Une brève Histoire de la mécanique céleste

Épisode 1 - Clairaut et l'apogée de la Lune.

Alexis-Claude Clairaut (Figure 1), second des vingt et un enfants d'un maître de mathématiques de Paris, pourrait être qualifié de précoce en matière de mathématiques. Dès l'âge de 12 ans, il lit un mémoire devant l'Académie des Sciences, institution qu'il intégra dès 1731 grâce à une dispense spéciale du roi, l'âge minimal ayant été fixé à 20 ans. Très vite, le jeune Clairaut s'attache à mettre en œuvre et à vérifier la validité de la théorie de Newton de l'attraction à travers ses effets. En 1736, il s'engage aux côtés de Maupertuis dans l'expédition de Laponie pour déterminer la « figure de la Terre » à propos de laquelle il publiera son premier travail théorique en 1743. Un autre grand moment historique, à fort écho public, survient à l'occasion du retour de la comète dite de Halley attendue en 1758. Clairaut s'attaque au problème et montre que les actions perturbatrices de Jupiter et Saturne vont retarder son retour qu'il annonce pour le printemps 1759 ; que l'observation viendra confirmer avec éclat. Cependant, nous avons fait le choix d'évoquer un problème méconnu, car sans doute trop obtus et peu couru, celui du mouvement de l'apogée de la Lune qui ne fut pleinement résolu par Newton lui-même. Le problème était crucial pour la survie de la loi de l'attraction.

FIGURE 1 – Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)

1 « L'inégalité la plus obscure » du mouvement de la Lune

Dans les années 1740, aux côtés de deux des plus talentueux mathématiciens du moment, Leonhard Euler (1707-1783) et Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Clairaut entreprend de résoudre analytiquement les mouvements de la Lune selon la loi du carré inverse de Newton. Le problème est d'une grande complexité, car la Lune éprouve également l'attraction du Soleil source de grandes variations dans son mouvement pour aller de sa conjonction (nouvelle Lune) à son opposition (pleine lune). Non seulement l'orbite lunaire change en grandeur et en forme mais elle subit également un mouvement global, notamment à travers le mouvement de l'apogée lunaire, point le plus éloigné de la Terre.

Chacun d'eux met en évidence une anomalie de taille concernant la vitesse d'avancement de l'apogée de la Lune ; par application de la théorie de Newton cette avance devrait se monter à 1°31´28" après chaque révolution, conduisant ainsi à une révolution complète de 360° de la ligne des apsides (axes reliant l'apogée au point diamétralement opposé de l'orbite elliptique, le périgée) en 18 ans, soit le double de ce qui est observé. L'apogée de la théorie avance donc deux fois moins vite que l'apogée réel ! Ni Euler ni d'Alembert ne réussissent à résoudre cette contradiction. Pas plus Clairaut qui en 1747 met en garde :

« *Si cette théorie [de M. Newton] ne donnoit point de mouvement à l'apogée, ou qu'elle lui en donnât un assez éloigné du réel pour ne pouvoir pas en jeter les différences sur les erreurs des observations, elle seroit dès lors condamnée sans appel* ».

Pour Clairaut « l'inégalité la plus obscure » du mouvement de la Lune est celle du mouvement de son apogée mais c'est aussi la plus importante si l'on veut disposer de tables du mouvement de la Lune de haute précision.

« *On sait que c'est de ce point qu'on part pour employer la plus grande des corrections du mouvement de la Lune, celle qu'on appelle équation du centre ; cette équation peut aller jusqu'à 6 ou 7 degrés qu'il faut tantôt ajouter & tantôt retrancher, suivant la position où la Lune est par rapport à l'apogée* ».

Clairaut va finir par se résoudre à rechercher une nouvelle loi. Cependant face aux nombreux succès de la théorie de Newton, il lui paraît « *aussi difficile de la rejeter que de l'admettre* ». Il va donc essayer de la modifier en y ajoutant une composante de la force qui agit réciproquement comme le cube de la distance ainsi cette composante supplémentaire se ferait sensible à la distance de la Lune mais non plus à celle des planètes.

