

Une brève Histoire de la mécanique céleste

Épisode 3 - Laplace et l'empire des résonances

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) est l'une des figures tutélaires de la mécanique céleste (discipline dont il a d'ailleurs forgé lui-même l'intitulé), parfois désigné comme le « Newton français ».

Il quitte sa Normandie natale (Beaumont-en-Auge) pour Paris à l'âge de 19 ans avec la volonté de s'attaquer aux grands problèmes liés aux mouvements des corps célestes, armé pour cela d'une foi inébranlable en la loi de la gravitation universelle de Newton. En la matière, l'essentiel de ses travaux sera accompli juste avant la Révolution française en une quinzaine d'années. Il se consacrera par la suite à les rassembler dans deux œuvres majeures, le *Traité de mécanique céleste* en cinq volumes publié entre 1799 et 1825, et l'*Exposition du système du Monde* en 1796.



FIGURE 1 – Pierre Simon de Laplace en 1775

1 Quand le jeune Laplace s'interroge sur les origines

D'avantage sans doute que ses contemporains, Laplace est animé de questionnements qui vont lui servir de fil rouge dans ses travaux.

« Les ellipses planétaires ont-elles toujours été et seront-elles toujours à peu près circulaires ? Quelques-unes des planètes n'ont-elles pas été originellement des comètes dont les orbites ont peu à peu approché du cercle, par l'attraction des autres planètes ? La diminution de l'obliquité de l'écliptique continuera-t-elle au point de faire coïncider l'écliptique avec l'équateur, ce qui produirait l'égalité constante des jours et des nuits sur toute la Terre ? »

L'origine des planètes, celle du Système solaire ainsi que sa temporalité l'intriguent. Le moindre corps du Système solaire est continuellement soumis à l'attraction gravitationnelle s'exerçant sur lui par l'ensemble des autres

corps. Sur le long terme, à quoi pourrait bien ressembler le Système solaire ? Dès son premier mémoire, établi en 1773 (*Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes*), Laplace va frapper un grand coup avec son premier résultat majeur, celui sur l'invariabilité des moyens mouvements planétaires et des grands axes. C'est un résultat majeur de la mécanique céleste connu sous le nom de théorème de Laplace. Il en déduit immédiatement que les planètes ne peuvent avoir une origine cométaire comme certains le pensaient encore à l'époque. Les demi-grands axes des orbites du Système solaire n'ont pas de variations séculaires, ils n'ont que des variations périodiques. Heureuse nouvelle, les planètes devraient ainsi rester sagement sur leurs orbites respectives sans le risque d'une collision ou d'une sortie future du Système solaire. Mais ce théorème reste-t-il vrai au bout d'un temps infini ? Malheureusement non, il ne restera vrai que pendant un peu moins de... deux siècles, avec la reformulation complète de la question de la « stabilité » à partir des années 60 du XX^e siècle, mais ceci est une autre histoire...

2 Le couple infernal des astronomes : Jupiter/Saturne

Revenons aux années 1780 où l'un des problèmes les plus obsédants depuis le début du XVII^e siècle, celui des mouvements de Jupiter et Saturne, va mettre Laplace sur l'une des caractéristiques les plus remarquables du Système solaire : les résonances. Du beau monde et pas des moindres s'y étaient frottés, Képler, Boulliau, Hévélius, Flamsteed, Newton (himself !), Halley, Jacques Cassini, Le Monnier, Lalande, Euler.

De quoi s'agissait-il ? On avait beau faire, impossible de faire coller la théorie aux observations à moins de rajouter une accélération dans le mouvement de Jupiter et une accélération négative (un ralentissement) dans le mouvement de Saturne. Arago dans son *Astronomie populaire* en 1857 résume parfaitement le problème avec sa grandiloquence proverbiale :

« Ainsi, chose singulière, notre système semblait destiné à perdre Saturne, son plus mystérieux ornement ; à voir cette planète, accompagnée de l'anneau et des sept satellites, s'enfoncer graduellement dans les régions in-

connues où l'œil armé des plus puissants télescopes n'a jamais pénétré. Jupiter, d'autre part, ce globe à côté duquel le nôtre est si peu de chose, serait allé, par une marche inverse, s'engloutir dans la matière incandescente du Soleil. »

En effet, en mécanique céleste, il existe une sorte de code de la route mis au point par Képler en 1621 qui explique que lorsqu'un corps céleste accélère sur son orbite alors la taille de celle-ci – et donc son demi-grand axe – diminue. Inversement, s'il ralentit sur son orbite, la taille de celle-ci croît. Était-ce là le destin inexorable de Jupiter et de Saturne ? Et Arago de renchéir, plus emphatique que jamais :

