Une brève Histoire de la mécanique céleste

Épisode 2 - Lagrange et les lois de Cassini.

*Joseph Louis Lagrange (1736-1813) est sans doute l'un des rares mathématiciens dont le nom est susceptible de faire écho pour qui s'intéresse peu ou prou aux choses de l'astronomie. Ainsi il se peut que vous ayez déjà entendu parler des fameux « points de Lagrange » : il y en a cinq en tout, ce sont des points de choix de l'espace parce que ce qu'ils ont de particulier tient dans le fait que ce sont des points d'*équilibre relatif *au sein d'un système comprenant trois corps dont l'un a une masse négligeable devant les deux autres. Le meilleur exemple est celui du système constitué de la Terre, du Soleil et d'un télescope que l'on enverrait dans l'espace. Lagrange nous signale l'existence de cinq positions privilégiées (notées logiquement L1, L2, L3, L4 et L5) pour lesquelles un corps quelconque placé dans leur voisinage serait en quelque sorte* protégé *de toutes les influences gravitationnelles qu'il pourrait éprouver et de ce fait conserverait indéfiniment cette position relativement à la Terre et au Soleil – ces points tournent donc à la même vitesse que la Terre autour du Soleil. Pour Lagrange ce n'était qu'un « objet de curiosité mathématique pure », s'il savait . . . Le point le plus prisé des missions spatiales est le point L2, qui se trouve à 1,5 million de km de la Terre en une position opposée au Soleil vis-à-vis de la Terre. Le lieu est déjà bien embouteillé puisqu'on y trouve les télescopes WMAP, Planck, Herschel, Gaia et le* petit dernier, *le télescope spatial James Webb. L'avantage de ce point de « parking spatial » est de ne pas recevoir les émissions infrarouges de la Terre et de ne jamais passer dans les cônes d'ombre de la Terre ou de la Lune.*

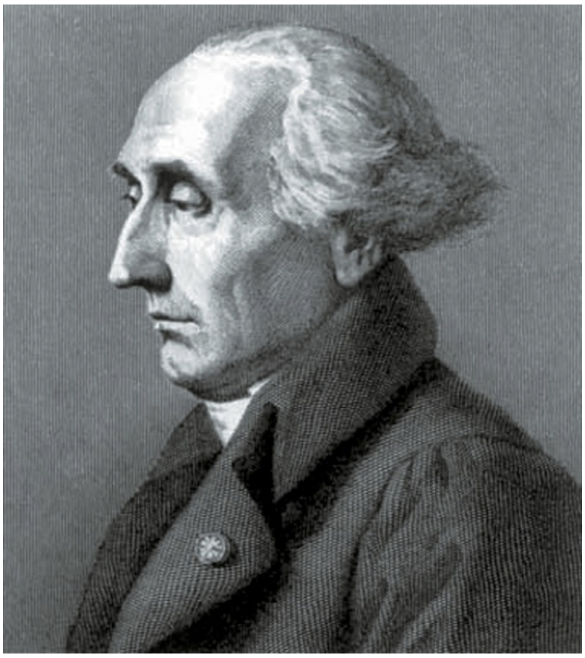

FIGURE 1 – Joseph Louis de Lagrange (1736 - 1813)

1 Les lois de Cassini

Lagrange, tout comme Clairaut et ses contemporains, s'est attaché à étudier les conséquences de la loi de la gravitation de Newton. Parmi tous ses travaux, nous avons pris le parti de revenir sur ceux relatifs au mouvement de rotation de la Lune – de nos jours oubliés ou ignorés - qui fut l'objet de son premier mémoire de mécanique céleste qu'il présenta en 1764 devant l'Académie des sciences, sujet qu'il revisita avec plus de profondeur seize ans plus tard en 1780.

Auparavant remontons encore un peu plus le temps pour revenir à la fin du XVII^e siècle. En 1693, Jean-Dominique Cassini – l'astronome en vue à l'époque de Louis XIV, supervisant les travaux menés à l'Observatoire de Paris depuis son arrivée en France en 1671 – établit les lois empiriques suivantes relatives à la rotation de la Lune :

1. La Lune tourne uniformément autour d'un axe immobile se trouvant dans son corps. La durée de la rotation est identique à la durée de révolution sidérale de la Lune autour de la Terre.
2. Le plan de l'équateur lunaire garde une inclinaison constante, égale à 1°32', sur l'écliptique.
3. L'axe de l'écliptique, l'axe de l'orbite de la Lune et son axe de rotation sont constamment dans un même plan.