Attitude qui va lui attirer les foudres de Buffon à l'Académie des Sciences. Il récuse le principe d'une loi *ad hoc* que l'on adapterait à chaque difficulté rencontrée. Mais surtout, supposer qu'une qualité physique puisse varier – par exemple l'attraction - « *comme cette qualité est une, la variation sera simple et toujours exprimable par un seul terme qui en sera la mesure. Dès qu'on voudra employer deux termes, on détruira l'unité de la qualité physique ; parce que ces deux termes représenteront deux variations différentes dans la même qualité, c'est-à-dire deux qualités au lieu d'une* ». Ainsi, si Clairaut ajoute un second terme, cela reviendrait à admettre qu'il y a une seconde force à l'œuvre, différente de l'attraction. Toute loi physique ne doit donc comporter qu'un seul terme. L'échec de la théorie de Newton à rendre compte du mouvement de l'apogée n'est qu'apparent, mais peut a contrario suggérer l'existence d'une autre force centripète, par exemple d'origine magnétique. Les arguments de Buffon ne sont pas ceux d'un mathématicien, mais cette polémique va possiblement jouer un rôle dans la décision de Clairaut de remonter à l'assaut de l'apogée lunaire (Figure 2) .

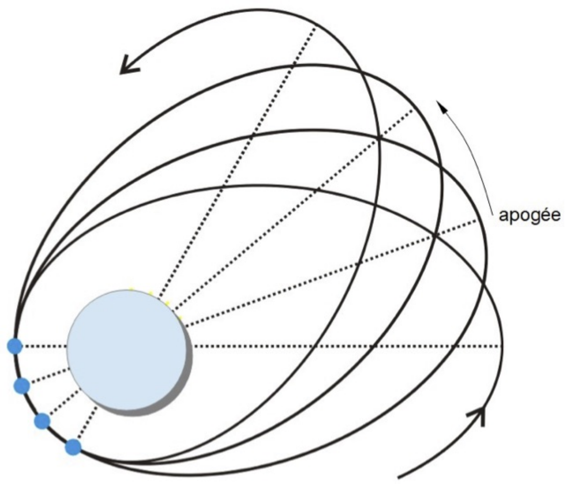

FIGURE 2 – Mouvement de révolution de l'apogée lunaire qui fait une révolution complète en 8,8 ans. La forme de l'orbite lunaire a été exagérément elliptisée pour les besoins de la compréhension.

2 Le problème des 3 corps

Clairaut reprend donc le « problème des trois corps » – terminologie qu'il est le premier à utiliser – dont il donne la définition suivante :

« *Trois corps étant donnés avec leurs positions, leurs masses et leurs vitesses, trouver les courbes qu'ils doivent décrire par leur attraction supposée proportionnelle à leurs masses et en raison inverse du carré des distances* ».

Contrairement au problème des deux corps – dit « problème de Képler » – celui des trois corps ne peut se résoudre à l'aide d'expressions analytiques exactes. Le problème se traite alors par le biais des perturbations produites dans le mouvement d'un corps autour d'un autre corps par un troisième corps, les trois corps étant soumis à la loi de l'attraction de Newton. Toute une machinerie mathématique se met alors en place. La Lune décrirait une ellipse parfaite si elle n'était attirée que par la Terre ; mais elle est continuellement détournée de cette orbite par l'effet de l'attraction des autres planètes et du Soleil. Une simplification des calculs suppose que la Lune reste toujours sur son ellipse autour de la Terre, mais que celle-ci est mobile sous l'effet d'un troisième corps, le Soleil.

Clairaut traite le problème des trois corps à l'aide d'hypothèses simplificatrices de telle façon qu'il réussit à exprimer l'équation générale de l'orbite troublée (son rayon vecteur) comme somme de deux expressions dont la première est l'équation d'une ellipse ordinaire et la seconde constitue la perturbation causée dans l'orbite. Ce second terme est lui-même fonction du rayon vecteur, par conséquent la résolution de l'équation générale nécessite de faire une hypothèse sur la forme inconnue de l'orbite. Au lieu de prendre comme orbite initiale une orbite képlérienne classique, donc immobile, Clairaut aborde le problème en posant comme équation supposée du rayon vecteur r en fonction de l'anomalie vraie v (angle que le rayon vecteur fait avec la direction de l'apogée) :

$$\frac{k}{r} = 1 - e\cos mv$$

Il s'agit d'une ellipse tournante de type képlérien d'excentricité e et de paramètre k. Le nombre m, plus petit que 1, exprime le mouvement de l'apogée. Si l'ellipse était purement képlérienne, m serait identiquement égal à 1. La validité de cette hypothèse ne peut être reconnue qu'a posteriori, une fois résolue l'équation générale, à la seule condition que la forme finale de la solution présente une quantité supplémentaire Δ très petite devant les premiers termes qui représentent l'orbite principale non perturbée :

$$\frac{k}{r} = 1 - e\cos mv + \Delta$$

Et effectivement, avec une telle hypothèse de départ, la solution finale de son équation générale pour le rayon vecteur r a bien cette forme, plus exactement elle s'écrit :

$$\frac{k}{r} = 1 - e\cos mv + \beta\cos\frac{2v}{n} - \gamma\cos\left(\frac{2}{n} - m\right)v$$
$$+\delta\cos\left(\frac{2}{n} + m\right)v - \zeta\cos\left(\frac{2}{n} - 2m\right)v$$

où n est le rapport entre le moyen mouvement de la Lune et la différence entre les moyens mouvements de la Lune et du Soleil. Les seules données connues de l'orbite de la Lune, toutes issues de l'observation, sont son excentricité ($e = 0.05505$) et les moyens mouvements de la Lune et du Soleil à partir desquelles Clairaut détermine la valeur des nombres m, n, k et des coefficients β, γ, δ, ζ.