« On voyait avec douleur notre système planétaire marcher à sa ruine. L'Académie des sciences appela sur ces menaçantes perturbations l'attention des géomètres de tous les pays. Euler, Lagrange, descendirent dans l'arène. Jamais leur génie mathématique ne jeta un plus vif éclat ; toutefois, la question resta indécise. L'inutilité de pareils efforts semblait ne laisser de place qu'à la résignation, lorsque de deux coins obscurs, dédaignés des théories analytiques, l'auteur du traité de la Mécanique céleste fit surgir clairement les lois de ces grands phénomènes. »

Le problème - celui dit de « la grande inégalité de Jupiter et de Saturne » - est si troublant qu'il va faire l'objet de plusieurs prix proposés par l'Académie des sciences de Paris pour les années 1748, 1750 et 1752. Cet engouement fait suite à la présentation de l'astronome Pierre Charles Le Monnier en 1748 qui fait état de preuves que les mouvements de Jupiter et de Saturne étaient sujets à des inégalités détectables par l'observation et qu'il attribuait à l'attraction mutuelle des deux planètes sans pouvoir le démontrer. Si Euler gagna les prix de 1748 et 1752, cependant, l'Académie resta insatisfaite car Euler n'avait pas réussi à comprendre l'origine de cette grande inégalité. Cela faisait quelque peu désordre. La solution proposée et appliquée aux observations couvrant la période 1582- 1745 laissait des erreurs allant jusque 9' d'arc. La solution d'Euler pour le prix de 1752 ne fut publiée qu'en 1769, peu avant l'arrivée du jeune Laplace à Paris.

3 La place des résonances dans le Système solaire

La possibilité d'une accélération séculaire dans les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne était une idée passablement irritante pour Laplace qui venait de démontrer l'invariabilité des demi- grands axes des orbites planétaires. Dans son mémoire de 1773, il s'en était sorti temporairement en imputant ces accélérations à de possibles collisions cométaires ... pas géniales pour le coup. Fort de ce premier résultat et sous l'influence des travaux de Lagrange publiés entre 1779 et 1785 sur les variations périodiques et séculaires des orbites planétaires, Laplace obtient un second résultat fort important dont il se sert immédiatement pour réussir à démontrer ce que personne n'avait réussi à faire avant lui, le fait que

la grande inégalité de Jupiter et de Saturne résulte bel et bien de l'action mutuelle de ces deux planètes. Dans son mémoire du 23 novembre 1785 « sur les inégalités séculaires des planètes », Laplace énonce une propriété générale de l'action des planètes entre elles :

« Si l'on a égard qu'aux quantités qui ont de très longues périodes (sous-entendu sont écartés les termes périodiques ou constants au 2e ordre des masses et les termes au 3e ordre des masses), la somme des masses de chaque planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très peu près constante »,

que l'on traduit mathématiquement par la relation suivante, approximativement vraie pour les variations à longue période

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} = Cte$$

Laplace de s'empresse de conclure

« Il suit que les carrés des moyens mouvements étant réciproques aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se ralentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce que l'on observe. [...] Il est donc probable que les variations observées dans les mouvements de Jupiter et de Saturne sont un effet de leur action mutuelle ... il est donc naturel de penser qu'il existe dans leur théorie une inégalité considérable de ce genre, dont la période est fort longue et d'où résultent ces variations. »

Laplace répond par l'affirmative à la première question : l'étrange comportement de Jupiter et de Neptune est-il le fait d'une interaction mutuelle des deux planètes ? En outre, il le prouve de façon quantitative en retrouvant les résultats empiriquement incorporés par Halley dans ses tables du mouvement de Saturne et de Jupiter, à savoir que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très peu près, comme 7 à 3. Cette question réglée, Laplace suggère donc l'existence d'une inégalité à très longue période, encore inconnue, qui en serait la cause. On retrouve là possiblement la trace d'une intuition de Lagrange sur la possibilité de termes de perturbations qui pourraient devenir larges en raison de petits diviseurs. Laplace remarque alors la quasi- commensurabilité entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne qui seraient donc en résonance.