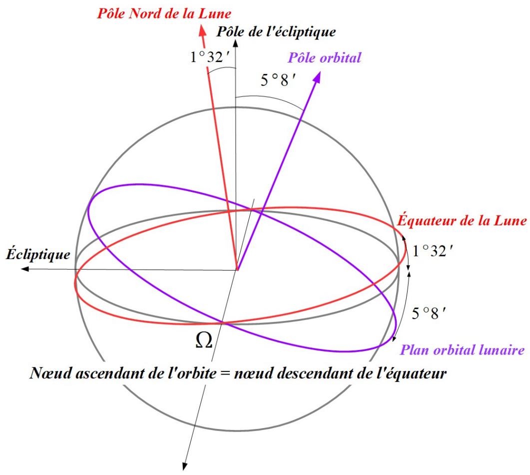

FIGURE 2 – Illustration des lois de Cassini par le positionnement des trois plans fondamentaux sur la sphère céleste (écliptique, plan orbital et plan équatorial de la Lune).

La première de ces lois est ce fait d'observation visible de tous, la Lune nous présente toujours la même moitié de sa surface. Plus intéressantes et inattendues sont les deux autres lois qui sont relatives à l'orientation de l'axe de rotation de la Lune dans l'espace. En particulier, la troisième loi exprime en d'autres termes que le nœud ascendant de l'équateur lunaire sur l'écliptique coïncide toujours avec le nœud descendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique (voir Figure 2). Ces lois ne cessent d'étonner, elles nous disent contre toute attente que les trois plans fondamentaux dont il est question – ceux de l'écliptique, de l'équateur lunaire et de l'orbite lunaire – viennent se couper toujours suivant une même droite, fait d'autant plus surprenant que deux de ces plans sont mobiles. Le plan de l'orbite lunaire est en effet sujet à rotation – on parle de *précession* – à cause des perturbations dues principalement à l'attraction du Soleil. Il fait un tour complet en 18,6 ans, ce qui se traduit par un tour complet de la ligne des nœuds de l'orbite sur cette même période. La troisième loi de Cassini nous dit alors, de façon inattendue, qu'il en va de même du plan de l'équateur lunaire qui d'une certaine façon est ainsi « asservi » au déplacement du plan de l'orbite lunaire. Il y a donc derrière ces lois une seconde synchronisation sous-jacente, celle-ci concerne la période de précession du mouvement de l'axe lunaire dans l'espace et la période de précession de l'axe perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire. Rien d'intuitif dans ces lois qui du reste ont été confirmées au siècle suivant par Tobias Mayer en 1750, puis par Lalande en 1763.

Faut-il donc voir dans l'existence des « lois » de Cassini une conséquence de la théorie de Newton ?

Ce n'est pas ainsi que l'Académie Royale des sciences formule la question pour le prix de l'année 1764, mais c'est la façon dont Lagrange va aborder le problème initial qui était celui de l'origine physique du fait que la Lune nous présente toujours la même face. Pour son mémoire, Lagrange sera le lauréat du prix pour 1764.

On ne pourrait mieux dire que Tisserand en 1898 dans son *Traité de mécanique céleste* (Tome II, chapitre XXVIII) à propos des résultats de Lagrange,

« *les deux lois de Cassini concernant la constance presque absolue de l'inclinaison et la coïncidence des nœuds sont liées l'une à l'autre par la théorie de la gravitation : l'une est conséquence de l'autre* ».

Lagrange réussit effectivement à montrer que les lois de Cassini sont « à peu près » exactes à la *libration* près et qu'elles résultent de la loi de l'attraction. Si les librations (du latin « liber » qui signifie *balancer*) optiques de la Lune avaient été observées depuis Galilée, Lagrange, le premier met en évidence mathématiquement l'existence de librations physiques.

2 Librations : quand la Lune se balance

Revenons au préalable sur ce que sont les librations optiques. Il s'agit d'un balancement apparent de la Lune résultant à la fois de l'inclinaison de l'axe de la Lune et de l'orbite non circulaire de la Lune. La Lune ne montre jamais rigoureusement la même face mais semble osciller lentement en longitude et en latitude par rapport à son centre. La libration en longitude est de 7°57', celle en latitude de 6°51' de sorte que l'on voit un peu moins de 59% de la surface entière de la Lune, seule 41% de sa surface est visible de façon permanente.

Newton avait pressenti, sans être en mesure de le démontrer, l'existence d'une autre libration trouvant son origine dans la forme même de la Lune, une libration dite « physique » pour la différencier des autres. Elle peut se concevoir aisément si l'on admet que la Lune a la forme d'un ellipsoïde aplati à trois axes donc le grand axe s'écarterait peu de la direction du rayon vecteur qui joint son centre à celui de la Terre, dans ce cas l'attraction terrestre tend à le ramener sur ce rayon, « *de même que la pesanteur ramène un pendule vers la verticale* » (comme le présente de façon fort sensible Laplace en 1796 dans son ouvrage *Exposition du système du Monde*). Cette libration est en définitive composée de plusieurs petites oscillations superposées dont la période va du mois à plusieurs années. Il revient ainsi à Lagrange d'avoir démontré l'existence de cette libration physique dont l'amplitude ne dépasse pas les 2' d'angle. C'est par cette petite quantité que les lois de Cassini ne sont pas rigoureusement exactes ! Encore fallait-il être en mesure d'observer cette prédiction de Lagrange issue de l'application de la théorie de l'attraction de Newton.