Telle devrait donc s'écrire l'équation analytique générale de l'orbite de la Lune. Les coefficients sont très petits, et Clairaut aboutit aux valeurs suivantes : $\beta = 0.0071813$, $\gamma = -0.0095897$, $\delta = 0.0001838$. Ainsi les premiers termes de la solution générale sont bien les mêmes que ceux de la forme supposée de la solution et les autres termes sont assez petits. Avec cette première approximation, Clairaut trouve $m = 0.995828$ impliquant que dans la durée d'une révolution sidérale de la Lune, l'apogée a avancé de la quantité $(1 - 0.995828) \times 360° = 1.50192° = 1°30'7"$ soit la moitié du mouvement observé. Cette solution est présentée devant l'Académie des sciences dans un mémoire lu le 15 novembre 1747. C'est elle qui l'amène à remettre en question la validité de loi de Newton.

Dans son second mémoire, déposé le 21 janvier 1749 mais lu le 15 mars 1752, Clairaut procède à une seconde approximation en adoptant comme équation supposée la forme précédente avec l'ensemble des termes. Les calculs requis lors de ce second assaut avec cette nouvelle substitution sont colossaux et Clairaut n'en vient à bout que dans la seconde moitié de 1748. Il détermine alors pour nouvelle valeur de m : $m = 0.99164$ conférant une avance de l'apogée de $3°0'35"$ par révolution sidérale en parfait accord avec l'observation. Pour les coefficients, Clairaut donne dans son mémoire de 1749 : $\beta = 0.007179$, $\gamma = -0.011181$, $\delta = 0.000204$, $\zeta = 0.001004$.

La nouvelle solution diffère finalement très peu de la précédente si ce n'est précisément dans le mouvement de l'apogée qui est deux fois plus rapide. Clairaut s'empresse alors à la fois de reconnaître son erreur et d'annoncer à la Société royale de Londres, et à l'Académie des Sciences de Paris, le 17 mai 1749, qu'il a enfin mis en accord ses calculs avec le mouvement observé de l'apogée de la Lune :

« *Le problème des trois corps, dont personne n'avait donné de solution avant moi, a été traité assez longtemps dans les assemblées de l'Académie pour que l'on se rappelle facilement la remarque singulière sur l'apogée de la Lune, à laquelle conduit ma solution.[. . .]* ».

Au passage, il égratigne sans le nommer Buffon (du moins il nous est permis de penser que c'est de lui dont il s'agit . . .) :

« *On verra lorsque je les donnerai au public, que tout ce qui a été dit sur cette matière, ne m'a pu être d'aucun secours pour le résultat que j'annonce, et qu'il n'y sera pas question de raisons vagues, mais de principes sûrs et appliqués suivant les règles que prescrit la géométrie* ».

L'exploit fut salué par Euler dans une lettre datée du 29 juin 1751 :

« *Quelque répugnance que j'aie sentie de reconnaître la justesse de votre calcul sur le mouvement de l'apogée de la Lune, j'en suis maintenant d'autant plus sensiblement pénétré ; et plus je considère cette heureuse découverte, plus elle me paraît importante, et à mon avis c'est la plus grande découverte dans la théorie de l'astronomie, sans laquelle il serait absolument impossible de parvenir jamais à la connaissance des dérangements que les planètes se causent les unes les autres dans leur mouvement. Car il est bien certain que ce n'est que depuis cette découverte qu'on puisse regarder la loi d'attraction réciproquement proportionnelle au carré des distances comme solidement établie, d'où dépend cependant toute la théorie de l'astronomie* ».

3 Épilogue

Ainsi, Clairaut avait aidé Newton et sa loi à passer l'obstacle de l'énigme de l'avance de l'apogée de la Lune. Si son nom est de nos jours largement ignoré, il n'en reste pas moins que Clairaut fut un artisan exigeant et laborieux, bien plus qu'un partisan complaisant et révérencieux, dans la construction de l'édifice de cette nouvelle science – qui prendra plus tard le nom de « mécanique céleste » - dont Newton avait jeté les bases avec sa loi de l'attraction universelle.