Pour comprendre la signification d'une résonance, il suffit de s'asseoir sur une balançoire et se laisser pousser. La balançoire est animée d'un mouvement périodique auquel une petite impulsion est donnée par le pousseur à chaque retour – donc avec la même fréquence que celle de la balançoire -, celle-ci suffit alors à amplifier l'amplitude du mouvement pour la faire monter de plus en plus haut. L'égalité entre ces deux fréquences constitue une résonance. Laplace énonce le résultat général suivant (quasiment un théorème) publié en 1786 dans sa *Théorie de Jupiter et de Saturne* (en deux parties les 10 mai et 15 juillet 1786) :

« Si les moyens mouvements de deux planètes, sans être exactement commensurables, approchent cepen-

dant beaucoup de l'être, il existe dans la théorie de leurs mouvements des inégalités d'une longue période, et qui, si elles ne sont pas connues, pourront donner lieu de penser que les mouvements de ces planètes sont assujettis à des équations séculaires. C'est ce qui a lieu relativement à Jupiter et à Saturne. »

Dans le cas du couple Jupiter/Saturne, nous avons la relation suivante sur les moyens mouvements :

$$2n_J - 5n_S = -4.071''/\text{jour}$$

avec $n_J = 299,128278''/\text{jour}$, $n_S = 120,454742''/\text{jour}$ selon la théorie TOP 2013 développée à l'IMCCE par Jean-Louis Simon et Pierre Bretagnon.

Lors de l'intégration des équations différentielles du mouvement, de petits diviseurs vont apparaître faisant naître des perturbations significatives à longue période, appelées « inégalités », dont la valeur est

$$\frac{2\pi}{2n_J - 5n_S}$$

« Leurs moyens mouvements sont tels que cinq fois celui de Saturne est à fort peu près égal à deux fois celui de Jupiter, et ce rapport produit dans les éléments de leurs orbites des variations considérables dont les périodes embrassent plus de neuf siècles et qui sont la source des grands dérangements observés par les astronomes. »

La période de la grande inégalité Jupiter/Saturne, selon la théorie TOP 2013, est de 883 ans – Laplace l'avait donnée à 900 ans environ. Elle a pour effet de déplacer Jupiter sur son orbite de 21' au maximum et de 49' en ce qui concerne Saturne, ce qui est considérable. Exit les accélérations séculaires empiriques introduites dans les tables de ces deux grosses planètes, place aux grandes inégalités à très longue période qui « *si elles ne sont pas connues, pourront donner lieu de penser que les mouvements de ces planètes sont assujettis à des équations séculaires* ».

La supposée accélération séculaire de ces deux planètes n'était donc qu'une apparence, illusion produite par cette inégalité à très longue période. A nouveau les observations viendront confirmer les nouveaux résultats théoriques de Laplace puisqu'en 1773, Lambert avait cherché à déterminer empiriquement la loi des erreurs des Tables de Halley sur 112 années d'observation. L'équation empirique qu'il trouva n'augmentait pas toujours avec les carrés des temps – il n'y avait donc pas

de vraie accélération séculaire – et en outre s'accordait remarquablement bien avec les résultats de la théorie de Laplace confirmant la justesse de celle-ci. À partir des nouveaux développements théoriques de Laplace, Jean-Baptiste Joseph Delambre établit de nouvelles tables du mouvement des deux grandes planètes. Il fit de même avec le mouvement de la planète Uranus – récemment découverte en 1781 par William Herschel – et les satellites de Jupiter.

Le même phénomène s'observe d'ailleurs dans le couple formé par les planètes Uranus et Neptune dont les moyens mouvements sont eux aussi en résonance par le biais de la quasi-commensurabilité suivante :

$$2n_U - n_N = 0.838''/\text{jour}$$

Pour Uranus $n_U = 42.230869''/\text{jour}$; pour Neptune $n_N = 21.534538''/\text{jour}$. La période est de 4233 ans avec une contribution maximale de $3102'' = 51.7'$.

Par la suite, Laplace va poursuivre dans cette voie qu'il a lui-même ouverte, en découvrant la résonance remarquable qui porte aujourd'hui son nom, celle qui existe entre les trois premiers satellites de Jupiter, Io, Europe et Ganymède et qui s'écrit :

$$n_{Io} - 3n_{Europe} + 2n_{Ganymède} = 0$$

relation célèbre qui s'exprime aussi en disant que la différence entre les moyens mouvements des premier et second satellites est exactement le double de celle entre les moyens mouvements du troisième et du second satellites. Une conséquence immédiate de cette relation est que les trois premiers satellites de Jupiter ne peuvent jamais être éclipsés à la fois par la planète Jupiter.

4 Épilogue ?

Les résonances présentes dans le Système solaire constituent ainsi l'un des chapitres les plus importants de la mécanique céleste. En 1968, un mathématicien russe en est même venu à dire que le Système solaire entier était en résonance complète, voyant là comme un nécessaire aboutissement de son évolution dynamique qui ne devait rien au hasard ou à la chance. Affirmation qui fit couler beaucoup d'encre.

Que les résonances aient un rôle particulier au sein du Système solaire est indéniable, mais que ce soit la manifestation d'une évolution inéluctable, c'est possible mais cela reste encore à démontrer.