Laplace invita par conséquent les astronomes de l'Observatoire de Paris à entreprendre ce travail qui fut effectué par Arago et Bouvard entre 1806 et 1810. Il *suffirait* pour cela de prendre un repère sur la surface lunaire, non loin du point par lequel le grand axe de la Lune vient percer sa surface et d'en mesurer les déplacements relatifs à l'aide d'un micromètre. Arago et Bouvard avaient choisi le cratère Manilius. Plus facile à dire qu'à faire cependant. En effet, pour se faire une idée de la difficulté, il convient de se rendre compte de la précision requise pour l'observation des taches lunaires. Pour une tache projetée au centre du disque lunaire, le rapport des angles sous-tendus par elle, au centre de la Lune et au centre de la Terre, est sensiblement égal au rapport de la distance Terre-Lune au rayon lunaire, soit 221. Une libration de 2' correspond donc à un déplacement angulaire relevé depuis la Terre de 120"/221 soit 0,54" ! Un micromètre ne permet pas une telle précision de mesure, c'est pourquoi en 1839, Bessel – grand astronome allemand de l'Observatoire de Koenigsberg – indique la démarche à suivre à l'aide d'un héliomètre (instrument qu'il avait fait construire par Fraunhofer pour la première mesure de la distance d'une étoile – sa *parallaxe stellaire* en fait - qu'il effectua en 1838, il s'agissait de l'étoile 61 Cygni) en proposant comme objet de mesure le cratère Mœsting A, tout fraîchement nommé dans le *Mappa Selenographica* publié par Beer et Mädler en 1837.

La libration physique fut finalement mise en évidence, même si les résultats ne s'accordaient pas d'un observateur à l'autre, de telle sorte que vers la fin du XIX^{e} siècle jusque dans les années soixante du XX^{e} siècle, sa mesure serait utilisée pour déterminer les propriétés inertielles principales de la Lune, pour faire simple, sa forme. La situation d'équilibre relatif dans lequel se trouve la Lune trouve donc son origine stabilisatrice dans le fait que la Lune est légèrement aplatie et plus allongée en direction de la Terre. Si la Lune était une sphère parfaitement homogène, il n'y aurait aucun effet stabilisateur et donc elle pourrait être en mesure de ne jamais nous montrer la même face. Lagrange avait donc conclu à la stabilité d'un tel équilibre.

3 Au fait, pourquoi la Lune nous montre-t-elle toujours la même face ?

Mais qu'en est-il de la première question du prix de 1764 ? celle concernant l'origine du synchronisme existant entre la rotation sidérale de la Lune d'une part et sa révolution autour de la Terre d'autre part. Lagrange produit une explication étonnante, d'autant plus étonnante qu'elle sera reprise par Laplace en 1796 jusqu'à Tisserand en 1898. La seule raison avancée est celle de la coïncidence qui remonte aux origines du système et à la libration physique qui permet la conservation de cet état. En d'autres termes, c'est le fait du hasard et non de la nécessité. La compréhension véritable de ce phénomène – appelé de nos jours « résonance spin-orbite » - réside dans les phénomènes dissipatifs à l'œuvre à l'intérieur de la Lune sous l'effet des marées terrestres qui sont déterminants pour l'évolution orbitale des satellites du Système solaire comme l'a montré pour la première fois Kaula en 1964. Pour Lagrange, Laplace, Tisserand, la mécanique céleste issue de la loi de l'attraction de Newton devait à elle seule être en mesure de tout expliquer, au ciel comme sur Terre. Là où elle ne le pouvait plus, alors ne restait que la pirouette de la coïncidence heureuse en guise d'explication ...

Ce n'est qu'au siècle suivant que Delaunay (directeur de l'Observatoire de Paris de 1870 à 1873 et grand spécialiste de la théorie du mouvement de la Lune) en 1865, sera le premier à mettre à profit la géophysique et la dissipation d'énergie par frottement des masses océaniques sur les fonds marins dus aux marées soulevées par la Lune pour expliquer simultanément le ralentissement de la rotation de la Terre et l'éloignement observé de la Lune. Le problème avait également été considéré par Laplace (à qui nous consacrerons notre prochain chapitre) qui avait trouvé une partie de l'origine au sein ... de la mécanique céleste en imputant pour cela les effets de l'excentricité de l'orbite lunaire. Une heureuse et confortable erreur de calcul lui avait fait voir cette cause comme responsable de l'intégralité de l'effet qui avait été observé dans l'orbite de la Lune. Quelle autre explication aurait-il produit sur l'éloignement de la Lune s'il n'avait pas commis cette erreur de calcul . . . ?