées dans la CDT. L'interpolation linéaire sera suffisante pendant longtemps sauf pour certains corps pour lesquels des explications particulières sont fournies. C'est seule-

ment avec l'augmentation de la précision que l'interpolation linéaire ne sera plus suffisante et une explication précise sera donnée dans chaque volume de la CDT à partir de 1915 (voir figure 2). L'article ci-dessous montre qu'on s'y intéressait bien avant.

Les additions à la CDT pour 1847, p. 181-223, contiennent un mémoire du mathématicien suisse Frédéric Maurice, *sur Les Interpolations, contenant surtout, avec une exposition fort simple de leur théorie, dans ce qu'elle a de plus utile pour les applications, la démonstration générale et complète de la méthode de quinti-section de Briggs et de celle de Mouton, quand les indices sont équidifférents, et du procédé exposé par New-*

ton, dans ses Principes, quand les indices sont quelconques. Son mémoire se termine par l'étude de cas qui se présentent dans les interpolations astronomiques, p. 216-219 et p. 219-223.

3 Conclusion

La mécanique céleste et les mathématiques sont donc très présentes dans les CDT du XIX^e siècle. On notera la place à part des articles mathématiques. Ils ne sont pas directement liés aux éphémérides mais présentent des techniques et des méthodes à la base de la mécanique céleste, du calcul des éphémérides et de la géodésie.

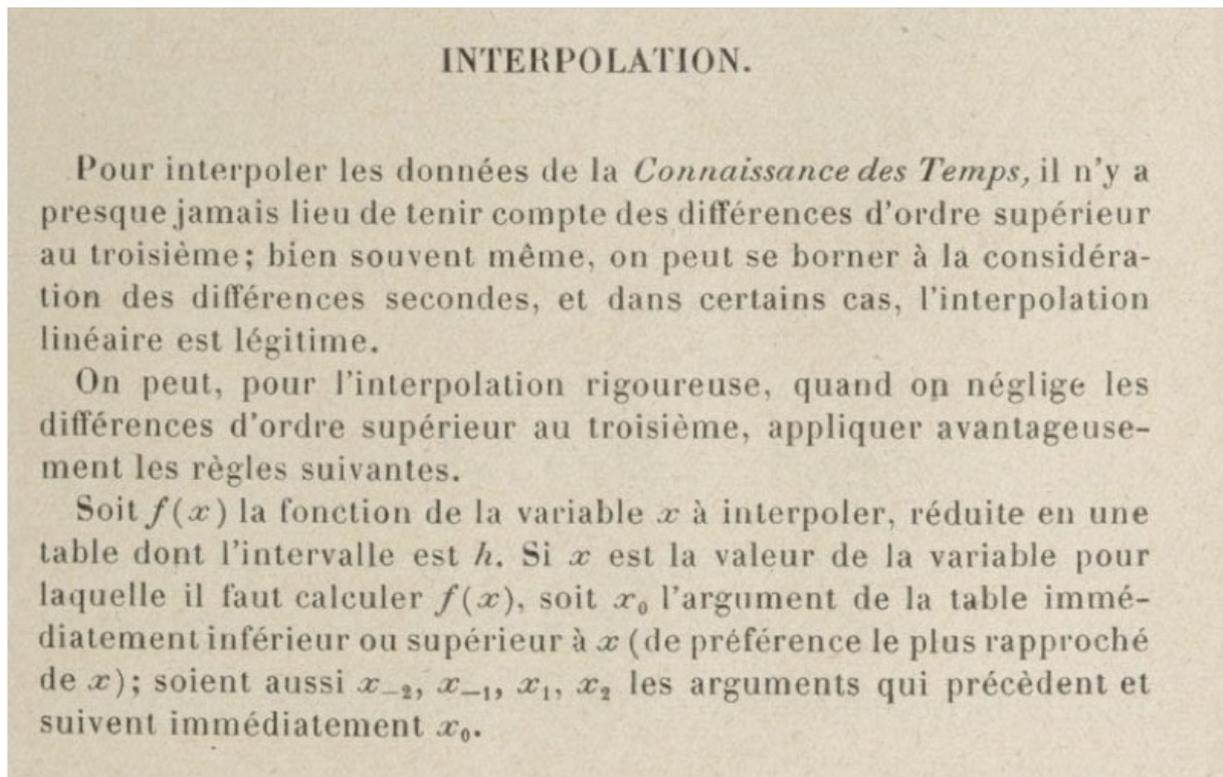


FIGURE 2 – Explication de l'interpolation dans la CDT à partir du volume pour 1915 .